Hellyn lause

Otto Siiskonen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2021

Tiivistelmä: Otto Siiskonen, *Hellyn lause* (engl. *Helly's Theorem*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 55 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2021.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua konveksin geometrian peruskäsitteisiin ja esitellä yksi aihealueen tärkeimmistä tuloksista: Hellyn lause. Lisäksi tärkeä osa tutkielmaa on näyttää Hellyn lauseen suhde Radonin ja Carathéodoryn lauseisiin. Näitä kolmea lausetta voidaan pitää konveksin geometrian kulmakivinä. Keskeinen tutkielman tavoite on myös herättää lukijan mielenkiinto konveksiin geometriaan Hellyn lauseen sovellusten ja ongelmien kautta.

Tutkielma alkaa johdannolla konveksiin geometriaan. Ensin määritellään, mitä ylipäänsä tarkoittaa, että joukko on konveksi. Sitten määritellään konveksi verho ja näytetään miten se eroaa lineaarialgebran tutuista lineaarisesta verhosta ja affiinista verhosta. Konveksi verho on olennainen osa useita tutkielmassa käsiteltäviä todistuksia. Tämän jälkeen esitellään analyysin kursseilta tuttuja käsitteitä konveksin geometrian näkulmasta. Niistä erityisen tärkeä lopputyön kannalta on joukkojen kompaktius. Sen jälkeen käsitellään erilaisia keinoja erotella joukot toisistaan, kuten tarkka erottelu ja vahva erottelu. Vahvasti eroteltujen joukkojen käsite on olennainen Hellyn lauseen todistamisessa hyödynnettävä työkalu. Lopulta tutkitaan erilaisia ekstreemejä pisteitä ja niiden olemassaoloa, jonka jälkeen aiempia käsitteitä yhdistellen päästään todistamaan Kreinin-Milmannin lause. Johdannon viimeisessä kappaleessa käsitellään vielä monitahokkaita ja polytooppeja. Nämä kaikki ovat hyödyllisiä konveksin geometrian ongelmissa käytettäviä työkaluja.

Seuraavaksi tutkielmassa päästään kolmen suuren lauseen kimppuun. Ensin todistetaan äärellinen leikkausominaisuus, jonka mukaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkojen kokoelman äärellisellä osakokoelmalla on epätyhjä leikkaus. Tämä on tietyssä mielessä heikompi versio Hellyn lauseesta, joka antaa kätevän keinon konveksien joukkojen epätyhjien leikkausten etsimiseen. Hellyn lauseessa käsitellään avaruuden $\mathbb{R}^n$ kokoelmaa, joka on joko äärellinen tai sen kaikki jäsenet ovat kompakteja. Jos millä tahansa $(n+1)$:llä kokoelman jäsenellä on epätyhjä leikkaus, niin lauseen mukaan kaikilla kokoelman jäsenillä on epätyhjä leikkaus. Tämän jälkeen esitellään Radonin ja Carathédoryn lauseet ja ohessa käydään myös läpi näiden kolmen toisiinsa kytköksissä olevan lauseen historiaa. Monen lähdeteoksen mukaan on yleisesti tunnettua, että Hellyn, Radonin ja Carathéodoryn lauseet ovat keskenään yhtäpitäviä. Tästä huolimatta missään teoksista ei kuitenkaan oltu tehty asialle täyttä todistusta. Tässä tutkielmassa näytetään myös lauseiden yhtäpitävyys.

Tutkielman loppupuoli käsittelee Hellyn lauseen tärkeimpiä ja mielenkiitoisimpia sovelluksia. Osa niistä käydään läpi tarkasti ja osaa vain pintaraapaistaan lukijan mielenkiinnon herättämiseksi. Sovelluksista tunnetuin on taidegallerialause. Sen kansanläheinen muotoilu menee näin: Jos taidegalleriassa jokaiselle kolmen maalauksen joukolle löytyy sellainen paikka, josta kaikki kolme pystyy näkemään kerralla, niin tällöin galleriassa täytyy olla sellainen paikka josta kaikki taulut pystyy näkemään kerralla. Taidegellerialauseeseen pohjautuen on keksitty useita mielenkiintoisia ongelmia, joista osa on vielä avoimia.

Sisältö

Johdanto

Konveksisuus on matematiikan käsite, joka on niin yleinen, että sitä voi soveltaa lukuisiin tilanteisiin, mutta kuitenkin sen verran erityinen, että sen pohjalta voidaan kehittää kiinnostavia epätriviaaleja tuloksia. Konveksia geometriaa on tietyssä mielessä käsitelty jo antiikin aikoina muun muassa Arkhimedeen ja Eukleideen toimesta. Tunnetuimpia aihealueen esimerkkejä ovat Platonin kappaleet, isoperimetrinen ongelma ja pyramidin tilavuuden määrittäminen.

Konveksia geometriaa alettiin erityisesti tutkia 1800- ja 1900-lukujen vaihteessa. Tärkeimpiä alan pioneerejä ovat matemaatikot Cauchy, Steiner, Brunn ja Minkowski. Heidän jälkeensä konveksia geometriaa tutkinut, kenties alan merkittävin matemaatikko, Klee on kuvaillut aihealuetta seuraavasti:

"Konveksien joukkojen tutkiminen on geometrian, analyysin ja lineaarialgebran haara, jolla on useita yhteyksiä muihin matematiikan osa-alueisiin ja se yhdistää monia näennäisesti erilaisia matemaattisia ilmiöitä. Se on myös oleellista useilla tieteen ja teknologian aloilla."

Lähempänä nykypäivää konveksin geometrian haaroihin ja sovelluksiin otettiin myös mukaan reilusti analyysia. Tällaisia konveksia geometriaa soveltavia osa-alueita ovat muun muassa differentiaaligeometria, funktionaalianalyysi, variaatiolaskenta, optimisaatio, geometrinen mittateoria, Fourier sarjat, todennäköisyys ja matemaattinen fysiikka. [**4**]

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua konveksin geometrian peruskäsitteisiin. Oletuksena on, että lukija omaa perustiedot geometriasta, lineaarialgebrasta ja matemaattisesta analyysista, sillä uusien käsitteiden määrittelyssä käytetään tutuiksi oletettuja asioita. Tutkielman tärkein tulos on Hellyn lause, jota pidetään yleisesti konveksin geometrian yhtenä tärkeimmistä lauseista. Lisäksi avainasemassa ovat usein Hellyn lauseeseen liitettävät Radonin lause ja Carathéodoryn lause. Näitä kolme lausetta pidetään konveksin geometrian kulmakivinä ja on myös mahdollista näyttää, että ne ovat keskenään yhtäpitäviä. Helly julkaisi lauseensa vuonna 1913, mutta varsinaisen todistuksen sille keksi ensimmäisen kerran Radon vuonna 1921 hyödyntäen siinä omaa lausettaan. Carathéodory puolestaan julkaisi lauseelleen oman todistuksen vuonna 1907, mutta tällekin keksittiin myöhemmin yksinkertaisempi Radonin lauseeseen pohjautuva todistus. [**2**]

Edellä mainittujen lauseiden pohjalta on keksitty lukuisia sovelluksia, joista tunnetuin lienee taidegallerialause. Konveksiin geometriaan ja erityisesti taidegallerialauseen eri variaatioihin liittyviä ongelmia on monia ja osa niistä on vielä avoimia.

Vaikka lauseiden todistukset voivat olla haastavia, niin useimmiten tulokset ovat helposti geometrisesti ymmärrettävissä. Tutkielmassa tarkastellaan taidegallerialauseeseen liittyviä tapauksia pääasiassa tasossa, mutta suurin osa käsitteistä voidaan yleistää avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Näiden seikkojen johdosta Hellyn lauseen käsittely on loistava johdanto konveksin geometrian maailmaan.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa johdatellaan lukija konveksiin geometriaan käymällä läpi jo osittain tuttuihin käsitteisiin pohjautuvia tuloksia. Näitä ovat kasautumispiste, kompaktit ja konveksit joukot, konveksi verho, sisus ja sulkeuma, joukkojen erottelu, ekstreemit pisteet sekä polyhedraalit joukot ja polytoopit. Lisäksi esitellään monessa sovelluksessa hyödyllinen Kreinin-Milmannin lause. Suurinta osaa näistä käsitteistä sovelletaan tavalla tai toisella Hellyn lauseen todistamisessa.

Toisessa luvussa otetaan käsittelyyn itse Hellyn lause. Aluksi käydään läpi lauseen historiaa ja lauseen merkitykseen johdatellaan heikomman tuloksen, äärellisen leikkausominaisuuden, avulla. Tämän jälkeen annetaan todistus Hellyn lauseelle ja esitellään myös Radonin ja Carathéodoryn lauseet. Kolmannessa luvussa kerrotaan näiden kolmen lauseen yhteisestä historiasta ja näytetään, että ne todellakin ovat yhtäpitäviä. Neljännessä luvussa päästään käsittelemään Hellyn lauseen sovelluksia, joista eniten painoarvoa annetaan taidegallerialauseelle. Lyhyesti sen mukaan $\lfloor n/3 \rfloor$ paikallaan pysyvää vartijaa vaaditaan joskus ja riittää aina valvomaan n-kulmaisen monikulmion muotoista taidegalleriaa. Lisäksi katsotaan, miten lampaita voi separoida Kirchbeergerin lauseen avulla ja käydään läpi Jungin lause.

Lopuksi viidenteen ja viimeiseen lukuun on koottu lisää mielenkiintoisia taidegallerialauseeseen pohjautuvia sovelluksia. Luku alkaa monikulmion kolmioinnin ja nelikulmioinnin käsitteillä. Tämän jälkeen käydään läpi sovelluksia, joissa taidegallerian vartijoille annetaan uusia voimia tai muutetaan muuten sääntöjä. Näistä tunnetuimpia ovat linnoitusongelma, jossa pohditaan monta vartijaa tarvitaan valvomaan monikulmion ulkopuolta ja vankilan piha- ongelma, jossa tehtävänä on valvoa sekä monikulmion sisäpuolta että ulkopuolta.

Päälähteenä tutkielmassa on käytetty I.E. Leonardin ja J.E. Lewisin kirjaa *Geometry of Convex Sets* [**5**]. Siinä on käyty perusteellisesti läpi konveksin geometrian peruskäsitteitä sekä Hellyn lause ja sen sovelluksia. J. Eckhoffin tekstissä *Helly, Radon and Carathéodory Type Theorems* [**2**] on esitelty kattavasti Hellyn, Radonin ja Carathéodoryn lauseiden historiaa. Tutkielman viimeisessä luvussa esitellyt sovellukset ja paljon lisää löytyy Joseph O'Rourken kirjasta *Art Gallery Theorems and Algorithms* [**7**]. Mainitsemisen arvoinen on myös L. Danzerin, B. Grünbaumin ja V. Kleen artikkeli *Helly's Theorem and its Relatives* [**1**], jota pidetään erityisen tärkeänä Hellyn lauseeseen liittyvänä julkaisuna.

LUKU 1

Konveksia geometriaa

Aloitetaan konveksiin geometriaan tutustuminen käymällä läpi aihealueen peruskäsitteitä. Koko työssä asioita käsitellään yleisessä vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$. Lisäksi käytetään saman avaruuden Euklidista normia. Kaikissa konveksin geometrian lauseissa ja niihin liittyvissä sovelluksissa luonnollisesti oletetaan, että käsiteltävät joukot ovat konvekseja. Lisäksi monesti joukkojen oletetaan olevan myös kompakteja. Määritellään aluksi kasautumispiste, jonka avulla pystytään määrittelemään kompakti joukko.

1.1. Kasautumispiste

Kasautumispiste pystytään määrittelemään sekä geometrisesti avaruuden avoimien pallojen avulla että analyysilla suppenevien jonojen avulla. Esitellään ensin geometrinen määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Piste $p \in \mathbb{R}^n$ on joukon A kasautumispiste, mikäli jokainen p-keskinen positiivisen säteen omaava avoin pallo sisältää joukon A pisteen, joka ei ole p. Siis täytyy päteä

$$(A \setminus \{p\}) \cap B(p, \delta) \neq \emptyset \text{ kaikilla } \delta > 0.$$

Kasautumispiste voidaan määritellä myös suppenevien jonojen avulla.

LAUSE 1.2. *Olkoot joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, ja piste $p \in \mathbb{R}^n$. Piste p on joukon A kasautumispiste, jos ja vain jos on olemassa pisteistä $p_k \in A \setminus \{p\}$ muodostuva jono $(p_k)_{k \geq 1}$ siten, että*

$$\lim_{k \to \infty} p_k = p.$$

1.2. Kompaktit joukot

Määritellään seuraavaksi kompakti joukko kasautumispisteen avulla.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko K on kompakti, jos jokaisella äärettömällä K:n osajoukolla on kasautumispiste, joka kuuluu joukkoon K.

HUOMAUTUS 1.4. Jotta $K \subset \mathbb{R}^n$ olisi kompakti, vaatii edellinen määritelmä seuraavat kaksi ehtoa:

(i) Jokaisella K:n äärettömällä osajoukolla on ainakin yksi kasautumispiste p.
(ii) Kasautumispisteen p täytyy kuulua joukkoon K.

Kompaktius voidaan määritellä usealla yhtäpitävällä tavalla. Yksi yleisimpiä tapoja on hyödyntää avointen joukkojen peitteitä. Joukoista koostuvaa perhettä sanotaan joukon K peitteeksi, jos perheen yhdiste sisältää joukon K.

LAUSE 1.5. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin K on kompakti, jos ja vain jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.*

Lauseelle löytyy yksityiskohtainen todistus Jussi Väisälän luentomonisteesta *Topologia 1* (1999) [**10**]. Sivuhuomautuksena Väisälän teokset ovat hyviä lähteitä, jos topologiasta ja konveksisista geometriasta haluaa lukea suomenkielellä. Perustietoa löytyy myös Jouni Parkkosen luentomonisteesta [**8**].

Kompaktiudelle saadaan johdettua myös seuraavanlainen muoto:

LAUSE 1.6. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko K on kompakti, jos ja vain jos*

(i) Jokaisella K:n äärettömällä osajoukolla on ainakin yksi kasautumispiste p.
(ii) Kaikki K:n kasautumispisteet kuuluvat K:hon.

Yksi tärkeimpiä kompaktien joukkojen ominaisuuksia on se, että ne ovat suljettuja ja rajoitettuja.

LAUSE 1.7. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompakti osajoukko K on suljettu ja rajoitettu.*

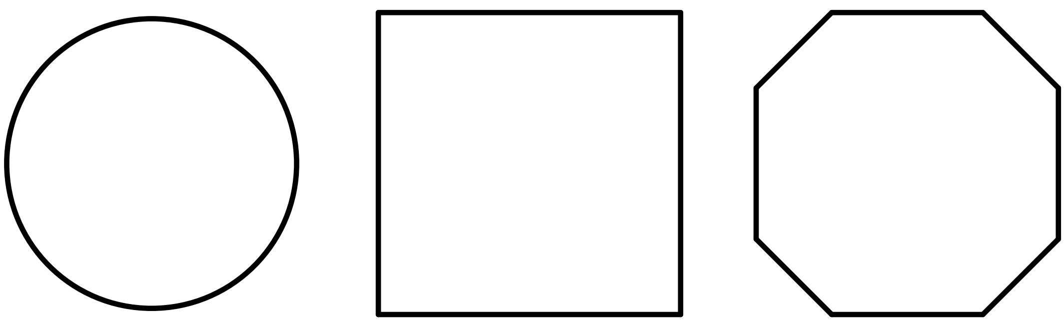
Lyhyet ja ytimekkäät todistukset tälle sekä edeltävälle lauseelle löytyvät I.E. Leonardin ja J.E. Lewisin kirjasta *Geometry of Convex Sets* (2016) [**5**].

1.3. Konveksit joukot

Aloitetaan konvekseihin joukkoihin ja niiden sovelluksiin tutustuminen käymällä määritelmän muodossa läpi, mikä oikeastaan on konveksi joukko.

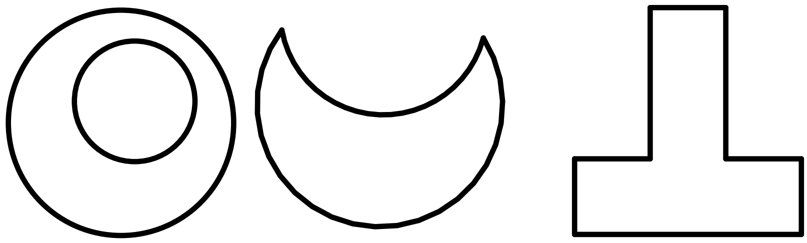
MÄÄRITELMÄ 1.8. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko A on konveksi, jos ja vain jos minkä tahansa kahden A:n pisteen x ja y välinen jana $[x, y]$ on A:n osajoukko. Toisin sanoen joukko A on konveksi, jos ja vain jos kaikille pisteille $x, y \in A$ ja jokaiselle vakiolle $\lambda \in]0, 1[$ pätee, että $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$.

Yksiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}$ konveksit joukot voidaan rajata tarkasti. Niitä ovat tyhjä joukko, yksittäiset pisteet, välit, puolisuorat ja koko reaaliakseli. Tasossa $\mathbb{R}^2$ sen sijaan konveksit joukot vaihtelevat paljon. Geometrisesti konveksi joukko on sellainen, missä ei ole reikiä, kuoppia tai töyssyjä. Esimerkkejä siitä millaiset tason joukot vat konvekseja ja millaiset eivät on kuvissa 1.1 ja 1.2.



KUVA 1.1. Esimerkkejä konvekseista joukoista tasossa.

Konveksin joukon käsite voidaan myös selittää näkyvyyden avulla seuraavasti: Joukko on konveksi, jos kaikista sen pisteistä on mahdollista nähdä kaikki muut pisteet siten, että näkölinja ei kulje joukon ulkopuolelta.



KUVA 1.2. Esimerkkejä ei-konvekseista joukoista tasossa.

Konveksien joukkojen monet ominaisuudet ovat dimensiosta riippumattomia. Tämän seurauksena n-ulotteisista konvekseista joukoista pystytään saamaan jonkinlainen käsitys tutkimalla kaksi- ja kolmiulotteisia konvekseja joukkoja. Sen vuoksi konveksisuus on tärkeä osa n-ulotteista geometriaa.

Tässä työssä keskitytään konvekseihin joukkoihin liittyviin geometrisiin sovelluksiin, mutta konveksisuudella on myös analyyttisempiä käyttökohteita. Konveksisuutta voidaan soveltaa muun muassa lineaariseen ja epälineaariseen ohjelmointi- ja optimisaatioteoriaan. Esimerkiksi käytettäessä lineaarista ohjelmointia optimaalisen ratkaisun löytämiseksi havaitaan, että suotuisa alue on konveksi joukko. Ymmärrys konveksien joukkojen geometriasta on välttämätöntä, kun käsitellään konveksisuuden sovelluksia.

ESIMERKKI 1.9. Näytetään, että suljettu yksikköpallo $\mathbb{R}^n$:ssä

$$\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

on konveksi joukko.

TODISTUS. Olkoot $x, y \in \overline{B}(0,1)$. Tällöin mikä tahansa piste $z \in [x,y]$ voidaan esittää muodossa

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y,$$

missä $\lambda \in [0,1]$ on jokin vakio.

Näytetään vielä, että z kuuluu yksikköpalloon eli $z \in \overline{B}(0,1)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että z:n normi on korkeintaan 1. Siis $\|z\| \leq 1$.

Väite seuraa melko suoraan kolmioepäyhtälöstä:

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|(1-\lambda)x + \lambda y\| \\ &\leq \|(1-\lambda)x\| + \|\lambda y\| \\ &= |1-\lambda| \cdot \|x\| + |\lambda| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

Koska $0 \leq \lambda \leq 1$, niin $|1-\lambda| = 1-\lambda$ ja $|\lambda| = \lambda$.

Siispä

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq (1-\lambda)\|x\| + (\lambda)\|y\| \\ &\leq (1-\lambda) \cdot 1 + (\lambda) \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Käydään seuraavaksi läpi konveksien joukkojen perusominaisuuksia. Osoitetaan ensin lause, jonka seurauksena pystytään näyttämään, että joukon siirto ja skaalaaminen säilyttävät konveksisuuden. Tätä varten tarvitaan seuraavat määritelmät.

Määritelmä 1.10. Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin αA on joukko, joka saadaan kertomalla jokainen joukon A jäsen kertoimella $\alpha \in \mathbb{R}$ eli

$$\alpha A = \{\alpha a \in \mathbb{R}^n : a \in A\}.$$

Määritelmä 1.11. Olkoot joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ja vektori $v \in \mathbb{R}^n$. Tällöin joukko $A + v$ määritellään seuraavasti:

$$A + v = \{a + v \in \mathbb{R}^n : a \in A\}.$$

Tätä kutsutaan joukon A translaatioksi.

Seuraavaksi päästään käsiksi ennen määritelmiä mainittuun lauseeseen.

Lause 1.12. *Jos $p, q \in \mathbb{R}^n$ ja $[p, q]$ on pisteiden p ja q määräämä jana, niin*

(i) $[p, q] + x_0 = [p + x_0, q + x_0]$ *jokaisella* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *ja*

(ii) $\alpha[p, q] = [\alpha p, \alpha q]$ *jokaisella vakiolla* α.

Todistus. (i) Otetaan mielivaltainen piste x ja näytetään, että se kuuluu joukkoon $[p, q]+x_0$, jos ja vain jos se kuuluu joukkoon $[p+x_0, q+x_0]$. Siis $x \in [p, q]+x_0$, jos ja vain jos on $0 \leq \lambda \leq 1$ siten, että

$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda)p + \lambda q + x_0 \\ &= (1 - \lambda)p + \lambda q + (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_0 \\ &= (1 - \lambda)(p + x_0) + \lambda(q + x_0), \end{aligned}$$

eli toisin sanoen, jos ja vain jos $x \in [p+x_0, q+x_0]$. Siispä $[p, q]+x_0 = [p+x_0, q+x_0]$ jokaisella $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Vastaavasti $x \in \alpha[p, q]$, jos ja vain jos on $0 \leq \lambda \leq 1$ siten, että

$$\begin{aligned} x &= \alpha[(1 - \lambda)p + \lambda q] \\ &= (1 - \lambda)\alpha p + \lambda \alpha q, \end{aligned}$$

eli, jos ja vain jos $x \in [\alpha p, \alpha q]$. Siispä $\alpha[p, q] = [\alpha p, \alpha q]$.

□

Seuraus 1.13. *Jos joukko C on avaruuden $\mathbb{R}^n$ konveksi osajoukko, niin $C + x_0$ ja αC ovat konvekseja kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Näytetään ensin, että $C + x_0$ on konveksi. Olkoot p ja q pisteitä joukossa $C + x_0$. Tällöin $p - x_0$ ja $q - x_0$ ovat joukon C pisteitä. Koska C on konveksi, niin myös jana $[p - x_0, q - x_0]$ kuuluu joukkoon C ja edellisen lauseen nojalla

$$[p - x_0, q - x_0] + x_0 = [p - x_0 + x_0, q - x_0 + x_0] = [p, q].$$

Siispä $[p, q] \subset C + x_0$, kunhan pisteet p ja q kuuluvat joukkoon $C + x_0$ ja siten $C + x_0$ on konveksi.

Näytetään sitten, että αC on konveksi. Jos $\alpha = 0$, niin $\alpha C = \{\overline{0}\}$ on konveksi riippumatta siitä, onko joukko C konveksi vai ei. Voidaan siis olettaa, että $\alpha \neq 0$. Olkoot p ja q pisteitä joukossa αC siten, että $p = \alpha x$ ja $q = \alpha y$, missä x ja y ovat joukon C pisteitä. Koska C on konveksi, niin $[x, y] \subset C$ ja siten $\alpha[x, y] \subset \alpha C$. Edellisen lauseen nojalla $[p, q] \subset \alpha C$ eli αC on konveksi. □

Tämä seuraus on kätevä, koska joskus joukon siirto tai skaalaaminen voi helpottaa konveksin geometrian ongelmaa. Näytetään seuraavaksi, että konveksisuus säilyy leikkauksessa. Huomionarvoista on, että joukko F seuraavassa lauseessa voi olla äärellinen tai ääretön.

LAUSE 1.14. *Jos joukko F on avaruuden $\mathbb{R}^n$ konveksien osajoukkojen perhe, niin joukko*

$$C = \bigcap\{A : A \in F\}$$

on konveksi.

TODISTUS. Olkoot x ja y pisteitä joukossa C. Näytetään, että $[x, y] \subset C$. Koska C on kaikkien perheen F jäsenten leikkausjoukko, niin $x \in A$ jokaisella $A \in F$. Vastaavasti $y \in A$ jokaisella $A \in F$. Koska jokainen A on konveksi, niin tiedetään, että $[x, y] \subset A$. Siten

$$[x, y] \subset C = \bigcap\{A : A \in F\}$$

ja C on konveksi. □

Tämän luvun loput kappaleet käsittelevät työn päätuloksen, Hellyn lauseen, kannalta tärkeitä tuloksia. Erityisesti konveksia verhoa, joukkojen erottelua ja polytooppien ominaisuuksia tarvitaan Hellyn lauseen todistuksessa.

1.4. Konveksi verho

Konveksin verhon lähtökohtana on tämän tukielman lukijoille oletettavasti tuttu lineaarikombinaatio. Lineaarikombinaation kaksi tärkeää tyyppiä ovat affiini kombinaatio ja konveksi kombinaatio, joka on erityisen merkittävä tämän työn kannalta. Esitellään seuraavaksi kaikkien kolmen määritelmät.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoot $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ vakioita. Pistettä

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$$

sanotaan

- lineaarikombinaatioksi kaikilla vakioiden λ_i arvoilla.
- affiiniksi kombinaatioksi, jos $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.
- konveksiksi kombinaatioksi, jos $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ ja $\lambda_i \geq 0$ kaikilla $1 \leq i \leq k$.

Nämä määritelmät pätevät äärellisille osajoukoille $S \subset \mathbb{R}^n$. Ne voidaan kuitenkin laajentaa myös äärettömille osajoukoille S käsittelemällä joukon S äärellisiä osajoukkoja. Esimerkiksi, jos S on jokin $\mathbb{R}^n$:n osajoukko, niin S:n pisteiden konveksilla kombinaatiolla tarkoitetaan jonkin S:n äärellisen osajoukon konveksia kombinaatiota. Kaikki konveksit kombinaatiot saadaan soveltamalla tätä kaikkiin mahdollisiin S:n äärellisiin osajoukkoihin.

MÄÄRITELMÄ 1.16. Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko.

- Kaikkien S:n alkioiden lineaarikombinaatioiden kokoelmaa kutsutaan S:n lineaariseksi verhoksi tai ykinkertaisemmin S:n verhoksi. Sitä merkitään $\mathrm{span}(S)$.

- Kaikkien S:n alkioiden affiinien kombinaatioiden joukkoa kutsutaan S:n affiiniksi verhoksi ja merkitään aff(S).

- Kaikkien S:n alkioiden konveksien kombinaatioiden joukkoa kutsutaan S:n konveksiksi verhoksi ja merkitään conv(S).

Joukon S konveksi verho voidaan muotoilla myös konveksin kombinaation avulla seuraavasti.

Huomautus 1.17. Piste x kuuluu joukkoon conv(S), jos ja vain jos on olemassa alkiot $x_1, x_2, ..., x_k \in S$ ja vakiot $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ siten, että

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k,$$

missä $\lambda_i \geq 0$ kaikilla $i = 1, 2, ..., k$, ja $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Mille tahansa joukolle $S \subset \mathbb{R}^n$ joukon S lineaarinen verho, affiini verho ja konveksi verho sisältävät joukon S. Lineaarialgebran perusteella span(S) on joukon S virittämä lineaarinen aliavaruus, joka on yleensä paljon suurempi, kuin joukko S. Voidaan siis olettaa, että myös aff(S) ja conv(S) ovat joukkoa S suurempia. Selvästi myös verhoille pätee seuraava:

$$\text{conv}(S) \subset \text{aff}(S) \subset \text{span}(S).$$

Katsotaan seuraavaksi pari yksinkertaista esimerkkiä, joiden avulla on helppo havaita eri tyyppisten verhojen ero.

Esimerkki 1.18. Jos $S = \{p, q\}$, missä p ja q ovat eri pisteet avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin

- aff(S) on pisteiden p ja q kautta kulkeva suora.
- span(S) on origon ja pisteiden p ja q kautta kulkeva suora, mikäli joukko S on lineaarisesti riippuva. Jos S on lineaarisesti riipumaton, niin span(S) on origon ja pisteiden p ja q kautta kulkeva taso.
- conv(S) on jana $[p, q]$.

Esimerkki 1.19. Jos $S = \{a, b, c\}$, missä a, b ja c ovat pisteitä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ siten, että ne kaikki eivät ole samalla suoralla, niin

- aff(S) on pisteiden a, b ja c kautta kulkeva taso.
- span(S) origon ja pisteiden a, b ja c kautta kulkeva taso, jos S on lineaarisesti riippuvainen. Mikäli S on lineaarisesti riipumaton, niin span(S) on kolmiulotteinen aliavaruus.
- conv(S) on kärkipisteiden a, b ja c virittämä klomio ja sen sisus.

On olemassa myös tapauksia, joissa span(S), aff(S) ja conv(S) eivät ole joukkoa S suurempia. Esimerkiksi, jos S on avaruuden $\mathbb{R}^n$ lineaarinen aliavaruus, niin S sisältää kaikki lineaarikombinaationsa. Vastaavanlainen tulos on olemassa myös konvekseille joukoille.

Lemma 1.20. *Konveksi joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ sisältää kaikki sen konveksit kombinaatiot.*

Todistus. Jokainen kahdesta pisteestä, x_1 ja x_2, muodostuva konveksi kombinaatio on piste janalla $[x_1, x_2]$. Tästä seuraa, että jos S on konveksi, niin se sisältää kaikki sen kahdesta pisteestä muodostuvat konveksit kombinaatiot.
Oletetaan, että x_1, x_2 ja x_3 ovat kolme joukon S pistettä. Oletetaan lisäksi, että z on näiden kolmen pisteen konveksi kombinaatio eli

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

missä $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ja $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$, ja $\lambda_3 \geq 0$.
Jos mikä tahansa kertoimista λ_1, λ_2 tai λ_3 olisi nolla, niin silloin kyseessä olisi oikeastaan vain kahden pisteen konveksi kombinaatio ja tällöin mitään todistettavaa ei olisi jäljellä. Voidaan siis olettaa, että $\lambda_i > 0$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Esitetään z muodossa

$$z = (\lambda_1 + \lambda_2)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\right] + \lambda_3 x_3.$$

Hakasulkeiden sisällä oleva lauseke on kahden joukon S pisteen konveksi kombinaatio ja siten sitä voidaan merkitä joukon S pisteenä w. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$z = (\lambda_1 + \lambda_2) w + \lambda_3 x_3.$$

Havaitaan, että nyt tämä lauseke on kahden joukon S pisteen, x_3 ja w, konveksi kombinaatio, joka on siten joukon S piste. Tämä osoittaa sen, että mikä tahansa joukon S kolmen pisteen konveksi kombinaatio on joukon S piste. Tekemällä samanlaiset päättelyt suuremmalle määrälle pisteitä, voidaan induktion avulla näyttää, että joukko S sisältää minkä tahansa äärellisestä määrästä sen pisteitä muodostuvan konveksin kombinaation. □

Huomautus 1.21. Konveksi verho on konveksi.

Todistus. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ konveksi. Edellisen lemman nojalla $\mathrm{conv}(S) \subset S$. Lisäksi aina $S \subset \mathrm{conv}(S)$, joten $S = \mathrm{conv}(S)$. Siispä $\mathrm{conv}(S)$ on konveksi. □

Määritelmä 1.22. Olkoot joukot $S \subset \mathbb{R}^n$ ja $C \subset \mathbb{R}^n$. Joukko C on pienin konveksi joukko, joka sisältää joukon S, jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

(i) C on konveksi ja $S \subset C$.
(ii) Jos $C' \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi ja $S \subset C'$, niin $C \subset C'$.

Edellä määritelmässä 1.16 esitettiin konveksi verho algebrallisesti. Seuraavaksi näytetään geometrinen esitystapa.

Lause 1.23. *Jos S on avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko, niin S:n konveksi verho on leikkaus kaikista konvekseista joukoista, jotka sisältävät joukon S. Toisin sanoen*

$$\mathrm{conv}(S) = \bigcap \{C : S \subset C \text{ ja } C \text{ on konveksi}\}.$$

Tämä on pienin konveksi joukko, joka sisältää joukon S.

Todistus. Näytetään ensin, että $\mathrm{conv}(S)$ on pienin konveksi joukko, joka sisältää joukon S. Osoitetaan, että jokainen konveksi osajoukko C, joka sisältää joukon S, sisältää myös joukon $\mathrm{conv}(S)$.

Olkoon C konveksi joukko, joka sisältää joukon S. Tällöin $S \subset C$ ja määritelmän nojalla $\mathrm{conv}(S) \subset \mathrm{conv}(C)$. Toisaalta $\mathrm{conv}(C) = C$, sillä C on konveksi, joten

$\mathrm{conv}(S) \subset C$. Siispä $\mathrm{conv}(S)$ todella on pienin konveksi joukko, joka sisältää joukon S.

Näytetään sitten, että

$$\mathrm{conv}(S) = \bigcap \{C : S \subset C \text{ ja } C \text{ on konveksi}\}.$$

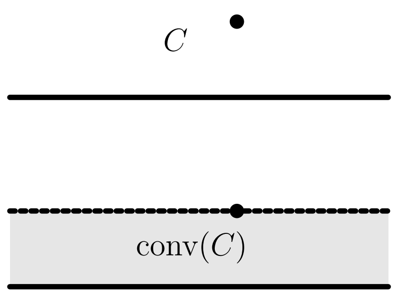
Olkoon F perhe, joka muodostuu kaikista joukon S sisältävistä konvekseista joukoista. Joukko $\bigcap F$ on joukon S sisältävä konveksi joukko, joten $\mathrm{conv}(S) \subset \bigcap F$. Koska se on kaikkien joukon S sisältävien konveksien joukkojen leikkaus, niin sen täytyy olla jokaisen joukon S sisältävän konveksin joukon osajoukko eli $\bigcap F \subset \mathrm{conv}(S)$. Toisin sanoen $\bigcap F$ on pienin konveksi joukko, joka sisältää joukon S, ja siten sen täytyy olla konveksi verho. $\square$

Tutkielman toisessa luvussa esitellään Carathéodoryn lause. Sen avulla voidaan osoittaa, että jos $C \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin myös $\mathrm{conv}(C)$ on avoin. Carathéodoryn lauseesta seuraa myös, että jos $C \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, niin myös $\mathrm{conv}(C)$ on kompakti.

Suljetun joukon konveksi verho ei kuitenkaan välttämättä ole suljettu. Näytetään esimerkki tällaisesta tilanteesta.

Esimerkki 1.24. Etsitään suljettu joukko C siten, että $\mathrm{conv}(C)$ ei ole suljettu.

Olkoon C joukko, joka muodostuu avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorasta ja pisteestä, joka ei ole suoralla. Tällöin C on suljettu, koska se on kahden suljetun joukon yhdiste, mutta konveksi verho $\mathrm{conv}(C)$ ei ole suljettu. Tilanne on havainnollistettu kuvassa 1.3.



Kuva 1.3. Suljetun joukon konveksi verho ei aina ole suljettu.

1.5. Konveksien joukkojen sisus ja sulkeuma

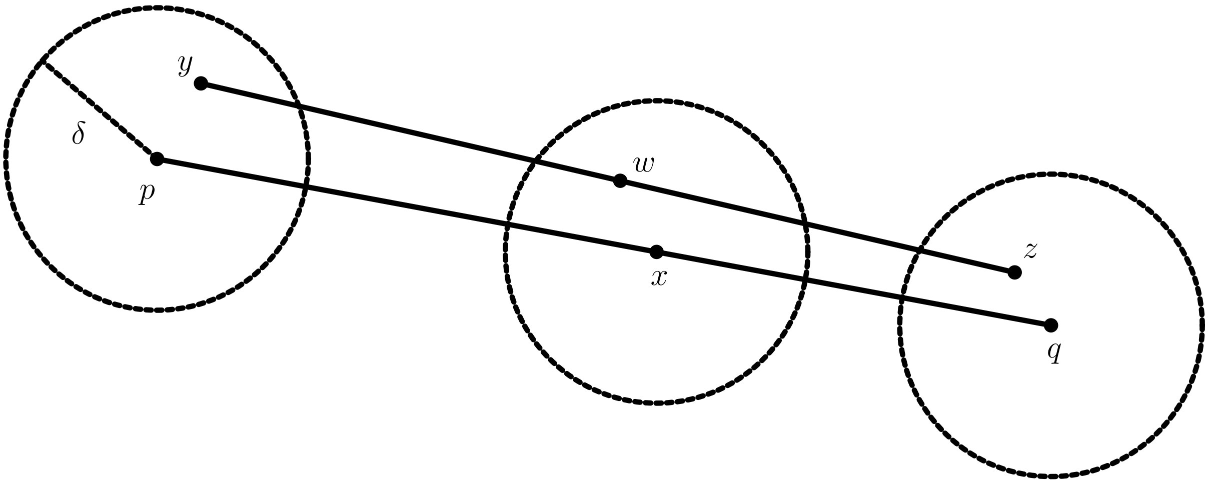
Tässä kappaleessa näytetään, että konveksin joukon sisäpisteiden joukko ja sulkeuma säilyttävät konveksisuuden. Kun tutkitaan, kuuluuko piste joukon sulkeumaan, niin pitää näyttää, että piste joko kuuluu annettuun joukkoon tai se on joukon kasautumispiste. Aloitetaan osoittamalla, että konveksin joukon sulkeuma säilyttää konveksisuuden.

Lause 1.25. *Jos $C \subseteq \mathbb{R}^n$ on konveksi joukko, niin sen sulkeuma $\overline{C}$ on myös konveksi joukko.*

TODISTUS. Olkoon $\overline{C}$ konveksin joukon C sulkeuma. Näytetään, että jos p ja q ovat $\overline{C}$:n pisteitä, niin myös koko jana $[p, q]$ kuuluu joukkoon $\overline{C}$.

Olkoon $x = (1 - \lambda)p + \lambda q$, missä $0 \leq \lambda \leq 1$, mielivaltainen piste janalta $[p, q]$. Väitetään, että x on joukon C sulkeuman piste. Toisin sanoen väitetään, että jos δ on mikä tahansa positiivinen luku, niin avoin pallo $B(x, \delta)$ sisältää C:n pisteen.

Tämä on yhtäpitävää alkuperäisen väitteen kanssa. Otetaan kaksi avointa δ-säteistä palloa, joiden keskipisteet ovat p ja q. Koska p ja q ovat joukon C sulkeuman pisteitä, niin molempien pallojen $B(p, \delta)$ ja $B(q, \delta)$ täytyy sisältää vähintään yksi joukon C piste. Olkoot nämä pisteet y ja z vastaavasti. Tilanne on hahmoteltu kuvaan 1.4.



KUVA 1.4. Avoin pallo $B(x, \delta)$ sisältää C:n pisteen.

Koska joukko C on konveksi, niin piste $w = (1 - \lambda)y + \lambda z$ kuuluu joukkoon C. Näytetään vielä, että w sisältyy palloon $B(x, \delta)$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\|x - w\| &= \|x - ((1 - \lambda)y + \lambda z)\| \\
&= \|(1 - \lambda)p + \lambda q - ((1 - \lambda)y + \lambda z)\| \\
&= \|(1 - \lambda)p - (1 - \lambda)y + \lambda q - \lambda z\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)p - (1 - \lambda)y\| + \|\lambda q - \lambda z\| \\
&= (1 - \lambda)\|p - y\| + \lambda\|q - z\| \\
&=< (1 - \lambda)\delta + \lambda\delta \\
&= \delta,
\end{aligned}$$

joten $w \in B(x, \delta)$ ja x kuuluu joukon C sulkeumaan. Siispä lause on tosi. $\square$

Käytännön kannalta usein halutaan löytää pienin suljettu konveksi joukko, joka sisältää annetun joukon A. Tämä on mahdollista määrittelemällä suljettu konveksi verho.

MÄÄRITELMÄ 1.26. Joukon A suljettu konveksi verho, $\overline{\mathrm{conv}}(A)$, on kaikkien joukon A sisältävien suljettujen konveksien osajoukkojen leikkaus. Siis

$$\overline{\mathrm{conv}}(A) = \bigcap\{C : C \text{ on suljettu ja konveksi, ja } A \subset C\}.$$

Huomautus 1.27. Määritelmän nojalla $\overline{\text{conv}}(A)$ on

- suljettu, koska se on suljettujen joukkojen leikkaus,
- konveksi, koska se on konveksien joukkojen leikkaus, ja
- pienin suljettu konveksi joukko, joka sisältää A:n, koska se on kaikkien sellaisten joukkojen leikkaus.

On myös mahdollista näyttää, että $\overline{\text{conv}}(A) = \overline{\text{conv}(A)}$. Tämä on todistettu kirjassa [**5**].

Seuraavaksi todistetaan saavutettavuuslemma. Se on kätevä työkalu, kun seuraavassa kappaleessa aletaan tarkastelemaan tangentiaalisia hypertasoja ja joukkojen erottelua.

Lemma 1.28 (Saavutettavuuslemma). *Olkoon $C \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko, jolla on epätyhjä sisus. Jos $x \in \text{int}(C)$ ja $y \in C$, niin puoliavoin jana pisteiden x ja y välillä,*

$$[x, y[= \{(1-\lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda < 1\},$$

sisältää ainoastaan joukon C sisäpisteitä. Toisin sanoen $[x, y[\subset \text{int}(C)$.

Todistus. Koska x on joukon C sisäpiste, niin on olemassa positiivinen luku δ siten, että $B(x, \delta) \subset C$. Jos $z \in (x, y)$, niin

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y$$

jollakin $0 < \lambda < 1$. Näytetään, että z on joukon C sisäpiste osoittamalla, että $B(z, \lambda\delta) \subset C$.

Olkoon $v \in B(z, \lambda\delta)$. Halutaan näyttää, että $v \in C$. Jos asetetaan

$$w = \frac{1}{\lambda}(v - (1-\lambda)y),$$

niin

$$v = \lambda w + (1-\lambda)y.$$

Siis, jos pystytään näyttämään, että $w \in C$, niin konveksisuuden nojalla $v \in C$.

Huomataan, että

$$\|w - x\| = \|\frac{1}{\lambda}(v - (1-\lambda)y) - x\| = \|\frac{1}{\lambda}(v - (1-\lambda)y - \lambda x)\| = \|\frac{1}{\lambda}(v - z)\| < \delta.$$

Tämä näyttää sen, että $w \in B(x, \delta)$ ja siten $w \in C$. Siispä $v \in C$ eli $B(z, \lambda\delta)$ sisältyy kokonaan joukkon C ja edelleen z on joukon C sisäpiste. $\square$

Saavutettavuuslemmasta seuraa yleinen konveksin geometrian tulos:

Seuraus 1.29. *Jos $C \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi joukko, niin se sisäpisteiden joukko $\text{int}(C)$ on myös konveksi.*

Todistus. Tehdään antiteesi: Oletetaan, että sisäpisteiden joukko $\text{int}(C)$ ei ole konveksi. Tällöin on olemassa pisteet $x, y \in \text{int}(C)$ siten, että jokin piste $z \in]x, y[$ ei ole joukossa $\text{int}(C)$. Edeltävän lemman nojalla tämä ei ole kuitenkaan mahdollista, joten ollaan ristiriidassa. $\square$

1.6. Joukkojen erottelu ja ekstreemit pisteet

Määritellään aluksi hypertaso.

MÄÄRITELMÄ 1.30. Olkoot $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ja β vakiokertoimia, joista ainakin yksi α_i on nollasta poikkeava. Tällöin pistejoukkoa $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa yhtälön

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta,$$

kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ hypertasoksi.

Toisin sanoen joukko $H_\beta \in \mathbb{R}^n$ on hypertaso, kun

$$H_\beta = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta\}.$$

Esimerkiksi hypertasot $\mathbb{R}^2$:ssa ovat suoria ja hypertasot $\mathbb{R}^3$:ssa ovat tasoja.

Sanotaan, että hypertaso H on tangentiaalinen joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kanssa, jos ja vain jos $A \cap H \neq \emptyset$ ja A sisältyy jompaan kumpaan hypertason H määräämistä suljetuista puoliavaruuksista. Siis, jos

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\},$$

missä $p \in \mathbb{R}^n$ ja $p \neq \overline{0}$, niin H on tangentiaalinen joukon A kanssa, jos ja vain jos

(i) on olemassa piste $a_0 \in A$ siten, että $\langle p, a_0 \rangle = \alpha$ ja
(ii) joko $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ kaikilla $x \in A$ tai $\langle p, x \rangle \geq \alpha$ kaikilla $x \in A$.

Tässä tapauksessa sanotaan, että H on joukon A tangentiaalinen hypertaso ja mikä tahansa joukon $A \cap H$ piste on A:n tangenttipiste.

Joukkojen erottelu on oleellinen osa Hellyn lauseen todistusta. Määritellään seuraavaksi hypertasojen avulla erotellut joukot.

MÄÄRITELMÄ 1.31. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaksi osajoukkoa A ja B on eroteltu hypertasolla

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\},$$

jos ja vain jos A kuuluu jompaan kumpaan H:n määräämään suljettuun puoliavaruuteen ja B toiseen H:n määräämään suljettuun puoliavaruuteen. Toisin sanoen seuraavien ehtojen tulee olla voimassa:

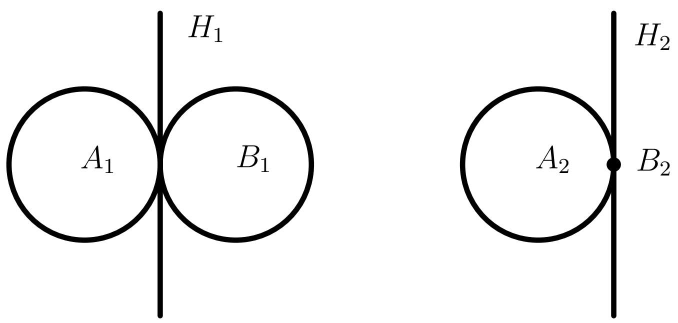
(i) $\langle p, a \rangle \leq \alpha$ kaikilla $a \in A$ ja
(ii) $\langle p, b \rangle \geq \alpha$ kaikilla $b \in B$.

Joukot A ja B on tarkasti eroteltu hypertasolla H, jos ja vain jos A kuuluu jompaan kumpaan H:n määräämään avoimeen puoliavaruuteen ja B toiseen H:n määräämään avoimeen puoliavaruuteen. Toisin sanoen seuraavien ehtojen tulee olla voimassa:

(i) $\langle p, a \rangle < \alpha$ kaikilla $a \in A$ ja
(ii) $\langle p, b \rangle > \alpha$ kaikilla $b \in B$.

Pelkkä joukkojen erottelu ei ole riittävä jatkon kannalta, sillä esimerkiksi on mahdollista, että erottelun ehdot täyttyvät, mutta joukot A ja B eivät ole edes erillisiä.

Näin käy ainakin silloin, jos joukoilla on yksi yhteinen piste ja hypertaso kulkee tämän pisteen kautta. Voi myös käydä niin, että toinen joukoista on toisen osajoukko ja ehdot silti toteutuvat. Tämä on mahdollista, jos toinen joukoista on toisen reunapiste ja hypertaso kulkee sen kautta. Esimerkit tilanteista näkyvät kuvassa 1.5. Tarvitaan siis vahvempi, tarkan erottelun käsite.



KUVA 1.5. Joukot A_1 ja B_1 eivät ole erillisiä, mutta ne on eroteltu hypertasolla H_1. Joukko B_2 on joukon A_2 osajoukko, mutta ne on eroteltu hypertasolla H_2.

Määritelmän loppuosan tarkka erottelukaan ei vielä riitä kaikkiin tilanteisiin. On mahdollista, että H erottelee joukot A ja B tarkasti ja H erottelee joukkojen sulkeumat $\overline{A}$ ja $\overline{B}$, mutta nämä eivät ole tarkasti eroteltuja. Tarvitaan siis vielä vahvempi määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 1.32. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukot A ja B on vahvasti eroteltu hypertasolla

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\},$$

jos ja vain jos H erottelee joukot A ja B tarkasti ja lisäksi $\operatorname{dist}(A, H) > 0$ ja $\operatorname{dist}(B, H) > 0$, missä dist on etäisyysfunktio.

Määritelmässä käytetty etäisyysfunktio määritellään seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 1.33. Olkoot piste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja epätyhjä joukko $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin etäisyyttä pisteen x_0 ja joukon A välillä merkitään $\operatorname{dist}(x_0, A)$ ja määritellään

$$\operatorname{dist}(x_0, A) = \inf\{\|x_0 - x\| : x \in A\}.$$

Vastaavasti epätyhjien joukkojen $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $B \subset \mathbb{R}^n$ välistä etäisyyttä merkitään $\operatorname{dist}(A, B)$ ja määritellään

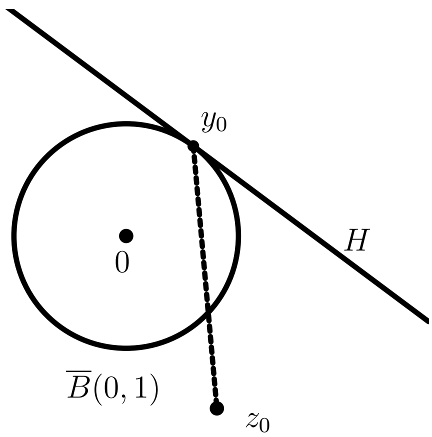
$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}.$$

Vahvasti eroteltujen joukkojen mukaan on myös nimetty vahva erottelulause. Vahvaa erotteluausetta käytetään myöhemmin tässä luvussa käsiteltävän Kreinin-Milmannin lauseen todistamisessa sekä Hellyn lauseen todistamisessa. Lauseen todistuksessa viitataan seuraaviin lauseisiin ja lemmoihin.

LAUSE 1.34. *Olkoon L suora avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja p piste suoralla L. Tällöin p on origoa lähimpänä oleva suoran L piste, jos ja vain jos p on ortogonaalinen janaan $q-p$ nähden kaikilla muilla suoran L pisteillä q.*

Lauseen todistus on pitkähkö normin ominaisuuksiin perustuva pyörittely, joka löytyy kirjasta [**5**]. Sivuutan sen tässä.

LEMMA 1.35. *Olkoon hypertaso H tangentiaalinen suljetun yksikköpallon $\overline{B}(0,1)$ kanssa pisteessä y_0. Olkoon lisäksi z_0 mikä tahansa piste siinä avoimessa puoliavaruudessa, joka sisältää origon. Tällöin jana $[y_0, z_0]$ sisältää avoimen pallon $B(0,1)$ pisteitä.*



KUVA 1.6. Lemman 1.35 tilanne.

TODISTUS. Tässä tilanteessa hypertaso on $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y_0, x\rangle = 1\}$. Jos väite ei pidä paikkaansa, niin pisteiden y_0 ja z_0 kautta kulkeva suora ei leikkaa avointa palloa $B(0,1)$. Siis $\|x\| \geq 1$ kaikilla suoran pisteillä x. Koska $\|y_0\| = 1$, tämä tarkoittaisi sitä, että y_0 on origoa lähimpänä oleva suoran piste. Edeltävän lauseen nojalla y_0 on ortogonaalinen janan $z_0 - y_0$ kanssa eli

$$\langle y_0, z_0 - y_0\rangle = 0.$$

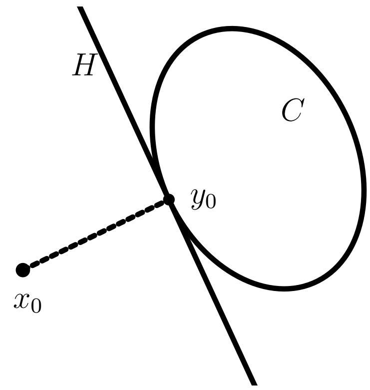
Tästä seuraa, että

$$\langle y_0, z_0\rangle = \langle y_0, y_0\rangle = 1.$$

Siispä z_0 kuuluisi hypertasoon H, mikä on ristiriita. □

LEMMA 1.36. *Olkoot $C \subset \mathbb{R}^n$ suljettu konveksi joukko, x_0 joukon C komplementtiin kuuluva piste ja $y_0 \in C$ pistettä x_0 lähimpänä oleva piste. Tällöin pisteen y_0 kautta kulkeva, janaan $[x_0, y_0]$ nähden ortogonaalinen, hypertaso H on joukon C tangentiaalinen hypertaso, joka erottelee joukon C ja pisteen x_0.*

TODISTUS. Väitetään, että C sisältyy siihen suljettuun puoliavaruuteen, joka ei sisällä pistettä x_0. Jos näin ei olisi, niin jokin joukon C piste z olisi samalla puolella hypertasoa H, kuin x_0. Tällöin konveksisuuden nojalla koko jana $[y_0, z]$ kuuluisi



KUVA 1.7. Lemman 1.36 tilanne.

joukkoon C. Kuitenkin edellisen lemman nojalla tämän janan täytyy sisältää avoimen pallon $B(x_0, \|y_0 - x_0\|)$ pisteitä, minkä seurauksena jokin joukon C piste olisi lähempänä pistettä x_0, kuin piste y_0. Tämä on ristiriita. □

LAUSE 1.37. *Olkoot kompakti joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ja suljettu joukko $B \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin on olemassa pisteet $a_0 \in A$ ja $b_0 \in B$ siten, että*

$$\|a_0 - b_0\| = \operatorname{dist}(A, B).$$

Todistus sivuutetaan, mutta se löytyy jälleen teoksesta [**5**].

Nyt on käyty läpi tarpeeksi työkaluja vahvan erottelulauseen todistamiseksi.

LAUSE 1.38 (Vahva erottelulause). *Jos joukot A ja B ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ erillisiä konvekseja osajoukkoja siten, että A on kompakti ja B on suljettu, niin A ja B on vahvasti eroteltu jollain hypertasolla.*

TODISTUS. Koska A on kompakti ja B on suljettu ja joukot ovat erilliset, niin joukkojen täytyy olla positiivisen etäisyyden päässä toisistaan. Siis $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Edellisen lauseen nojalla löydetään pisteet $a_0 \in A$ ja $b_0 \in B$ siten, että

$$\|a_0 - b_0\| = \operatorname{dist}(A, B).$$

Olkoot H_{a_0} pisteen a_0 kautta kulkeva hypertaso ja H_{b_0} pisteen b_0 kautta kulkeva hypertaso siten, että hypertasot ovat yhdensuuntaiset ja kohtisuorassa janaa $[a_0, b_0]$ vastaan. Tällöin hypertasojen täytyy olla positiivisen etäisyyden päässä toisistaan. Koska a_0 on lähin pistettä b_0 oleva joukon A piste, niin lemman 1.36 nojalla H_{a_0} on joukon A tangentiaalinen hypertaso pisteessä a_0 ja H_{a_0} erottelee joukon A ja pisteen b_0. Vastaavasti H_{b_0} on joukon B tangentiaalinen hypertaso pisteessä b_0 ja H_{b_0} erottelee joukon B ja pisteen a_0. Tämä tarkoittaa sitä, että hypertasojen H_{a_0} ja H_{b_0} välisessä alueessa ei ole yhtään joukkojen A tai B pisteitä. Olkoon hypertaso H siten, että se on yhdensuuntainen hypertasojen H_{a_0} ja H_{b_0} kanssa ja kulkee niiden puolesta välistä. Tällöin H vahvasti erottelee joukot A ja B. □

Näin on saatu käytyä läpi tärkeimmät joukkojen erotteluun liittyvät käsitteet. Seuraavaksi siirrytään tutkimaan ekstreemejä pisteitä.

Ekstreemien pisteiden käsitteitä ei varsinaisesti suoraan tarvita Hellyn lausetta tutkiessa. Ne ovat kuitenkin oleellinen osa konveksia geometriaa ja niiden ominaisuuksia tarvitaan kappaleessa 1.8 Kreinin-Milmannin lauseen todistamisessa. Aloitetaan palauttamalla mieleen, mitä tarkoitetaan joukon reunapisteellä ja erakkopisteellä.

MÄÄRITELMÄ 1.39. Piste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on joukon A reunapiste, jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ avoin pallo $B(x_0, \epsilon)$ sisältää pisteet $x \in A$ ja $y \notin A$. Toisin sanoen, jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0, B(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(x_0, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. Jos puolestaan on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että ainut palloon $B(x_0, \epsilon)$ kuuluva joukon A piste on x_0 itse, niin x_0 on joukon A erakkopiste. Toisin sanoen x_0 on joukon A erakkopiste, jos on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että $B(x_0, \epsilon) \cap A = \{x_0\}$.

ESIMERKKI 1.40. Olkoon $A \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\| < 1\}.$$

Tällöin 0 on joukon A reunapiste ja jokaiselle $0 < \epsilon < 1$ ainut pallon $B(0, \epsilon)$ piste, joka ei kuulu joukkoon A, on 0. Muut A:n reunapisteet ovat pisteet $x \in \mathbb{R}^2$, joille $\|x\| = 1$.

Muotoillaan tangentiaalisiin hypertasoihin liittyviä käsitteitä hieman eri tavoin, kuin edeltävissä kappaleissa. Seuraava lause antaa keinon löytää tangentiaalisen hypertason kompaktille joukolle analyysin keinoin.

LAUSE 1.41. *Olkoot K avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompakti osajoukko ja $p \in \mathbb{R}^n \neq 0$. Tällöin on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$H_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\}$$

on joukon K tangentiaalinen hypertaso.

TODISTUS. Koska f on jatkuva kompaktissa joukossa K, se saavuttaa maksiminsa jossain pisteessä $x_0 \in K$, jolle

$$f(x) \leq f(x_0)$$

kaikilla $x \in K$. Jos asetetaan $\alpha = f(x_0)$, niin H_α on joukon K tangentiaalinen hypertaso pisteessä x_0. □

Käydään nyt läpi varsinainen konveksin joukon ekstreemin pisteen määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 1.42. Jos $C \in \mathbb{R}^n$ on konveksi, niin piste $x_0 \in C$ on joukon C ekstreemi piste, jos ja vain jos x_0 ei ole minkään suljetun jonon $[u, v] \subset C$ sisäpiste. Toisin sanoen x_0 on ekstreemi piste, jos ja vain jos pisteen esitysmuodosta

$$x_0 = (1 - \lambda)u + \lambda v,$$

missä $u, v \in C$ ja $0 < \lambda < 1$, seuraa, että $u = v$. Kaikkien konveksin joukon C ekstreemien pisteiden joukkoa merkitään $\mathrm{extr}(C)$.

Kätevän tavan konveksin joukon ekstreemien pisteiden löytämiseen antaa seuraava lause.

LAUSE 1.43. *Jos C on avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä konveksi osajoukko, niin x_0 on joukon C ekstreemi piste, jos ja vain jos $C \setminus \{x_0\}$ on konveksi.*

Todistus. Näytetään ensin, että jos x_0 on joukon C ekstreemi piste, niin $C \setminus \{x_0\}$ on konveksi. Olkoon C avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä konveksi osajoukko ja oletetaan, että $x_0 \in \text{extr}(C)$. Olkoot $x, y \in C \setminus \{x_0\}$ ja $0 < \lambda < 1$. Koska C on konveksi, niin $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in C$ ja $(1-\lambda)x + \lambda y \neq x_0$, koska x_0 on joukon C ekstreemi piste. Siispä $C \setminus \{x_0\}$ on konveksi.

Näytetään sitten, että jos $C \setminus \{x_0\}$ on konveksi, niin x_0 on joukon C ekstreemi piste. Oletetaan, että $C \setminus \{x_0\}$ on konveksi ja $x_0 = (1-\lambda)u + \lambda v$, missä $u, v \in C$ ja $0 < \lambda < 1$. Tällöin molemmat, u ja v eivät voi kuulua joukkoon $C \setminus x_0$, koska joukon $C \setminus x_0$ konveksisuudesta pitäisi seurata, että $x_0 = (1-\lambda)u + \lambda v \in C \setminus \{x_0\}$, mikä on ristiriita. Oletetaan, että $u \notin C \setminus \{x_0\}$. Tästä seuraa, että $u = x_0$, joten

$$(1-\lambda)x_0 + \lambda v = x_0$$

eli $\lambda(x - x_0) = \overline{0}$. Koska $\lambda > 0$, niin tästä seuraa myös, että $v = x_0$. Siispä $x_0 \in \text{extr}(C)$. □

1.7. Ekstreemien pisteiden olemassaolo

Kaikilla avaruuden $\mathbb{R}^n$ konvekseilla osajoukoilla ei ole ekstreemejä pisteitä. Esimerkiksi, jos $H \subset \mathbb{R}^n$ on hypertaso, niin $\text{extr}(H) = \emptyset$. Seuraavassa lauseessa näytetään, että kompaktilla konveksilla $\mathbb{R}^n$:n osajoukolla puolestaan aina on ekstreemi piste. Ennen sitä käsitellään kuitenkin lauseen todistamisessa tarvittava lemma.

Lemma 1.44. *Jos B ja C ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ konvekseja osajoukkoja ja $C \subset B$, niin mikä tahansa B:n ekstreemi piste, joka sisältyy joukkoon C, on myös C:n ekstreemi piste.*

Todistus. Olkoot B ja C avaruuden $\mathbb{R}^n$ konvekseja osajoukkoja, joille pätee $C \subset B$. Olkoon lisäksi x_0 joukon B ekstreemi piste, jolle $x_0 \in C$. Jos x_0 ei ole C:n ekstreemi piste, niin on olemassa joukon C pisteet u ja v siten, että $u \neq x_0, v \neq x_0$ ja

$$x_0 = \frac{1}{2}(u+v).$$

Koska $u, v \in C$ ja $C \subset B$, niin $u, v \in B$ ja x_0 on kahden B:n pisteen välisen janan keskipiste. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä x_0:n piti olla joukon B ekstreemi piste. Siispä x_0 on joukon C ekstreemi piste. □

Lause 1.45. *Jos C on avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti konveksi osajoukko, niin joukolla C on ainakin yksi ekstreemi piste.*

Todistus. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määritelty siten, että $f(x) = \|x\|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä $\|x\|$ on pisteen x euklidinen normi. Jos $x, y \in \mathbb{R}^n$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja f on jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Koska C on avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti osajoukko, niin jatkuva funktio f on rajoitettu C:ssä ja se saavuttaa maksiminsa jossain pisteessä $x_0 \in C$.

Olkoon $M = \max_{x \in C} f(x) = f(x_0) = \|x_0\|$. Näytetään, että x_0 on suljetun pallon $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq M\}$ ekstreemi piste.

Koska $x_0 \in B$, jos $x_0 = \frac{1}{2}(u+v)$ joillakin $u, v \in B$, niin kolmioyhtälön nojalla pätee

$$M = \|x_0\| \leq \frac{1}{2}\|u\| + \frac{1}{2}\|v\| \leq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M.$$

Jos joko $\|u\| < M$ tai $\|v\| < M$, niin edeltävästä epäyhtälöstä seuraisi, että $M < M$, mikä on ristiriita. Siispä $\|u\| = \|v\| = M$. Tällöin pätee

$$\|u+v\| = 2\|x_0\| = \|u\| + \|v\|$$

eli toisin sanoen kolmioepäyhtälön yhtäsuuruus on voimassa. Siispä $v = \lambda u$ jollekin $\lambda > 0$ ja koska $\|u\| = \|v\| = M$, niin täytyy olla $\lambda = 1$ eli $u = v$. Siten x_0 on joukon B ekstreemi piste.

Koska $x_0 \in C$ ja $\|x\| \leq \|x_0\| = M$ kaikilla $x \in C$, niin $C \subset B$. Koska x_0 on joukon B ekstreemi piste, niin edeltävän lemman nojalla x_0 on myös joukon C ekstreemi piste. □

Näytetään sitten, että kompaktin konveksin joukon tangentiaaliselta hypertasolta löytyy ainakin yksi ekstreemi piste. Tätä lausetta käytetään apuna seuraavan kappaleen Kreinin-Milmannin lauseen todistamisessa.

LAUSE 1.46. *Jos C on avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti konveksi osajoukko, niin jokainen C:n tangentiaalinen hypertaso sisältää ainakin yhden joukon C ekstreemin pisteen.*

TODISTUS. Lauseen 1.41 nojalla on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että

$$H = \{\langle p, x\rangle = \alpha\},$$

on joukon C tangentiaalinen hypertaso. Koska C on kompakti, niin $C \cap H$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti konveksi osajoukko ja edeltävän lauseen nojalla joukolla $C \cap H$ on ainakin yksi ekstreemi piste x_0. Koska H on tangentiaalinen hypertaso, niin x_0 on joukon $C \cap H$ ekstreemi piste, jos ja vain jos x_0 on joukon C ekstreemi piste. □

1.8. Kreinin-Milmannin lause

Tässä kappaleessa yhdistetään konveksien joukkojen ja ekstreemien pisteiden ominaisuuksia muotoilemalla Kreinin-Milmannin lause. Lause näyttää, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompakti konveksi osajoukko on konveksi verho, joka muodostuu osajoukon ekstreemien pisteiden joukosta. Kreinin-Milmannin lausetta ei varsinaisesti tarvita Hellyn lauseen todistamisessa, mutta se on kuitenkin mielenkiintoinen ja hyödyllinen konveksin geometrian lause.

LAUSE 1.47 (Kreinin-Milmannin lause). *Olkoon $C \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti konveksi joukko ja olkoon* extr(C) *joukon C ekstreemien pisteiden joukko. Tällöin*

$$C = \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C)).$$

TODISTUS. Edeltävän lauseen nojalla $\text{extr}(C) \neq \emptyset$. Koska $\text{extr}(C) \subset C$ ja C on konveksi, niin

$$\text{conv}(\text{extr}(C)) \subset \text{conv}(C) = C.$$

Vastaavasti, koska C on kompakti ja koska $\overline{\text{conv}(\text{extr}(C))} = \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C))$, niin

$$\overline{\text{conv}}(\text{extr}(C)) \subset \overline{C} = C.$$

Näytetään nyt, että $C \subset \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C))$. Oletetaan, että näin ei ole; eli on olemassa piste $x_0 \in C$ siten, että $x_0 \notin \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C))$.

Koska $\overline{\text{conv}}(\text{extr}(C))$ on konveksi suljettu joukko ja $\{x_0\}$ on kompakti konveksi joukko, niin vahvan erottelulauseen nojalla on olemassa hypertaso

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\},$$

missä $p \neq \overline{0}$, siten, että

$$(*) \qquad \langle p, x \rangle < \alpha < \langle p, x_0 \rangle$$

kaikilla $x \in \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C))$. Toisin sanoen x_0 ja $\overline{\text{conv}}(\text{extr}(C))$ on vahvasti ja siten tarkasti eroteltu.

Olkoon nyt $\beta = \max\{\langle p, x \rangle : x \in C\}$. Koska C on kompakti ja sisätulo on jatkuva, niin maksimi saavutetaan jossain pisteessä $z_1 \in C$ siten, että

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \beta\}$$

on pisteen z_1 kautta kulkeva joukon C tangentiaalinen hypertaso. Lauseen 1.46 nojalla H_1 sisältää joukon C ekstreemin pisteen x_1. Siis $x_1 \in \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C)) \cap H_1$ ja siten

$$(**) \qquad \beta = \langle p, x_1 \rangle < \alpha.$$

Lausekkeiden $(*)$ ja $(**)$ nojalla

$$\alpha < \langle p, x_0 \rangle \leq \beta.$$

Tästä seuraa $\beta < \alpha < \beta$, joka on ristiriita. Siispä $C \subset \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C))$ eli väite on tosi. □

Käydään läpi esimerkki, jossa hyödynnetään Kreinin-Milmannin lausetta.

Esimerkki 1.48. Annetaan esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^3$ epätyhjästä konveksista kompaktista osajoukosta, jonka esktreemien pisteiden joukko ei ole suljettu.

Olkoot A ja B avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkoja siten, että

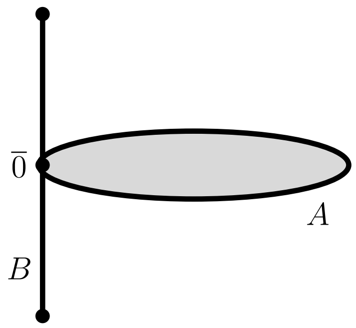
$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 \leq 1, x_3 = 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 = 0, -1 \leq x_3 \leq 1\}$$

Siis A on xy-tason yksikkökiekko, jonka keskipiste on $(1, 0, 0)$ ja B on z-akselin jana pisteiden $(0, 0, 1)$ ja $(0, 0, -1)$ välillä. Tilanne on hahmoteltu kuvaan 1.8.

Olkoon $C = \text{conv}(A \cup B)$. Koska A ja B ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kompakteja osajoukkoja, niin niiden yhdiste $A \cup B$ on myös kompakti. Siten C on kompakti konveksi joukko ja Kreinin-Milmannin lauseen nojalla

$$C = \overline{\text{conv}}(\text{extr}(C)).$$

Selvästi joukko $\text{extr}(C)$ on rajoitettu, mutta se ei ole suljettu.



KUVA 1.8. Joukot A ja B.

Kuvan avulla havaitaan, että

$$\mathrm{extr}(C) = \{(0,0,1)\} \cup \{(0,0,-1)\} \cup \{(x_1,x_2,x_3) : (1-x_1)^2 + {x_2}^2 = 1, x_3 = 0, (x_1,x_2) \neq (0,0)\}.$$

Origo $\overline{0} = (0,0,0)$ on joukon $\mathrm{extr}(C)$ kasautumispiste, mutta $\overline{0} \notin \mathrm{extr}(C)$, joten $\mathrm{extr}(C)$ ei ole suljettu.

Jos $C \subset \mathbb{R}^n$ on epätyhjä kompakti konveksi joukko, niin C on rajoitettu ja siten myös $\mathrm{extr}(C)$ on rajoitettu. Edeltävä esimerkki kuitenkin näyttää sen, että vaikka C on kompakti, niin ekstreemien pisteiden joukko ei välttämättä ole suljettu. Siispä tämän pohjalta ei voi vielä päätellä, että $\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(C))$ on kompakti.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ Krein-Milmannin lauseelle on kuitenkin voimassa seuraavanlainen vahvempi versio.

LAUSE 1.49. *Olkoon $C \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti konveksi joukko. Tällöin $C = \mathrm{conv}(\mathrm{extr}(C))$.*

Lauseen voi todistaa induktiolla joukon C dimension suhteen. Sivuutan todistuksen, mutta eräs versio löytyy teoksesta [**6**].

1.9. Polyhedraalit joukot ja polytoopit

Tässä kappaleessa käydään läpi, mikä on monitahokas konveksin geometrian mielessä. Lisäksi määritellään polytoopin käsite, jota käytetään Hellyn lauseen todistuksessa.

MÄÄRITELMÄ 1.50. Sanotaan, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko P on monitahokas, jos se on äärellisen monen suljetun puoliavaruuden leikkausjoukko.

Polyhedraaliin joukkoon voidaan tietyin ehdoin soveltaa Kreinin-Milmannin lausetta, kuten nähdään seuraavassa huomautuksessa.

HUOMAUTUS 1.51. Monitahokas $P \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu konveksi joukko ja se voi olla joko rajoitettu tai rajoittamaton. Jos P on rajoitettu, niin se on kompakti konveksi joukko ja Kreinin-Milmannin lauseen nojalla

$$P = \mathrm{conv}(\mathrm{extr}(P)).$$

Esimerkki 1.52. Hahmotellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ monitahokas, jonka määrävät seuraavat epäyhtälöt:

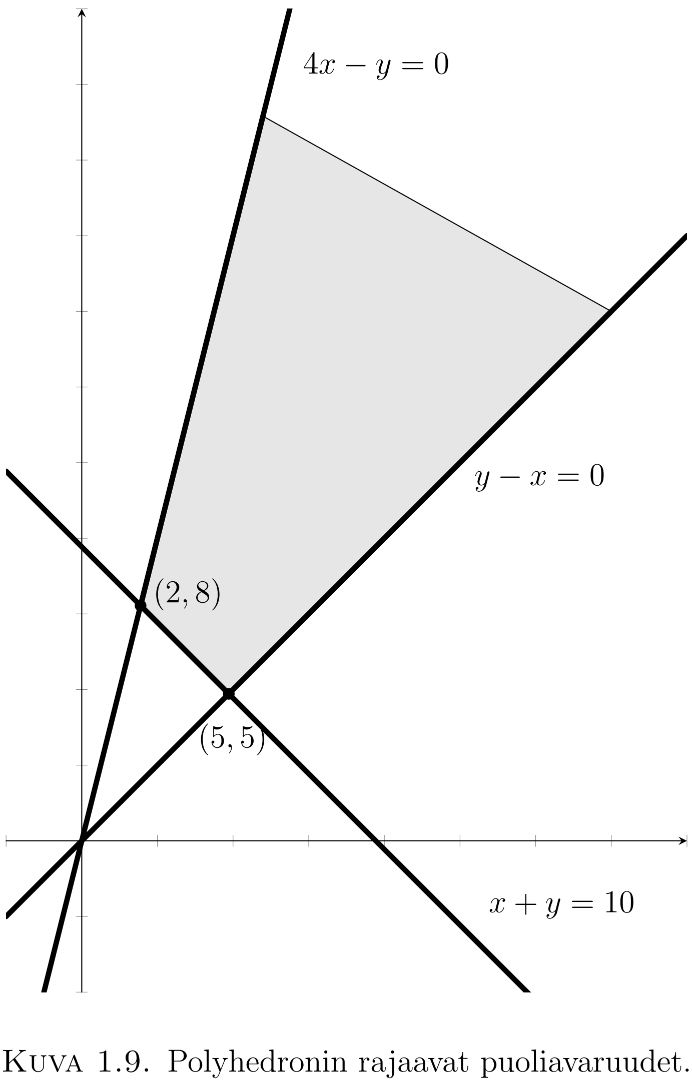
$$\begin{aligned} x + y &\geq 10 \\ 4x - y &\geq 0 \\ y - x &\geq 0. \end{aligned}$$

Määritetään lisäksi hahmotellun polyhedronin ekstreemit pisteet.

Polyhedronin rajoittavat hypertasot ovat

$$x + y = 10, \qquad 4x - y = 0 \qquad \text{ja} \qquad x - y = 0$$

ja epäyhtälöiden määräämä alue on kolmen suljetun puoliavaruuden leikkausjoukko. Monitahokas on hahmoteltu kuvaan 1.9.



Kuva 1.9. Polyhedronin rajaavat puoliavaruudet.

Esimerkin polyhedronilla on kaksi ekstreemiä pistettä:

(i) Kahden rajoittavan hypertason, $x + y = 10$ ja $4x - y = 0$, leikkausjoukko $(2, 8)$.
(ii) Kahden rajoittavan hypertason, $x + y = 10$ ja $y - x = 0$ leikkausjoukko $(5, 5)$.

Tämän esimerkin monitahokas on rajoittamaton.

Huomautus 1.53. Edeltävässä esimerkissä rajoittavien hypertasojen $4x - y = 0$ ja $y - x = 0$ leikkausjoukko $(0, 0)$ ei ole polyhedronin ekstreemi piste, sillä se ei kuulu puoliavaruuteen $x + y \geq 10$.

Määritellään sitten polytooppi ja annetaan siitäkin käsitteestä esimerkki.

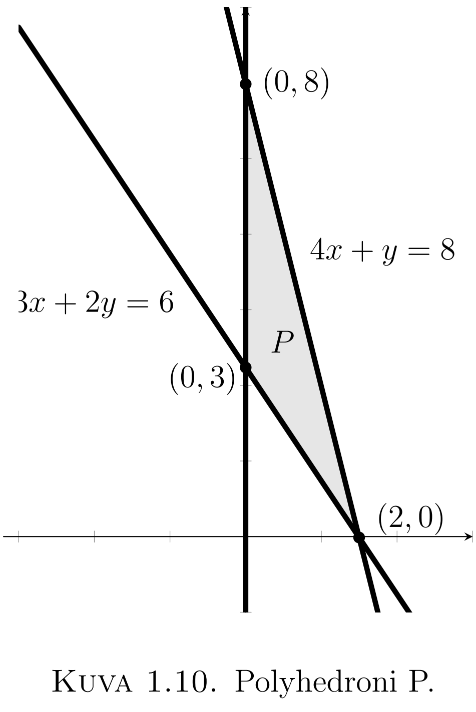
Määritelmä 1.54. Polytooppi tai konveksi polytooppi $P \subset \mathbb{R}^n$ on äärellisen joukon konveksi verho.

Esimerkki 1.55. Olkoon P monitahokas, jonka määräävät epäyhtälöt

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &\geq 6 \\
4x + y &\leq 8 \\
x &\geq 0 \\
y &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Näytetään, että P on polytooppi.

Polyhedronin P rajoittavat hypertasot ovat $x = 0, 4x + y = 8$ ja $3x + 2y = 6$. Polyhedroni on hahmoteltu kuvassa 1.10.



Kuva 1.10. Polyhedroni P.

Polyhedraalin joukon P ekstreemit pisteet ovat

$$u_1 = (2, 0), \qquad u_2 = (0, 3) \qquad \text{ja} \qquad u_3 = (0, 8).$$

Tässä esimerkissä P on rajoitettu ja siten kompakti. Siispä Kreinin-Milmannin lauseen nojalla

$$P = \mathrm{conv}(\{u_1, u_2, u_3\}).$$

Toisin sanoen P on äärellisen monen pisteen konveksi verho ja siten polytooppi.

Esimerkin tulos voidaan myös yleistää eli jokainen rajoitettu monitahokas on polytooppi.

LAUSE 1.56. *Jos $P \subset \mathbb{R}^n$ on monitahokas ja P on rajoitettu, niin P on polytooppi.*

Todistus tälle löytyy kirjasta [**5**]. Monen sivun pyörittelyn jälkeen teoksessa on myös näytetty, että käänteinen tulos pätee. Siis jos P on polytooppi, niin P on rajoitettu monitahokas. Sivuutan tässä molemmat todistukset.

Seuraavassa luvussa Hellyn lauseen todistuksessa tarvitaan tieto siitä, että jokainen polytooppi on konveksi ja kompakti. Osoitetaan siis tämä.

LAUSE 1.57. *Jokainen polytooppi on konveksi ja kompakti.*

TODISTUS. Olkoon polytooppi

$$P = \mathrm{conv}\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_n : \lambda_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0 \text{ ja } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ kaikilla } i\}.$$

Joukko

$$\Delta = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ kaikilla } i \text{ ja } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

on suljettu ja rajoitettu ja siten myös kompakti Kuvaus

$$f : \Delta \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_n$$

on jatkuva. Siispä $f(\Delta) =$ conv$\{x_1, ..., x_n\}$ on kompaktin joukon kuvajoukko jatkuvassa kuvauksessa ja siten se on kompakti. $\square$

LUKU 2

Hellyn lause

Nyt päästään tämän tutkielman tärkeimpään lukuun, jossa esitellään Hellyn lause ja sen todistus. Lisäksi tutustutaan Radonin ja Carathéodoryn lauseeseen. Näitä kolmea lausetta pidetään yleisesti konveksin geometrian kulmakivinä ja onkin mahdollista osoittaa, että kaikki kolme ovat yhtäpitäviä. Esitellään aluksi Hellyn lauseen historiaa.

Hellyn lauseen löysi ensimmäisen kerran nimensä mukaan Eduard Helly vuonna 1913. Hän kertoi löydöstään Johann Radonille, joka julkaisi lauseelle ensimmäisen, Radonin lauseeseen pohjautuvan, todistuksen vuonna 1921. Hellyn lause on esiintynyt historian saatossa niin useasti eri teskteissä, että sitä voidaan pitää kaikkein tunnetuimpana äärellisulotteisen konveksin geometrian lauseena. Lause tuo esille perustavanlaatuisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ ominaisuuden ja sen on läheisesti kytköksissä jo aiemmin tunnettuihin Radonin ja Carathédoryn lauseisiin.

Vuosien kuluessa Hellyn lauseelle on keksitty monia sovelluksia ja yleistyksiä. Lauseelle on myös keksitty useita eri todistuksia. Todistuksista geometrisin ja intuitivisin ainakin opiskelijan näkökulmasta on Hellyn oma todistus vuodelta 1923. Siinä tehdään induktio avruuden dimension n suhteen ja hyödynnetään konveksien joukkojen erottelulauseita. Laajemmin Hellyn lauseen ja siihen liittyvien käsitteiden historiasta on kerrottu J. Eckhoffin tekstissä *Helly, Radon and Carathéodory Type Theorems* (1993) [**2**].

2.1. Äärellinen leikkausominaisuus

Äärellinen leikkausominaisuus on tietyssä mielessä heikompi versio Hellyn lauseesta. Se onkin yksi tärkeimmistä Hellyn lauseen todistukessa tarvittavista tuloksista.

Määritelmä 2.1. Sanotaan, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkojen kokoelmalla F on äärellinen leikkausominaisuus, jos jokaisella äärellisellä kokoelman F osakokoelmalla on epätyhjä leikkaus.

Esimerkki 2.2. Olkoon $F = \{F_1, F_2, ...\}$ sisäkkäinen kokoelma, jolle pätee $F_{i+1} \subset F_i$ kaikilla $i = 1, 2, ...$ Kokoelmalla F on äärellinen leikkausominaisuus.

Esimerkki 2.3. Olkoon F suljettujen pallojen $\overline{B}(x, 1) \in \mathbb{R}^n$ kokoelma, missä $x \in \mathbb{R}^n$ on ääretön pistejoukko, jolle $\|x\| = 1$. Nyt F ei ole sisäkkäinen kokoelma, mutta sillä on kuitenkin äärellinen leikkausominaisuus, koska kaikilla suljetuilla palloilla $\overline{B}(x, 1) \in \mathbb{R}^n$, joilla $\|x\| = 1$, on yhteisenä pisteenä origo.

Joukkojen kompaktius voidaan muotoilla käyttämällä äärellistä leikkausominaisuutta seuraavan lauseen muodossa:

Lause 2.4. *Olkoon K avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Tällöin seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Joukko K on kompakti.*
(ii) *Jos F on äärellisellä leikkausominaisuudella varustettu joukon K suljettujen osajoukkojen kokoelma, niin joukolla F on epätyhjä leikkaus.*

TODISTUS. Näytetään ensin, että kohdasta (i) seuraa (ii). Olkoon K avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja olkoon $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ mikä tahansa kokoelma suljettuja K:n osajoukkoja. Olkoon U_α joukon F_α komplementti kaikilla indeksijoukkoon I kuuluvilla α. Siis $U_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus F_\alpha$. Koska F_α on suljettu joukko, täytyy sen komplementin U_α olla avoin joukko.

Oletetaan, että kokoelman F_α leikkaus on tyhjä eli $\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$. Tällöin

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

Siten $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$. Koska K on kompakti ja $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ on K:n avoin peite, niin lauseen **??** mukaan on äärellisen monta indeksiä $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ siten, että

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{r} U_{\alpha_k}.$$

Siis $\bigcap_{k=1}^r F_{\alpha_k} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. Jos kuitenkin $x \in \bigcap_{k=1}^r F_{\alpha_k}$, niin tästä seuraa, että $x \notin K$ Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että jokaisella α_i piti päteä $F_{\alpha_i} \subset K$. Siispä täytyy olla $\bigcap_{k=1}^r F_{\alpha_k} = \emptyset$.

Nyt on näytetty, että jos $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ on K:n suljetuista osajoukoista koostuva perhe ja $\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$, niin on olemassa äärellinen osaperhe $\{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ..., F_{\alpha_r}\}$ siten, että $\bigcap_{k=1}^r F_{\alpha_k} = \emptyset$.

Tästä seuraa, että jos $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ on K:n suljetuista osajoukoista koostuva perhe, jolla on äärellinen leikkausominaisuus, niin $\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$.

Näytetään sitten, että kohdasta (ii) seuraa (i). Oletetaan, että kun F on K:n suljetuista osajoukoista muodostuva perhe, jolla on äärellinen leikkausominaisuus, niin F:llä on epätyhjä leikkaus.

Oletetaan myös, että K ei ole kompakti eli on olemassa K:n avoin peite $U = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$, jolla ei ole äärellistä osapeitettä. Olkoon $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_r}\}$ jokin avoimen peitteen U äärellinen osaperhe, joka siis ei peitä joukkoa K. Täten

$$K \setminus \bigcup_{k=1}^{r} U_{\alpha_k} \neq \emptyset.$$

Olkoon $K_\alpha = K \setminus U_\alpha$ kaikilla $\alpha \in I$ ja olkoon $F = \{K_\alpha : \alpha \in I\}$. Tällön F on K:n suljetuista osajoukoista koostuva perhe, jolla on äärellinen leikkausominaisuus. Oletuksen nojalla perheellä F on epätyhjä leikkaus eli

$$\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}(K \setminus U_\alpha) = K \setminus \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \neq \emptyset,$$

joten

$$K \not\subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että joukon U piti olla joukon K avoin peite. Siispä K:n täytyy olla kompakti. $\square$

Sen näyttämiseksi, että kokoelmalla kompakteja joukkoja on epätyhjä leikkaus, riittää käsitellä äärellistä otosta kokoelman joukoista. Tämä aputulos on hyödyllinen seuraavan luvun Hellyn lauseen todistamisessa.

LEMMA 2.5. *Olkoon $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ kokoelma kompakteja joukkoja. Jos äärellisellä otoksella kokoelman joukkoja on epätyhjä leikkaus, niin myös koko kokoelmalla on epätyhjä leikkaus. Toisin sanoen halutaan näyttää, että jos*

$$\bigcap_{\beta \in I} F_\beta \neq \emptyset \text{ kaikilla äärellisillä } I \subset J, \text{ niin } \bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \emptyset.$$

TODISTUS. Olkoon $F_0 \in \mathcal{F}$. Tällöin F_0 on kompakti. Jos on $F' \in \mathcal{F}$, niin $F' \cap F_0 \subset F_0$ on kompakti ja siten myös suljettu. Merkitään $\mathcal{F}' = \{F_\alpha \cap F_0\}_{\alpha \in J}$. Tällöin jokainen kokoelman $\mathcal{F}'$ jäsen on kompaktin joukon F_0 suljettu osajoukko. Lauseen 2.4 nojalla kokoelmalla $\mathcal{F}'$ on äärellinen leikkausominaisuus. Siispä joukkojen F' leikkaus on epätyhjä eli $\bigcap_{F' \subset \mathcal{F}'} F' \neq \emptyset$. Tästä seuraa lemman väite. $\square$

2.2. Hellyn lause

Lauseessa 2.4 on oleellista, että käsiteltävät joukot ovat kompakteja. Kun lisäksi vaaditaan joukkojen konveksisuus, niin saadaan vielä äärellistä leikkausominaisuutta vahvempi lause. Olkoon $F \subset \mathbb{R}^n$ kompaktien konveksien osajoukkojen kokoelma. Jotta voitaisiin päätellä, että kokoelmalla F on epätyhjä leikkaus, ei ole pakko tutkia kaikkia äärellisiä kokoelman F osakokoelmia. Riittää tarkastaa osakokoelmat, joiden koko on $n+1$ tai vähemmän. Tämä tulos on osa Hellyn lausetta, joka otetaan käsittelyyn seuraavaksi.

LAUSE 2.6 (Hellyn lause). *Olkoon F kokoelma, joka koostuu avaruuden $\mathbb{R}^n$ konvekseista osajoukoista. Oletetaan, että joko F on äärellinen tai kaikki kokoelman F jäsenet ovat kompakteja. Jos kokoelmasta F otetaan mitkä tahansa $n+1$ jäsentä ja niillä on yhteinen piste, niin kaikilla F:n jäsenillä on yhteinen piste.*

TODISTUS. Todistetaan lause matemaattisella induktiolla samaan tapaan, kuin Helly itse lauseen todisti.

- Tapaus $n = 1$.

Kun $n = 1$, niin $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$. Joukon $\mathbb{R}$ konveksit osajoukot ovat välejä ja kompaktit konveksit osajoukot ovat suljettuja välejä. Näytetään ensin, että väite pätee silloin, kun kokoelman F jäsenet ovat kompakteja. Merkitään kokoelman F välien vasemmanpuoleisten päätepisteiden joukkoa A:lla ja oikeanpuoleisten päätepisteiden joukkoa B:llä. Olkoot $a = \sup A$ ja $b = \inf B$.

Tällöin täytyy olla $a \leq b$, koska jos olisi $b < a$, niin pisteen b määritelmän perusteella löytyisi väli $[a_1, b_1] \in F$, jolle pätee

$$b \leq b_1 < \frac{1}{2}(a+b).$$

Vastaavasti pisteen a määritelmän nojalla olisi väli $[a_2, b_2] \in F$, jolle pätee

$$\frac{1}{2}(a+b) < a_2 \leq a.$$

Siis olisi $b_1 < a_2$, mikä tarkoittaa sitä, että välien $[a_1, b_1]$ ja $[a_2, b_2]$ leikkaus on tyhjä, mikä on ristiriita. Siispä $a \leq b$, jonka seurauksena jokainen F:n jäsen sisältää joukon $[a, b]$, joka on joko yksittäinen piste tai aito väli.

Tapauksessa, jossa F on äärellinen, mutta ei välttämättä kompakti, voidaan tehdä samankaltainen päättely. Ainut ongelma tulee silloin, jos $a = b$. Koska F on äärellinen, niin on olemassa väli $I_1 \subset F$ siten, että sen vasemmanpuoleinen päätepiste on a ja lisäksi väli on avoin tässä pisteessä. Joukon F äärellisyys ja a:n ja b:n määritelmät takaavat sen, että täytyy myös olla olemassa väli $I_2 \subset F$, jonka oikeanpuoleinen päätepiste on b. Koska oletettiin, että $a = b$, niin välien I_1 ja I_2 leikkaus on tyhjä.

- Yleinen tapaus.

Äärellisen leikkausominaisuuden ansiosta kompakti tapaus yksinkertaistuu äärelliseksi. Lemman 2.5 nojalla riittää näyttää, että jokaisella F:n äärellisellä osaperheellä on epätyhjä leikkaus. Tarkemmin sanoen riittää tarkastella tilannetta, jossa äärellinen perhe F koostuu joukon $\mathbb{R}^n$ kompakteista konvekseista osajoukoista ja jokaisella perheen $n+1$ jäsentä sisältävällä otoksella on epätyhjä leikkaus.

Yleisessä äärellisessä tapauksessa joukkojen ei tarvitse olla kompakteja. Tämä väite kuitenkin seuraa myös äärellisestä kompaktista tapauksesta. Oletetaan, että F on avaruuden $\mathbb{R}^n$ konvekseista osajoukoista muodostuva äärellinen perhe. Kun tutkitaan kaikkia mahdollisia tapoja valita $n+1$ jäsentä perheestä F, niin oletukset takaavat, että sellaisella perheellä on yhteinen piste. Valitaan tällainen piste jokaisesta $n+1$:n kokoisesta osaperheestä ja merkitään valittujen pisteiden joukkoa B:llä. Korvataan jokainen F:n jäsen C vastaavalla leikkauksen $B \cap C$ konveksilla verholla C'. Koska B on äärellinen, niin myös C' on äärellinen. Siispä äärellisenä konveksina verhona C' on polytooppi ja edelleen lauseen 1.57 nojalla se on kompakti ja konveksi. Joukon B muodostustavasta seuraa, että jokaisella verhon C' $n+1$:llä jäsenellä on epätyhjä leikkaus. Koska C' on C:n osajoukko, niin minkä tahansa pisteen, joka kuuluu kaikkiin joukkoihin C', täytyy myös kuulua kaikkiin joukkoihin C. Tämä näyttää sen, että yleinen äärellinen tapaus seuraa äärellisestä kompaktista tapauksesta..

Lausetta ollaan todistamassa induktiolla. Voidaan siis olettaa, että lause on totta ulottuvuudessa $n-1$. Olkoon $(n-1)$-ulotteinen avaruus ja olkoon kompakteista konvekseista osajoukoista koostuva perhe. Oletetaan, että jos jokaisella perheen n:stä jäsenestä muodostuvalla osaperheellä on epätyhjä leikkaus, niin koko perheellä on vähintään yksi yhteinen piste.

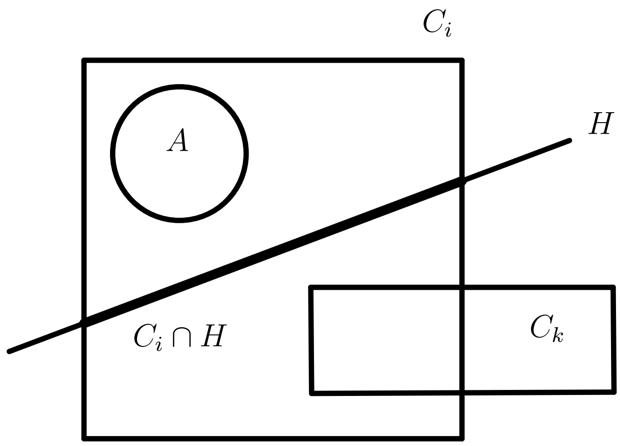
Oletetaan sitten, että väite ei pidä paikkaansa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ eli perheellä F on tyhjä leikkaus. Tällöin täytyy olla pienin mahdollinen osaperhe

$$G = \{C_1, C_2, ..., C_k\},$$

(joka voi olla F itse, kunhan $k > n+1$) jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) Kaikilla $(n+1)$:n joukon G jäsenellä on yhteinen piste.
(ii) $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1} \neq \emptyset$
(iii) $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1} \cap C_k = \emptyset$.

Olkoon $A = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1}$. Ehtojen (ii) ja (iii) perusteella joukot A ja C_k ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ erillisiä kompakteja konvekseja joukkoja. Siispä lauseen 1.38 mukaan ne voidaan tarkasti erotella jollain hypertasolla H, kuten seuraavassa kuvassa.



KUVA 2.1. Joukkojen A ja C_k erottelu.

Otetaan jokin C_i, jolla $i < k$. Tällöin $A \subset C_i$ ja $C_i \cap C_k \neq \emptyset$, koska kaikilla $(n+1)$:llä G:n jäsenellä on epätyhjä leikkaus. Toisin sanoen jokainen C_i, jolle $i < k$, sisältää pisteitä molemmista hypertason H määräämistä puoliavaruuksista. Siis $C_i \cap H$ on H:n epätyhjä konveksi osajoukko. Olkoon

$$\mathcal{E} = \{C_i \cap H : 1 \leq i \leq k-1\}.$$

Väitetään, että kaikilla n:llä joukon $\mathcal{E}$ jäsenellä on epätyhjä leikkaus. Tämä on selvää, sillä jos

$$C_{i_1} \cap H, C_{i_2} \cap H, ..., C_{i_n} \cap H$$

ovat mitkä tahansa n joukon $\mathcal{E}$ jäsentä, niin

$$A \subset C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots C_{i_n}$$

ja

$$(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots C_{i_n}) \cap C_k \neq \emptyset.$$

Tämä pitää jälleen paikkansa siksi, koska kaikilla $(n+1)$:llä G:n jäsenellä on epätyhjä leikkaus. Täten joukko $C_{i_1} \cap H, C_{i_2} \cap H, ..., C_{i_n}$ sisältää pisteitä molemmilta puolilta hypertasoa H, joten joukolla

$$\{C_{i_1} \cap H, C_{i_2} \cap H, ..., C_{i_n} \cap H\}$$

on epätyhjä leikkaus.

Induktio-oletuksen nojalla väite on totta $(n-1)$-ulotteisessa affiinissa osajoukossa H, minkä seuraksena joukolla $\mathcal{E}$ on epätyhjä leikkaus. Tämä kuitenkin tarkoittaa sitä, että joukko A leikkaa hypertasoa H, koska

$$A \cap H = (C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1}) \cap H = (C_1 \cap H) \cap (C_2 \cap H) \cap \cdots \cap (C_{k-1} \cap H) \neq \emptyset.$$

Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että hypertason H piti tarkasti erotella joukot A ja C_k. Siispä väite on tosi.

$\square$

Tämän esityksen perusteella Hellyn lause pätee äärellisille kokoelmille kompakteja konvekseja joukkoja ja muut versiot palautuvat tähän tapaukseen. Käytännön kannalta voi kuitenkin olla järkevämpää jakaa lause kahdeksi erilliseksi lauseeksi.

SEURAUS 2.7 (Hellyn lause äärellisille kokoelmille). *Olkoon* $F = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ *äärellinen* $\mathbb{R}^n$*:n konvekseista osajoukoista muodostuva kokoelma. Jos kaikissa kokoelman* F *jäsenistä muodostuvissa* $(n+1)$*-kombinaatioissa on yhteinen piste, niin kaikilla* F*:n jäsenillä on yhteinen piste.*

SEURAUS 2.8 (Hellyn lause kompakteille konvekseille joukoille). *Olkoon* F *kokoelma, joka koostuu* $\mathbb{R}^n$*:n kompakteista konvekseista osajoukoista. Jos kaikissa kokoelman* F *jäsenistä muodostuvissa* $(n+1)$*-kombinaatioissa on yhteinen piste, niin kaikilla* F*:n jäsenillä on yhteinen piste.*

Molemmat lauseet käsittelevät konvekseista joukoista koostuvia kokoelmia. Lauseista ensimmäinen ei rajoita millään joukkojen avoimuutta tai rajoittuneisuutta, mutta vaatii sen, että kokoelma koostuu äärellisestä määrästä joukkoja. Jälkimmäinen puolestaan ei rajoita joukkojen määrää, mutta vaatii sen, että joukot ovat sekä suljettuja että rajoitettuja.

Kun $n = 1$, niin $\mathbb{R}^n$ on pelkkä reaaliakseli. Reaaliakselilla kompaktit konveksit osajoukot ovat suljettuja välejä, joten Hellyn lause saa seuraavanlaisen muodon:

SEURAUS 2.9 (Hellyn lause reaaliakselilla). *Olkoon* F *reaaliakselin suljetuista väleistä koostuva kokoelma. Jos jokaiselle väliparilla on yhteinen piste, niin kaikilla väleillä on yhteinen piste.*

Vastaavasti, kun $n = 2$, saa Hellyn lause muodon:

SEURAUS 2.10 (Hellyn lause tasossa). *Olkoon* F *kokoelma, joka koostuu tason konvekseista osajoukoista. Oletetaan, että joko* F *on äärellinen tai kaikki* F*:n jäsenet ovat kompakteja. Jos jokaisella* F*:n jäsenkolmikolla on yhteinen piste, niin kaikilla jäsenillä on yhteinen piste.*

LUKU 3

Hellyn, Radonin ja Carathéodoryn lauseiden yhtäpitävyys

3.1. Radonin ja Carathéodoryn lauseet

Seuraavat kaksi lausetta liitetään usein Hellyn lauseeseen ja onkin mahdollista osoittaa, että kaikki kolme lausetta ovat loogisesti yhtäpitäviä. Esimerkiksi Danzerin, Grünbaumin ja Kleen teoksessa *Helly's Theorem and its Relatives* (1963) [**1**] osoitetaan, että Radonin lauseesta seuraa Carathéodoryn lause. Lauseiden todistukset sivuutetaan tässä vaiheessa, sillä tässä luvussa näytetään näiden kolmen lauseen yhtäpitävyys.

Edellisen luvun alussa mainittiin, että Hellyn lauseen todisti ensimmäiseksi Johann Radon. Todistus oli lyhyt ja tyylikäs. Siinä käytettiin avuksi lemmaa, joka nimettiin myöhemmin Radonin lauseeksi. Radon itse ei koskaan palannut lemmansa pariin, eikä hän pitänyt tulosta lauseeksi nimeämisen arvoisena. Siitä huolimatta Radonin lause osoittautui hyödylliseksi kombinatoriaalisessa konveksissa teoriassa ja sille on keksitty monia sovelluksia, erityisesti eri todistuksissa.

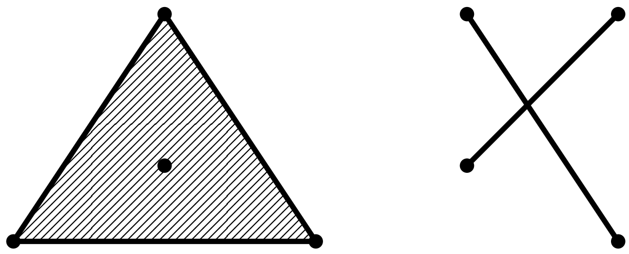
Lause 3.1 (Radonin lause). *Olkoon S on mikä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajaoukko, joka sisältää ainakin $n+2$ alkiota. Tällöin S voidaan hajottaa kahdeksi erilliseksi osajoukoksi, joiden konveksit verhot leikkaavat toisiaan.*

Carathéodoryn lause on tärkeä konveksissa geometriassa käytettäviin dimensioihin liittyvä tulos. Lauseen julkaisi Constantin Carathédory vuonna 1907, mutta jälleen yksinkertaisemmin lause voidaan todistaa Radonin lauseen avulla. Carathéodoryn lauseeseen perustuvia konveksin geometrian sovelluksia on lukuisia, mutta usein niissä ei ole suoraan mainittu Carathédoryn lauseen osallisuutta. Yksi hyödyllisimmistä ja käytetyimmistä lauseen seurauksista on se, että kompaktin joukon konveksi verho on kompakti. Carathéodoryn lausetta voidaan myös monesti käyttää Hellyn lauseen sijaan, jotta geometrinen tilanne saadaan yksinkertaistettua.

Lause 3.2 (Carathéodoryn lause). *Jos $S \in \mathbb{R}^n$, niin jokainen konveksin verhon $\mathrm{conv}(S)$ piste on konveksi kombinaatio $(n+1)$:stä tai vähemmästä määrästä joukon S pisteitä.*

Esimerkki 3.3. Olkoon joukko $X \subset \mathbb{R}^2$. Carathéodoryn lauseen nojalla jokainen konveksin verhon $\mathrm{conv}(X)$ piste täytyy olla joukon X piste, kahden X:n pisteen välisen janan sisäpiste tai sisäpiste kolmiolle, jonka kärkispisteet ovat X:n pisteitä.

Jos X sisältää neljä pistettä, niin Radonin lauseesta seuraa, että joko yksi pisteistä sisältyy kolmioon, jonka kärkipisteitä ovat muut X:n pisteet tai kahden pisteen välinen jana leikkaa jäljelle jääneiden kahden pisteen välistä janaa. Tilannetta on hahmoteltu kuvassa 3.1.



Kuva 3.1. Radonin lause tasossa.

Näitä kolmea lausetta - Erityisesti Hellyn lausetta - on tutkittu, sovellettu ja yleistetty monen matemaatikon toimesta. Monet tämän aihealueen tuloksista (todistuksia lukuunottamatta) ovat geometrisesti niin helposti ymmärrettäviä, että ne pystyy käsittämään, vaikkei olisikaan opiskellut matematiikkaa pitkälle. Lisäksi monet todistuksista ovat elementaarisia siten, että ne pitävät paikkansa suurimmassa osassa kombinatoriikka-analyysia, mitä ei ole vielä laajalti formalisoitu. Joillakin tuloksista on merkittäviä sovelluksia muissa matematiikan osa-alueissa ja aiheesta löytyy myös kiinnostavia ratkaisemattomia ongelmia, jotka voi pintapuolin ymmärtää, vaikkei olisikaan kokenut matemaatikko. Hellyn lauseella ja sen kaltaisilla lauseilla on useita alkeisnumeroteorian kanssa samanlaisia puolia, mikä ei vaadi merkittävää teknistä osaamista. Siten Hellyn lause on loistava johdanto konveksisuuden käsitteeseen.

Kaikissa lukemissani konveksia geometriaa käsittelevissä teoksissa on mainittu, että Hellyn, Radonin ja Carathéodoryn lauseiden yhtäpitävyys tiedetään yleisesti. Missään kirjassa ei kuitenkaan ole osoitettu kaikkien lauseiden yhtäpitävyyttä. Tämä asia olikin tiedostettu Peter M. Gruberin kirjassa *Convex and Discrete Geometry* (2007) [**4**], jonka mukaan kirjan kirjoittajat eivät kyenneet löytämään täyttä todistusta mistään kirjallisuuslähteestä. Osatodistuksia puolestaan löytyy satunnaisesti eri teoksista. Esimerkiksi edellä mainitussa kirjassa on näytetty, miten Radonin lauseesta seuraa Carathéodoryn lause ja edelleen, miten Carathéodoryn lauseesta seuraa Hellyn lause.

Edeltävän luvun alussa on todistettu Hellyn lause. Käytän siis Hellyn lausetta lähtökohtana ja osoitan, että siitä seuraa Carathéodoryn lause ja edelleen Carathéodoryn lauseesta seuraa Radonin lause. Lopuksi vielä näytetään, että Radonin lauseesta seuraa seuraa Hellyn lause, jolloin on saatu käytyä täysi kierros läpi ja näytetty, että kaikki lauseet ovat yhtäpitäviä.

3.2. Hellyn lauseesta seuraa Carathéodoryn lause

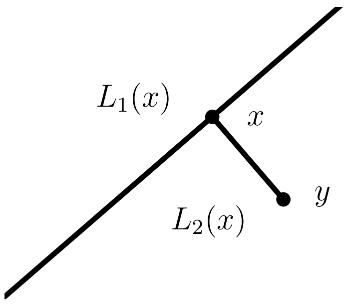
Hellyn lauseen ja Carathéodoryn lauseiden yhtäpitävyys on osoitettu ainakin H. G. Egglestonin tekstissä *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics - Convexity* (1958) [**3**]. Tätä todistusta apuna käyttäen Adam Robinson on näyttänyt työssään *Helly's Theorem and its Equivalences via Convex Analysis* (2014) [**9**] selkeämmin sen, miten Hellyn lauseesta seuraa Carathéodoryn lause. Myötäilen tässä kappaleessa Robinsonin muokkaamaa todistusta.

Lause 3.4. *Hellyn lauseesta seuraa Carathéodoryn lause.*

Todistus. Olkoot $S \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä konveksi joukko ja $y \in \operatorname{conv}(S)$. Halutaan näyttää, että y on konveksi kombinaatio $(n+1)$:stä tai vähemmästä määrästä joukon$S$ pisteitä. Jos $y \in S$, niin selvästi se on itsensä konveksi kombinaatio, jolloin johtopäätös on triviaali. Oletetaan, että $y \notin S$. Asetetaan jokaiselle pisteelle $x \in S$ suljetut puoliavaruudet $L_1(x)$ ja $L_2(x)$ siten, että niitä rajoittava hypertaso kulkee pisteen x kautta ja on kohtisuorassa pisteiden x ja y kautta kulkevaa suoraa vastaan ja puoliavaruus $L_2(x)$ sisältää pisteen y, kuten kuvassa 3.2. Siis

$$L_1(x) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle x-y, w-x\rangle \geq 0\}.$$

$$L_2(x) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle x-y, w-x\rangle \leq 0\}.$$



Kuva 3.2. Puoliavaruudet $L_1(x)$ ja $L_2(x)$.

Näytetään, että

$$\bigcap_{x\in S} L_1(x) = \emptyset.$$

Oletetaan, että tämä joukko on epätyhjä. Tällöin on olemassa piste $z \in \bigcap_{x\in S} L_1(x)$. Siis

$$\langle x-y, z-x\rangle \geq 0 \quad \text{kaikilla} \quad x \in S.$$

Tästä seuraa, että

$$\langle z-y, y-x\rangle = \langle z-x+x-y, y-x\rangle = \langle z-x, y-x\rangle + \langle x-y, y-x\rangle = \langle z-x, y-x\rangle - \|x-y\|^2 < 0$$

kaikilla $x \in S$. Huomataan, että $\|x-y\|^2 > 0$, sillä $y \notin S$. Koska $y \in \operatorname{conv}(S)$, niin on olemassa $x_i \in S$ ja $\lambda_i \geq 0$ kaikilla $i = 1, ..., m$ siten, että

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Tällöin

$$0 = \langle z-y, y-y\rangle = \langle z-y, y - \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle z-y, y-x_i\rangle < 0.$$

Näin päästiin ristiriitaan ja siten

$$\bigcap_{x \in S} L_1(x) = \emptyset.$$

Koska $L_1(x)$ on epätyhjä suljettu konveksi joukko kaikilla x, niin Hellyn lauseen nojalla on olemassa alkiot $x_1, ..., x_{n+1} \in S$ siten, että

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} L_1(x_i) = \emptyset.$$

Näytetään, että tästä seuraa $y \in \text{conv}\{x_1, ..., x_{n+1}\}$. Oletetaan, että näin ei ole, eli on olemassa alkiot $a, b \in \mathbb{R}^n$ siten, että

$$\langle a, y \rangle > b \quad \text{ja} \quad \langle a, x_i \rangle \leq b \quad \text{kaikilla} \quad i = 1, ..., n+1.$$

Määritellään puolisuora

$$l = \{y - ta : t \geq 0\}.$$

Tällöin

$$\langle x_i - y, y - ta - x_i \rangle = \langle x_i - y, y - x_i \rangle - t\langle a, x_i - y \rangle.$$

Siispä voidaan löytää arvo t_0 siten, että lauseke on positiivinen kaikilla $t > t_0$ ja kaikilla i, mutta tästä seuraa $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_1(x_i) \neq \emptyset$. Jälleen päästiin ristiriitaan, joten $y \in \text{conv}\{x_1, ..., x_{n+1}\}$.

□

3.3. Carathéodoryn lauseesta seuraa Radonin lause

En onnistunut löytämään mistään kirjallissuuslähteestä todistusta sille, miten Hellyn lauseen tai Carathéodoryn lauseen avulla saadaan osoitettua Radonin lause. Asia ei sinällään ole yllättävä, sillä näistä kolmesta lauseesta Radonin lause on alunperin todistettu ensimmäisenä ja sen avulla on näytetty Carathédoryn ja Hellyn lauseet. Adam Robinson on kuitenkin työssään näyttänyt, miten Carathéodryn lauseen avulla saadaan todistettua Radonin lause.

Lause 3.5. *Carathéodoryn lauseesta seuraa Radonin lause.*

Todistus. Olkoon joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ määritelty siten, että $S = \{s_1, ..., s_m\}$, missä $m \geq n+2$. Tällöin

$$\frac{s_1 + \cdots + s_m}{m} \in \text{conv}(\{s_1, ..., s_m\}).$$

Halutaan näyttää, että S voidaan hajottaa kahdeksi erilliseksi osajoukoksi, joiden konveksit verhot leikkaavat toisiaan. Carathédoryn lauseen nojalla saadaan esitys

$$\frac{s_1 + \cdots + s_m}{m} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i s_i,$$

missä $\lambda_i \geq 0$ ja $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Tästä seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i s_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i,$$

missä $\beta_i = \frac{1}{m}; i = 1, ..., m; \lambda_i \geq 0; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$; ja $\lambda_i = 0$ kaikilla $i = n+2, ..., m$. Siis

$$\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \lambda_i) s_i = 0.$$

Kirjoitetaan yläpuolen lauseke uudestaan muodossa

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i s_i = 0,$$

jolloin $\gamma_i = \beta_i - \lambda_i, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 0$, missä kaikki lausekkeet γ_i eivät ole nollia. Tällöin

$$\sum_{i \in I} \gamma_i x_i + \sum_{j \in J} \gamma_j x_j = 0,$$

missä $I = \{i \in \{1, ..., m\} : \gamma_i > 0\}$ ja $J = \{j \in \{1, ..., m\} : \gamma_j \leq 0\}$. Huomataan, että sekä I että J ovat epätyhjiä. Asetetaan $\gamma = \sum_{i \in I} \gamma_i, S_1 = \{s_i : i \in I\}$ ja $S_2 = \{s_j : j \in J\}$. Tällöin $\gamma = -\sum_{j \in J} \gamma_j$ ja

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{i \in I} \gamma_i s_i = -\frac{1}{\gamma} \sum_{j \in J} \gamma_j s_j \in \operatorname{conv}(S_1) \cap \operatorname{conv}(S_2).$$

Tästä nähdään, että joukot S_1 ja S_2 toteuttavat Radonin lauseen ehdot. □

3.4. Radonin lauseesta seuraa Hellyn lause

Lyhyt ja ytimekäs todistus tälle suunnalle löytyy esimerkiksi Horst Martinin ym. kirjasta *Bodies of Constant Width - An Introduction to Convex Geometry with Applications* (2019) [**6**].

LAUSE 3.6. *Radonin lauseesta seuraa Hellyn lause.*

TODISTUS. Hellyn lause koskettaa kahden tyyppisiä perheitä; sellaisia, jotka ovat äärellisiä ja sellaisia, joiden jäsenet ovat kompakteja. Hellyn lauseen todistuksessa kuitenkin perusteltiin, että Hellyn lause riittää osoittaa äärelliselle kokoelmalle kompakteja joukkoja ja muut tapaukset yleistyvät siihen. Todistetaan lause siis äärelliselle perheelle F, johon kuuluu m alkiota, tekemällä induktio alkoiden m suhteen.

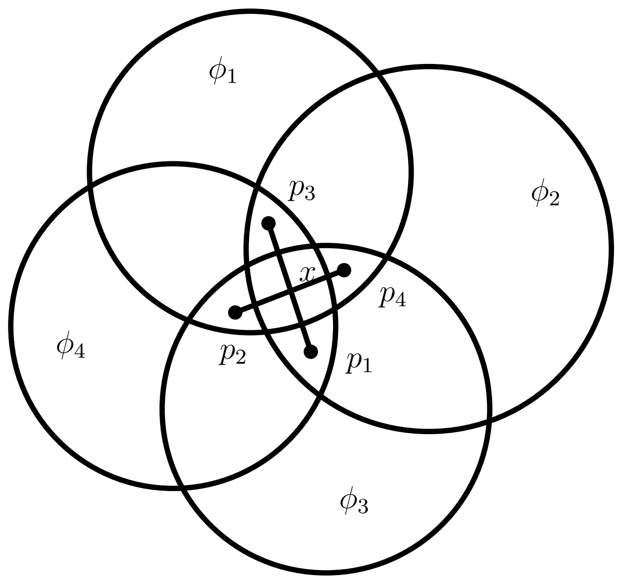
Huomataan ensin, että lause on selvästi tosi perheelle, joka koostuu $n+1$ joukosta. Oletetaan, että lause on tosi perheelle joka koostuu $j-1$ konveksista joukosta, missä $j \geq n+2$. Käsitellään perhettä F joka koostuu j konveksista joukosta, joista millä tahansa $n+1$ joukolla on yhteinen piste. Induktio-oletuksen nojalla jokaisella $\phi_i \in F, i = I \in \{1, ..., m\}$, on olemassa piste p_i joka on yhteinen joukon $F \setminus \{\phi_i\}$ kaikille jäsenille. Radonin lauseen nojalla joukko I voidaan osittaa kahdeksi osajoukoksi$U$ ja V siten, että on olemassa piste

$$x \in \operatorname{conv}(\{p_i : i \in U\}) \cap \operatorname{conv}(\{p_j : j \in V\}).$$

Koska kaikki perheen F jäsenet konvekseja joukkoja, niin piste x on yhteinen kaikille F:n jäsenille. Tilanne on hahmoteltu kuvaan 3.3 Tämä osoittaa äärellisen version Hellyn lauseesta ja siten koko lauseen.

□

Näin on saatu näytettyä, että Hellyn, Carathéodoryn ja Radonin lauseet ovat yhtäpitäviä.



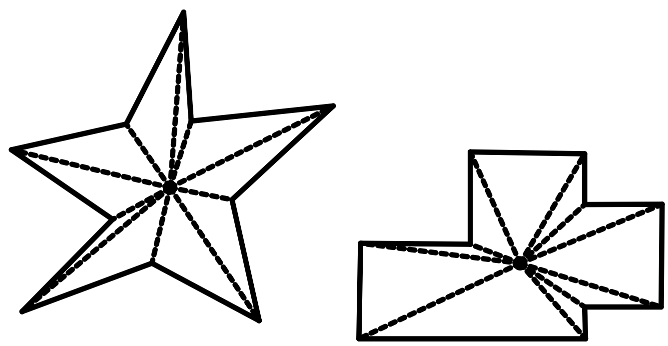
Kuva 3.3. Piste p_1 on yhteinen kaikille jäsenille $F \setminus \{\phi_1\}$, piste p_2 on yhteinen kaikille jäsenille $F \setminus \{\phi_2\}$ jne. Piste x on yhteinen kaikille F:n jäsenille.

LUKU 4

Hellyn lauseen sovelluksia

Tässä luvussa esitellään muutama Hellyn lauseen keskeinen sovellus. Sovelluksista tunnetuin on taidegallerialause, josta on tehty monia eri variaatioita. Luvussa todistetaan Mark Krasnoselskyn vuonna 1946 kehittämä versio, jota ei vielä tuolloin oltu nimetty taidegallerialauseeksi. Nimitys tulee tiettävästi siitä, että Victor Klee esitti vuonna 1973 ongelman, jossa piti määrittää vähintään tarvittavien vartijoiden määrä valvomaan n-seinäistä taidegallerian huonetta. Hän keksi ongelman toisen matemaatikon, Vasek Chvátalin, pyynnöstä keksiä jokin kiinnostava geometrian ongelma. Vastaus tähän ongelmaan on se, että n-sivuisen monikulmion valvomiseen tarvitaan korkeintaan $\lfloor n/3 \rfloor$ vartijaa. Tämä tulos seuraa suoraan taidegallerialauseesta. Ennen kuin päästään varsinaiseen taidegallerialauseeseen käydään läpi, mitä tarkoitetaan tähtimäisellä joukolla.

Sanotaan, että $S \subset \mathbb{R}^n$ on tähtimäinen, jos on olemassa piste $p \in S$ siten, että $[p, x] \subset S$ kaikilla $x \in S$. Toisin sanoen jokaisen joukon S pisteen x ja pisteen p välisen janan tulee olla kokonaan joukon sisäpuolella.



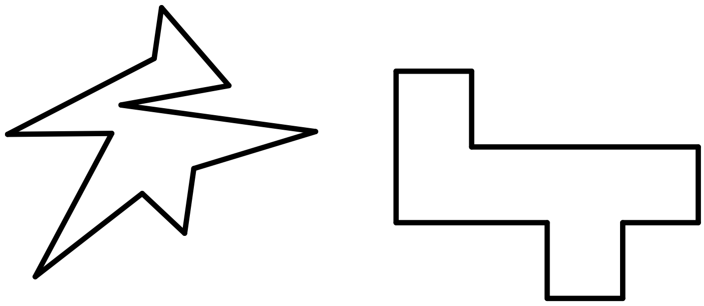
KUVA 4.1. Esimerkkejä tähtimäisistä joukoista tasossa $\mathbb{R}^2$.

Selvästi voidaan havaita, että kaikki konveksit joukot ovat tähtimäisiä, mutta kaikki tähtimäiset joukot eivät ole konvekseja.

Tähtimäisen joukon käsite voidaan selittää myös näkyvyyden avulla. Olkoon $p \in S \subset \mathbb{R}^n$. Sanotaan, että piste $x \in S$ näkyy pisteestä p, jos jana $[p, x]$ sisältyy kokonaan joukkoon S. Tämän käsitteen avulla ilmaistuna joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ on tähtimäinen, jos ja vain jos jokainen joukon S piste näkyy pisteestä p.

4.1. Taidegallerialause

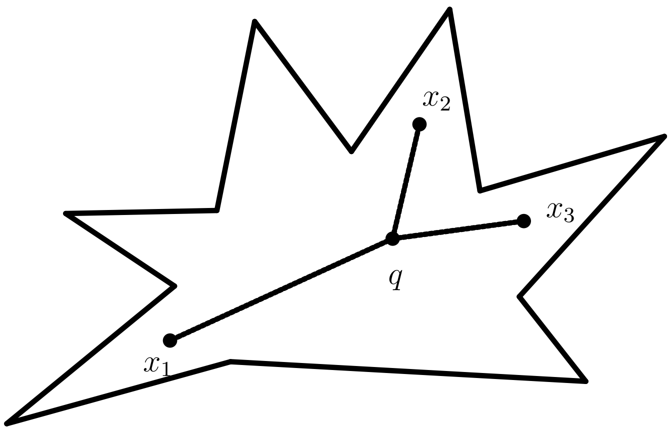
Määritellään ensin monikulmio tasossa $\mathbb{R}^2$.



KUVA 4.2. Esimerkkejä ei-tähtimäisistä joukoista tasossa $\mathbb{R}^2$.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Monikulmio on kokoelma kärkipisteitä $v_1, v_2, ..., v_n$ ja sivuja $[v_1, v_2], [v_2, v_3], ..., [v_{n-1}, v_n], [v_n, v_1]$ siten, että millään parilla ei-peräkkäisiä sivuja ei ole yhteistä pistettä.

LAUSE 4.2 (Taidegallerialause). *Olkoon P monikulmio tasossa $\mathbb{R}^2$. Jos aina, kun monikulmiosta P valitaan kolme pistettä, löydetään piste $q \in P$, josta kaikki kolme pistettä voidaan nähdä, niin P on tähtimäinen.*

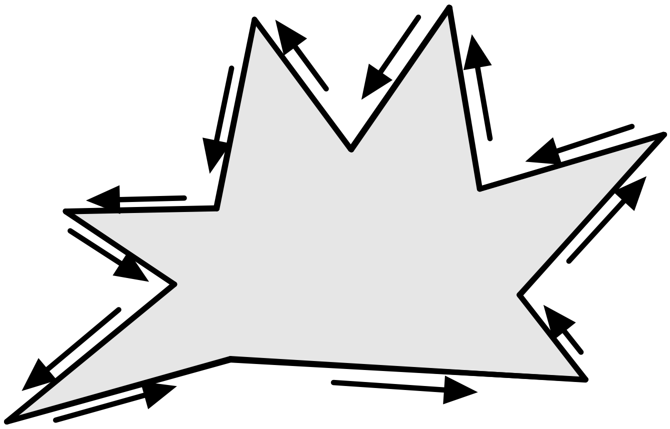


KUVA 4.3. x_1, x_2 ja x_3 näkyvät pisteestä q.

Lausetta sanotaan taidegallerialauseeksi, koska se voidaan muotoilla seuraavalla tavalla:

Jos taidegalleriassa jokaiselle kolmen maalauksen joukolle löytyy sellainen paikka, josta kaikki kolme pystyy näkemään kerralla (oletetaan, että näkökenttä on 360°), niin tällöin galleriasta täytyy olla sellainen paikka, josta kaikki taulut pystyy näkemään kerralla.

TODISTUS. Huomataan, että lause on totta, jos ja vain jos kaikki monikulmion P reunapisteet voidaan nähdä jostain yhteisestä pisteestä p. Annetaan monikulmion särmille suunnat siten, että kun särmää kävellään annettuun suuntaan, niin monikulmion sisäpuoli jää särmän vasemmalle puolelle. Oletuksen nojalla mitkään monikulmion särmistä eivät risteä, joten tällainen kävely on hyvin määritelty.



Kuva 4.4. Kulkusuunta siten, että sisäpuoli jää vasemmalle.

Jokainen särmä sisältyy suoraan ja särmälle annettu suunta määrää suoran suunnan. Kaikkia monikulmion P särmiä e_r kohtaan on olemassa suljettu puoliavaruus suunnatun suoran vasemmalla puolella. Merkitään näitä puoliavaruuksia H_r. Havaitaan, että jokainen monikulmion ulkopuolinen piste on ainakin yhden annetun puoliavaruuden ulkopuolella. Jokainen H_r on konveksi joukko. Näitä joukkoja on äärellinen määrä, koska monikulmion särmiä on äärellinen määrä.

Väitetään, että jokaisella kolmen konveksin joukon H_r kokoelmalla on ainakin yksi yhteinen piste. Näytetään tämä tutkimalla kolmea mielivaltaista suljettua puoliavaruutta H_i, H_j ja H_k. Valitaan pisteet x_i, x_j ja x_k vastaavilta särmiltä e_i, e_j ja e_k. Oletuksen nojalla on olemassa piste $p \in P$, josta nähdään kaikki pisteet x_i, x_j ja x_k. Tästä seuraa, että

$$[p, x_i] \in H_i, \quad [p, x_j] \in H_j \quad \text{ja} \quad [p, x_k] \in H_k.$$

Siispä pisteen p täytyy kuulua puoliavaruuksien leikkaukseen $H_i \cap H_j \cap H_k$, mikä todistaa väitteen.

Siten joukot H_r toteuttavat seuraavat ehdot: ne ovat tason $\mathbb{R}^2$ konvekseja osajoukkoja, niitä on äärellinen määrä ja jokaisella kolmen joukon kokoelmalla on yhteinen piste. Hellyn lauseen nojalla on olemassa niille kaikille yhteinen piste q. Jäljelle jää näyttää se, että monikulmio P on tähtimäinen.

Aluksi todetaan, että q on monikulmion P piste. Jos se ei olisi, niin sen täytyisi sijaita särmän määräämään suunnatun suoran oikealla puolella. Tämä taas tarkoittaisi sitä, että q:n pitäisi olla vähintään yhden puoliavaruuden H_r ulkopuolella, mikä on ristiriidassa pisteen q konstruktion kanssa.

Sitten näytetään, että monikulmion P reunapiste nähdään pisteestä q. Jos tämä ei pitäisi paikkaansa, niin pisteen q ja reunapisteen välinen jana kulkisi ainakin osittain monikulmion P ulkopuolella. Tämän seurauksena pisteen q pitäisi jälleen olla jonkin puoliavaruuden H_r ulkopuolella, mistä seuraa sama ristiriita, kuin edellisessä kohdassa. □

4.2. Kirchbergerin lause ja lampaiden separointi

Toinen Hellyn lauseen keskeinen sovellus on Kirchbergerin lause. Se antaa uuden keinon tutkia tarkasti eroteltuja joukkoja. Lauseen löysi ensimmäisen kerran Paul Kirchberger vuonna 1902 ja sen todistus oli melkein 24 sivua pitkä. Seuraavan lyhyen todistuksen keksivät Hans Rademacher ja Isaac Schoenberg vuonna 1950 käyttäen hyödyksi Hellyn lausetta. Tämä todistus on loistava esimerkki siitä, miten Hellyn lauseen avulla saadaan yksinkertaistettua monimutkaisempia konveksin geometrian päättelyitä.

Lause 4.3 (Kirchbergerin lause). *Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ äärellisiä joukkoja siten, että $A \cup B$ sisältää vähintään $n+2$ pistettä. Jos jokaiselle joukolle $C \subset A \cup B$, joka sisältää $n+2$ pistettä, voidaan joukot $A \cap C$ ja $B \cap C$ erotella tarkasti, niin joukot A ja B voidaan erotella tarkasti.*

Todistus. Olkoot $\tilde{a} = (a_1, a_2, ..., a_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ja $\tilde{b} = (b_1, b_2, ..., b_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ jokaisella $a \in A$ ja $b \in B$. Olkoot lisäksi H_a ja H_b avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ avoimia puoliavaruuksia siten, että

$$H_a = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \tilde{a}, x \rangle < 0\} \qquad \text{ja} \qquad H_b = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \tilde{b}, x \rangle > 0\}.$$

Olkoon F näiden avoimien puoliavaruuksien H_a ja H_b perhe.

Olkoon nyt C joukko, joka koostuu $(n+2)$:sta yhdisteen $A \cup B$ pisteestä. Koska leikkaukset $A \cap C$ ja $B \cap C$ voidaan tarkasti erotella, niin on olemassa $\tilde{c} = (c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ siten, että

$$\langle \tilde{c}, \tilde{a} \rangle < 0 \qquad \text{ja} \qquad \langle \tilde{c}, \tilde{b} \rangle > 0$$

kaikilla $a \in A \cap C$ ja $b \in B \cap C$. Siispä $\tilde{c} \in H_a$, kun $a \in A \cap C$ ja $\tilde{c} \in H_b$, kun $b \in B \cap C$.

Joukko F on avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ konveksien osajoukkojen äärellinen perhe, joka sisältää ainakin $n+2$ jäsentä. Lisäksi jokaisella perheen F $n+2$ jäsenellä on epätyhjä leikkaus. Hellyn lauseen nojalla avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$, on olemassa piste $\tilde{d} = (d_1, d_2, ..., d_n, d_{n+1})$, joka kuuluu kaikkiin perheen F jäseniin. Tällöin

$$\langle \tilde{d}, \tilde{a} \rangle < 0$$

kaikilla $a \in A$, kun taas

$$\langle \tilde{d}, \tilde{b} \rangle > 0$$

kaikilla $b \in B$.

Siispä avaruuden $\mathbb{R}^n$ hypertaso

$$H_d = \{x \in \mathbb{R}^n : d_1 x_1 + d_2 x_2 + \cdots + d_n x_n + d_{n+1} = 0\}$$

tarkasti erottelee joukot A ja B. □

Kirchbergerin lausetta voidaan soveltaa seuraavassa esimerkissä lampaiden separoinnissa.

Esimerkki 4.4. Jos pellolla on paikoillaan pysyviä valkoisia ja mustia lampaita, niin mikä ehto takaa sen, että suoralla aidalla voidaan erotella valkoiset ja mustat lampaat omille puolilleen?

Kirchbergerin lauseen avulla vastaus on helppo. Koska ollaan tasossa, niin $n = 2$. Merkitään valkoisten lampaiden joukkoa V:llä ja mustien lampaiden joukkoa M:llä.

Olkoon joukko $C \subset V \cup M$, joka sisältää mitkä tahansa $n+2=4$ lammasta. Jos kaikkia joukkoja C kohtaan joukot $V \cap C$ ja $M \cap C$ voidaan erotella tarkasti, niin joukot V ja M voidaan erotella tarkasti. Toisin sanoen, jos kaikista neljän lampaan otoksista voidaan erotella valkoiset ja mustat omille puolilleen, niin silloin kaikki lampaat voidaan erotella omille puolilleen.

4.3. Jungin lause

Tässä kappaleessa käytävä Jungin lause sai alkunsa seuraavanlaisesta ongelmasta. Oletetaan, että tason osajoukon halkaisija on d. Halutaan määrittää pienin mahdollinen halkaisija ympyräkiekolla, joka sisältää koko annetun joukon.

Jos ongelmaa ei mieti kovin pitkälle, niin voisi kuvitella, että yhtä suuren halkaisijan omaava kiekko on oikea ratkaisu. Näin ei kuitenkaan ole. Esimerkiksi tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 1, ei sisälly kokonaan ympyräkiekkoon, jonka halkaisija on 1. Esitetään oikea vastaus tähän ongelmaan lauseen muodossa.

Lause 4.5. *Jos tason osajoukon halkaisija on 1, niin se se sisältyy kokonaan suljettuun kiekkoon, jonka säde on* $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Esimerkki 4.6. Käydään läpi edellä mainittu tasasivuisen kolmion tapaus. Olkoon tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 1. Olkoon ympyräkiekko, jonka keskipiste O on kolmion painopisteessä ja säde r on sellainen, että kiekon reuna leikkaa kolmion kärkipisteitä. Tilanne on hahmoteltu kuvaan 4.5. Merkitään kolmion kärkeä muuttujalla A ja kolmion korkeusjanan ja sivun leikkauspistettä muuttujalla B, kuten kuvassa. Tarkastellaan muodostuvaa suorakulmaista kolmiota $\triangle ABO$. Tasasivuisen kolmion kärkikulma on $60°$, joten kärkikulman puolikkaana kulma $\measuredangle OAB$ on $30°$. Jana AB on puolet kolmion sivusta, joten sen pituus on $\frac{1}{2}$. Lasketaan janan AO pituus, joka on samalla ympyräkiekon säteen pituus. Suorakulmaisen kolmion trigonometrialla saadaan seuraava lauseke:

$$\cos 30° = \frac{|AB|}{|AO|} \iff \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AB|}{r}$$

Tästä saadaan ratkaistua ympyräkiekon säde r.

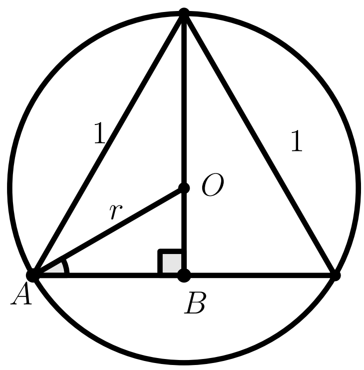
$$r = \frac{2|AB|}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Siispä ainakin tasasivuisen kolmion tapauksessa pienimmän kolmion sisältävän ympyräkiekon säde on tasan $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Jungin lause siirtää ongelman avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Lause 4.7 (Jungin lause). *Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko, jonka halkaisija on 1. Tällöin on olemassa pallo, jonka säde on $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$ siten, että pallo sisältää koko joukon T.*

Todistus. Todistetaan ensin tapaus, jossa T sisältää $n+1$ tai vähemmän pisteitä. Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että 0 on etsityn pallon keskipiste. Siis oletetaan, että $B(0,\sigma)$ on pienimmän säteinen pallo, joka sisältää joukon T. Olkoon $\phi \in \mathbb{R}^n$ kompakti konveksi joukko, jonka sisus on epätyhjä. Oletetaan, että $\phi \cap \partial B(0,\sigma) = \{x_1, ..., x_m\}$, missä ∂B on pallon reunajoukko ja $m \leq n+1$. Pallon



KUVA 4.5. Pienin mahdollinen ympyräkiekko, joka sisältää 1−säteisen tasasivuisen kolmion.

keskipisteen o täytyy kuulua joukon $\{x_1, ..., x_m\}$ konveksiin verhoon, sillä muutoin sädettä σ voitaisiin pienentää. Selvennetään vielä tätä todistuksen jälkeisessä lemmassa. Siispä

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0, \text{missä } \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1 \text{ ja } \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0.$$

Tällöin

$$1 - \lambda_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i \geq \sum_{i \neq k} \underbrace{\lambda_i |x_i - x_k|^2}_{\leq 1} = \sum_1^m \lambda_i \left(|x_i|^2 + |x_k|^2 - 2\langle x_i, x_k \rangle \right)$$

$$= 2\sigma^2 \underbrace{\sum_1^m \lambda_i}_{=1} - 2\langle \underbrace{\sum_1^m \lambda_i x_i}_{=0}, x_k \rangle = 2\sigma^2.$$

Siis jokaisella indeksillä k pätee $1 - \lambda_k \geq 2\sigma^2$. Toisin sanoen summaamalla kaikkien indeksien k yli saadaan seuraava epäyhtälö:

$$(1 - \lambda_1) + (1 - \lambda_2) + \cdots + (1 - \lambda_m) \geq \underbrace{2\sigma^2 + 2\sigma^2 + \cdots + 2\sigma^2}_{m \text{ kpl}}.$$

Siispä

$$\sum_1^m 1 - \sum_1^m \lambda_i \geq 2m\sigma^2$$

eli

$$m - 1 \geq 2m\sigma^2.$$

Tästä saadaan pallon B säteelle σ yläraja:

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{m-1}{2m}} \leq \sqrt{\frac{(n+1)-1}{2(n+1)}} = \sqrt{\frac{n}{2n+2}}.$$

Yleisessä tapauksessa ylemmän perusteella joukko T on avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja sillä on sellainen ominaisuus, että mitkä tahansa $n+1$ joukon T pistettä sisältyvät palloon, jonka säde on $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$. Olkoon F perhe, joka muodostuu kaikista $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$-säteisistä palloista, joiden keskipiste kuuluu joukkoon T. Näytetään, että perheellä

F on Hellyn lauseen vaatima äärellinen leikkausominaisuus. Jos otetaan $n+1$ perheeseen F kuuluvaa palloa keskipisteillä $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \in T$, niin tällöin on olemassa pallo, jonka säde on $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$ ja keskipiste on x siten, että se sisältää kaikki keskipisteet $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Tällöin pisteen x täytyy sijaita annettujen $n+1$:n pallon leikkausjoukossa, jolloin Hellyn lauseen nojalla piste x on yhteinen kaikille perheen F jäsenille. Siispä pallo, jonka säde on $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$ ja keskipiste on x, sisältää koko joukon T.

□

LEMMA 4.8. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja konveksi. Olkoon $B(0, \sigma)$ pienimmän säteinen pallo, joka sisältää joukon K. Pallon keskipisteen täytyy kuulua joukon K konveksiin verhoon, sillä muutoin sädettä σ voitaisiin pienentää.*

TODISTUS. Selvyyden vuoksi näytetään tilanteen paikkansapitävyys tasossa silloin, kun annetun pallon säde on 1. Siis määrätään joukko K siten, että se sisältyy kokonaan yksikkökiekkoon, jonka keskipiste on 0, mutta keskipiste ei kuulu joukon K konveksiin verhoon. Ympyrän keskipiste on suljettu joukko ja K on kompakti, joten ne voidaan tarkasti erotella hypertasolla H. Tilanne on hahmoteltu kuvaan 4.6.

Olkoon keskipisteen etäisyys hypertasosta δ. Merkitään hypertason ja etäisyysjanan leikkauspistettä muuttujalla A ja hypertason ja ympyräkiekon reunan leikkauspistettä muuttujalla X. Asetetaan konstruktio koordinaatistoon siten, että edellä mainittu etäisyysjana on $x-$akselin suuntainen. Näin muodostuva kolmio $\triangle OAX$ on suorakulmainen ja Pythagoraan lauseella saadaan janan AX pituudeksi $\sqrt{1-\delta^2}$. Selvästi joukko K sisältyy kokonaan hypertason H ja yksikkökiekon rajaamaan alueeseen. Siis vastaavasti K sisältyy kiekkoon, jonka keskipiste on A ja säde on $\sqrt{1-\delta^2}$. Osoitetaan, että samalla keskipisteellä sädettä voidaan pienentää ja joukko K sisältyy tähän pienempäänkin kiekkoon.

Otetaan yksikkökiekon kehältä mielivaltainen piste B siltä puolelta hypertasoa H, johon joukko K kuuluu. Kehäkulman avulla ilmaistuna pisteen B koordinaatit ovat $(\cos\theta, \sin\theta)$. Merkitään sitä $x-$akselin pistettä muuttujalla C, johon etäisyys yksikkökiekon keskipisteestä on $\cos\theta$. Näin saadaan suorakulmainen kolmio $\triangle ACB$, jossa sivun AC pituus on $\cos\theta - \delta$ ja sivun BC pituus on $\sin\theta$. Nyt Pythagoraan lauseella saadaan sivun AB pituudeksi $\sqrt{(\cos\theta-\delta)^2 + (\sin\theta)^2}$.

Näytetään, että jana AB on lyhyempi, kuin jana AX. Yhtäpitävää on osoittaa, että $|AB|^2 < |AX|^2$.

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (\cos\theta-\delta)^2 + (\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta - 2\delta\cos\theta + \delta^2 + \sin^2\theta \\ &= 1 + \delta^2 - 2\delta\cos\theta \end{aligned}$$

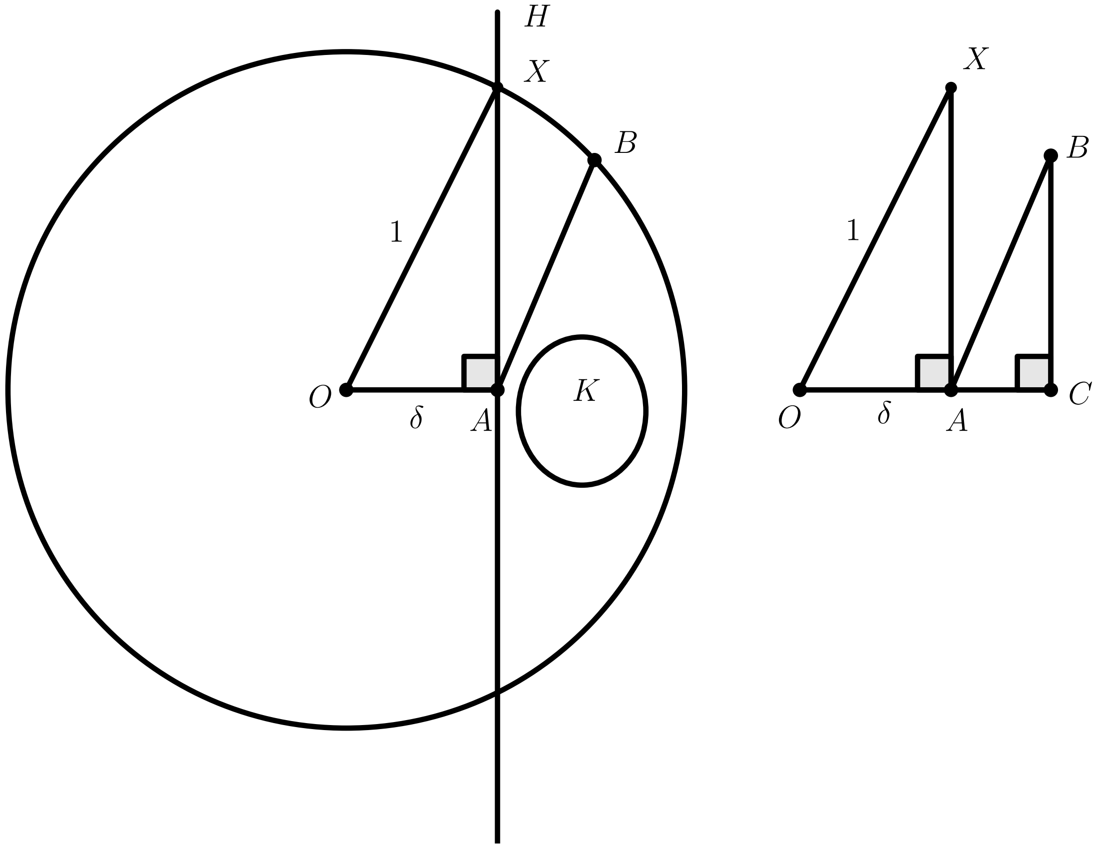
Osoitetaan, että

$$1 + \delta^2 - 2\delta\cos\theta < 1 - \delta^2.$$

Lauseketta muokkaamalla saadaan

$$2\delta(\delta - \cos\theta) < 0.$$

Tämä on tosi, sillä $\delta < \cos\theta$. Tämän havaitsee helposti esimerkiksi mallikuvasta, sillä $\delta = |OA| < |OC| = \cos\theta$. Siispä myös pienempisäteinen $A-$keskinen kiekko sisältää koko joukon K ja näin väite on tosi. □



KUVA 4.6. Jos pallon keskipiste ei kuulu konveksiin verhoon, niin sädettä voidaan pienentää.

Jungin lauseesta voidaan myös muodostaa skaalaamalla versio, jossa annetun joukon halkaisijan ei tarvitse olla 1.

LAUSE 4.9. *Olkoon $C \subset \mathbb{R}^n$, jonka halkaisija on d. Tällöin on olemassa pallo, jonka säde on $d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ siten, että pallo sisältää koko joukon C.*

Lauseen todistus löytyy kirjasta [**5**].

LUKU 5

Muita mielenkiintoisia sovelluksia

Tutkielman viimeisessä luvussa esittelen vielä pintapuolisesti mielestäni mielenkiintoisia Taidegallerialauseen kaltaisia sovelluksia ja ongelmia. taidegallerialauseeseen perustuvia pähkinöitä on kehitetty monia ja osa ongelmista on vielä avoimia. Tässä luvussa kaikki tapahtuu avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ellei toisin mainita. En enää tässä luvussa juurikaan todista mitään, mutta lisää sovelluksia ja muutamia todistuksia löytyy ainakin Joseph O'Rourken teoksesta *Art Gallery Theorems and Algorithms* (1987) [**7**].

5.1. Monikulmion kolmiointi

Monikulmioiden kolmiointi on varmasti monelle tuttu toimenpide peruskoulusta. Sitä, miksi monikulmion voi kolmioida, ei kuitenkaan varmaan ole peruskoulutasolla perusteltu. En myöskään muista, että asiaa olisi käsitelty millään käymistäni yliopistokursseista. Kolmiointi on avain monimutkaisempiin sovelluksiin, joten käydään sen todistus läpi.

LAUSE 5.1. *Monikulmio, jolla on n kulmaa voidaan osittaa $(n-2)$:ksi kolmioksi lisäämällä monikulmion sisäpuolelle $n-3$ lävistäjää.*

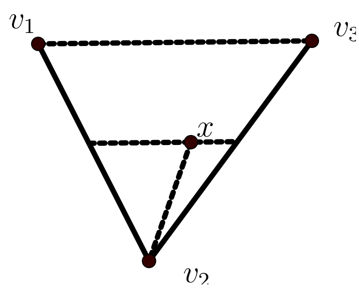
TODISTUS. Todistetaan lause induktiolla n:n suhteen. Väite on selvästi totta, kun $n = 3$. Olkoon P monikulmio, jolla on $n \geq 4$ kulmaa. Pidetään itsestäänselvänä, että jokaisella monikulmiolla on vähintään yksi konveksi kärki. Olkoon v_2 monikulmion P konveksin kärjen piste ja tutkitaan kolmea peräkkäistä kärkipistettä v_1, v_2 ja v_3. Monikulmion kärjen tilanne näkyy kuvassa 5.1. Etsitään P:n sisäpuolelta lävistäjä d.

Jos jana v_1v_3 on kokonaan monikulmion P sisäpuolella, niin valitaan lävistäjäksi $d = v_1v_3$. Muussa tapauksessa kärkikolmion $v_1v_2v_3$ täytyy sisältää ainakin yksi P:n kärjistä. Olkoon x edellä mainituista kärjistä se, joka on on lähimpänä kärkeä v_2, kun etäisyyttä mitataan kohtisuorassa janaa v_1v_3 vastaan. Tällöin lävistäjä on $d = v_2x$.

Kummassakin tapauksessa d jakaa monikulmion P kahdeksi pienemmäksi monikulmioksi P_1 ja P_2. Jos P_i:llä on n_i kärkeä, $i = 1, 2$, niin $n_1+n_2 = n+2$, koska halkaisijan d päätepisteet ovat yhteiset kummallekin monikulmiolle P_1 ja P_2. Selvästi $n_i \geq 3$, mistä seuraa, että $n_i < n$. (Seuraa aiemmasta yhtälöstä: $n = n_1+n_2-2 \geq 3+3-2 = 4 > n_i$.) Induktio-oletuksen nojalla monikulmio P_1 voidaan osittaa (n_1-2):ksi kolmioksi lisäämällä sen sisäpuolelle n_1-3 lävistäjää ja vastaavasti P_2 voidaan osittaa (n_2-2):ksi kolmioksi lisäämällä n_2-3 lävistäjää. Siispä monikulmio P voidaan jakaa $(n_1-2)+(n_2-2) = n-2$ määrään kolmioita $(n_1-3)+(n_2-3)+1 = n-3$ lävistäjällä, mukaanluettuna d.

□

MÄÄRITELMÄ 5.2. Monikulmio on ortogonaalinen, jos sen kaikki särmät ovat yhdensuuntaisia koordinaattiakseleiden kanssa.

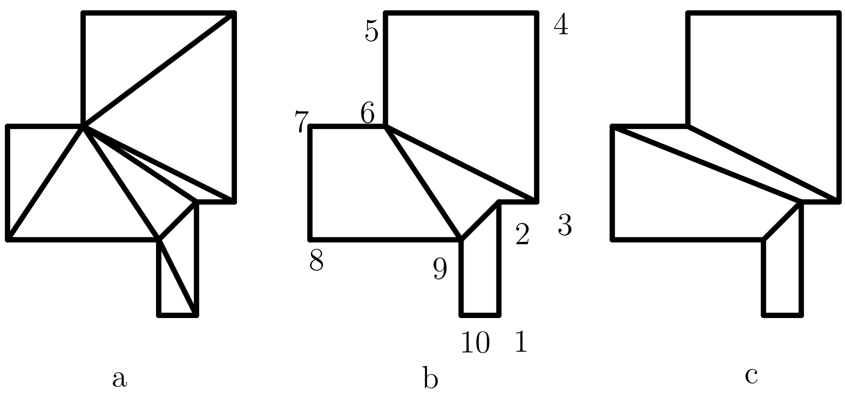


KUVA 5.1. Monikulmion P kärki v_2.

Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että akselit ovat pystysuorassa ja vaakasuorassa. Tällöin ortogonaalisen monikulmion sivut ovat aina joko pysty- tai vaakasuorassa ja kahden peräkkäisen sivun välinen kulma on aina joko 90° tai 270°.

ESIMERKKI 5.3. Kuvan 4.2 toinen monikulmio on ortogonaalinen.

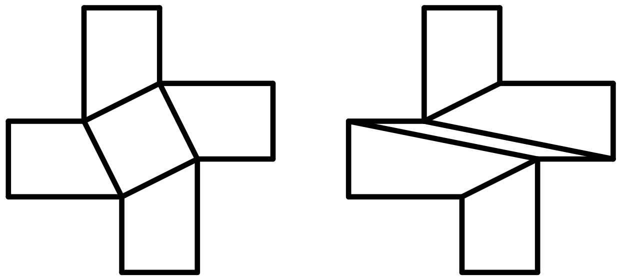
Monikulmio voidaan myös nelikulmioida. Se, että monikulmio voidaan osittaa kolmioiksi lisäämällä lävistäjiä on melkein itsestään selvää, eikä se vaadi mitään monimutkaista metodia. Monikulmion osittaminen nelikulmioiksi puolestaan vaatii huolellisuutta. Monikulmion kolmiointi ja näin saatujen vierekkäisten kolmioiden yhdistäminen nelikulmioiksi ei ole riittävä keino nelikulmioinnin toteuttamiseksi. Kuvan 5.2 (a) kohdassa ortogonaalinen monikulmio on kolmioitu. Siitä (b) kohdassa kolmioita yhdistämällä saatu nelikulmiointi ei ole konveksi, sillä nelikulmio (2, 3, 6, 9) ei ole konveksi eikä kolmioita yhdistelemällä edes ole mahdollista päästä yksikäsitteiseen konveksiin nelikulmiointiin (c). Kuvasta 5.3 kuitenkin nähdään, että ortogonaalisella monikulmiolla ei aina ole yksikäsitteistä konveksia nelikulmiointia.



KUVA 5.2. Kolmioiden yhdistäminen (a) ja (b) ei johda monikulmion yksikäsitteiseen nelikulmiointiin (c).

LAUSE 5.4. *Konveksi nelikulmiointi on mahdollinen mille tahansa ortogonaaliselle monikulmiolle.*

Lause on esitetty kirjassa [**7**] sivulla 45 ja sen todistamiseen vaaidttavia tuloksia on esitetty saman kappaleen alkuosassa.



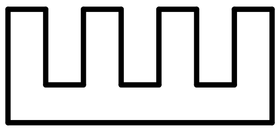
KUVA 5.3. Konveksi nelikulmiointi ei aina ole yksikäsitteinen.

5.2. Ortogonaalinen taidegallerialause

LAUSE 5.5. *Ortogonaalisen n-kulmion muotoista taidegalleriaa vartioimaan riittää aina $\lfloor n/4 \rfloor$ vartijaa, mutta joissain tapauksissa selvitään vähemmälläkin.*

Lauseen todistuksessa vartijoiden maksimimäärän tarpeellisuuden näyttämiseksi riittää kuvan 5.4 mukainen esimerkkitilanne. Kuvan 16-kulmion sisäpuolen vartioimiseen tarvitaan $16/4 = 4$ vartijaa, jotta jokainen sakara pystytään näkemään.

Sen näyttämisessä, että tämä määrä vartijoita riittää aina, käytetään hyödyksi nelikulmiointia ja niin kutsuttua nelivärilausetta (engl. The Four-Color Theorem). Nelivärilauseen mukaan mikä tahansa tasokuvio voidaan aina värittää neljällä värillä siten, että millään kahdella samanvärisellä alueella ei ole yhteistä rajaa.



KUVA 5.4. Tässä tapauksessa tarvitaan $\lfloor n/4 \rfloor$ vartijaa.

5.3. Liikkuvat vartijat

Uudenlaisiin tapauksiin päästään, kun sen sijaan että muutetaan monikulmion muotoa, annetaankin vartijoille kyky liikkua pitkin monikulmion sisäpuolella olevaa janaa pitkin.

MÄÄRITELMÄ 5.6. Olkoon s jana, joka on kokonaan monikulmion P sisäpuolella. Tällöin piste $x \in P$ näkyy janalta s, jos on piste $y \in s$ siten, että jana $[x, y]$ sisältyy monikulmioon P. Toisin sanoen vartija näkee pisteen x, jos se on näkyvillä mistä tahansa vartijan kulkureitin pisteestä.

On mahdollista näyttää taidegallerialausetta ja ortogonaalista taidegallerialausetta vastaavat tulokset liikkuvien vartijoiden tapauksessa. n-kulmaisen monikulmion vartioimiseen joskus tarvitaan ja aina riittää $\lfloor n/4 \rfloor$ liikkuvaa vartijaa. Ortogonaalisen n-kulmaisen monikulmion vartioimiseen puolestaan joskus tarvitaan ja aina riittää

$\lfloor (3n+4)/16 \rfloor$ liikkuvaa vartijaa. Kummankin tuloksen todistukset ovat todella pitkiä ja monimutkaisia. Ensimmäisen todistus vaadittavine lemmoineen ja kuvineen on 8 sivua pitkä ja jälkimmäisen 23 sivua. Mikäli asia kiinnostaa niin täydelliset todistukset löytyvät kirjasta [**7**] sivulta 81 alkaen.

5.4. Ulkopuolen näkyvyys

Alkuperäinen taidegalleriaongelma voidaan kääntää myös toisin päin. Linnoitusongelmassa kysytään, kuinka monta vartijaa tarvitaan linnan muureille tarvitaan, jotta nähdään joka puolelle linnoituksen ulkopuolelle. Vankilan piha -ongelma puolestaan yhdistää aiemmat ongelmat. Siinä kysytään, kuinka monta vartijaa tarvitaan vankilan muureille näkemään yhtä aikaa sekä vankilan piha, että vankilan ulkopuoli. Molemmissa ongelmissa oletetaan, että muurit ovat monikulmion särmiä. Linnoitusongelma oli pystytty jo ratkaisemaan, mutta vankilan piha -ongelma oli vielä avoin lähdeteoksen [**7**] julkaisuvuonna.

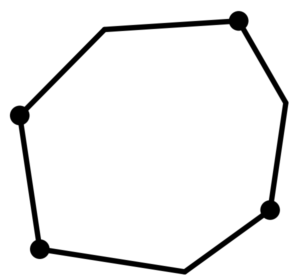
Linnoitusongelma on seuraavanlainen. Kuinka monta kärjissä seisovaa vartjiaa tarvitaan näkemään koko n-kulmaisen monikulmion ulkopuoli? Vartija, joka seisoo monikulmion kärkipisteessä y kykenee näkemään ulkopisteen z, jos jana $[y, z]$ ei leikkaa monikulmion sisäpuolta.

LAUSE 5.7. $\lceil n/2 \rceil$ *vartijaa vaaditaan joskus ja riittää aina näkemään n-kulmaisen monikulmion ulkopuolen.*

Kuvassa 5.5 on esitetty esimerkki, jossa ulkopuolen näkemiseen vaaditaan $\lceil n/2 \rceil$ vartijaa. Intuitivisesti voisi ajatella, että vartijat pystyisi aina sijoittelemaan joka toiseen monikulmion kulmaan ja homma toimisi. Näin ei kuitenkaan ole, kuten havaitaan Shermerin esimerkkiin perustuvassa kuvassa 5.6. Jos siinä sijoitellaan vartijat parittomiin kulmiin, niin vartijat eivät näe koko aluetta B. Jos taas vartijat sijoitellaan parillisiin kulmiin, niin vartijat eivät näe koko aluetta A.

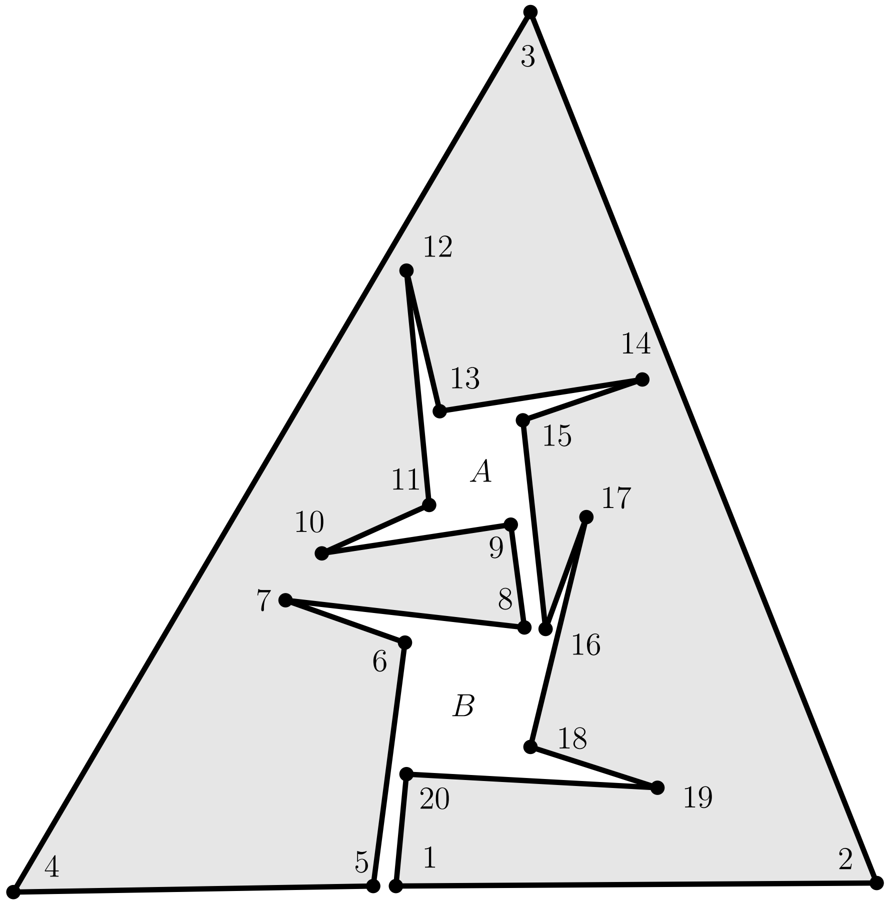
Lauseen todistuksessa kolmioidaan alue, joka on monikulmion konveksissa verhossa, mutta kuitenkin monikulmion ulkopuolella. Lisäksi todistuksessa sovelletaan tasoalueen kolmiväritystä (engl. three-coloring).

Tästäkin ongelmasta on muodostettu ortogonaalinen versio. Siinä vastaava tarvittavien vartijoiden määrä on $\lceil n/4 \rceil + 1$.



KUVA 5.5. Kuvan konveksi 7-kulmio vaatii $\lceil 7/2 \rceil = 4$ vartijaa ulkopuolen näkemiseen. Vartijat on sijoiteltu pisteiden kohdalle.

Vankilan piha -ongelmassa pohditaan kuinka monta kärjissä seisovaa vartijaa tarvitaan näkemään yhtä aikaa sekä n-kulmaisen monikulmion P ulkopuoli että sisäpuoli.



Kuva 5.6. Vartijoita ei voi aina sijoittaa joka toiseen kulmaan.

Vartija, joka seisoo monikulmion kärkipisteessä y kykenee näkemään ulkopisteen z, jos jana $[y, z]$ ei leikkaa monikulmion sisäpuolta. Vastaavasti sama vartija pystyy näkemään sisäpisteen x, jos jana $[x, y]$ ei leikkaa monikulmion ulkopuolta. Tätä ongelmaa rajoitetaan siten, että vartioiden tulee todellakin seisoa monikulmion kärkipisteissä. Ongelmasta tulee selvästi erilainen ja helpompi, jos vartijoiden sallitaan seistä kaukana monikulmion ulkopuolella. Ongelman monimutkaisuuteen ei kuitenkaan oleellisesti vaikuta se, sallitaanko vartijoiden seistä muissakin kohdissa monikulmion reunaa, joten tässä ongelmassa käsitellään vain kärjissä sijaitsevat vartijat.

Hankalin tapaus on se, jossa käsitellään konveksia n-kulmiota. Jälleen pystytään päättelemään, että joskus tarvitaan $\lceil n/2 \rceil$ vartijaa näkemään sekä monikulmion sisäpuoli että ulkopuoli. Vartijoiden riittävyydelle ei oltu ainakaan kirjan [**7**] julkaisuvuonna keksitty muuta, kuin seuraava heikko tulos.

LAUSE 5.8. *Olkoon monesti yhdistyneellä monikulmiolla (ks. kuva 5.7) n kärkeä, joista r on sisäänpäin kääntyneitä ja h kuuluvat monikulmion konveksiin verhoon. Tällöin*

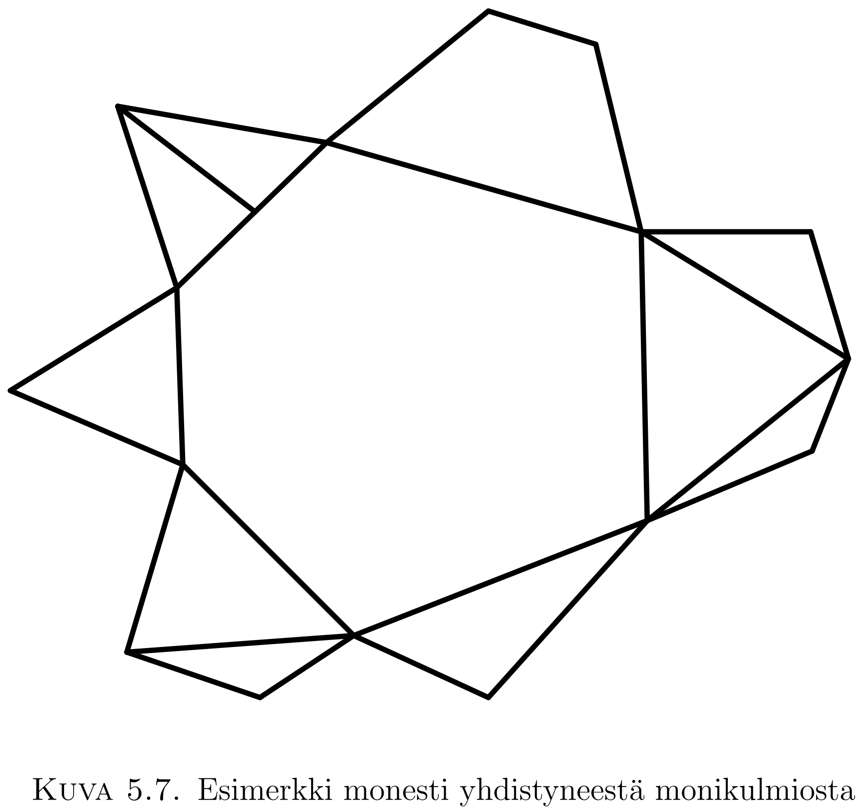
$$\min(\lceil n/2\rceil + r, \lfloor (n + \lceil h/2\rceil)/2\rfloor, \lfloor 2n/3\rfloor)$$

kärkiin sijoitettua vartijaa riittävät näkemään sekä monikulmion sisäpuolen että ulkopuolen.

Monesti yhdistynyt monikulmio on sellainen missä mistä tahansa kärikipisteestä on voitu vetää jana johonkin toiseen ei-viereiseen kärkipisteeseen. Lopputulos muistuttaa konstruktiota, jossa useita monikulmioita on yhdistetty toisiinsa yhteisillä sivuilla. Taidegallerialauseen näkökulmasta voidaan siis ajatella että tutkittavassa monikulmiossa on monta suljettua huonetta.

Jos edeltävästä tuloksesta unohdetaan lattia- ja kattofunktiot, niin luvulle saadaan hieman siistimpi muoto: $n/2 + \min(r, h/4, n/6)$.

On jo pystytty näyttämään, että jos vartijoiden sallitaan olla myös monikulmion ulkopuolella, niin $\lfloor n/2\rfloor + 1$ vartijaa riittävät. Tämän näyttämisessä sovelletaan jälleen kolmiointia ja neliväritystä. Näyttäisi kuitenkin siltä, että tätä vapautta sijoitella vartijoita myös monikulmion ulkopuolelle ei vaadita. Sen perusteella on muotoiltu seuraava avoin ongelma.



KUVA 5.7. Esimerkki monesti yhdistyneestä monikulmiosta.

KONJEKTUURI 5.9. $\lceil n/2\rceil$ kärkipisteisiin sijoitettua vartijaa riittää näkemään n-kulmaisen monikulmion sisä- ja ulkopuolen.

Jälleen ortogonaalisille monikulmioille on kehitetty oma versio ongelmasta.

LAUSE 5.10. $\lfloor 7n/16 \rfloor + 5$ *kärkipisteisiin sijoitettua vartijaa riittää näkemään n-kulmaisen ortogonaalisen monikulmion sisä- ja ulkopuolen.*

Lauseen todistuksessa yhdistellään jo aiemmin todistettuja ortogonaalisiin monikulmioihin liittyviä lauseita.

5.5. Kolmiulotteisuus

Taidegallerialauseista tiedetään hyvin vähän kolmiulotteisissa tilanteissa. Hankalan asiasta tekee se, että kolmessa ulottuvuudessa ei ole toimivaa vastinetta tasossa hyödynnettyyn monikulmion kolmiointiin. Voisi kuvitella, että jokaisen (reiättömän) monitahokkaan pystyisi osittelemaan tetraedreiksi lisäämällä väliin tasoja. On kuitenkin näytetty (Lennes 1911), että on olemassa (reiätön) monitahokas, jota ei pysty osittamaan tetraedreiksi. Vartijoiden erilaiseen sijoitteluun liittyviä lauseita on kyllä kehitetty myös kolmiulotteiseen avaruuteen, mutta hankalan tilanteesta tekee juuri se, että kaikki monitahokkaita ei pystytä osittelemaan tetraedreiksi.

Kolmiulotteisesta taidegallerialauseesta on yksi selkeältä kuulostava versio. Siinä tutkitaan monitahokkaan ulkopuolen näkyvyyttä, kun vartijat on sijoiteltu monitahokkaan pinnalle. Vastaava tilanne tasossa on lauseen 5.7 mukainen. Kolmiulotteinen tapaus ei ole yhtä suoraviivainen, sillä tarkastelun lähtökohdaksi voidaan valita monitahokkaan kärjet, reunat tai tahkot. Seuraava taidegallerialause on muotoiltu monitahokkaan tahkojen perusteella ja siitä käytetään nimitystä satelliittivartijat (engl. Sattelite Sentries).

LAUSE 5.11. $\lfloor (2T-4)/3 \rfloor$ *kärkiin siojitettua vartijaa tarvitaan joskus ja riittää aina näkemään T-tahkoisen konveksin monitahokkaan ulkopuolen, kun $T \leq 10$.*

Todistus vaatii monia uusia käsitteitä, mutta kun ne ovat käytössä, niin itse todistus on melko lyhyt. Todistus löytyy kirjasta [**7**] sivulta 257 alkaen.

LIITE A

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{Z}$	Kokonaisulukujen joukko
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$[x, y]$	Pisteiden x ja y väinen jana
$\langle u, v \rangle$	Vektorien u ja v sisätulo
$B(p, r)$	Avoin pallo, jonka keskipiste on p ja säde on r
$\overline{A}$	Joukon A sulkeuma
$\mathrm{conv}(A)$	Joukon A konveksi verho
$\mathrm{int}(A)$	Joukon A sisäpisteiden joukko
∂A	Joukon A reunapisteiden joukko
$\mathrm{dist}(x, A)$	Pisteen x etäisyys joukosta A
$\mathrm{extr}(A)$	Joukon A ekstreemien pisteiden joukko
$\lfloor x \rfloor$	Lattiafunktio, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$
$\lceil x \rceil$	Kattofunktio, $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$

Lähdeluettelo

[1] L. Danzer, B. Grünbaum ja V. Klee: *Helly's Theorem and its Relatives.* American Mathematical Society, 1963.

[2] J. Eckhoff: *Helly, Radon and Carathéodory Type Theorems.* Teoksessa P. M. Gruber ja J. M. Willis: *Handbook of Convex Geometry. Volume A.* North-Holland, 1993.

[3] H. G. Eggleston: *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 47, Convexity.* Cambridge University Press, 1958.

[4] Peter M. Gruber: *Convex and Discrete Geometry.* Springer, 2007.

[5] I. E. Leonard ja J. E. Lewis: *Geometry of Convex Sets.* Wiley, 2016.

[6] H. Martini, L. Montejano ja D. Oliveros: *Bodies of Constant Width, An Introduction to Convex Geometry with Applications.* Birkhäuser, 2019.

[7] Joseph O'Rourke: *Art Gallery Theorems and Algorithms.* Oxford University Press, 1987.

[8] Jouni Parkkonen: *Metriset avaruudet ja Topologia -luentomoniste.* Jyväskylän yliopisto, 2020.

[9] Adam Robinson: *Helly's Theorem and Its Equivalences via Convex Analysis.* Portland State University, 2014.

[10] Jussi Väisälä: *Topologia 1.* Limes ry, 1999.