Hilbertin avaruudet

Ida Virtanen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2021

Tiivistelmä: Ida Virtanen, *Hilbertin avaruudet* (engl. *Hilbert spaces*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 35 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2021.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustuttaa lukija Hilbertin avaruuksiin ja niiden hyödyllisyyteen ääretönulotteisen vektoriavaruuden tarkastelussa. Tutkielman päätuloksena yleistetään projektiolause ääretönulotteisille vektoriavaruuksille. Hilbertin avaruuksien hyödyllisyys tulee esiin, kun huomataan, että ääretönulotteisten vektoriavaruuksien kohdalla projektiolause on yleistettävissä vain täydellisille sisätuloavaruuksille eli Hilbertin avaruuksille.

Tutkielmassa lähdetään liikkeelle käsitteistä, jotka ovat tärkeitä tutkielman ymmärtämisen kannalta. Hilbertin avaruudet ovat täydellisiä sisätuloavaruuksia. Aluksi perehdytään sisätulolla varustettuihin vektoriavaruuksiin eli sisätuloavaruuksiin. Sisätulon avulla voidaan tutkia vektoreiden välisiä kulmia. Toisin kuin euklidinen avaruus, ääretönulotteiset avaruudet eivät aina ole sisätuloavaruuksia. Toisena käsitteenä tutustutaan metrisiin avaruuksiin. Metriset avaruudet ovat vektoriavaruuksia, joissa on määritelty metriikka eli etäisyys. Sisätuloavaruudessa sisätulo indusoi metriikan, joten etäisyys on määritelty sisätuloavaruudessa. Kolmantena käsitteenä tutustutaan täydellisyyteen. Metrinen avaruus on täydellinen, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee kyseisessä avaruudessa. Euklidinen avaruus on täydellinen, mutta ääretönulotteiset vektoriavaruudet eivät aina ole täydellisiä.

Projektiolauseen avulla voidaan löytää jokaiselle vektoriavaruuden pisteelle lähin piste eli ortogonaaliprojektio vektoriavaruuden aliavaruudesta. Lisäksi projektiolause kertoo, että pisteen ja sen ortogonaaliprojektion kautta kulkeva suora on ortogonaalinen aliavaruuden jokaisen vektorin kanssa. Ortogonaalisuutta voidaan tutkia vain sisätuloavaruuksissa, koska se määritellään sisätulon avulla. Ääretönulotteisten sisätuloavaruuksien kohdalla osoittautuu, että lähin piste on olemassa ainoastaan, jos sisätuloavaruuden aliavaruus on täydellinen. Projektiolause yleiselle vektoriavaruudelle saadaankin osoitettua ainoastaan täydellisille sisätuloavaruuksille eli Hilbertin avaruuksille. Projektiolause kertoo, että Hilbertin avaruus on sen aliavaruuden ja aliavaruuden ortogonaalikomplementin suora summa.

Projektiolauseen avulla saadaan osoitettua, että Hilbertin avaruudessa minkä tahansa epätyhjän osajoukon virittämä suljettu aliavaruus on sama kuin sen ortogonaalikomplementin ortogonaalikomplementti. Tämän tulos on hyödyllinen, kun tarkastellaan Hilbertin avaruuden ortonormaaleja kantoja. Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa joukko ortonormaaleja vektoreita muodostaa aliavaruuden kannan, jos vektorit virittävät aliavaruuden. Gram-Schmidt -menetelmän avulla voidaan muodostaa ortonormaali kanta jokaiselle aliavaruudelle. Ortonormaalit kannat voidaan yleistää Hilbertin avaruuksille. Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta määritellään maksimaalisena ortonormaalina joukkona Hilbertin avaruudessa. Zornin lemman avulla saadaan lopuksi osoitettua, että jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta eli Hilbert kanta.

Sisällys

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoitus on tutustuttaa lukija Hilbertin avaruuksiin. Hilbertin avaruus on käsitteenä lähtöisin 1900-luvulta, jolloin se kehitettiin sekä matematiikan että fysiikan tarpeisiin. Vaikka määritelmä on nimetty David Hilbertin (1862-1943) mukaan, sen esitti vuonna 1930 unkarilais-amerikkalainen Johann von Neumann (1903-57). Matematiikassa Hilbertin avaruudet ovat hyödyllisiä, kun käsitellään ääretönulotteisia vektoriavaruuksia. Fysiikassa Hilbertin avaruuksilla on käytännön sovelluksia kvanttimekaniikassa.

Hilbertin avaruudella tarkoitetaan vektoriavaruutta, joka on täydellinen sisätuloavaruus. Sillä on siis kaksi ominaisuutta, jotka erottavat sen muista vektoriavaruuksista: se on sisätulolla varustettu vektoriavaruus ja lisäksi se on täydellinen metrinen avaruus. Tämän tutkielman tavoite on havainnollistaa, miksi jotkin euklidisen avaruuden tärkeät tulokset eivät toimi yleisesti ääretönulotteisissa avaruuksissa. Lisäksi tarkoitus on havainnollistaa, miksi juuri Hilbertin avaruudet osoittautuvat tämän ongelman ratkaisemisessa hyödylliseksi.

Tutkielman päätulos, projektiolause, osoittautuu toimivan ongelmitta euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tämä johtuu siitä, että $\mathbb{R}^n$ on täydellinen sisätuloavaruus. Ääretönulotteiset vektoriavaruudet eivät aina ole täydellisiä sisätuloavaruuksia. Koska projektiolauseen todistamiseen tarvitaan täydellisyyttä ja sisätuloa, se ei päde yleisesti ääretönulotteisille vektoriavaruuksille. Hilbertin avaruuksien hyödyllisyys tulee esiin, kun huomataan, että ääretönulotteisten vektoriavaruuksien kohdalla projektiolause on yleistettävissä vain täydellisille sisätuloavaruuksille eli Hilbertin avaruuksille.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa käsitellään tutkielman ymmärtämisen kannalta tärkeitä käsitteitä, sisätuloavaruuksia, metrisiä avaruuksia ja täydellisyyttä. Euklidinen avaruus on sisätuloavaruus, mutta ääretönulotteisia vektoriavaruuksia ei aina voida varustaa sisätulolla. Sisätulo on hyödyllinen ominaisuus vektoriavaruudelle, koska se mahdollistaa vektorien välisien kulmien tutkimisen. Metrinen avaruus tarkoittaa avaruutta, johon on määritelty etäisyys eli metriikka. Metrisessä avaruudessa etäisyyksien tutkiminen on aina mahdollista metriikan avulla. Sisätulo määrittelee metriikan sisätuloavaruudessa. Metrinen avaruus on täydellinen, jos jokainen Cauchyn jono suppenee metrisessä avaruudessa.

Toisessa luvussa osoitetaan tutkielman päätulos, projektiolause, yleiselle vektoriavaruudelle. Projektiolauseen avulla voidaan löytää jokaiselle vektoriavaruuden pisteelle lähin piste eli ortogonaaliprojektio vektoriavaruuden aliavaruudesta. Lisäksi projektiolause kertoo, että pisteen ja sen ortogonaaliprojektion kautta kulkeva suora on ortogonaalinen aliavaruuden jokaisen vektorin kanssa. Hilbertin avaruuksien hyödyllisyys havaitaan, kun projektiolausetta aletaan todistaa ääretönulotteisille vektoriavaruuksille. Koska ortogonaalisuus määritellään sisätulon avulla, projektiolausetta yleistäessä voidaan tarkastella ainoastaan sisätuloavaruuksia. Osoittautuu, että lähin piste on olemassa, jos sisätuloavaruuden aliavaruus on täydellinen. Projektiolause saadaankin yleistettyä ainoastaan täydellisille sisätuloavaruuksille eli Hilbertin avaruuksille. Projektiolause kertoo, että Hilbertin avaruuden jokainen vektori voidaan esittää yksikäsitteisenä suorana summana sen aliavaruuden ja aliavaruuden ortogonaalikomplementin vektoreista.

Kolmannessa luvussa käsitellään Hilbertin avaruuksien ortonormaaleja kantoja. Luvun alussa osoitetaan, että Hilbert -avaruudessa minkä tahansa epätyhjän osajoukon virittämä suljettu aliavaruus on sama kuin sen ortgonaalikomplementin ortogonaalikomplementti. Tämä tulos on hyödyllinen Hilbertin kantojen ominaisuuksia tarkastellessa. Hilbertin kanta tarkoittaa maksimaalista ortonormaalia joukkoa Hilbertin avaruudessa. Selviää, että ortonormaali joukko on maksimaalinen, jos ja vain jos sen ortogonaalikomplementti on $\{0\}$. Lisäksi osoittautuu, että jos ortonormaali joukko on niin laaja, että Hilbertin avaruuden vektorit voidaan ilmaista lineaarikombinaatioina joukon vektoreista, niin joukko on Hilbertin kanta.

Lopuksi todistetaan, että äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa jokaisella vektoriavaruuden aliavaruudella on ortonormaali kanta, ja se voidaan muodostaa Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmällä aliavaruuden minkä tahansa kannan avulla. Viimeisenä tuloksena osoitetaan, että myös jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta.

Lukijalta odotetaan lineaarialgebran perustuntemusta. Jos lineaarialgebran käsitteet ja euklidisen vektoriavaruuden ominaisuudet eivät ole ennestään tuttuja tai ne ovat unohduksissa, niistä voi opiskella enemmän lähteistä [10] ja [4]. Tutkielman pääasiallinen lähde on Steven Romanin teos *Advanced Linear Algebra* [10]. Sen lisäksi on käytetty jonkin verran myös muita teoksia ja luentomonisteita, joista on lista tutkielman lopussa.

LUKU 1

Tärkeitä käsitteitä

Tässä kappaleessa käsitellään tutkielman ymmärtämisen kannalta tärkeitä käsitteitä. Aluksi määritellään sisätulon käsite, ja tutustutaan muutamiin sisätuloavaruuksiin. Sen jälkeen käsitellään metriikkaa ja metrisiä avaruuksia. Lisäksi tarkastellaan, mitä tarkoittaa täydellinen metrinen avaruus. Lukualueille käytetään tutkielmassa seuraavia merkintöjä:

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Kokonaislukujen joukko $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko

Lähdetään liikkeelle vektoriavaruuden määritelmästä. Vektoriavaruus voi olla reaalinen tai kompleksinen. Tutuimmat esimerkit vektoriavaruuksista ovat reaalinen euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ ja kompleksinen vektoriavaruus $\mathbb{C}^n$. Tämän tutkielman määritelmät ja tulokset ovat hyvin samankaltaisia reaalisille ja kompleksisille vektoriavaruuksille. Selkeyden ja luettavuuden vuoksi tässä tutkielmassa tarkastelu rajataan koskemaan pelkästään reaalisia vektoriavaruuksia.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Vektoriavaruus V yli $\mathbb{R}$:n on epätyhjä joukko, jonka alkioille on määritelty kaksi laskutoimitusta, alkioiden yhteenlasku sekä skalaarilla kertominen. Siis kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ja kaikille $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$, ja $r\mathbf{u} \in V$. Lisäksi vektoriavaruudessa on voimassa seuraavat ominaisuudet:

(1) $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$
(2) $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$
(3) $(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u})$
(4) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Tässä tutkielmassa käsitellään sekä äärellisulotteisia että ääretönulotteisia vektoriavaruuksia. Vektoriavaruuden ulottuvuus eli dimensio määritellään sen kannan avulla. Ääretönulotteisen avaruuden kohdalla kannoista puhutaan tarkemmin luvussa kolme. Määritellään nyt äärellisulotteisen vektoriavaruuden kanta.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoon $S = \{v_1, ..., v_n\}$ epätyhjä joukko vektoreita vektoriavaruudessa V. S on V:n kanta, jos seuraavat ehdot pätevät.

(1) Joukko S on lineaarisesti riippumaton.
(2) Joukko S virittää V:n eli $V = span(S) = \langle S \rangle$.

HUOMAUTUS 1.3. Jokaisella vektoriavaruudella, paitsi avaruudella $\{0\}$, on kanta. Samalla vektoriavaruudella voi olla useita eri kantoja, mutta saman avaruuden jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria. Näiden tulosten perustelut löytyvät lähteestä [10].

MÄÄRITELMÄ 1.4. Vektoriavaruus V on äärellisulotteinen, jos se on epätyhjä, ja jos sen kanta on äärellinen. Kaikki muut vektoriavaruudet ovat ääretönulotteisia.Vektoriavaruuden kannan alkioiden lukumäärää kutsutaan vektoriavaruuden dimensioksi. Jos kannan alkioiden lukumäärä on n niin sanotaan, että vektoriavaruus on n-ulotteinen ja merkitään

$$Dim(V) = n.$$

Lisäksi sovitaan, että avaruuden $\{0\}$ dimensio on nolla.

ESIMERKKI 1.5. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^3$ on äärellisulotteinen vektoriavaruus. Sen kannassa on kolme vektoria, joten se on 3-ulotteinen. Vastaavasti euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on äärellisulotteinen vektoriavaruus, sillä sen kannassa on n kappaletta vektoreita.

1.1. Sisätuloavaruudet

Tarkastellaan seuraavaksi sisätuloa ja sisätuloavaruuksia. Sisätulolla on paljon hyödyllisiä ominaisuuksia, joiden avulla voidaan tutkia vektoriavaruutta. Sisätulon avulla päästään tutkimaan alkioiden välisiä kulmia, ja lisäksi sisätulo indusoi vektoriavaruuteen normin. Myöhemmin tullaan näkemään, että normi mahdollistaa alkioiden välisten etäisyyksien tutkimisen vektoriavaruudessa. Määritellään sisätulo ja sisätuloavaruus.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Olkoon V vektoriavaruus yli $\mathbb{R}$:n. Tällöin sisätulo V:ssä on funktio $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(1) Positiivisuus: Kaikille $\mathbf{v} \in V$,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0, \text{ja} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = 0$$

(2) Symmetrisyys: kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

(3) Lisäksi kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ja $r, s \in \mathbb{R}$ pätee

$$\langle r\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + s\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

MÄÄRITELMÄ 1.7. Sisätuloavaruus on reaalinen tai kompleksinen vektoriavaruus, joka on varustettu sisätulolla.

ESIMERKKI 1.8. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna sisätulolla

$$\langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + ... + u_n \cdot v_n,$$

jossa $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on sisätuloavaruus. Kyseinen sisätulo, toiselta nimeltään pistetulo, täyttää määritelmän 1.6 ehdot.

Avaruuteen $\mathbb{R}^n$ voidaan määritellä muitakin sisätuloja kuin tämä tavallinen pistetulo. Sisätuloavaruus on itse asiassa pari, joka koostuu vektoriavaruudesta ja siihen liitetystä sisätulosta. Jos sisätulo vaihdetaan, saadaan eri sisätuloavaruus, vaikka pohjalla oleva vektoriavaruus pysyisi samana.

Tavallisen pistetulon lisäksi on muitakin funktioita, jotka toteuttavat sisätulon määritelmän. Tarkastellaan esimerkkinä jatkuvien funktioiden avaruutta, joka voidaan myös varustaa sisätulolla, ja on näin ollen sisätuloavaruus.

Esimerkki 1.9. Jatkuvien funktioiden avaruus

$$C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{on jatkuva}\},$$

jossa $a < b$, voidaan varustaa sisätulolla

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

kaikilla $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$. Todistetaan, että tämä todella on sisätulo ja täyttää sisätulon määritelmän.

Todistus. Todistetaan, että sisätulo täyttää kaikki kolme sisätulon määritelmän 1.6 ehtoa. Todistetaan ensin määritelmän kohta (1). Olkoon $f(t) = 0$ kaikilla $t \in [a,b]$. Tällöin integraali on nolla. Olkoon $f(t) \neq 0$ jollain $t \in [a,b]$. Tällöin, koska f on jatkuva, niin on jollain välillä $[c,d] \subseteq [a,b]$ oltava $f(t)^2 > 0$. Siis

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \quad > 0.$$

Todistetaan kohta (2).

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad = \int_a^b g(t)f(t)dt \quad = \langle g(t), f(t)\rangle.$$

Todistetaan kohta (3). Olkoon $r, s \in \mathbb{R}$ ja $h \in C([a,b],\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\langle rf + sh, g\rangle &= \int_a^b (rf+sh)(t)g(t)dt \\ &= r\int_a^b f(t)g(t)dt \quad + s\int_a^b h(t)g(t)dt \\ &= r\langle f,g\rangle + s\langle h,g\rangle.\end{aligned}$$

Sisätulo täyttää kaikki kolme määritelmän ehtoa. Jatkuvien funktioiden avaruus $((C[a,b],\mathbb{R}))$ voidaan siis varustaa sisätulolla, joten se on määritelmän 1.7 nojalla sisätuloavaruus. □

Määritellään seuraavaksi normi vektoriavaruudessa. Normi on tärkeä ominaisuus vektoriavaruudelle, koska se mahdollistaa etäisyyksien tutkimisen vektoriavaruudessa.

Määritelmä 1.10. Olkoon V vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ on normi, jos kaikille $r \in \mathbb{R}$ ja $x, y \in V$ pätee

(1) $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = 0$.

(2) $\|rx\| = |r|\|x\|$.

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Kun vektoriavaruuteen liitetään normi, siitä tulee normiavaruus. Normiavaruus tarkoittaa vektoriavaruuden ja siihen liitetyn normin muodostamaa paria. Samaan vektoriavaruuteen voidaan liittää useita normeja, jolloin saadaan eri normiavaruuksia. Sisätuloavaruudet ovat normiavaruuksia, koska sisätulo indusoi normin.

ESIMERKKI 1.11. Jos V on sisätuloavaruus, niin voidaan määritellä normi jokaiselle $\mathbf{v} \in V$ seuraavasti

$$\|v\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Tämä toteuttaa selvästi normin määritelmän ehdot (1) ja (2). Kohta (3) seuraa Cauchy-Schwartzin epäyhtälöstä, ja se on osoitettu lähteessä [1].

Sisätuloavaruuksilla on joitakin yhteisiä ominaisuuksia, joista on hyötyä kyseisten avaruuksien tutkimisessa. Eräs tällainen ominaisuus on suunnikaslause, joka on voimassa kaikille sisätuloavaruuksille. Todistetaan tämä ominaisuus sisätuloavaruuksille, koska sitä tarvitaan myöhemmin.

LAUSE 1.12. *Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin kaikille $x, y \in V$ pätee*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

TODISTUS. Todistus tapahtuu yksinkertaisella laskulla

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2, \end{aligned}$$

josta saadaan yhteenlaskemalla haluttu tulos. □

Kaikki normiavaruudet eivät ole sisätuloavaruuksia, sillä kaikkia normeja ei saa sisätulosta. Tarkastellaan seuraavaksi jonoavaruuksia $l^p, p > 0$, joista vain l^2 -avaruus voidaan varustaa sisätulolla.

MÄÄRITELMÄ 1.13. Jonoavaruus $l^p, p > 0$ on ääretönulotteinen avaruus, joka muodostuu sellaisista jonoista $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$, joiden normi on äärellinen. Siis

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} < \infty$$

ESIMERKKI 1.14. Jonoavaruus l^2 on sisätuloavaruus. Olkoon $x_n, y_n \in l^2$. Osoitetaan, että sisätulon määrittävä sarja,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

on todella sisätulo.

TODISTUS. Ensinnäkin tämä sisätulo on reaaliluku kaikilla $x, y \in l^2$. Hölderin epäyhtälöstä, joka on todistettu lähteessä [7], seuraa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

sillä normit ovat äärellisiä reaalilukuja jonoavaruuden l^2 määritelmän mukaan. Todistetaan sisätulon määritelmän kohdat. Aloitetaan kohdasta (1). Selvästi, kun $x = 0$, pätee $\langle x, x\rangle = 0$. Ja koska $x_n^2 \geq 0$ kaikilla $x_n \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geq 0.$$

Koska $x_n y_n = y_n x_n$ pätee myös selvästi kohdan (2) symmetrisyysvaatimus. Osoitetaan vielä kohdan (3) lineaarisuusvaatimus. Olkoon $r, s \in \mathbb{R}$ ja $x, y, w \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\langle rx + sy, w\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}(rx_n + sy_n)w_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} rx_n w_n + sy_n w_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} rx_n w_n + \sum_{n=1}^{\infty} sy_n w_n \\
&= r\langle x, w\rangle + s\langle y, w\rangle
\end{aligned}$$

Sisätulon määrittävä sarja täyttää kaikki määritelmän 1.6 vaatimukset, joten kyseessä on sisätulo. Niinpä jonoavaruus l^2 on määritelmän 1.7 nojalla sisätuloavaruus. □

Esimerkki 1.15. Jonoavaruuksien $l^p, p \neq 2$ kohdalla sisätulon määrittelevä sarja ei täytä sisätulon ominaisuuksia, joten nämä jonoavaruudet eivät ole sisätuloavaruuksia.

Todistus. Tarkastellaan jonoavaruuksia l^p, $p \neq 2$. Olkoon $x = (1, 1, 0, 0, ...) \in l^p$ ja $y = (1, -1, 0, 0, ...) \in l^p$. Tällöin $\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$. Lisäksi $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$. Nämä jonot toteuttavat lauseen 1.12 vain, jos $p = 2$. Jos $p \neq 2$, niin

$$2^2 + 2^2 = 8 \neq 2 \cdot 2^{2/p} + 2 \cdot 2^{2/p}$$

joten avaruuksien $l^p, p \neq 2$ normi ei tule sisätulosta. Kyseessä ei siis ole sisätuloavaruus. □

Euklidisen avaruuden kohdalla on totuttu hyödyntämään vektoreiden välistä pistetuloa vektoriavaruuden tutkimisessa. Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa tästä ei ole seurannut ongelmia, koska $\mathbb{R}^n$ voidaan aina varustaa tutulla vektoreiden välisellä pistetulolla. Pistetulo toteuttaa sisätulon määritelmän, ja siksi koko euklidinen avaruus on sisätuloavaruus. Ääretönulotteisista vektoriavaruuksista kuitenkin ainoastaan sellaiset vektoriavaruudet ovat sisätuloavaruuksia, jotka voidaan varustaa sisätulolla. Kuten esimerkissä 1.15 huomattiin, esimerkiksi ääretönulotteiset jonoavaruudet $l^p, p \neq 2$ eivät ole sisätuloavaruuksia.

Toinen tärkeä havainto sisätuloon liittyen on se, että sisätulo ei aina tarkoita euklidisesta avaruudesta tuttua vektoreiden välistä pistetuloa. Sisätuloja ovat kaikki sisätulon määritelmän toteuttavat funktiot. Esimerkissä 1.9 huomattiin, että jatkuvien funktioiden avaruus $C[0, 1]$ voidaan varustaa sisätulolla, joka on hyvin erinäköinen kuin entuudestaan tuttu euklidisen avaruuden pistetulo. Tämä sisätulo kuitenkin toteuttaa sisätulon määritelmän, ja siksi avaruus $C[0,1]$ on tällä sisätulolla varustettuna sisätuloavaruus.

1.2. Metriset avaruudet

Metriikka tarkoittaa etäisyysfunktiota, jonka avulla voidaan määritellä, mikä on alkioiden välinen etäisyys vektoriavaruudessa. Ilman metriikkaa alkioiden välistä etäisyyttä ei ole. Sellaista avaruutta, johon on liitetty metriikka, eli alkioiden välinen etäisyys on sovittu, kutsutaan metriseksi avaruudeksi.

Määritelmä 1.16. Olkoon M epätyhjä joukko. Kuvaus $d : M \times M \to \mathbb{R}$ on metriikka joukossa M, jos sille pätee seuraavat ominaisuudet

(1) Positiivisuus: kaikille $x, y \in M$, $d(x,y) \geq 0$.
(2) Symmetrisyys: kaikille $x, y \in M, d(x,y) = d(y,x)$
(3) Kolmioepäyhtälö: kaikille $x, y, z \in M, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Metriikan määritelmää voi ajatella arkielämän etäisyyksien avulla. Jos puhutaan esimerkiksi kaupunkien x ja y välisestä etäisyydestä, se ilmaistaan aina einegatiivisena lukuna. Näin myös metriikka, määritelmän kohta (1), ilmaisee etäisyyden. Toiseksi, etäisyys kaupungista x kaupunkiin y on arkielämässäkin sama kuin etäisyys kaupungista y kaupunkiin x. Tämä pätee myös metriikalle, kuten määritelmän kohta (2) sanoo. Kolmanneksi, jos matkalla poiketaan jossakin kaupungissa z, on matkan oltava yhtä pitkä tai pidempi kuin suora reitti kaupunkien x ja y välillä. Metriikalle pätee kolmioepäyhtälö, määritelmän kohta (3), joka tarkoittaa samaa asiaa. Määritelmän kaikki kolme kohtaa ovat siis arkielämän etäisyyksiä ajatellen hyvin intuitiivisia.

Määritelmä 1.17. Olkoon M epätyhjä joukko ja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ metriikka joukossa M. Tällöin (M,d) on metrinen avaruus.

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkejä metrisistä avaruuksista.

Esimerkki 1.18. Euklidinen avaruus voidaan varustaa sisätulolla, ja sisätulon normi määrää metriikan

$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}$$

euklidiseen avaruuteen. Siispä euklidinen avaruus on metrinen avaruus. Lausekkeesta nähdään, että kohdat positiivisuus ja symmetrisyys toteutuvat. Kolmioepäyhtälö voidaan osoittaa käyttämällä Cauchy-Schwartzin epäyhtälöä, joka on yksi normin ominaisuuksista. Todistus löytyy lähteestä [2]. Metriikkaa d_2 kutsutaan euklidisen normin määrittelemäksi metriikaksi.

Sisätuloavaruudessa sisätulo määrää normin, ja normi määrää metriikan $d(x,y)$. Jokaisessa sisätuloavaruudessa on siis voimassa metriikka, joten jokainen sisätuloavaruus on myös metrinen avaruus. Metrinen avaruus ei kuitenkaan aina ole sisätuloavaruus. Vektoriavaruudelle voidaan nimittäin määrätä metriikka myös ilman sisätulon ominaisuutta, vektoriavaruuden normin avulla.

Esimerkki 1.19. Jonoavaruudet $l^p, p > 0$ ovat metrisiä avaruuksia, vaikka ne eivät ole sisätuloavaruuksia. Normi määrää metriikan

$$d(x,y) = \|x-y\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{1/p}$$

jonoavaruuksille l^p. Lähteessä [1] on osoitettu, että kyseessä oleva normi toteuttaa vektoriavaruuden normin määritelmän. Normi indusoi avaruudelle metriikan, joten jonoavaruudet l^p ovat metrisiä avaruuksia.

Metriikka ei aina ole normin määräämä, vaan se voi olla myös jokin muu etäisyysfunktio, joka toteuttaa metriikan määritelmän. Tarkastellaan diskreettiä metriikkaa δ, joka on hieman erikoisempi funktio avaruuden etäisyyksien tarkastelemiseen.

Esimerkki 1.20. Olkoon X epätyhjä joukko. Diskreetti metriikka δ joukossa X määritellään seuraavasti

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, \text{jos } x \neq y \\ 0, \text{jos } x = y. \end{cases}$$

Diskreetti metriikka toteuttaa selvästi metriikan määritelmän kohdat (1) ja (2). Tarkastellaan määritelmän kohtaa (3). Jos x, y ja z ovat kaikki samoja pisteitä, niin yhtälön molemmat puolet ovat nollia, ja yhtäsuuruus pätee. Jos pisteistä x, y, z ainakin yksi piste on erisuuri kuin muut, niin vasen puoli yhtälöstä saa joko arvon 0 tai 1, ja oikea puoli yhtälöstä joko arvon 1 tai 2. Tässäkin tapauksessa kolmioepäyhtälö selvästi pätee. Diskreetti metriikka toteuttaa siis kaikki määritelmän kohdat, joten $\delta(x,y)$ on metriikka ja pari (X,δ) metrinen avaruus.

Sama avaruus on mahdollista varustaa monella eri metriikalla. Tarkastellaan esimerkin avulla, millaisia vaikutuksia metriikan valitsemisella on tason $\mathbb{R}^2$ ympyrän käyttäytymiseen.

Esimerkki 1.21. Olkoon $S(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(0,x) = r, r > 0\}$ r-säteinen ympyrä tasossa $\mathbb{R}^2$. Valitaan ensin metriikaksi euklidisen normin määrittelemä metriikka d_2. Tällöin kaikille $x \in S(0,r)$ pätee $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$. Siis $S(0,r)$ on tavallinen pyöreä r-säteinen ympyrä metriikan d_2 mielessä. Valitaan nyt metriikaksi diskreetti metriikka δ. Käsitellään erikseen tapaukset $r \neq 1$ ja $r = 1$. Tarkastellaan ensin tapausta $r \neq 1$. Ympyrä $S(0,r)$ koostuu kaikista niistä pisteistä, joille pätee $\delta(x,0) = r \neq 1$. Siispä diskreetin metriikan määritelmä mukaan $\delta(x,0) = 0 = r$. Ympyrän määritelmä kuitenkin sanoo, että $r > 0$, joten on oltava $S(0,r) = \emptyset$. Kun $r = 1$, niin ympyrä $S(0,r)$ koostuu kaikista pisteistä, joille pätee $\delta(x,0) = r = 1$. Diskreetin metriikan määritelmän mukaan tämän toteuttavat kaikki $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Siispä diskreetin metriikan δ mielessä $S(0,r)$ on joko tyhjä joukko tai taso, josta on poistettu origo.

1.3. Täydellisyys

Osa metrisistä avaruuksista on täydellisiä, ja myöhemmin tullaan huomaamaan, että täydellisyys antaa avaruudelle hyödyllisiä ominaisuuksia. Metrinen avaruus on täydellinen, jos jokainen Cauchyn jono suppenee kyseisessä avaruudessa. Jotta voidaan määritellä, mitä tarkoittaa, että jokainen Cauchyn jono suppenee metrisessä avaruudessa, on ensin määriteltävä Cauhcyn jono ja jonon suppeneminen metrisessä avaruudessa.

MÄÄRITELMÄ 1.22. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jono $x_n \in X$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x_m) < \epsilon$ kaikille $n, m \geq N$.

MÄÄRITELMÄ 1.23. Jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee metrisessä avaruudessa (X, d) kohti raja-arvoa $x \in X$ jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \varepsilon$, kun $n \geq N_\varepsilon$.

MÄÄRITELMÄ 1.24. Metrinen avaruus on täydellinen, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee.

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä metrisestä avaruudesta, joka on täydellinen.

ESIMERKKI 1.25. Esimerkiksi jonoavaruus $l^p, p > 0$ on täydellinen metrinen avaruus. Aiemmin on jo todettu, että jonoavaruus l^p on metrinen avaruus. Nyt riittää osoittaa, että se on täydellinen.

TODISTUS. Olkoon (x_n) Cauchyn jono l^p:ssa, ja

$$x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots)$$

Tällöin jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa kokonaisluku N siten, että jokaiselle koordinaatille i pätee

$$|x_{n,i} - x_{m,i}|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_{n,j} - x_{m,j}|^p = d(x_n, x_m)^p < \epsilon$$

kaikilla $n > N$ ja $m > N$, eli jokainen koordinaattijono $(x_{n,i})$ kaikilla i on Cauchyn jono $\mathbb{R}$: ssä. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen metrinen avaruus, niin on olemassa luvut y_i siten, että jokaisella $i = 1, 2, ...$

$$(x_{n,i}) \to y_i,$$

kun $n \to \infty$. Halutaan näyttää, että $y = (y_i) \in l^p$ ja että $(x_n) \to y$.

Nyt jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa N, jolle

$$n, m > N \to \sum_{i=1}^{r} |x_{n,i} - x_{m,i}|^p \leq \epsilon$$

kaikille $r > 0$. Kun $m \to \infty$, niin saadaan kun $n > N$

$$\sum_{i=1}^{r} |x_{n,i} - y_i|^p \leq \epsilon$$

kaikille $r > 0$. Kun $r \to \infty$ saadaan kun $n > N$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - y_i|^p \leq \epsilon$$

josta seuraa, että $(x_n) - y \in l^p$ ja siis $y = y - (x_n) + (x_n) \in l^p$ ja lisäksi $(x_n) \to y$.

Siis jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa l^p, joten $l^p, p > 0$ on täydellinen metrinen avaruus. □

Kaikki metriset avaruudet eivät ole täydellisiä. Tarkastellaan sisätuloavaruutta, joka ei ole täydellinen.

Esimerkki 1.26. Jatkuvien funktioiden avaruus $C([a,b],\mathbb{R})$ varustettuna sisätulolla

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

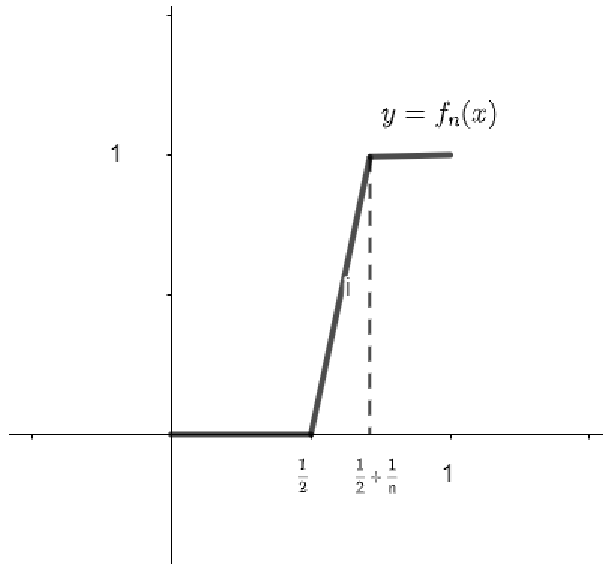
on sisätuloavaruus (ks. esimerkki 1.9), mutta se ei ole täydellinen. Avaruus $C([a,b],\mathbb{R})$ on varustettu metriikalla

$$d(f(x),g(x)) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

Osoitetaan, että tämä avaruus ei ole täydellinen.

Todistus. Määritellään jono funktioita $f_n(x)$ välillä $[0,1]$ siten, että

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ n(x-\frac{1}{2}), & \text{kun } x \in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}[\\ 1, & \text{kun } x \in [\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]. \end{cases}$$



Kuva 1.1. Jono funktioita f_n suppenee kohti epäjatkuvaa funktiota, kun n kasvaa rajatta.

Funktiot f_n ovat kaikki jatkuvia. Osoitetaan seuraavaksi, että jono f_n on Cauchyn jono. Olkoon $m > n$. Kaikki jonon funktiot on määritelty välillä $[0,1]$. Lisäksi kaikki funktiot $f_m, m \geq n$ ovat samoja välillä $[0,\frac{1}{2}]$ ja $[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]$. Riittää siis tarkastella väliä $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]$, jossa funktioiden arvot poikkeavat toisistaan. Tämän välin pituus on $\frac{1}{n}$, ja tällä välillä $|f_n(x)-f_m(x)| < 1$. Voidaan siis arvioida funktioiden f_n ja f_m etäisyyttä

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx \quad < \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{kun } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Siis kun $n > \frac{1}{\varepsilon}$, niin $d(f_n, f_m) < \varepsilon$, joten funktioiden jono f_n on Cauchyn jono.

Kun n lähestyy ääretöntä, funktioiden jono f_n suppenee kohti funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & \text{kun } x \in]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

joka ei ole jatkuva funktio. Koska se ei ole jatkuva funktio, se ei tietenkään kuulu jatkuvien funktioiden avaruuteen. Funktioiden jono ei siis suppene joukossa $C[0,1]$. Löydettiin funktioiden jono f_n, joka on Cauchyn jono, mutta ei suppene joukossa $C[0,1]$. Siispä jatkuvien funktioiden avaruus ei ole täydellinen, koska jokainen Cauchyn jono ei suppene kyseisessä avaruudessa. □

Vertaamalla kahta edellistä esimerkkiä huomataan ero täydellisen ja epätäydellisen metrisen avaruuden välillä. Molemmissa avaruuksissa tarkastellaan Cauchyn jonojen suppenemista. Huomionarvoisen jälkimmäisestä esimerkistä tekee se, että vaikka löydettiin funktio, johon Cauchyn jono suppenee, tämä funktio ei ole kyseisessä avaruudessa $C[0,1]$. Täydellisen metrisestä avaruudesta tekee juuri se, että jokainen Cauchyn jono suppenee nimenomaan kyseisessä avaruudessa, kuten jonoavaruuden l^p kohdalla käy.

Täydellisien avaruuksien aliavaruudet eivät aina ole täydellisiä. Myöhempää varten tarvitaan tulosta, joka kertoo, milloin aliavaruus on täydellinen. Osoitetaan seuraavaksi tärkeä tulos tähän liittyen. Määritellään ensin, mitä tarkoittaa suljettu aliavaruus.

MÄÄRITELMÄ 1.27. Normiavaruuden H aliavaruus A on suljettu, jos jokaisen suppenevan jonon (x_n), jossa $x_n \in A$ kaikilla n, raja-arvo x kuuluu myös aliavaruuteen A.

LAUSE 1.28. *Täydellisen normiavaruuden V aliavaruus S on täydellinen, jos ja vain jos se on suljettu.*

TODISTUS. Olkoon S suljettu V:n aliavaruus ja x_n Cauchyn jono S:ssä. Koska V on täydellinen, niin jono x_n suppenee johonkin $x \in V$. Tällöin $x \in \bar{S}$, ja koska S on suljettu, niin $\bar{S} = S$. Näin ollen $x \in S$. Tästä seuraa, että jokainen Cauchyn jono suppenee S:ssä , joten S on täydellinen.

Olkoon S täydellinen V:n aliavaruus ja $x \in \bar{S}$. Tällöin sulkeuman määritelmän nojalla on olemassa Cauchyn jono $x_n \in S$, joka suppenee pisteeseen $x \in V$. Koska S on täydellinen, on oltava myös $s' \in S$, siten että x_n suppenee tähän pisteeseen. Koska raja-arvo on yksikäsitteinen, on oltava $x = s'$. □

HUOMAUTUS 1.29. Merkinnällä $\bar{S}$ tarkoitetaan tässä joukon S sulkeumaa.

Tässä kappaleessa on tutustuttu sisätuloavaruuksiin ja täydellisiin metrisiin avaruuksiin. Sisätulo ja täydellisyys ovat hyödyllisiä ominaisuuksia vektoriavaruuden tutkimisen kannalta, koska ne tekevät mahdolliseksi joidenkin euklidisesta avaruudesta tuttujen tulosten yleistämisen ääretönulotteisille vektoriavaruuksille. Vektoriavaruuksia, jotka ovat täydellisiä sisätuloavaruuksia, kutsutaan Hilbertin avaruuksiksi.

MÄÄRITELMÄ 1.30. Hilbertin avaruus on täydellinen sisätuloavaruus.

ESIMERKKI 1.31. Yksi tärkeimmistä esimerkeistä Hilbertin avaruuksista on David Hilbertin vuonna 1912 esittämä jonoavaruus l^2, johon kuuluu kaikki kompleksiset jonot (s_n), joilla on ominaisuus

$$\sum |s_n|^2 < \infty.$$

Avaruudessa l^2 sisätulo määritellään

$$\langle (s_n), (t_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \bar{t}_n.$$

Kuten aiemmin osoitettiin, l^2 on sisätuloavaruus ja täydellinen metrinen avaruus. Näin ollen se on Hilbertin avaruus. On kuitenkin tärkeää muistaa, että muut l^p -avaruudet eivät ole Hilbert avaruuksia, sillä vaikka ne ovat täydellisiä metrisiä avaruuksia, ne eivät ole sisätuloavaruuksia.

LUKU 2

Projektiolause

Tässä kappaleessa tarkastellaan projektiolausetta ensin äärellisulotteisessa ja sitten äärettönulotteisessa vektoriavaruudessa. Huomiota kiinnitetään erityisesti siihen, mikä tekee äärettönulotteisesta vektoriavaruudesta erilaisen verrattuna äärellisulotteiseen vektoriavaruuteen. Tärkeää on ymmärtää, miksi projektiolause ei toimi samoin äärettönulotteisille vektoriavaruuksille kuin se toimii euklidiselle avaruudelle. Projektiolause perustuu vektoreiden välisen ortogonaalisuuden tarkasteluun. Käsitellään aluksi ortogonaalisuutta.

2.1. Ortogonaalisuus

Kolmiulotteista vektoriavaruutta tarkasteltaessa vektoreiden sisätulo, tutummalta nimeltään pistetulo on nolla, kun vektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Kun tarkastellaan yleistä vektoriavaruutta, käytetään kohtisuoruuden sijaan käsitettä ortogonaalisuus. Ortogonaalisuus määritellään sisätulon avulla, joten tarkastelu on rajattava koskemaan sisätulolla varustettuja vektoriavaruuksia, eli sisätuloavaruuksia. Kuten aiemmin todettiin, koko euklidinen avaruus on sisätuloavaruus, joten ortogonaalisuus voidaan määritellä koko $\mathbb{R}^n$:ssä. Kun tarkastellaan yleisesti vektoriavaruuksia, ortogonaalisuutta ei voida tutkia kaikissa vektoriavaruuksissa. Esimerkiksi jonoavaruuksien $l^p, p \neq 2$ tutkimisessa ei voida hyödyntää ortogonaalisuuden ominaisuutta, koska esimerkin 1.15 mukaan nämä avaruudet eivät ole sisätuloavaruuksia. Tässä kappaleessa keskitytäänkin tarkastelemaan ainoastaan sisätuloavaruuksia. Määritellään nyt ortogonaalisuus sisätuloavaruuksille.

Määritelmä 2.1. Olkoon V sisätuloavaruus. Vektorit x ja y ovat ortogonaalisia, eli $x \perp y$, jos sisätulo $\langle x, y \rangle = 0$. Jos lisäksi kummankin vektorin normi on yksi eli $\|x\| = 1$ ja $\|y\| = 1$, vektorit x ja y ovat ortonormaalit.

Lisäksi samoin kuin euklidisessa avaruudessa, voidaan määritellä sisätuloavaruudessa joukkojen keskinäinen ortogonaalisuus ja ortogonaalisen joukon käsite.

Määritelmä 2.2. Sisätuloavaruuden V osajoukot T ja S ovat ortogonaaliset, jos kaikille $s \in S$ ja kaikille $t \in T$ pätee $\langle s, t \rangle = 0$. Osajoukon S ortogonaalikomplementti on joukko

$$S^{\perp} = \{v \in V | v \perp S\}$$

Määritelmä 2.3. Epätyhjä joukko K sisätuloavaruudessa on ortogonaalinen, jos $u \perp v$ kaikille $u \neq v \in K$. Lisäksi, jos jokaisen vektorin $u \in K$ normi on yksi, eli $\|u\| = 1$, kaikilla $u \in K$, joukon K sanotaan olevan ortonormaali joukko.

Esimerkki 2.4. $\mathbb{R}^n$:n standardikannan vektorit muodostavat ortonormaalin joukon. Euklidisessa avaruudessa standardikannan vektorilla tarkoitetaan vektoria e_i, jonka i:s koordinaatti on 1, ja kaikki muut koordinaatit nollia. Näin ollen standardikannan jokainen vektori on pituudeltaan yksi. Lisäksi $e_i \perp e_j$ kaikille $i \neq j$.

Ortogonaalisuuden ominaisuuden avulla saadaan yleistettyä tärkeitä tuloksia sisätuloavaruuksille. Tiedetään, että euklidisen avaruuden vektoreille a ja b pätee Pythagoraan lause

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \Leftrightarrow a \perp b.$$

Yleistetään Pythagoraan lause sisätuloavaruuksille.

Lause 2.5. *Olkoon V sisätuloavaruus ja joukko $x_1, x_2, ..., x_n$ ortogonaalinen, eli $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ kaikilla $i \neq j$. Tällöin pätee*

$$\| \sum_{j=1}^{n} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$$

Todistus. Todistetaan tämä induktiotodistuksella. Osoitetaan ensin perusaskel eli tapaus kun $n = 2$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j=1}^{2} x_j \|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 & \\
&= \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle \\
&= \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle \\
&= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle \\
&= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{2} \|x_j\|^2
\end{aligned}$$

ortogonaalisuuden nojalla. Siis perusaskel $n = 2$ on todistettu todeksi. Tehdään induktio-oletus. Oletetaan, että lause on tosi jollain $n = k$. Siis oletetaan, että

$$\| \sum_{j=1}^{k} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^2$$

Eli $\|x_1 + x_2 + ... + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_k\|^2$.

Seuraavaksi tehdään induktioväite. Nyt halutaan osoittaa, että lause on tosi myös, kun $n = k + 1$.

Merkitään summaa $\sum_{j=1}^{k} x_j = y$, jolloin y on vektorien summana saatu vektori, ja y ja x_{k+1} ovat ortogonaaliset. Näin saadaan kirjoitettua summa kahden vektorin avulla ja käytettyä väitteen todistamiseen tapausta $n = 2$ seuraavasti

$$
\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{k+1} x_j\|^2 &= \|x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}\|^2 \\
&= \|y + x_{k+1}\|^2 = \|y\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \\
&= \|\sum_{j=1}^{k} x_j\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \|x_j\|^2
\end{aligned}
$$

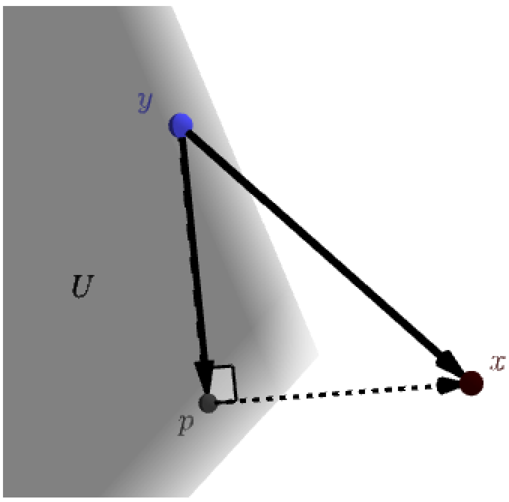
Siispä induktioväite on tosi ja tapaus pätee kaikille $n \geq k$.

□

2.2. Projektiolause euklidisessa avaruudessa

Tässä kappaleessa tarkastellaan projektiolausetta $\mathbb{R}^n$:ssä. Koko euklidinen avaruus on täydellinen sisätuloavaruus, joten projektiolause osoittautuu toimivan koko $\mathbb{R}^n$:ssä. Havainnollistetaan ensin, mitä pisteen ortogonaaliprojektio tarkoittaa konkreettisesti kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ pisteen x ortogonaaliprojektio tasolla U tarkoittaa pisteen kautta kulkevan tason normaalin ja tason leikkauspistettä. Pythagoraan lauseesta seuraa, että pisteen x lyhin etäisyys tasosta on pisteen x ja sen ortogonaaliprojektion p välinen etäisyys. Lisäksi pisteen x ja sen ortogonaaliprojektion kautta piirretty suora on kohtisuorassa tasoa U vastaan.



KUVA 2.1. Pisteen x ortogonaaliprojektio p tasolle U avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ jokaiselle pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa ortogonaaliprojektio, jolla on samat ominaisuudet kuin ortogonaaliprojektiolla kolmiulotteisessa avaruudessa. Euklidisessa avaruudessa kuitenkin tason sijasta x:n ortogonaaliprojektio on olemassa $\mathbb{R}^n$:n aliavaruudelle. Lisäksi ortogonaalisuuteen liittyy tapauksissa $n = 2$ ja $n = 3$ geometrisia tulkintoja, joita on hankalampi tehdä, kun $n > 3$. Vaikka käsitteet eroavat tutuista kolmiulotteisen avaruuden käsitteistä, euklidisen avaruuden abstraktimpaa tilannetta voidaan havainnollistaa kuvan 2.1 kaltaisen kolmiulotteisen tilanteen avulla, jotta sen ymmärtäminen olisi helpompaa. Määritellään nyt ortogonaaliprojektio euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Olkoon U avaruuden $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus, ja $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$, jossa $k \leq n$, sen ortogonaalinen kanta. Jos $x \in \mathbb{R}^n$, niin aliavaruuden U pistettä p,

$$p = Proj_u x = \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|e_1\|} e_1 + \frac{\langle x, e_2 \rangle}{\|e_2|} e_2 + ... + \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|} e_k = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, e_i \rangle e_i,$$

sanotaan x:n ortogonaaliprojektioksi avaruudelle U, ja $x \in \mathbb{R}^n$.

Tälle x:n ortogonaaliprojektiolle avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on voimassa seuraava projektiolause.

LAUSE 2.7. *Olkoon U avaruuden $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) $p = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, e_i \rangle e_i$ *eli p on x:n ortogonaaliprojektio aliavaruudelle U*

(2) $p \in U$ *ja* $(x - p) \in U^{\perp}$

(3) $\|x - p\| = \min_{y \in U} \|x - y\|$

TODISTUS. Todistetaan, että ehdosta (1) seuraa ehto (2), siis että $\langle x - p, U \rangle = 0$. On siis osoitettava, että kaikilla $u \in U$ $\langle x - p, u \rangle = 0$. Jokainen aliavaruuden U vektori u voidaan esittää kantavektoreiden avulla seuraavasti

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j$$

Siis

$$\begin{aligned}
\langle p, u\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} u_j e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_i\rangle u_j \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle u_i \\
&= \langle x, \sum_{i=1}^{n} u_i e_i\rangle = \langle x, u\rangle.
\end{aligned}$$

Siispä $\langle p, u\rangle - \langle x, u\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x - p, u\rangle = 0$. Tästä seuraa, että $(x - p) \in U^{\perp}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että ehdosta (2) seuraa ehto (3). On siis osoitettava, että kaikilla $y \in U$, $\|x - p\| \leq \|x - y\|$. Tiedetään ehdon (2) nojalla, että $(x - p) \perp U$. Siis $(x - p) \perp u$ kaikilla $u \in U$. Olkoon $u = (p - y)$. Koska $p \in U$ ja $y \in U$, niin aliavaruuden määritelmän nojalla $p - y \in U$. Tästä seuraa, että $\langle (x-p), (p-y)\rangle = 0$, ja lauseen 2.5 nojalla

$$\|x - y\|^2 = \|x - p\|^2 + \|p - y\|^2 \geq \|x - p\|^2,$$

koska $\|p - y\|^2 \geq 0$. Siispä $\|x - y\| \geq \|x - p\|$ kaikilla $y \in U$.

Osoitetaan vielä, että kohdasta (3) seuraa kohta (1). Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $u \in U$. Oletetaan, että $\|x - u\| = \min_{y \in U} \|x - y\|$, eli $\|x - u\| \leq \|x - y\|$. Koska tämä ehto pätee kaikille $y \in U$, se pätee myös ehdon (1) pisteelle $p \in U$. Koska ehdon (2) nojalla $\langle x - p, p\rangle = 0$, niin Pythagoraan lause sanoo, että $\|x - p\|^2 + \|p - u\|^2 = \|x - u\|^2$. Jos nyt $\|p - u\|^2 > 0$, niin oletuksen epäyhtälö ei toteudu. On siis oltava $p = u$, joten ehdon (3) toteuttavien pisteiden on toteutettava ehdon (1) lauseke. □

Projektiolause voidaan esittää myös aliavaruuden ja sen ortogonaalikomplementin suoran summan avulla. Avaruuden V aliavaruuksien A ja B suora summa tarkoittaa sitä, että jokainen avaruuden V vektori voidaan esittää yksikäsitteisesti aliavaruuden A ja aliavaruuden B summana.

Määritelmä 2.8. Avaruuden V aliavaruuksien A ja B summa on

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Summa on suora summa eli $A \oplus B$, jos jokaisen vektorin $v \in A + B$ esitys vektoreiden a ja b summana on yksikäsitteinen.

Projektiolauseen avulla voidaan osoittaa, että äärellisulotteinen sisätuloavaruus on sen aliavaruuden ja aliavaruuden ortogonaalikomplementin suora summa. Tätä tulosta varten on osoitettava vielä seuraava lemma.

Lemma 2.9. *Olkoon V n-ulotteinen avaruus, $n < \infty$, ja S sen aliavaruus. Tällöin*
(1) $S + S^{\perp} = V$
(2) $S \cap S^{\perp} = \{0\}$

TODISTUS. Olkoon $x \in V$ ja olkoon lisäksi p x:n ortogonaaliprojektio S:ssä. Tällöin Lauseen 2.7 nojalla $(x-p) \in S^\perp$. Lisäksi jokainen $x \in V$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = p + (x-p),$$

joten jokainen V:n alkio voidaan siis lausua S:n ja $S^\perp$:n alkioiden summana. Tämä osoittaa kohdan (1) todeksi.

Osoitetaan vielä kohta (2). Tehdään antiteesi, että on olemassa $z \in S \cap S^\perp$, $z \neq 0$. Nyt siis $z \in S$ ja lisäksi $z \in S^\perp$. Tämä tarkoittaa ortogonaalikomplementin määritelmän perusteella sitä, että $\langle z, z\rangle = 0$. Sisätulon määritelmän nojalla $\langle z, z\rangle = 0$ jos ja vain jos $z = 0$. Tämä on ristiriita antiteesin kanssa, joten leikkauksessa on oltava ainoastaan nollavektori. Siispä kohta (2) on tosi. □

LAUSE 2.10. *Olkoon V äärellisulotteinen avaruus ja S sen aliavaruus. Tällöin*

$$S \oplus S^\perp = V$$

Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jokainen avaruuden V vektori voidaan esittää kahden keskenään ortogonaalisen vektorin summana, eli tarkemmin jokaiselle $v \in V$ on olemassa yksikäsitteiset vektorit $s \in S$ ja $s^\perp \in S^\perp$, siten että

$$s + s^\perp = v.$$

Lemmasta 2.9 seuraa suoraan, että jokainen $v \in V$ voidaan esittää vektoreiden $s \in S$ ja $s^\perp \in S^\perp$ summana. Osoitetaan vielä, että tämä esitys on yksikäsitteinen.

TODISTUS. Tehdään antiteesi, että on olemassa tämän esityksen lisäksi vektorit $r \in S$ ja $r^\perp \in S^\perp$ siten, että $r + r^\perp = v$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} r + r^\perp = v = s + s^\perp \\ \Leftrightarrow r + r^\perp = s + s^\perp \\ \Leftrightarrow r - s = s^\perp - r^\perp. \end{aligned}$$

Aliavaruuden määritelmän nojalla $r - s \in S$ ja $s^\perp - r^\perp \in S^\perp$. Lemma 2.9 sanoo, että joukoilla S ja $S^\perp$ on vain yksi yhteinen alkio, 0. Niinpä $r - s = 0$ ja $r^\perp - s^\perp = 0$. Tästä seuraa, että $r = s$ ja $r^\perp = s^\perp$. Siis vektorin $v \in V$esitys sen aliavaruuden ja aliavaruuden ortogonaalikomplementin suorana summana on yksikäsitteinen.

□

Kuten lemman 2.9 todistuksesta käy ilmi, lause 2.10 seuraa lauseen 2.7 kohdasta (2). Itse asiassa lauseet 2.7 ja 2.10 ilmaisevat saman asian. Jos $x \in V$, niin lause 2.10 sanoo, että on olemassa yksikäsitteiset $p \in U$ ja $p^\perp \in U^\perp$ siten, että $x = p + p^\perp$. Tästä seuraa, että $p^\perp = x - p$, joka on lauseen 2.7 kohta (2). Koska lauseen ehdot ovat yhtäpitäviä, muut kohdat seuraavat tästä.

2.3. Projektiolause ääretönulotteisessa avaruudessa

Kuten äärellisulotteisen avaruuden tapauksessa huomattiin, projektiolause perustuu ortogonaalisuuteen, joka taas määritellään sisätulon avulla. Toisin kuin $\mathbb{R}^n$, kaikki vektoriavaruudet eivät ole sisätuloavaruuksia. Jotta projektiolause voidaan yleistää kaikille vektoriavaruuksille, on keskityttävä tarkastelemaan pelkästään sisätuloavaruuksia.

Projektiolausetta ei voida kuitenkaan suoraan yleistää kaikille sisätuloavaruuksille, koska ääretönulotteisessa avaruudessa tulee eteen ongelmia, joita ei ole äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa. Katsotaan tapauksesta erästä esimerkkiä, joka havainnollistaa projektiolauseen ongelmaa ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa.

Esimerkki 2.11. Tarkastellaan jonoavaruutta l^2. Tiedetään, että kyseesssä on ääretönulotteinen sisätuloavaruus. Olkoon S standardikannan vektoreiden $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ virittämä l^2:n aliavaruus, jossa e_i:n i:s koordinaatti on 1 ja kaikki muut koordinaatit ovat nollia. Huomionarvoista on, että standardikannan vektoreiden virittämä aliavaruus S koostuu kaikista standardikannan vektoreiden äärellisistä lineaarikombinaatioista. Sen sijaan jonoavaruus l^2 on ääretönulotteinen vektoriavaruus, joten sinne sisältyy äärellisten lineaarikombinaatioiden lisäksi myös äärettömiä lineaarikombinaatioita standardikannan vektoreista. Jos $x = x_n \in S^{\perp}$, niin ortogonaalikomplementin määritelmän nojalla $\langle x, e_i \rangle = 0$ kaikilla i. Tämä pätee tässä tapauksessa vain, jos $x = 0$. Siis $S^{\perp} = \{0\}$, eli ortogonaalikomplementissa on ainoastaan nollavektori. Tästä seuraa, että

$$S \oplus S^{\perp} = S \neq l^2.$$

Niinpä projektiolause ei suoraan päde kaikille sisätuloavaruuksille samalla tavalla kuin äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa.

Esimerkki havainnollistaa ongelmaa, jonka takia yleisen vektoriavaruuden kohdalla kaikkia sisätuloavaruuksia ei voida esittää aliavaruuden ja aliavaruuden ortogonaalikomplementin suorana summana. Tämän ongelman takia projektiolausetta ei voida yleistää kaikille sisätuloavaruuksille samanlaisena kuin se on osoitettu $\mathbb{R}^n$:lle.

Projektiolause voidaan kuitenkin yleistää kaikille sisätuloavaruuksille ottamalla ääretönulotteisen avaruuden ongelmat huomioon. Euklidinen avaruus on täydellinen sisätuloavaruus, joten jokainen Cauchyn jono suppenee tässä avaruudessa. Koska äärellisulotteisen avaruuden kaikki aliavaruudet ovat suljettuja, ne ovat lauseen 1.28 nojalla myös täydellisiä. Siksi ortogonaaliprojektio on aina olemassa euklidisessa avaruudessa, ja projektiolause toimii siellä ongelmitta. Esimerkin 2.11 ongelma johtuu siitä, että aliavaruus S ei ole suljettu eikä se siksi ole myöskään täydellinen. Kuten aiemmin on huomattu, kaikki sisätuloavaruudet eivät ole täydellisiä, ja myöskään sisätuloavaruuksien aliavaruudet eivät aina ole täydellisiä. Siksi ortogonaaliprojektiota ei aina ole olemassa ääretönulotteisessa sisätuloavaruudessa, eikä tällöin projektiolausekaan ole voimassa.

Tarkastellaan projektiolausetta ääretönulotteisissa sisätuloavaruuksissa. Lähdetään liikkeelle parhaan approksimaation ongelmasta. Äärellisulotteisessa tapauksessa projektiolause sanoi, että jokaiselle avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiolle x on olemassa alivaruudessa U alkio, joka on lähimpänä alkiota x. Osoitetaan nyt, että myös ääretönulotteisessa avaruudessa jokaiselle sisätuloavaruuden V alkiolle s löytyy sen täydellisestä kovenksista osajoukosta S alkio $\bar{s}$, joka on kaikkein lähimpänä sisätuloavaruuden alkiota s.

Tätä kaikkein lähintä alkiota $\bar{s}$ kutsutaan s:n parhaaksi approksimaatioksi joukossa S. Määritellään ensin lauseen ymmärtämiseen tarvittavat käsitteet.

MÄÄRITELMÄ 2.12. Joukko W on konveksi, jos kaikille $x, y \in W$ pätee $rx + (1-r)y \in W$ kaikilla $r \in [0,1], r \in \mathbb{R}$.

LAUSE 2.13. *Olkoon V sisätuloavaruus ja olkoon S V:n täydellinen konveksi osajoukko. Tällöin mille tahansa $x \in V$ on olemassa yksikäsitteinen $\bar{s} \in S$, jolle pätee*

$$\|x - \bar{s}\| = \inf_{s \in S} \|x - s\| = \delta.$$

Tämä on paras approksimaatio x:lle S:ssä.

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että lähin piste on olemassa. Olkoon $x \in V$ ja

$$\delta = \inf_{s \in S} \|x - s\|.$$

Tällöin on olemassa jono s_n, jolle pätee

$$\delta_n = \|x - s_n\| \to \delta.$$

Olkoon $y_k = x - s_k$, jolloin lauseen 1.12 nojalla

$$\begin{aligned}
\|y_k + y_j\|^2 + \|y_k - y_j\|^2 = 2(\|y_k\|^2 + \|y_j\|^2) \Leftrightarrow \\
\|y_k - y_j\|^2 = 2(\|y_k\|^2 + \|y_j\|^2) - 4\|\frac{y_k + y_j}{2}\|^2
\end{aligned}$$

Koska S on konveksi, niin määritelmän 2.12 mukaan $\frac{s_k + s_j}{2} \in S$. Siispä

$$\|\frac{y_k + y_j}{2}\| = \|x - \frac{s_k + s_j}{2}\| \geq \delta.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\|y_k - y_j\|^2 &= 2(\|y_k\|^2 + \|y_j\|^2) - 4\|\frac{y_k + y_j}{2}\|^2 \\
&\leq 2(\|y_k\|^2 + \|y_j\|^2) - 4\delta^2 \\
&= 2(\|x - s_k\|^2 + \|x - s_j\|^2) - 4\delta^2 \to 0,
\end{aligned}$$

kun $k, j \to \infty$. Niinpä S:n konveksiudesta seuraa, että $(y_n) = (x - s_n)$ on Cauchyn jono määritelmän 1.22 nojalla. Koska $y_k = x - s_k$, niin

$$\|s_k - s_j\| = \|(x - y_k) - (x - y_j)\| = \|y_j - y_k\| \to 0,$$

kun $k, j \to \infty$. Siis myös jono (s_n) on Cauchyn jono. S:n täydellisyydestä seuraa, että $(s_n) \to \bar{s} \in S$, ja koska normi on jatkuva, niin

$$\|x - \bar{s}\| = \delta.$$

Osoitetaan vielä $\bar{s}$:n yksikäsitteisyys. Oletetaan, että on olemassa $\bar{s} \in S$ ja $s' \in S$ joille pätee

$$\|x - \bar{s}\| = \delta = \|x - s'\|.$$

Lauseen 1.12 nojalla, seuraa osajoukon S konveksiudesta, että

$$\begin{aligned}\|\bar{s}-s'\|^2 &= \|(x-s')-(x-\bar{s})\|^2 \\ &= 2\|x-\bar{s}\|^2 + 2\|x-s'\|^2 - \|2x-\bar{s}-s'\|^2 \\ &= 2\|x-\bar{s}\|^2 + 2\|x-s'\|^2 - 4\|x-\frac{\bar{s}+s'}{2}\|^2 \\ &\le 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.\end{aligned}$$

Siispä $\bar{s} = s'$, ja siis $\bar{s}$ on yksikäsitteisesti paras approksimaatio x:lle S:ssä. □

Huomautus 2.14. Normiavaruuden normi on jatkuva funktio. Todistus sivuutetaan, ja se löytyy lähteestä [1].

Todistuksesta voidaan huomata, että lähimmän pisteen olemassaolo seuraa S:n täydellisyydestä. Koska jokaiselle Cauchyn jonolle $x_n \in V$ pätee $d(x_n, x) < \varepsilon$ jostakin N_ε:sta lähtien, niin lähin piste on varmasti olemassa aliavaruudessa S. Jos aliavaruus S ei olisi täydellinen, niin tällaista pistettä ei aina olisi aliavaruudessa, koska olisi mahdollista, että Cauchyn jonot suppenisivat aliavaruuden ulkopuolelle. Nyt tiedetään, että kaikissa täydellisissä ja konvekseissa sisätuloavaruuden osajoukoissa S on olemassa jokaiselle $x \in V$ yksikäsitteinen paras approksimaatio $\bar{s}$. Aliavaruuden määritelmästä seuraa, että jokainen aliavaruus on myös konveksi joukko. Näin ollen lause 2.13 pätee myös kaikille sisätuloavaruuden S täydellisille aliavaruuksille. Seuraavaksi osoitetaan, että $S \perp (x - \bar{s})$.

Lause 2.15. *Olkoon S sisätuloavaruuden V täydellinen aliavaruus. Tällöin jokaiselle $x \in V$ paras approksimaatio S:ssä on yksikäsitteinen vektori $\bar{s} \in S$, jolle pätee $x - \bar{s} \perp S$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $x - \bar{s} \perp S$, ja $\bar{s} \in S$. Halutaan osoittaa, että tällöin $\bar{s}$ on x:n paras approksimaatio aliavaruudessa S. Nyt jokaiselle $s \in S$ pätee $x - \bar{s} \perp s - \bar{s}$, joten Pythagoraan lauseesta saadaan

$$\|x-s\|^2 = \|x-\bar{s}\|^2 + \|\bar{s}-s\|^2 \ge \|x-\bar{s}\|^2,$$

jolloin

$$\|x-\bar{s}\| \le \|x-s\| \Leftrightarrow \|x-\bar{s}\| = \inf_{s\in S} \|x-s\|.$$

Oletetaan nyt, että $\bar{s} \in S$ on x:n paras approksimaatio S:ssä, eli jokaiselle $s \in S$ $\|x-s\| \ge \|x-\bar{s}\| = \delta$. Osoitetaan, että tällöin $x - \bar{s} \perp S$.

Olkoon $s \in S$ mikä tahansa S:n alkio ja $r \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\|x-rs\|^2 &= \langle x-rs, x-rs\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2r\langle x,s\rangle + r^2\|s\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|s\|^2(r^2 - 2r\frac{\langle x,s\rangle}{\|s\|^2}) \\ &= \|x\|^2 + \|s\|^2(r - \frac{\langle x,s\rangle}{\|s\|^2})^2 - \frac{\langle x,s\rangle^2}{\|s\|^4}\end{aligned}$$

.

Lauseke saa pienimmän arvonsa, kun

$$r = r_0 = \frac{\langle x,s\rangle}{\|s\|^2}.$$

Sijoitetaan $r = r_0$ alkuperäiseen lausekkeeseen, jolloin saadaan lausekkeen pienimmäksi arvoksi

$$\|x - r_0 s\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x,s\rangle^2}{\|s\|^4}$$

Korvaamalla x nyt $(x-\bar{s})$:llä saadaan

$$\|x-\bar{s}-rs\|^2 = \|x-\bar{s}\|^2 - \frac{|\langle x-\bar{s}, s\rangle|^2}{\|s\|^4} = \delta - \frac{|\langle x-\bar{s}, s\rangle|^2}{\|s\|^4}$$

Koska $\bar{s}-rs \in S$, niin lauseen 2.13 nojalla $\|x-\bar{s}-rs\| = \|x-(\bar{s}+rs)\| \geq \delta$. Yhtälön vasemman puolen on siis oltava ainakin δ, joten on oltava

$$\frac{|\langle x-\bar{s}, s\rangle|^2}{\|s\|^4} = 0$$

Tästä taas seuraa, että

$$\langle x-\bar{s}, s\rangle = 0$$

eli $x - \bar{s} \perp S$.

□

Saatiin osoitettua ääretönulotteiselle täydelliselle sisätuloavaruudelle V kaksi tärkeää tulosta, jotka voidaan tiivistää yhdeksi lauseeksi.

LAUSE 2.16. *Olkoon S sisätuloavaruuden V täydellinen aliavaruus ja $x \in V$. Olkoon lisäksi $\bar{s} \in S$ x:n ortogonaaliprojektio aliavaruudelle S. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä*

(1) $\bar{s} \in S$ *ja* $x - \bar{s} \in S^{\perp}$.

(2) $\|x-\bar{s}\| = \inf_{s\in S} \|x-s\|$.

Tämä on sama projektiolause kuin euklidiselle avaruudelle, mutta erona on se, että ääretönulotteisia vektoriavaruuksia käsitellessä lause pätee vain, jos aliavaruus on täydellinen.

Kuten äärellisulotteisen avaruuden tapauksessa, voidaan osoittaa, että Hilbertin avaruus on sen aliavaruuden ja aliavaruuden ortogonaalikomplementin suora summa.

Tämä voidaan osoittaa hyvin samalla tavalla kuin äärellisulotteisen avaruuden kohdalla lause 2.10. Tulosta varten on osoitettava seuraava lemma, joka vastaa euklidisen avaruuden kohdalla osoitettua lemmaa 2.9.

LEMMA 2.17. *Olkoon V äärettönulotteinen sisätuloavaruus, ja S sen täydellinen aliavaruus. Tällöin pätee*

(1) $S + S^\perp = V$
(2) $S \cap S^\perp = \{0\}$

TODISTUS. Olkoon $x \in V$ ja $s^\perp$ x:n ortogonaaliprojektio aliavaruudessa S. Lauseen 2.16 nojalla voidaan jokainen $x \in V$ kirjoittaa muodossa

$$x = s^\perp + (x - s^\perp),$$

jossa $s^\perp \in S$. Koska $(x - s^\perp) \in S^\perp$, niin selvästi jokaiselle $x \in V$ on olemassa vektorit $s \in S$ ja $s^\perp \in S^\perp$, siten että

$$s + s^\perp = x.$$

Toisen kohdan osoittaminen menee samalla tavoin kuin äärellisulotteisille avaruuksille. Tehdään antiteesi, että on olemassa $s \in S \cap S^\perp$ ja $s \neq 0$. Siis $s \in S$ ja $s \in S^\perp$. Tällöin $\langle s, s \rangle = 0$, joka on sisätulon määritelmän mukaan mahdollista vain jos $s = 0$. Tämä on ristiriita antiteesin kanssa, joten kohta (2) pätee. $\square$

LAUSE 2.18. *Olkoon V sisätuloavaruus ja S sen täydellinen aliavaruus. Tällöin*

$$V = S \oplus S^\perp$$

Yleisesti tämä pätee, jos S on Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus.

TODISTUS. Lemman 2.17 kohdan (1) perusteella jokainen $x \in V$voidaan esittää alkioiden $s \in S$ ja $s^\perp \in S^\perp$ summana $s + s^\perp = x$. Osoitetaan, että tämä esitys on yksikäsitteinen. Todistus on täysin samanlainen kuin äärellisulotteisen avaruuden kohdalla. Tehdään antiteesi, että on olemassa tämän esityksen lisäksi $r \in S$ ja $r^\perp \in S^\perp$ siten, että $r + r^\perp = x$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} r + r^\perp = v = s + s^\perp \\ \Leftrightarrow r + r^\perp = s + s^\perp \\ \Leftrightarrow r - s = s^\perp - r^\perp. \end{aligned}$$

Aliavaruuden määritelmän nojalla $r - s \in S$ ja $s^\perp - r^\perp \in S^\perp$. Lemma 2.17 sanoo, että joukoilla S ja $S^\perp$ on vain yksi yhteinen alkio, 0. Niimpä $r - s = 0$ ja $r^\perp - s^\perp = 0$. Tästä seuraa, että $r = s$ ja $r^\perp = s^\perp$. Siis alkion $x \in V$esitys sen aliavaruuden ja aliavaruuden ortogonaalikomplementin suorana summana on yksikäsitteinen $\square$

LUKU 3

Hilbertin avaruuksien ominaisuuksia

Nyt kun projektiolause on saatu osoitettua Hilbertin avaruuksille, sen avulla voidaan osoittaa Hilbertin avaruuksille myös muita kiinnostavia tuloksia. Äärellisulotteisessa avaruudessa joukko ortonormaaleja vektoreita muodostaa aliavaruuden ortonormaalin kannan, jos vektorit virittävät aliavaruuden. Jokaiselle äärellisulotteiselle aliavaruudelle voidaan muodostaa ortonormaali kanta minkä tahansa aliavaruuden kannan avulla. Hilbert -avaruudelle voidaan myös määrittää ortonormaali kanta, toiselta nimeltään Hilbertin kanta. Käy ilmi, että jokaisella Hilbertin avaruudella on Hilbertin kanta. Todistetaan ensin projektiolauseen avulla tuloksia, joiden hyöty havaitaan Hilbertin kannan ominaisuuksia tarkastellessa.

3.1. Projektiolauseesta seuraavia tuloksia

Projektiolauseen avulla voidaan osoittaa, että Hilbert -avaruudessa minkä tahansa epätyhjän osajoukon $A \subset H$ virittämä suljettu aliavaruus on sama kuin sen ortogonaalikomplementin ortogonaalikomplementti. Tätä tulosta varten tarvitaan seuraava lemma.

LEMMA 3.1. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja A sen osajoukko.*

(1) *$A^\perp$ on H:n suljettu aliavaruus.*

(2) $A^\perp = \bar{A}^\perp$.

(3) $A^\perp = \langle A \rangle^\perp = \overline{\langle A \rangle}^\perp$.

HUOMAUTUS 3.2. Merkintä $\langle A \rangle$tarkoittaa joukon A virittämää aliavaruutta, ja merkintä $\overline{A}$ joukon A sulkeumaa. Merkinnällä $\overline{\langle A \rangle}$ tarkoitetaan joukon A virittämää suljettua aliavaruutta.

TODISTUS. Osoitetaan kohta (1). Olkoon $x \in A^\perp$. Tällöin $\langle x, a \rangle = 0$ kaikilla $a \in A$. Kaikilla $x, y \in A^\perp$ ja $r, s \in \mathbb{R}$, $\langle rx + sy, a \rangle = r\langle x, a \rangle + s\langle y, a \rangle = 0$. Siispä $rx + sy \in A^\perp$, joten $A^\perp$ on aliavaruus. Olkoon nyt $z_n \to z \in V$ ja $z_n \in A^\perp$. Osoitetaan, että tällöin myös $z \in A^\perp$. Kaikilla $a \in A$ pätee $\langle z, a \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} z_n, a \rangle = \lim_{\to\infty} \langle z_n, a \rangle = 0$, koska sisätulo on jatkuva. Siis $z \in A^\perp$ ja määritelmän 1.27 nojalla $A^\perp$ on suljettu.

Osoitetaan kohta (2). Koska A on A:n sulkeuman osajoukko, niin kaikille $a \in A$ pätee $a \in \bar{A}$. Nyt kaikille $a' \in \bar{A}^\perp$ pätee $\langle a', a \rangle = 0$ kaikilla $a \in \bar{A}$. Siispä $\langle a', a \rangle = 0$ pätee myös kaikille $a \in A$. Näin ollen $\bar{A}^\perp \subset A^\perp$. Osoitetaan vielä, että $A^\perp \subset \bar{A}^\perp$. Kaikille $a' \in A^\perp$ pätee $\langle a', a \rangle = 0$ kaikilla $a \in A$. Koska sisätulo on jatkuva, niin myös kaikille $\bar{a} \in \bar{A}$ pätee $\langle a', \bar{a} \rangle = 0$. Näin ollen $A^\perp = \bar{A}^\perp$.

Osoitetaan kohta (3). Osoitetaan ensin, että $\langle A \rangle^\perp \subset A^\perp$. Joukko A sisältyy joukon A virittämään aliavaruuteen. Siis kaikille $a \in A$ pätee $a \in \langle A \rangle$. Kaikille $a' \in \langle A \rangle^\perp$

pätee $\langle a', a\rangle = 0$ kaikilla $a \in \langle A\rangle$. Siis $\langle a', a\rangle = 0$ myös kaikilla $a \in A$, ja $\langle A\rangle^\perp \subset A^\perp$. Osoitetaan nyt, että $A^\perp \subset \langle A\rangle^\perp$. Olkoon $x \in A^\perp$, jolloin $\langle x, a\rangle = 0$ kaikilla $a \in A$. Tällöin kaikille $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \in \langle A\rangle$ pätee

$$\langle x, \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, a_j\rangle = 0,$$

ja siis $x \in \langle A\rangle^\perp$. Kohdan (1) nojalla $\langle A\rangle^\perp$ on suljettu aliavaruus, joten $\langle A\rangle^\perp = \overline{\langle A\rangle}^\perp$. □

Huomautus 3.3. Sisätulon jatkuvuus seuraa Cauchy-Schwarzin epäyhtälöstä ja on todistettu lähteessä [2]. Lemman avulla päästään todistamaan seuraava lause.

Lause 3.4. *Olkoon H Hilbertin avaruus.*

(1) *Jos M on H:n osajoukko, niin $M^{\perp\perp} = \overline{\langle M\rangle}$*

(2) *Jos K on suljettu aliavaruus H :ssa, niin $K^{\perp\perp} = K$*

Todistus. Todistetaan kohta (1). Lemman 3.1 kohta (3) sanoo, että $\overline{\langle M\rangle}^\perp = M^\perp$. Koska $\overline{\langle M\rangle}$ on suljettu, se on myös täydellinen. Tällöin projektiolauseen 2.18 nojalla $H = \overline{\langle M\rangle} \oplus \overline{\langle M\rangle}^\perp = \overline{\langle M\rangle} \oplus M^\perp$. Lemman 3.1 kohdan (1) mukaan $M^\perp$ on suljettu. Tästä seuraa, että $M^\perp$ on myös täydellinen, ja projektiolauseen nojalla pätee myös $H = M^{\perp\perp} \oplus M^\perp$. Esityksen yksikäsitteisyydestä seuraa, että $M^{\perp\perp} = \overline{\langle M\rangle}$.

Osoitetaan kohta (2). Lemman 3.1 kohta (1) sanoo, että $K^\perp = \overline{\langle K\rangle}^\perp$. Lisäksi tämän lauseen kohdan (1) nojalla $K^{\perp\perp} = \overline{\langle K\rangle}$. Siispä $H = \overline{\langle K\rangle} \oplus \overline{\langle K\rangle}^\perp = K^{\perp\perp} \oplus K^\perp$. Koska K on suljettu aliavaruus, se on myös täydellinen. Projektiolauseen nojalla siis $H = K \oplus K^\perp$. Tästä seuraa, että $K = K^{\perp\perp}$.

□

3.2. Ortonormaalit kannat ja Hilbertin kannat

Ortonormaali kanta Hilbertin avaruudessa määritellään hieman eri tavalla kuin euklidisessa avaruudessa. Määritellään ensin äärellisulotteisen sisätuloavaruuden ortonormaali kanta.

Määritelmä 3.5. Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja S sen aliavaruus. Olkoon $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ joukko vektoreita aliavaruudessa S. Tällöin Mon aliavaruuden S kanta, jos M on lineaarisesti riippumaton joukko vektoreita, eli

$$r_1 m_1 + ... + r_n m_n = 0 \Rightarrow r_1 = ... = r_n = 0$$

ja lisäksi M virittää S:n eli

$$S = span(M) = \langle M\rangle = \{r_1 m_1 + ... + r_n m_n \mid r_i \in \mathbb{R}, m_i \in M\}$$

Jos lisäksi S:n vektorit muodostavat ortonormaalin joukon, M on S:n ortonormaali kanta.

Huomautus 3.6. Ortonormaali joukko on automaattisesti lineaarisesti riippumaton. Tämä tulos on osoitettu lähteessä [2].

Ortonormaaleja kantoja ei voida helposti yleistää kaikille ääretönulotteisille avaruuksille. Kun tarkastellaan ääretönulotteisia vektoriavaruuksia, ortonormaalit kannat voidaan yleistää ainoastaan Hilbert -avaruuksille. Hilbert -avaruuden ortonormaalin kannan määritelmä ei ole samalla tavalla yksikäsitteinen kuin äärellisulotteisen vektoriavaruuden kohdalla. Hilbert -avaruuden kanta määritellään maksimaalisen ortonormaalin joukon avulla. Määritelmää varten on ensin ymmärrettävä, mitä tarkoittaa osittain järjestetty joukko. Määritellään tämä käsite, ja tarkastellaan tuttua esimerkkiä osittain järjestetystä joukosta.

Määritelmä 3.7. Pari $(P, \sim)$, jossa P on joukko ja $\sim$ relaatio joukossa P on osittain järjestetty joukko, jos kaikille $a, b, c \in P$ pätee

(1) $a \sim a$ kaikilla $a \in P$.

(2) jos pätee $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$.

(3) jos $a \sim b$ ja $b \sim a$, niin $a = b$ kaikilla $a, b \in P$.

Paria $(P, \sim)$ kutsutaan täysin järjestetyksi joukoksi eli ketjuksi, jos lisäksi kaikilla $x, y \in P$ pätee $x \sim y$ tai $y \sim x$.

Esimerkki 3.8. Esimerkiksi pari $(\mathbb{R}, \leq)$ on osittain järjestetty joukko, koska

(1) kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee $x \leq x$.

(2) jos $x, y, z \in \mathbb{R}$ ja lisäksi $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin tällöin $x \leq z$.

(3) Jos $x \leq y$ ja $y \leq x$, niin $y = x$.

Lisäksi pari $(\mathbb{R}, \leq)$ on täysin järjestetty joukko, sillä kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $x \leq y$ tai $y \leq x$.

Määritelmä 3.9. Olkoon P on osittain järjestetty joukko ja $m \in P$, siten että jos m:lle pätee $m \leq p$ kaikilla $p \in P$, niin siitä seuraa, että $m = p$. Tällöin m on nimeltään maksimaalinen alkio P:ssä.

Määritelmä 3.10. Maksimaalista ortonormaalia joukkoa Hilbertin avaruudessa H kutsutaan Hilbertin kannaksi H:lle.

Hilbertin avaruuden H maksimaalinen ortonormaali joukko M tarkoittaa joukkoa, joka ei ole osa mitään itseään suurempaa ortonormaalia joukkoa. Toisin sanoen, jos joukko M on maksimaalinen ortonormaali joukko, ja jos $M \subset Q$, missä Q on myös ortonormaali, niin $M = Q$. Havainnollistetaan Hilbertin kannan käsitettä esimerkin avulla.

Esimerkki 3.11. Olkoon $V = l^2$, ja olkoon $M \subset l^2$ joukko vektoreita muotoa

$$e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...),$$

jossa e_i : n i:s koordinaatti on 1 ja kaikki muut koordinaatit ovat nollia. Selvästi M on ortogonaalinen joukko. Lisäksi se on maksimaalinen. Olkoon $x = (x_n) \in l^2$, $x \neq m$ kaikilla $m \in M$. Jos x:llä on ominaisuus $x \perp M$, niin

$$x_i = \langle x, e_i \rangle = 0$$

kaikille i. Tästä seuraa, että $x = 0$. Siis mikään nollasta poikkeava vektori $x \in l^2, x \neq m$ kaikilla $m \in M$, ei ole ortogonaalinen M:n kanssa. Joukkoa M ei siis voida laajentaa millään nollasta poikkeavalla vektorilla x siten, että $M \cup \{x\}$ olisi myös ortonormaali joukko. Niinpä M on maksimaalinen ortonormaali joukko eli Hilbertin kanta sisätuloavaruudelle l^2.

Osoitetaan seuraavaksi Hilbertin kannoille tulos, joka kertoo hieman enemmän Hilbertin kannan ominaisuuksista. Tämän tuloksen osoittamiseen tarvitaan lausetta 3.4.

LAUSE 3.12. *Olkoon Q Hilbertin avaruuden H ortonormaali osajoukko. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

(1) *Q on Hilbertin kanta.*
(2) $Q^{\perp} = \{0\}$.
(3) $\overline{\langle Q \rangle} = H$

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että kohdat (1) ja (2) seuraavat toisistaan. Olkoon Q Hilbertin kanta, jolloin se on maksimaalinen ortonormaali joukko. Tehdään antiteesi, että on olemassa $q' \in Q^{\perp}$, $q' \neq 0$. Tällöin ortogonaalikomplementin määritelmä sanoo, että $\langle q', q \rangle = 0$ kaikilla $q \in Q$. Siispä $\{\frac{q'}{\|q'\|}\} \cup Q$ on ortonormaali joukko. Maksimaalisen ortonormaalin joukon määritelmä sanoo, että jos $Q \subset (\{q'\} \cup Q)$, niin $Q = \{q'\} \cup Q$. Siispä $q' \in Q$. Tämä on ristiriita, koska $Q \cap Q^{\perp} = \{0\}$. Siis $Q^{\perp} = \{0\}$.

Jos taas $Q^{\perp} = \{0\}$, niin ei ole olemassa yhtään vektoria $q' \in Q^{\perp}, q' \neq 0$ siten, että $\langle q', q \rangle = 0$ kaikilla $q \in Q$. Siispä Q on varmasti maksimaalinen ortonormaali joukko eli se on Hilbertin kanta.

Osoitetaan, että kohdat (2) ja (3) seuraavat toisistaan. Olkoon $Q^{\perp} = \{0\}$. Siis $Q^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. Koska Q on H:n osajoukko, niin Lauseen 3.4 nojalla $Q^{\perp\perp} = \overline{\langle Q \rangle}$. Siispä $\overline{\langle Q \rangle} = H$. Oletetaan nyt, että $\overline{\langle Q \rangle} = H$. Tällöin lemman 3.1 nojalla $Q^{\perp} = \overline{\langle Q \rangle}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$. □

Tämä tulos on tärkeä, koska se kertoo määritelmää enemmän Hilbertin kannan ominaisuuksista. Ensinnäkin Hilbertin avaruuden ortonormaalin kannan ortogonaalikomplementti on aina $\{0\}$. Tämä tarkoittaa sitä, että ortonormaali joukko on maksimaalinen joukko, jos ja vain jos sen komplementti on $\{0\}$. Lisäksi, jos ortonormaali joukko $Q \subset H$ on niin laaja, että kaikki H:n vektorit voidaan lausua lineaarikombinaatioina joukon Q alkioista, niin tällöin $\overline{\langle Q \rangle} = H$ eli Q on Hilbertin kanta. Havainnollistetaan tätä esimerkin avulla.

ESIMERKKI 3.13. Esimerkissä 2.11 huomattiin, että kantavektoreiden lineaarikombinaatioiden joukko ei ole sama kuin jonoavaruus l^2. Muodostettu joukko koostuu vain sellaisista l^2:n vektoreista, joiden koordinaateista vain äärellisen moni on nollasta eroava. Näiden lineaarikombinaatioiden sulkeumana saadaan kuitenkin koko l^2.

3.3. Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmä

Tämän tutkielman viimeisenä tuloksena osoitetaan, että jokaisella Hilbert -avaruudella on ortonormaali kanta. Tämä tulos on erityisen tärkeä, koska tuloksen osoittamisen jälkeen Hilbertin kantoja voidaan hyödyntää missä tahansa Hilbert -avaruudessa.

Tarkastellaan kuitenkin aluksi äärellisulotteista vektoriavaruutta, ja osoitetaan, että äärellisulotteisessa sisätuloavaruudessa jokaiselle aliavaruudelle voidaan löytää ortonormaali kanta. Ortonormaali kanta voidaan muodostaa ortogonalisoimalla ja normittamalla valmiiksi tunnettu aliavaruuden kanta. Muodostettu kanta virittää täsmälleen saman aliavaruuden kuin alkuperäinen kanta.

Menetelmää, jossa aliavaruuden kannan $\{v_1, \ldots, v_k\}$ avulla muodostetaan joukko vektoreita $\{u_1, \ldots, u_k\}$ siten, että $u_1 = v_1$, ja jokainen vektori tästä eteenpäin on muotoa

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i,$$

jossa $v_n \in \{v_1, \ldots, v_k\}$, kutsutaan Gram-Schmidtin menetelmäksi. Menetelmä on nimetty tanskalaisen Jorgen Pedersen Gramin (1850-1916) ja saksalaisen Erhard Schmidtin (1876-1959) mukaan. Osoitetaan seuraavaksi, että Gram-Schmidtin menetelmän avulla muodostettu joukko vektoreita on aliavaruuden ortonormaali kanta.

LAUSE 3.14. *Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja $\{v_1, ..., v_k\}$ sen kanta, eli span$\{v_1, ..., v_k\} = U$. Olkoon joukko $\{u_1, \ldots, u_k\}$ Gram-Schmidt -prosessin avulla muodostettu joukko kannan vektoreista $\{u_1, \ldots, u_k\}$. Tällöin joukko $\{u_1, \ldots, u_k\}$ on aliavaruuden U ortonormaali kanta, eli*

(1) *Joukko $\{u_1, \ldots, u_k\}$ on lineaarisesti riippumaton.*

(2) *mille tahansa $k = 1, ..., n$ pätee*

$$span\{u_1, \ldots, u_k\} = span\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

TODISTUS. Osoitetaan lause induktiotodistuksella. Osoitetaan ensin, että väite pätee, kun $n = 2$. Gram-Schmidtin menetelmän mukaan $u_1 = v_1$ ja

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1.$$

Osoitetaan, että $u_1 \perp u_2$.

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= \langle v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1, u_1 \rangle \\ &= \langle v_2, u_1 \rangle - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \langle u_1, u_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Joukko $\{u_1, u_2\}$ on ortogonaalisena joukkona lineaarisesti riippumaton. Lisäksi, koska u_1 ja u_2 ovat kannan vektoreiden v_1 ja v_2 lineaarikombinaatioita, niin $span\{u_1, u_2\} = span\{v_1, v_2\}$. Siis väite pätee, kun $n = 2$ eli perusaskel on todistettu.

Tehdään induktio-oletus. Oletetaan, että väite pätee kun $n = k$. Oletetaan, että joukko $\{u_1, \ldots, u_k\}$ on ortogonaalinen joukko vektoreita, ja jokainen joukon vektori on muotoa

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1}.$$

Lisäksi $span\{u_1, ..., u_k\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Osoitetaan induktioväite, eli että väite pätee, kun $n = k + 1$. Tällöin

$$u_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle v_{k+1}, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \cdots - \frac{\langle v_{k+1}, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k.$$

Olkoon nyt $j < k + 1$.

$$\begin{aligned}\langle u_{k+1}, u_j\rangle &= \langle v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle v_{k+1}, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 - \cdots - \frac{\langle v_{k+1}, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k, u_j\rangle \\ &= \langle v_{k+1}, u_j\rangle - \frac{\langle v_{k+1}, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\langle u_1, u_j\rangle - \frac{\langle v_{k+1}, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\langle u_2, u_j\rangle - \cdots - \frac{\langle v_{k+1}, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle}\langle u_k, u_j\rangle.\end{aligned}$$

Koska $\{u_1, \ldots, u_k\}$ on ortogonaalinen joukko, niin $\langle u_1, u_j\rangle = 0$ kaikilla $i \neq j$. Siis

$$\langle u_{k+1}, u_j\rangle = \langle v_{k+1}, u_j\rangle - \frac{\langle v_{k+1}, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle}\langle u_j, u_j\rangle = 0.$$

Näin ollen myös joukko $\{u_1, \ldots, u_{k+1}\}$ on ortogonaalinen. Koska lisäksi joukko on lineaarisesti riippumaton, ja jokainen joukon vektori on lineaarikombinaatio kannan vektoreista, niin $span\{u_1, \ldots, u_{k+1}\} = span\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$. Muodostettu joukko on siis ortogonaalinen joukko, ja se virittää aliavaruuden U, joten se on U:n ortonormaali kanta. □

SEURAUS 3.15. *Jokaisella äärellisen sisätuloavaruuden V aliavaruudella U on ortonormaali kanta.*

HUOMAUTUS 3.16. Joukko $\{u_1, \ldots, u_k\}$ on ortonormaalina joukkona automaattisesti lineaarisesti riippumaton. Koska tämän joukon jokainen vektori on äärellinen lineaarikombinaatio joukon $\{v_1, \ldots, v_k\}$ vektoreista, ja koska muodostetun joukon dimensio on sama kuin alkuperäisen joukon dimensio, niin muodostettu joukko virittää myös aliavaruuden U.

Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmää ei voida suoraan soveltaa ääretönulotteisille vektoriavaruuksille, koska ääretönulotteisen vektoriavaruuden kohdalla menetelmän avulla muodostetut vektorit eivät ole äärellisiä lineaarikombinaatioita kannan vektoreista. Voidaan kuitenkin osoittaa, että jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta. Todistaminen tapahtuu Zornin lemman avulla. Zornin lemmaa käytetään tässä aksioomana, mutta halutessaan sen todistuksen voi lukea lähteestä [5].

LEMMA 3.17. *Osittain järjestetyssä joukossa $(P, \sim)$ on maksimaalinen alkio, jos sen jokaisella täysin järjestetyllä joukolla eli ketjulla on yläraja joukossa P.*

Järjestetyn joukon yläraja tarkoittaa samaa asiaa kuin joukon yläraja. Määritellään järjestetyn joukon yläraja vielä ennen varsinaista lauseen todistamista.

MÄÄRITELMÄ 3.18. Olkoon $p \in P$ ja $(P, \sim)$ järjestetty joukko. Tällöin p on P:n yläraja, jos $x \leq p$ kaikilla $x \in P$.

LAUSE 3.19. *Jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta.*

TODISTUS. Zornin lemma sanoo, että osittain järjestetyssä joukossa $(P, \sim)$ on maksimaalinen alkio, mikäli sen jokaisella täysin järjestetyllä osajoukolla eli ketjulla on yläraja joukossa P. Olkoon nyt P Hilbertin avaruuden ortonormaalit joukot. Tarkistetaan, että jokaisella ortonormaaleista joukoista muodostetulla inkluusion " $\subset$ " suhteen täysin järjestetyllä joukolla A on yläraja eli supremum. Supremum on tässä sellainen ortonormaali joukko $B \subset H$, johon jokainen joukon A alkio sisältyy. Joukko B on osajoukkojen $a \in A$ yhdiste

$$B = \bigcup_{a \in A} A.$$

Koska A on kokoelma P:n osajoukkoja, ja koska $P \subset H$, niin kaikille $a \in A$ pätee $a \in H$. Osoitetaan, että $B \in P$. Osoitetaan siis, että joukkojen A yhdiste B on myös ortonormaali joukko. Olkoon $x, y \in B$. Valitaan $a_y, a_x \in A$ siten, että $x \in a_x$ ja $y \in a_y$. Koska A on täysin järjestetty joukko, ja $a_x, a_y \in A$, niin pätee $a_x \subset a_y$ tai $a_y \subset a_x$. Valitaan, että $a_x \subset a_y$. Nyt kaikille $x \in a_x$pätee $x \in a_y$, joten joukot ovat ortogonaalisia tai samoja. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Rodney Coleman: *Calculus on Normed Vector Spaces.* Springer, 2012.

[2] Leszek Demkowicz, J. Tinsley Oden *Applied Functional Analysis*, CRC Press. Third edition. 2018.

[3] Matthew R. Gagne Hilbert Space Theory and Applications in Basic Quantum Mechanics, Mathematics Department, California Polytechnic State University, San Luis Obispo, 2013.

[4] Lauri Kahanpää ja Matti Hannukainen *Lineaarinen algebra ja geometria, Suoraviivaista ajattelua - osa 1*, University of Jyväskylä. Jyväskylä. 1999.

[5] Lauri Kahanpää *Funktioanalyysi, Suoraviivaista ajattelua - osa 2.* University of Jyväskylä. Jyväskylä. 2004.

[6] Matti Lehtinen *Matematiikan historian luentoja*, https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/histluennot.pdf, 18.7.2021.

[7] I. J. Maddox *Elements of Functional Analysis.* Cambridge. Second edition. 1988.

[8] Hanna Männistö: *Käyrän pituus metrisessä avaruudessa.* Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Jyväskylä. 2014.

[9] Jouni Parkkonen *Metriset avaruudet ja topologia*, Luentoja Jyväskylän yliopistossa, University of Jyväskylä. Jyväskylä. 2018.

[10] Steven Roman: *Advanced Linear Algebra.* Springer-Verlag, 1992.

[11] Mikko Saarimäki *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa*, Lecture Notes 65, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä. Jyväskylä. 2012.

[12] Nicholas Young: *An introduction to Hilbert space.* Cambridge University Press, 1989.