Anu Laine
Liisa Näveri
Maija Ahtee
Erkki Pehkonen

Opettajan toiminnan yhteys kolmasluokkalaisten onnistumiseen ongelmatehtävän ratkaisemisessa

Kohokohdat

- Ongelmanratkaisutunti rakentuu eri vaiheista: johdatteluvaihe, tutkimisvaihe ja yhteenvetovaihe.
- Opettajan toiminnalla on suuri merkitys jokaisessa vaiheessa. Johdatteluvaiheessa on keskeistä määritellä keskeiset käsitteet ja varmistaa, että oppilaat ymmärtävät ongelman. Tutkimisvaiheessa opettajan tehtävänä on ohjata oppilasta löytämään ratkaisu esimerkiksi hyvien kysymysten avulla paljastamatta ratkaisua tai ratkaisustrategiaa. Yhteenvetovaiheessa opettaja kiinnittää huomiota keskeisiin käsitteisiin ja kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua.
- Opettajan ohjauksella on merkitystä kaiken tasoisten oppilaiden suoriutumiseen ongelmatehtävissä.
- Ongelmanratkaisun ohjaaminen vaatii hyvää valmistelua ja avointa otetta.

Tämän artikkelin tavoitteena on tarkastella yhteyttä opettajien (N = 7) toiminnan ja heidän kolmasluokkalaistensa (N = 86) ongelmanratkaisusuoritusten välillä Neliönjako-tehtävässä. Tutkimusaineistona käytettiin oppilaiden ratkaisuja, oppitunneista nauhoitettuja videoita sekä opettajien tuntisuunnitelmia. Opettajien toimintaa analysoitiin ongelmanratkaisutunnin vaiheiden (johdatteluvaihe, tutkimisvaihe ja yhteenvetovaihe) avulla. Oppilaiden ratkaisut luokiteltiin, ja heidän suorituksiaan verrattiin eri luokissa. Tutkimuksen tulosten perusteella oppilaiden oli mahdollista saada ongelmatehtävästä korkeimman tason ratkaisuja matematiikan peruslaskutaidosta riippumatta. Opettajan toiminnalla oli selkeä yhteys oppilaiden suoriutumiseen, ja se oli erilainen kaikissa ongelmanratkaisutunnin vaiheissa. Johdatteluvaiheessa oppilaiden suoritukseen vaikuttivat opettajien tapa esittää ongelmatehtävä ja erityisesti keinot havainnollistaa keskeisiä käsitteitä. Tutkimisvaiheessa muodostui merkitykselliseksi se, miten opettaja ohjasi oppilaita sekä minkälaiset työskentelyvälineet hän valitsi. Selkeää aloitusta ja aktivoivaa ohjausta käyttäneiden opettajien oppilaat suoriutuivat

tehtävässä paremmin riippumatta matematiikan peruslaskujen osaamisesta.

Asiasanat: alaluokkien matematiikka, ongelmanratkaisu, avoin ongelma, opettajan toiminta, eritasoiset oppilaat

JOHDANTO

Peruskoulun opetussuunnitelma määrittelee ongelmanratkaisun yhdeksi kaikkia oppiaineita koskevaksi formaaliksi tavoitteeksi (OPH, 2004; 2014). Siksi jo alakoulussa matematiikan oppimisen tavoitteena on oltava matematiikan prosessien ja rakenteiden ymmärtäminen, ei pelkästään mekaaninen laskeminen. Tämä on tärkeää, koska kansainvälisissä tutkimuksissa ongelmanratkaisu on todettu keskeiseksi välineeksi matemaattisen ajattelun kehittämisessä (esim. Schoenfeld, 1985; 1992). Samoin on todettu, että ongelmanratkaisun käyttäminen opetuksessa on yhteydessä oppilaiden matematiikan osaamiseen (Stigler & Hiebert, 2004).

Matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa sitä, miten oppilaat prosessoivat matematiikkaa eri osa-alueilla ja miten joustavaa ja luovaa heidän ajattelunsa on (vrt. Mason, Burton & Stacey, 1982; Schoenfeld, 1985). Matemaattinen ajattelu on siten matemaattisesti ajattelemista: asioiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä sekä ongelmatilanteiden ratkaisemista (Schoenfeld, 1985).

Kansainvälisten PISA- ja TIMSS-tutkimusten mukaan suomalaisten oppilaiden ongelmanratkaisutaidot ovat hyvät (OECD, 2014; Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012). Tässä tutkimuksessa tarkastelualueena on ongelmatehtävien käyttäminen matematiikan opetuksessa sekä oppilaiden kyvykkyys ratkaista epätyypillistä ja avointa ongelmatehtävää, jossa on monta ratkaisuvaihtoehtoa. Tällaiset epätyypilliset tehtävät vaativat erityisen joustavaa ja avointa ajattelua. Niissä ei välttämättä harjoitella mitään tiettyä matematiikan sisältöä. Alaluokkien oppimateriaaleissa on kokemuksemme mukaan kovin vähän tämäntyyppisiä tehtäviä. Tällä tutkimuksella saadaan siis uudenlaista tietoa oppilaiden ongelmanratkaisutaidoista.

Ensiksi halutaan selvittää, miten eritasoiset oppilaat selvisivät käsillä olevan tehtävän ratkaisemisesta. Erityisesti pyritään selvittämään, minkälainen yhteys opettajien toiminnalla on kolmasluokkalaisten avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen. Tällaista tutkimusta emme ole löytäneet muualta. Sen sijaan aiemmissa tutkimuksissa on todettu, että osa opettajista muuttaa ongelmatehtävän helpommaksi perustehtäväksi (Stigler & Hiebert, 2004). Samoin matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian luokkahuonetutkimuksessa on kiinnitetty huomiota siihen, että useimmilla oppitunneilla oppimista ei ohjata (Bliss, Askew & Macrae, 1996).

Teoreettinen viitekehys

Teoreettisessa viitekehyksessä tarkastellaan ongelman määrittelyä sekä opettajaa ongelmatehtävän ohjaajana. Opettajan roolia tarkastellaan oppitunnin eri vaiheiden sekä oppilaan tukemisen näkökulmista.

Ongelman käsitteestä. Tässä tutkimuksessa tehtävää pidetään ongelmana, jos sen ratkaiseminen vaatii ennestään tutun tiedon yhdistelemistä uudella tavalla. Jos ratkaisija voi heti nähdä, millaisia toimenpiteitä tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan, niin kyseessä on hänelle rutiinitehtävä (tai standarditehtävä tai harjoitustehtävä) (esim. Kantowski, 1980). Ongelma on siten suhteessa aikaan ja henkilön osaamiseen. Avoimessa ongelmassa (vrt. Pehkonen, 1995) alku- tai lopputilanne on avoin, ja siksi ongelmalla on useita ratkaisuja. Ideana on, että tehtävä ei ole strukturoitu valmiiksi, vaan sen ratkaiseminen vaatii aidosti uudenlaista ajattelua. Esimerkkinä avoimesta ongelmasta on seuraava: ”Jaa suorakulmio kolmeksi kolmioksi. Löydätkö erilaisia ratkaisuja?”

Avoimet ongelmat sopivat hyvin kaikentasoisille oppilaille. Tehtäviin löytyy tyypillisesti joitakin helppoja ratkaisuja, jolloin kaikki pääsevät hyvin kiinni työskentelyyn ja saavat onnistumisen kokemuksia. Kaikkien ratkaisujen löytäminen ja systematiikan ymmärtäminen vaativat kuitenkin määrätietoista ja usein luovaa työskentelyä, joten myös lahjakkaille oppilaille riittää haastetta.

Opettajan tuki ongelmanratkaisutunnin eri vaiheissa. Ongelmanratkaisutunnissa voidaan erottaa kolme vaihetta: johdatteluvaihe, tutkimisvaihe ja yhteenvetovaihe (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Opettajalla on keskeinen rooli näissä kaikissa vaiheissa sekä kognitiivisen että emotionaalisen tuen tarjoajana. Kaikentasoiset oppilaat tarvitsevat tukea. Opettajan tehtävänä on auttaa oppilasta itse löytämään ainakin jokin ratkaisu. Opettajan haasteena on osata antaa jokaiselle oppilaalle tukea sopivalla tavalla ja tasolla. Johdatteluvaiheessa on tärkeää, että opettaja esittelee tehtävän ja siihen liittyvät käsitteet siten, että oppilaat ymmärtävät, mitä heidän pitää tehdä (Stein ym., 2008). Tehtävänannon yhteydessä opettaja myös motivoi oppilaat pohtimaan ja ratkomaan tehtävää. Lisäksi on keskeistä, että opettaja luo luokkaan ilmapiirin, jossa oppilaat uskaltavat kokeilla ja erehtyä (Pekrun & Stephens, 2010).

Tutkimisvaiheessa oppilaat työskentelevät ongelman parissa joko itsenäisesti tai pienissä ryhmissä. Opettaja antaa kognitiivista tukea ohjaamalla ja syventämällä oppilaiden ajattelua. Opettaja kysyy oppilailta sopivia kysymyksiä saadakseen selville oppilaiden ajattelua ja kyetäkseen tukemaan ongelmanratkaisuprosessia. Opettajan tehtävänä on ohjata oikealle tielle, ei paljastaa oikeita ratkaisuja. On tärkeää, että myös oppilaat oppivat tekemään hyviä kysymyksiä.

Hähkiöniemen ja Leppäahon (2012) havaitseman kolmen opettajan ohjaustavan (aktivoivan, passivoivan ja pinnallisen ohjauksen) perusteella olemme tiivistäneet opettajan ohjauksen laadun kahdeksi dimensioksi: 1) oikeiden vastausten huomioiminen ja 2) oppilaan ajattelun aktivoiminen. Ensinnäkin opettaja voi joko pyrkiä ymmärtämään oppilaan potentiaalista ideaa (syvällinen ohjaus) tai epäonnistua oppilaan idean ymmärtämisessä ja keskittyä omaan ideaansa (pinnallinen ohjaus). Toiseksi opettaja voi tukea oppilaan ajatustyötä hyvillä kysymyksillä (aktivoiva ohjaus) tai paljastaa idean oppilaalle antamatta mahdollisuutta omaan oivallukseen (passivoiva ohjaus). Mutta oppilaat tarvitsevat ongelmanratkaisuprosessin aikana myös emotionaalista tukea. Turhautuessaan oppilaat kaipaavat opettajan kannustusta ja rohkaisua (Hannula, 2015). Emotionaalinen tuki luokitellaan pinnalliseksi ohjaukseksi, jos se ei tarjoa kognitiivista tukea tehtävän ratkaisemiseen.

Yhteenvetovaihe on keskeinen osa matematiikan tuntia, koska silloin on mahdollisuus oppia jotakin uutta (Polya, 1945). Tässä vaiheessa ongelmaratkaisutunnilla koko luokka keskustelee erilaisista ratkaisuista ja ratkaisustrategioista. Opettajan tehtävänä on kiinnittää oppilaiden huomio keskeisiin käsitteisiin ja vahvistaa heidän matemaattista ajatteluaan. Opettajan tehtävänä on myös pitää yllä positiivista ilmapiiriä, joka kannustaa kaikkia oppilaita osallistumaan keskusteluun. Opettaja pystyy hyödyntämään kaikkien oppilaiden tuotoksia aloittamalla perusratkaisuista ja käsittelemällä vasta lopuksi pisimmälle päässeet ratkaisut (Stein ym., 2008).

Oppilaan ohjaaminen. Nykyisten oppimisparadigmojen mukaan opetus on tehokkainta, kun opettaja käyttää lähestymistapoja, jotka rohkaisevat oppilaita osallistumaan aktiivisesti opetustapahtumaan. Opettajan ja oppilaiden välisessä vuorovaikutusprosessissa on oppilaan ohjaamisella keskeinen osa. Sen sijaan, että opettaja näyttää ja kertoo, miten tehtävä ratkaistaan, hänen tulisi tukea kunkin oppilaan omaa ajatteluprosessia matemaattisessa ymmärtämisessä. Opettaja auttaa oppilaita käyttämällä scaffolding-ohjausta kohdissa, joista he eivät näytä selviävän ilman apua (vrt. Vygotsky, 1978; Bliss, Askew & Macrae, 1996).

Anghileri (2006) tarkastelee erityisesti matematiikan oppimiseen liittyviä lähestymistapoja, kuten tehtävän yksinkertaistamista, tavoitteen korostamista, kriittisiin piirteisiin keskittymistä, turhautumisen kontrollointia, hyväksymistä, kannustamista, kyselemistä, tehtävän strukturointia jne. Anghilerin mukaan opettajan tehtävänä on kiinnittää huomiota kriittisiin kohtiin, joita oppilaat eivät vielä ymmärrä. On tärkeätä, että tuen antamisessa ei vähennetä oppilaan omatoimisuutta, vaan tehtävän pitää olla sopivan haastava.

Tutkimuskysymykset

Olimme kiinnostuneita siitä, miten uusien matemaattisten ideoiden syntymistä tuetaan eri luokissa. Esimerkiksi matematiikan opettajaopiskelijat harjoittavat usein passivoivaa ohjaustapaa ohjatessaan oppilaita eli vievät oppilaalta mahdollisuuden keksiä idean itse (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012; Son & Crespo, 2009). Opettajat saattavat myös muuttaa tehtävää niin, että se ei enää olekaan ongelma, vaan tavallinen rutiinitehtävä (Stigler & Hiebert, 2004). Tutkimuksemme tavoitteena oli selvittää, miten kokeneiden luokanopettajien toiminta eri ongelmaratkaisutunnin vaiheissa tukee oppilaiden ratkaisuprosessia. Tästä syystä selvitimme myös, miten oppilaat osaavat ratkaista tietyn avoimen ongelman. Tarkoituksena on kiinnittää erityistä huomiota siihen, miten eritasoiset oppilaat selviävät tästä tehtävästä. Tutkimuskysymyksiksi muotoutuivat seuraavat:

1. Miten oppilaat osaavat ratkaista avoimen ongelman?
2. Mikä opettajien toiminnassa näyttää auttavan oppilaita pääsemään parempiin ratkaisuihin?

METODOLOGISET RATKAISUT

Tämä tutkimus on osa laajempaa Suomen Akatemian rahoittamaa kolmivuotista (2010–2013) tutkimusprojektia, jossa vertailtiin Chilen ja Suomen opettajien erilaisia toimintatapoja ja oppilaiden ymmärtämisen ja suoritusten kehittymistä. Projektissa pyrittiin kehittämään malli peruskoulun alaluokkien oppilaiden matematiikan ymmärtämisen tason parantamiseksi matematiikanopetuksessa käytettävien ongelmanratkaisutehtävien avulla. Keskimäärin kerran kuukaudessa kokeilukouluryhmissä (10 luokkaa) käsiteltiin jokin avoin ongelmanratkaisutehtävä. Tunnit videoitiin.

Tutkimuksessa käytetty ongelmatehtävä

Tässä artikkelissa kuvaillaan tuloksia Neliönjako-tehtävästä, joka ratkottiin kouluissa marras-joulukuussa 2010. Neliönjako on avoin ongelma, joka on selkeästi epätavanomainen ja luovuutta vaativa: ”Jaa neliö viivalla kahteen täsmälleen samanlaiseen osaan.” Kahden perusratkaisun keksiminen on helppoa, mutta esimerkiksi viivan muodon varioiminen vaatii oivaltamista. Opettajille annettiin tehtävä kaksi viikkoa ennen sen toteuttamista projektiryhmän tapaamisessa, jossa siitä myös keskusteltiin. Opettajille ei kuitenkaan kerrottu tehtävän ratkaisuja eikä toteuttamistapoja.

Aineiston kerääminen

Tähän tutkimukseen osallistui seitsemän opettajaa, joihin viitataan tässä tutkimuksessa keksityillä nimillä Anna, Heidi, Jenni, Laura, Eeva, Minna ja Sanna, ja heidän 86 kolmasluokkalaista, 8–9-vuotiasta oppilastaan. Jouduimme poistamaan kolme opettajaa ja heidän oppilaansa, koska opettajat olivat muuttaneet tehtävän sellaiseksi, että neliö piti jakaa samanlaisiin osiin (ei kahteen samanlaiseen osaan). Tutkimukseen osallistuneet opettajat olivat kaikki kokeneita opettajia, mutta he eivät olleet aiemmin käyttäneet opetuksessaan avoimia ongelmatehtäviä. Kaikki luokat sijaitsivat pääkaupunkiseudulla. Sannan ryhmässä oli vain kahdeksan oppilasta, jotka kaikki tarvitsivat enemmän tukea matematiikassa.

Ongelman tekemiseen käytettiin yksi oppitunti. Annan, Eevan ja Sannan luokissa oppilaat työskentelivät pareittain, muissa yksin. Kuitenkin myös yksilötyötä tekevät oppilaat saivat vapaasti keskustella muiden oppilaiden kanssa. Tutkimusaineistoksi kerättiin oppilaiden suorituspaperit, jotka tutkijat ottivat mukaansa tunnin jälkeen. Osa opettajista toi ne mukanaan seuraavaan yhteiseen tapaamiseen, koska he tekivät loppukoonnin vasta videoidun tunnin jälkeisellä tunnilla.

Oppilaista saatiin tietoa myös matematiikan osaamisen alkumittauksista, jotka perustuivat tutkimusryhmän tutkimusprojektia varten tehtyyn ei-standardoituun matematiikan testiin. Tässä tutkimuksessa käytettiin tästä testistä alkuopetuksessa opetettujen peruslaskutoimitusten osaamista mittaavaa osiota, jonka kaikkien koeoppilaiden keskiarvo oli 3,3 pistettä sekä hajonta 0,8 pistettä (ks. tarkemmin Laine, Näveri, Ahtee & Pehkonen, 2014). Mittarissa oli viisi osiota, jokainen osio arvioitiin joko oikein tai väärin ratkaistuksi, ja oikeasta suorituksesta sai pisteen. Siten mittari oli jakaumaltaan diskreetti ja sen pisteiden vaihteluväli oli 0,5. Mittaria verrattiin opettajien antamaan kolmiportaiseen järjestysasteikolliseen arviointiin. Mittari mittaa kohtalaisen hyvin alkuopetuksessa opetettujen peruslaskutoimitusten osaamista ($r = 0{,}47$, $p < 0{,}01$; $t = 16{,}2$ ja Cohen $d = 1{,}9$).

Tutkimusaineistoksi kerättiin myös opettajan tuntisuunnitelma (jokaiselta noin puoli sivua luettelona), jonka hän toimitti etukäteen tutkijoille; ja lisäksi luokassa oli kaksi tutkijaa seuraamassa ongelmanratkaisua ja tunnit videoitiin (toisella videolla opettajan toiminta ja toisella valittujen oppilaiden toiminta).

Aineiston analysointi

Oppilaiden ratkaisut analysoitiin kahdessa vaiheessa: Ensin kaikki ratkaisut kerättiin yhteen ja päätettiin ratkaisutasot. Seuraavaksi yhden luokan ratkaisut luokiteltiin yhdessä yhteisen luokittelukriteeristön varmistamiseksi. Tämän jälkeen loput ratkaisut luokiteltiin erikseen. Yksimielisyysprosentti oli hyvä (95 %). Esimerkit luokitteluista on annettu taulukossa 1. Oppilasratkaisujen lisäksi kaksi tutkijaa tarkasteli opettajien toimintaa tunnin eri vaiheissa. Tämä tapahtui videoita katsomalla. Oppituntien vaiheita ja kunkin opettajan toimintaa eri vaiheissa tarkasteltiin ensin yhdessä, sitten erikseen ja vielä lopuksi yhdessä. Eri tulkinnoista keskusteltiin, kunnes päädyttiin yhteisymmärrykseen.

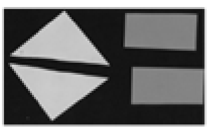
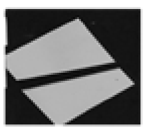
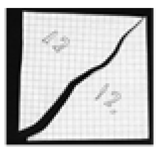
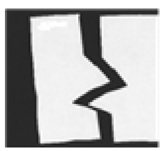
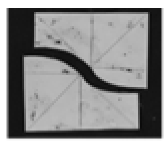
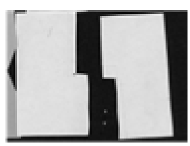
Oppitunnin vaiheiksi ja opettajien toimintaa koskeviksi luokiksi päätettiin ottaa seuraavat: johdatteluvaihe (ei mallia, malli, virheellinen tehtävänanto) ja tutkimisvaihe (aktivoiva tuki, kommentoiva tuki, ei tukea). Esimerkkejä opettajien kysymyksistä ja kommenteista esitellään tulosten yhteydessä luokittelun tueksi. Tuntisuunnitelmat analysoitiin tarkastelemalla oppitunnille asetettuja tavoitteita ja sitä kautta sitä, olivatko opettajat oivaltaneet keskipisteen merkityksen ratkaisussa. Oppilaiden peruslaskutoimitusten osaamisen ja ongelmanratkaisun suoritustasojen välisen yhteyden merkitsevyyden selvittämisessä käytettiin ristiintaulukointia ja sen luotettavuustarkastelussa Khiin neliö -testiä. Aktivoivan ja ei-aktivoivan ohjauksen vaikutuksen eroja tarkasteltiin samoilla menetelmillä.

TULOKSET

Oppilaiden ratkaisut

Oppilaiden tuotokset luokiteltiin viiteen ryhmään (ks. taulukko 1). Ainostaan yksi oppilas ei löytänyt tunnin aikana yhtään ratkaisua. Vain tason 1 (perustaso) ratkaisuun ylsi 33 oppilasta (38 %). Näissä ratkaisuissa neliö on jaettu lävistäjällä kahdeksi kolmioksi tai sivun suuntaisella janalla kahdeksi suorakulmioksi. Lisäksi tason 2 (suora viiva) ratkaisun keksi 21 oppilasta (24 %). Näissä ratkaisuissa neliö on

Taulukko 1. Oppilaiden ratkaisutasot Neliönjako-tehtävässä.

Ei ratkaisua Taso 0	Perustaso Taso 1	Suora viiva Taso 2	Käyrä viiva Taso 3	Keskipiste Taso 4
1 (1%)	33 (38%)	21 (24%)	18 (21%)	13 (15%)
			 	 

jaettu kahteen samanlaiseen osaan sellaisella janalla, joka ei ole neliössä lävistäjän eikä sivun suuntainen. Tämän keksiminen vaatii oppilailta luovaa ajattelua. Tason 3 (käyrä viiva) ratkaisuja löysi 18 oppilasta (21 %). Näissä ratkaisuissa jakoviiva voi olla mielivaltainen käyrä, kuten murtoviiva tai kaaren paloista koottu viiva. Nämä ratkaisut eivät kuitenkaan täyttäneet kahteen samanlaiseen osaan jakamisen ehtoa, joka täyttyy vain, kun palat ovat symmetriset eli jakoviiva kulkee neliön keskipisteen kautta (vrt. seuraava kohta). Tason 4 (keskipiste) ratkaisuja keksi 13 oppilasta (15 %). Näissä ratkaisujen oleellisena osana nähdään neliön keskipiste ja jakokäyrien symmetria sen suhteen.

Olimme myös kiinnostuneita siitä, miten eritasoiset oppilaat selvisivät tämän ongelmatehtävän ratkaisemisesta. Jaoimme oppilaat alkutestin peruslaskutoimitusten osaamisen perusteella (ka. 3,3 pistettä, kh. = 0,8) kolmeen ryhmään: heikot 1–2 pistettä, keskitasoiset 3 pistettä ja hyvät 4–5 pistettä. Taulukossa 2 on esitetty peruslaskutaidoiltaan erilaisten oppilaiden jakautuminen eri suoritustasoille ongelmatehtävässä.

Oppilaiden peruslaskutoimitusten osaamisella ja neliönjakotehtävän suoritustasoilla on merkitsevä yhteys (χ^2 = 13,087; df = 6; p = 0,042, Cramerin V = 0,3). Taulukkoa tarkastelemalla voimme todeta, että kaikissa osaamistasoissa vähintään 40 prosenttia oppilaista jäi tasolle 1. Alle 3 pistettä peruslaskutestissä saaneista oppilaista kaksi kolmasosaa löysi ongelmatehtävässä ainoastaan helpot perusratkaisut (taso 1). Alkutestissä kolme pistettä tai enemmän saaneista reilu 40 prosenttia jäi tasolle 1, eli selvästi yli puolet keksi enemmän kuin perusratkaisut. Tasojen 2, 3 ja 4 saavuttamiseen tarvittiin uudenlaista ajattelua. Siksi niitä kaikkia voidaan pitää luovina ratkaisuina. Mielenkiintoista on kuitenkin havaita, että tason 4 saavuttamisessa ei matematiikan peruslaskutoimitusten osaamisella ollut merkitystä.

Opettajien toiminta ongelmanratkaisutunnilla

Ongelmanratkaisutunnin eri vaiheissa tarkastellaan opettajien toimintaa, jotta saataisiin selville sen vaikutukset oppilaiden suoriutumiseen. Johdatteluvaiheessa keskeinen merkitys on tehtävänannon tavalla.

Opettajien tehtävänannoista pystyttiin erottamaan tässä tehtävässä kolme tasoa: ei mallia, malli ja virheellinen tehtävänanto. Ensimmäinen tarkoittaa, että opettaja antoi oppilaille vain tehtävän sanallisen muotoilun. ”Malli” tarkoittaa, että opettaja näytti (tekstin lisäksi) konkreetti-

Taulukko 2. Oppilaiden peruslaskutoimitusten osaamisen suhde Neliönjakotehtävän ratkaisuihin.

Alkutestin pisteet: peruslaskutaitojen osaaminen	Ongelmatehtävän suoritustasot				Yhteensä
	taso 1	taso 2	taso 3	taso 4	
heikko osaaminen: 1-2 pistettä	**12 (67 %)**	**2 (11 %)**	**2 (11 %)**	**2 (11 %)**	**18 (100 %)**
keskitasoinen osaaminen: 3 pistettä	**10 (45 %)**	**2 (9 %)**	**5 (23 %)**	**5 (23 % ^{T})**	**22 (100 %)**
hyvä osaaminen: 4-5 pistettä	**16 (41 %)**	**15 (38 % ^{T})**	**6 (15 %)**	**2 (5 %)**	**39 (100 %)**

Huom. A = odotettua pienempi osuus, mukautettu standardoitu jäännös ≤ -2, T = odotettua suurempi osuus, mukautettu standardoitu jäännös ≥ 2.

sesti esimerkiksi neliön, ympyrän tai kolmion avulla, mitä jakaminen ”kahteen täsmälleen samanlaiseen osaan” tarkoittaa, ja luokassa keskusteltiin siitä, että jakaminen voidaan tarkistaa esimerkiksi leikkaamalla palat ja asettamalla ne päällekkäin.

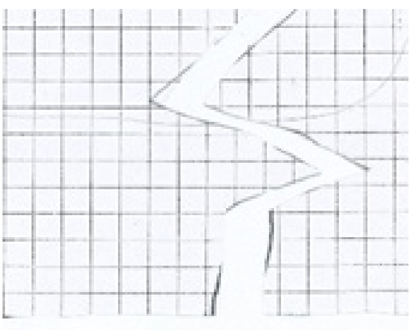
Kolmannelle ryhmälle, joka sai virheellisen tehtävänannon, opettaja esitteli harhaanjohtavaa mallia, esimerkiksi lautasliinan taittelua kuvaamassa symmetrisyyttä suoran suhteen. Opettaja taitteli lautasliinan kahtia keskipystyviivaa pitkin ja avasi sen. Tämän jälkeen hän kysyi oppilailta, mitä he huomasivat molemmista paloista. Oppilas vastasi, että ne ovat samanlaiset, jolloin opettaja selitti niiden olevan symmetriset. Hän palasi tunnin aikana tähän monta kertaa ja näin rajoitti oppilaiden ajattelua kahteen perusratkaisuun. Muiden ratkaisujen keksiminen vaatii nimenomaan tästä ajattelusta luopumista.

Tutkimisvaiheessa luokan ohjaamisessa voitiin erottaa kolme eri tasoa: aktivoiva tuki, kommentoiva tuki ja ei tukea. Kaikki opettajat osoittivat ohjauksensa välillä kaikille oppilaille ja välillä yhdelle oppilaalle tai oppilasparille. Aktivoivaa tukea käyttävä opettaja teki ratkaisuvaiheen aikana oppilaille kysymyksiä, jotka auttoivat heitä eteenpäin. Seuraavassa esimerkissä opettaja näyttää Pekan löytämän ratkaisun (kuvio 1) dokumenttikameralla, ja sitä tarkastellaan yhdessä.

> *Opettaja: ”Pekka on nyt siinä vaiheessa, että hän on leikannut palat irti. Ovatko palat identtiset?”*
> *Opettaja kuljetti sormiaan pitkin leikkausviivaa ja kysyi: ”Kuinka saisit nämä molemmat palat samanlaisiksi?”*
> *Pekka: ”Nyt tiedän. Minulla pitää olla keskellä yhtä paljon paperia kummallakin puolella.”*

Kommentoivaa tukea käyttävä opettaja antoi ohjauksessaan pääasiassa emotionaalista tukea oppilaalle. Hän saattoi kehua oppilasta sanomalla *”Hyvin keksitty”* tai kannustaa: *”Jatka ajattelua.”* Hän ei kohdistanut huomiota oppilaan suoritukseen. Opettaja, joka ei antanut oppilailleen tukea, rajoitti kommunikoinnin oppilaiden kanssa lyhyisiin kommentteihin, kuten *”Mieti itse”* tai *”En anna enempää ohjeita”.* Tällöin oppilaat eivät saaneet emotionaalista eivätkä kognitiivista tukea omalle työskentelylleen.

Lisäksi jotkut opettajat paljastivat tehtävän kannalta olennaisia tietoja oppitunnin aikana (viivan muoto). Osa opettajista kertoi oppilaille, että viivan ei tarvit-



Kuvio 1. Pekan ratkaisu.

se olla suora. Osa taas oli tehnyt valmiita mallivastauksia (ratkaisumalli), joita he näyttivät oppilaille eri vaiheissa oppituntia.

Taulukkoon 3 on kerätty yhteenveto opettajien toiminnasta ongelmanratkaisutunnin aikana. Lisäksi taulukossa on oppilaiden suoriutuminen ongelmatehtävässä sekä projektin alussa tehdyn alkutestin peruslaskutoimitusten osaamista koskevat tulokset.

Opettajan toiminnan yhteys oppilaiden suorituksiin

Opettajan toiminnan yhteys oppilaiden suorituksiin vaikuttaa hyvin selvältä. Ero opettajien välillä siinä, kuinka heidän oppilaansa saavuttavat eri tasoja ongelmatehtävissä, on tilastollisesti merkitsevä (χ^2 = 59,86; df = 18; p < 0,001; F = 3,513). Luokkien välillä ei ollut eroja matematiikan peruslaskutaidoissa (χ^2 = 16,52; df = 12; p = 0,169; F = 1,990). Annan, Heidin ja Jennin luokkien oppilaista yli 50 prosenttia pääsi tasoille 3–4, kun taas yli puolet Eevan, Minnan ja Sannan luokan oppilaista jäi tasolle 1 (vaihtelu 50–86 %).

Opettajan tehtävänannolla tunnin johdantovaiheessa näyttäisi siis olevan yhteys oppilaiden suoriutumiseen: suurin osa Eevan (ei mallia), Sannan (väärä malli) ja Minnan (väärä malli) oppilaiden suorituksista jäi tasolle 1. On myös mielenkiintoista huomata, että kaikki oppilaat yhtä lukuun ottamatta pääsivät Lauran luokassa vähintään tasolle 2. Hän käytti mallina ympyrää, joka todennäköisesti auttoi oppilaita hahmottamaan, että jakoviivat voivat olla myös vinottain, ja näin pääsemään tasolle 2. Mallilla on siis hyvin tärkeä merkitys oppilaiden orientoitumisessa tehtävän tekemiseen. Myös materiaalien valinnalla oli merkitystä. Annan ja Heidin luokissa käytettiin ruutupaperia, mikä varmasti tuki murtoviivaratkaisujen keksimistä, kun kuvioista näkyi samanlaisuus ruutujen määrässä.

Tutkimisvaiheessa oli keskeistä, millä tavalla opettaja ohjasi oppilaita. Minna ei ohjannut oppilaita lainkaan, jolloin 86

Taulukko 3. Yhteenveto oppilaiden tämän ongelmatehtävän suorituksista jaettuna viiteen tasoon, oppilaiden suorituksista matematiikan alkutestissä sekä opettajan toiminnasta ongelmanratkaisutunnilla (M = malli, EM = ei mallia, VM = väärä malli, AT = aktivoiva tuki, KT = kommentoiva tuki, ET = ei tukea, RM = ratkaisumallit, V = viivan muoto).

	Oppilaiden suoritukset ongelmatehtävässä								
Suoritustaso Opettaja	Taso 0	Taso1	Taso 2	Taso 3	Taso4	Matematiikan testi (luokan ka)	Johdatteluvaihe	Tutkimisvaihe	Opettajan paljastukset
Anna	0%	42%	0%	33%	25%	2,9	M	AT	
Heidi	0%	14%	29%	14%	43%	3,7	M	AT	RM
Jenni	0%	37%	13%	37%	13%	3,5	M	KT	V
Laura	8%	0%	58%	34%	0%	3,9	M	KT	V
Eeva	0%	50%	37%	13%	0%	3,2	EM	KT	V
Minna	0%	86%	0%	14%	0%	3,3	VM	ET	
Sanna	0%	75%	0%	0%	25%*	2,5	VM	KT	RM

**Oppilaat pääsivät ratkaisuun opettajan paljastuksen avulla (omatoimisesti 3. taso)* prosenttia hänen oppilaistaan jäi tasolle 1. Aktivoiva tuki oli sen sijaan tehokasta: Annan ja Heidin luokan oppilaat keksivät enemmän tason 4 ratkaisuja kuin muissa luokissa. Myös Jennin, Lauran ja Eevan käyttämä kommentoiva tuki näytti auttavan oppilaita ratkaisujen keksimisessä. Oppilaat ehkä jaksoivat yrittää enemmän, kun saivat opettajalta kannustusta ja kehuja.

Sen sijaan opettajan tekemät paljastukset eivät auttaneet oppilaita keksimään korkeamman tason ratkaisuja. Heidi ja Sanna näyttivät käyräviivaisia ratkaisuja oppilaille tunnin aikana, ja Jenni, Laura ja Eeva kertoivat, että viivan ei tarvitse olla suora. Videoiden ja oppilaiden suoritusten perusteella saatoimme päätellä, että ainoastaan yksi pari Sannan luokassa pääsi tasolle 4 opettajan mallin avulla. He olivat itse keksineet sitä ennen tason 3 ratkaisun. Oppilaat eivät siten pääsääntöisesti pystyneet hyödyntämään opettajan paljastuksia omissa ratkaisuissaan. On mahdollista, että ne olivat liian kaukana heidän lähikehityksen vyöhykkeestään (vrt. Vygotsky, 1978).

Koska olimme kiinnostuneita myös eritasoisten oppilaiden menestymisestä tämän ongelmatehtävän ratkaisemisessa, päätimme tarkastella vielä erikseen Annan ja Heidin luokan oppilaiden menestymistä. Valitsimme heidät, koska he käyttivät tutkimisvaiheessa aktivoivaa ohjausta. Taulukkoon 4 on koottu Annan ja Heidin luokan oppilaiden matematiikan testin pisteet ja oppilaiden suoritustasot tässä ongelmatehtävässä. Lisäksi niitä verrataan kaikkien oppilaiden suoritustasoihin. Tässä on yhdistetty tasot 3 ja 4, jotka molemmat edustavat erittäin hyvää suoritusta.

Taulukosta 4 voimme havaita, että aktivoivaa ohjausta käyttäneiden opettajien oppilaat ovat päässeet enemmän tasojen 3 ja 4 suorituksiin peruslaskutoimitusten osaamisesta riippumatta. Vastaavasti näyttää siltä, että tason 1 ja 2 suorituksiin on päätynyt suhteessa suurempi osa ei-aktivoivaa ohjausta käyttäneiden opettajien oppilaista. Saadaksemme selville, onko aktivoivan ohjauksen ja tasojen välillä tilastollisesti merkitsevää yhteyttä, muodostimme taulukon 5.

Kun tarkastellaan ohjauksen aktiivisuuden ja oppilaiden ongelmanratkaisutasojen yhteyttä, havaitaan eron olevan tilastollisesti merkitsevä (χ^2 = 10,6; df = 2; p = 0,005, Cramerin V = 0,4). Aktivoivaa ohjausta saaneet oppilaat ovat päässeet ongelmatehtävän ratkaisussa korkeammil-

Taulukko 4. Annan ja Heidin luokan (aktivoiva ohjaus) oppilaiden peruslaskutoimitusten osaamisen suhde Neliönjakotehtävän ratkaisuihin verrattuna muihin luokkiin (ei-aktivoiva ohjaus).

		taso 1	taso 2	taso 3-4	Oppilaiden lukumäärä
1-2 pistettä	**aktivoiva ohjaus**	**50 %**	**0 %**	**50 %**	**4**
	ei-aktivoiva ohjaus	**53 %**	**10 %**	**37 %**	**19**
3 pistettä	**aktivoiva ohjaus**	**40 %**	**0 %**	**60 %**	**10**
	ei-aktivoiva ohjaus	**50 %**	**17 %**	**33 %**	**12**
4-5 pistettä	**aktivoiva ohjaus**	**18 %**	**36 %**	**45 %**	**11**
	ei-aktivoiva ohjaus	**50 %**	**39 %**	**11 %**	**28**

Taulukko 5. Aktivoivan ja ei-aktivoivan ohjauksen suhde Neliönjakotehtävän ratkaisuihin

	taso 1	taso 2	taso 3-4	Yhteensä
ei-aktivoiva ohjaus	30 (56 %)	15 (28 %)	9 (16 % A)	54 (100 %)
aktivoiva ohjaus	8 (32 %)	4 (16 %)	13 (52 % T)	25 (100 %)

Huom. A = odotettua pienempi osuus, mukautettu standardoitu jäännös ≤ -2,
T = odotettua suurempi osuus, mukautettu standardoitu jäännös ≥ 2.

le tasoille. Tämä on tärkeä huomio, sillä koko aineistossa oppilaiden peruslaskutoimitusten osaamisella ja neliönjakotehtävän suoritustasoilla on merkitsevä yhteys (χ^2 = 13,087; df = 6; p = 0,042; Cramerin V = 0,3) siten, että heikommin testissä menestyneet oppilaat päätyivät alemman tason ratkaisuihin myös ongelmatehtävässä. Kaikissa suoritustasoissa vähintään 40 prosenttia oppilaista jäi tasolle 1. Opettajan aktivoiva ohjaaminen on siis tärkeää kaikentasoisille oppilaille.

JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA

Oli mielenkiintoista todeta, että oppilaiden oli mahdollista oivaltaa ongelmatehtävään korkeimman tason ratkaisuja matematiikan peruslaskutaidosta riippumatta. Tämä on ymmärrettävää, koska tehtävä on täysin uusi ja erilainen eikä sen ratkaisemisessa voi hyödyntää aiemmin opittuja matematiikan tietoja. Kaikkia oppilaita tarkasteltaessa voidaan kuitenkin todeta, että heikommin peruslaskutestissä menestyneet oppilaat jäävät muita useammin perustason ratkaisuihin. Tämä voi johtua siitä, että heillä ei ole kärsivällisyyttä ja sitkeyttä yrittää. Heikommin menestyvien oppilaiden minäpystyvyyden tunne heikkenee, mikä vaikuttaa yrittämiseen (Schunk, 1991).

Opettajan toiminnalla näyttää sen sijaan olevan merkitystä, vaikka perusosaamisessa ei ollut eroja eri ryhmien välillä. Tutkimuksemme perusteella johdantovaiheessa oli keskeistä se, miten opettaja esitteli käsitteet ja havainnollisti tehtävän tekemistä. Tutkimisvaiheessa opettajan aktivoiva ohjaus oli tehokkainta, ja se paransi kaikentasoisten oppilaiden suoriutumista.

Olimme kiinnostuneita siitä, miten uusien matemaattisten ideoiden kehittymistä tuettiin eri luokissa. Oppilaiden erilaisuus asettaa opettajalle paljon haasteita. Hänen pitää kannustaa ja tukea niitä, jotka eivät tahdo päästä edes työskentelyn alkuun. Hänen pitää toisaalta olla myös ohjaamassa niitä oppilaita, jotka nopeasti keksivät erilaisia ratkaisuja. Tutkimusten mukaan opettajat ja opettajaopiskelijat (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012; Son & Crespo, 2009; Stigler & Hiebert, 2004) saattoivat paljastaa oppilaille ratkaisun tai ratkaisutavan idean tai helpottaa tehtävää niin, että se ei enää ollut ongelma.

Myös tässä tutkimuksessa opettajat paljastivat ratkaisuja oppilaille, mutta eivät yksilöohjauksessa. Tulostemme perusteella voimme päätellä, että ratkaisun näkeminen tai kuuleminen ei yksinään riitä sen sisäistämiseen niin, että oppilas pystyisi ottamaan sen osaksi omaa ratkaisuaan. Tässä tutkimuksessa suurin ongelma kokeneiden luokanopettajien ohjauksessa näyttikin olevan pinnallinen ote, joka ei auttanut oppilaita löytämään ratkaisuja. Opettaja ei ohjauksessaan lähtenyt oppilaan ideasta, vaan tyytyi pääasiassa kannustamaan.

Miksi jotkut opettajat osasivat ohjata oppilaita paremmin? Miksi jotkut opettajat esittivät harhaanjohtavan mallin johdantovaiheessa? Yksi mahdollinen selitys on opettajan matematiikan aineenhallinta (sisältötieto: Shulman, 1986). Ehkä joidenkin opettajien matematiikan sisältötieto ei riittänyt siihen, että he olisivat tunnistaneet, että tässä tehtävässä oli kyse symmetriasta pisteen suhteen. Anna ja Heidi olivat selkeästi ymmärtäneet keskipisteen merkityksen ratkaisuissa. Tämä näkyi jo heidän tuntisuunnitelmissaan. Näyttäisi siltä, että muut opettajat eivät olleet tätä seikkaa oivaltaneet.

Toinen vaihtoehto on, että kaikki opettajat eivät käyttäneet riittävästi aikaa tunnin suunnitteluun. Opettajat eivät todennäköisesti ole tottuneet avoimien ongelmatehtävien opettamiseen, koska sellaisia ei juurikaan ole oppikirjoissa. Opettajan olisi pitänyt tutustua tehtävään huolellisesti ennen tuntia ja ratkaista se itse nähdäkseen erilaiset ratkaisuvaihtoehdot ja myös huomatakseen, missä kohdissa oppilailla voi olla hankaluuksia. Esimerkiksi Sanna oli valmistautunut tuntiin. Hän oli miettinyt, miten hän havainnollistaa symmetriaa. Mutta hän oli mahdollisesti keksinyt vain perusratkaisut ja ajatellut tehtävän olevan hyvin yksinkertainen.

Onko tärkeää, että opettaja tietää kaikki mahdolliset ratkaisut? Tämä ei ole yksinkertainen kysymys. Jos opettaja tietää ratkaisut, hän ymmärtää oppilaiden ratkaisuja ja osaa esittää hyviä kysymyksiä ja ohjata heitä eteenpäin ongelmakohdissa. Mutta pahimmassa tapauksessa hän paljastaa ratkaisut oppilaille eikä anna heille mahdollisuutta itse keksiä. Siksi on tärkeää ymmärtää ongelmanratkaisua ja ongelmanratkaisuprosessia sekä nähdä sen eri vaiheiden keskeinen merkitys.

Ongelmanratkaisuprosessin ymmärtämisen merkitys kasvaa, jos opettaja ei tiedä ongelman ratkaisuja. Ohjaamaan tottunut opettaja osaa esittää tietyntyyppisiä kysymyksiä, jotka viitoittavat oppilasta eteenpäin. Hän myös tietää, että jo se, että pyytää oppilasta kertomaan ajattelustaan, auttaa usein oppilasta etenemään. Hän myös tietää emotionaalisen tuen merkityksen. Ohjaaminen ilman valmistelua vaatii myös avointa, empaattista kuuntelua (Pehkonen & Ahtee, 2006). Tämä tarkoittaa sitä, että opettaja yrittää aidosti ymmärtää oppilaan idean ja yhdistää sen tehtävän vaatimuksiin. Opettajan paneutuminen, innostus ja avoimuus luovat siten hyvät puitteet oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen kehittymiselle.

Tutkimuksen tulosten tulkinnassa täytyy huomioida, että sekä opettajien että oppilaiden määrä oli kohtalaisen pieni. Olisimme voineet saada vielä tarkempaa tietoa, jos olisimme pystyneet kuvaamaan kaikkia oppilaita ja siten paremmin seuraamaan heidän ratkaisuprosessejaan. Oppilaita olisi myös voinut haastatella, samoin opettajia.

Oppilaat ratkoivat myöhemmin avoimia ongelmia, jotka olivat samantyyppisiä kuin tässä esitelty tehtävä. Tarkoituksenamme on analysoida, miten oppilaat ovat pystyneet hyödyntämään tässä tehtävässä oppimiaan asioita. Lisäksi haluamme selvittää, minkälaista kehitystä opettajien ongelmanratkaisun ohjaamisessa tapahtuu tutkimusprojektin aikana.

Kirjoittajatiedot:
Anu Laine (KT, dos.) toimii matematiikan didaktiikan yliopistonlehtorina Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksessa.
Liisa Näveri (FT) toimi tutkijana Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksessa.
Maija Ahtee (prof. emerita) toimi matematiikan ja luonnontieteiden didaktiikan professorina Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksessa.
Erkki Pehkonen (prof. emeritus) toimi matematiikan didaktiikan professorina Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksella.

LÄHTEET

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 33–52.

Bliss, J., Askew, M. & Macrae, S. (1996). Effective teaching and learning. Scaffolding revisited. Oxford Review of Education, 22(1), 37–61. DOI:10.1080/0305498960220103.

Hannula, M. S. (2015). Emotions in problem solving. Teoksessa S. J. Cho (toim.), Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (s. 269–288). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-17187-6.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2012). Prospective mathematics teachers' ways of guiding high school students in GeoGebra-supported inquiry tasks. The International Journal for Technology in Mathematics Education, 19(2), 45–57.

Kantowski, M. G. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. Teoksessa S. Krulik & R. E. Reys (toim.), Problem Solving in School Mathematics (s. 195–203). NCTM Yearbook 1980. Reston (VA): Council.

Laine, A., Näveri, L., Ahtee, M. & Pehkonen, E. (2014). Development of Finnish Elementary Pupils' Problem-Solving Skills in Mathematics. CEPS Journal, 4(3), 111–129.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). Thinking Mathematically. Bristol: Addison-Wesley.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 international results in mathematics. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS. International Study Center, Boston College.

OECD (2014). Pisa 2012. Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V), Pisa. OECD Publishing.

OPH (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Opetushallitus.

OPH (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Opetushallitus.

Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of Open-Ended Problems. ZDM, 27(2), 55–57.

Pehkonen, E. & Ahtee, M. (2006). Levels of teachers' listening in working with open problems. Teoksessa (toim. T. Kántor), ProMath Debrecen 2005: Problem Solving in Mathematics Education (s. 63–74). Institute of Mathematics, University of Debrecen, Hungary.

Pekrun, R. & Stephens, E. J. (2010). Achievement Emotions. A control-value approach. Social and Personality Psychology Compass, 4, 238–255.

Polya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando (FL): Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Teoksessa D. Grouws (toim.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (s. 334–370). New York: MacMillan.

Schunk, D. H. (1991). Self-efficacy and academic motivation. Educational psychologist, 26(3–4), 207–231.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher, 15(2), 4–14.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. Mathematical Thinking and Learning, 10, 313–340.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. Educational Leadership, 61(5), 12–17.

Vygotsky, L. S. (1978). Thought and Language. Cambridge: MIT Press.