PERUSLASKUTOIMITUSTEN ALGORITMIEN HALLINTA TOISEN ASTEEN AMMATILLISTEN OPINTOJEN ALUSSA TEKNISILLÄ ALOILLA

Mari Ilveskoski
Tuija Suvilehto

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Kevät 2004
Erityispedagogiikan laitos
Jyväskylän yliopisto

URN:NBN:fi:jyu-200529

Ilveskoski, M. & Suvilehto, T. 2004. Peruslaskutoimitusten algoritmien hallinta toisen asteen ammatillisten opintojen alussa teknisillä aloilla. Jyväskylän yliopisto. Erityispedagogiikan laitos. Pro gradu -tutkielma.

TIIVISTELMÄ

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten toisen asteen teknisten alojen ammatillisia opintoja aloittavat opiskelijat hallitsevat moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitukset ja mitä virheitä he tekevät peruslaskutoimitusten algoritmeissa. Lisäksi tarkasteltiin sitä, onko matematiikan osaamistasolla yhteyttä virhetyyppeihin.

Tutkimuksen kohderyhmänä oli yhteensä 1089 opintojaan aloittavaa opiskelijaa Jyväskylän ammattiopiston Tekniseltä oppilaitokselta sekä Turun ammatti-instituutista. Opiskelijat suorittivat matematiikan lähtötason arviointitestin, josta tässä tutkimuksessa tarkasteltiin moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitusten tehtäviä. Testi liittyi Niilo Mäki Instituutin projektiin, jossa kehitettiin toisen asteen ammatilliseen koulutukseen soveltuva matematiikan lähtötason arviointitestiä. Peruslaskutoimitusten osaamista arvioitiin tehtävien ratkaisuprosenttien avulla. Virheiden analysointia varten muodostettiin peruslaskutoimitusten algoritmien virheluokitus ja virhetyyppien yleisyyttä selvitettiin vertailemalla virheluokkien frekvensseillä. Opiskelijoiden tekemien virheiden ja matematiikan koko kokeen pistemäärän yhteyttä tarkasteltiin ristiintaulukoinnin ja χ^2-riippumattomuustestin avulla.

Tutkimus osoitti, että moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitukset hallitaan heikosti toisen asteen ammatillisten opintojen alussa teknisillä aloilla. Erityisesti kerto- ja jakolaskualgoritmien osaamisessa oli puutteita. Virheiden variaatio oli suuri ja useat virhetyypit viittasivat lukujen paikka-arvon käsitteen heikkoon hallintaan. Tutkimusta varten muodostettua virheluokitusta täydennettiin aineistossa esiintyneillä virhetyypeillä. Osaamistason ja virheiden yhteyttä tutkittaessa havaittiin menetelmällisten virheiden eli algoritmien sääntöihin liittyvien virheiden olevan erityisesti heikkojen opiskelijoiden tekemiä, joskin poikkeuksena oli jakolasku.

AVAINSANAT:
peruslaskutoimitusten algoritmit, virheanalyysi, ammatillinen koulutus, matematiikan oppimisvaikeus

SISÄLTÖ

JOHDANTO

Peruskoulussa opetetaan jo alaluokilla väline moninumeroisten lukujen peruslaskutoimituksiin. Tällä välineellä eli algoritmilla tarkoitetaan ennalta määrättyä ja askel askeleelta etenevää menetelmää, jolla voidaan ratkaista samankaltaisia ongelmia. Peruslaskutoimitusten algoritmien opetus aloitetaan peruskoulun toisella luokalla ja vuosiluokkien edetessä tutustutaan uusiin algoritmeihin ja sovelletaan aikaisemmin opittuja vaikeampiin tilanteisiin. Koska peruslaskutoimitusten algoritmien harjoitteluun käytetään runsaasti aikaa, on mielenkiintoista tutkia, miten ne hallitaan peruskoulun jälkeen ammatillisten opintojen alussa.

Matematiikan osaamisen arviointi on painottunut peruskouluikäisiin oppilaisiin ja ammatillisissa oppilaitoksissa opiskelevien opiskelijoiden matematiikan osaamista on tutkittu vasta vähän. Tarvetta tutkimukseen olisi myös ammatillisessa koulutuksessa. Matematiikka on keskeisessä asemassa useilla ammatillisilla aloilla ja on tärkeä osa ammattitaidon kehittymistä. Useissa kansainvälisissä matematiikan taitoja vertailevissa tutkimuksissa todetaan, että suomalaiset peruskoululaiset osaavat matematiikkaa hyvin ja erityisesti laskutoimitusten hallinta on vahvaa. Myös kansalliset joka toinen vuosi tehdyt peruskoulun päättövaiheen matematiikan arviointitutkimukset osoittavat, että luvut ja laskutoimitukset hallitaan parhaiten matematiikan eri sisältöalueista. Kuitenkin noin viidesosalla oppilaista on sellaisia puutteita perusasioiden hallinnassa, että ne hankaloittavat peruskoulun jälkeistä jatko-opiskelua. Nämä opiskelijat luovat haasteen matematiikan opetukselle toisen asteen koulutuksessa. Ammatillisessa koulutuksessa on tarpeen arvioida aloittavien opiskelijoiden matematiikan taidot ja pyrkiä erilaisten opetusmenetelmien ja -järjestelyiden avulla takaamaan ammatissa tarvittava matematiikan taso.

Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, miten ammatilliset opinnot aloittavat opiskelijat hallitsevat moninumeroisten laskujen peruslaskutoimitukset (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku) ja millaisia virheitä he tekevät näissä laskuissa. Tutkimuksen kohderyhmänä ovat Jyväskylän ammattiopiston Teknisen oppilaitoksen ensimmäisen vuosikurssin opiskelijat (n=603) sekä Turun ammatti-instituutin (n=486) teknisen alan ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoita. Opiskelijat tekivät opintojensa alussa matematiikan kokeen, joka oli osa Niilo Mäki Instituutin projektia, jossa rakennetaan ammattioppilaitoksiin soveltuva matematiikan lähtötason arviointitesti. Arviointikokeen tehtävät olivat koko peruskoulun matematiikan oppimäärästä, ja kokeesta rajattiin tämän tutkimuksen aineistoksi moninumeroisten peruslaskutoimitusten tehtävät. Virheiden analysointia varten muodostettiin peruslaskutoimitusten algoritmien virheluokittelu.

Tutkimuksessa tullaan selvittämään ammatillisia opintoja aloittavien opiskelijoiden moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitusten hallintaa ja opiskelijoiden tekemät yleisimmät virhetyypit peruslaskutoimitusten algoritmeissa. Tämän lisäksi tarkastellaan virhetyyppien ja koko matematiikan kokeen osaamistason välistä yhteyttä. Virheiden tutkimisella voidaan arvioida opetuksen laatua ja käytettyjen menetelmien toimivuutta. Tunnistettaessa tyypillisimmät virheet tiedetään myös hankalimmat kohdat opetettavassa asiassa ja puutteet oppilaiden osaamisessa. Kun opetuksessa kiinnitetään näihin asioihin erityistä huomiota, virheellistä oppimista voidaan korjata tai ennaltaehkäistä virheiden syntymistä. Siten oppilaiden tekemien virheiden analysointi antaa tarpeellista tietoa opetuksen suunnittelulle.

2 MATEMATIIKAN OSAAMINEN PERUSKOULUN JÄLKEEN

Matematiikan oppimista arvioidaan suhteessa matematiikan opetussuunnitelman tavoitteisiin. Koko peruskoulun opetussuunnitelmaa ollaan uudistamassa ja opetussuunnitelmaan on tulossa yksityiskohtaisemmat ohjeet oppiaineiden sisällöstä ja tavoitteista kuin aikaisemmassa peruskoulun 1994 opetussuunnitelmassa. Opetussuunnitelman toteutumista koko ikäluokan osalla arvioidaan kansallisilla arviointitutkimuksilla. Tämän lisäksi kansainvälisissä matematiikan osaamista arvioivissa tutkimuksissa verrataan oppimistuloksia eri maiden välillä. Seuraavassa tarkastellaan matematiikan opetussuunnitelman tavoitteita sekä tuodaan esille arviointitutkimuksien tuloksia.

2.1 Matematiikan opetussuunnitelma

Opetussuunnitelmassa määritellään matematiikan opetuksen tavoitteet, sisällöt ja menetelmät sekä kriteerit hyvälle osaamiselle. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden 1994 mukaan matematiikan opetuksen tulisi tarjota oppilaalle mahdollisuus hankkia sellaiset matemaattiset perustiedot ja -taidot, jotka luovat pohjaa jatko-opinnoille ja antavat valmiuksia selvitä jokapäiväisissä toiminnoissa ja työelämässä (Opetushallitus 1994, 74).

Opetussuunnitelmassa tarkastellaan ala- ja yläluokkien keskeisiä oppimisen tavoitteita erikseen. Lukujen ja laskutoimitusten osalta alaluokkien opiskelussa on tärkeää, että oppilas ymmärtää luonnollisen luvun käsitteen sekä murto- ja desimaaliluvun käsitteet ja oppii peruslaskutaidot päässä, paperilla ja laskimella ja näiden käyttämisen arkielämän ongelmien ratkaisemisessa sekä tottuu arvioimaan suuruusluokkia ja tulosten oikeellisuutta. Yläluokkien opiskelussa on lisäksi keskeistä, että oppilas saa kuvan reaalilukualueesta ja oppii käyttämään reaaliluvuilla laskemista monipuolisesti arkielämän tilanteissa. (Opetushallitus 1994, 75.) Perusopetuksen päättöarvioinnin arvosanan 8 kriteereissä on eritelty tarkemmin oppimisen tavoitteet. Lukujen ja laskutoimituksen alueelta oppilaan tulisi hallita edellä mainittujen sisältöjen lisäksi mm. murtolukujen muunnokset, peruslaskutoimitukset, prosentti ja prosentin käsite ja laskutoimitusten käyttö ongelmanratkaisussa. (Opetushallitus 1999, 52–54.)

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan 1990-luvun alkupuolella peruskoulunsa aloittaneiden opiskelijoiden koetuloksia. Opiskelijoiden peruskouluajan aikana matematiikan opetussuunnitelma on muuttunut, sillä heidän kouluajan alkupuolella oli käytössä vuonna 1985 vahvistettu matematiikan valtakunnallinen opetussuunnitelma, joka uudistettiin 1994 vahvistetun peruskoulun opetussuunnitelman perusteilla. Vuonna 1985 käyttöön otetussa opetussuunnitelmassa pyrittiin siirtymään ´drillaavasta´ taitoharjoittelusta ongelmanratkaisua ja matemaattista soveltamista kehittävään opetukseen (Kupari 1993, 81). Sama trendi on näkynyt myös vuonna 1994 voimaan tullessa opetussuunnitelmassa. Vaikka matematiikan opetussuunnitelmissa on asetettu tavoitteeksi vähentää mekaanista laskuharjoittelua, tarvitaan edelleen peruslaskutoimitusten sujuvaa hallintaa päässä, paperilla ja myöhemmin laskimella (Koponen 2001, 8). Hallitessaan matematiikan peruslaskutoimituksen sujuvasti laskijalla on käytössään menetelmiä ratkaista matemaattisia ongelmia, ja siten peruslaskutoimitusten hallinta tukee ongelmanratkaisutaitoja.

2.2 Arviointitutkimukset

Edellisen vuosikymmenen aikana ja sen jälkeen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi on ollut jatkuvaa ja kohdistunut lähinnä peruskoulun päättövaiheeseen. Arviointi on tapahtunut pääasiassa Opetushallituksen sekä Koulutuksen tutkimuslaitoksen toimesta. Vuosiluokkien 1–6 matematiikan oppimäärän arviointitutkimusta on suoritettu vuonna 2000 (Niemi, 2001) sekä vuosina 1979 ja 1990 (Kupari 1993). Opetushallitus on tehnyt matematiikan päättövaiheen arviointeja vuosina 1998, 2000, 2002 (Korhonen 1999, 2001; Mattila 2003). Tätä ennen Koulutuksen tutkimuslaitos on suorittanut arviointeja vuosina 1979, 1990, 1995 (Kupari 1993; 1996). Vuosina 1993 ja 1995 Opetushallitus on tutkinut peruskoulun oppilaiden oppimistuloksia matematiikan aineopettajajärjestön valtakunnallisella päättökokeella (Korhonen 1994, Pehkonen 1997).

Näissä tutkimuksissa on matematiikan oppimäärä jaoteltu eri osa-alueisiin. Esimerkiksi Opetushallituksen vuoden 2000 tutkimuksessa osa-alueet olivat päättely, luvut ja laskutoimitukset, geometria, prosentit, funktiot ja algebra (Korhonen 2001, 23). Osa-alueiden jaottelun perusteena olivat mm. perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit (Opetushallitus 1999, 53–59). Myös Koulutuksen tutkimuslaitoksen suorittamissa tutkimuksissa on matematiikan osa-alueiden luokituksessa käytetty perusteena peruskoulun opetussuunnitelman keskeisiä tavoitteita (Kupari 1993, 85). Vaikka eri tutkimuksissa on arvioitavien matematiikan osa-alueiden valinta pohjautunut opetussuunnitelmaan, on kokeiden rakenne vaihdellut ja tästä syystä tuloksia on vaikea verrata keskenään.

Tuorein, vuonna 2002 suoritettu, kansallinen peruskoulun päättövaiheen arviointitutkimus osoittaa, että kolme neljäsosaa oppilaista hallitsee matematiikan perustaidot vähintään tyydyttävästi ja kaksi kolmasosaa vähintään hyvin opetussuunnitelman tavoitteisiin nähden. Noin kaksi viidesosaa hallitsee perustaidot kiitettävästi tai erinomaisesti. (Mattila 2003, 43.) Matematiikan osa-alueista luvut ja laskutoimitukset hallitaan parhaiten, mutta sen sijaan algebran, geometrian sekä funktioiden hallinnassa on puutteita (Korhonen 2001, 55–63; Korhonen 1999; Mattila 2003, 60–61). Myös kansainväliset oppilaiden matemaattista osaamista vertailevissa tutkimukset osoittavat, että suomalaiset hallitsevat hyvin laskutoimitukset (Kupari, Reinikainen, Nevanpää & Törnroos 2001). Vuonna 1999 tehty eri maiden oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaamista mittaava TIMSS-tutkimus sekä vuonna 2000 tehty PISA-tutkimus osoittivat Suomen koululaisten yltävän matematiikassa korkeatasoisiin tuloksiin. TIMSS-tutkimuksen mukaan suomalaiset osasivat luvut ja laskutoimitukset OECD-maiden keskiarvoa paremmin, mutta algebran ja geometrian osaaminen oli keskiarvoa heikompi (Kupari & Törnroos 2003, 48; Kupari ym. 2001, 70–71). Vastaavanlaisia tuloksia saatiin myös PISA-tutkimuksessa. Merkittävää on, että molemmat kansainväliset tutkimukset osoittivat, että suomalaisnuorten suoritusten hajonta oli pienin eli oppilaiden väliset erot osaamisessa ovat pieniä. Matalan keskihajonnan lisäksi Suomen kouluissa näkyy koulujen välinen tasa-arvoisuus eli koulujen välillä ei ole suuria tasoeroja. Koko ikäluokan yhdenmukainen koulutus näyttäisi siis tuottavan tasaisen suoritustason. (Kupari & Törnroos 2003, 54–55.)

Vaikka peruslaskutaidot osataan hyvin peruskoulun päättyessä, runsaalla viidenneksellä oppilaista on peruslaskutaidoissa uuden oppimista ja soveltamista hankaloittavia ongelmia (Mattila 2003, 44; Korhonen 2001, 69). Matematiikan perusasioiden heikko hallinta vaikeuttaa näiden oppilaiden jatko-opintoja, koska eteenpäin päästäkseen he joutuvat kertaamaan peruskoulun oppimäärään kuuluvia perusasioita. Toisaalta matematiikan taitojen puutteellisuus voi hankaloittaa jo jokapäiväisen elämän hallintaa. (Mattila 2003, 44.)

Peruskoulun päättövaiheen matematiikan osaamisen taso on sidoksissa jatko-opintoihin hakeutumiseen ja ammatilliseen koulutukseen hakeudutaan keskimäärin heikommalla matematiikan keskiarvolla kuin lukioon. Esimerkiksi pojat, jotka olivat suoriutuneet peruskoulun matematiikan opinnoista välttävällä arvosanalla verrattuna opetussuunnitelman tavoitteisiin, hakeutuivat lähes yksinomaan ammatilliseen koulutukseen. (Korhonen 2001, 35, 43.) Vuonna 1998 ammatilliseen koulutukseen hakeutuneiden nuorten päättövaiheen matematiikan arvosana oli keskimäärin numeron verran heikompi kuin lukion lyhyen matematiikan valinneiden nuorten ja kaksi numeroa heikompi kuin lukion pitkän matematiikan valinneiden nuorten arvosanat. Tämä kertoo opiskelijoiden heikosta lähtötasosta ja heijastuu myös ammatillisten opintojen päättövaiheen osaamiseen. (Wuolijoki 1999, 18–19). Opetushallituksen selvityksen mukaan matematiikan osaamisen taso oli ammatillisten opintojen päättövaiheessa tyydyttävää tai heikkoa. Kolmasosa opiskelijoista ei saavuttanut opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisia perusvalmiuksia. (Räisänen & Frisk 2002, 9.)

Teknisen alan opinnoissa on matematiikalla keskeinen sija useilla aloilla, joten on tarpeellista selvittää opiskelijoiden matematiikan osaaminen ja löytää keinoja saavuttaa ammatissa tarvittava taso. Matematiikan osaaminen heijastuu myös fysiikan ja sähköopin sekä useiden alojen ammattiaineiden hallintaan. Ammattimatematiikan opettajia haastateltaessa on tullut ilmi, että matematiikan kurssin aluksi joudutaan usein kertaamaan peruskoulun oppisisältöjä. Kertausta tarvittaisiin sekä perusasioissa että soveltamisessa. (Helakorpi 1998, 359.) Ammatilliseen koulutukseen hakeutuvien opiskelijoiden heikon arvosanan valossa tämä on väistämätön tarve.

3 ALGORITMIEN OPPIMINEN

Algoritmi on yksikäsitteinen toimintaohje tehtävälle, joka suoritetaan vaiheittain (Thompson & Martinson 1993, 21). Algoritmilla tarkoitetaan siis systemaattista ja tarkkaa menetelmää, jolla voidaan ratkaista joukko ongelmia noudattamalla ennalta määrättyjä välivaiheita askel askeleelta. Algoritmin etu on sen yleistettävyydessä; jos osaa ratkaista jonkun ongelman algoritmia käyttäen, osaa ratkaista kaikki samankaltaiset ongelmat. Algoritmin etuna on myös se, että laskutoimitusta, jota on mahdotonta laskea päässä, voidaan pilkkoa helpommiksi päässälaskuiksi ja ratkaista lasku vaihe vaiheelta. (Maurer 1998, 21–22.) Peruslaskutoimitusten algoritmeista käytetään kouluopetuksessa nimitystä allekkainlasku tai jakokulmassa jakaminen.

3.1 Algoritmit matematiikan opetuksessa

Matemaattiseen tiedon luonteeseen kuuluu hierarkkisuus eli uusi opittava asia muodostuu aikaisemmin opittujen taitojen pohjalle. Matematiikan opetus etenee peruskoulussa siten, että saman sisältöalueen aiheet vaikeutuvat ylemmille vuosiluokille edetessä. Tämän spiraaliperiaatteen mukaisesti matematiikassa jo aikaisemmin opittuja asioita harjoitellaan ja laajennetaan vuosiluokittain (Koponen 1995, 45; Malinen 1972, 32–33).

Peruslaskutoimitusten algoritmien opetus etenee spiraaliperiaatteen mukaisesti siten, että opetus aloitetaan peruskoulun alaluokilla ja niiden käyttöä varmennetaan ja sovellusta lisätään myöhemmillä vuosiluokilla. Samalla vuosiluokalla opetellaan useiden eri algoritmien käyttöä. Esimerkiksi kertolaskualgoritmin opetus alkaa toisella luokalla tutustumisella kertomiseen allekkain, kolmannella luokalla opetetaan allekkainlasku yksinumeroisella kertojalla, neljännellä luokalla kaksinumeroisella kertojalla ja kuudennella luokalla opetetaan desimaalilukujen kertominen. Vastaavasti jakolaskualgoritmin oppiminen alkaa neljännellä luokalla, jolloin opitaan jakokulmassa jakaminen yksinumeroisella jakajalla, ja viidennellä luokalla osaamista laajennetaan kaksinumeroisilla jakajilla laskemiseen. (Koponen 1995, 47–48.)

Algoritmien opetusta voidaan tarkastella tarkemmin oppikirjojen kautta. Yleisin käytössä oleva matematiikan oppikirjasarja on WSOY:n kustantama Laskutaito, jota käyttämällä on myös saatu hyviä oppimistuloksia peruskoulun alaluokkien matematiikan opetuksessa (Niemi 2001, 57–58). Kirjasarjassa aloitetaan peruslaskutoimitusten algoritmien opettaminen toisella vuosiluokalla, jolloin tutustutaan yhteen- ja vähennyslaskuun kaksi- ja kolminumeroisilla luvuilla (Rikala, Sieppi, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 2003, Rikala, Sieppi, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 2002). Kirjasarjassa on pääsääntöisesti yhdellä aukeamalla yksi uusi opittava asia. Algoritmin ratkaisusta on esimerkki yksinkertaisine ohjeineen, jonka jälkeen kyseisestä asiasta on harjoituksia. Kolmannella luokalla yhteen- ja vähennyslaskun hallintaa laajennetaan kolmi- ja nelinumeroisiin lukuihin ja opetellaan muistinumeron käyttö. Lisäksi opetellaan lainaaminen kaksi kertaa peräkkäin, nollan yli lainaaminen sekä kahden nollan yli lainaaminen peräkkäisinä kokonaisuuksina. Uutena algoritmina opetetaan kertolaskualgoritmi. (Rikala, Uus-leponiemi & Ilmavirta 1997a, 1997b.) Neljännellä luokalla lasketaan yksi-, kaksi- ja kolminumeroisilla kertojilla. Tämän lisäksi neljännellä luokalla opetetaan jakolaskualgoritmi (Rikala, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 1999a, 1999b). Viidennellä luokalla kerto- ja jakolaskualgoritmin osaamista laajennetaan käsittämään myös desimaaliluvuilla laskeminen sekä opetellaan jakamaan kaksinumeroisella jakajalla (Koivisto, Salonen, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 2000a, 1999). Kuudennella luokalla kerto- ja jakolaskualgoritmin käyttöä kerrataan ja varmennetaan (Koivisto, Salonen, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 2000b).

Spiraaliperiaate matematiikan opetuksessa ei ole kuitenkaan ainoa mahdollinen opittavan aineksen järjestystapa. Cawley, Parmar, Yan ja Miller (1998, 73) pohtivat vaihtoehtoisena periaatteena spiraaliperiaatteelle ns, intensiivistä opetussuunnitelmaa (intensified curriculum), missä yhden vuosiluokan aikana opittavia aihealueita on vähemmän, mutta niitä käsitellään syvällisemmin. Tällöin esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskualgoritmit käsiteltäisiin sekä yksi- että moninumeroisilla luvuilla intensiivisesti yhden vuosiluokan aikana eikä opittavaa aihetta hajautettaisi usealle vuosiluokalle. Seuraavaan algoritmiin siirryttäisiin siis vasta sitten, kun edellinen algoritmi hallitaan sekä helpoissa että vaikeissa laskutilanteissa. Kerto- ja jakolaskualgoritmien oppiminen siirtyisi näin ollen myöhemmille vuosiluokille. Tällöin tulisi kuitenkin tietää, milloin olisi oppilaalla otollinen kehitystaso omaksua tietty matematiikan osa-alue.

Peruslaskutoimitusten algoritmit opetetaan siis pääsääntöisesti peruskoulun viidennen ensimmäisen vuosiluokan aikana ja opetus etenee niin, että opetettavaa asiaa kerrataan ja laajennetaan vuosiluokkien edetessä. Toisaalta intensiivinen opetussuunnitelma, jossa keskitytään vain yhteen algoritmiin kerrallaan, voi antaa oppilaalle ja opettajalle enemmän aikaa syventyä tietyn algoritmin hallintaan ja ymmärtämiseen.

3.2 Algoritmien käytössä tarvittavat matemaattiset taidot

Ennen peruslaskutoimitusten algoritmin opetusta oppilaalle on jo kehittynyt matemaattista tietoa ja ajattelua informaalissa ympäristössä ennen kouluikää ja formaalisti kouluopetuksessa. Oppilaalle pitäisi olla kehittynyt esimerkiksi lukukäsitys, mentaalinen lukujono ja kyky laskea yksinkertaisia laskutoimituksia. Oppiessaan algoritmin ratkaisun oppilas oppii myös sovittuja merkintätapoja algoritmin askelille ja välivaiheille. Tällaisista muotosäännöistä (notational syntax) ovat esimerkkinä lukujen merkintä sarakkeisiin tai muistinumeron merkitseminen tiettyyn paikkaan. (VanLehn 1990, 14.)

Joidenkin taitojen hallitseminen on erityisen tärkeää algoritminen oppimiselle ja tarkoituksenmukaiselle käytölle. Kymmenjärjestelmän ymmärtämisen ja peruslaskutoimitusten algoritmien hallinnan välisestä yhteydestä saadut tutkimustulokset ovat vakuuttavia. Kymmenjärjestelmän käsitteen sisäistäminen on olennaista peruslaskutoimitusten algoritmien hallinnassa, sillä allekkain laskemisessa lukujen merkintä paikka-arvon mukaan sekä yhteenlaskun muistiinvienti ja vähennyslaskun lainaaminen perustuvat kymmenjärjestelmään (Fuson & Kwon 1992). Peruskoulun opetussuunnitelmassa kymmenjärjestelmän ymmärtäminen on kirjattu toisen vuosiluokan tavoitteisiin (Opetushallitus 2003, 105).

Vertailtaessa kymmenjärjestelmän hyvin ja heikosti ymmärtävien oppilaiden osaamista moninumeroisten lukujen laskemisessa havaittiin, että kymmenjärjestelmän hyvin ymmärtävät oppilaat osasivat soveltaa laskutoimituksista olevaa tietoaan muihin laskutehtäviin paremmin kuin huonosti kymmenjärjestelmän ymmärtävät oppilaat. Paremmin kymmenjärjestelmän ymmärtävillä oppilailla oli myös parempia itsekeksittyjä strategioita moninumeroisten lukujen laskemiseen. (Hiebert & Wearne 1996, 279.) Algoritmien lainaus- ja muistiinvientivirheiden on myös todettu vähenevän, kun opetuksessa on tarkasteltu algoritmin rakentumista kymmenjärjestelmään pohjautuen (Fuson & Briars 1990).

Keskeinen edellytys sujuvalle laskutoimitusten tekemiselle on aritmeettisten faktojen osaaminen automaation tasolla. Tällä tarkoitetaan yksinkertaisten laskutoimitusten ($2 + 8 = 10$, $3 \cdot 4 = 12$) muistamista ja muistista palauttamista automaattisina faktoina (ks. Geary 1994; Räsänen & Ahonen 1998, 172–173). Jos aritmeettiset faktat osataan automaattisesti, jokaisen laskun yhteydessä ei tarvitse laskea näitä usein toistuvia laskuja uudestaan. Pienempien lukujen faktojen (2 + 3, 2 · 3) hakeminen muistiverkostosta on helpompaa ja nopeampaa kuin suurien lukujen muistista palauttaminen. Toisaalta kahden, kolmen ja neljän kertotaulu voi olla helpommin muistettavissa myös siitä syystä, että ne saavat koulussa enemmän toistoa ja harjoitteluaikaa kuin seitsemän, kahdeksan ja yhdeksän kertotaulu. (Ashcraft 1992.)

Kertotaulujen opettelua irrallisina laskuina voidaan verrata muistilistoihin, joissa ei eri yksikköjen välillä ole suhdetta toisiinsa. Tämänkaltainen opettelu rasittaa muistia ja tuottaa vääriä vastauksia. Sen sijaan laskutoimitusten vaihdannaisuuden (esim. 3 · 4, 4 · 3) opettaminen ja ymmärtäminen kuormittaisivat vähemmän muistia, ja samalla yksittäisten laskutoimitusten välille rakentuisi suhteita ja kertotaulu muodostuisi irtonaisten yksikköjen sijasta verkostoksi. (Dehaene 1997, 125–127.) Cawley, Parmar, Yan ja Miller (1998, 70) esittävät, että laskutoimitusten vaihdannaisuuden ymmärtäminen ja hyödyntäminen vähentää puolet siitä faktamäärästä, mitä pitäisi muistaa. Jos oppilaalla on selkeä aritmeettisten faktojen muistista palauttamisen vaikeus, on hyvä arvioida sitä, kannattaako tavoitteena pitää kaikkien kertotaulujen ulkoa oppimista. On ehdotettu, että oppilaan tulisi osata vain esimerkiksi kahden, viiden ja kymmenen kertotaulut ulkoa (Cawley ym. 1998, 70).

Toisaalta vastaukset kertolaskuihin voidaan saada muillakin keinoilla kuin automaattisina faktoina. Aikuisetkaan eivät välttämättä muista kaikkia aritmeettisia faktoja ja tällöin tieto voidaan tarkistaa käyttämällä jotain menetelmää (Dehaene 1997, 126). Esimerkiksi laskun 9 · 8 voi laskea osissa eli 10 · 8 – 8. Jordan ja Montani (1996, 103) lisäävät, että tällainen menetelmällinen tieto auttaa silloin, kun muistista palauttaminen ei onnistu. Tämä edellyttää kuitenkin tietoa siitä, miten ongelma on ratkaistavissa.

3.3 Matemaattinen ajattelu algoritmeissa

Tarkasteltaessa algoritmien oppimista tulee tarkastella myös käsitteellisen ja menetelmällisen tiedon eroja ja näiden suhdetta toisiinsa, sillä nämä matemaattisen ajattelun tavat vaikuttavat taustalla algoritmien suorituksessa. Käsitteellisellä tiedolla tarkoitetaan ymmärrystä matemaattisten käsitteiden välisistä suhteista. Se rakentuu uuden tiedon linkittyessä jo aikaisemmin opittuun tietoon tai jo opittujen asioiden linkittyessä toisiinsa. Tiedon palasina voivat olla esimerkiksi tieto siitä, miten yhteenlaskualgoritmin ratkaiseminen etenee, sekä tieto siitä, että desimaaliluvuissa on pilkun jälkeen ensin kymmenesosien paikka ja sen jälkeen sadasosien paikka. Kun laskija osaa järjestää luvut allekkain paikkajärjestelmän mukaisesti ja yhteen- tai vähennyslaskun aikana ymmärtää, minkä vuoksi luvut on järjestetty siten, hänellä on käsitteellistä ymmärrystä. Menetelmällinen tieto puolestaan viittaa tietoon matemaattisesta symbolijärjestelmästä sekä säännöistä, algoritmeista ja muista menetelmistä, joita käytetään matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. (Hiebert & Lefevre 1986, 3–6.)

Käsitteellisellä tiedolla on kaksi tasoa. Primaarisella tasolla (primary level) henkilö osaa yhdistää saman kontekstiin kuuluvia asioita toisiinsa. Tällöin hän osaa esimerkiksi soveltaa yhteenlaskualgoritmin muisiinvientisääntöä erilaisiin yhteenlaskutehtäviin, mutta ei hallitse muistiinvientiä kertolaskun yhteenlaskuvälivaiheessa. Kun yhteys pystytään muodostamaan myös eri konteksteihin kuuluvien käsitteiden välillä, konseptuaalinen tieto on reflektiivisellä tasolla (reflectve level). (Hiebert & Lefevre 1986, 4–5.) Reflektiiviselle tasolle on päästy esimerkiksi silloin, kun henkilö ymmärtää, että lukujen asettelu paikkajärjestelmän mukaisesti yhteenlaskualgoritmissa on eräs esimerkki yleisestä ideasta siitä, että allekkain laskettaessa luvut järjestetään niiden paikka-arvon mukaisesti.

Haapasalo ja Kadijevich (2000) ovat analysoineet useiden tutkijoiden käsityksiä käsitteellisen ja menetelmällisen tiedon välisistä eroista. Myös he päätyvät määrittelemään käsitteellisen tiedon tiedoksi erilaisten käsitteiden, sääntöjen ja toimintojen rakentumisesta ja suhteesta toisiinsa. Menetelmällisellä tiedolla puolestaan tarkoitetaan näiden sääntöjen, toimintojen ja algoritmien käyttämistä dynaamisesti ja tarkoituksenmukaisesti. Menetelmälliseen tietoon kuuluu myös tietämystä siitä, miten nämä muodostuvat. Tämän lisäksi Haapasalo ja Kadijevich painottavat myös käsitteellisen tiedon dynaamisuutta. He toteavat, että käsitteellinen ja menetelmällinen tieto voidaan joissakin tapauksissa erottaa toisistaan vain tietoisuuden tasossa. Menetelmällinen tieto voi näkyä toiminnon vaiheiden suorittamisena automatisoituneesti, kun taas käsitteellinen tieto vaatii aina ajattelua. (Haapasalo 2003, 3–4.)

Käsitteellinen tieto rakentuu aina ymmärtävälle oppimiselle. Sen sijaan menetelmällinen tieto voidaan oppia myös ulkoa ilman ymmärtävää oppimista. Tämänkaltainen tieto ei kuitenkaan linkity aikaisemmin opittuihin asioihin ja käsitteellisen tiedon verkkoon, vaan jää irralliseksi tiedoksi. Tietoa ei myöskään voida yleistää muihin tilanteisiin, vaan sitä osataan käyttää vain samanlaisissa tilanteissa, missä se on opittu tai sitä muistuttavissa tilanteissa. (Hiebert & Lefevre 1986, 8.) Matemaattisten käsitteiden syvällinen ymmärtäminen riippuu juuri käsitteellisen tiedon hallitsemisesta. Koska ei ole olemassa irrallisia, toisistaan erillään olevia käsitteitä, niitä ei myöskään voida tarkastella toisistaan riippumatta. Näin ollen on tärkeää, että laskija tuntee ja hallitsee eri käsitteiden merkitykset ja niiden väliset suhteet. (Haapasalo 1998, 66.)

Algoritmien oppiminen pelkkänä mekaanisena toimenpiteenä ilman siihen perustuvaa matemaattista tietämystä voi johtaa puutteelliseen oppimiseen. Lehtinen ja Kinnunen (1993) kuvaavat artikkelissaan Lehtisen, Ketolan, Vuontelan, Huotarin ja Savimäen vuonna 1993 tekemää tutkimusta, jossa selvitettiin seitsemäsluokkalaisten oppilaiden koesuorituksen ja matemaattisen ajattelun välistä yhteyttä. Matematiikassa hyvin menestyvien oppilaiden matemaattista ajattelua tutkittiin kahden kokeen ja teemahaastattelun avulla. Tulokset osoittivat, että vain osa oppilaista kykeni perustelemaan käyttämänsä mekaaniset laskualgoritmit niiden edustamalla matemaattisella tietämyksellä. (Lehtinen & Kinnunen 1993, 51.) Näin ollen oppilailla ei ollut syvää käsitteellistä tietämystä algoritmien käytöstä, vaikka he hallitsivat niiden käytön hyvin.

Ei ole kuitenkaan itsestään selvää, että opettajalla itsellään on käsitteellistä ymmärrystä algoritmien rakentumisesta. Vertailtaessa kiinalaisten ja yhdysvaltalaisten matematiikan opettajien käsitteellistä tietoa huomattiin, että opettajien välillä oli eroja siinä, mitä asioita he painottivat vähennyslasku- ja kertolaskualgoritmien opetuksessa. Opettajat, joilla oli itsellään hyvää käsitteellistä tietoa algoritmin muodostumisesta, pitivät tärkeänä sitä, että oppilaat ymmärsivät paikka-arvon merkityksen lukujen rakentumisessa. Tällöin esimerkiksi kaksinumeroisen kertojan 43 kertojat ovat todellisuudessa 4:n ja 3:n sijasta neljä kymmentä ja kolme ykköstä. Osa opettajista piti puolestaan hyvänä keinona käytettävän esimerkiksi kertolaskun välivaiheessa erilaisia muistisääntöjä, jolloin opetus kuitenkin pohjautuu menetelmälliseen tietoon. (Ma 1999, 33–35.) Suurin osa kiinalaisista opettajista käytti vähennyslaskun opetusmenetelmänä algoritmin sijasta mentaalisen strategian opettamista, jossa lukujen erotus ratkaistaan hajottamalla ja uudelleen ryhmittelemällä luvut mielessään (Ma 1999, 12–15). Mikäli opettajalta puuttuu käsitteellistä tietoa matematiikasta, voi olla mahdotonta opettaa matematiikkaa käsitteellistä ymmärrystä lisäävällä tavalla.

Matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimuksissa painotetaan käsitteellisen oppimisen merkitystä syvällisen ymmärtämisen saavuttamisessa. Useaan otteeseen palataan siihen, että matematiikkaa voidaan laskea mekaanisesti ilman käsitteellistä ymmärrystä, mutta soveltaminen muodostuu tällöin hankalaksi ja virheelliset ratkaisutavat lisääntyvät. Käsitteellinen oppiminen tulisi olla tavoitteena myös matematiikassa heikommin pärjäävien oppilaiden kohdalla. Algoritmin harjoitteluvaiheessa on tärkeää, että oppilaat saavat esittää ongelman erilaisilla menetelmillä kuten esimerkiksi välineiden avulla, kuvallisesti sekä sanallisesti. Vasta kun ongelma osataan esittää konkreettisesti erilaisien menetelmien avulla, voidaan siirtyä laskemaan laskutoimituksia. (Woodward & Howard 1994, 134.) Käsitteellistä ymmärrystä edistää siis se, että opetteluvaiheessa ongelmat esitetään konkreettisesti eri menetelmien avulla. Myös peruskoulun uudessa, vielä toistaiseksi kokeilussa olevassa, matematiikan opetussuunnitelmassa asetetaan hyvän osaamisen kriteereiksi viidennen luokan päättyessä mm. matemaattisten käsitteiden ymmärtämisen ja kyvyn esittää niitä sekä verbaalisesti että välineiden, kuvien ja symbolien avulla (Opetushallitus 2003, 107–108). Oppimiseen on kuitenkin varattava riittävästi aikaa, sillä virheelliset ajattelutavat näkyvät myöhemmin oppilaan suorituksessa.

4 VAIKEUDET ALGORITMIEN SUORITTAMISESSA

Peruslaskutoimitusten algoritmien käyttöä harjoitellaan koulussa usealla vuosiluokalla ja ylemmillä vuosiluokilla niitä käytetään välineinä matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. Algoritmit on kehitetty juuri selkeiksi välineiksi moninumeroisten lukujen laskutoimitusten ratkaisuun. Pitkäaikaisesta opettelusta ja harjoittelusta huolimatta algoritmeissa tehdään virheitä. Seuraavassa tarkastellaan algoritmeissa esiintyvien virheiden taustoja ja virheelliseen oppimiseen vaikuttavia tekijöitä.

4.1 Virheelliset säännöt algoritmeissa

Algoritmien opetuskäytäntöä on kritisoitu siitä, että se painottuu valmiiden algoritmien mieleen painamiseen mekaanisina toimenpiteinä ilman huomion kiinnittämistä käsitteelliseen ymmärtämiseen. Oppilaat oppivat merkitsemistapoja, laskustrategioita ja muistisääntöjä näiden tueksi, mutta algoritmien perimmäinen tarkoitus jää ymmärtämättä. (Kinnunen & Vauras 1998, 273; Lehtinen & Kinnunen 1993, 50.) Myös algoritmien sovellettavuuden erilaisiin käytännön tilanteisiin ajatellaan olevan opittavissa mekaanisen harjoittelun kautta. Tällöin kuitenkin osaaminen liittyy pelkästään algoritmien pinnallisiin ominaisuuksiin eikä johda käsitteiden ja matematiikan syvälliseen ymmärtämiseen. (Haapasalo 1998, 68.) Erityisesti heikompien oppilaiden kohdalla algoritmien pinnallinen oppiminen johtaa taidon nopeaan unohtamiseen, ellei laskualgoritmia jatkuvasti harjoitella. Suorituksessa tämä näkyy virheiden lisääntymisenä ja algoritmien sääntöjen sekoittumisena. (Lehtinen & Kinnunen, 1993, 50.)

Pinnallisen ja algoritmien nopeaan automatisoitumiseen pyrkivän oppimisen seurauksena oppilaalle syntyy helposti omia sääntöjä ja vääriä käsityksiä, jolloin riski systemaattisiin virheisiin lisääntyy. Oppilaan omat laskusäännöt voivat olla erittäin sitkeitä ja niiden korjaaminen vaatia virheellisten sääntöjen esille tuomista ja niiden käsittelyä opetuksessa. (Lehtinen & Kinnunen 1993, 51.) Algoritmeissa esiintyviä virheitä voidaan luokitella niiden alkuperän mukaan ns. ”erheisiin” (slips) ja ”virheisiin” (bugs). Näiden välinen ero on siinä, että erheet ovat satunnaisia huolimattomuusvirheitä, kun taas virheet ovat systemaattisia, jotka syntyvät esimerkiksi aikaisemmin opitun säännön yleistämisestä loogisesti mutta virheellisesti (Bryant & River 1997, 63; VanLehn 1990, 4). Oppilaan omia virheellisiä sääntöjä voidaan kutsua myös miniteorioiksi, joka on tosin ”virheitä” laajempi käsite. Miniteoriat ovat oppilaan itse rakentamia sääntöjä, jotka voivat olla oikealla tavalla matemaattiseen tietoon perustuvia tai ne voivat olla virheellisiä paikkaansa pitämättömiä sääntöjä. (Huhtala 2000, 121.)

Tutkittaessa 275 viidesluokkalaisten oppilaan käyttämiä erilaisia strategioita jakolaskua ratkaistessaan havaittiin, että oppilaat käyttävät eniten opetettua algoritmia eli jakokulmassa jakamista. Tätä strategiaa käytettäessä esiintyi kuitenkin eniten virheitä. Jakokulmassa jakamisen lisäksi oppilaat käyttivät myös 14 muuta strategiaa, joista osa osoittautui tehokkaammaksi menetelmäksi ratkaista jakolaskutehtävä ja joita käyttämällä virheitä esiintyi vähemmän. Oppilaiden käyttämiä hyviä vaihtoehtoisia strategioita olivat esimerkiksi jakajan tuplaaminen (doubling) ja jaettavan paloitteleminen osiin (chunking). Jos siis oppilas on itse rakentanut menetelmän, jolla ratkaisee jakolaskutehtävän, hän osaa käyttää menetelmää oikein. Vaihtoehtona perinteisen jakolaskualgoritmin opettamiselle olisikin opettaa juuri oppilaiden käyttämiä erilaisia tehokkaita strategioita. Perinteinen jakolaskualgoritmi voi jäädä oppilaalle pelkäksi välivaiheiden ketjuksi, jolloin oppilas ei tiedä mitä tekee ja miksi. Tällöin lopputuloksena on virheellisiä laskusuorituksia ja omituisia vastauksia. Standardoitua jakolaskua käyttäessään oppilas voi myös algoritmin heikon hallinnan vuoksi päätyä omituiseen virheelliseen vastaukseen kyseenalaistamatta vastauksen oikeellisuutta. (Anghileri 2001, 101.)

4.2 Matematiikan oppimisvaikeus

Algoritmisissa suorituksissa esiintyvät vaikeudet voidaan liittää yleisimpiin matematiikan oppimisvaikeuksiin. ICD-10 -tautiluokituksen mukaan matematiikan oppimisvaikeudella tarkoitetaan oppilaan älykkyydestä ja opetuksesta laadusta riippumatonta vaikeutta oppia koulumatematiikan asioita (Räsänen 1998, 332–333). Matematiikan oppimisvaikeutta koskevassa tutkimuksessa on pyritty löytämään matematiikan oppimisvaikeuden alaluokkia (mm. Rourke & Strang 1985). Geary (1994, 183–187) on muodostanut käytettävissä olevan tietämyksen perusteella kolmijakoisen matematiikan oppimisvaikeuksien luokittelun, jossa huomioidaan proseduraaliset eli laskutoimitusten suorittamiseen liittyvät menetelmälliset vaikeudet omana alaryhmänä.

Ensimmäisen luokan muodostavat oppilaat, joiden matemaattinen vaikeus liittyy aritmeettisten laskufaktojen muistista palauttamiseen. Aritmeettisten laskufaktojen muistista palauttamisen vaikeus liitetään useissa tutkimuksissa matematiikan oppimisvaikeuteen (mm. Ashcraft 1992, Baroody 1987, Geary 1994, Jordan & Montani 1996, Lehtinen & Kinnunen 1993, Rourke & Strang 1985). Aritmeettisiin laskufaktoihin liittyy paljon virheitä ja laskujen ratkaisuajat ovat epäsystemaattisia normaaleihin ikätovereihin verrattuna. Tämän tyypin vaikeudet näyttävät olevan suhteellisen pysyviä ja suorituksessa voi näkyä vain vähän parannusta vuosiluokilta toiselle siirryttäessä. Aritmeettisten faktojen muistista palauttamisen ongelma on yhdistetty lukemisen vaikeuteen. (Geary 1994, 183–184.)

Toisen alaluokan ongelmat liittyvät aritmeettisten proseduurien, kuten laskutapojen ja algoritmien, käyttöön. Geary (1994, 184–185) huomauttaa, että on epävarmaa, johtuvatko nämä vaikeudet viivästymästä proseduurien taustalla olevien käsitteiden omaksumisessa vai onko syynä erityinen proseduurien suorittamisen vaikeus. Neuropsykologisesta tutkimuksesta on kuitenkin löytynyt viitteitä siitä, että on olemassa erityinen proseduraalinen vaikeus, joka olisi yhteydessä vaurioon vasemman aivopuoliskon otsalohkossa (mm. Temple 1991). Osa proseduurien suorittamiseen liittyvistä virheistä voi johtua visuo-spatiaalisen hahmottamisen vaikeudesta, joka muodostaa kolmannen ja viimeisen alaryhmän tässä matematiikan oppimisvaikeuksien luokittelussa. Vaikeus numeerisen informaation visuo-spatiaalisen tulkinnassa voi ilmetä esimerkiksi numeroiden kääntymisenä tai virheinä moninumeroisten lukujen kirjoituksessa. Peruslaskutoimitusten algoritmeissa yleisesti esiintyvät muistiinvienti- ja lainausvirheet voivat osaltaan johtua visuo-spatiaalisen hahmottamisen vaikeudesta. Kaikki proseduraaliset virheet eivät kuitenkaan ole selitettävissä hahmottamiseen liittyvällä vaikeudella. (Geary 1994, 185–186.)

Matematiikan oppimisvaikeutta koskevissa tutkimuksissa on todettu, että matemaattiset toiminnot voivat olla toisistaan riippumattomia. Tällainen tulos saatiin esimerkiksi kahden koehenkilön tapaustutkimuksessa, joista toisella oli ainoastaan aritmeettisten faktojen muistamisessa ongelmia ja toisella ainoastaan ongelmia laskuoperaatioiden suorittamisessa (double-dissociation). (mm. Temple 1997, 1991) Ensimmäisen koehenkilön aritmeettisten laskufaktojen muistista palauttamisen vaikeussuoritus ei parantunut intensiivisestä erityisopetuksesta huolimatta. Toisella koehenkilöllä oli ainoastaan algoritmien suorittamisen vaikeus. On siis osoitettu, että matematiikan oppimisvaikeutta ei ole yhtä tyyppiä, vaan se voi ilmetä monella eri tavalla ja toisaalta matemaattiset prosessit voivat olla toisistaan riippumattomia

Verrattaessa oppimisvaikeutisten oppilaiden ja normaalisti suoriutuvien oppilaiden peruslaskutoimitusten osaamista on havaittu, että oppilaiden välillä on eroa sekä osaamisen kehityksessä että siinä, mitä virheitä he tekevät. Tämä tulos saatiin tutkittaessa 9–14-vuotiaiden matematiikasta normaalisti suoriutuvien ja oppimisvaikeutisten oppilaiden suoriutumista peruslaskutoimitusten algoritmeissa. Tutkimus osoitti, että oppimivaikeutisilla oppilailla ei tapahtunut kehitystä osaamisessa vaan heidän suoritustasonsa oli samaa luokkaa eri vuosiluokilla. (Cawley et al. 1998, 70–71.) Tämän lisäksi oppimisvaikeutisilla oppilailla oli virheellisten vastausten variaatio suurempi kuin normaalisti suoriutuvilla oppilailla. Oppilaat, joilla oli oppimisvaikeuksia, olivat päätyneet vääriin vastauksiin sekä laskuvirheiden että algoritmien sääntöihin liittyvien virheiden vuoksi. Oppilaiden tekemistä virheistä saattoi päätellä, että oppilailla oli puutteellinen käsite paikka-arvosta. Sen sijaan normaalisti suoriutuvat oppilaat saivat vääriä vastauksia pääasiassa laskuvirheiden vuoksi. (Cawley et al. 1996, 235–236.) Matematiikan oppimisvaikeus voi siis ilmetä eri tavoin. Tästä syystä matematiikan erityisopetuksessa tulisi olla lähtökohtana oppilaan yksilöllisyys, jonka vuoksi on tärkeää arvioida oppilaan osaamista ja taitoja.

5 DIAGNOSTINEN VIRHEIDEN LUOKITTELU

Matemaattisessa suorituksessa esiintyvien virheiden analysoinnilla saadaan tutkimuksellisesta näkökulmasta riippuen erilaista tietoa. Virheitä on analysoitu opetuksellisista lähtökohdista käsin pyrkimyksenä tuottaa opetusta tukevaa tietoa (mm. Koponen 1983; Magne & Thörn 1987a, 1987b) tai psykologisista lähtökohdista tavoitteena saada lisätietoa ihmisen kognitiivisesta toiminnasta. Psykologian alalla on kognitiivinen tutkimus tähdännyt lisätietoon siitä, miten proseduurit opitaan (mm. VanLehn 1990). Neuropsykologisessa tutkimuksessa (mm. Spiers 1987) on puolestaan pyritty havaitun aivovaurion ja yksilön tekemien virheiden välisen yhteyden kautta selvittämään kognitiivisten toimintojen takana olevaa hermostollista toimintaa.

Tämän tutkimuksen lähtökohta virheiden analysointiin on opetuksellinen ja oppilaiden suorituksissa esiintyvien virheiden luokittelun ajatellaan tukevan opetusta ja opetuksen kehittämistä koulussa. Kun tiedetään yleisimmät virheet ja hankalimmat kohdat opetettavassa aiheessa, voidaan näihin seikkoihin kiinnittää erityistä huomiota ja opetusta muuttamalla vähentää virheellistä oppimista. Laskuvirheet voidaan näin ollen käsittää oireiksi oppilaan virheellisestä ajattelutavasta, joka voidaan tunnistamisen jälkeen korjata. Virheiden analysointi tukee myös opetussuunnitelman kehittämistä koulussa, sillä tunnistettaessa tyypillisimmät virheet voidaan hankalimmat asiat huomioida jo opetussuunnitelman tasolla (Koponen 1983, 5–6).

Virheiden laadullisen tutkimus on tärkeää, sillä pelkkä määrällinen analyysi ei anna tarvittavaa tietoa oppilaiden suorituksesta (Engelhardt 1977, 154). Virheiden analysoinnin tueksi on osassa tutkimuksista käytetty apuna oppilaan haastattelua, jolloin on saatu lisää tietoa oppilaan etenemisestä laskutoimituksessa ja virheistä ratkaisuprosessissa (mm. Huhtala 2000, Temple 1991). Myös laskuprosessin kielellistäminen tuo esille sellaista tietoa oppilaan ajatuskulusta, jota ei saataisi samalla tavalla selville pelkästään kirjallisia tuotoksia analysoimalla.

5.1 Aritmeettisten virheiden luokittelu

Eräs varhaisimmista aritmeettisten virheiden luokituksista on Robertsin vuonna 1968 tekemä neliosainen luokittelu (Spiers 1987, 16; Engelhardt 1977, 149–150). Virheitä on ryhmitelty myös Greensteinin & Strainin (1977) sekä Engelhardtin (1977) tutkimuksissa. Spiersin vuonna 1987 muodostama virheluokittelu pohjaa Engelhardtin tutkimukseen, mutta on tätä yksityiskohtaisempi (Spiers 1987, 15–21; Räsänen & Ahonen 1995, 277–280). Räsänen ja Ahonen (1995) ovat puolestaan täydentäneet Spiersin laatimaa virheluokitusta. Nämä virheluokitukset poikkeavat toisistaan niin, että vain aritmeettisten faktojen virheet (fact errors), algoritmin virheellinen suorittaminen (inappropriate algorithm) sekä väärä algoritmi (wrong operation) ovat yhteneväiset jokaisessa luokituksessa (Räsänen & Ahonen 1995, 277). Näiden tutkimusten lisäksi myös Magne ja Thörn (1987a, 1987b) ovat analysoineet ja luokitelleet oppilaiden matemaattisessa suorituksessa esiintyneitä virheitä.

Virheluokitusten välisiä suuria eroavaisuuksia voidaan osaltaan selittää sekä iältään että oppimistaidoiltaan erilaisilla koeryhmillä. Engelhartin ja Magnen ja Thörnin tutkimuksessa oppilaat olivat yleisopetuksen oppilaita. Engelhardt muodosti virheluokittelunsa kolmannen ja kuudennen vuosiluokan oppilaiden virheellisistä ratkaisuista ja Magnen ja Thörnin laajaan virheluokitteluun on analysoitu peruskouluikäisten oppilaiden suorituksia. Muut virheluokitukset on sen sijaan muodostettu oppimisvaikeutisten oppilaiden tai aivovauriopotilaiden suoritusten pohjalta. Greensteinin ja Strainin virheluokittelussa koehenkilöt olivat 12–17-vuotiaita nuoria, joilla oli diagnosoitu oppimisvaikeus, Spiers tutki aivovauriopotilaita ja Räsäsen ja Ahosen tutkimuksessa koehenkilöinä oli oppilaita, joilla oli matematiikan oppimisvaikeuksia ja lukivaikeus. Seuraavassa esitellään nämä virheluokittelut tarkemmin.

Greenstein ja Strain tutkivat Key Math Diagnostic Arithmetic testillä 82 nuoren osaamista matematiikan eri osa-alueissa. Nuoret olivat 12–17-vuotiaita ja heillä kaikilla oli diagnosoitu oppimisvaikeus. Suoritukset erosivat ikäryhmän muiden nuorten suorituksista, joten tutkijat luokittelivat testiaineiston algoritmien virheet kuuteen eri luokkaan: virheellinen algoritmi (defective algorithm), väärä algoritmi (wrong algorithm), laskuvirheet (computational error), hahmottamisen virheet (spatial error), vähennyslaskun reversaalivirheet (substraction problem reversal) ja yksityiskohtien virheet (detail). Reversaalivirhe on erotettu omaksi luokakseen huolimatta siitä, että ne kuuluvat virheellisen algoritmin virheisiin, koska näitä virheitä oli niin paljon aineistossa. (Greenstein & Strain 1977, 275–281.)

Engelhardt tutki lähes 200 oppilaan virheitä 3.- ja 6.-luokalta tavoitteena muodostaa Robertsin neliosaista luokitusta laajempi virheluokitus. Hän analysoi Standford Diagnostic Arithmetic testin laskutehtäviä ja muodosti kahdeksanosaisen virheiden luokituksen. Erona Greensteinin ja Strainin virheluokitukseen on se, että virheellinen algoritmi – luokan virheitä on eroteltu tarkemmin omiksi luokikseen, mutta toisaalta Engelhardt ei huomio virheluokituksessaan spatiaalisia virheitä erikseen. Virheluokat ovat faktavirheet (basic fact errors), virheellinen algoritmi (defective algorithm), ryhmittelyvirhe kymmenjärjestelmässä (grouping error), epätäydellinen suoritus (inappropriate inversion), keskeneräinen algoritmi (incomplete algorithm), väärä laskutoimitus (incorrect operation), nollan ja ykkösen laskusääntöjen sekoittuminen (identity error/zero error) ja nollavirheet (zero errors). (Engelhardt 1977, 149–153.)

Spiersin muodostama aritmeettisten virheiden luokittelu perustuu suurilta osin Engelhardtin esittämään jaotteluun. Hän käytti virheluokitusta aivovauriopotilaiden tekemien virheiden erittelyyn tavoitteenaan saada lisätietoa matemaattisten ongelmien yhteydestä neurologisiin ongelmiin. Aritmeettiset virheet jaetaan luokituksessa kuuteen luokkaan, jotka ovat paikka-arvovirheet (place-holding errors), numerovirheet (digit errors), lainaus tai muistiinviemisen virheet (borrow and carry errors), faktavirheet (basic-fact errors), algoritmivirheet (algorithm errors) ja symbolivirheet (symbol errors). Nämä luokat on jaettu vielä yksityiskohtaisempiin alaluokkiin. (Spiers 1987, 19–21; Ahonen & Räsänen 1995, 236–238.) Spiersin luokittelu käsittää aritmeettiset virheet laajasti ja algoritmien virheitä ei ole eritelty omiksi luokikseen.

Räsänen ja Ahonen käyttivät matematiikan ja lukemisen vaikeuksien päällekkäisyyttä koskevassa tutkimuksessaan Spiersin virheluokitusta pohjana omalle virheluokitukselleen. He lisäsivät satunnaisten virheiden (random errors) luokan ja erottivat Spiersin faktavirheluokasta kertolaskuvirheet (fact errors) omaksi alaryhmäkseen. Tämän lisäksi he erottivat lainaus ja muistiinviemisen virheet -luokasta ja algoritmivirheet -luokasta pelkästään yhteen- ja vähennyslaskualgoritmeissa esiintyvät virheet omiksi luokikseen (rule errors in addition and substraction ja algorithm errors in addition and substraction). Tämä tehtiin siksi, että saataisiin tietoa siitä, esiintyvätkö nämä virheet myös yksinkertaisimmissa algoritmeissa. Lisäksi he jättivät Spiersin luokittelusta pois symbolivirheet ja paikka-arvovirheet, koska näitä virheitä esiintyi vain vähän. (Räsänen & Ahonen 1995, 275–292.) Räsäsen ja Ahosen virheluokitus käsittää samoin kuin Spiersin luokitus aritmeettisten virheet ja algoritmien virheet sisältyvät näihin luokkiin.

Magne on tutkinut paljon peruslaskutoimituksiin liittyviä virheitä ja hänen mukaansa yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskualgoritmeista voidaan löytää samankaltaisia virheitä (Magne 1980, 147–149). Magne ja Thörn ovat analysoineet huomattavan määrän tehtäviä eli 180000 tehtävää ja muodostaneet tehtävissä esiintyvien virheiden pohjalta virheluokituksen matematiikan eri sisältöalueille (Magne & Thörn 1987a). Peruslaskutoimitusten virheet (ASMD-området) on erotettu omaksi sisältöalueekseen, ja jokaiselle peruslaskutoimitukselle on muodostettu oma virheluokitus. Kaikissa näissä laskutoimituksissa on samoja virheluokkia ja lisäksi laskutoimituksen ominaisuuksista riippuen lisäluokkia. Jokaisen laskutoimituksen virheet luokiteltiin 40 eri luokkaan, joista laskutoimituksesta riippuen 13–18 luokkaa sisältää algoritmilaskuissa tapahtuvia virheitä. (Magne & Thörn 1987b, 8–111.)

Tässä tutkimuksessa muodostetun virheluokituksen pohjalle valitut Greensteinin ja Strainin, Engelhardtin, Spiersin, Räsäsen ja Ahosen sekä Magnen ja Thörnin virheluokitukset on laadittu pääasiassa aritmeettisia virheitä luokitteleviksi. Näistä virheluokituksista Magnen ja Thörnin luokituksessa on esitetty kaikista tarkimmin myös algoritmien ratkaisussa tapahtuvia virheitä. Niin ikään Engelhardtin muodostamassa luokituksessa on ryhmitelty algoritmin virheitä hyvin, mutta luokat ovat laajoja eivätkä näin ollen erottele virheitä. Tässä tutkimuksessa pyritään luomaan kattava virheluokitus kaikille peruslaskutoimituksille algoritmeille. Uutta näkökulmaa tämän tutkimuksen virheluokitus tuo sillä, että kohderyhmänä ovat toisen asteen ammatillisen oppilaitoksen opiskelijat ja virheluokitus on rajattu peruslaskutoimitusten algoritmien suoritukseen. Seuraavassa esitellään tutkimuksessa käytetyn virheluokituksen muodostaminen.

5.2 Tutkimuksessa käytetty peruslaskutoimitusten algoritmien virheluokitus

Tutkimuksessa pyrittiin laatimaan synteesi aikaisemmista virheluokituksista ottaen huomioon näiden eroavaisuudet. Uuden virheluokituksen muodostamiseen päädyttiin siksi, että aikaisemmissa luokituksissa ei ollut tarkasteltu riittävän yksityiskohtaisesti pelkästään peruslaskutoimitusten algoritmien ratkaisuissa tapahtuvia virheistä. Algoritmien virheluokituksesta pyrittiin muodostamaan sellaisia virheitä erotteleva, joiden tunnistamisesta on opetuksellista hyötyä.

Algoritmien virheluokituksen rakentaminen aloitettiin Magnen ja Thörnin virheluokituksen pohjalta, sillä tämä luokitus oli yksityiskohtaisin. Muista virheluokituksista etsittiin samankaltaiset virheluokat Magnen ja Thörnin virheluokkien kanssa, ja täysin yhteneviä virheluokkia löydettiin kaksi: ”Aritmeettisten faktojen virheet” ja ”Väärä laskutoimitus”. Virheluokkien välistä vertailua vaikeutti se, että eri virheluokituksissa oli ryhmitelty virheluokat eri tavoin. Esimerkiksi Magnen ja Thörnin luokituksessa ”Muistiinvientivirheet” olivat yhtenä luokkana, kun Spiersin luokituksessa puolestaan muistinumeroiden käyttöön liittyvät virheet oli eritelty omiksi alaluokikseen. Lisäksi yhdessä virheluokituksessa omana virhetyyppinään huomioitu virhe saattoi olla eroteltu kahteen eri virheluokkaan toisessa virheluokituksessa. Tällaisissa tapauksissa huomioitiin tarkimmat virheluokat. Toisaalta luokittelua helpotti kuitenkin se, että virheluokitukset pohjautuivat osittain toisiinsa. Esimerkiksi Spiersin virheluokituksessa on ollut pohjana Engelhardtin luokitus ja Räsäsen ja Ahosen luokitus puolestaan on hieman laajennettu versio Spiersin luokituksesta.

Aikaisemmista virheluokituksista jätettiin pois ne virheluokat, jotka eivät koskeneet ainoastaan algoritmien ratkaisemista, kuten esimerkiksi Magnen ja Thörnin virheluokituksesta murtolukuihin liittyvät virheet sekä lukukäsitykseen ja pyöristämiseen liittyvät virheet tai Spiersin virheluokituksesta paikka-arvovirheet, jotka liittyvät ainoastaan lukujen kirjoittamiseen. Lisäksi algoritmien virheluokitukseen ei valittu virhetyyppejä, joiden tunnistamiseen olisi tarvittu oppilaan läsnäoloa ja laskusuorituksen aikana tapahtuvaa arviointia. Tällaisia virheluokkia olivat esimerkiksi

Magnen ja Thörnin ”Epävarmuus lukusanojen ja symbolien tunnistamisessa” (osäker beträffande ord, termer och symboler) ja Spiersin ”Symbolivirheet” (symbol errors).

Virheluokat ryhmiteltiin järkeviksi kokonaisuuksiksi ja niille annettiin sisältöä kuvaavat nimet. Yhtään luokkaa ei muodostettu itse, vaan jokainen luokka on yhdessä tai useammassa aikaisemmassa virheluokituksessa. Luokittelu jaoteltiin kahdeksaan pääluokkaan ja 31 alaluokkaan, ja pääluokkien järjestys noudattelee pääpiirteittäin algoritmin ratkaisun etenemistä. Tutkimuksessa käytetty peruslaskutoimitusten algoritmien virheluokitus on esitetty taulukossa 1. Taulukossa on annettu kuvaus virhetyypistä sekä tieto siitä, missä virheluokituksessa virhetyyppi on esiintynyt.

TAULUKKO 1. Peruslaskutoimitusten algoritmien virheluokitus

VIRHELUOKKA	KUVAUS VIRHETYYPISTÄ	ALKUPERÄINEN VIRHELUOKITUS
1 Virheellinen laskutoimitus	**Kaikissa laskutoimituksissa**	
1.1 Korvautuminen toisella	Laskee tehtävän väärällä laskutoimituksella. - esim. yhteenlaskun sijasta kertolaskulla	Greenstein & Strain Engelhardt Magne & Thörn Spiers Räsänen & Ahonen
1.2 Osittainen korvautuminen	Vaihtaa laskutoimitusta kesken laskusuorituksen. - esim. aloittaa yhteenlaskulla, mutta jatkaa vähennyslaskulla	Spiers
1.3 Epätäydellinen laskusuoritus	Jättää algoritmin suorittamisen kesken tai välivaiheita väliin.	Spiers Engelhardt
1.4 Virheellinen, mutta systemaattinen algoritmi	Laskee laskun virheellisillä säännöillä, mutta eteneminen on johdonmukaista. - esim. laskee kertolaskun yhteenlaskun säännöillä	Greenstein & Strain Engelhardt
2 Asettelun virheet	**Kaikissa laskutoimituksissa**	
2.1 Luvut asetettu virheellisesti	Lukuja ei ole asetettu minkään algoritmin mukaisesti. - esim. sarakkeet eivät ole kohdillaan	Magne & Thörn Spiers Räsänen & Ahonen
2.2 Luvut asetettu toisen algoritmin mukaan	- esim. jakolaskun luvut asetettu kertolaskun mukaisesti	Spiers
2.3 Lukujen reversaali asettelussa	Vähentäjä ja vähennettävä tai jakaja ja jaettava kääntyneet asettelussa.	Magne & Thörn
2.4 Väärä laskusuunta	Aloittaa laskun ratkaisemisen väärästä laskusuunnasta. - esim. yhteenlaskun vasemmalta oikealle	Magne & Thörn Spiers
2.5 Luvun korvautuminen	Numero on korvautunut toisella numerolla. - esim. 8 → 3	Spiers Räsänen & Ahonen
2.6 Luvun huomiotta jättäminen	Ei merkitse kaikkia numeroita asettaessaan luvut algoritmin mukaisesti.	Spiers Räsänen & Ahonen
2.7 Pudottaa luvun vastaukseen	Laskualgoritmia ei ole suoritettu loppuun vaan luvut on pudotettu suoraan vastaukseen.	Magne & Thörn
2.8 Vastauksen luvut asetettu väärään sarakkeeseen	Lukuja ei ole asetettu paikka-arvoltaan oikeaan sarakkeeseen vastauksessa.	Greenstein & Strain
2 Laskuvirheet	**Kaikissa laskutoimituksissa**	
3.1. Kertolaskufaktojen virheet	Kertolasku lukualueella 0–10 laskettu väärin.	Räsänen & Ahonen
3.2 Laskuvirheet	Muut yksinkertaiset yhteen-, vähennys- ja jakolaskuvirheet	Greenstein & Strain Engelhardt Magne & Thörn Spiers Räsänen & Ahonen
3.3 Laskuvirheet, kun on 0 tai 1	Laskuvirhe tapahtunut laskettaessa luvuilla 0 tai 1. - esim. $0 \cdot 3 = 3$	Engelhardt Räsänen & Ahonen

(jatkuu)

TAULUKKO 1. (jatkuu)

4 Muistiinvientivirheet	**Yhteenlaskussa tai kertolaskun Yhteenlaskuvälivaiheessa**	Magne & Thörn
4.1 Ei huomioi muistinumeroa	Merkitsee muistinumeron, mutta ei lisää sitä seuraavaan sarakkeeseen.	Spiers Räsänen & Ahonen
4.2 Muistinumero merkitään suoraan tulokseen, ei muistiinvientiä	Ei lisää muistinumeroa seuraavan sarakkeen summaan tai tuloon, vaan merkitsee koko luvun tulosriville. - esim. 67 + 85 = 1412	Engelhardt Spiers Räsänen & Ahonen
4.3 Muistinumero on lisätty väärään sarakkeeseen	Merkitsee muistinumeron esimerkiksi kymmenien sarakkeen sijasta satojen sarakkeeseen.	Spiers Räsänen & Ahonen
4.4 Vie paikka-arvoltaan väärän luvun muistiin	- Esim. luvusta 13 on numero kolme merkitty muistinumeroksi	Spiers
4.5 Nollavirhe	Sekaannus muistiinviennissä, jos luvussa on nolla.	Engelhardt Spiers Räsänen & Ahonen
5 Lainausvirheet	**Vähennyslaskussa ja jakolaskun Vähennyslaskuvälivaiheessa**	Magne & Thörn
5.1 Jättää huomiotta lainatun luvun arvon muutoksen	Ei huomioi sitä, että luvun arvo pienenee siitä lainattaessa.	Spiers Räsänen & Ahonen
5.2 Lainaa luvun arvon, ei paikka-arvon mukaisesti	Lainaa vasemmanpuoleisesta sarakkeesta luvun samanarvoisena eikä huomioi luvun paikka-arvoa.	Spiers
5.3 Lainaa paikka-arvoltaan pienemmältä suuremmalle	Lainaa oikeanpuoleisesta sarakkeesta.	Spiers
5.4 Reversaali laskun sisällä	Vähentäjä ja vähennettävä kääntyneet laskun sisällä, jotta ei tarvitsisi lainata.	Greenstein & Strain Engelhardt Spiers
5.5 Nollavirhe	Sekaannus lainauksessa, jos luvussa on nolla. - esim. nollan yli lainattaessa	Engelhardt Spiers Räsänen & Ahonen
6 Välivaiheen virheet	**Kertolaskussa ja jakolaskussa**	
6.1 Kerto- tai jakolaskun välivaiheet asetettu väärin	Luvut on sijoitettu vääriin sarakkeisiin tai muulla tavalla virheellisesti.	Engelhardt Magne & Thörn Spiers
6.2 Alasottovirhe jakolaskussa	Laskija on pudottanut väärän luvun alas tai alasottoa ei ole suoritettu lainkaan	Magne & Thörn
6.3 Liian suuri jakojäännös	Vastaukseen on hyväksytty liian suuri jakojäännös	Magne & Thörn
7 Desimaalipilkun virheet	**Kaikissa laskutoimituksissa**	Greenstein & Strain
7.1 Desimaalipilkku asetettu väärin	Desimaalipilkku on asetettu väärään paikkaan	Magne & Thörn
7.2 Desimaalipilkku puuttuu vastauksesta	Desimaalipilkkua ei ole merkitty lainkaan	Magne & Thörn
7.3 Desimaalipilkku lisätty mielivaltaisesti vastaukseen	Desimaalipilkku on lisätty, vaikka luku ei ole desimaaliluku	Magne & Thörn
8 Muut virheet	**Virheet, joita ei pysty luokittelemaan muihin luokkiin**	

”Virheellinen laskutoimitus” -pääluokassa (1) on neljä alaluokkaa, jotka sisältävät koko laskutoimitukseen liittyviä virheitä. Virhetyypeissä laskeminen on aloitettu kokonaan väärällä laskutoimituksella, säännöt ovat sekoittuneet tai laskusuoritus on jätetty kesken. ”Asettelun virheet” -pääluokassa (2) on puolestaan kahdeksan alaluokkaa. Asettelun virheet tapahtuvat pääasiallisesti laskun alussa ennen kuin varsinaisesti ryhdytään ratkaisemaan laskutoimitusta algoritmilla. Nämä virheet voivat olla yksityiskohtaisia yhden numeron korvautumisia tai laajempia koko luvun asetteluun liittyviä virheitä, jossa lukuja ei ole asetettu paikka-arvon tai pyydetyn algoritmin mukaisesti.

”Laskuvirheet” -pääluokka (3) jakaantuu kolmeen alaluokkaan. Yhteen- ja vähennyslaskuvirheet sekä kerto- ja jakolaskuvirheet on erotettu omiksi luokikseen, sillä yhteen- ja vähennyslaskuja voidaan laskea yksinkertaisilla strategioilla, mutta kertolaskut opitaan ulkoa ja kertolaskujen ratkaisemisessa käytetään enemmän muististapalauttamisen strategiaa kuin muissa laskutoimituksissa (Räsänen ja Ahonen 1995, 282). Laskuvirheet, kun laskussa on 0 tai 1, liittyvät näiden lukujen laskusääntövirheisiin.

”Muistiinvientivirheet” -pääluokan (4) virheet voivat olla yhteenlaskualgoritmissa sekä kertolaskualgoritmissa lukuja kerrottaessa tai yhteenlaskuvälivaiheessa. Tässä pääluokassa on viisi alaluokkaa. Vastaavasti ”Lainausvirheet” -pääluokan (5) virheet voivat liittyä vähennyslaskualgoritmissa lainattavaan lukuun, lainattuun lukuun tai lukuun, johon lainattu luku lisätään. Lisäksi nollasta johtuvat lainaus- ja muistiinvientivirheet on eritelty omiksi alaluokikseen molemmissa pääluokissa.

”Välivaiheen virheet” -pääluokan (6) sisältämät virheet voivat esiintyä kertolaskualgoritmin yhteenlaskuvälivaiheessa tai jakolaskualgoritmin välivaiheissa. Kolmen alaluokan virheissä välivaiheiden luvut on sijoitettu vääriin sarakkeisiin tai välivaihe on suoritettu virheellisesti. Kuitenkin kerto- ja jakolaskualgoritmien välivaiheissa esiintyvät muistiinvienti- tai lainausvirheet on luokiteltu pääluokkiin kolme (muistiinvientivirheet) ja neljä (lainausvirheet).

”Desimaaliluvun virheet” -pääluokka (7) sisältää virheitä, jotka voivat tapahtua desimaaliluvuilla laskettaessa tai jakolaskun osamäärässä. Viimeiseen luokkaan ”Muut virheet” (8) on koottu virheet, joita ei voida luokitella mihinkään muuhun luokkaan luotettavasti. Koska ainoastaan valmiita laskutuotoksia analysoitaessa ei voida kysyä laskijalta itseltään ajatteluprosessin kulkua, tämä luokka on tarpeellinen.

6 TUTKIMUSONGELMAT

Tässä tutkimuksessa halutaan selvittää:

1. Miten moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitukset hallitaan toisen asteen ammatillisten opintojen alussa teknisillä aloilla?

2. Mitä virheitä opiskelijat tekevät peruslaskutoimitusten algoritmeissa?

3. Tekevätkö matematiikan testissä eri osaamistasolla olevat opiskelijat erilaisia virheitä peruslaskutoimitusten algoritmeissa?

7 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

7.1 Aineiston kuvaus ja keruu

Tutkimuksen kohdejoukko koostui ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoista Jyväskylän ammattiopiston Teknisessä oppilaitoksessa (n=603) sekä Turun Ammatti-instituutissa (n=486). Oppilaitoksissa suoritetaan toisen asteen ammatillisia tutkintoja, ja suurin osa opiskelijoista tulee oppilaitoksiin suoraan peruskoulusta. Opiskelijoiden ikä vaihteli 15 vuodesta 32 vuoteen. Opiskelijoiden keski-ikä oli 16,8 vuotta ja keskihajonta 1,6 vuotta. Opiskelijoista 80 % oli poikia ja tyttöjä oli 20 %. Opiskelijoista 97 % (f=1035) ilmoitti äidinkielekseen suomen, 0,2 % (f=2) ruotsin ja 3,2 % (f=42) jonkin muun kielen. Tietoa äidinkielestä ei saatu 0,9 %:lta (f=10) opiskelijoista.

Kaikki oppilaitosten opiskelijat suorittivat matematiikan lähtötason arviointi -kokeen syksyllä 2002 ja koepaperit saatiin käytettäväksi tätä tutkimusta varten. Tutkimukseen valittiin Jyväskylän ammattiopiston Teknisen oppilaitoksen kaikissa koulutusohjelmissa opiskelevat opiskelijat sekä vastaavilla koulutusaloilla opiskelevat opiskelijat Turun ammatti-instituutissa. Näin ollen opiskelijat opiskelivat auto- ja kuljetusalan, kone- ja metallialan, vaatetusalan, rakennusalan, talotekniikka-alan, puualan, pintakäsittelyalan, audiovisuaalisen viestinnän, painoviestinnän, laboratorioalan sekä sähköalan koulutusohjelmissa.

Matematiikan lähtötason arviointi -koe oli osa Niilo Mäki Instituutin hanketta, jonka tarkoituksena on muodostaa toiseen asteen ammatilliseen koulutukseen soveltuva matematiikan lähtötasotesti. Koe oli ensimmäinen versio muodostettavasta testistä. Kokeen tehtävät koostuivat peruskoulun oppimäärän keskeisistä oppisisällöistä. Yhtenä osana tehtävistä olivat allekkain laskettavat moninumeroiset peruslaskutoimitukset, jotka muodostivat tämän tutkimuksen aineiston.

7.2 Mittarin kuvaus

Matematiikan lähtötason arviointi -koe koostui 78 tehtävästä matematiikan eri osa-alueilta. Aikaa kokeen suorittamiseen oli 40 minuuttia. Koe tehtiin ilman laskinta, mutta opiskelijat saivat käyttää tyhjiä papereita laskutoimitusten tekemistä varten. Arviointikokeen ensimmäinen sivu koostui esitietolomakkeesta, jonka täyttäminen ei sisältynyt varsinaiseen koeaikaan. Kokeen tehtävät oli valittu niin, että ne kattavat peruskoulun matematiikan oppimäärän. Kokeessa arvioitiin opiskelijoiden matematiikan osaamista seuraavilla sisältöalueilla: peruslaskutoimitukset yksinkertaisilla ja moninumeroisilla luvuilla, lukujen suuruuden vertailu, yksikkömuunnokset, prosenttilaskut, murtoluvut, tasogeometria ja ensimmäisen asteen yhtälöt. Lisäksi kokeessa oli soveltavia sanallisia tehtäviä.

Tämän tutkimuksen aineistoksi valittiin matematiikan lähtötason arviointi -kokeesta moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitustehtävät. Tehtävistä kaksi ensimmäistä olivat yhteenlaskutehtäviä, joista ensimmäinen laskettiin kokonaisluvuilla ja toinen desimaaliluvuilla. Kaksi seuraavaa laskua olivat vähennyslaskuja, joista niin ikään jälkimmäinen laskettiin desimaaliluvuilla. Viides lasku oli kertolasku kaksinumeroisella kertojalla ja viimeinen lasku jakolasku kaksinumeroisella jakajalla. Tutkimuksessa analysoidut tehtävät on esitetty liitteessä 1.

7.3 Analyysimenetelmät

Tutkimusongelmaa 1 varten aineistosta laskettiin jokaisen tehtävän kohdalla tehtävän oikein ratkaisseiden ja väärin ratkaisseiden prosenttiosuudet sekä yrittämättä jättäneiden osuus. Tutkimusongelmaa 2 varten opiskelijoiden tekemät virheet luokiteltiin taulukossa 1 olevan virheluokittelun avulla. Niille virheille, joita ei pystytty sijoittamaan mihinkään valmiina olevaan virheluokkaan, muodostettiin uusi virheluokka virhetyypin mukaisesti. Virheiden frekvenssit laskettiin ja vaihteluväliksi saatiin 0–155. Osaa virhetyypeistä oli mahdollista tehdä useammin kuin kerran samassa tehtävässä ja virhetyyppien vertailun helpottamiseksi saman virhetyypin lukumäärää ei huomioitu, vaan pelkästään se, esiintyikö virhettä vai ei. Näin ollen yksi opiskelija pystyi tekemään vain yhden kerran saman virhetyypin samassa tehtävässä. Virheluokista jätettiin pois sellaiset luokat, joiden frekvenssi koko aineistossa oli alle viisi, koska mahdolliset huolimattomuusvirheet haluttiin karsia pois. Pois jätettävien virheiden lukumäärä valittiin näin pieneksi siksi, että virheiden luokittelu oli tehty yksityiskohtaisesti, mikä synnytti virheluokkia, joiden frekvenssi oli pieni. Näitä virheluokkia ei yhdistetty muihin virheluokkiin sen vuoksi, että virheet olivat tyypeiltään erilaisia, minkä vuoksi niitä ei voitu rinnastaa toisiinsa.

Tutkimusongelmassa 3 haluttiin selvittää virhetyyppien ja matematiikan osaamistason välistä yhteyttä. Tutkimusongelmaa varten ei ollut mielekästä analysoida yksittäisten virheluokkien ja koko kokeen suoritustason yhteyttä, koska yksittäisten luokkien frekvenssit olivat pieniä, mikä vaikeutti niiden keskinäistä vertailua. Jotta matematiikassa eri osaamistasolla olevien opiskelijoiden tekemiä virheitä pystyttiin vertailemaan, virheluokkia yhdistettiin laajemmiksi yläluokiksi. Virheluokkien yhdistäminen yläluokkiin tehtiin teoreettisin perusteluin asettelun virheisiin, laskuvirheisiin sekä laskualgoritmin sääntöihin liittyviin menetelmällisiin virheisiin. Virheluokkien yläluokat ja niihin sisältyvät virhetyypit on esitetty liitteessä 2.

”Asettelun virheet” -yläluokan virheet liittyvät lukujen ja laskutoimitusten tunnuspiirteiden hahmottamiseen ja visuaaliseen huomioimiseen. ”Laskuvirheet” -yläluokan virheet liittyvät aritmeettisten laskufaktojen muistista palauttamiseen sekä yksinkertaisten laskujen laskemiseen. ”Menetelmälliset virheet” -yläluokan virheet liittyvät algoritmin sääntöjen noudattamiseen. Näiden lisäksi omana luokkana säilytettiin ”Virheellinen mutta systemaattinen algoritmi” -luokka sekä ”Epätäydellinen algoritmi” -luokka, koska näiden virhetyyppien luonne poikkesi edellä mainituista. Laskuissa, joissa oli desimaalilukuja, virheiden frekvenssi oli suuri. Jotta desimaaliluvun erityispiirteestä johtuvat virheet eivät sekoittuisi muihin menetelmällisiin virheisiin, nämä virheet käsiteltiin omana virheryhmänä. Samoin kuten yksittäisten virheluokkien kohdalla yhdistetyissä virheluokissa, merkitsevänä ei pidetty virheiden lukumäärää vaan ainoastaan sitä, oliko opiskelija tehnyt tietyn tyyppisen virheen. Opiskelijat hallitsivat eri laskutehtävät eri tavalla ja niissä tehtävissä, joissa osaamisprosentti oli hyvä, virheitä esiintyi vähemmän. Tästä syystä virhetyyppien määrä vaihteli eri tehtävien välillä.

Opiskelijat jaettiin matematiikan osaamistason mukaan kahteen yhtä suureen ryhmään koko kokeen painotetun summapistemäärän perusteella. Heikommin menestyneiden opiskelijoita painotettu summapistemäärä oli välillä 25−140 ja paremmin menestyneiden opiskelijoiden painotettu summapistemäärä oli välillä 141−266. Osaamistason ja laajempien virheluokkien välistä yhteyttä tarkasteltiin ristiintaulukoinnilla ja χ^2-riippumattomuustestillä. Tarkemman tuloksen saamiseksi painotettu summapistemäärä jaettiin myös kvartiileihin, mutta näiden ryhmien analysointi χ^2-riippumattomuustestillä ei tuottanut poikkeavaa tietoa puolitetun summapistemäärän tiedoista. Näin ollen tutkimuksen opiskelijat pidettiin jaettuna kahteen ryhmään osaamistason mukaan. Aineistossa oli koevastauksia, joissa algoritmitehtävässä ei ollut merkintää lainkaan, ratkaisuyrityksestä ei saanut selvää tai se oli ratkaistu väärin ilman algoritmia. Näiden vastausten määrä rajattiin pois osaamistason ja virhetyypin välistä yhteyttä tarkasteltaessa. Tällöin pystyttiin vertailemaan virhetyypin ja tehtävässä todellisuudessa virheelliseen ratkaisutapaan päätyneiden määrää.

7.4 Luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuutta tarkastellaan reliabiliteetin ja validiteetin käsitteiden avulla. Reliabiliteetilla tarkoitetaan mittarin kykyä antaa ei-sattumanvaraisia tuloksia (Heikkilä 1999, 179). Jos siis tutkimuksen reliaabelius on hyvää, saadaan samankaltaisia tuloksia mittausta toistettaessa ja tulokset eivät riipu arvioitsijasta (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2000, 213). Tutkimuksen reliabiliteettia voidaan mitata esimerkiksi kahdella rinnakkaismittarilla tai mittaamalla mittarin eri osa-alueiden välistä korrelaatiota (Nummenmaa, Konttinen, Kuusinen & Leskinen 1997, 202). Eri tehtävien välistä korrelaatiota voidaan tarkastella esimerkiksi Cronbachin α -kertoimen avulla, mikä tarkoittaa kokeen sisäistä johdonmukaisuutta. Kerroin voi olla välillä [0,1] ja lähellä yhtä oleva kerroin kertoo tehtävien hyvästä kyvystä erotella oppilaita. (Heikkilä 1998, 179.)

Tässä tutkimuksessa oli jokaisesta laskutoimituksesta vain yksi tehtävä, jolloin saman laskutoimituksen virheluokkien korrelaatiota eri tehtävien välillä ei pystytty tarkastelemaan. Aikaisemmissa matematiikan oppimistuloksia arvioivissa tutkimuksissa Cronbachin α -kertoimen arvot ovat kuitenkin olleet välillä 0.70–0.90 (Korhonen 1999, 25; Kupari 1998, 220; Wuolijoki 2003, 41). Tutkimuksissa käytettyjen tehtävien luotettavuusindeksit ovat siis olleet varsin hyviä. Virheiden analysoinnin reliabiliteettia pyrittiin lisäämään toistamalla virheiden luokittelu eli opiskelijoiden koevastaukset analysoitiin kahteen kertaan.

Validiteetin käsitettä käytetään kuvaamaan mittaustuloksista tehtyjen johtopäätösten käyttökelpoisuutta ja mielekkyyttä. Validiteetin käsitteestä voidaan erottaa sisäinen ja ulkoinen validiteetti, joista ulkoisella validiteetilla tarkastellaan sitä, missä määrin tulokset ovat yleistettävissä. (Metsämuuronen 2000, 41–42.) Mittari ei kuitenkaan itsessään ole validi, vaan valideja ovat tutkijan tekemät päätelmät mittarin antamista tuloksista (Hirsjärvi ym. 2000; Nummenmaa ym. 1997, 23.) Tarkasteltaessa tämän tutkimuksen ulkoista validiteettia voidaan sanoa, että tulokset ovat yleistettävissä käsittämään toisen asteen opintojaan teknisillä aloilla aloittavia opiskelijoita. Tuloksia ei voida yleistää koskettamaan koko ikäryhmää tai yleensä toisen asteen opintoja aloittavia opiskelijoita, sillä opiskelijat ovat tehneet valinnan tullessaan opiskelemaan teknisiä aloja. Opiskelijat ovat siis valikoituneet teknisille koulutusaloille. Analysoitujen koevastauksien määrä oli huomattavan suuri (n=1089), mikä on ulkoista validiteettia parantava tekijä.

Sisäisellä validiteetilla tarkoitetaan puolestaan mittarin ominaisuuksiin liittyvää luotettavuutta. Tällä käsitteellä tarkoitetaan mittarin kykyä mitata juuri niitä asioita, mitä on tarkoitus mitata. (Metsämuuronen 2000, 41–42.) Tässä tutkimuksessa oli tehtävät yksittäisiä laskutehtäviä, jolloin ei ollut vaarana, että monimutkaiset virkerakenteet tai ylimääräisenä annetut tiedot provosoisivat vääriin laskuratkaisuihin. Mittarin sisäistä validiteettia voidaan tarkastella vielä tarkemmin sisällön validiteetin (content validity) ja rakennevaliditeetin (construct validity) käsitteiden avulla. Sisällön validiteettia tarkastellessa arvioidaan sitä, että kattavatko mittariin valitut käsitteet tarpeeksi laajasti tutkittavan ilmiön. Rakennevaliditeetin tarkastelussa puolestaan arvioidaan mittarin osioiden rakenteiden yhdenmukaisuutta ilmiön rakenteiden kanssa. (Metsämuuronen, 2000, 51.)

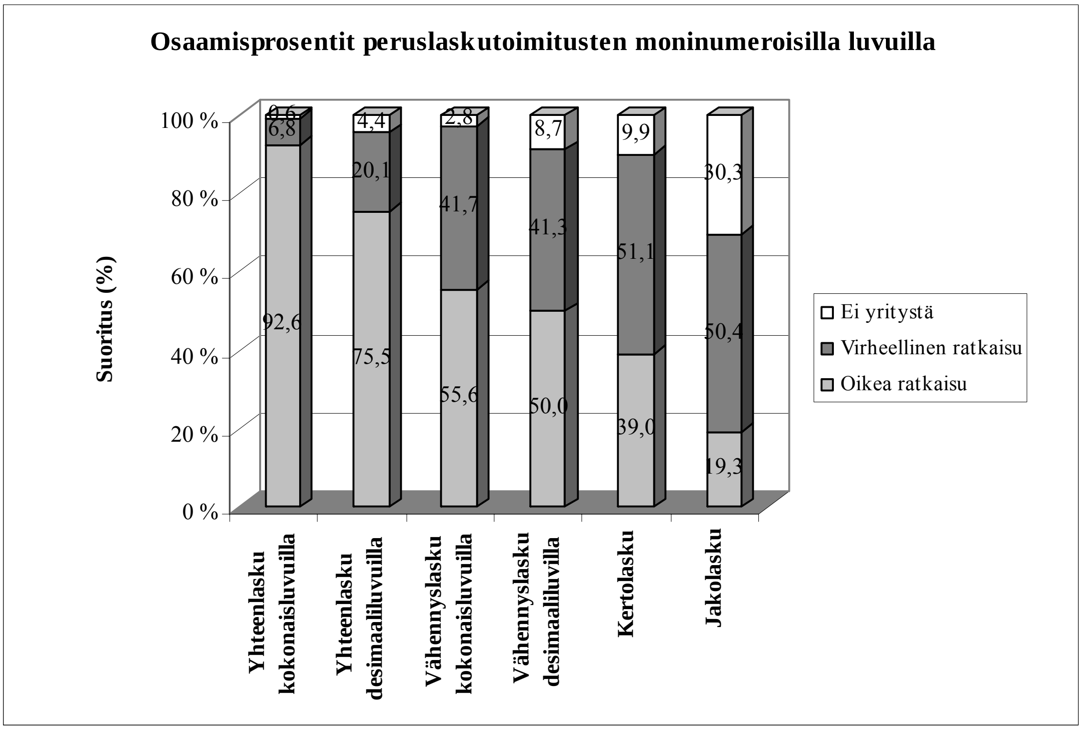
Tässä tutkimuksessa käytetyn mittarin sisällön validiteetin tarkastelussa on huomioitava, että mittarissa oli ainoastaan kuusi laskutehtävää, joiden perusteella arvioitiin peruslaskutoimitusten algoritmien hallintaa ja niissä esiintyviä virheitä. Jokaisesta laskutoimituksesta oli yksi kokonaisluvuilla laskettava tehtävä ja lisäksi yhteen- ja vähennyslaskuista oli desimaaliluvuilla laskettavat tehtävät. Tuloksia tarkastellessa on huomioitava tämä mittarin kapea-alaisuus. Voidaan pohtia sitä, voidaanko yhdessä peruslaskutoimitustehtävässä esiintyneen suorituksen perusteella tehdä päätelmiä moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitusten ja algoritmin hallinnasta. Mittarin sisällön validiteettia parantaa kuitenkin se, että tehtävät oli valittu siten, että ne edustavat mahdollisimman hyvin niitä peruslaskutoimitusten algoritmien ominaisuuksia, jotka täytyy hallita peruskoulun kuudenteen luokkaan mennessä. Tutkimuksen rakennevaliditeettia parantaa se, että mittarin tehtävät ja tehtävänanto ohjasivat laskemaan laskut algoritmeilla ja toisaalta se, että virheluokitus tehtiin yksityiskohtaisesti.

8 TULOKSET

Tulokset kolmeen eri tutkimusongelmaan esitetään omissa alaluvuissaan. Alaluvussa 8.1 kuvataan peruslaskutoimitusten hallintaa moninumeroisilla luvuilla. Jokaisessa laskutehtävässä tarkastellaan oikein ratkaisseiden, virheellisesti ratkaisseiden ja tehtävän ilman merkintää jättäneiden opiskelijoiden osuuksia. Alaluvussa 8.2 esitetään opiskelijoiden tekemät yleisimmät virheluokat. Yleisimmät virhetyypit tuodaan esille sekä koko ryhmän osalta että osaamistasoittain. Kolmannessa alaluvussa 8.3 tarkastellaan virheluokkien yhteyttä osaamistasoon.

8.1 Peruslaskutoimitusten hallinta moninumeroisilla luvuilla

Ensimmäisessä tutkimusongelmassa haluttiin selvittää sitä, kuinka hyvin peruslaskutoimitukset hallitaan moninumeroisilla luvuilla. Yhteenvetona voidaan todeta, että peruslaskutoimitusten hallinnassa oli suuria eroja laskutoimituksesta riippuen. Parhaiten osattiin yhteenlasku kokonaisluvuilla, jonka ratkaisi oikein lähes kaikki opiskelijat. Heikoiten puolestaan hallittiin jakolasku, jonka ratkaisi oikein vain viidennes opiskelijoista. Kuviossa 1 on esitetty oikein ratkaistujen, virheellisesti ratkaistujen sekä ilman merkintää jätettyjen tehtävien prosenttiosuudet.



KUVIO 1. Peruslaskutoimitusten hallinta moninumeroisilla luvuilla (n=1089)

Kuviosta 1 nähdään, että yhteenlasku kokonaisluvuilla osattiin parhaiten osaamisprosentin ollen 92,6 (f=1008). Tehtävän ratkaisi kuitenkin virheellisesti 6,8 % (f=72) opiskelijoista. Ainoastaan 0,6 % (f=7) opiskelijoista jätti tehtävän ilman mitään merkintää. Toinen yhteenlaskutehtävä laskettiin desimaaliluvuilla ja tehtävän hallinta oli selvästi heikompaa kuin kokonaisluvuilla laskettaessa. Tämän tehtävän oikein ratkaisseiden osuus oli 75,5 % (f=822) opiskelijoista. Tehtävän ratkaisi virheellisesti 20,1 % (f=219) opiskelijoista ja 4,4 % (f=48) opiskelijoista jätti tämän tehtävän ilman ratkaisua.

Vähennyslaskun hallinta oli selvästi heikompaa kuin yhteenlaskun. Vähennyslaskun kokonaisluvuilla ratkaisi oikein vain hiukan yli puolet opiskelijoista (55,6

%). Vähennyslaskun desimaaliluvuilla ratkaisi oikein hiukan vähemmän opiskelijoita osaamisprosentin ollen 50 (f=544). Molemmissa vähennyslaskuissa lähes yhtä suuri osuus opiskelijoista ratkaisi tehtävän virheellisesti: kokonaisluvuilla 41,7 % (f=454) ja desimaaliluvuilla 41,3 (f=450). Opiskelijoista 2,8 % (f=30) jätti kokonaislukutehtävän ilman merkintää, mutta selvästi suurempi joukko opiskelijoita (8,7 %) jätti desimaalilukutehtävän ilman merkintää.

Kerto- ja jakolaskun ratkaisivat oikein vain selvästi alle puolet opiskelijoista. Kertolaskun osaamisprosentti oli 39 % (f=425) ja väärin ratkaisseiden osuus oli 51,1 % (f=556). Noin kymmenesosa opiskelijoista (9,9 %) ei yrittänyt ratkaisua paperille. Jakolaskun hallinta oli peruslaskutoimituksista kaikkein heikointa. Tämän tehtävän ratkaisi oikein vain viidennes opiskelijoista (19,3 %). Virheellinen ratkaisutapa oli 50,4 %:lla opiskelijoista. Vajaa kolmannes opiskelijoista (30,3 %) ei yrittänyt lainkaan jakolaskun ratkaisua paperille.

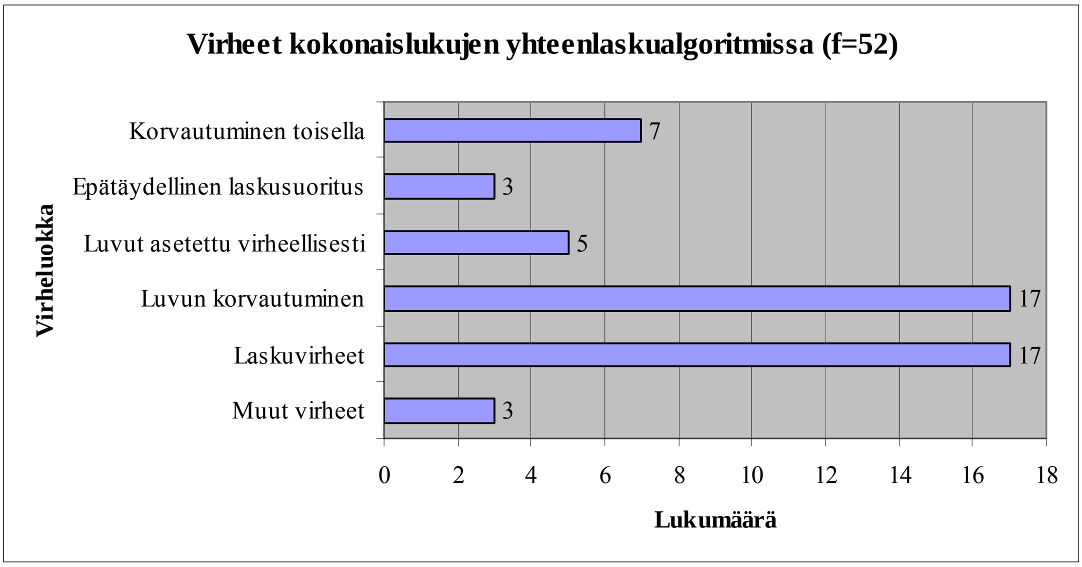
8.2 Algoritmien virheet

Tutkimusongelmassa 2 haluttiin selvittää sitä, millaisia virheitä opiskelijat tekevät peruslaskutoimitusten algoritmilaskuissa. Algoritmitehtävien virheet analysoitiin ja luokiteltiin tutkimusta varten laaditun virheluokituksen avulla. Virheluokituksessa oli 31 luokkaa, joista seitsemää virhetyyppiä ei esiintynyt missään peruslaskutehtävässä. Luokat olivat ”Osittainen korvautuminen”, ”Väärä laskusuunta”, ”Vastauksen luvut asetettu väärään sarakkeeseen”, ”Lainaa luvun arvon, ei paikka-arvon mukaisesti”, ”Lainaa paikka-arvoltaan pienemmältä suuremmalle”, ”Desimaalipilkku asetettu väärin ja ”Desimaalipilkku lisätty mielivaltaisesti vastaukseen”. Jos algoritmin virheellistä ratkaisutapaa ei pystytty tulkitsemaan, sijoitettiin se ”Muut virheet” -luokkaan. Opiskelijoiden vastauksissa esiintyi myös virheitä, joille ei ollut valmiiksi virheluokkia luokituksessa. Tällaisia virhetyyppejä varten muodostettiin uudet virheluokat. Kuvioissa 2 (s. 38), 4 (s. 39), 6 (s. 41), 8 (s. 43), 10 (s. 45), ja 12 (s. 47) aineistosta muodostetut virheluokat ovat näkyvissä ”Muut virheet” -luokan jälkeen.

Virheluokkien yleisyyttä tarkasteltiin virheiden frekvenssien avulla. Koevastauksia analysoitaessa huomioitiin vain se, oliko opiskelija tehnyt virheen vai ei, ei virhetyypin lukumäärää samassa tehtävässä. Analysointi tehtiin näin, jotta pystyttiin vertailemaan eri virhetyyppien yleisyyttä algoritmissa. Esimerkiksi kertolaskussa oli mahdollista tehdä monta faktavirhettä, mutta laskutoimituksen korvautumisvirhettä oli mahdollista tehdä vain kerran samassa tehtävässä. Näin ollen vaikka tulosten esittelyssä puhutaan virheiden lukumäärästä, tarkoittaa se todellisuudessa virhetyypin tehneiden opiskelijoiden lukumäärää.

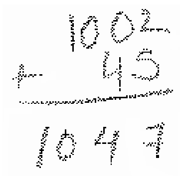
8.2.1 Kokonaislukujen yhteenlaskutehtävän virheet

Virheluokituksessa oli kokonaislukujen yhteenlaskulle 20 eri virhetyyppiä. Kuten edellä todettiin, kokonaislukujen yhteenlasku osattiin parhaiten, ja tehtävässä tehtiin yhteensä vain 52 virhettä. Kokonaislukujen yhteenlaskun koevastauksissa esiintyneitä virheitä varten ei ollut tarvetta muodostaa uusia virheluokkia ja lisäksi 14 virheluokan virheitä ei tehty tehtävässä lainkaan. Näin ollen tehtävässä tehtiin kuutta eri virhetyyppiä (kuvio 2).



KUVIO 2. Kokonaislukujen yhteenlaskutehtävän virheluokat ja virheiden frekvenssit

Yleisimmät virheet olivat laskuvirheet ja numeron tai luvun korvautuminen, joita teki molempia 17 opiskelijaa. Kokonaislukujen yhteenlaskutehtävässä luvussa 1062 oli numero kuusi korvautunut yleisesti nollalla (kuvio 3).

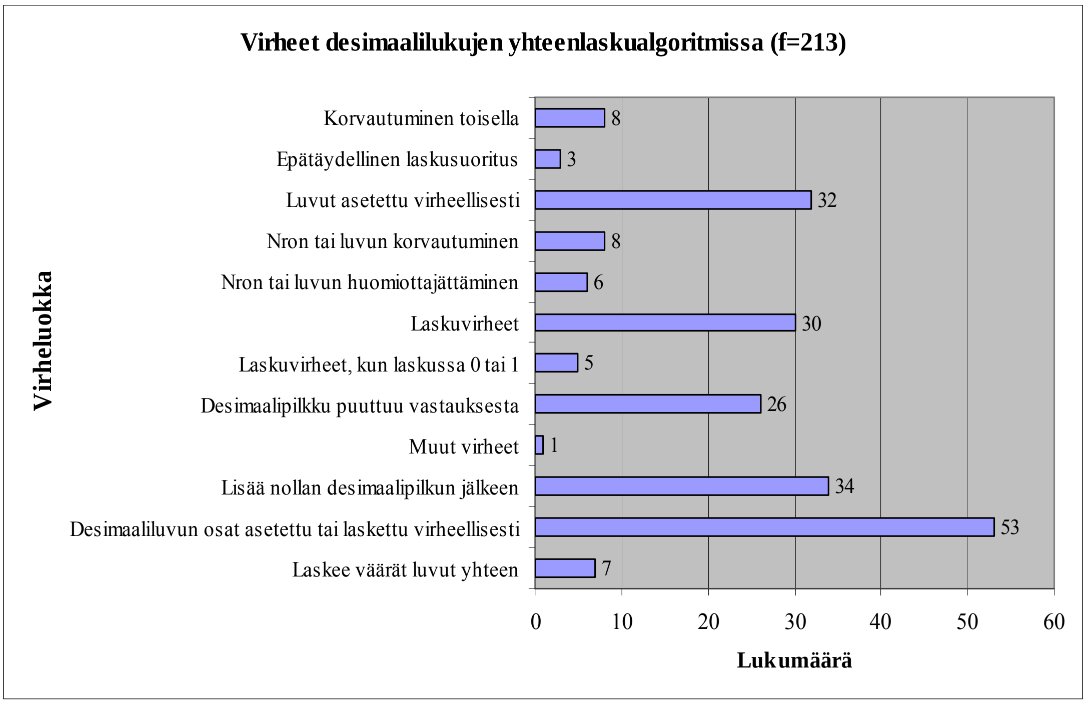


KUVIO 3. Numeron korvautuminen

Kokonaislukujen yhteenlaskussa virheet liittyivät siis lähinnä asettelun virheisiin tai laskuvirheisiin. Yhteenlaskualgoritmin säännöt opiskelijat olivat muistaneet, sillä algoritmin sääntöihin liittyviä virheitä ei tehty.

8.2.2 Desimaalilukujen yhteenlaskutehtävän virheet

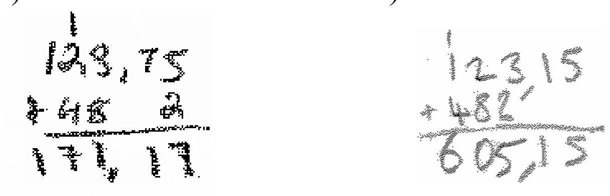
Sen sijaan desimaalilukujen yhteenlaskutehtävässä tehtiin virheitä runsaasti enemmän. Virheiden lukumäärä oli yhteensä 213, ja virheet jakautuivat 12 virheluokan kesken (kuvio 4). Tehtävän virheet painottuivat desimaaliluvun hallintaan. Huomioitavaa on, että yleisimmin tehtävässä esiintyneet virheet olivat sellaisia, joita ei ollut virheluokituksessa, vaan virheluokat muodostettiin aineiston pohjalta.



KUVIO 4. Desimaalilukujen yhteenlaskutehtävän virheluokat ja virheiden frekvenssit

Eniten tehtävässä tehtiin ”Desimaaliluvut asetettu tai laskettu virheellisesti” -virheluokan virheitä, joita teki 53 opiskelijaa. Tehtävässä oli esimerkiksi asetettu kymmenesosat paikkajärjestelmän vastaisesti ja desimaaliosat laskettiin yhteen välittämättä paikka-arvosta (kuvio 5a). Seuraavaksi suurimmat luokat olivat ”Lisää nollan desimaalipilkun jälkeen” -luokka (f=34) sekä ”Virheellinen asettelu” -luokka (f=32). ”Lisää nollan desimaalipilkun jälkeen” -luokassa tehtävänannossa luvun 48,2 sadasosiin ei ollut merkitty lukua nolla, joten osa opiskelijoista lisäsi nollan lukuun helpottaakseen laskemista. Nolla lisättiin sadasosien sijasta kymmenesosien paikalle ja luvusta tuli muotoa 48,02.

a) b)

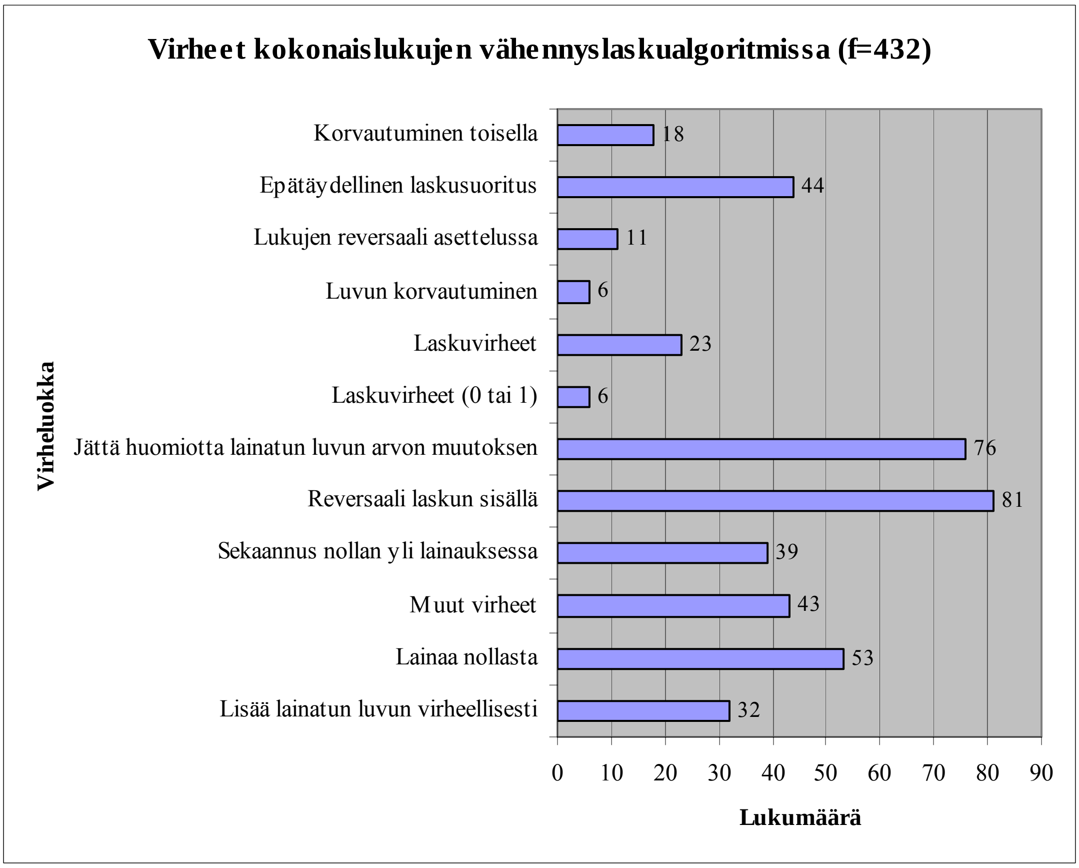


KUVIO 5. Esimerkkivirheitä desimaalilukujen yhteenlaskualgoritmissa:
a) Desimaaliluvun osat asetettu tai laskettu virheellisesti, b) Virheellinen asettelu

”Virheellinen asettelu” -virheluokka liittyi myös desimaaliluvun hallintaan, sillä tämän luokan virheissä desimaaliosia ei ollut osattu asettaa sääntöjen mukaisesti (kuvio 5b). Tämän vuoksi pilkut eivät olleet kohdakkain eivätkä luvut olleet paikkajärjestelmän mukaisesti. Myös kolmannessa aineiston pohjalta muodostetussa virheluokassa ”Laskee väärät luvut yhteen” opiskelija ei ole noudattanut paikkajärjestelmää laskusuorituksen aikana, vaan väärien sarakkeiden luvut on laskettu yhteen.

8.2.3 Kokonaislukujen vähennyslaskutehtävän virheet

Vähennyslaskutehtävässä kokonaisluvuilla tehtiin 432 virhettä. Virheet jakautuivat 12 virheluokan kesken (kuvio 6). Yleisimmät virheet liittyivät vähennyslaskussa tarvittavaan lainaamiseen.

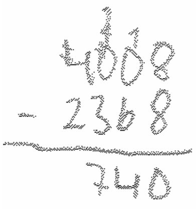


KUVIO 6. Kokonaislukujen vähennyslaskutehtävän virheet

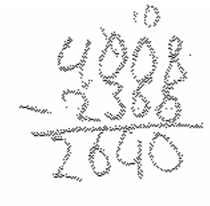
Yleisin virhetyyppi oli laskun sisällä tapahtunut reversaali (f=81) (kuvio 7a), jossa vähentäjä ja vähennettävä käännettiin, ettei lainausta tarvinnut tehdä. Seuraavaksi yleisin virhetyyppi oli sellainen, jossa opiskelija jätti huomiotta lainatun luvun arvon muutoksen (f=76). Tässä tapauksessa luvusta oli lainattu, mutta oli jätetty huomiotta se, että luvun arvo vähenee siitä lainattaessa. Tehtävässä tarvittiin lisäksi kahden nolla yli lainaamista, mistä aiheutui paljon virheitä. Sekaannus nollan yli lainauksessa -virheluokka (f=39) tarkoitti sitä, että opiskelija lainasi luvut molemmille nollille tuhansista (kuvio 7b). Osa opiskelijoista ratkaisi nollista vähentämisen tavalla, jossa he lainasivat tarvittavan luvun suoraan nollasta (f=53) tai muuttivat luvun nolla kymmeneksi (kuvio 7c). Laskutoimituksen heikkoa osaamista osoitti myös se, että 44 opiskelijaa jätti tehtävän kesken.

a)

b)



c)

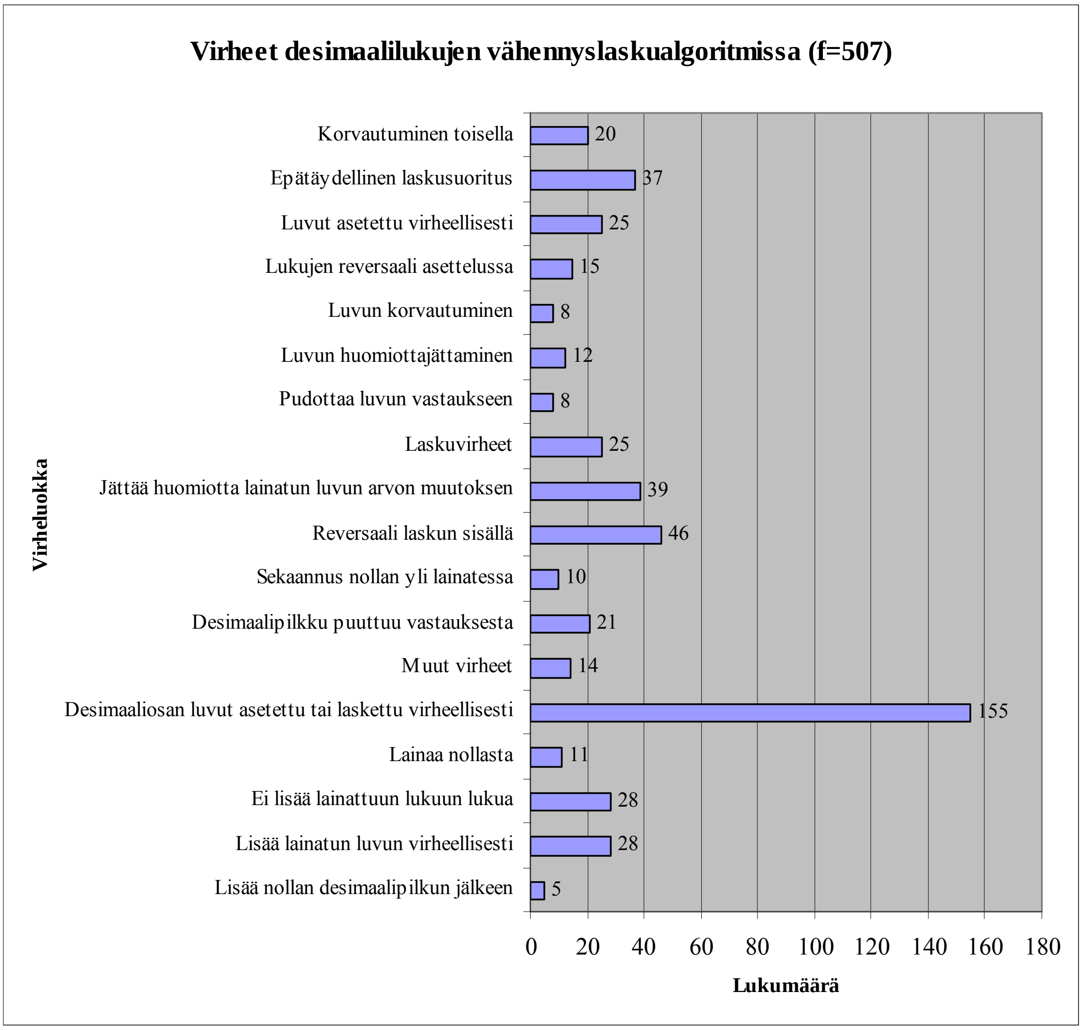


KUVIO 7. Esimerkkivirheitä kokonaislukujen vähennyslaskualgoritmissa:
a) Reversaali laskun sisällä, b) Sekaannus nollan yli lainauksessa, c) Lainaa nollasta

Muut virheet -luokka kasvoi tässä laskutehtävässä suureksi (f=43), koska osa opiskelijoiden ratkaisutavoista oli hankalasti tulkittavissa. Kokonaislukujen yhteenlaskussa virheitä oli paljon vähemmän, joten desimaaliluvuilla laskeminen tuotti opiskelijoille vaikeuksia ja virheellisiä ratkaisutapoja.

8.2.4 Desimaalilukujen vähennyslaskutehtävän virheet

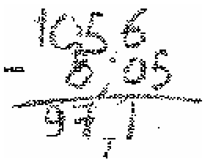
Desimaalilukujen vähennyslaskussa tehtiin yhteensä 507 virhettä. Tässä tehtävässä olevat virheet liittyivät lähinnä lainaukseen ja desimaalilukuun. Virheluokat on esitetty kuviossa 8 ja kuviossa 9 on esimerkkejä desimaalilukujen vähennyslaskutehtävän virheistä.



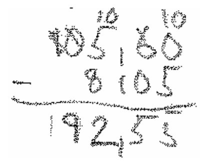
KUVIO 8. Desimaalilukujen vähennyslaskutehtävän virheluokat ja virheiden frekvenssit

Selkeästi suurin virheluokka oli ”Desimaaliosat asetettu tai laskettu virheellisesti” (f=155) (kuvio 9a). Samoin kuin desimaalilukujen yhteenlaskussa myös desimaalilukujen vähennyslaskussa osa opiskelijoista laski desimaaliosat niin, että ne eivät noudattaneet paikkajärjestelmää. Toiseksi suurin virheluokka oli ”Reversaali laskun sisällä” (f=46). Lainausvirheitä ”Jättää huomiotta lainatun luvun arvon muutoksen” (f=39) sekä ”Ei lisää lainattuun lukuun lukua” (f=28) (kuvio 10b) tehtiin eniten. Jälkimmäinen virhe tapahtui silloin, kun lainauksessa lainattua lukua kuten esimerkiksi kymmentä ei lisätty ykkösiin.

a)



b)

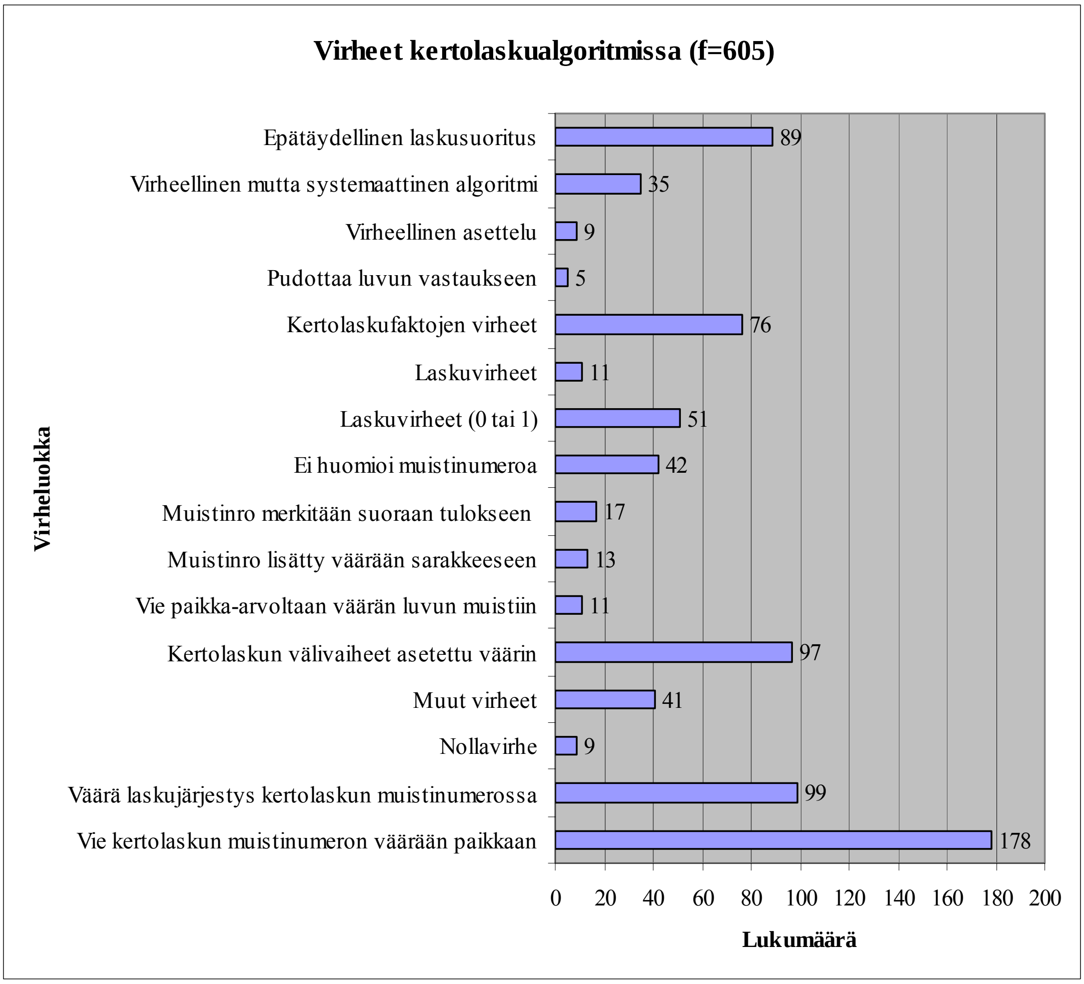


KUVIO 9. Esimerkkivirheitä desimaalilukujen vähennyslaskualgoritmissa:
a) Desimaaliluvut asetettu tai laskettu virheellisesti, b) Ei lisää lainattuun lukuun lukua

”Lisää lainatun luvun virheellisesti” -luokan (f=22) virheitä tehtiin siten, että luvusta lainattiin esimerkiksi yhdeksän tai yksitoista. Mielenkiintoista oli se, että kuusi lainausta oli tehty niin, että luvusta lainattiin juuri sen verran, mitä vähennettävään tarvittiin. Laskusuorituksista 12:ta ei pystytty luokittelemaan luotettavasti, joten nämä laskusuoritukset luokiteltiin muiksi virheiksi. Huomioitavaa on se, että ”Desimaaliosat asetettu tai laskettu virheellisesti”, ”Ei lisää lainattuun lukuun lukua” ja ”Lisää lainatun luvun virheellisesti” -virheluokat olivat aineistosta muodostettuja luokkia. Desimaalilukujen vähennyslaskutehtävää varten jouduttiin muodostamaan uusia virheluokkia eniten kaikista algoritmitehtävistä.

8.2.5 Kertolaskutehtävän virheet

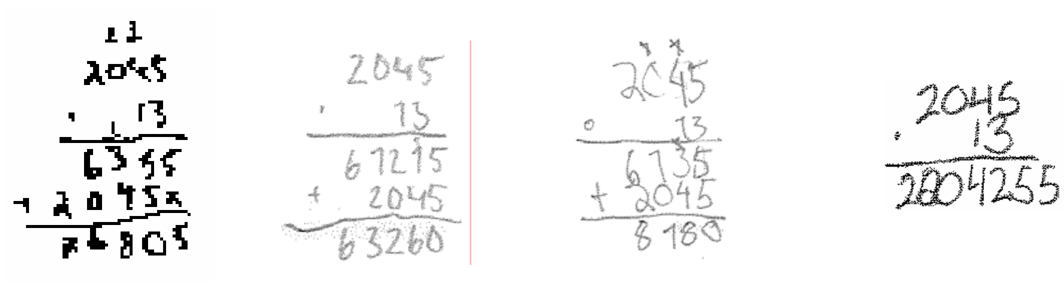
Kertolaskun virheitä tehtiin yhteensä 605 kappaletta ja virheet jakautuivat 15 virheluokan kesken. 41 laskusuoritusta ei pystytty tulkitsemaan, joten nämä suoritukset luokiteltiin muihin virheisiin. Kuviosta 10 nähdään kertolaskutehtävän virheet. ”Vie kertolaskun muistinumeron väärään paikkaan” ei ole varsinainen virheluokka. Vaikka muistinumero olisi merkitty väärään kohtaan laskussa, se ei välttämättä tuota kuitenkaan virheellistä ratkaisutapaa. Virheellistä merkintätapaa käytti kuitenkin 178 opiskelijaa.



KUVIO 10. Kertolaskutehtävän virheluokat ja virheiden frekvenssit

Yleisin virhetyyppi oli ”Väärä laskujärjestys muistinumerossa” (f=99), jossa muistinumeron lisäys suoritettiin väärässä laskujärjestyksessä, mikä aiheutti väärän tuloksen (kuvio 11a). Merkittävää on se, että tätä virhettä ei ollut huomioitu aikaisemmissa virheluokituksissa. Kertolaskutehtävässä muistinumero oli asetettu (f=178) yhteenlaskun muistinumeron tapaan kerrottavan yläpuolelle (kuvio 11a, c). Ristiintaulukoinnilla ja χ^2-riippumattomuustestin avulla tarkasteltiin näiden virheiden yhteyttä ja havaittiin, että muistinumeron merkintä väärään paikkaan oli erittäin merkitsevästi yhteydessä muistinumeron kertomisen kanssa. 86,6 % (f=86) opiskelijoista, jotka olivat asettaneet muistinumeron väärään paikkaan, olivat kertoneet muistinumeron ($\chi^2(1) = 396.12$, $p = .000$).

a) b) c) d)

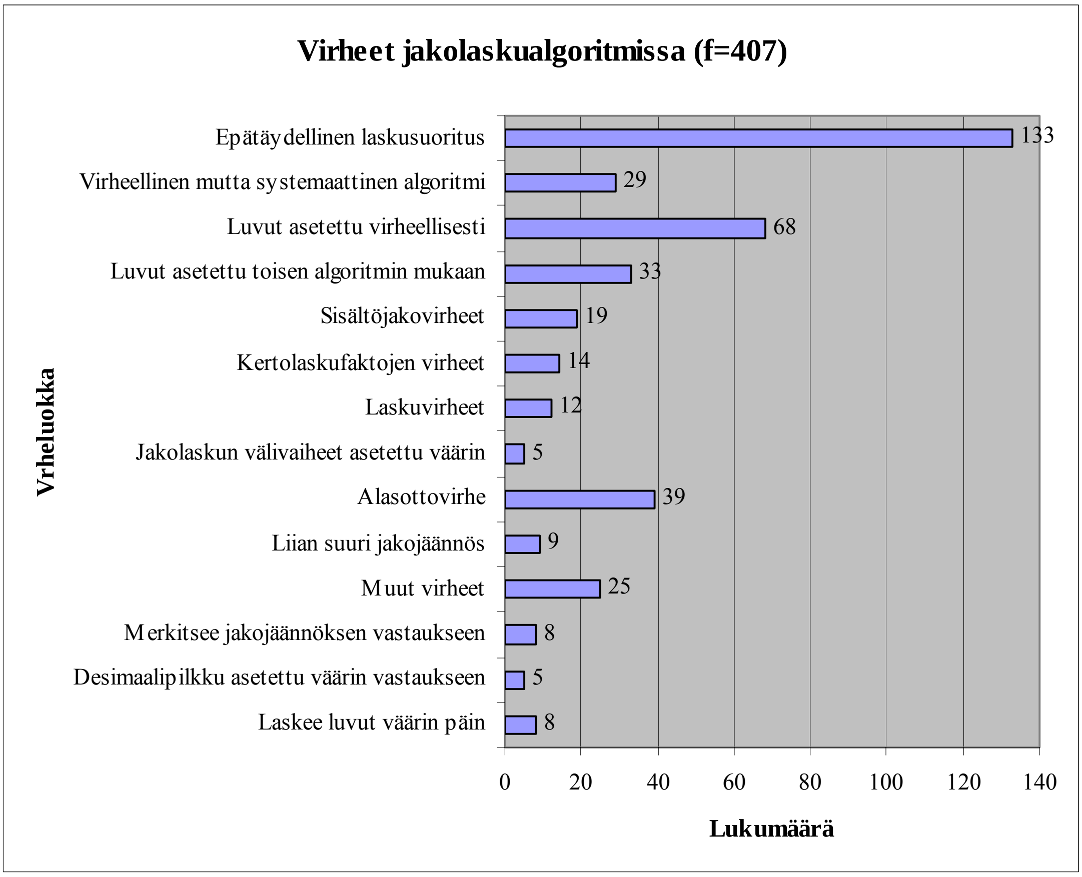


KUVIO 11. Esimerkkivirheitä kertolaskualgoritmissa: a) Väärä laskujärjestys muistinumerossa, Vie kertolaskun muistinumeron väärään paikkaan, b) Kertolaskun välivaiheet asetettu väärin, Muistinumero merkitty suoraan tulokseen, c) Kertolaskun välivaiheet asetettu väärin, d) Virheellinen mutta systemaattinen algoritmi

Toiseksi suurin virheluokka kertolaskutehtävässä oli välivaiheiden asettelu väärin (f=97), jossa kymmenten rivi oli asetettu suoraan ykkösten alapuolelle (kuvio 11b, c). Kertolaskun faktavirheitä tehtiin myös paljon (f=76) samoin kuin laskuvirheitä nollalla ja ykkösellä (f=51). Kertolaskussa oli käytetty myös virheellistä mutta systemaattista algoritmia 35 kertaa, jolloin opiskelijat käyttivät pääasiassa yhteenlaskun sääntöjä laskiessaan kertolaskualgoritmia (kuvio 11d). Laskutoimituksen jätti epätäydelliseksi 89 opiskelijaa, mikä oli määrällisesti enemmän kuin aiemmissa laskutoimituksissa.

8.2.6 Jakolaskutehtävän virheet

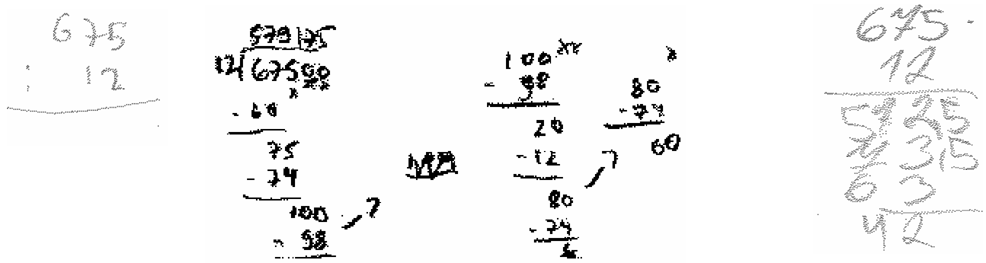
Jakolaskun hallinta peruslaskutoimituksista oli heikointa. Virheitä tehtiin yhteensä 407 kappaletta, jotka jakaantuivat 14 virheluokan kesken. Peräti 133 virhettä oli tyyppiä ”Epätäydellinen algoritmi”. Kuviossa 12 on esitetty jakolaskun virheet.



KUVIO 12. Jakolaskutehtävän virheluokat ja virheiden frekvenssit

Virheellinen asettelu oli myös yleistä (f=68). Tyypillistä oli se, että jakokulman sijasta luvut oli asetettu jakoviivalle. Lisäksi opiskelijat olivat asetelleet luvut kertolasku-algoritmin mukaan 33 kertaa (kuvio 13a). Jakolaskulle tyypillisessä luvun alasotossa opiskelijat tekivät myös virheitä (f=34) (kuvio 13b). Virhe saattoi tapahtua niin, että opiskelija ”oli pudottanut” väärän luvun alas tai oli lisännyt nollan osamäärään aina, kun alasotto tapahtui.

a) b) c)



KUVIO 13. Esimerkkivirheitä jakolaskualgoritmissa: a) Luvut asetettu toisen algoritmin mukaan, b) Alasottovirhe, c) Virheellinen, mutta systemaattinen algoritmi

Virheellinen mutta systemaattinen algoritmi jakolaskussa (f=25) oli tehty useimmiten siten, että jakolaskutehtävä ratkaistiin kertolaskun säännöillä (kuvio 13c). Jakolaskutehtävän virheitä tutkittaessa on tärkeää huomata se, että kuviossa 12 esitettyjen virheiden lisäksi 407 (30,3 %) opiskelijaa oli jättänyt tehtäväpaperin ilman merkintää.

8.3 Matematiikan osaamistason yhteys algoritmien virheisiin

Tutkimusongelmassa 3 haluttiin selvittää sitä, onko matematiikan lähtötason arviointikokeessa menestymisen ja opiskelijan peruslaskutoimitustehtävissä tekemien algoritmivirheiden välillä yhteyttä. Oletettavaa on, että matematiikan kokeessa heikommin menestyneet opiskelijat tekevät enemmän virheitä kuin paremmin menestyneet opiskelijat. Opetuksen kannalta on arvokasta tunnistaa heikkojen opiskelijoiden tekemät virhetyypit, koska tällöin opiskelijan tekemät virheet antavat suuntaa hänen yleisestä matematiikan osaamisestaan. Lisäksi oltiin kiinnostuneita siitä, onko olemassa virhetyyppejä, joita tekevät hyvin menestyneet opiskelijat tai kaikki opiskelijat osaamistasosta riippumatta.

Opiskelijat jaettiin matematiikan lähtötason arviointikokeen painotetun summapistemäärän perusteella kahteen yhtä suureen ryhmään, ja matematiikan osaamistason yhteyttä algoritmien virheisiin tutkittiin vertailemalla virhetyyppien esiintyvyyttä näissä kahdessa ryhmässä. Yksittäiset virheluokat yhdistettiin suuremmiksi yläluokiksi eli asettelun virheisiin, menetelmällisiin virheisiin sekä laskuvirheisiin, jotta virhetyypit olisivat paremmin vertailtavissa. Virheluokkia ”Epätäydellinen algoritmi” ja ”Virheellinen mutta systemaattinen algoritmi” ei yhdistetty muihin yläluokkiin vaan niiden yhteyttä osaamistasoon analysoitiin itsenäisinä virhetyyppeinä (liite 2). Käytettäessä nimitystä ryhmä 1 tarkoitetaan heikommin menestyneitä opiskelijoita ja käytettäessä nimitystä ryhmä 2 tarkoitetaan paremmin menestyneitä opiskelijoita.

8.3.1 Yhteenlasku

Kokonaisluvuilla lasketun yhteenlaskun ratkaisua yritti 1068 opiskelijaa, joista 49,2 % (n=525) kuului ryhmään 1 ja 50,8 % (n=543) ryhmään 2. Tehtävän ilman merkintää jätti vain osaamistasoltaan heikommat oppilaat (f=9). Yksittäisistä virheluokista muodostettiin kaksi yläluokkaa: asettelun virheet ja laskuvirheet. Taulukossa 2 on esitetty kokonaislukujen yhteenlaskun virheluokat osaamistasoryhmittäin.

TAULUKKO 2. Kokonaislukujen yhteenlaskutehtävän virheluokat osaamistasoryhmittäin (n=1068)

	Ryhmä 1 (n=525)	**Ryhmä 2 (n=543)**	**Yhteensä**
Asettelun virheet	16	13	29
	55,2 %	44,8 %	100,0 %
Laskuvirheet	13	4	17
	76,5 %	23,5 %	100,0 %

Yhteenlaskussa kokonaisluvuilla tehtiin vähän virheitä muihin laskutehtäviin verrattuna, ja virhetyypeistä laskuvirheiden havaittiin olevan yhteydessä osaamistasoon mutta asettelun virheiden ei. Taulukosta 2 nähdään, että asettelun virheitä tehneitä opiskelijoita oli lähes yhtä monta molemmissa osaamistasoryhmissä. Tilastollinen analyysi (χ^2-riippumattomuustesti) osoitti, että asettelun virheillä ja osaamistasolla ei ole yhteyttä (χ^2 (1) = .432, p = .511) eli näyttäisi siltä, että yhteenlaskutehtävän asetteluvirheitä opiskelijat tekivät osaamistasosta riippumatta. Yhteenlaskun laskuvirheillä ja osaamistasolla sen sijaan todettiin melkein merkitsevä yhteys (χ^2 (1) = 5.156, p <.05).

Desimaalilukujen yhteenlaskutehtävässä virheiden määrä oli huomattavasti suurempi kuin kokonaisluvuilla laskettaessa. Tätä tehtävää yritti ratkaista 1015 opiskelijaa, joista 46,8 % kuului ryhmään 1 ja 53,2 % ryhmään 2. Tehtävän jätti ilman merkintää 47 opiskelijaa. Osaamistasoltaan heikompia opiskelijoita oli 91,5 % (f=43) ja osaamistasoltaan parempia opiskelijoita 8,5 % (f=4). Tehtävässä esiintyneet virheluokat yhdistettiin asettelun virheiksi, laskuvirheiksi sekä desimaaliluvun virheiksi. Taulukosta 3 nähdään virheiden määrät osaamistasoryhmittäin.

TAULUKKO 3. Desimaalilukujen yhteenlaskutehtävän virheluokat osaamistasoryhmittäin (n=1015)

	Ryhmä 1 (n=475)	**Ryhmä 2 (n=540)**	**Yhteensä**
Asettelun virheet	39	18	57
	68,4 %	31,6 %	100,0 %
Laskuvirheet	21	14	17
	60,0 %	40,0 %	100,0 %
Desimaaliluvun virheet	82	25	107
	76,6 %	23,4 %	100,0 %

Desimaalilukujen yhteenlaskun virheluokista asettelun virheet ja desimaaliluvun virheet olivat yhteydessä osaamistasoon, mutta sen sijaan laskuvirheet olivat riippumattomia opiskelijan osaamistasosta. Asettelun virheiden ja osaamistason välillä ($\chi^2(1) = 11.34$, $p<.001$) sekä desimaalilukujen virheiden ja osaamistason ($\chi^2(1) = 42.77$, $p = .000$) välillä oli erittäin merkittävä yhteys. Tämä tarkoittaa sitä, että nämä virheet ovat tyypillisesti heikkojen opiskelijoiden tekemiä. Laskuvirheitä yhteenlaskussa teki yhteensä 35 opiskelijaa, joista 60,0 % (f=21) kuului ryhmään 1 ja 40,0 % (f=14) ryhmään 2. Osaamistaso ei näyttänyt olevan yhteydessä laskuvirheisiin ($\chi^2(1) = 2.54$, $p < .111$), mikä tarkoittaa sitä, että virhetyyppiä tekivät useat opiskelijat osaamistasosta riippumatta.

8.3.2 Vähennyslasku

Vähennyslaskuissa virheitä tehneiden opiskelijoiden määrä kasvoi, ja opiskelijat tekivät runsaasti myös menetelmällisiä virheitä ja moni opiskelija jätti tehtävän ratkaisun kesken. Vähennyslaskutehtävää kokonaisluvuilla yritti ratkaista 1009 opiskelijaa, joista 47,8 % (n=482) kuului ryhmään 1 ja 52,2 % (n=527) kuului ryhmään 2. Ilman merkintää tehtävän jätti 28 opiskelijaa. Näistä 89,3 % (f=25) oli ryhmän 1 opiskelijoita ja 10,7 % (f=3) ryhmän 2 opiskelijoita. Taulukossa 4 on kuvattu tehtävän 21 virheluokat eri osaamistasoryhmissä. Vähennyslaskutehtävässä esiintyneet virheluokat voitiin yhdistää neljään laajempaan luokkaan, jotka olivat epätäydellinen algoritmi, asettelun virheet, laskuvirheet ja menetelmälliset virheet.

TAULUKKO 4. Kokonaislukujen vähennyslaskutehtävän virheluokat osaamistasoryhmittäin (n=1009)

	Ryhmä 1 (n=482)	**Ryhmä 2 (n=527)**	**Yhteensä**
Epätäydellinen algoritmi	30	14	44
	68,2 %	31,8 %	100,0 %
Asettelun virheet	27	8	35
	77,1 %	22,9 %	100,0 %
Laskuvirheet	19	10	29
	65,5 %	34,5 %	100,0 %
Menetelmälliset virheet	176	87	263
	66,9 %	33,1 %	100,0 %

Kokonaislukujen vähennyslaskualgoritmin virheet olivat yhteydessä opiskelijan yleiseen osaamistasoon matematiikan kokeessa. Erityisesti asettelun virheet ($\chi^2(1) = 12.54$, $p = .000$) sekä menetelmälliset virheet ($\chi^2(1) = 52.29$, $p = .000$) olivat voimakkaasti yhteydessä osaamistasoon. Myös algoritmin keskenjättäminen riippui merkitsevästi yleisestä osaamistasosta ($\chi^2(1) = 7.68$, $p < .01$). Näyttäisi siis siltä, että asettelun virheitä, menetelmällisiä virheitä sekä epätäydellistä algoritmia tekisivät erityisesti heikommin matematiikan kokeessa menestyneet opiskelijat. Laskuvirheiden ja osaamistason välinen yhteys ei ollut merkitsevää ($\chi^2(1) = 3.77$, $p = 0.052$), vaikka laskuvirheitä tekivätkin huomattavasti enemmän heikot opiskelijat.

Vähennyslaskua desimaaliluvuilla yritti ratkaista algoritmilla 953 opiskelijaa, joista 45,4 % (n=433) kuului ryhmään 1 ja 54,6 % (n=502) kuului ryhmään 2. Tässä tehtävässä yksittäisistä virheluokista yhdistettiin virheluokat epätäydellinen algoritmi, asettelun virheet, laskuvirheet, menetelmälliset virheet sekä desimaaliluvun virheet. Lisäksi tehtävän jätti ilman merkintää 92 opiskelijaa, joista 84,8 % (f=78) oli ryhmän 1 opiskelijoita ja 15,2 % (f=14) ryhmän 2 opiskelijoita. Tehtävän jättäminen ilman merkintää oli merkittävästi yhteydessä osaamistasoon ($\chi^2(1) = 49.28$, $p = .000$) eli tyypillisesti heikot opiskelijat jättivät tehtävän vaille merkintöjä. Taulukosta 5 nähdään virhetyyppien määrät ja osuudet osaamistasoittain.

TAULUKKO 5. Desimaalilukujen vähennyslaskutehtävän virheluokat osaamistasoryhmittäin (n= 953)

	Ryhmä 1 (n=482)	**Ryhmä 2 (n=527)**	**Yhteensä**
Epätäydellinen algoritmi	26	11	37
	70,3 %	29,7 %	100,0 %
Asettelun virheet	64	13	77
	83,1 %	16,9 %	100,0 %
Laskuvirheet	15	10	25
	60,0 %	40,0 %	100,0 %
Menetelmälliset virheet	111	41	152
	73,0 %	27,0 %	100,0 %
Desimaalilukujen virheet	129	42	171
	75,4 %	24,6 %	100,0 %

Samoin kuin kokonaislukujen vähennyslaskussa, desimaalilukujen vähennyslaskussa kaikki virheluokat laskuvirheitä lukuun ottamatta olivat riippuvia osaamistasosta matematiikan kokeessa. Osaamistason ja virheiden välinen yhteys oli voimakkainta asettelun virheissä ($\chi^2(1) = 47.98$, $p = .000$), menetelmällisissä virheissä ($\chi^2(1) =$

55.53, $p = .000$) sekä desimaaliluvun virheissä ($\chi^2(1) = 75.67$, $p = .000$). Algoritmin keskenjättäminen oli myös yhteydessä osaamistasoon tilastollisessa mielessä vakuuttavalla tasolla ($\chi^2(1) = 9.58$, $p < .01$). Sen sijaan vähennyslaskun laskuvirheitä opiskelijat tekivät osaamistasosta riippumatta. Laskuvirheitä teki 25 opiskelijaa, joista 60,0 % (f=15) kuului ryhmään 1 ja 40,0 % (f=10) kuului ryhmään 2. Laskuvirheitä tehneiden opiskelijoiden lukumäärän ja osaamistason välisen yhteyden tilastollinen tarkastelu osoitti, että laskuvirheiden tekeminen ei riipu yleisestä osaamistasosta matematiikan kokeessa ($\chi^2(1) = 2.197$, $p= .138$).

8.3.3 Kertolaskutehtävä

Kertolaskutehtävää yritti ratkaista 894 opiskelijaa, joista 45,4 % (n=464) kuului ryhmään 1 ja 54,6 % (n=488) ryhmään 2. Erona aikaisempiin tehtäviin kertolaskussa opiskelijat käyttivät myös virheellistä mutta systemaattista algoritmia tehtävän ratkaisemiseen. Näin ollen kertolaskutehtävän virheluokat olivat epätäydellinen algoritmi, asettelun virheet, virheellinen mutta systemaattinen algoritmi, laskuvirheet, faktavirheet ja menetelmälliset virheet. Tehtävän jätti ilman merkintää 113 opiskelijaa, mikä on selvästi enemmän kuin yhteen- ja vähennyslaskuissa. Osaamistasoltaan heikompia opiskelijoita oli 77,9 % (f=88) ja osaamistasoltaan parempia opiskelijoita 22,1 % (f=25). Osaamistasoltaan heikoimmilla opiskelijoilla ja tehtävän yrittämättä jättämisellä oli merkittävä yhteys ($\chi^2(1) = 39.84$, $p = .000$). Virheiden jakautuminen osaamistasoryhmien kesken on esitetty taulukossa 6.

TAULUKKO 6. Virheluokat kertolaskutehtävässä osaamistasoryhmittäin (n=894)

	Ryhmä 1 (n=464)	**Ryhmä 2 (n=488)**	**Yhteensä**
Epätäydellinen algoritmi	58	31	89
	65,2 %	34,8 %	100,0 %
Asettelun virheet	7	2	9
	77,8 %	22,2 %	100,0 %
Virheellinen mutta systemaattinen algoritmi	28	7	35
	80,0 %	20,0 %	100,0 %
Laskuvirheet	37	23	60
	61,7 %	38,3 %	100,0 %
Faktavirheet	37	39	76
	48,7 %	51,3 %	100,0 %
Menetelmälliset virheet	131	101	232
	56,5 %	43,5 %	100,0 %

Epätäydellisellä algoritmilla ja osaamistasolla havaittiin olevan yhteyttä ($\chi^2(1)$ = 15.55, p = .000). Asettelun virheitä teki kertolaskussa niin vähäinen määrä opiskelijoita (f=7), ettei niitä voitu tarkastella tilastollisesti. Virheellistä mutta systemaattista algoritmia käytti tehtävän ratkaisemisessa 35 opiskelijaa. Huomattava osa näistä opiskelijoista kuului ryhmään 1 (80,0 %, f=28). Virheellinen mutta systemaattinen algoritmilla ja osaamistasolla oli erittäin merkitsevä yhteys (χ^2 (1) = 17.58, p = .000). Näin ollen tällainen virhe oli tyypillisesti osaamistasoltaan heikkojen opiskelijoiden tekemä virhe.

Kertolaskun faktavirheiden ja laskuvirheiden yhteyttä osaamistasoon tutkittiin ensin siten, että nämä virheet yhdistettiin samaan luokkaan. Fakta- ja laskuvirheiden ja osaamistason välillä oli suuntaa antavaa yhteyttä ($\chi^2(1)$ = 5.60, p < .05). Fakta- ja laskuvirheiden erilaisen luonteen vuoksi haluttiin selvittää myös näiden virheluokkien ja osaamistason yhteyttä erikseen. Tilastollinen analyysi osoitti, että kertolaskufaktavirheillä sekä osaamistasolla ei ole yhteyttä keskenään ($\chi^2(1)$ = .36, p = .549) eli faktavirheitä tekevät osaamistasoltaan sekä hyvät että huonot opiskelijat. Sen sijaan laskuvirheiden tekemisellä ja osaamistasolla oli merkittävä yhteys ($\chi^2(1)$ = 6.85, p < .01) eli laskuvirheitä tekivät osaamistasoltaan heikommat opiskelijat.

Menetelmällisiä virheitä tehtiin kertolaskussa hyvin runsaasti, sillä virheitä teki yhteensä 232 opiskelijaa. Virheiden määrä jakautui suhteellisen tasaisesti opiskelijoiden kesken 56,5 % (f=131) ollessa ryhmän 1 opiskelijoiden tekemiä virheitä ja 43,5 % (f=101) ollessa ryhmän 2 opiskelijoiden tekemiä virheitä. χ^2-riippumattomuustesti osoitti kuitenkin, että menetelmällisten virheiden tekemisellä on voimakas yhteys yleiseen osaamiseen matematiikan kokeessa ($\chi^2(1) = 15.44$, $p = .000$). Menetelmälliset virheet -yläluokka koostui useasta yksittäisestä virheluokasta, ja tämän vuoksi riippuvuutta tutkittiin myös yksittäisten virheluokkien ja osaamistason välillä.

Menetelmällisiin virheisiin kuuluva virheluokka ”Kertoo muistinumeron” oli kertolaskutehtävässä yleisin yksittäinen virhetyyppi. Tarkasteltaessa tämän virheen ja osaamistason yhteyttä havaittiin, että virhetyyppi ei ole yhteydessä yleiseen menestymiseen matematiikan kokeessa ($\chi^2(1) = .42$, $p = .515$). Virheluokkien ”Pudottaa luvun vastaukseen”, ”Vie paikka-arvoltaan väärän luvun muistiin” ja ”Nollavirhe” frekvenssit olivat yksittäin niin pienet, ettei niitä voitu tarkastella tilastollisesti omina luokkina. Sen sijaan virheluokalla ”Ei huomioi muistinumeroa” ei havaittu olevan yhteyttä osaamistasoon ($\chi^2(1) = 1.554$, $p = .21$).

8.3.4 Jakolaskutehtävä

Jakolaskutehtävää kaksinumeroisella jakajalla yritti laskea huomattavasti pienempi määrä opiskelijoita kuin muita tehtäviä. Jakolaskutehtävän ratkaisua yritti 593 opiskelijaa, joista 38,3 % (n=227) kuului ryhmään 1 ja 61,7 % (n=366) kuului ryhmään 2. Tarkasteltaessa jakolaskun virhetyyppien ja osaamistason yhteyttä tulee huomioida se, että suuri osuus opiskelijoista (30,3 %) oli jättänyt tehtävän kokonaan ilman näkyvää yritystä. Yrittämättä jättäneistä 70,3 % (f=230) kuului osaamistasoltaan heikompaan ryhmään ja 29,7 % (f=97) ryhmään 2. Osaamistason ja tehtävän ilman merkintää jättämisen yhteys oli erittäin merkitsevää osaamistasoltaan heikoimmilla opiskelijoilla ($\chi^2(1) = 79.07$, $p = .000$). Jakolaskutehtävän virheluokat jaettiin epätäydelliseen algoritmin virheisiin, asettelun virheisiin, virheellisen mutta systemaattisen algoritmin virheisiin, menetelmällisiin virheisiin sekä laskuvirheisiin, joka koostui sisältöjako-, kerto- ja vähennyslaskuvirheitä. Taulukossa 7 on esitetty jakolaskun virheet osaamisryhmittäin.

TAULUKKO 7. Jakolaskutehtävän virheluokat osaamistasoryhmittäin (n= 593)

	Ryhmä 1 (n=227)	**Ryhmä 2 (n=366)**	**Yhteensä**
Epätäydellinen algoritmi	80	53	133
	60,2 %	39,8 %	100,0 %
Asettelun virheet	53	48	101
	52,5 %	47,5 %	100,0 %
Virheellinen mutta syste-	22	7	29
maattinen algoritmi	75,9 %	24,1 %	100,0 %
Laskuvirheet	15	23	38
	39,5 %	60,5 %	100,0 %
Menetelmälliset virheet	26	40	66
	39,4 %	60,6 %	100,0 %

Jakolaskussa myös osaamistasoltaan paremmat opiskelijat tekivät runsaasti virheitä suhteessa yrittäneiden määrään. Erona muihin peruslaskutoimitustehtäviin tässä tehtävässä menetelmällisiä virheitä tekivät useat opiskelijat osaamistasosta riippumatta ($\chi^2(1) = 0.04$, $p = .843$). Myös laskuvirheillä ei ollut merkittävää yhteyttä osaamistasoon ($\chi^2(1) = 0.04$, $p = .843$). Jakolaskun menetelmälliset virheet ja laskuvirheet olivat kaikista analysoiduista virhetyypeistä ainoat, joita tekivät enemmän osaamistasoltaan hyvät opiskelijat kuin huonot. Tätä voidaan selittää sillä, että osaamistasoltaan heikommista opiskelijoista suuri osuus oli jättänyt tehtävän ilman merkintää koepaperiin.

Muiden jakolaskun virheluokkien yhteys osaamistasoon χ^2-riippumattomuus perusteella oli erittäin merkitsevää, vaikka virhetyypin tehneiden opiskelijoiden frekvenssit ovatkin lähellä toisia. Jakolaskun jätti epätäydelliseksi 133 opiskelijaa ja tämä virhetyypillä oli erittäin merkittävä yhteys heikkoon osaamiseen matematiikan kokeessa ($\chi^2(1) = 4.71$, $p = .000$). Myös asettelun virheillä ja osaamistasolla havaittiin olevan voimakasta yhteyttä toisiinsa ($\chi^2(1) = 10.38$, $p <. 001$). Virheellisen mutta systemaattisen algoritmin sekä osaamistason yhteys oli niin ikään erittäin merkitsevää ($\chi^2 (1) = 18.23$, $p = .000$). Näitä virheitä teki yhteensä 29 opiskelijaa, joista 75,9 % (f=22) kuului osaamistasoltaan ryhmään 1 ja 24,1 % (f=7) oli ryhmään 2. Kaiken kaikkiaan jakolaskussa tehtiin paljon virheitä, mutta merkitsevää oli se, että myös osaamistasoltaan hyvät opiskelijat tekivät algoritmin sääntöihin liittyviä menetelmällisiä virheitä.

9 TULOSTEN TARKASTELU JA POHDINTA

Tutkimuksessa haluttiin selvittää sitä, miten toisen asteen ammatillisia opintoja aloittavat opiskelijat hallitsevat peruslaskutoimitusten algoritmit ja mitä virheitä opiskelijat tekevät algoritmilaskuissa. Lisäksi oltiin kiinnostuneita siitä, eroavatko eri tavalla matematiikkaa hallitsevien opiskelijoiden tekemät virheet toisistaan eli toisin sanoen siitä, onko osaamistasolla ja opiskelijan tekemien virheiden välillä yhteyttä. Virheiden analysointia varten muodostettiin peruslaskutoimitusten algoritmien virheluokitus aikaisemmin muodostettujen aritmeettisten virheiden luokitusten pohjalta.

Tutkimus osoitti, että peruslaskutoimitukset hallitaan toisena asteen ammatillisten opintojen alussa huonosti. Heikointa on kerto- ja jakolaskualgoritmien hallinta, sillä näiden laskutoimitusten tehtävät ratkaisi oikein selvästi alle puolet opiskelijoista. Yhteenlaskualgoritmin käyttö hallittiin parhaiten peruslaskutoimituksista, mutta silti lähes 7 % opiskelijoista ei ratkaissut moninumeroisten kokonaislukujen yhteenlaskutehtävää oikein. Desimaaliluvuilla laskettavat tehtävät hallittiin heikommin kuin vastaava laskutoimitus kokonaisluvuilla. Ammatillisiin opintoihin kuuluvien matematiikan opintojen kannalta opiskelijoiden heikko matematiikan osaaminen asettaa suuren haasteen, sillä useilla ammatillisilla aloilla matematiikka on tärkeässä osassa ja peruskoulussa opittuja matematiikan sisältöjä pitäisi pystyä soveltamaan ammatillisiin konteksteihin. Matematiikka muodostaa usealla alalla kivijalan ammatillisille opinnoille ja ammattitaidon kehittymiselle. (Helakorpi 1998, 361–362).

Laskutehtävissä tehtiin runsaasti virheitä ja erityisesti sellaisia virheitä, jotka ryhmiteltiin menetelmällisiksi virheiksi. Menetelmällisiä virheitä tekivät erityisesti heikommin matematiikkaa hallitsevat opiskelijat. Kuitenkin jakolaskussa ja osittain myös kertolaskussa menetelmällisiä virheitä tekivät myös osaamistasoltaan paremmat opiskelijat. Opiskelijoiden tekemistä virheistä havaittiin, että algoritmien säännöt olivat osittain sekoittuneet keskenään ja toisaalta opiskelijat olivat käyttäneet algoritmissa sen logiikan vastaisia sääntöjä. Algoritmia ei ollut esimerkiksi ratkaistu kymmenjärjestelmään perustuen. Opiskelijoiden tekemien virhetyyppien perusteella voidaan väittää, että usealla opiskelijalla on heikko käsitteellinen ymmärrys algoritmin rakentumisesta.

9.1 Virheluokituksen toimivuus

Tutkimusta varten laaditussa virheluokituksessa ei ollut kaikkia opiskelijoiden tekemiä virheitä, mutta se toimi hyvänä pohjarakenteena virheiden tutkimiselle. Virheluokitusta täydennettiin aineistosta löytyneillä virheillä ja täydennettynä muotona se edustaa kattavasti algoritmeissa mahdollisesti esiintyviä virheitä. Erityisesti vähennyslaskuissa ja kertolaskussa jouduttiin muodostamaan uusia virheluokkia virheiden luokittelemiseksi. Aikaisemmat virheluokitukset käsittivät lähinnä aritmeettiset virheet, eikä algoritmien virheitä ollut luokiteltu yksityiskohtaisesti. Toisaalta Magnen ja Thörnin (1987b) monipuolisessa virheluokituksessa huomioitiin algoritmien virheet, mutta virheluokitus ei kuitenkaan ollut kyllin kattava opiskelijoiden tekemille virheille. Aineistossa esiintyneillä uusilla virhetyypeillä täydennetty virheluokitus on esitetty liitteessä 3.

Uusia virheluokkia syntyi myös siksi, että erityisesti vähennyslaskun lainausvirheet sekä yhteen- ja kertolaskun muistiinvientivirheet eroteltiin tarkemmin kuin aikaisemmissa virheluokituksissa. Tämä oli perusteltua, koska virheiden tarkka erottelu toi esille sellaisia virheitä, jotka muuten olisivat peittyneet suuremman virheluokan sisälle. Esimerkiksi kertolaskun muistiinviennissä esiintynyt suuri virheluokka ”Väärä laskujärjestys muistiinviennissä” on virheluokka, jonka tunnistamisesta on opetuksellista hyötyä. Mikäli luokittelu olisi tehty esimerkiksi Engelhardtin (1977) virheluokituksen mukaan, tämä virhetyyppi olisi jäänyt yhdeksi useista virhetyypeistä suuren virheluokan sisällä (wrong algorithm).

Virheiden yksityiskohtaisesta luokittelusta seurasi myös hankaluuksia. Virheluokkien määrä kasvoi suureksi ja niitä oli hankala verrata keskenään. Koevastauksia analysoitaessa yksityiskohtainen luokittelu aiheutti myös sen, että virheitä oli hankala sijoittaa juuri tiettyyn kapea-alaiseen luokkaan. Laajemmat virheluokat olisivat sallineet suuremman variaation virheluokan sisällä. Lisäksi virheiden luokittelua hankaloitti se, että osasta vastauksista oli hankalaa tunnistaa virhetyyppiä, sillä opiskelija ei ollut merkinnyt selvästi kaikkia algoritmiin kuuluvia merkintöjä. Tämänkaltaisten ongelmien välttämiseksi olisi hyvä, jos laskijaa haastateltaisiin laskusuorituksen jälkeen, jolloin hän voisi itse selventää ajatuskulkuaan ja sen mahdolliset virheet pystyttäisiin tunnistamaan paremmin. Vastaavaa on ehdotettu ja toteutettu myös aikaisemmin (Engelhardt 1977, Huhtala 2000, Temple 1991)

9.2 Algoritmien hallinta peruskoulun jälkeen

Peruskoulun päättövaiheen matematiikan osaamista arvioivissa tutkimuksissa on lukujen ja laskutoimitusten hallinnan todettu olevan parasta matematiikan eri sisältöalueista (mm. Mattila 2003, Korhonen 2001, 1999; Kupari ym. 2001). Luvut ja laskutoimitukset -alue on laaja ja se sisältää enemmän kuin moninumeroisten lukujen peruslaskutoimitukset, ja tämä tutkimuksen tulokset tuovat lisätietoa siitä, millainen on peruslaskutoimitusten algoritmien hallinta toisen asteen ammatillisten opintojen alussa.

Tehtävien ratkaisuprosentit kertovat, että moninumeroisten lukujen laskemisen osaaminen vaihtelee paljon eri laskutoimituksissa. Yhteenlasku kokonaisluvuilla hallitaan parhaiten, mutta tässäkin tehtävässä yhteensä 7,4 % opiskelijoista ratkaisi tehtävän väärin tai jätti sen ilman merkintää. Näin ollen kyseinen osuus opiskelijoista ei hallinnut laskutehtävää, joka kuuluu peruskoulun ensimmäisten luokkien oppisisältöön. Laskutoimituksen algoritmin hallinta heikkenee samassa järjestyksessä, kuin missä ne opetetaan peruskoulussa. Vain runsaat puolet opiskelijoista (55 %) ratkaisi oikein kokonaislukujen vähennyslaskutehtävän, ja kerto- ja jakolaskun osaaminen oli vielä heikompaa. Jakolaskutehtävän hallinta oli kaikkein heikointa vain hieman vajaan viidenneksen ratkaistessa tehtävän oikein. Kaksinumeroisella jakajalla jakaminen opetetaan esimerkiksi Laskutaito -kirjasarjassa viidennen luokan keväällä (Koivisto, Salonen, Uus-Leponiemi & Ilmavirta 2000a). Jakolaskutehtävän heikon ratkaisuprosentin perusteella voidaan siis sanoa, että suurin osa toisen asteen ammatillisia opintoja aloittavista opiskelijoista ei hallinnut peruskoulun viidennen luokan matematiikan oppisisältöön kuuluvaa asiaa.

Tutkimuksen tulosten perusteella voidaan kriittisesti arvioida peruskoulun tehokkuutta peruslaskutoimitusten algoritmien opetuksessa. Käytössä olevan spiraaliperiaatteen mukaisesti useaa eri algoritmia opetetaan samalla vuosiluokalla ja algoritmin käyttöä sovelletaan vaikeampiin laskutilanteisiin vaiheittain ja eri vuosiluokkien aikana (Koponen 1995, 45; Malinen 1972, 32–33). Jakolaskualgoritmi opetetaan viimeisenä kaikista peruslaskutoimitusten algoritmeista ja sen harjoitteluun käytetään vähiten aikaa, mikä saattaa olla yhtenä selityksenä sen heikolle hallinnalle. Opiskelijat eivät siis ehkä ole oppineetkaan kunnolla ratkaisemaan moninumeroisten lukujen jakolaskua algoritmilla peruskoulun aikana tai toisaalta oppiminen on voinut olla laadultaan heikkoa. Spiraaliperiaatteen haittana voi olla se, että oppilas oppii algoritmin erilaisina sääntöinä, joita käytetään erilaisissa tilanteissa, ja puutteelliseksi voi jäädä kokonaiskuva algoritmista sekä käsitteellinen ymmärrys sen rakentumisesta. Varteenotettava vaihtoehto voisi olla järjestää opetettava aines siten, että jokaisen neljän peruslaskutoimituksen algoritmiin käytettäisiin riittävästi aikaa, ja vasta yhden algoritmin kunnollisen hallinnan jälkeen siirryttäisiin seuraavaan algoritmiin. (Cawley ym. 1998). Tulisikin miettiä tarkemmin sitä, missä vaiheessa neljä peruslaskutoimituksen algoritmia opetetaan ja olisiko erityisesti heikoille oppilaille hyödyllistä opettaa jokainen algoritmi erillisinä eikä vuosiluokittain vaikeutuvina, koska tällöin algoritmit eivät ehkä sekoittuisi niin herkästi keskenään.

9.3 Opiskelijoiden tekemistä virheistä

Opiskelijoiden peruslaskutoimitusten algoritmeissa tekemistä virheistä voidaan huomata, että useassa tapauksessa virheellinen ratkaisu on johtunut lukujen paikkajärjestelmän heikosta hallinnasta. Paikkajärjestelmän noudattamista tarvittiin mm. lukujen asettelussa ja niiden laskemisessa allekkain sekä kertolaskussa ja jakolaskussa välivaiheiden oikeassa asettelussa. Vähennyslaskussa tehtiin paljon lainausvirheitä, joihin voi olla syynä lukujen paikkajärjestelmän huono hallinta tai se, että algoritmin ratkaisun ei ymmärretä perustuvan kymmenjärjestelmään. Tämä tuli selvästi esille virheessä, jossa kertolaskun välivaiheet olivat asetettu virheellisesti. Jos algoritmin ratkaisutapa opetetaan pelkkinä muistisääntöinä tai tietynlaisena mekaanisena toimintatapana, oppilaalle saattaa jäädä epäselväksi esimerkiksi se, että välivaiheiden asettelu perustuu paikkajärjestelmään. Perimmäinen käsitys algoritmin välivaiheiden asettelusta on jäänyt ymmärtämättä ja oppiminen on perustunut algoritmin välivaiheiden mekaaniseen suorittamiseen (Kinnunen & Vauras 1998, 273; Lehtinen & Kinnunen 1993, 50). Osan opiskelijoiden kohdalla pinnallisesta oppimisesta oli osoituksena myös se, että kerto- ja jakolaskualgoritmien säännöt olivat sekoittuneet muiden algoritmien sääntöjen kanssa. Tällaista laskumenetelmää eli virheellistä mutta systemaattista algoritmia käyttivät erityisesti matematiikan kokeessa heikommin menestyneet opiskelijat.

Suuri määrä opiskelijoita oli jättänyt laskutehtäviä ilman yritystä. Hieman vajaa kymmenesosa opiskelijoista ei ollut yrittänyt desimaalilukujen vähennyslaskutehtävän ja kertolaskutehtävän ratkaisua koepaperiin, ja jakolaskutehtävässä tämän osuus oli jopa kolmannes opiskelijoista. Huomionarvoista on, että nämä opiskelijat eivät olleet yrittäneet tehtävien ratkaisemista myöskään vaihtoehtoisilla strategioilla. Esimerkiksi jakolaskutehtävä 675 : 12 voidaan ratkaista myös jakamalla ensin luku 600 12:lla ja sen jälkeen tarkastelemalla sitä, montako kertaa luku 12 menee lukuun 75. Tällaisia strategioita opiskelijat eivät kuitenkaan käyttäneet. Algoritmin opetuksen vaarana voikin olla se, että se korvaa informaalit päättelyn menetelmät (Anghileri 2001, 102; Kamii & Dominic 1998, 135). Tällöin laskijalla ei ole käytössä muita menetelmiä tehtävän ratkaisemiseen algoritmin ratkaisuvaiheiden unohduttua. Ja toisaalta koska laskija muistaa, että tehtävän ratkaisuun on olemassa menetelmä, hän ei tule käyttäneeksi muita päättelyn muotoja menetelmän unohduttua. Mahdollisesti tehtävän ilman yritystä jättäneiden suurta osuutta voidaan selittää tällä. Toisaalta tehtävänannossa ei kannustettu käyttämään vaihtoehtoisia ratkaisukeinoja, sillä siinä pyydettiin laskemaan tehtävät juuri allekkain.

On siis väitetty, että algoritmien opettamisella on jopa haitallisia vaikutuksia matemaattisen ajattelun ja laskutaidon kehittymiselle. Vaihtoehtoisten päättelymenetelmien käyttämättä jättämisen lisäksi algoritmien käyttö voi myös heikentää lukujen paikka-arvon ja siten lukukäsitteen ymmärryksen kehittymistä. Algoritmia ratkaistessaan laskijan ei tarvitse ajatella, että esimerkiksi kymmenien sarakkeessa oleva luku kahdeksan merkitsee todellisuudessa lukua 80. (Kamii & Dominick 1998, 135.) Useat opiskelijoiden tekemät virheet liittyivätkin pohjimmiltaan kymmenjärjestelmään ja lukujen paikka-arvoon ymmärtämiseen. Esimerkkeinä tämän tyyppisistä virheistä on, että kertolaskun välivaiheet oli asetettu paikka-arvon vastaisesti tai vähennyslaskussa oli lainaus suoritettu paikka-arvoltaan liian suuresta luvusta. Yhteen-, vähennys- ja kertolaskualgoritmissa ratkaisun etenemissuunta on oikealta vasemmalle, mikä on myös vastakkainen suunta lukujen ”lukemissuunnalle”. Sen sijaan käyttäessään itse keksittyjä menetelmiä moninumeroisten lukujen laskemiseen laskuprosessi etenee vasemmalta oikealle ja lukujen paikka-arvo on ymmärrettävä oikean vastauksen saamiseksi. (Kamii & Dominick 1998, 135.) Vaihtoehtoisten strategioiden itse kehittämisen ja käyttämisen onkin todettu kehittävän käsitteellistä ajattelua enemmän kuin valmiina opetetun algoritmin käyttäminen (Hiebert & Wearne 1996, Carpenter 1997).

Koevastauksista löytyneiden erilaisten virhetyyppien suurta määrää voidaan osaltaan selittää opiskelijoiden iällä. Toisen asteen ammatillisten opintojen alussa peruslaskutoimitusten algoritmien opettelusta ja harjoittelusta on kulunut jo vuosia, ja opiskelija on saattanut unohtaa peruskoulussa oppimiaan algoritmisääntöjä, jolloin hän on itse keksinyt ratkaisusääntöjä tai täydentänyt muistamiaan sääntöjä. Tämä voi olla yksi selitys opiskelijoiden tekemien virheiden suurelle variaatiolle. Toisaalta virhetyyppien suuri variaatio viittaisi myös siihen, että algoritmien oppiminen on jo lähtökohtaisesti ollut puutteellista tai pinnallista. On todettu, että erityisesti heikkojen opiskelijoiden kohdalla algoritmin pinnallinen oppiminen johtaa sen nopeaan unohtamiseen, mikä näkyy laskusuorituksessa virheiden lisääntymisenä ja algoritmien sekoittumisena, jos ei algoritmin käyttöä harjoitella. (Lehtinen & Kinnunen, 1993, 50.) Myös tämän tutkimuksen tulokset tukevat tätä väitettä, sillä algoritmien sääntöihin liittyvät menetelmälliset virheet olivat useassa laskutoimituksessa tyypillisesti heikkojen opiskelijoiden tekemiä.

Kertolaskun suurin yksittäinen virhetyyppi oli virheellinen laskujärjestys muistiinviennissä. Tämän virheen havaittiin olevan yhteydessä siihen, että muistinumero merkittiin väärään paikkaan eli yhteenlaskualgoritmin sääntöjen mukaisesti kerrottavan luvun yläpuolelle. Kyseinen virhetyyppi ei ollut pelkästään matematiikan kokeessa heikommin menestyneiden opiskelijoiden menetelmällinen virhe, vaan opiskelijat tekivät virhettä osaamistasosta riippumatta. Eräs selitys virhetyypille voi olla muistinumeron merkitsemissääntöjen sekoittuminen. Kertolaskun muistinumero opetetaan merkitsemään sivuun lukujen oikealle puolelle, jolloin tehdään ero muistinumeron merkitsemiselle yhteenlaskussa (Rikala ym. 1997b). Näyttäisi siltä, että muistinumeron laskujärjestyksen on vaarana sekoittua kertolaskussa, jos muistinumero merkitään yhteenlaskualgoritmin mukaisesti lukujen yläpuolelle. Tutkimuksen tuloksen perusteella pitäisi siis algoritmeja opetettaessa pitää tärkeänä sitä, että merkitsemissääntöjä noudatetaan ja niiden noudattamista vaaditaan myös oppilaalta.

Desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskussa tehdyistä virheistä suuri osa liittyi desimaalilukukäsitteen hallintaan. Desimaaliluvun hallinta kuuluu peruskoulun opetussuunnitelman 1994 tavoitteissa alaluokkien tavoitteisiin (Opetushallitus 1994). Tämän tutkimuksen tulosten perusteella voidaan perustellusti kyseenalaistaa tavoitteen saavuttaminen usean opiskelijan kohdalla. Desimaaliosat laskettiin yhtenä kokonaisuutena sen sijaan, että kymmenesosat olisi laskettu keskenään ja sadasosat keskenään ja toisaalta desimaaliosaan lisättiin nollia paikka-arvon vastaisesti. Voidaan kuitenkin pohtia sitä, onko kymmenjärjestelmän ja lukujen paikka-arvon heikkoon hallintaan viittaavia virheitä tai desimaaliluvun virheitä tekevällä opiskelijalla todellisuudessa puutteellinen ymmärrys kymmenjärjestelmästä tai desimaalilukukäsitteestä. Mahdollisesti taustalla tämän tyyppisten virheiden tekemiseen on se, että laskija on vain oppinut algoritmin pelkkänä mekaanisena toimenpiteenä ja välivaiheiden sarjallisena suorittamisena ilman käsitteellistä ajattelua algoritmin perusperiaatteista. Algoritmin ei ajatella perustuvan kymmenjärjestelmään, ja siten sitä ei huomata noudattaa ratkaisun etenemisessä.

Tutkimuksen tulokset viittaavat siihen, että opiskelijoilla on puutteellinen käsitteellinen ymmärrys algoritmien rakentumisesta. On myös aikaisemmin tunnistettu, että opiskelijat voivat käyttää algoritmia ilman, että heillä on käsitteellistä tietoa sen perustasta (Hiebert 1986, Lehtinen & Kinnunen 1993, VanLehn 1990). Pohdittaessa syytä tähän on huomioitava, että algoritmeja ei mahdollisesti ole opetettukaan käsitteelliseen tietoon pohjautuen. Opettajalla ei ole välttämättä itsellään käsitteellistä ymmärrystä algoritmeista. Man (1999) tutkimuksen mukaan jopa hyvin pätevillä matematiikan opetukseen perehtyneillä opettajilla ei välttämättä ole syvällistä ymmärrystä matemaattisten käsitteiden rakentumisesta. Tällöin opettajalla ei voida ajatella olevan välineitä opettaa algoritmia käsitteelliseen tietoon perustuen. Monen matemaattisen asian opetus perustuu pikemminkin konventioihin kuin käsitteelliseen tietoon eli opettaja opettaa tietyllä tavalla, koska hänelle itselleenkin on opetettu niin. Käytännössä opettajan oma käsitteellinen tietämys vaikuttaa esimerkiksi siihen, miten hän perustelee oppilailleen kertolaskualgoritmin etenemisen välivaiheittain (Ma 1999, 28–33).

9.4 Näkökulmia matematiikan opettamiseen ammatillisessa koulutuksessa

Opetuksen kehittämisen kannalta on mielekästä suunnata kiinnostusta siihen, minkälaisia virheitä eri osaamistasolla olevat opiskelijat tekevät ja onko virheillä eroa. Jos tiedetään, mitkä virheet ovat tyypillisesti matematiikassa heikkojen opiskelijan tekemiä, opiskelijan tekemistä virheistä päätellä hänen yleistä matemaattista tasoaan. Osaamistason raja tehtiin tässä tutkimuksessa puolittamalla opiskelijoiden kokeesta saama summapistemäärä. Voidaan pohtia sitä, onko paremmin menestyneiden ryhmän opiskelijoiden suoritus matematiikassa todellisuudessa hyvää. Tämän tutkimuksen paremmin menestyneiden opiskelijoiden virheiden yleistettävyyttä pitää pohtia kriittisesti koko ikäryhmän osalta, mutta tulokset voidaan yleistää koskemaan teknisten oppilaitosten opiskelijoita.

Matematiikan kokeessa heikommin menestyvät opiskelijat tekivät kaikkia virhetyyppejä enemmän kuin matematiikan kokeessa paremmin menestyneet opiskelijat. Matematiikassa heikommat opiskelijat tekivät tyypillisesti yhteen- vähennys- ja kertolaskussa menetelmällisiä virheitä, asettelun virheitä, käyttivät virheellistä mutta systemaattista algoritmia sekä jättivät laskutoimituksen ratkaisun kesken. Sen sijaan laskuvirheet jakaantuivat epätasaisemmin osaamistasoryhmien kesken. Myös aikaisemmin on päädytty samaan tulokseen menetelmällisten virheiden yhteydestä matematiikan osaamiseen oppimisvaikeutisten oppilaiden kohdalla. Samoin on todettu, että laskuvirheitä tekevät myös matematiikassa normaalisti menestyvät oppilaat. (Cawley ym. 1996.) Tämä tulos on siis vain osittain yhtenevä tämän tutkimuksen tulosten kanssa, sillä teknisten alojen opiskelijat tekivät jakolaskussa menetelmällisiä virheitä osaamistasosta riippumatta. Kaksinumeroisen jakajan jakolasku oli siis toisen asteen opintoja teknisillä aloilla aloittaville opiskelijoille niin vaikea tehtävä, että sen hallinta ei erotellut opiskelijoita osaamistasoltaan eri ryhmiin.

Osaamistason ja opiskelijat tekemien virheiden yhteydestä voidaan tehdä kahdenlaisia opetuksellisia päätelmiä. Näyttäisi siltä, että jos opiskelija tekee moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskussa paljon menetelmällisiä virheitä tai käyttävät virheellistä mutta systemaattista algoritmia, on aiheellista arvioida hänen matemaattista osaamistaan laajemmin. Opiskelijan osaamisessa voi olla puutteita myös muissa matematiikan sisältöalueissa, mikä on luonnollisesti hyödyllistä tietää matematiikan opetusta suunniteltaessa. Sen sijaan kerto- ja jakolaskualgoritmien virheet eivät anna yhtä todennäköisesti viitteitä matemaattisen osaamisen tasosta. Kertolaskun menetelmällisistä virheistä ja erityisesti jakolaskun menetelmällisistä virheistä ei vielä voida päätellä opiskelijan peruskoulun matematiikan oppimäärän hallintaa, sillä näissä algoritmeissa tekivät menetelmällisiä virheitä useat opiskelijat osaamistasosta riippumatta. Jos siis opiskelija tekee paljon menetelmällisiä virheitä moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuissa tai laskuvirheitä näissä laskutoimituksissa, olisi aiheellista harkita peruskoulun matematiikan oppisisältöjen kertaamista ja perussisältöjä vahvistamisesta. Jo heti opintojen alussa syksyllä olisi hyvä järjestää kertausta yksilöllisessä ohjauksessa tai pienryhmäohjauksessa, jotta mahdolliset tulevat vaikeudet voidaan ennaltaehkäistä.

Toinen päätelmä liittyy opetuksen sisältöön. On ilmeistä, että matematiikkaa eri tavalla hallitsevat opiskelijat tekevät erilaisia virheitä peruslaskutoimitusten algoritmeissa. Tällöin myös opetusta tulisi suunnata eri tavalla matematiikkaa hyvin ja heikosti hallitseville opiskelijoille. Mikäli tavoitteena pidetään sitä, että oppilaat hallitsevat peruslaskutoimitusten algoritmit, heikot opiskelijat tarvitsisivat peruslaskutoimitusten algoritmien sääntöihin liittyvää opetusta sekä aritmeettisten faktojen kertausta. Aritmeettisten faktojen vahvistamiseksi olisi hyödyllistä tarkastella laskutoimituksen vaihdannaisuutta, sillä tällöin muistettavien faktojen määrä vähenee (Dehaene 1997, 125−127 & Cawley ym. 1998, 70). Olisi tarpeellista vahvistaa myös kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon käsitteitä, sillä useissa matematiikan osaamiseltaan heikompien opiskelijoiden tekemistä virheistä oli pohjimmiltaan kyse näiden käsitteiden heikosta hallinnasta. Kymmenjärjestelmän käsitettä vahvistavan opetuksen on jo todettu aikaisemmin tukevan peruslaskutoimitusten algoritmien hallintaa ja vähentävän virheitä (Fuson & Briars 1990). Opetuksessa olisi hyvä käyttää konkreettisia materiaaleja algoritmien rakentumisen havainnollistamisessa, sillä tämä tukisi opiskelijan käsitteellisen ymmärryksen kehittymistä (Woodward & Howard 1994, 134). Matematiikkaa paremmin hallitsevat opiskelijat sen sijaan hyötyisivät aritmeettisten faktojen vahvistamisesta sekä jakolaskussa ja mahdollisesti myös kertolaskussa algoritmin sääntöihin liittyvästä opetuksesta.

Suuri määrä opiskelijoista jätti tehtäviä ilman merkintää paperiin ja tai tehtävän ratkaisu oli jätetty kesken, ja tämän havaittiin olevan tyypillisesti matematiikan osaamisessa heikommalla tasolla olevien opiskelijoiden piirre. Lehtisen ja Kinnusen (1993, 52−54) kuvaaman tilanneorientaatiomallin mukaan tämä on tyypillistä minädefenssiivisesti oppimistehtävään suhtautuville oppilaille. Tehtävä koetaan vaikeaksi ja siinä epäonnistumista pidetään varmana, joten tehtävän ratkaisemisen yrittämättä jättämisellä pyritään välttämään väistämätön epäonnistuminen. Matematiikan osaamisessa ja laskutehtävien ratkaisemisessa on sinnikkäällä yrityksellä ja ponnistelulla suuri merkitys, joten tämän piirteen vahvistamista pitäisi pitää tärkeänä tavoitteena ammatillisten oppilaitosten matematiikan opetuksessa. Matematiikan peruskäsitteitä vahvistavassa tukiopetuskokeilussa on havaittu, että opiskelijoiden innokkuus ja ponnistelu tehtävän ratkaisemiseen lisääntyi, kun matematiikan peruskäsitteitä harjoiteltiin pienryhmässä (Leino 1991, 77). Matematiikan peruskäsitteitä tukevalla kertauskurssilla tai erityisopetuksella voisi olla siis matematiikan sisällöllisten asioiden tukemisen lisäksi myönteistä vaikutusta myös asenteisiin matematiikkaa kohtaan. Tehtävän ilman merkintää jättäneiden suuri määrä osoittaa, että opiskelijat tarvitsevat vahvistusta luottamuksessa matematiikan taitoihinsa. Tämä olisi tärkeää erityisesti matematiikassa heikommin suoriutuvien opiskelijoiden kohdalla.

Opiskelijoiden heikko peruslaskutoimitusten algoritmien hallinta asettaa haasteen matematiikan opinnoille ammatillisessa koulutuksessa. Matematiikka on keskeisessä asemassa usealla teknisellä alalla ja peruskoulun matematiikan oppimäärää sovelletaan ammattiaineiden tilanteisiin. Jos jo peruskoulun oppimäärä hallitaan heikosti, on aiheellista huolestua opiskelijan edellytyksistä suorittua matematiikan opinnoista ammatillisessa koulutuksessa. Matematiikka on kumuloituva aine, joten perusasiat on hallittava vaikeampien sisältöalueiden hallitsemiseksi. Tämän lisäksi hyvät matematiikan valmiudet vaikuttavat esimerkiksi fysiikan ja sähköopin osaamiseen. Tämän tutkimuksen tulosten perusteella suuri joukko opiskelijoista tarvitsisi peruskoulun matematiikan oppimäärän kertausta ja perusasioiden vahvistamista ennen ammatillisen matematiikan opiskelua. Ammatillisia opintoja aloittavien opiskelijoiden heikkoon matematiikan osaamiseen on kiinnitetty huomiota jo aikaisemminkin ja matematiikan peruskäsitteitä vahvistavasta pienryhmäopetuksesta on ollut kokeiluja (mm. Lauttamus, Kupari & Leino 1989, Leino 1991, Leino & Kupari 1990). Tulokset ovat olleet rohkaisevia. Opettajat kokivat pienryhmässä tapahtuneen peruskoulun oppimäärän kertauskurssin motivoivana ja myös opiskelijoiden asenne matematiikkaa kohtaan muuttui positiivisemmaksi. (Leino 1991, 77.) Myös matematiikan opettajan ja erityisopettajan yhteisestä samanaikaisopetuksesta matematiikan tunnilla on saatu myönteisiä kokemuksia (Lauttamus ym.1989). Tämänkaltaisille opetusjärjestelyille olisi siis tarvetta myös jatkossa.

9.5 Jatkotutkimusehdotuksia

Tässä tutkimuksessa ei tarkasteltu sitä, tekivätkö samat opiskelijat samantyyppisiä virheitä eri laskutehtävissä. Tämän tyyppinen tutkimusongelma olisi hyödyllinen, koska tällöin saataisiin tietoa siitä, onko virheissä löydettävissä systemaattisuutta vai ratkaisevatko opiskelijat samantyyppisiä ongelmia erilaisilla virheellisillä menetelmillä. Toisaalta virheiden systemaattisuuden tutkiminen voisi paljastaa jotain oppimisvaikeuksien luonteesta, mikä olisi arvokasta tietoa opetuksen suunnittelun kannalta ja matematiikan oppimisvaikeutisten oppilaiden tunnistamisessa. Tutkimuksessa havaittiin opiskelijoiden sekoittavan algoritmien sääntöjä keskenään ja keksivän omia sääntöjä unohdettujen tilalle. Tämän virheluokan virheissä vaikutti olevan samankaltaisuutta, jota kannattaisi tutkia tarkemmin. Jatkossa voisi tutkia, voiko näitä algoritmivirheitä luokitella omiksi alaluokikseen ja onko virheellinen ajattelu samanlaista.

Virheitä analysoitaessa oli osaa opiskelijoiden tekemistä virheellisistä ratkaisuprosesseista hankala tunnistaa luotettavasti. Jotta saataisiin selville opiskelijan ajatteluprosessi näissä virheissä, opiskelijaa tulisi haastatella laskusuorituksen jälkeen. Opiskelijan ajatteluprosessin selvittäminen mahdollistaisi myös opiskelijoiden omien miniteorioiden tunnistamisen. Virheiden analysointi antoi vihjeitä mahdollisista miniteorioista, mutta niiden luotettava tunnistaminen vaatisi opiskelijan haastattelemisen. Esimerkiksi desimaaliluvun virheiden taustalla on mahdollisesti miniteorioita lukujen käsitteestä ja laskemissäännöistä. Näin ollen opiskelijan haastattelu yhdistettynä virheiden analysointiin täydentäisi tutkimusta. Tämä asia on nostettu aikaisemminkin muissa virheisiin kohdistuneissa tutkimuksissa (Engelhardt 1977, Huhtala 2000).

Jakolaskun huono hallinta nosti esiin kysymyksen tämän laskutoimituksen ja jakolaskukäsitteen ymmärtämisestä. Pelkästään jakolaskun virheisiin keskittyminen olisi jo itsessään hyvä jatkotutkimusaihe. Suuri joukko opiskelijoita jätti tehtävän ilman näkyvää yritystä ja moni jätti jakolaskun ratkaisemisen kesken. Sen tutkiminen, kuinka pitkälle opiskelijat pääsevät jakolaskun ratkaisuprosessissa, voisi tuoda lisätietoa jakolaskualgoritmin hankalimmista solmukohdista.

LÄHTEET

Ahonen, T. & Räsänen, P. 1995. Matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.), Oppimisvaikeudet. Neuropsykologinen näkökulma. Porvoo: WSOY. 209−246.

Anghileri, J. 2001. Development of division strategies for year 5 pupils in ten English schools. British Educational Research Journal 27 (1), 85−103.

Ashcraft, M.H. 1992. Cognitive arithmetic: A review of data and theory. Cognition 44, 75−106.

Baroody, A. J. 1987. Children's mathematical thinking. New York: Teachers College.

Bryant, B. R. & Rivera, D. P. 1997. Educational assessment of mathematics skills and abilities. Journal of Learning Disabilities 30 (1), 57−68.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Ephson, S. B. 1997. A longitudial study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education 29 (1), 3−20.

Cawley, J. F., Parmar, R. S., Yan, W. & Miller, J. H. 1996. Arithmetic computation abilities of students with learning disabilities: Implications for instructtion. Learning Disability Research & Practice 11 (4), 230–237.

Cawley, J. F., Parmar, R. S., Yan, W. & Miller, J. H. 1998. Arithmetic computation performance of students with learning disabilities: Implications for curriculum. Learning Disability Research & Practice 13 (2), 68−74.

Dehaene, S. 1997. The number sense. How the mind creates mathematics. New York: Oxford University Press.

Engelhardt, J. M. 1977. Analysis of children's computational errors: a qualitative approach. British Journal of Educational Psychology 47, 149−154.

Fuson, K. C. & Briars, D. J. 1990. Using a base-ten blocks learning and teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education 21, 108–206.

Fuson, K. C. & Kwon, Y. 1992. Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. Child Development 63, 491–506.

Geary, D. C. 1994. Children's mathematical development. Research and practice applications. Washington: American Psychological Association.

Greenstein, J. & Strain, P. S. 1977. The utility of the key math diagnostic arithmetic test for adolescent learning disabled students. Psychology in the Schools 14 (3), 275–282.

Haapasalo, L. 1998. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), 80−98.

Haapasalo, L. 2003. The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to able to do, or vice versa? Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim) Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX symposium of the Finnish mathematics and science educational research association. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita. Numero 86. 1−20.

Heikkilä, T. 1998. Tilastollinen tutkimus. Helsinki: Oy Edita Ab.

Helakorpi, S. 1998. Ammatillisen matematiikan oppimisen ja opetuksen kysymyksiä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), 352–363.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa James Hiebert (toim.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale: Erlbaum. 1–27.

Hiebert, J. & Werne, D.1996. Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. Cognition and Instruction 14 (3), 251–283.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2000. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

Huhtala, S. 2000. Lähihoitajaopiskelijan oma matematiikka. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 219.

Jordan, N. C. & Montani, T. O. 1996. Mathematics difficulties in young children: Cognitive and developmental perspectives. Advances in Learning and Behavioural Disabilities 10, 101−139.

Kamii, C. & Dominick, A. 1998. The harmful effects of algorithms in grades 1−4. Teoksessa L. J. Morrow, M. J. Kenney (toim.) 130−140.

Kinnunen, R. & Vauras, M. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) 269−282.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 1999. Laskutaito 5.

Syysosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2000a. Laskutaito 5. Kevätosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Koivisto, M., Salonen, M, Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2000b. Laskutaito 6. Oppilaan kirja. Porvoo: WSOY.

Koponen, R. 1983. An item analysis of tests in mathematics applying logistic test models. Jyväskylä studies in education. Psychology and social research 50.

Koponen, R. 1995. Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille. Saarijärvi: Atena kustannus Oy.

Koponen, R. 2001. Tuloksia peruskoululaisten 1.−7.-luokkalaisten matematiikan suorituksista ja niiden muutoksista. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 38.

Korhonen, H. 1994. Peruskoulun päättöluokan matematiikan opetuksen arviointi. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 127.

Korhonen, H. 1999. Peruskoulun matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 1998. Oppimistulosten arviointi 1/1999. Helsinki: Opetushallitus.

Korhonen, H. 2001. Perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 2000. Oppimistulosten arviointi 3/2001. Helsinki: Opetushallitus.

Kupari, P. 1993. Laskutaidotko kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina. Teoksessa P. Linnakylä & H. Saari (toim.) Oppiiko oppilas peruskoulussa? Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia. Jyväskylä: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. 81−104.

Kupari, P. 1996. Miten peruskoululaisten matematiikan oppimiselle on käynyt säästöjen kourissa? Teoksessa R. Jakku-Sihvonen, A. Lindström & S. Lipsanen (toim.) Toteuttaako peruskoulu tasa-arvoa? Opetushallituksen arviointisarja 1/96. Helsinki: Yliopistopaino. 436−450.

Kupari, P. 1998. Mitä matematiikasta opitaan koulussa? Valtakunnallisen arviointi tutkimuksen tuloksia. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), 216−297.

Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T. & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaan ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas kansainvälinen matematiikka- ja luonnontiedetutkimus TIMSS 1999 Suomessa.

Jyväskylä: Yliopistopaino.

Kupari, P & Törnroos, J. 2003. Miten suomalaisnuoret osaavat matematiikkaa? Teoksessa J. Välijärvi & P. Linnakylä (toim.) Tulevaisuuden osaajat. PISA 2000 Suomessa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. 41−56.

Lauttamus, U., Kupari, P. & Leino, L. 1989. Matematiikan samanaikaisopetus ammatillisessa oppilaitoksessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 30.

Lehtinen, E & Kinnunen, R. 1993. Matemaattisista oppimisvaikeuksista. Teoksessa M. Vauras (toim.) Oppimisvaikeudet ja opetuksen kehittäminen: Katsaus Turun yliopiston Oppimistutkimuksen keskuksen toimintaan ja tutkimukseen. Rauma: Soveltavan psykologian monografioita 6. Acta psychological Fennica, 37−52.

Leino, L. 1991. Matematiikan peruskäsitteitä vahvistavat tukiopetustehtävät ammatillisessa oppilaitoksessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 64.

Leino, L. & Kupari, P. 1990. Prosenttilaskun pienryhmäopetus ammatillisessa oppilaitoksessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 52.

Ma, L. 1999. Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. London: Lawrence Erlbaum Associaties.

Magne, O. 1980. Matematik inlärningen i grundskolan. Hur eleverna lyckas eller mislyckas. Lund: Bloms Boktryckeri.

Magne, O. & Thörn K. 1987a. En kognitiv taxonomi för matematikundervisningen: del 1. Undersökningen. Malmö: Lärarhögskolan. Nr. 471.

Magne, O. & Thörn K. 1987b. En kognitiv taxonomi för matematikundervisningen: del 2. Analyser av huvudområden. Malmö: Lärarhögskolan. Nr. 427.

Malinen, P. 1972. Opetussuunnitelmat koulutyössä. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Mattila, L. 2003. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arvionti 9. vuosiluokalla 2002. Helsinki: Opetushallitus.

Maurer, S. B. 1998. What is an algorithm? What is an answer? Teoksessa L. J. Morrow, M. J. Kenney (toim.), 7−21.

Metsämuuronen, J. 2000. Metodologian perusteet ihmistieteissä. Metodologia 1 -sarja. Jaabes OÜ: Methelp.

Morrow, L. J., Kenney, M. J. (toim.), 1998. The teaching and learning of algorithms in school mathematics. The National Counsil of Teachers of Mathematics.

Niemi, E. K. 2001. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. Helsinki: Opetushallitus.

Nummenmaa, T., Konttinen, R., Kuusinen, J. & Leskinen, E. 1997. Tutkimusaineiston analyysi. Porvoo: WSOY.

Opetushallitus. 1994. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994. Helsinki: Painatuskeskus.

Opetushallitus. 1999. Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit - arvosanan hyvä (8) kriteerit yhteisissä oppiaineissa. Helsinki: Yliopistopaino Oy.

Opetushallitus. 2003. Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003–2004 noudatettavat opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 3–9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 1–2. Helsinki: Edita Prima Oy.

Pehkonen, E. 1997. Peruskoulun matematiikanopetuksen arviointi 1995. Valtakunnallinen 9. luokan koe. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 152. Helsinki: Hakapaino Oy.

Rikala, S., Sieppi, H., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2002. Laskutaito 2. Syysosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Rikala, S., Sieppi, H., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2003. Laskutaito 2. Kevätosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Rikala, S., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 1997a. Laskutaito 3. Kevätosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Rikala, S., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 1997b. Laskutaito 3. Syysosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Rikala, S., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 1999a. Laskutaito 4. Kevätosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Rikala, S., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 1999b. Laskutaito 4. Syysosa. Opettajan kirja. Porvoo: WSOY.

Rourke, B. P. & Strang, J. 1985. Arithmetic disability subtypes: The neuropsychological significance of specific arithmetic impairment in childhood.

Teoksessa B. P. Rourke (toim.), 167−182.

Räisänen, A. & Frisk, T. 2002. Ammatillisen koulutuksen tila. Yhteenveto vuosina 1995−2001 tehtyjen arviointien tuloksista ja arvioinnin kehitystyöstä. Helsinki: Opetushallitus.

Räsänen, P. & Ahonen, T. 1995. Arithmetic disabilities with and without reading difficulties: A comparison of arithemic errors. Developmental Neuropsychology, 11 (3), 275–295.

Räsänen, P. & Ahonen, T. 1998. Yksittäistapaustutkimus aritmetiikan kognitiivisen prosessoinnin arkkitehtinä. Neuropsykologinen näkökulma matematiikan oppimisvaikeuksiin. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), 163−188.

Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) 1998. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. painos. Jyväskylä: Yliopistopaino.

Spiers, P. A. 1987. Acalculia revisited: Current issues. Teoksessa G. Deloche & X. Seron (toim.) Mathematical disabilities. A cognitive neuropsychological perspective. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum. 1−25.

Temple, C. M. 1991. Procedural dyscalculia and number fact dyscalculia: Doubledissociation in developmental dyscalculia. Cognitive Neuropsyhcology 8 (2), 155−176.

Temple, C. M. 1997. Developmental cognitive neuropsychology. Hove: Psychology Press.

Thompson, J., & Martinson, T. (toim) 1993. Matematiikan käsikirja. Porvoo: Tammi.

VanLehn, K. 1990. Mind bugs. The origins of prosedural misconceptions. Cambridge: A Bradford Book.

Woodward, J. & Howard, L. 1994. The misconception of youth: Errors and their mathematical meaning. Exeptional Children 61 (2), 126−136.

Wuolijoki, H. 1999. Matematiikan oppimistulokset ammatillisissa perustutkinnoissa. Helsinki: Opetushallitus.

LIITE

Liite 1. Peruslaskutoimitusten tehtävät moninumeroisilla luvuilla

1062 + 45 =	123,15 + 48,2 =
4008 − 2368 =	105,6 − 8.05 =
2045 • 13 =	675 : 12 =

Liite 2. Yläluokkiin jaetut virheluokat

Asetteluvirheet	**Menetelmälliset virheet**	Laskuvirheet	**Desimaaliluvun virheet**	**Virheellinen, mutta systemaattinen algoritmi**	**Epätäydellinen algoritmi**
- Korvautuminen toisella - Luvut asetettu virheellisesti* - Luvut asetettu toisen algoritmin mukaan - Lukujen reversaali asettelussa - Luvun korvautuminen - Luvun huomiottajättäminen - Pudottaa luvun vastaukseen - Laskee väärät luvut yhteen	- Ei huomioi muistinumeroa - Muistinumero merkitään suoraan tulokseen, ei muistiinvientiä - Muistinumero on lisätty väärään sarakkeeseen - Vie paikka-arvoltaan väärän luvun muistiin - Nollavirhe muistiinviennissä - Jättää huomiotta lainatun luvun arvon muutoksen - Reversaali laskun sisällä - Kerto- tai jakolaskun välivaiheet asetettu väärin - Alasottovirhe jakolaskussa - Liian suuri jakojäännös - Merkitsee jakojäännöksen vastaukseen - Lainaa nollasta - Ei lisää lainattuun lukuun lukua - Lisää lainatun luvun virheellisesti - Nollavirhe (nollan yli lainauksessa) - Väärä laskujärjestys kertolaskun muistinumerossa - Laskee luvut väärin päin	- Yhteen- ja vähennyslaskuvirheet - Laskuvirheet, kun laskussa 0 tai 1 - Kertolaskuvirheet - Sisältöjakovirheet	- Desimaalipilkku puuttuu vastauksesta - Desimaalipilkku asetettu väärin vastaukseen - Lisää desimaaliosaan nollan - Desimaaliosat asetettu tai laskettu virheellisesti	- Virheellinen, mutta systemaattinen algoritmi	- Epätäydellinen algoritmi

*) Desimaaliluvuilla laskettavissa tehtävissä Luvut asetettu virheellisesti -luokka on Desimaaliluvun virheissä.

Liite 3. Toisen asteen teknisten alojen opintoja aloittavien opiskelijoiden tekemät virhetyypit peruslaskutoimitusten algoritmeissa

VIRHELUOKKA*	KUVAUS VIRHETYYPISTÄ
1 Virheellinen laskutoimitus	**Kaikissa laskutoimituksissa**
1.1 Korvautuminen toisella	Laskee tehtävän väärällä laskutoimituksella. - esim. yhteenlaskun sijasta kertolaskulla
1.4 Epätäydellinen laskusuoritus	Jättää algoritmin suorittamisen kesken tai välivaiheita väliin.
1.3 Virheellinen, mutta systemaattinen algoritmi	Laskee laskun virheellisillä säännöillä, mutta eteneminen on johdonmukaista. - esim. laskee kertolaskun yhteenlaskun säännöillä
2 Asettelun virheet	**Kaikissa laskutoimituksissa**
2.1 Luvut asetettu virheellisesti	Lukuja ei ole asetettu minkään algoritmin mukaisesti. - esim. sarakkeet eivät ole kohdillaan
2.2 Luvut asetettu toisen algoritmin mukaan	- esim. jakolaskun luvut asetettu kertolaskun mukaisesti
2.3 Lukujen reversaali asettelussa	Vähentäjä ja vähennettävä tai jakaja ja jaettava kääntyneet asettelussa.
2.4 Luvun korvautuminen	Numero on korvautunut toisella numerolla. - esim. 8 → 3
2.5 Luvun huomiotta jättäminen	Ei merkitse kaikkia numeroita asettaessaan luvut algoritmin mukaisesti.
2.6 Pudottaa luvun vastaukseen	Laskualgoritmia ei ole suoritettu loppuun vaan luvut on pudotettu suoraan vastaukseen.
2.7 Laskee väärät luvut yhteen	*Ei laske lukuja paikkajärjestelmän mukaisesti* *- esim. laskee kymmenet ja sadat yhteen*
3 Laskuvirheet	**Kaikissa laskutoimituksissa**
3.1. Kertolaskufaktojen virheet	Kertolasku lukualueella 0−10 laskettu väärin.
3.2 Laskuvirheet	Muut yksinkertaiset yhteen-, vähennys- ja jakolaskuvirheet
3.3 Laskuvirheet, kun on 0 tai 1	Laskuvirhe tapahtunut laskettaessa luvuilla 0 tai 1. - esim. $0 \cdot 3 = 3$
4 Muistiinvientivirheet	**Yhteenlaskussa tai kertolaskun yhteenlaskuvälivaiheessa**
4.1 Ei huomioi muistinumeroa	Merkitsee muistinumeron, mutta ei lisää sitä seuraavaan sarakkeeseen.
4.2 Muistinumero merkitään suoraan tulokseen, ei muistiinvientiä	Ei lisää muistinumeroa seuraavan sarakkeen summaan tai tuloon, vaan merkitsee koko luvun tulosriville. - esim. 67 + 85 = 1412
4.3 Muistinumero on lisätty väärään sarakkeeseen	Merkitsee muistinumeron esimerkiksi kymmenien sarakkeen sijasta satojen sarakkeeseen.
4.4 Vie paikka-arvoltaan väärän luvun muistiin	- Esim. luvusta 13 on numero kolme merkitty muistinumeroksi
4.5 Nollavirhe	Sekaannus muistiinviennissä, jos luvussa on nolla.

*) Uudet virheluokat on merkitty kursiivilla.

(jatkuu)

Liite 3. (jatkuu)

4.6 Väärä laskujärjestys kertolaskun muistinumerossa	*Lisää muistinumeron kerrottavaan lukuun eikä lukujen tuloon.*
5 Lainausvirheet	**Vähennyslaskussa ja jakolaskun vähennyslaskuvälivaiheessa**
5.1 Jättää huomiotta lainatun luvun arvon muutoksen	Ei huomioi sitä, että luvun arvo pienenee siitä lainattaessa.
5.2 Reversaali laskun sisällä	Vähentäjä ja vähennettävä kääntyneet laskun sisällä, jotta ei tarvitsisi lainata.
5.3 Nollavirhe	Sekaannus lainauksessa, jos luvussa on nolla. - esim. nollan yli lainattaessa
5.4 Lisää lainatun luvun virheellisesti	*Lainattua lukua ei lisätä sääntöjen mukaisesti vaan esimerkiksi tilanteessa käytännöllisimmällä tavalla.*
5.5 Ei lisää lainattuun lukuun lukua	*Lainaus merkitään kymmeneksi ja siihen ei lisätä lukua, jota varten lainaus tehtiin.*
5.6 Lainaa nollasta	*Suorittaa lainauksen nollasta.*
6 Välivaiheen virheet	**Kertolaskussa ja jakolaskussa**
6.1 Kerto- tai jakolaskun välivaiheet asetettu väärin	Luvut on sijoitettu vääriin sarakkeisiin tai muulla tavalla virheellisesti.
6.2 Alasottovirhe jakolaskussa	Laskija on pudottanut väärän luvun alas tai alasottoa ei ole suoritettu lainkaan
6.3 Liian suuri jakojäännös	Vastaukseen on hyväksytty liian suuri jakojäännös
6.4 Laskee luvut väärinpäin	*Jakaa jakajan jaettavalla.*
6.5 Merkitsee jakojäännöksen vastaukseen	*Siirtää jakojäännöksen vastaukseen jakamatta sitä.*
7 Desimaalipilkun virheet	**Kaikissa laskutoimituksissa**
7.2 Desimaalipilkku puuttuu vastauksesta	Desimaalipilkkua ei ole merkitty lainkaan
7.3 Desimaalipilkku asetettu väärin vastaukseen	*Desimaalipilkku on lisätty väärään paikkaan desimaaliluvussa.*
7.4 Lisää nollan desimaalipilkun jälkeen	*Lisää nollan, jotta laskettavissa luvuissa olisi yhtä monta desimaalia* *- esim. 47,2 → 47,02*
7.4 Desimaaliosan luvut asetettu tai laskettu väärin	*Desimaaliosan lukuja ei ole asetettu paikka-järjestelmän mukaan ja sadasosat ja kymmenesosat voidaan laskea yhteen*
8 Muut virheet	**Virheet, joita ei pysty luokittelemaan muihin luokkiin**