

Buffonin neulat ja nuudelit

Atte Niskanen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2021

Tiivistelmä: Atte Niskanen, *Buffonin neulat ja nuudelit* (engl. *Buffon's needles and noodles*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 37 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2021.

Tässä tutkielmassa esitetään Buffonin neulaongelmalle kolme toisistaan hieman poikkeavaa todistusta ja käydään läpi, kuinka piitä voidaan arvioida tämän avulla. Tutkielmassa todistetaan myös kaksi Buffonin neulaongelman laajennusta ja tutustutaan Buffonin neulaongelmaan mittateoriassa. Lisäksi pohditaan kuinka Buffonin neulaongelman voi esitellä lukion eri moduuleilla, ja esitellään GeoGebra-appletti, jonka avulla neulaongelmaa voi simuloida.

Yksinkertaisuudessaan Buffonin neula tarkoittaa uhkapeliä, jossa pelaaja heittää neulan lattialle, joka sisältää yhdensuuntaisia suoria ja panostuksen kohteena on, osuuko neula suoraan. Tutkielman tavoitteena on laskea tarkka todennäköisyys tapahtumalle $P_n =$ neula leikkaa suoran. Tarkka todennäköisyys

$$P_n = \frac{2l}{\pi d},$$

missä l on neulan pituus ja d yhdensuuntaisten suorien välinen etäisyys, voidaan näyttää puhtaasti stokastisin menetelmin, geometriaa hyväksikäyttäen sekä odotusarvon lineaarisuuden avulla.

Ongelman laajennuksissa neulaa ei tiputeta lattialle, vaan laitetaan pallon sisään ja pallo tiputetaan lattialle. Tällöin todennäköisyys, että neula ylittää suoran muuttuu hieman ja yllättävästi todennäköisyydessä ei enää esiinny lukua π . Mittateoriassa Buffonin neula nousee esiin, kun tutkitaan Cantorin itsesimilaarisen joukon Favardin mitta

$$Fav(C_n).$$

Tällöin neulana toimii suora, johon joukko C_n projisoidaan.

Tutkielmassa käydään myös läpi, kuinka Buffonin neulaongelma voidaan pilkkoa pienempiin palasiin siten, että sitä on mahdollista kuljettaa mukana usealla lukion pitkän matematiikan moduulilla. Tällä tavoin opettaja pystyy motivoimaan opiskelijoita palamalla jo aikaisemmilta kursseilta tuttuun aiheeseen, joka todennäköisesti uhkapelinä herättää myös opiskelijoiden mielenkiinnon.

Avainsanat: Buffonin neula, Buffonin nuudeli, todennäköisyyslaskenta, geometri-
nen todennäköisyys, opetussuunnitelma, GeoGebra, Cantorin joukko, Favardin mitta,
pii

Sisältö

Johdanto	1
1 Buffonin neula	3
1.1 Stokastinen todistus	4
1.2 Geometrinen todennäköisyys	5
1.3 Odotusarvo	7
2 Piin arvioiminen	13
2.1 Lazzarinin arvio	14
3 Buffon lukiossa	16
3.1 Moduulit	16
3.1.1 Geometria	16
3.1.2 Funktiot ja yhtälöt	17
3.1.3 Integraalilaskenta	18
3.1.4 Tilastot ja todennäköisyys	18
3.2 GeoGebra-appletti	19
4 Buffonin neulan laajennuksia	23
4.1 Buffonin pallo-ongelma	23
4.2 Nuudeli pallossa	26
5 Favardin mitta ja Buffonin neula	30
Kirjallisuutta	36

Johdanto

Uhkapelit ovat kiinnostaneet ihmisiä tuhansia vuosia, ja matemaatikot ovat laskeneet todennäköisyyksiä erilaisille uhkapeleille vuosisatojen ajan. Georges-Louis Leclerc, Buffonin kreivi, julkaisi vuonna 1777 todennäköisyyslaskentaan ja uhkapelaamiseen liittyvän matemaattisen ongelman ja onnistui myös todistamaan sen. Tämän tutkielman tarkoitus on esitellä Buffonin neulaongelma ja todistaa se, ja lisäksi esittää laajennuksia ongelmalle sekä yhdistää ongelma lukion opetussuunnitelmaan. Ongelmaa voi lähestyä puhtaasti stokastisin menetelmin tai hyödyntää geometriaa apuna. 1800-luvun loppupuolella Joseph-Émile Barbier lähestyi ongelmaa uudella tavalla. Hän hyödynsi odotusarvon lineaarisuutta todistuksessaan ja onnistui näin välttämään integraalilaskennan.

Piitä on arvioitu vuosien saatossa usein eri keinoin. Tutkielman toisessa luvussa käydään läpi kuinka 1800- ja 1900-luvuilla useat matemaatikot arvioivat piitä Buffonin neulaongelman avulla. Luvussa tulee myös ilmi, että on yleisesti hyväksyttävää sanoa, että Buffonin neula edustaa ensimmäistä Monte Carlo -simulaatiota matematiikan historiassa. Mario Lazzarini onnistui arvioimaan piitä epäilyttävän tarkasti Buffonin neulan avulla, ja toisessa luvussa käydään läpi, miten tämä mahdollisesti onnistui.

Luku 3 käsittelee lukion opetussuunnitelmaa, ja kuinka Buffonin neulan voi esitellä eri moduuleilla. Buffonin neula on erinomainen esimerkki ongelmasta, jonka voi pilkkoa pienempiin paloihin ja kuljettaa mukana usealla eri moduulilla. Opettajan tehtävä on motivoida opiskelijoita ja uhkapelit herättävät helposti opiskelijoiden mielenkiinnon. Luvussa 3 käydään myös hieman läpi dynaamisen geometrian ohjelmista GeoGebra, jota lukiolaiset käyttävät. Internetistä löytyy useita erilaisia GeoGebra-appletteja, jotka simuloivat Buffonin neulaongelmaa. Luvussa 3 esitellään yksi valmis appletti ja käydään läpi, kuinka se on saatu simuloimaan neuojen tiputusta oikealla tavalla.

Buffonin neulasta on tehty lukematon määrä erilaisia laajennuksia. Tutkielman neljäs luku käsittelee kahta laajennusta, joissa lattialle tiputetaan neulan tai nuudelin sijasta pallo, jonka sisällä on neula tai nuudeli. Todistuksista huomataan, että todennäköisyydessä ei esiinny enää lukua π ja näin ollen näiden laajennusten avulla piitä ei onnistuta arvioimaan. Lisäksi on hieman yllättävää, että kun neulan pituus on yhtä suuri kuin tason suorien etäisyys, todennäköisyys on todella yksinkertainen.

Tutkielman viimeisessä luvussa, luvussa 5 siirrytään hieman syvemmälle matemaatiikkaan. Luku 5 käsittelee Favardin mittaongelmaa, joka tunnetaan myös Buffonin neulaongelmana. Favardin mittaongelmassa tutkitaan Cantorin itsesimilaarisen joukon C_n lineaariprojektioiden keskimääräistä mitta. Ongelman ratkaisu on edistynyt viimeisten vuosien aikana ja sen ratkaiseminen on paljastanut yhteyksiä useisiin eri matemati-

kan aloihin. Tässä tutkielmassa esitetään arvio Cantorin nelikulmaisen joukon (The four-corner Cantor set) \mathcal{K}_n iteraatioiden lineaariprojektion mitan alarajaksi.

Luku 1

Buffonin neula

Vuonna 1733 nuori Georges-Louis Leclerc (1707-1788), joka tunnetaan myös Buffonin kreivinä tai Buffonina, pyrki Ranskan tiedeakatemiaan Pariisissa. Hänen hakemuksensa sisälsi paperin "*Mémoire sur le jeu de franc-carreau*", joka vastaanotettiin tiedeyhteisössä hyvin. Paperia ei kuitenkaan voitu julkistaa, sillä Buffon ei vielä kuulunut akatemiaan. Paperi kuitenkin mahdollisti Buffonin pääsyn akatemian jäseneksi seuraavana vuonna. [14]

Buffon säilytti paperinsa julkaisemattomana aina vuoteen 1777 asti. Kirjoittaessaan esseetä "*Essai d'arithmétique morale*", hän sisällytti vanhat tekstinsä uuteen teokseen. Tunnetuimmassa teoksessaan "*Supplément à l'histoire naturelle*" Buffon esittää ja todistaa (tosin ei aina oikein) kolme matemaattista ongelmaa, jotka käsittelevät todennäköisyyksiä. Nämä ongelmat ovat tyhjän laatan ongelma, neulaongelma ja ruudukkoongelma. [14]

Vapaasti suomennettuna Buffon kirjoittaa neulaongelmasta teoksessaan "*Histoire naturelle*" seuraavasti:

Oletan, että huoneen sisällä, jossa parketti on yksinkertaisesti jaettu yhdensuuntaisilla saumoilla, yksi heittää tikun ilmaan ja yksi pelaaja panostaa, että tikku ei ylitä yhtäkään lattian saumoista, kun taas toinen pelaaja panostaa, että se ylittää yhden saumoista. Joku kerää jokaiselta pelaajalta panokset. (Tätä peliä voisi pelata myös shakkilaudalla neulan tai päättömän nastan avulla.)[7]

Tämä vahvistaa teoriaa, että Buffonin tärkein motivaatio ratkaista esittämänsä ongelmat, oli pyrkimys laskea todennäköisyyksiä uhkapelaajille. Muotoillaan seuraavaksi neulaongelma matemaattiseksi lauseeksi.

Lause 1.1. *Neula, jonka pituus on l , pudotetaan tasolle, jossa on yhdensuuntaisia suorja, joiden etäisyys on d . Todennäköisyys, P_n , että neula leikkaa ainakin yhtä suoraa on*

$$P_n = \begin{cases} \frac{2l}{\pi d}, & l \leq d \\ \frac{2l}{\pi d} - \frac{2}{\pi d}(\sqrt{l^2 - d^2} + d \sin^{-1}(\frac{d}{l})) + 1, & l \geq d. \end{cases}$$

Seuraavissa alaluvuissa esitetään kolme erilaista todistusta Lauseelle 1.1.

1.1 Stokastinen todistus

Käydään aluksi läpi oletukset, jotka pätevät jokaiselle neulan tiputukselle. Jokainen tiputuskohta väliltä $[0, d]$ on yhtä todennäköinen, eikä neula voi tipahtaa välin ulkopuolelle. Jokainen kulma θ on yhtä todennäköinen väliltä $[0, \pi]$ ja tiputukset ovat toisistaan riippumattomia. Neulan paikka vastaa tason pisteitä, ja symmetrian nojalla voidaan tarkastella välejä $[0, d]$ ja $[0, \pi]$, joista ensimmäinen kertoo neulan alemman kärjen sijainnin ja jälkimmäinen neulan kulman. Tällöin todennäköisyys voidaan laskea integroimalla tiheysfunktioita.

Todistus. Oletetaan, että suorat kulkevat itä-länsi suunnassa tasolla. Olkoon y etäisyys neulan alemmasta kärjestä ylempään suoraan ja θ neulan ja suoran välinen kulma vastapäivään (katso kuva 1.1). Neulan kärjen etäisyys suoraan on enintään d ja kaikki etäisyyden ovat yhtä todennäköisiä, joten y :n tiheysfunktio välillä $[0, d]$ on

$$\begin{cases} \frac{1}{d}, & \text{kun } 0 \leq y \leq d \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Vastaavasti kulman θ tiheysfunktio välillä $[0, \pi]$ on

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{kun } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Satunnaismuuttujat y ja θ ovat riippumattomia, joten tiheysfunktioiden yhteisjakauma on

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi d}, & \text{kun } 0 \leq y \leq d \text{ ja } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Neula leikkaa suoran, jos $y \leq l \sin \theta$. Jaetaan tilanne kahteen tapaukseen.

1° Lyhyt neula: Oletetaan, että $l \leq d$. Nyt ollaan kiinnostuneita niistä neulan asennoista, joissa $y \leq l \sin \theta$. Tällöin integroimalla yhdistettyä tiheysfunktiota todennäköisyydeksi saadaan

$$P_n = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{y=0}^{l \sin \theta} \frac{1}{\pi d} dy d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_0^{l \sin \theta} \frac{1}{\pi d} y \right) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{l \sin \theta}{\pi d} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{-l \cos \theta}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}.$$

2° Pitkä neula: Oletetaan, että $l > d$. Nyt integroimalla yhdistettyä tiheysfunktiota todennäköisyydeksi saadaan

$$P_n = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{y=0}^{m(\theta)} \frac{1}{\pi d} dy d\theta, \quad (1.1)$$

missä $m(\theta)$ on minimi $[l \sin \theta, d]$.

Sinifunktion jaksollisuuden nojalla $m(\theta) = l \sin \theta$, kun

$$0 \leq \theta \leq \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right)$$

ja

$$\pi - \sin^{-1}\left(\frac{d}{l}\right) \leq \theta \leq \pi.$$

Lisäksi $m(\theta) = d$, kun

$$\sin^{-1}\left(\frac{d}{l}\right) \leq \theta \leq \pi - \sin^{-1}\left(\frac{d}{l}\right).$$

Näin saadaan uudet integroimisrajat ja yhtälö (1.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$P_n = \frac{1}{\pi d} \left(\int_0^{\sin^{-1}(\frac{d}{l})} l \sin \theta d\theta + \int_{\sin^{-1}(\frac{d}{l})}^{\pi - \sin^{-1}(\frac{d}{l})} d d\theta + \int_{\pi - \sin^{-1}(\frac{d}{l})}^{\pi} l \sin \theta d\theta \right).$$

Suorittamalla integroinnin, jonka yksityiskohdat jätetään lukijalle, todennäköisyydeksi saadaan

$$P_n = \frac{2l}{\pi d} - \frac{2}{\pi d} \left(\sqrt{l^2 - d^2} + d \sin^{-1}\left(\frac{d}{l}\right) \right) + 1.$$

Näin ollen todennäköisyys, P_n , että neula leikkaa ainakin yhtä suoraa on

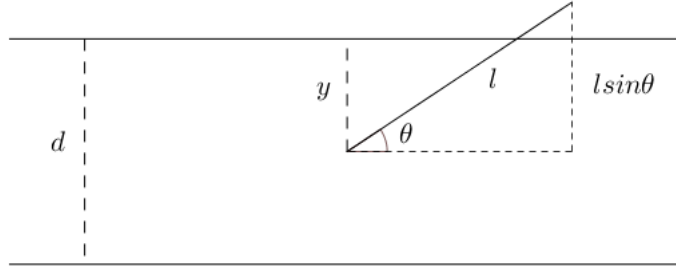
$$P_n = \begin{cases} \frac{2l}{\pi d}, & l \leq d \\ \frac{2l}{\pi d} - \frac{2}{\pi d} (\sqrt{l^2 - d^2} + d \sin^{-1}(\frac{d}{l})) + 1, & l \geq d. \end{cases}$$

□

1.2 Geometrinen todennäköisyys

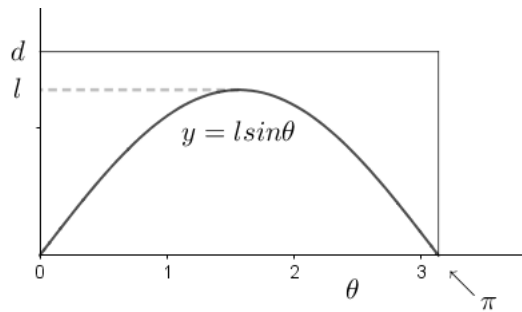
Buffon onnistui ratkaisemaan ongelman lyhyen neulan tapauksessa, $l \leq d$. Todistus vaati geometrista lähestymistä ja integraalilaskentaa ensimmäistä kertaa todennäköisyyslaskennan historiassa. Ei ole täysin selvää, kuinka Buffon onnistui laskemaan integraalit, sillä hänen matemaattiset taitonsa olivat rajalliset. Seuraavaksi esitetään todistus Lauseelle 1.1, joka pohjautuu geometriseen todennäköisyyslaskentaan ja mukailee lähdeä [6]. Koska alaluvussa 1.1 esitetyt oletukset neulan tiputtamiselle ovat edelleen voimassa, geometrinen todennäköisyyslaskenta helpottaa laskuja.

Todistus. Olkoon y etäisyys neulan alemmasta kärjestä ylempään suoraan ja θ neulan ja suoran välinen kulma. Tällöin $0 \leq y \leq d$ ja $0 \leq \theta \leq \pi$. Etäisyys neulan ylemmästä kärjestä alempaan on $l \sin \theta$, ja jotta neula leikkaa suoraa on oltava $l \sin \theta \geq y$.



Kuva 1.1: Neulan tiputus

Oletetaan ensin, että $l \leq d$. Kuva 1.2 näyttää vaihetilan neulan pudottamisesta ja käyrän $y = l \sin \theta$.

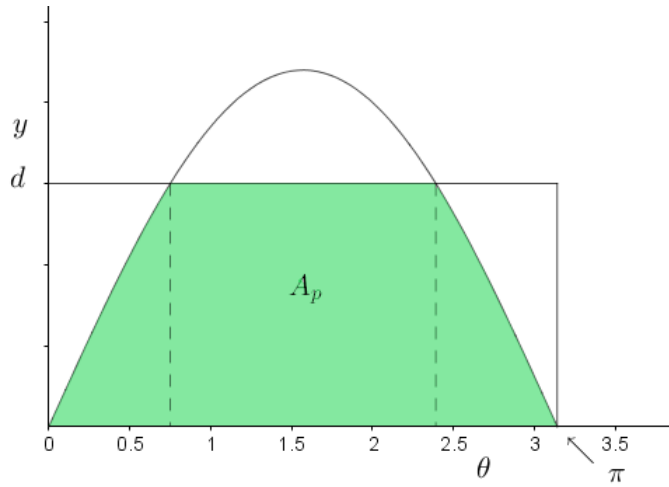


Kuva 1.2: Vaihekuva lyhyestä neulasta

Neula leikkaa suoraa kaikissa käyrän $y = l \sin \theta$ pisteissä, sekä kaikissa pisteissä käyrän alapuolella. Nyt voidaan laskea leikkauksen todennäköisyys, P_n , käyttämällä geometrista todennäköisyyttä

$$P_n = \frac{\int_0^{\pi} l \sin \theta d\theta}{\pi d} = \frac{\int_0^{\pi} -l \cos \theta}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Oletetaan nyt, että $l \geq d$. Tällöin on mahdollista, että $l \sin \theta \geq d$ joten vaihetilan kuvassa 1.3 täytyy ottaa huomioon suorakaiteen ja käyrän päällekkäisyys, ja laskea katkaistun käyrän rajaama pinta-ala.



Kuva 1.3: Vaihekuva pitkstä neulasta

Käyrän $y = l \sin \theta$ ja suoran d leikkauspisteet ovat $l \sin \theta = d$, tai siis sinifunktion jaksollisuuden nojalla, kun $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right)$ ja $\theta = \pi - \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right)$. Näin ollen katkaistun käyrän rajaama pinta-ala lasketaan

$$\begin{aligned} A_p &= 2 \int_0^{\sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right)} l \sin \theta d\theta + \left(\left(\pi - \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right) \right) - \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right) \right) d \\ &= 2l - 2\sqrt{l^2 - d^2} - 2d \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right) + \pi d. \end{aligned}$$

Geometrisen todennäköisyyden nojalla todennäköisyydeksi saadaan

$$P_n = \frac{A_p}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d} - \frac{2}{\pi d} \left(\sqrt{l^2 - d^2} + d \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right) \right) + 1.$$

Siispä todennäköisyys, P_n , että neula leikkaa ainakin yhtä suoraa on

$$P_n = \begin{cases} \frac{2l}{\pi d}, & l \leq d \\ \frac{2l}{\pi d} - \frac{2}{\pi d} \left(\sqrt{l^2 - d^2} + d \sin^{-1} \left(\frac{d}{l} \right) \right) + 1, & l \geq d. \end{cases}$$

□

1.3 Odotusarvo

Joseph-Émile Barbier (1839-1889) todisti vuonna 1860 julkaisemassaan paperissa Lauseen 1.1 käyttämättä integraaleja. Hän lähestyi ongelmaa tiputtelemalla lattialle

erilaisia neuvoja.[11] Tämän kaltaista lähestymistapaa voidaan pitää Buffonin neuvaongelman laajenuksena, ja tilannetta, jossa lattialle tiputetaan eri muotoisia neuvoja kutsutaan Buffonin nuudeliksi. [11] [16] Todistus pohjautuu odotusarvon lineaarisuuteen, joten määritellään ensin diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo ja todistetaan sen lineaarisuus ja monotonisuus [5].

Määritelmä 1.2. *Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja ja $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ sen kaikkien arvojen joukko. Jokaisen arvon x_i esiintymistodennäköisyyttä merkitään p_1, p_2, \dots . Olkoon*

$$f(x_i) = P(X = x_i), x_i \in S$$

satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio. Tällöin satunnaismuuttujan X ja sitä vastaavan todennäköisyysjakauman odotusarvo on reaalityyppinen

$$E(X) = \sum_{x_i \in S} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

mikäli sarja suppenee itseisesti.

Lause 1.3. *Olkoon X ja Y positiivisia satunnaismuuttujia ja $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tällöin*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Todistus. Olkoon X ja Y positiivisia satunnaismuuttujia ja $a, b \in \mathbb{R}^+$ Tällöin

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (ax_i + by_j) P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i P(X = x_i, Y = y_j) + b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) + b \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(Y = y_j) \\ &= aE(X) + bE(Y). \end{aligned}$$

□

Lause 1.4. *Olkoon X ja Y positiivisia yksinkertaisia diskreettejä satunnaismuuttujia siten, että $X \geq Y$. Tällöin*

$$E(X) \geq E(Y).$$

Todistus. Koska $X \geq Y$, niin $X - Y \geq 0$. Lineaarisuuden nojalla $E(X) - E(Y) = E(X - Y)$. Nyt

$$E(X - Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - y_j) P(X = x_i, Y = y_j) \geq 0,$$

koska $x_i - y_j \geq 0$ kaikilla i, j ja $P(X = x_i, Y = y_j) \geq 0$.

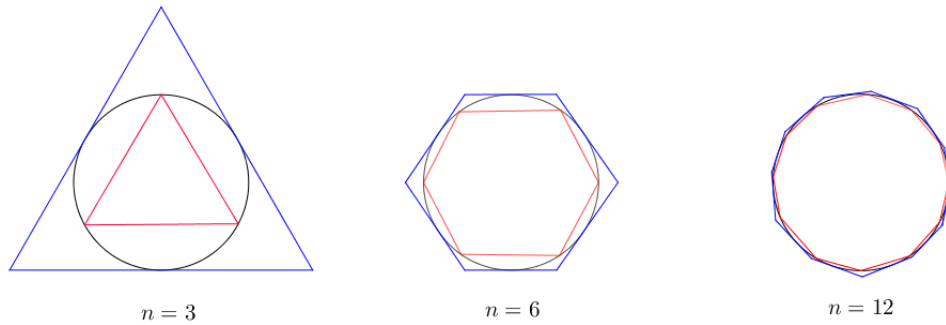
□

Todistuksessa täytyy arvioida ympyrän kehän pituutta ylhäältä sekä alhaalta. Arkhimedes teki tämän jo noin 200 vuotta eaa., kun hän löysi yksinkertaisen tavan arvioida lukua π . Käydään läpi idea Arkhimedeen tavasta arvioida lukua π , jotta on selvää, miten ympyrän sisälle ja ulkopuolelle voidaan piirtää monikulmiot siten, että niiden pituus lähestyy ympyrän kehän pituutta.

Perusidea Arkhimedeen idealle on melko yksinkertainen. Olkoon Y ympyrä ja merkitään sen pituutta l_Y . Ympyrän ympärille voidaan piirtää n sivuinen monikulmio ympyrän tangenttien avulla. Merkitään ympyrän ympäri piirrettyä monikulmiota Y^n ja sen pituutta l_{Y^n} . Ympyrän sisäpuolelle voidaan piirtää monikulmio ympyrän säteen avulla. Merkitään ympyrän sisäpuolelle piirrettyä monikulmiota Y_n ja sen pituutta l_{Y_n} . Tällöin on selvää, että

$$l_{Y_n} < l_Y < l_{Y^n}.$$

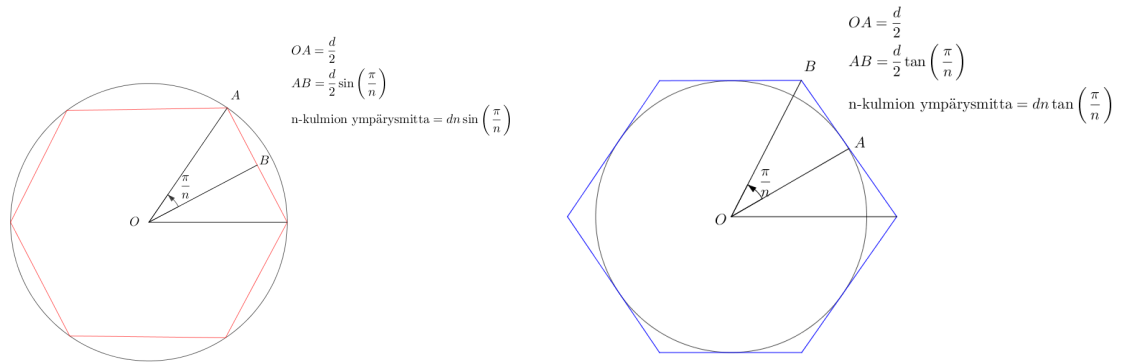
Kun n kasvaa, sekä l_{Y_n} että l_{Y^n} lähestyy pituutta l_Y . Kuvassa 1.4 on tilanteet, kun $n = 3$, $n = 6$ ja $n = 12$. Kuvasta on selvää, että 12-sivuisen monikulmion ympärysmitta on lähimpänä ympyrän kehän pituutta.



Kuva 1.4: Ympyrän sisä- ja ulkopuolelle piirretyt n -sivuiset monikulmiot

Siispä jos onnistutaan laskemaan n -sivuisen monikulmion kehän pituus, pystytään arvioimaan lukua π yksinkertaisesti valitsemalla luku n suureksi. Monikulmion kehän pituus voidaan laskea käyttämällä trigonometriaa ja Pythagoraan lausetta. Kuvasta 1.5 nähdään, että d -säteisen ympyrän sisä- ja ulkopuolelle piirrettyjen monikulmioiden pituudet ovat

$$l_{Y_n} = dn \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ ja } l_{Y^n} = dn \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$



Kuva 1.5: Monikulmion kehän pituus

Kun valitaan $d = 1$ ja $n = 24576$, saadaan tunnettu piin rationaaliarvio $\frac{355}{113}$, joka on noin 3,1415929. Näytetään vielä, että $n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow \pi$ ja $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow \pi$ kun $n \rightarrow \infty$. Koska $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, niin

$$n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \rightarrow \pi, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

ja

$$n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \rightarrow \pi, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Nyt on keino valita ympyrän ympärille ja sisäpuolelle piirretty monikulmio siten, että niiden ympärysmittat lähestyvät lukua $d\pi$, joten voidaan siirtyä käymään läpi Barbierin tapa todistaa Buffonin neulaongelma lyhyen neulan tapauksessa.

Todistus. Jos tiputetaan mikä tahansa neula, niin odotusarvo leikkauksille on

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 \dots,$$

missä p_1 on todennäköisyys sille, että neula leikkaa suoraa kerran, p_2 on todennäköisyys, että neula leikkaa suoraa kahdesti, p_3 on todennäköisyys kolmelle leikkaukselle ja niin edelleen. Tällöin todennäköisyys ainakin yhdelle leikkaukselle on

$$P_n = p_1 + p_2 + p_3 \dots$$

Toisaalta, jos neula on lyhyt, niin todennäköisyys sille, että neula leikkaa suoraa kahdesti tai useammin on nolla, $p_2 = p_3 = \dots = 0$. Näin ollen $E = P_n$, eli haluttu todennäköisyys on leikkausten odotusarvo.

Olkkoon $E(l)$ leikkauksien lukumäärän odotusarvo, kun tiputetaan suora neula, jonka pituus on l . Voidaan olettaa, että neulan pituus voidaan jakaa osiin $l = x + y$, missä $x \leq d$ ja $y \leq d$ ja x on neulan "etuosa" ja y on neulan "takaosa". Kun tarkastellaan näitä

osia erikseen, Lauseen 1.3 nojalla saadaan $E(x + y) = E(x) + E(y)$, sillä leikkaukset muodostuvat "etuosan" ja "takaosan" leikkauksista.

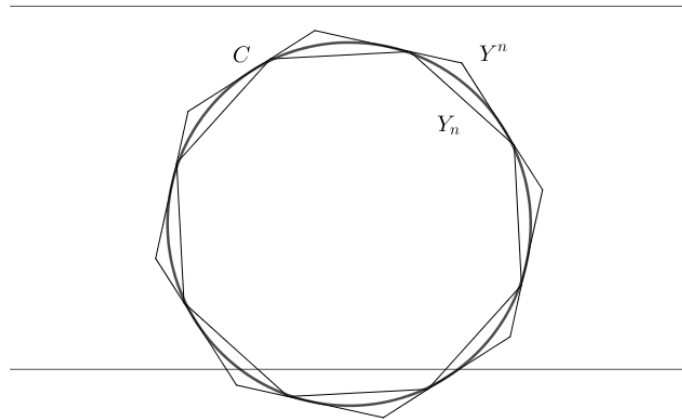
Lisäksi Lauseen 1.3 nojalla saadaan $E(x) = E(1x) = xE(1)$, ja merkitään $E(1) = c$. Tiputetaan nyt "monikulmioinen" neula, jonka kokonaispituus on l ja joka sisältää vain suoria osia. Tällöin leikkausten lukumäärä on summa suorien osien muodostamista leikkauksista ja näin ollen Lauseen 1.3 nojalla odotusarvo on jälleen

$$E(l) = cl.$$

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin vakiota c .

Avain ratkaisuun on tarkastella neulaa, joka on ympyrä C , jonka halkaisija on d ja jonka pituus on πd . Tällöin neula C leikkaa suoria aina täsmälleen kahdesti. Ympyrää voidaan arvioida monikulmioilla. Kuvitellaan, että ympyrän muotoisen neulan C kanssa tiputetaan sekä sisäänpiirretty monikulmio Y_n että ympäripiirretty monikulmio Y^n . Jokainen suora, joka leikkaa monikulmiota Y_n leikkaa myös ympyrää C ja jos suora leikkaa ympyrää C , niin se leikkaa myös monikulmiota Y^n . Näin ollen leikkausten odotusarvot toteuttavat epäyhtälön

$$E(Y_n) \leq E(l) \leq E(Y^n).$$



Kuva 1.6: Monikulmioiset neulat

Koska Y_n ja Y^n ovat monikulmioita, leikkausten lukumäärän odotusarvo on c kertaa pituus. Lisäksi ympyrän C leikkausten lukumäärän odotusarvo on 2, joten

$$cl_{Y_n} \leq 2 \leq cl_{Y^n}. \tag{1.2}$$

Sekä Y_n että Y^n lähestyvät ympyrää C , kun $n \rightarrow \infty$. Erityisesti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_{Y_n} = d\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{Y^n}$$

ja näin ollen kun $n \rightarrow \infty$, niin epäyhtälö (1.2) saadaan muotoon

$$cd\pi \leq 2 \leq cd\pi.$$

Siispä $c = \frac{2}{\pi d}$ ja $E(l) = \frac{2l}{\pi d} = P_n$.

□

Luku 2

Piin arvioiminen

Kuten luvusta 1 huomataan, tarkka todennäköisyys suoran leikkaukselle on $\frac{2l}{\pi d}$. Näin ollen päädytään merkittävään tulokseen

$$\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{L}{T},$$

missä L on leikkausten lukumäärä ja T heittojen lukumäärä, ja pystytään kokeellisesti arvioimaan lukua π .

Historian saatossa useat eri henkilöt ovat arvioineet kyseisellä metodilla piitä. Taulukkoon 2.1 on koottu vuosilta 1850-1960 kokeita, joissa lukua π on arvioitu. Kuten aiemmin on mainittu, Buffonin tavoite oli laskea todennäköisyyksiä uhkapelaa-jille. Joissakin lähteissä väitetään, että Buffonin pyrkimys oli laskea π , mutta asiasta ei olla täysin yhtä mieltä [2]. On kuitenkin yleisesti hyväksyttävää sanoa, että Buffonin neula edustaa ensimmäistä Monte Carlo -simulaatiota matematiikan historiassa, sillä piin ratkaisemiseksi tai ainakin likiarvon löytämiseksi hyväksikäytetään todennäköisyyslaskentaa ja toistoja.[2]

Taulukosta 2.1 nousee esille italialaisen matemaatikon Mario Lazzarinin koe, jossa hän onnistui arvioimaan piitä kuuden desimaalin tarkkuudella. Huomiota herättää myös, että Smith ja De Morgan ovat kirjanneet puolikkaat leikkaukset. Lähteistä [6] ja [10] ei selviä, kuinka tämä on ollut mahdollista. Seuraavassa alaluvussa tarkastellaan hieman tarkemmin, miten ja miksi Lazzarini onnistui arvioimaan piitä niin tarkasti.

Taulukko 2.1: T on heittojen lukumäärä ja L on leikkausten lukumäärä.

Nimi	Vuosi	l/d	T	L	$\sim \pi$
Wolf	1850	0,8	5000	2532	3,1596
Smith	1855	0,6	3204	1218,5	3,1553
De Morgan	1860	1,0	600	382,5	3,137
Fox	1860	0,75	1030	489	3,1595
Lazzarini	1901	0,83	3408	1808	3,1415929
Reina	1925	0,5419	2520	869	3,1795
Gridgeman	1960	0,7857	2	1	3,143

2.1 Lazzarinin arvio

Vuonna 1901 Lazzarini julkaisi tuloksensa lehdessä *Periodico di Matematica* otsikolla *Un applicazione del calcolo della probabilità alla ricerca sperimentale di un valor approssimato di π* . Neljän sivun mittainen artikkeli toi Lazzarinille kuuluisuutta, mutta loi myös julkaisuja, joissa epäiltiin ja suoranaisesti vastustettiin Lazzarinin koetta. Gridgemanin artikkeli antoi synn epäillä Lazzarinin tuloksia, Tim O’Beirnen kirja *Puzzles ad Paradoxes* (1965) vahvisti epäilyksiä ja Lee Badgerin analyysi *Lazzarini’s lucky approximation of π* *Mathematics Magazine* -lehdessä vuonna 1994 löi viimeisen naulan Lazzarinin arkkuun. [6]

Tarkoitus ei ole tyrmätä Lazzarinin koetta täydellisesti, mutta muutama yksityiskohda täytyy nostaa esille. Itse asiassa, Lazzarini julkaisi taulukoituja tuloksia tämän kaltaisista kokeista, ja taulukossa 2.2 on esitetty Lazzarinin saamat tulokset, joissa $l = 2, 5$ cm ja $d = 3$ cm. [10][6]

Taulukko 2.2: Lazzarinin julkaisema aineisto

Heittojen lukumäärä T	Leikkausten lukumäärä L
100	53
200	107
1000	524
2000	1060
3000	1591
3408	1808
4000	2122

Taulukosta 2.2 pistää silmään toiseksi viimeinen tulos, 3408 heittoa ja 1808 leikkausta. Miksi Lazzarini on pysähtynyt juuri tähän lukuun, eikä esimerkiksi mukavan pyöreään 3500 toistoon? Toinen asia, joka herättää huomion on taulukossa 2.1 esitetty Lazzarinin

likiarvo piille, 3,1415929. Tämä likiarvo sattuu olemaan tismalleen sama, kuin tunnettu rationaalilukuaprosimaatio piille, $\frac{355}{113}$, joka tunnettiin jo 400-luvulla.

Ehkä Lazzarini on huijannut. Seurataan Badgerin ja O'Beirnen käyttämää takaisinmallinustekniikkaa. Koska $\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{l}{T}$, niin $\pi \approx \frac{2lT}{Ld}$. Nyt kun käytetään luvun π rationaalilukuestimaattia, saadaan

$$\frac{2lT}{Ld} \approx \frac{355}{113} = \frac{5 \cdot 71}{113} = \frac{5 \cdot 71 \cdot k}{113 \cdot k} \text{ kaikille } k.$$

Looginen valinta on $2l = 5$, josta seuraa, että $l = \frac{5}{2}$ ja koska $l < d$, niin looginen valinta on nyt $d = 3$ ja tällöin $\frac{T}{L} \approx \frac{213k}{113k}$. Jos edellytetään, että T ja L valitaan siten, että niiden suhde on $\frac{213}{113}$, valitsemalla $k = 16$ päädytään yllättäen tilanteseen

$$\frac{T}{L} \approx \frac{3408}{1808}.$$

Ehkä kaikki onkin ollut vain hyvää tuuria. Kun $\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{l}{T}$ ja $\frac{l}{d} = \frac{5}{6}$, niin saadaan $\frac{5}{3\pi} \approx \frac{l}{T}$, ja näin ollen $\pi \approx \frac{5T}{3L}$. O'Beirne huomauttaa, että ennen viimeistä heittoa, kun $T = 3407$ ja $L = 1807$ tai $L = 1808$, piin likiarvot olisivat olleet $\pi \approx 3,142\dots$ tai $\pi \approx 3,140\dots$, joissa likiarvo menee pieleen kolmannessa desimaalissa. Vastaavasti Badger huomauttaa, että jos leikkauksien lukumäärä olisi 3408 toistossa ollut $L = 1807$ tai $L = 1809$, niin piin likiarvot olisivat olleet $\pi \approx 3,143\dots$ tai $\pi \approx 3,139\dots$, joten on myönnettävä, että koe näyttää loppuneen melkoiseen onnenpotkuun.

Tutkitaan vielä hieman tarkemmin taulukon 2.2 muita tuloksia. Edelleen, kun $\frac{l}{d} = \frac{5}{6}$, todennäköisyys leikkaukselle on $\frac{2l}{\pi d} = \frac{5}{3\pi}$ ja näin ollen keskimäärin odotettu leikkausten lukumäärä on $\frac{5}{3\pi} \cdot T$. Taulukossa 2.3 on esitetty Lazzarinin julkaisema aineisto ja sinne on lisätty leikkausten odotusarvo. Taulukko 2.3 näyttää aivan liian tarkalta, ja tilastollinen testaaminen tukee tätä havaintoa. Todennäköisyys, että näin tapahtuu, on alle 0,00003. Lukija päättäköön, kävikö Lazzarinilla vain erinomainen tuuri, vai käyttikö hän vilppiä tehdessään koetta.

Taulukko 2.3: Lazzarinin julkaisema aineisto ja leikkausten odotusarvo

Heittojen lukumäärä T	Leikkausten lukumäärä L	Leikkausten odotusarvo
100	53	53,05
200	107	106,10
1000	524	530,52
2000	1060	1061,03
3000	1591	1591,55
3408	1808	1808,00
4000	2122	2122,07

Luku 3

Buffon lukiossa

Matematiikan tehtävä lukiossa on antaa opiskelijalle valmiudet ymmärtää, soveltaa ja tuottaa sekä arvioida matemaattisesti esitettyä tietoa. Lisäksi opetuksen tehtävä on perehdyttää opiskelija matematiikan peruskäsitteisiin, perusideoihin ja rakenteisiin. Tavoitteena on myös kehittää laskemisen, luovan ajattelun sekä ilmiöiden mallintamisen, ennustamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Matematiikan opetuksessa pyritään tutkimaan arkielämän ja matematiikan välisiä yhteyksiä, hyödynnetään mahdollisuuksia vahvistaa opiskelijan kiinnostusta sekä kannustetaan opiskelijaa kokeiluihin ja sinnikkääseen työskentelyyn.[13]

Opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista, joita voidaan ratkoa matematiikan avulla.[13] Tämä ei kuitenkaan aina ole itsestään selvää. Buffonin neula on erinomainen ongelma herättää opiskelijoiden mielenkiinto usealla eri moduulilla.

Yksinkertainen uhkapeli voidaan pilkkoa pienemmiksi matemaattisiksi paloiksi, jotka voidaan esitellä eri moduuleilla. Yhtä ja samaa ongelmaa voidaan tarkastella usealla moduulilla hieman eri näkökulmista, jolloin opiskelija oppii hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin matematiikassa [13].

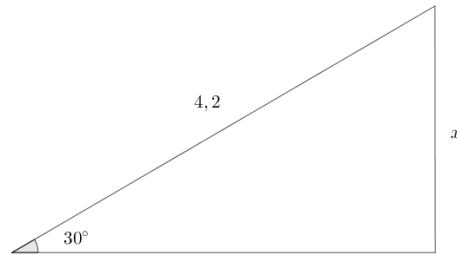
3.1 Moduulit

3.1.1 Geometria

Matematiikan pitkän oppimäärän moduulissa MAA3 Geometria (2op) tavoitteena on muun muassa, että opiskelija harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa ja muotoa koskevaa tietoa, osaa soveltaa yhdenmuotoisuutta ja Pythagoraan lausetta. Tässä moduulissa Buffonin neulan voi hyvin esitellä opiskelijoille ensimmäisen kerran.

Kuvassa 3.1 esitetään yleinen esimerkki geometrian kurssilta, jossa tehtävänä on ratkaista suorakulmaisen kolmion kateetin x pituus. Suorakulmainen kolmio ilman kontekstia voi vaikuttaa opiskelijoista tylsältä. Lisäämällä kuvaan 3.1 kaksi yhdensuuntaista viivaa päästään jo hyvin lähelle kuvaa 1.1. Luomalla kontekstin, jossa ei ole vain

suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 4,2, vaan neula, jonka pituus on 4,2, tilanteesta tulee huomattavasti mielenkiintoisempi.

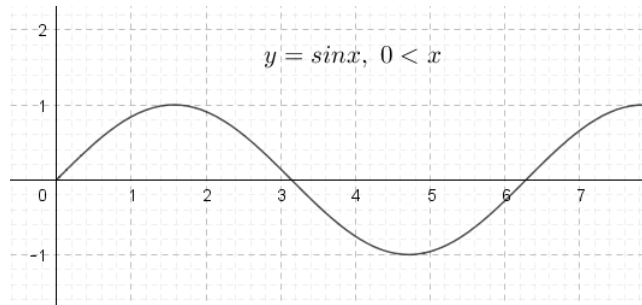


Kuva 3.1: *Esimerkkitehtävä*

Geometrian kurssi on hyvä paikka esitellä opiskelijoille dynaamisen geometrian tietokoneohjelmista GeoGebra, jota käytetään myös ylioppilaskirjoituksissa. Dynaamisen geometrian ohjelmien, kuten GeoGebran, käyttö auttaa opiskelijoita tutkimaan geometrisia riippuvuussuhteita ja muodostamaan niitä koskevia hypoteeseja. GeoGebran käytössä opettajan tulee ottaa huomioon, kuinka sitä käytetään, jotta ohjelmasta saavutetaan maksimaaliset hyödyt. Lisää dynaamisen geometrian ohjelmista ja niiden hyödyllisestä käytöstä opetuksessa voi lukea lähteistä [9], [8].

3.1.2 Funktiot ja yhtälöt

Moduulissa MAA5 Funktiot ja yhtälöt 2 (2 op) opiskelijat tutustuvat ilmiöiden matemaattiseen mallintamiseen sini- ja kosinifunktioiden avulla. Lisäksi tutkitaan sini- ja kosinifunktioita yksikköympyrän symmetrioiden avulla ja opetellaan käyttämään ohjelmistoja funktioiden tutkimisessa.



Kuva 3.2: Sinifunktion kuvaaja

Buffonin neulan voi tuoda mukaan opetukseen moduulissa silloin, kun tutkitaan, mitä sini- tai kosinifunktiolle tapahtuu niitä kerrottaessa vakiolla. Kuvassa 3.2 on sinifunktion $y = \sin x$, $x > 0$ kuvaaja, jota hieman muokkaamalla päästään kuvaan 1.2. Tämän kaltainen ongelman visuaalinen havainnollistaminen GeoGebran avulla mahdollistaa opiskelijan siirtymisen havainnollistuksista teoriaan, ja tällä tavoin voi motivoida opiskelijaa perustelemaan tuloksensa deduktiivisesti [9].

3.1.3 Integraalilaskenta

Integraalilaskennan moduulissa MAA7 (2 op) opiskelijat oppivat integroimaan tärkeimpiä alkeisfunktioita. Tavoitteena on, että opiskelija ymmärtää määrätyn integraalin käsitteen ja sen yhteyden pinta-alaan, osaa määrittää pinta-aloja ja tilavuuksia määrätyn integraalin avulla ja osaa käyttää ohjelmistoja funktion ominaisuuksien tutkimisessa, integraalifunktion määrittämisessä ja määrätyn integraalin laskemisessa sovellusten yhteydessä. [13]

Jälleen kerran Buffonin neula on erinomainen ongelma nostaa esille. Reaalimaailman ongelma, joka esitetään matemaattisesti, voi herättää opiskelijoissa enemmän mielenkiintoa, kuin pelkän sinifunktion integroiminen yli välin $[0, \pi]$. Edelleen on hyvin tärkeää se, miten opettaja esittelee ongelman. Yksinkertaisuuden vuoksi moduulin aikana voidaan käsitellä esimerkiksi pelkästään lyhyen neulan tapausta, jolloin vältytään pitkän neulan haastavammista integraalilaskuista.

Opiskelijan on mahdollista esittää kappaleen 1.2 todistus jo integraalilaskennan moduulissa. Tämä vaatii kuitenkin nopean esittelyn geometrisestä todennäköisyydestä, jota käsitellään tarkemmin moduulissa Tilastot ja todennäköisyys.

3.1.4 Tilastot ja todennäköisyys

Pitkän matematiikan toiseksi viimeinen moduuli on MAA8 Tilastot ja todennäköisyys (2 op). Buffonin neulan avulla opiskelija voi saavuttaa yhden moduulin tavoitteista: ymmärryksen diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteestä. Lisäksi hän voi oppia määrittämään jakauman odotusarvon ja tulkitsemaan sitä, havainnollistamaan diskreettiä tilastollista jakaumaa sekä määrittämään ja tulkitsemaan jakauman tunnuslukuja,

perehtymään todennäköisyyden käsitteeseen ja laskusääntöihin sekä havainnollistamaan kahden muuttujan yhteisjakaumaa.

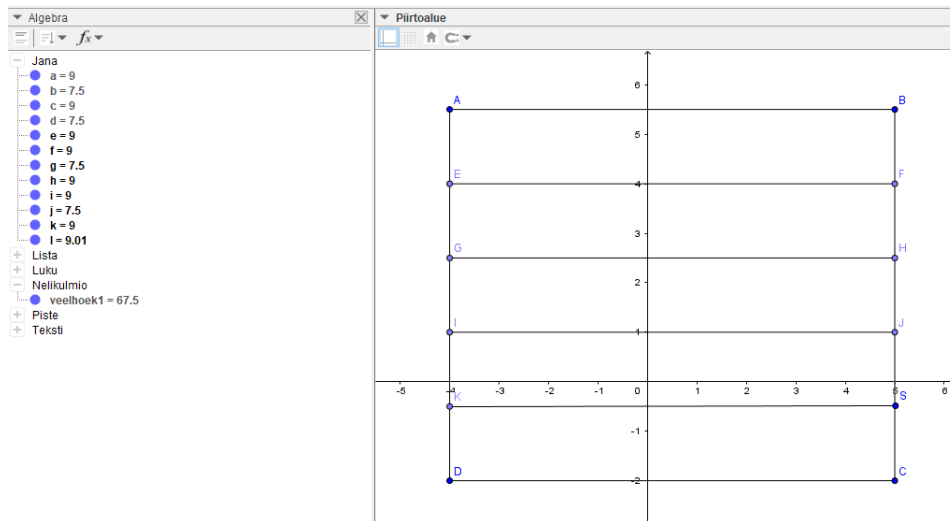
Luvussa 1 esiintyvät käsitteet tiheysfunktio, riippumattomuus, yhteisjakauma, geometrinen todennäköisyys, odotusarvo, diskreetti satunnaismuuttuja, lineaarisuus ja monotonisuus. Jos lineaarisuuden olettaa, opiskelijoille on mahdollista esittää kapaleen 1.3 todistus.

3.2 GeoGebra-appletti

Buffonin neulaongelmaa voi havainnollistaa opiskelijoiden kanssa heittelemällä neuloja lattialle ja laskemalla niitä. Satojen tai tuhansien neulojen laskeminen voi kuitenkin käydä turhan vaikeaksi luokassa. GeoGebra:n avulla useiden neulojen tiputusta voi simuloida, ja samalla GeoGebra:n voi laittaa laskemaan likiarvon piille. Appletin voi rakentaa itse, mutta hyvin toimivan appletin rakentaminen vaatii syvällisempää perehtymistä GeoGebra:n toimintaan. Opettajan kannattaakin hyödyntää verkosta löytyviä valmiita GeoGebra-appletteja, jotka simuloivat neulojen tiputtelua.

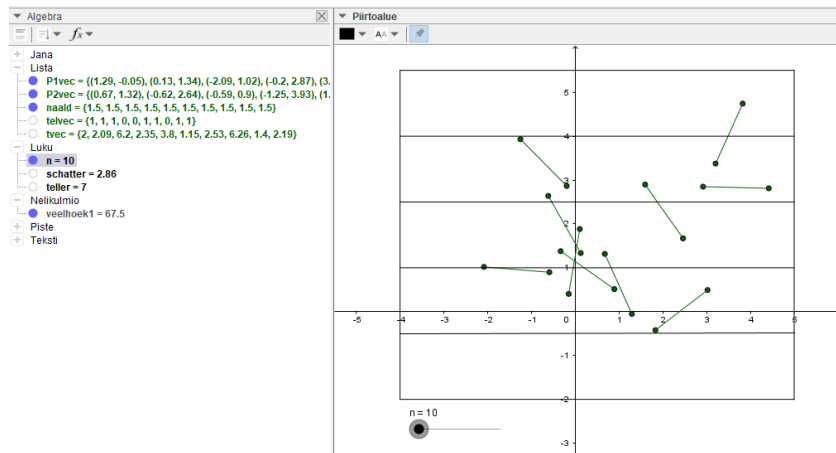
Opettajan on hyvä ymmärtää, miten appletti on rakennettu. Tällöin opettaja voi kertoa opiskelijoille mitä tulee ottaa huomioon, kun pyritään luomaan satunnaisuuteen liittyvä simulaatio. Osoitteesta <https://www.geogebra.org/classic/zqwhWcfS> avautuu erinomainen simulaatio neulojen tiputukselle. Käydään läpi pääpiirteittäin, miten appletti on rakennettu.

Ensimmäinen on hyvä luoda alue, johon neuloja tullaan tiputtamaan. Tämä onnistuu yksinkertaisesti piirtämällä nelikulmio, appletissa objekti `veelhoek1`. Seuraavaksi täytyy päättää yhdensuuntaisten suorien etäisyys, appletissa on valittu $d = 1,5$. Yhdensuuntaiset suorat on piirretty käyttämällä kahden pisteen välistä janaa. Nyt on "lattia", jolla on yhdensuuntaisia suoria. Sitten alkaa neulojen rakentaminen siten, että ne tulevat putoamaan "lattialle" satunnaiseen paikkaan, satunnaisessa kulmassa.



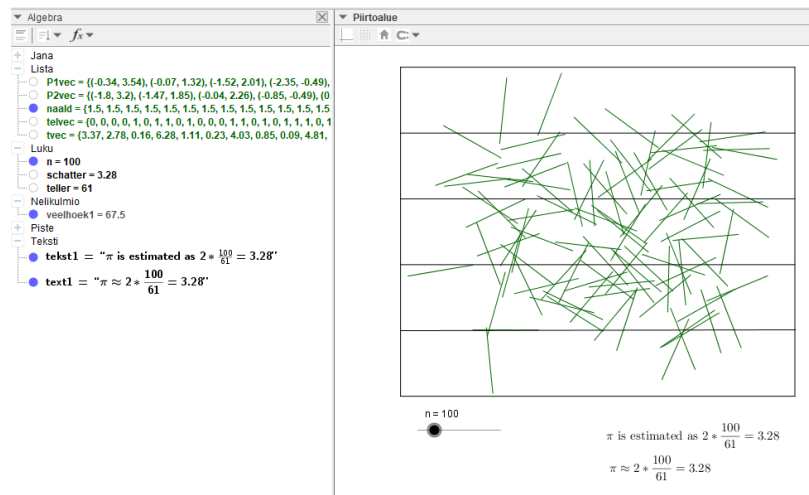
Kuva 3.3: Alue, johon neulat tiputetaan

Aloitetaan neulan toisesta kärjestä. Appletissa objekti $P1vec$ on neulan toinen kärkipiste. Se on luotu jono-komennolla. Jono komenttoon on syötetty (SatunnainenTasajakaumanarvo(a,b), SatunnainenTasajakaumanarvo(c,d)), jolla saadaan satunnaisia pisteitä siten, että pisteen x -koordinaatti on välillä $[a, b]$ ja y -koordinaatti on välillä $[c, d]$. Tässä vaiheessa täytyy miettiä, kuinka pitkän neulasta haluaa. Välit täytyy valita siten, että neulan toinen kärki ei voi pudota "lattian" ulkopuolelle. Appletissa valinta on tehty $l = d = 1, 5$. Lisäksi jono-komentoon täytyy antaa muuttujalle nimi, tässä tapauksessa i , alkuarvo 1 ja loppuarvo n . Näin saadaan liukusäädin, jolla voidaan tiputtaa neuloja n kappaletta.



Kuva 3.5: Pisteiden väliset janat

Simulaatio on siltä osin valmis, että nyt pystytään tiputtelemaan neuloja. Jos kuitenkin halutaan vielä arvioida piitä appletin avulla, on luotava laskuri. Objekti telvec antaa ehdon siten, että jos neulan molemmat kärjet osuvat yhdensuuntaisten suorien muodostamaan samaan väliin, niin tulos on 0 ja muutoin 1. Objekti teller summaa kaikki objektin telvec antamat luvut, eli laskee leikkausten lukumäärän. Objekti schatter laskee arvion piille kaavalla $\frac{2n}{\text{leikkaukset}}$. Nyt appletti on valmis ja opettaja pystyy selittämään sen toiminnan opiskelijoille.



Kuva 3.6: Satunnaisia neuloja alueella

Luku 4

Buffonin neulan laajennuksia

Buffonin neulasta on vuosien varrella tehty lukemattomia variaatioita ja laajennuksia. Tässä luvussa käydään läpi artikkelissa [17] esitetyt kaksi laajennettua ongelmaa. Alaluku 4.1 käsittelee ongelmaa, jossa pallon sisällä on suora neula. Artikkelissa on esitetty tähän ongelmaan myös todistus. Alaluvussa 4.2 käsitellään tilannetta, jossa pallon sisään on työnnetty keitetty nuudeli. Todistuksessa sovelletaan artikkeleissa [11] ja [16] esitettyjä todistuksia Buffonin neulalle.

4.1 Buffonin pallo-ongelma

Tällä kertaa neulaa ei tiputeta suoraan tasolle. Oletetaan edelleen, että tasolla on yhdensuuntaisia suoria, joiden etäisyys toisistaan on d . Nyt neula, jonka pituus on l , $l \leq d$, työnnetään kokonaan pallon sisään, jonka halkaisija on l . Nyt kysymys kuuluu, mikä on todennäköisyys sille, että neula on tasolla olevan suoran yläpuolella. Toisin kuin Buffonin alkuperäisessä ongelmassa, nyt π ei esiinny todennäköisyydessä. Lisäksi kun $l = d$, todennäköisyys on odottamattoman yksinkertainen. Muotoillaan ongelma lauseeksi ja esitetään sille todistus.

Lause 4.1. *Neula, jonka pituus on l , on kokonaisuudessaan pallon sisällä, jonka halkaisija on l . Pallo pudotetaan tasolle, jossa on yhdensuuntaisia suoria, joiden etäisyys on d , $d \geq l$. Todennäköisyys, P_n , että neula on suoran yläpuolella on*

$$P_n = \frac{2}{d} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{2y}{l}\right) dy = \frac{l}{2d}.$$

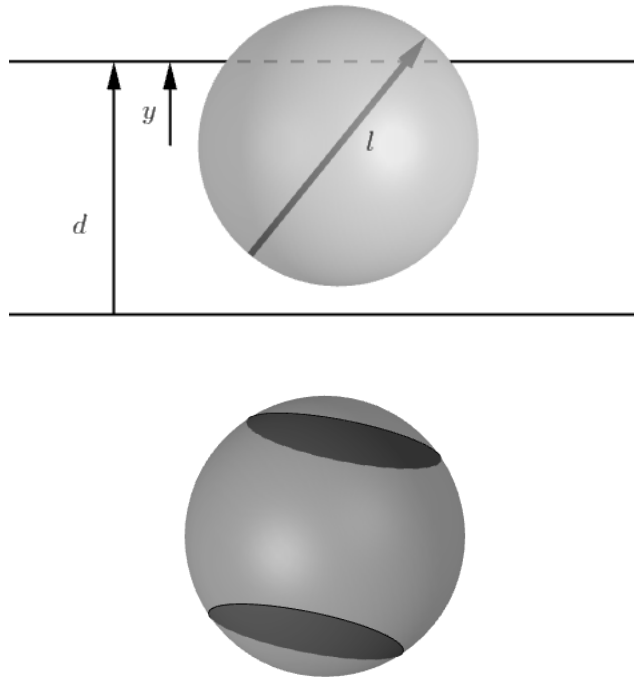
Todistus. Neulan tarkka paikka riippuu pallon paikasta tasolla ja neulan suuntautumisesta pallon sisällä. Näin ollen se vastaa pistettä $\mathbb{R}^2 \times S$ avaruudessa, missä S on pallo, jonka halkaisija on l . Symmetriaa hyväksikäyttäen määrittelyavaruus voidaan pienentää muotoon $X = [0, \frac{d}{2}] \times S$, missä väli $[0, \frac{d}{2}]$ vastaa kaikkia mahdollisia pallon pohjan etäisyyksiä lähimpään suoraan. Nyt täytyy tietää pallon pohjan ja lähimmän suoran välinen etäisyys (oletetaan, että suorat kulkevat itä-länsi suunnassa) ja neulan suunta

pallon sisällä. Kun pallo pudotetaan sattumanvaraisesti tasolle, sillä tarkoitetaan, että kaikki mahdolliset konfiguraatiot jakautuvat tasaisesti avaruudessa X .

Olkoon y etäisyys pallon pohjasta lähimpään suoraan. Nyt halutaan laskea todennäköisyys $P(y)$, että neula ylittää suoran tällä y :n arvolla. Olkoon R_y ympyrän alue, joka vastaa niitä kärkien sijainteja, jotka tuottavat ylityksen, ja olkoon $A(y)$ R_y :n pinta-ala. Tällöin

$$P(y) = \frac{A(y)}{\text{ympyrän ala}} = \frac{A(y)}{l^2\pi}.$$

Kun $y > \frac{l}{2}$ neula ei voi ylittää suoraa, joten $R_y = \emptyset$, $A(y) = 0$ ja $P(y) = 0$. Kun $0 \leq y \leq \frac{l}{2}$, niin R_y koostuu kahdesta identtisestä pallokalotista, jotka ovat keskittyneet noin etelä- ja pohjoisnavoille. Toinen kalotti vastaa neulan kärjen olemista suoran pohjoispuolella ja toinen neulan kannan olemista suoran pohjoispuolella.

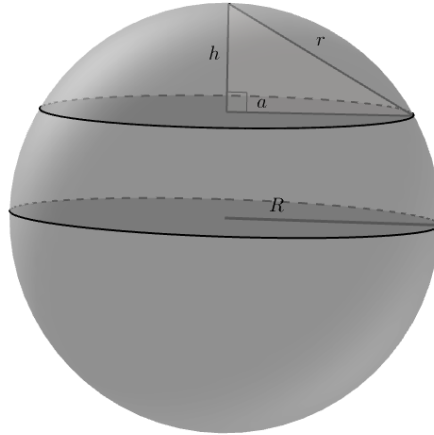


Kuva 4.1: *Pallon tiputus*

Kalotin pinta-ala voidaan ilmaista vain kaltevan korkeuden, r , avulla. Tällöin kalotin pinta-ala on πr^2 . Nyt halutaan ilmaista kalotin ala ympyrän säteen, R , ja kalotin kor-

keuden, h , avulla. Olkoon a kalotin pohjan säde, jolloin saadaan

$$a^2 + h^2 = r^2 \text{ ja } (R - h)^2 + a^2 = R^2.$$



Kuva 4.2: Kalotin pinta-ala

Tästä saadaan, että $r^2 = 2Rh$ ja näin ollen kalotin pinta-ala on $2\pi Rh$. Koska kalotin korkeus $h = \frac{l}{2} - y$ ja säde $R = \frac{l}{2}$, niin R_y :n pinta-ala on

$$A(y) = 2 \left(2\pi \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - y \right) \right) = l^2 \pi \left(1 - \frac{2y}{l} \right).$$

Näin ollen y :n arvoille välillä $[0, \frac{l}{2}]$ todennäköisyys, että neula ylittää suoran on

$$P(y) = \frac{l^2 \pi \left(1 - \frac{2y}{l} \right)}{l^2 \pi} = 1 - \frac{2y}{l}.$$

Huomataan myös, että $P(y) = 0$, kun $\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}$. Koska kaikki mahdollisuudet $0 \leq y \leq \frac{d}{2}$ ovat yhtä todennäköisiä, voidaan laskea todennäköisyys, että neula on sauman yläpuolella riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön avulla

$$P_n = \frac{2}{d} \int_0^{\frac{d}{2}} P(y) dy = \frac{2}{d} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{2y}{l} \right) dy = \frac{l}{2d}.$$

□

4.2 Nuudeli pallossa

Muokataan tilannetta vielä lisää. Tutkitaan tällä kertaa keitettyä nuudelia, joka on työnnetty pallon sisään ja pudotetaan pallo tasolle, jossa on yhdensuuntaisia suoria. Tulemme huomaamaan, että ylityksien todennäköisyys ei riipu nuudelin tai neulan muodosta, ainostaan sen pituudesta.

Todistuksessa oletetaan, että nuudelin muodostama käyrä on suoristuva. Suoristuvan käyrän pituutta voidaan tutkia integraalin avulla, jos käyrä on jonkin funktion kuvaaja tai käyrän jakovälien avulla. Kaikkia nuudelin muodostavia käyriä ei saa funktion kuvaajan avulla, joten määritellään suoristuvan käyrän pituus jakovälin avulla.

Määritelmä 4.2. *Olkoon $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektio, jatkuvasti differentioituva ja derivaatta on rajoitettu suljetulla välillä, ja $\psi[a, b] = \Gamma$. Määritellään Γ :n pituus peräkkäisten pisteiden $(\psi(t_i), \psi(t_{i+1}))$, jossa $i \in [0, n-1]$, välisten etäisyyksien summan raja-arvoksi, kun välin $[a, b]$ jakoa tihennetään rajatta*

$$L(\Gamma) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})|, \text{ missä } a = t_0 < \dots < t_m = b.$$

Huomautus 4.3. *Yllä esitetty määritelmä on sama asia kuin yleisemmin käytetty määritelmä kaaren pituudelle integraalin avulla:*

Sileä parametrisoitu käyrä $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on suoristuva ja sen pituus

$$L = \int_a^b |\psi'(t)| dt.$$

Näytetään, että näin todella on. [4, Lemma 20.6, Proposition 20.7]

Todistus. Määritellään ensin funktio $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = |\psi'(t)|$, $a < t < b$. Tällöin h on jatkuva ja rajoitettu avoimella välillä $]a, b[$ ja näin ollen integroituva suljetulla välillä $[a, b]$. Jokaiselle indeksille $i \in]1, n[$ voidaan valita $M_i > 0$ siten, että $|\psi'_i(t)| \leq M_i$, kaikilla $t \in]a, b[$. Määritellään $M = \sqrt{M_1^2 + \dots + M_n^2}$. Differentiaalilaskennan väliarvolauseeseen nojalla jokaiselle välin $[a, b]$ osavälille $[c, d]$ pätee

$$\left| \frac{|\psi(d) - \psi(c)|}{d - c} - |\psi'(t)| \right| < 2M, \text{ kaikilla } t \in [c, d].$$

Integraalin monotonisuuden nojalla

$$\left| |\psi(d) - \psi(c)| - \int_c^d |\psi'(t)| dt \right| < 2M(d - c), \text{ jokaiselle välin } [a, b] \text{ osavälille } [c, d]. \quad (4.1)$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan välin $[a, b]$ osaväli $[a', b']$, missä $a < a' < b' < b$, siten, että jos määritellään $\eta = \max\{a' - a, b - b'\}$, niin $16\eta M < \epsilon$. Olkoon $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2(b' - a')}$. Nyt voidaan valita $\delta' > 0$ siten, että jos $[c, d]$ on välin $[a', b']$ osaväli jonka pituus on pienempää kuin δ' ja $t \in]c, d[$, niin

$$\left| \frac{|\psi(d) - \psi(c)|}{d - c} - \psi'(t) \right| < \epsilon'.$$

Käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$\left| \frac{|\psi(d) - \psi(c)|}{d - c} - |\psi'(t)| \right| < \epsilon', \text{ kaikilla } t \in [c, d].$$

Siispä

$$\left| |\psi(d) - \psi(c)| - \int_c^d |\psi'(t)| dt \right| < \epsilon'(d - c), \text{ jos } [c, d] \subseteq [a', b'] \text{ ja } d - c < \delta'. \quad (4.2)$$

Olkoon $\delta = \min\{\delta', \eta\}$, ja olkoon $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ välin $[a, b]$ jako siten, että väli $[x_{i-1}, x_i] < \delta$. Käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\left| \sum_{i=1}^m |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| - \int_a^b |\psi'(t)| dt \right| \leq \sum_{i=1}^m \left| |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| - \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi'(t)| dt \right|. \quad (4.3)$$

Arviosta (4.2) saadaan jokaiselle indeksille i , $1 \leq i \leq m$,

$$\left| |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| - \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi'(t)| dt \right| < \epsilon'(x_i - x_{i-1}), \text{ jos } [x_{i-1}, x_i] \subseteq [a', b'].$$

Näin ollen epäyhtälön (4.3) oikea puoli on pienempää kuin $\epsilon'(b' - a')$, kun summataan kaikki osavälien $[x_{i-1}, x_i]$ pituudet, jotka sisältyvät väliin $[a', b']$. Toisaalta, jokaiselle välille $[x_{i-1}, x_i]$, joka ei sisälly väliin $[a', b']$ arvio (4.1) osoittaa, että

$$\left| |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| - \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi'(t)| dt \right| < 2M(x_i - x_{i-1}).$$

Koska näiden välien pituuksien summa on varmasti vähemmän kuin 4η , niin epäyhtälön (4.3) oikea puoli on pienempää kuin $8M\eta < \frac{\epsilon}{2}$, kun summataan kaikki osavälien $[x_{i-1}, x_i]$ pituudet, jotka eivät sisälly väliin $[a', b']$. Näistä kahdesta arviosta saadaan

$$\left| \sum_{i=1}^m |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| - \int_a^b |\psi'(t)| dt \right| < \epsilon.$$

□

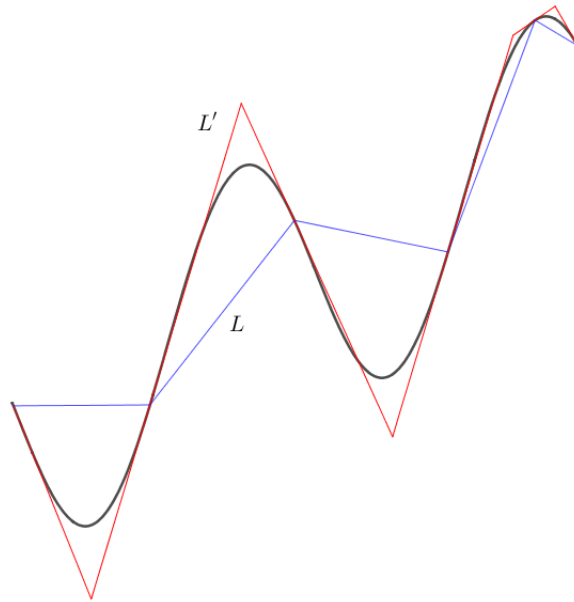
Seuraavaksi muotoillaan tilanteesta lause ja todistetaan se.

Lause 4.4. *Nuudeli, jonka muodostaman jatkuvasti derivoituvan käyrän pituus on l ja derivaatta on rajoitettu suljetulla välillä, on kokonaisuudessaan pallon sisällä, jonka halkaisija on l . Pallo pudotetaan tasolle, jossa on yhdensuuntaisia suorja, joiden etäisyys on d , $d \leq l$. Todennäköisyys, P_n , että nuudeli ylittää suoran ainakin kerran on*

$$P_n = \frac{l}{2d}.$$

Todistus. Koska nuudelilla on pituus l , niin tällöin se on suoristuva ja määritelmän 4.2 nojalla voidaan valita jono murtoviivoja L_1, L_2, \dots , jotka lähestyvät nuudelin muodostamaa käyrää. Merkitään murtoviivan L_i muodostavia janoja $L_{i1}, L_{i2}, \dots, L_{in}$. Tällöin siis murtoviiva L_i muodostuu peräkkäisistä janoista L_{i1}, \dots, L_{in} . Olkoon janan L_{ij}

pituus l_{ij} ja voidaan olettaa n niin suureksi, että $l_{ij} < d$ kaikilla i, j , jolloin $E(l_{ij}) = \frac{l_{ij}}{2d}$. Merkitään murtoviivan L_i pituutta l_i ja nyt määritelmän 4.2 nojalla $l_i \leq l$ ja kun $i \rightarrow \infty$, niin $l_i = l$.



Kuva 4.3: Kaksi eri jonoa murtoviivoja, jotka lähestyvät nuudelin muodostamaa käyrää

Valitaan nyt toinen jono murtoviivoja L'_1, L'_2, \dots , jotka lähestyvät nuudelin muodostamaa käyrää. Koska nuudelin muodostama käyrä on jatkuvasti differentioituva, murtoviiva L'_k voidaan muodostaa jakopisteisiin piirrettyjen tangenttien leikkauspisteiden avulla. Nyt murtoviiva L'_k muodostuu janoista L'_{k1}, \dots, L'_{ks} ja s voidaan olettaa niin suureksi, että $l'_{kt} < d$ kaikilla k, t . Näin ollen $E(l'_{kt}) = \frac{l'_{kt}}{2d}$. Koska murtoviiva L'_k muodostettiin tangenttien avulla, niin sen pituudelle pätee $l'_k \geq l$ ja kun $k \rightarrow \infty$, niin $l'_k = l$.

Näin ollen lauseen 1.4 nojalla odotusarvoille pätee epäyhtälö

$$E(l_i) \leq E(l) \leq E(l'_k).$$

Lauseen 1.3 nojalla $E(l_i) = E(l_{i1}) + E(l_{i2}) + \dots + E(l_{in})$ kaikilla i , joten

$$E(l_i) = \sum_{j=1}^n \frac{l_{ij}}{2d} = \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^n l_{ij} = \frac{l_i}{2d},$$

ja kun $i \rightarrow \infty$, niin $E(l_i) = \frac{l}{2d}$. Vastaavasti

$$E(l'_k) = \sum_{t=1}^s \frac{l'_{kt}}{2d} = \frac{1}{2d} \sum_{t=1}^s l'_{kt} = \frac{l'_k}{2d},$$

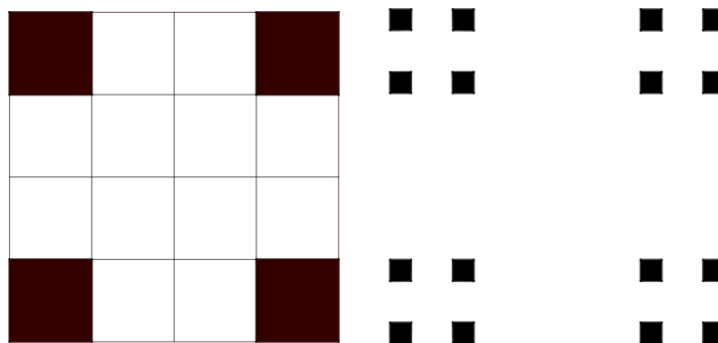
ja kun $k \rightarrow \infty$, niin $E(l'_k) = \frac{l}{2d}$. Siispä $E(l) = \frac{l}{2d}$. □

Luku 5

Favardin mitta ja Buffonin neula

Olkoon $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ itsesimilaarinen Cantorin joukko tasossa, ja oletetaan että joukolla C on Hausdorffin dimensio 1. Favardin mittaongelma käsittelee joukon C_n lineaariprojektoiden keskimääräistä mitta (kulman suhteen). Joukon C Favardin mitta yksikköneliössä saa todennäköisyysperusteisen tulkinnan, sillä riippuen vakiosta, se on todennäköisyys, että satunnaisesti tiputettu suora (Buffonin neula) osuu joukkoon C [1]. Huomattavaa edistystä ongelman ratkaisussa on saavutettu viime vuosina, missä on paljastunut yhteyksiä harmoniseen analyysiin, kombinatoriikkaan ja lukuteoriaan. Seuraavaksi on tarkoitus arvioida Favardin mitta yksinkertaisessa tilanteessa alhaalta. Lisää aiheesta ja erilaisista joukoista C_n voi lukea lähteistä [12], [1].

Tarkastellaan Cantorin nelikulmaista joukkoa (The four-corner Cantor set), joka tunnetaan myös Garnettin joukkona, $\mathcal{K} = C \times C$. Se rakentuu jakamalla yksikköneliö $[0, 1]^2$ 16 yhtenevään neliöön, pitämällä 4 neliötä kulmissa ja poistamalla loput. Näin saadaan \mathcal{K}_1 . Toistamalla tämä jokaiselle jäljelle jääneelle neliölle saadaan \mathcal{K}_2 , joka sisältää 16 neliötä. Jatkamalla iteraatiota äärettömään, saadaan $\mathcal{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$, joka on fraktaalit itsesimilaarinen joukko Hausdorffin dimensiolla 1 [3, Theorem 1.15].



Kuva 5.1: Cantorin nelikulmaisen joukon 1. ja 2. iteraatio

Nyt voidaan siirtyä itse ongelmaan. Olkoon $proj_\theta(x, y) = x \cos \theta + y \sin \theta$ pisteen (x, y) projektiio suoralle L_θ , missä θ on suoran ja x -akselin välinen kulma. Määritellään Favardin mitta seuraavasti

Määritelmä 5.1. Favardin mitta kompaktille joukolla $K \subset \mathbb{R}^2$ määritellään

$$Fav(K) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |proj_\theta(K)| d\theta,$$

sen lineaariprojektioiden keskimääräiseksi pituudeksi (suhteessa kulmaan).

Koska joukon \mathcal{K} Hausdorffin dimensio 1 toteuttaa ehdon $0 < \mathcal{H}^1(\mathcal{K}) < \infty$ ja joukon \mathcal{K} projektion Lebesguen mitta on nolla kahteen eri suuntaan [3, Theorem 1.13, Corollary 6.14], niin Besicovitchin lauseen nojalla $|proj_\theta(\mathcal{K})| = 0$ melkein kaikilla $\theta \in [0, \pi]$ [3, Theorem 6.13]. Tästä seuraa, että $Fav(\mathcal{K}_n) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Haluamme arvioida $Fav(\mathcal{K}_n)$, kun $n \rightarrow \infty$. Arviointiin tarvitaan Hölderin epäyhtälöä, joten todistetaan ensin Youngin epäyhtälö ja sen avulla Hölderin epäyhtälö.

Lause 5.2 (Youngin epäyhtälö). Jos $a > 0$ ja $b > 0$ on positiivisia reaalilukuja ja $p > 1$ ja $q > 1$ ovat positiivisia reaalilukuja siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a^p = b^q$.

Todistus. Väite on tosi, kun $a = 0$ tai $b = 0$, joten oletetaan, että $a > 0$ ja $b > 0$. Merkitään $t = \frac{1}{p}$ ja $(1-t) = \frac{1}{q}$. Koska logaritmfunktio on konkaavi (toinen derivaatta negatiivinen), niin

$$\ln(ta^p + (1-t)b^q) \geq t \ln(a^p) + (1-t) \ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$$

ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a^p = b^q$. Nyt väite seuraa ottamalla eksponenttifunktio puolittain. \square

Lause 5.3 (Hölderin epäyhtälö). Olkoon $f, g := \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ja olkoon $p > 1$ ja $q > 1$. Tällöin kaikille funktioille f ja g pätee

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Todistetaan lause 5.3 erikoistapauksessa, missä $p = q = 2$, $\|f\|_2 = \left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} > 0$ ja $\|g\|_2 = \left(\int |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Todistus. Olkoon $f, g := \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $\|f\|_2 > 0$, $\|g\|_2 > 0$ ja $p = q = 2$. Olkoon $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_2}$ ja $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_2}$. Käyttämällä Youngin epäyhtälöä (lause 5.2) tulolle saadaan

$$ab = \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_2 \|g\|_2} \leq \frac{|f(x)|^2}{2\|f\|_2^2} + \frac{|g(x)|^2}{2\|g\|_2^2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integroimalla puolittain saadaan

$$\frac{1}{\|f\|_2\|g\|_2} \int |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{2\|f\|_2^2} \int |f(x)|^2dx + \frac{1}{2\|g\|_2^2} \int |g(x)|^2dx.$$

Nyt huomataan, että $\|f\|_2^2 = \int |f(x)|^2dx$ ja $\|g\|_2^2 = \int |g(x)|^2dx$, joten

$$\begin{aligned} \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_2\|g\|_2} &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \|fg\|_1 &\leq \|f\|_2\|g\|_2 \\ \int |f(x)g(x)|dx &\leq \left(\int |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi todistetaan

Lause 5.4. $Fav(\mathcal{K}_n) \geq \frac{c}{n}$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Väite seuraa lähteen [15, 1.4] tuloksesta ja todistuksessa on käytetty lähdetä [1].

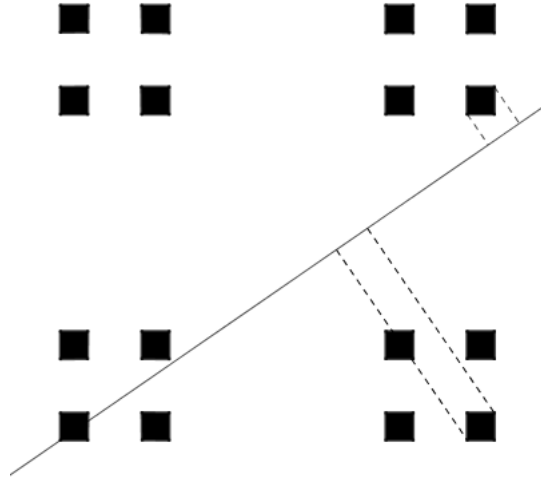
Todistus. Olkoon L_θ suora, joka kulkee origon kautta ja θ suoran ja x -akselin välinen kulma. Jokaisessa \mathcal{K}_n on aina 4^n kappaletta neliöitä, joiden sivun pituus on 4^{-n} . Merkittään $f_{n,\theta}(t)$ niiden neliöiden lukumäärää \mathcal{K}_n :ssä, joiden kohtisuorassa projektiossa suoralle L_θ on piste t tältä suoralta. Olkoon $\chi_{Q,\theta}(t)$ karakteristinen funktio neliön Q projektiolle suoralle L_θ . Tällöin

$$f_{n,\theta}(t) = \sum_{Q, l(Q)=4^{-n}} \chi_{Q,\theta}(t)$$

Kuva 5 havainnollistaa neliön Q projektion pituutta. Projektion suurin pituus saadaan selvästi, kun projisoidaan neliön Q lävistäjä suoralle L_θ . Tarkastellaan neliötä, jonka lävistäjän on jana $AB = \{(\lambda(1 - 4^{-n}) + (1 - \lambda), (1 - \lambda)4^{-n}), 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Tällöin lävistäjän projektion pituus on

$$\begin{aligned} |proj_\theta(AB)| &= proj_\theta(1, 4^{-n}) - proj_\theta(1 - 4^{-n}, 0) \\ &= \cos \theta + 4^{-n} \sin \theta - \cos \theta + 4^{-n} \cos \theta \\ &= 4^{-n}(\cos \theta + \sin \theta). \end{aligned}$$

Kun $\theta = 0$ tai $\theta = \frac{\pi}{2}$, niin vastaavalla tarkastelulla kaikille neliöille Q saadaan $|proj_\theta(Q)| = 4^{-n}$. Kun $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, neliön Q projektion pituus on $4^{-n}(\cos \theta + \sin \theta) \geq 4^{-n}$, sillä $(\cos \theta + \sin \theta) \geq 1$ kaikilla $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Vastaavasti kun $\theta = \pi$, niin $|proj_\theta(Q)| = 4^{-n}$ ja kun $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, niin neliön Q projektion pituus on $4^{-n}(\sin \theta - \cos \theta) \geq 4^{-n}$.



Kuva 5.2: Neliön Q projektio suoralle L_θ

Siispä

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \int_{L_\theta} f_{n,\theta}(t) dt d\theta &= \int_0^\pi \int_{L_\theta} \sum_{Q, l(Q)=4^{-n}} \chi_{Q,\theta}(t) dt d\theta \\
 &= \sum_{Q, l(Q)=4^{-n}} \int_0^\pi |\text{proj}_\theta(Q)| d\theta \\
 &\geq \sum_{Q, l(Q)=4^{-n}} \int_0^\pi 4^{-n} d\theta \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Merkitään funktion $f_{n,\theta}(t)$ kantajaa $E_{n,\theta} = \{t \in L_\theta : f_{n,\theta}(t) \neq 0\}$ ja olkoon $|E_{n,\theta}|$ sen pituus. Nyt siis $|E_{n,\theta}| = |\text{proj}_\theta(\mathcal{K}_n)|$. Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä kahdesti (lause 5.3), voidaan arvioida integraalia $\int_0^\pi |E_{n,\theta}| d\theta$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\pi &\leq \int_0^\pi \int_{L_\theta} f_{n,\theta}(t) dt d\theta = \int_0^\pi \int_{E_{n,\theta}} f_{n,\theta}(t) dt d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_{L_\theta} |\chi_{E_{n,\theta}}(t)|^{\frac{1}{2}} \chi_{E_{n,\theta}}(t)^{\frac{1}{2}} f_{n,\theta}(t) |dt d\theta \\
&\leq \int_0^\pi \left(\left(\int_{E_{n,\theta}} |f_{n,\theta}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{L_\theta} (|\chi_{E_{n,\theta}}(t)|^{\frac{1}{2}})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\left(\int_{E_{n,\theta}} |f_{n,\theta}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |E_{n,\theta}|^{\frac{1}{2}} \right) d\theta \\
&\leq \left(\int_0^\pi \left(\left(\int_{E_{n,\theta}} |f_{n,\theta}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\pi (|E_{n,\theta}|^{\frac{1}{2}})^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^\pi \int_{E_{n,\theta}} |f_{n,\theta}(t)|^2 dt d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\pi |E_{n,\theta}| d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\int_0^\pi |E_{n,\theta}| d\theta \geq \frac{\pi^2}{\iint f_{n,\theta}^2(t) dt d\theta}. \quad (5.1)$$

Nyt siis

$$\iint f_{n,\theta}^2(t) dt d\theta = \sum_{Q, Q', l(Q)=l(Q')=4^{-n}} \iint \chi_{Q,\theta}(t) \chi_{Q',\theta}(t) dt d\theta.$$

Tarkastellaan jokaista paria $P = (Q, Q')$, $l(Q) = l(Q') = 4^{-n}$, missä neliöt Q ja Q' voivat olla samat neliöt, niiden lineaariprojektioiden leikkausten pituutena

$$p_P := \int_0^\pi |\text{proj}_\theta(Q) \cap \text{proj}_\theta(Q')| d\theta.$$

Tehdään järjestys pareista. Kutsutaan paria P k -pariksi, jos Q ja Q' ovat samassa 4^{-k} neliössä, mutta ei 4^{-k-1} neliössä, $k = 0, 1, \dots, n$ tai jos Q ja Q' ovat samat. Nyt on siis 4^k kappaletta neliöitä, joiden sivun pituus on 4^{-k} . Jokaisessa yksittäisessä k :n iteroinnissa neliössä on aina 4^{n-k} kappaletta neliöitä, joiden sivun pituus on 4^{-n} . Näin ollen yksittäisessä neliössä voidaan muodostaa k -pareja $\binom{4^{n-k}}{2} = \frac{4^{2n-2k} - 4^{n-k}}{2}$ kappaletta, kun $Q \neq Q'$. Koska neliöitä on 4^k kappaletta, k -pareja voidaan muodostaa

$$4^k \frac{4^{2n-2k} - 4^{n-k}}{2}$$

kappaletta. Kun tulokseen lisätään vielä kaikki parit ne parit, kun $Q = Q'$, k -pareja voidaan muodostaa

$$4^k \frac{4^{2n-2k} - 4^{n-k}}{2} + 4^n$$

kappaletta. Arvioidaan k -parien lukumäärää ylhäältä tulevia laskuja varten:

$$4^k \frac{4^{2n-2k} - 4^{n-k}}{2} + 4^n \leq 4^k (4^{n-k})^2, \text{ koska}$$

$$1 \geq \frac{4^k}{4^n}, \text{ kun } k \leq n.$$

Jokaisen k -parin pinta-ala on korkeintaan $2 \cdot 4^{-2n}$. Tällöin

$$p_P \leq 2 \cdot 4^{-2n} \leq C 4^{-n} 4^{k-n},$$

josta saadaan arvio vakiolle C

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \leq 2 = C, \text{ kaikilla } k \geq 0.$$

Yllä tehtyjen arviointien avulla saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \int_{L_\theta} f_{n,\theta}^2(t) dt d\theta &= \sum_P p_P = \sum_{k=0}^n \sum_{P \text{ on } k\text{-pari}} p_P \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{P \text{ on } k\text{-pari}} 4^{-n} 4^{k-n} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} 4^k \cdot (4^{n-k})^2 4^{-n} 4^{k-n} \\ &\leq Cn = 2n. \end{aligned}$$

Yhdistämällä tämän ja arvion 5.1 saadaan

$$\int_0^\pi |E_{n,\theta}| d\theta \geq \frac{\pi^2}{2n}.$$

□

Kirjallisuutta

- [1] BATEMAN M., VOLBERG A., *An estimate from below for the Buffon needle probability of The four-corner Cantor set*, arXiv:0807.2953v1, [math.CA], 2008.
- [2] BEHREND S., BUESCU J., *Buffon: Did He Actually Throw Sticks?* EMS Newsletter, s.47-49, 2014.
- [3] FALCONER K. J., *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, 85, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1986.
- [4] FITZPATRICK M. P., *Advanced Calculus*, 2. painos, Belmont, CA : Thomson Brooks/Cole, c2006, s. 525-526.
- [5] GUT A., *Probability: A Graduate Course*, Springer, New York, 2005
- [6] HAVIL J., *Nonplussed! Mathematical Proof of Implausible Ideas*, Princeton University Press, 2007.
- [7] HOLGATE P., *Studies in the History of Probability and Statistics XXXIX Buffon's Cycloid*, Biometrika Vol. 68, No. 3, s. 712-716, Oxford University Press, 1981.
- [8] HÄHKIÖNIEMI M., *GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa - Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta*. Jyväskylän yliopisto. 2011.
- [9] HÄHKIÖNIEMI M., LEPPÄÄHO H., VIHOLAINEN A., *Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä*, Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta, Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry, Helsinki. 2012.
- [10] KENDALL M. G., MORAN P. A. P., *Geometrical probability, Griffin's Statistical Monographs & Courses, No. 10*, Hafner Publishing Co., New York, 1963.
- [11] KLAMKIN S. M., *On Barbier's Solution of the Buffon Needle Problem*, Mathematics Magazine Vol. 28, No. 3, s. 135-138, Taylor & Francis, Ltd., 1955.
- [12] LABA I., *Recent progress on Favard length estimates for planar Cantor sets*, Department of mathematics, University of British Columbia, Vancouver, 2012.
- [13] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*, Opetushallitus.

- [14] MATHAI A. M., *An Introduction to Geometrical Probability: Distributional Aspects with Applications*. McGill University, Montreal, Canada, 1999.
- [15] MATTILA P., *Orthogonal projections, Riesz capacities and Minkowski content*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 39, No. 1, s. 185-198, Indiana University Mathematics Department, 1990.
- [16] RAMALEY J. F., *Buffon's Noodle Problem*, The American Mathematical Monthly Vol. 76, No. 8, s. 916-918, Bowling Green State University, Ohio, 1969.
- [17] RICHESON D., *A π -less Buffon's Needle Problem*, Mathematics Magazine Vol. 79, No. 5, s. 385-389, Dickinson College, Carlisle, 2006.