

Möbius-kuvaukset ja hyperbolinen geometria

Jenny Jääskeläinen

Matematiikan Pro Gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2021

Möbius-kuvaukset ja hyperbolinen geometria Jenny Jääskeläinen, *Möbius-kuvaukset ja hyperbolinen geometria*, Matematiikan pro gradu-tutkielma, 52 s. Jyväskylän Yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2021.

Tiivistelmä

Tämä Pro Gradu tutkielma käsittelee Möbius-kuvauksia, hyperbolista geometriaa sekä näiden välisiä yhteyksiä. Tutkielman alussa perehdytään kompleksilukujen perusominaisuuksiin sekä tarkastellaan laajennettua kompleksitasoa, joka sisältää normaalin kompleksitason lisäksi äärettömyyden. Lisäksi tarkastellaan suoria ja ympyröitä laajennetussa kompleksitasossa stereografisen projektion avulla. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan Möbius-kuvauksia. Möbius-kuvaukset ovat kompleksitason kuvauksia, joita käytetään suorien ja ympyröiden kuvaamisessa esimerkiksi peilaus- ja hyperbolisessa geometriassa. Möbius-kuvauksiin liittyviä ominaisuuksia ovat kiintopisteet, kaksoissuhde sekä Möbius-kuvausten matriisiesitys. Matriisiesitys osoittautuu hyödylliseksi työkaluksi Möbius-kuvausten käänteiskuvausten sekä yhdistettyjen Möbius-kuvausten etsinnässä. Möbius-kuvauksen muita tärkeitä ominaisuuksia geometrian kannalta ovat, että Möbius-kuvaus kuvaa yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi sekä Möbius-kuvaukset säilyttävät suorien tai käyrien väliset kulmien suuruudet.

Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan lyhyesti peilausgeometriaa. Alkuun määritellään peilausgeometrian ominaisuuksia, kuten peilaus ympyrän suhteen. Peilauksia käsitellään sekä yksikköympyrän, että minkä tahansa ympyrän C suhteen. Peilaus ympyrän suhteen eroaa euklidisesta peilauksesta, sillä se ei aina kuvaa suoria suoriksi. Peilauskuvauksen määritelmän jälkeen toteamme, että peilauskuvaus toimii äärettömyyspistettä lukuunottamatta samoin kuin Euklidinen peilaus suoran suhteen. Tutkielmassa tarkastellaan lisäksi Möbius-kuvausten ja peilausgeometrian välistä yhteyttä. Tutkielmassa osoitetaan, että Möbius-kuvaus on peilausten algebrallinen esitystapa ja jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää peilauskuvauksena ja jokainen peilaus voidaan esittää Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaatin avulla.

Luvussa 5 siirrytään tarkastelemaan Hyperbolista geometriaa. Hyperbolinen geometria eroaa Euklidisesta geometriasta paralleeliaksioman, eli yhdensuuntaisuuden suhteen. Tutkielmassa tarkastellaan hyperbolista geometriaa Henri Poincarén luoman *Poincarén kiekkomallin* mukaan. Kiekkomallissa tarkasteltava avaruus rajoittuu yksikkökiekon sisällä oleviin pisteisiin, suoriin ja ympyröihin niin, miten ne yksikkökiekkossa esiintyvät. Hyperbolisen geometrian luvussa määritellään hyperbolisen suoran käsite, hyperbolisten suorien yhdensuuntaisuus sekä aikaisemmin esitettyjen peilausten ominaisuuksia kiekkomallissa. Määrittelemme hyperbolisen kuvauksen ja tarkastelemme miten hyperbolinen kuvaus kuvaa hyperbolisia suoria, pisteitä ja kulmia.

Viimeisessä luvussa yhdistetään tutkielmassa esiteltyjä tietoja ja tarkastellaan Möbius-kuvausten ja hyperbolisen geometrian välistä yhteyttä. Viimeisen luvun päättös on, että hyperbolinen kuvaus voidaan esittää Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaatin yhdisteenä, jolloin Möbius-kuvausten ominaisuudet ovat voimassa hyperbolisessa geometriassa.

Möbius-kuvaukset ja hyperbolinen geometria

Jenny Jääskeläinen

SISÄLTÖ

1. Johdanto	3
2. Kompleksitaso	5
3. Möbius-kuvaukset	12
4. Peilausgeometria	21
5. Hyperbolinen geometria	29
6. Möbius-kuvaukset hyperbolisessa geometriassa	41
Lähdeluettelo	52

1. Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan Möbius-kuvauksiin ja hyperboliseen geometriaan, sekä näiden väliseen yhteyteen. Tutkielman aikana tuloksia verrataan Euklidiseen sekä affiniin geometriaan. Lukijan oletetaan tietävän Euklidisen geometrian ominaisuuksia sekä matematiikan peruslaskusäännöt.

Tutkielman pääasiallisina lähteinä toimivat Beardonin teos *Algebra and Geometry* [2], Brannan, Esplen ja Grayn teos *Geometry* [1] sekä Anderssonin teos *Hyperbolic Geometry* [4]. Niitä todistuksia, joita ei tästä tutkielmasta löydy, ovat löydettävissä kirjalähteistä, jotka ovat kirjattuna tutkielman loppuun lähdeluetteloon.

Aivan tutkielman alussa tarkastellaan lyhyesti kompleksilukuja, niiden ominaisuuksia sekä laajennettua kompleksitasoa. Kompleksiluku on muotoa $x + iy$ oleva luku, missä i on imaginaariyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$. Laajennettu kompleksitaso sisältää normaalin kompleksitason lisäksi äärettömyyden, jolloin suorita, jotka kulkevat äärettömyyden kautta kutsutaan laajennetuiksi suoriksi. Laajennetuista suorista ja ympyröistä muodostetaan yleisempi käsite *yleistetty ympyrä* joka on joko laajennettu suora tai ympyrä laajennetussa kompleksitasossa. Ensimmäisessä luvussa tarkastellaan lisäksi suorien ja ympyröiden kuvautumista stereografisessa projektiossa ja todetaan, että stereografinen projektio kuvaa suorat ja ympyrät ympyröiksi.

Luvussa 3 siirrytään tarkastelemaan Möbius-kuvauksia. Möbius-kuvaukset ovat saaneet nimensä Saksalaisen August Ferdinand Möbiuksen (1790-1868, Saksa) mukaan. Möbiuksen tunnetuimpia tuloksia on Möbius-nauhan löytäminen yhdessä John Benedict Listingin (1808-1882, saksa) kanssa. Tässä tutkielmassa keskitytään kuitenkin Möbiuksen mukaan nimettyihin Möbius-kuvauksiin. Möbius-kuvaukset ovat kompleksitason rationaalifunktioita, joiden geometrisiin ominaisuuksiin kuuluu muun muuassa se, että kuvaukset säilyttävät kulmien suuruuden ja kuvaavat suorat ja ympyrät joko suoriksi tai ympyröiksi. Tutkielmassa tarkastellaan Möbius-kuvauksiin kuuluvia kiintopisteitä, kaksoissuhdetta sekä kuvausten matriisiesitystä. Matriisiesitys osoittautuu hyödylliseksi työkaluksi Möbius-kuvausten käänteiskuvausten ja yhdistettyjen kuvausten löytämiseksi.

Erilaisia geometrioita on kehitetty ja tutkittu vuosien aikana paljon. 1870-luvulla geometrioita oli useita erilaisia, kuten Euklidinen-, affini-, projektiivinen-, peilaus- sekä hyperbolinen- ja elliptinen geometria. Yksi asia jonka kanssa matemaatikot kamppailivat, oli aiheiden uudelleen määrittäminen siten, että kaikki nämä geometriat saataisiin saman, yhtenevän luokittelun alle. Tämän luokittelun teki Felix Klein (1849-1925, Saksa), jonka kehittämän ohjelman *Erlanger Programm, 1872* mukaan geometrioita voitiin luokitella. Ohjelman ideana on tarkastella geometriaa kuvausten ryhmänä tarkasteltavassa avaruudessa. Alkioiden ominaisuudet, jotka pysyvät muuttumattomina ryhmän kuvauksissa, ovat niiden alkioiden geometrisia ominaisuuksia. Kleinin geometria sisältää kolme komponenttia: pisteiden joukon, eli tarkasteltavan avaruuden, kuvausten joukon, joka määrittelee muuttumattomat ominaisuudet sekä ryhmän, joka määrittelee kuinka kuvaukset esitetään. Tässä tutkielmassa lähestytään geometrioita Kleinin geometrian näkökulmista.

Luvussa 4 tarkastellaan lyhyesti peilauksia ympyrän suhteen sekä peilausgeometriaa. Peilausgeometrian keksijänä pidetään Ludwig Immanuel Magnusta (1770-1861,

Saksa), joka julkaisi vuonna 1831 artikkelin peilauskuvauksista, mikä johtaa peilausgeometriaan. Tutkielmassa tarkastellaan peilausta yksikköympyrän ja minkä tahansa ympyrän suhteen. Luvun päätuloksena osoitetaan, että Möbius-kuvaus on peilausten algebrallinen esitystapa ja jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää peilauskuvauksena ja jokainen peilaus voidaan esittää Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaatin avulla. Peilausgeometria eroaa affiinista ja Euklidisesta geometriasta, sillä peilausgeometriassa suora voi kuvautua myös ympyräksi.

Luvussa 5 pääsemme tarkastelemaan hyperbolista geometriaa. Kouluissa ja arjessa käytettävä geometria on Euklidista geometriaa, jonka kehittäjänä pidetään Eukleides Aleksandrialaista (*n.325-265 eaa. Egypti*). Eukleides julkaisi 13-osaisen teoksen, joka tunnetaan suomessa nimellä *Alkeet (Stoikheia)*. Eukleideen esitystapa perustuu aksiomiin, jotka on kaikki osoitettu todeksi loogisella päättelyllä tietyistä perusolettamuksista lähtien. Eukleideen aksiomia on viisi, ja viides näistä kulkee nimellä *paralleeliaksioma*. Ero Euklidisen geometrian ja hyperbolisen geometrian välillä koskee juuri tätä paralleeliaksiomaa. Euklidisessa geometriassa pisteen $P, P \notin l$ kautta kulkee täsmälleen yksi suoran l kanssa yhdensuuntainen suora m , kun taas hyperbolisessa geometriassa tällaisia yhdensuuntaisia suoria m on äärettömän monta.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan hyperbolista geometriaa Ranskalaisen Henri Poincarén (*1854-1912, Ranska*) kehittämän *kiekkomallin* avulla. Kiekkomallissa avaruus rajoittuu yksikkökiekon sisällä oleviin pisteisiin, suoriin ja ympyröihin niin, miten ne yksikkökiekossa esiintyvät. Hyperbolisen geometrian luvussa määritellään hyperbolinen suora, hyperbolisten suorien yhdensuuntaisuus sekä aikaisemmin esitettyjen peilausten ominaisuuksia kiekkomallissa. Lisäksi luvussa määritellään hyperbolinen kuvaus ja tarkastelemme miten hyperbolinen kuvaus kuvaa hyperbolisia suoria, pisteitä ja kulmia. Mainittavaa on, että hyperboliseen geometriaan kuuluu lisäksi paljon ominaisuuksia, joita ei tässä tutkielmassa esitetä. Tutkielmassa esitellään sellaiset tulokset, jotka ovat Möbius-kuvausten kanssa tiiviisti yhteydessä. Lisää hyperbolisen geometrian ominaisuuksia voi löytää lähteistä [1],[4] ja [5].

Tutkielman viimeisessä luvussa yhdistellään tutkielmassa esiteltyjä tietoja ja tarkastellaan Möbius-kuvausten ja hyperbolisen geometrian välistä yhteyttä hyödyntäen luvussa 4 ja 5 määriteltyjä peilauskuvauksia ja hyperbolisia kuvauksia. Viimeisen luvun päätulos on, että hyperbolinen kuvaus voidaan esittää Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaatin yhdisteenä, jolloin kaikki Möbius-kuvausten ominaisuudet ovat voimassa hyperbolisessa geometriassa. Lisäksi äärellisen monen hyperbolisen peilausten tai hyperbolisen kuvauksen yhdiste voidaan esittää Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaattien avulla. Luvussa määritellään suora hyperbolinen kuvaus, joka säilyttää hyperbolissa kuvauksissa kulman suuruuden lisäksi kulman aukeamissuunnan. Tutkielman lopussa määritellään hyperbolisen geometrian etäisyysfunktio ja pisteiden välinen hyperbolinen etäisyys sekä hyperbolinen keskipiste ja hyperbolinen ympyrä. Lopussa tutkitaan myös miten hyperbolinen ympyrä ja Euklidinen ympyrä liittyvät toisiinsa.

2. Kompleksitaso

Euklidisen tason $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ koordinaatteja merkitään tavallisesti reaalilukujen x ja y järjestettyjen parien (x, y) avulla. Myös kompleksiluvut voidaan ajatella tällaisina järjestettyinä pareina, kun käyttöön otetaan imaginaariyksikkö i , jolle pätee

$$i^2 = -1.$$

Kompleksiluku on muotoa $x + iy$ oleva luku, joka tarkoittaa samaa, kuin merkintä (x, y) . Siten $x + iy = u + iv$ jos, ja vain jos $x = u$ ja $y = v$. Merkitään jatkossa kompleksilukujen joukkoa \mathbb{C}

Esimerkki 2.1. Reaalisella polynomilla $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua reaalilukujen joukossa. Laajentamalla tutkittavaa joukkoa kompleksilukujen joukkoon \mathbb{C} , yhtälöllä on kuitenkin kompleksiset juuret i ja $-i$

Määritelmä 2.2. Kompleksilukujen joukko \mathbb{C} muodostuu kaikista pareista $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, joille määritellään yhteen- ja kertolasku seuraavasti: Olkoon $z := (x, y) \in \mathbb{C}$ ja $w := (u, v) \in \mathbb{C}$

$$z + w = (x + u, y + v)$$

$$zw := (xu - yv, yu + xv)$$

Tässä joukossa $(x, 0)$ on reaaliakseli ja $(0, y)$ imaginaariakseli. Nämä kaksi akselia muodostavat yhdessä kompleksitason.

Kompleksitason standardivektorit ovat $1 := (1, 0)$ ja $i := (0, 1)$, missä i on imaginaariyksikkö.

Lause 2.3. Kompleksiluvuille $1 := (1, 0)$ ja $i := (0, 1)$ on voimassa

$$1z = z, \text{ kaikilla } z \in \mathbb{C}$$

ja

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Lisäksi jokainen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ voidaan esittää muodossa

$$z = x1 + yi$$

TODISTUS. Olkoon $1 = (1, 0)$ ja $i = (0, 1)$ ja $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$1z = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot (1, 0) = (x, y) = z.$$

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$z = (x, y) = (x, 0) \cdot (0, 1) = x(1, 0) + y(0, 1) = x1 + yi$$

□

Lause 2.4. Kaikilla kompleksiluvuilla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on voimassa

- (1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ja $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (kommutatiivisuus)
- (2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ja $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (assosiatiivisuus)
- (3) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (distributiivisuus)
- (4) $z_1 + 0 = z_1$ ja $z_1 \cdot 1 = z_1$ (neutraali-alkio)
- (5) luvulla $z_1 = (x_1, y_1)$ on vastaluku $-z_1 = (-x_1, -y_1)$, jolle $z_1 + (-z_1) = 0$ ja jos $z_1 \neq 0$, luvulla z_1 on käänteisluku z_1^{-1} , jolle $z_1 z_1^{-1} = 1$

TODISTUS. Yhteenlaskua koskevat väitteet seuraavat yleisen vektoriavaruuden \mathbb{R}^n ominaisuuksista ja niiden tarkastaminen jätetään lukijalle. Kertolasku seuraa suoraan määritelmästä ja reaalilukujen laskusäännöistä: Olkoon $z_1 = (x_1, iy_1)$ ja $z_2 = (x_2, iy_2)$. Tällöin

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1) + i(y_2 x_1 + y_1 x_2) = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) = z_2 z_1. \end{aligned}$$

Löytääksemme kompleksiluvulle z käänteisluvun z^{-1} , oletetaan ensin tällaisen käänteisluvun olemassaolo ja etsitään käänteisluvulle täsmällinen ilmaisu.

Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ja oletetaan, että on olemassa käänteisluku $z^{-1} = u + iv$. Oletetaan lisäksi, että $zz^{-1} = 1$. Määritelmän nojalla

$$zz^{-1} = (xu - yv, yu + xv) = (xu - yv) + i(xv + yu) = 1,$$

joten on oltava $xu - yv = 1$ ja $xv + yu = 0$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $v = \frac{-yu}{x}$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön, saadaan $1 = xu + y^2 \frac{u}{x} = \frac{u(x^2 + y^2)}{x}$, joten $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Siten, jokaiselle nollasta eroavalle z , $z = x + iy$ (missä $x^2 + y^2 \neq 0$) määritellään käänteisluku

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Kompleksilukujen laskusäännöillä saadaan $zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$, jolloin z^{-1} todella on kompleksiluvun z käänteisluku \square

Määritelmä 2.5. Olkoon $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$.

- Kompleksiluvun reaaliosa on $Re(z) = x$ ja kompleksiluvun imaginaariosa on $Im(z) = y$
- Kompleksiluvun $z = x + iy$ kompleksikonjugaatti on luku $\bar{z} := x - iy$.
- Kompleksiluvun $z = x + iy$ itseisarvo, eli moduli, on luku $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Kompleksitason osajoukkoa $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\} = \{x + i0 : x \in \mathbb{R}\}$ kutsutaan reaaliakseliksi ja joukkoa $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0\} = \{0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$ imaginaariakseliksi.

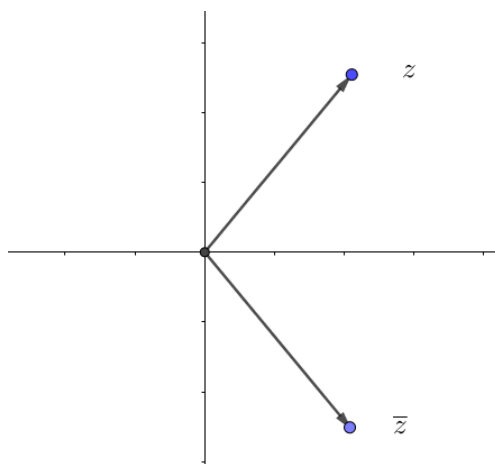
Huomautus 2.6. (1) Luvun z kompleksikonjugaatti \bar{z} on geometrisesti tarkasteltuna pisteen z peilikuva reaaliakselin suhteen. Kompleksikonjugaatille on voimassa

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$$

- (2) Kompleksiluvun $z = x + iy$ moduli on sama, kuin tasovektorin (x, y) euklidinen normi. Modulin neliö voidaan laskea kompleksikonjugaatin avulla:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Kaikille $z \in \mathbb{C}$ ja $w \in \mathbb{C}$ on voimassa $|z + w| \leq |z| + |w|$, $||z| - |w|| \leq |z - w|$, jotka seuraavat normin ominaisuuksista. Jos kompleksiluku z on reaalinen, eli $y = Im(z) = 0$ on luvun z moduli $|z| = \sqrt{x^2 + 0} = |x|$

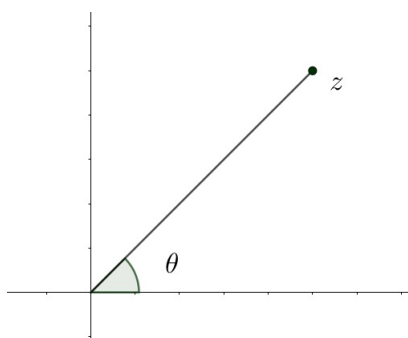


KUVA 1. Kompleksiluku ja sen konjugaatti

Esimerkki 2.7. Olkoot $z = 2 - 4i$ ja $w = 1 + 3i$. Tällöin

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= 2, \operatorname{Im}(w) = 3 \\ |z| &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}, |w| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ z + w &= 3 - i \\ zw &= 2 \cdot 1 - (-4) \cdot 3 + ((-4) \cdot 1 + 2 \cdot 3)i = 14 + 2i \\ \frac{z}{w} &= (2 - 4i)\left(\frac{1}{1^2 + 3^2} - i\frac{3}{1^2 + 3^2}\right) = (2 - 4i)\left(\frac{1}{10} - i\frac{3}{10}\right) \\ &= \dots = -1 - i \end{aligned}$$

Annetun, nolasta eroavan kompleksiluvun z moduli $|z|$, on origon ja pisteen z välisen janan pituus. Pisteen z *argumentti* $\operatorname{Arg} z$ on positiivisen reaaliakselin ja origosta pisteeseen muodostetun janan välinen kulma θ kierrettynä vastapäivään.



KUVA 2. Kompleksiluvun argumentti

Kun $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, on luvun $z/|z|$ itseisarvo yksi, joten se sijaitsee yksikköympyrän kehällä. Jokainen yksikköympyrän piste on muotoa $(\cos \theta, \sin \theta)$ ja yksikköympyrän kehän piste määrää napakulman θ luvun 2π kokonaislukumonikerran poissulkien yksikäsitteisesti. Näin saadaan

Lause 2.8. (Napakoordinaatit) Jokainen $z \in \mathbb{C}$ voidaan esittää muodossa

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta),$$

missä $\theta \in] - \pi, \pi]$.

Jos $z \neq 0$ ja luvulla z on myös esitys $z = |z|(\cos \psi + i \sin \psi)$, niin $\psi = \theta + k2\pi$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$

Määritelmä 2.9. Tason \mathbb{R}^2 isometria on kuvaus $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka säilyttää pisteiden väliset etäisyydet.

Euklidinen geometria on isometrioiden määräämä geometria. Isometriat ovat yksinkertaisia kuvauksia, jotka ovat siirto, peilaus, kierto sekä näiden yhdistetty kuvaus. Lisäksi jokainen isometria on suorien suhteen tehtyjen peilausten yhdiste [1, s 279].

Kompleksitasossa isometriat määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.10. Kompleksitason isometria on funktio $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, joka säilyttää pisteiden välisen etäisyyden.

Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja $w \in \mathbb{C}$ pätee siis $|f(z) - f(w)| = |z - w|$. Kompleksitason isometriat ovat jotain seuraavista tyypeistä: translaatio eli siirto, kierto, peilaus tai näiden yhdistelmiä. Tarkastellaan näitä yksinkertaisia kuvauksia sekä niiden ominaisuuksia hieman tarkemmin.

Tarkastellaan ensin translaatiota, eli kuvausta $t(z) = z + c$, $z \in \mathbb{C}$, missä $c = a + ib$. Tämä kuvaa minkä tahansa pisteen $x + iy \in \mathbb{C}$ pisteeksi

$$(x + a) + i(y + b),$$

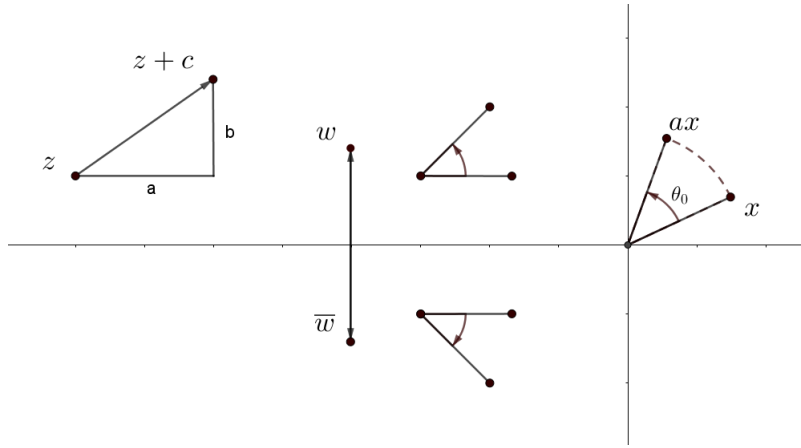
ja täten vastaa pisteen z siirtoa vektorin (a, b) verran. Tällainen kuvaus säilyttää kulmat, ja kuvaa suorat ja ympyrät suoriksi ja ympyröiksi.

Kuvaus $t(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ kuvaa minkä tahansa pisteen $x + iy \in \mathbb{C}$ pisteeksi $x - iy$ ja näin ollen vastaa peilausta x -akselin suhteen. Kuvaus kuvaa suorat ja ympyrät suoriksi ja ympyröiksi. Peilaus säilyttää kulmien suuruuden, mutta kääntää kulman aukeamissuunnan päinvastaiseksi.

Tarkastellaan kuvausta $t(z) = az$, $z \in \mathbb{C}$, missä $|a| = 1$. Koska $|a| = 1$, voimme kirjoittaa $a = \cos \theta_0 + i \sin \theta_0$, missä $\theta_0 = \text{Arg } a$. Kuvaus t kuvaa minkä tahansa pisteen $r(\cos \theta + i \sin \theta_0)$ pisteeksi

$$r(\cos(\theta + \theta_0) + i \sin(\theta + \theta_0))$$

ja täten vastaa kiertoa kulman $\theta_0 = \text{Arg } a$ verran. Jos $\text{Arg } a < 0$, kierto on myötäpäivään ja jos $\text{Arg } a > 0$, kierto on vastapäivään.



KUVA 3. Tason isometriat, translaatio, peilaus ja kierto

Lause 2.11. Jokainen tason isometria t voidaan esittää kompleksitasossa \mathbb{C} seuraavien yhtälöiden avulla

$$t(z) = az + b \text{ tai } t(z) = a\bar{z} + b,$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. Lisäksi kaikki tätä muotoa olevat kuvaukset ovat isometrioita.

TODISTUS. Jälkimmäinen väite on helppo todistaa, sillä jokainen lauseen muotoa oleva funktio on Lausetta 2.11 edellä esitettyjen isometrioiden yhdiste.

Olkoon t kompleksitason isometria ja olkoon $t(0) = b, t(1) = c$. Jos merkitään $a = c - b$, niin tällöin $|a|$ on pisteiden $t(0)$ ja $t(1)$ välinen etäisyys, ja koska t on oletuksen mukaan isometria, niin tällöin $|a| = 1$. Olkoon $s(z) = az + b$ isometria ja

$$s(0) = b = t(0) \text{ ja } s(1) = a + b = c = t(1).$$

Yhdistetty kuvaus $s^{-1} \circ t$ on isometria, joka kiinnittää pisteet 0 ja 1, joten koska yhdistetty kuvaus on isometria, se kiinnittää jokaisen x -akselin pisteen.

Nyt, sillä yhdistetty kuvaus $s^{-1} \circ t$ on isometria, voimme päätellä, että kuvaus $s^{-1} \circ t$ on joko identtinen siirto tai peilaus x -akselin suhteen. Jos kuvaus on siirto, niin $s^{-1} \circ t(z) = z$, jolloin $t(z) = s(z) = az + b$. Jos kuvaus on peilaus, niin $s^{-1} \circ t(z) = \bar{z}$, jolloin $t(z) = s(\bar{z}) = a\bar{z} + b$.

□

2.1. Suorat ja ympyrät. Kompleksiluvut tarjoavat helpon keinon kuvata suoria ja ympyröitä tasossa. Kun $|z - a|$ on pisteiden z ja a välinen etäisyys, a keski-
 r -säteisen ympyrän C yhtälö on $|z - a| = r$. Yhtäpitävästi saadaan

$$r^2 = (z - a)(\overline{z - a}).$$

Joten ympyrän C yhtälö on muotoa

$$z\bar{z} - (\bar{a}z + a\bar{z}) + |a|^2 - r^2 = 0.$$

Yleisemmin tarkasteltuna yhtälöllä $z\bar{z} - (\bar{a}z + a\bar{z}) + k = 0$ ei ole ratkaisua, jos $k > |a|^2$, yhtälöllä on yksi ratkaisu jos $k = |a|^2$ ja jos $k < |a|^2$ yhtälön ratkaisuja ovat kaikki ympyrän C pisteet ja muita ratkaisuja ei ole.

Mikä tahansa suora L koostuu joukosta pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana pisteistä u ja v , $u \neq v$. Täten suoran L yhtälö on $|z - u|^2 = |z - v|^2$, josta sieventämällä suoran yhtälö saadaan muotoon

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Kaikilla yhtälöillä, jotka ovat muotoa $az + b\bar{z} + c = 0$ ei ole ratkaisua. Erottamalla yhtälöstä reaali- ja imaginaariosat, saadaan kaksi lineaarista yhtälöä. Näiden yhtälöiden ratkaisut antavat suorat L_1 ja L_2 , jolloin yhtälöiden ratkaisujen joukko on $L_1 \cap L_2$. Kompleksiyhtälön ratkaisujen joukko on joko tyhjä joukko, sisältää yhden pisteen, tai on suora. Kootaan edellä tehdyt huomiot yhteen seuraavaksi lauseeksi:

Lause 2.12. *Olkoon a ja b nollasta eroavia. Tällöin yhtälöllä*

$$az + b\bar{z} + c = 0$$

- (1) *on yksi ratkaisu jos, ja vain jos $|a| \neq |b|$*
- (2) *ei ole ratkaisua jos, ja vain jos $|a| = |b|$ ja $b\bar{c} \neq \bar{a}c$*
- (3) *ratkaisu on suora jos, ja vain jos $|a| = |b|$ ja $b\bar{c} = \bar{a}c$*

2.2. Laajennettu Kompleksitaso. Kompleksilukujen joukkoa on toisinaan tarpeellista laajentaa lisäämällä siihen yksi piste, ääretön, jota merkitään symbolilla ∞ . Erityisesti tarkastellessa Möbius-kuvauksia, tällaiselle kompleksitason laajennukselle on tarvetta. Merkitään laajennettua kompleksitasoa \mathbb{C}_∞ . Laajennettu kompleksitaso koostuu kaikista kompleksitason \mathbb{C} pisteistä sekä pisteestä ∞ ,

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Luvulla ääretön, ∞ , on seuraavanlaiset ominaisuudet: kaikilla äärellisillä a ja kaikille $b \neq 0$ myös $b = \infty$ pätee

$$a + \infty = \infty + a = \infty$$

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$$

Lisäksi $a/0 = \infty$, kun $a \neq 0$ ja $b/\infty = 0$, kun $b \neq \infty$. Äärettömyyspisteen ajatellaan sijoittuvan äärettömän kauas, tarkastellaan sitä mistä suunnasta tahansa.

Laajennettua kompleksitasoa voidaan tarkastella geometrisesti pallon avulla. Olkoon \mathbb{S} yksikköpallonkuori,

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

Liitetään kompleksiluku $x + iy$ vastaamaan pistettä $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ ja olkoon kompleksitason ja pallon \mathbb{S} leikkausjoukko ympyrä $x^2 + y^2 = 1$.

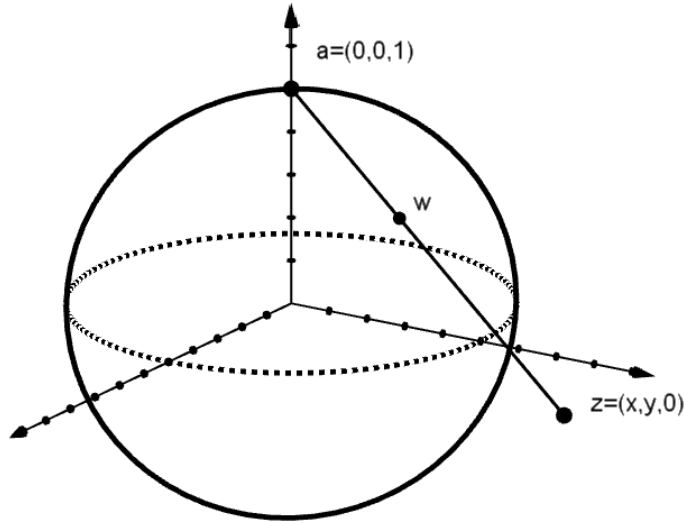
Tarkastellaan pallon pistettä $a = (0, 0, 1)$, jota voidaan ajatella pallon \mathbb{S} ”pohjoisnapana”. Jokainen kompleksitason \mathbb{C} piste z voidaan projisoida pisteestä a , kunnes se saavuttaa pallon \mathbb{S} jossain pisteessä $w \neq a$. Kuvauksella $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}$, $f(z) = w$ on stereografinen projektio kompleksitasolta pallon \mathbb{S} kuorelle.

Kuvaukselle $f(z)$ voidaan löytää suoran avulla tarkka kaava. Pisteiden a , w ja z kautta kulkeva suora L voidaan kirjoittaa muodossa

$$(0, 0, 1) + t[(x, y, 0) - (0, 0, 1)], \text{ missä } t \in \mathbb{R}.$$

Tämä suora leikkaa pallonkuoren \mathbb{S} kun

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1 - t)^2 = 1.$$



KUVA 4. Stereografinen projektio

Yhtälön kaksi ratkaisua ovat $t = 0$ ja $t = \frac{2}{x^2+y^2+1}$. Jos $t = 0$, niin $t = a$. Jos $t = \frac{2}{x^2+y^2+1}$ niin tämä vastaa tapausta $f(z)$, missä $z = x + iy$. Sijoittamalla nämä suoran yhtälöön saadaan

$$(1) \quad f(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Selvästi $f(z) = z$ aina kun $|z| = 1$. Lisäksi huomataan, että $f(z)$ on kompleksitason \mathbb{C} yläpuolella, kun $|z| > 1$ ja tason alapuolella, kun $|z| < 1$.

Kuvaus f on selvästi bijektio kompleksitasolta \mathbb{C} joukkoon $\mathbb{S} \setminus a$. Lisäksi, kun

$$\frac{2|x|}{|z|^2 + 1} \leq \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{2}{|z|},$$

ja vastaavasti y :lle, yhtälö (1) osoittaa, että $f(z) \rightarrow a$ kun $|z| \rightarrow \infty$. Näinpä on luonnollista lisätä piste ∞ kompleksitasoon ja tarkastella laajennettua kompleksitasoa \mathbb{C}_∞ ja määritellä $f(\infty) = a$. Tällöin f on bijektio laajennetulta kompleksitasolta \mathbb{C}_∞ pallokuorelle \mathbb{S} .

Geometrisesti on selvää, että stereografinen projektio kuvaa kaikki kompleksitason suorat pallon \mathbb{S} kuorelle, navan a lävistäväksi ympyräksi. Tämän lisäksi myös kompleksitason ympyrät kuvautuvat ympyröiksi.

Lause 2.13. *Stereografinen projektio kuvaa kompleksitason suorat ja ympyrät ympyröiksi.*

TODISTUS. Tarkastellaan pallon \mathbb{S} pinnalla olevaa ympyrää C , joka sijaitsee tasossa $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$. Olkoon $a = (0, 0, 1)$. Jos $a \notin C$, niin tällöin $\alpha_3 \neq \beta$. Jos piste $z \in \mathbb{C}$ kuvautuu ympyrälle C , niin tällöin yhtälön (1) nojalla

$$\alpha_1 \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1} \right) + \alpha_2 \left(\frac{2y}{|z|^2 + 1} \right) + \alpha_3 \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \beta$$

Nyt, jos $\alpha_3 \neq \beta$, kyseessä on normaali ympyrän yhtälö kompleksitasossa \mathbb{C} , sillä ympyrä C ei kulje pisteen a kautta. Jos taas $\alpha_3 = \beta$ yhtälö on laajennetun suoran yhtälö. Suora $f(L)$ kulkee pisteen a kautta, jolloin joukko $\{L \cup \{\infty\}\}$ on ympyrä, kun L on suora. \square

Jatkossa tulemme käsittelemään sekä ympyröitä, suoria sekä suoran ja äärettömyyspisteen ∞ yhdisteitä. Muodostetaan sitä varten seuraava määritelmä:

Määritelmä 2.14. Laajennetun kompleksitason *yleistetty ympyrä* on ympyrä tai suoran ja äärettömyyspisteen ∞ yhdiste $L \cup \{\infty\}$.

3. Möbius-kuvaukset

Tarkastellaan kompleksitason kuvausta $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$.

Ehdolla $ad - bc \neq 0$ rajataan pois vakiofunktio, sillä kahdelle eri pisteelle z ja w pätee

$$f(z) - f(w) = \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)},$$

jolloin f on vakio kun $ad - bc = 0$. Siispä oletus $ad - bc \neq 0$ on perusteltu. Tämä osoittaa lisäksi, että f on injektio.

Näiden kuvauksen yksinkertainen esitysmuoto aiheuttaa pari ongelmakohtaa, joita on hyvä tarkastella tarkemmin erikseen. Ensimmäiseksi, tällainen kuvaus voidaan esittää eri tavoin, sillä annetulla funktiolla f emme tiedä mitä kertoimet a, b, c ja d ovat. Esimerkiksi, jos f kuvaa kompleksiluvun z luvuksi $3z$, sen kertoimet voivat olla $3\pi, 0, 0$, ja π tai $3, 0, 0$, ja 1 .

Lause 3.1. *Olkoot $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ ja δ kompleksilukuja, joilla $(ad - bc)(\alpha\delta)(\beta\gamma) \neq 0$ ja että on olemassa ainakin kolme eri arvoa $z \in \mathbb{C}$ siten, että $cz + d \neq 0$, $\gamma z + \delta \neq 0$ ja*

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Tällöin on olemassa nollasta eroava kompleksiluku λ siten, että

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

TODISTUS. Olkoon z_1, z_2, z_3 lauseen mukaiset muuttujan z arvot. Toisen asteen yhtälö

$$(az + b)(\gamma z + \delta) = (cz + d)(\alpha z + \beta),$$

voidaan esittää muodossa

$$a\gamma z^2 + (a\delta + b\gamma)z + b\delta = c\alpha z^2 + (c\beta + d\alpha)z + d\beta.$$

Oletuksen nojalla saadulla neliöyhtälöllä on kolme eri ratkaisua, jolloin voimme päätellä, että $a\gamma = c\alpha$, $b\gamma + a\delta = c\beta + d\alpha$ ja $b\delta = d\beta$. Nämä ehdot ovat yhtäpitäviä sen kanssa, että on olemassa kompleksiluku μ siten, että

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

missä determinanttien perusteella $\mu^2 = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$. Tämä matriisiyhtälö voidaan esittää muodossa

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \frac{\mu}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

□

Näin ollen ensimmäinen ongelma on ratkaistu.

Toinen ongelma seuraa siitä, että esimerkiksi $1/(z - z_0)$ ei ole määritelty pisteessä z_0 . Tämä tarkoittaa, että ei ole olemassa joukon \mathbb{C} osajoukkoa, jossa kaikki tätä muotoa olevat kuvaukset ovat määriteltyjä. Tämä aiheuttaa pieniä haasteita, kun yritämme muodostaa näitä kuvauksia.

Esimerkki 3.2. Valitaan kuvaukset $f(z) = \frac{z+4}{z}$ ja $g(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Nyt g ei ole määritelty pisteessä 1, mutta kuitenkin

$$f(g(z)) = \frac{g(z) + 4}{g(z)} = \frac{(z+1) + 4(z-1)}{z+1} = \frac{5z-3}{z+1},$$

on määritelty pisteessä 1. Lisäksi, jos valitaan vielä kuvaus $h(z) = \frac{1}{z}$, niin

$$h(f(g(z))) = \frac{z+1}{5z-3},$$

joka ei ole määritelty pisteessä $z = \frac{3}{5}$. Yleisemmin sanottuna, kuvausten funktiosarja $f_1 \cdots f_n$ ei ole määritelty n :ssä eri kompleksitason pisteessä.

Tämä ongelma voidaan ratkaista laajentamalla kompleksitaso \mathbb{C} koskemaan laajennettua kompleksitasoa \mathbb{C}_∞ . Tällöin, jos $c \neq 0$, niin

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c},$$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

Määritelmä 3.3. Möbius-kuvaus on kompleksimuuttujan z sisältämä funktio $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

joillakin kompleksiluvuilla a, b, c ja d , joille $ab - cd \neq 0$. Jos $c \neq 0$ määritellään $f(\infty) = \frac{a}{c}$ ja $f(\frac{-d}{c}) = \infty$. Jos $c = 0$, niin $f(\infty) = \infty$

Määritelmästä seuraa, että jokainen Möbius-kuvaus on määritelty samassa joukossa \mathbb{C}_∞ , jolloin minkä tahansa kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on hyvin määritelty.

Lause 3.4. *Jokaisella Möbius-kuvauksella on käänteiskuvaus.*

TODISTUS. Olkoot

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ja } h(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Kuvaus f on selvästi Möbius-kuvaus ja kuvaus h on Möbius-kuvaus, sillä $da - ((-b)(-c)) = ad - bc \neq 0$. Lisäksi laskemalla saadaan, että $h(f(z)) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}_\infty$ ja $f(h(z)) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}_\infty$. Tällöin $h = f^{-1}$. □

Lause 3.5. *Kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus.*

TODISTUS. Olkoot

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \text{ja } h(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

Möbius-kuvauksia. Nyt

$$f(g(z)) = \frac{ag(z) + b}{cg(z) + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} = h(z).$$

Oletuksen nojalla tämä on myös Möbius-kuvaus □

Lause 3.6. *Jokainen Möbius-kuvaus on bijektio joukolta \mathbb{C}_∞ itselleen ja Möbius-kuvaukset muodostavat Möbiuksen ryhmän \mathcal{M} .*

TODISTUS. Lauseissa 3.4 ja 3.5 olemme jo käsitelleet Möbius-kuvauksien käänteiskuvausten olemassaoloa ja sitä, että kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus, riittää enää tarkastella neutraalialkion olemassaoloa. Neutraalialkio

$$I(z) = \frac{z + 0}{0z + 1}$$

on identtinen kuvaus ja siten Möbius-kuvaus. Näin ollen Möbius-kuvaukset muodostavat Möbiuksen ryhmän. □

Möbius-kuvaukset voidaan esittää erilaisten yksinkertaisten kuvausten yhdisteenä. Tarkastellaan ensin erilaisia yksinkertaisia kuvauksia esimerkin avulla.

Esimerkki 3.7. Möbius-kuvausta

$$f(z) = z + b, \text{ missä } b \in \mathbb{C},$$

sanotaan translaatioksi, eli siirroksi. Translaatio siirtää kompleksitason \mathbb{C} pisteitä luvun b verran ja säilyttää äärettömyyspisteen paikallaan, eli $f(\infty) = \infty$.

Toinen yksinkertainen kuvaus

$$f(z) = az, \text{ missä } a \neq 0,$$

on skaalaus, jos $a \in \mathbb{R}$. Jos $a \geq 1$, kyseessä on venytys ja jos $0 \leq a \leq 1$, kyseessä on kutistus. Jos $|a| = 1$, kyseessä on kierto, jolloin Möbius-kuvaus f kiertää kompleksitason pisteitä ja pitää äärettömyypisteen paikallaan.

Kolmas yksinkertainen kuvaus on inversio

$$f(z) = \frac{1}{z}, \text{ missä } z \neq 0.$$

Tämä kuvaus siirtää äärettömyypisteen origoon $f(\infty) = 0$ ja origon äärettömyyteen $f(0) = \infty$.

Lause 3.8. *Jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää enintään neljän kuvauksen yhdisteenä, josta jokainen kuvaus yhtä seuraavista muodoista $z \mapsto z + b$, $z \mapsto za$ ja $z \mapsto \frac{1}{z}$*

TODISTUS. Huomataan alkuun, että nämä kuvaukset ovat edeltävässä esimerkissä 3.7 esitellyt yksinkertaiset kuvaukset siirto, kierto, skaalaus ja inversio.

Olkoon f Möbius-kuvaus muotoa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Jos $c = 0$, niin $d \neq 0$ ja $f = f_2 \circ f_1$, missä $f_1(z) = \frac{a}{d}z$ ja $f_2(z) = z + \frac{b}{d}$. Jos $c \neq 0$, niin $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, missä $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_3(z) = kz$, $k = \frac{-(ad-bc)}{c^2}$ ja $f_4(z) = z + \frac{a}{c}$.

□

Esimerkki 3.9. Esitetään Möbius-kuvaus Lauseen 3.8 mukaisesti neljän kuvauksen yhdisteenä. Olkoon

$$f(z) = \frac{2z + 1}{3z + 4}$$

Möbius-kuvaus.

Nyt $c \neq 0$, jolloin Lauseen 3.8 mukaisesti, $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, missä

$$f_1(z) = z + \frac{4}{3}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}$$

$$k = \frac{-(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3)}{3^2} = \frac{-5}{9}$$

$$f_3(z) = kz = \frac{-5z}{9}, \quad f_4(z) = z + \frac{2}{3}.$$

Joten

$$\begin{aligned} f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 &= f_4 \left(\frac{-5}{3(3z + 4)} \right) = \frac{-5}{3(3z + 4)} + \frac{2}{3} = \frac{-5 + 2(3z + 4)}{3(3z + 4)} \\ &= \frac{3(2z + 1)}{3(3z + 4)} = \frac{2z + 1}{3z + 4} = f(z) \end{aligned}$$

3.1. Matriisiesitys. Möbius-kuvauksia voidaan kuvata matriisien avulla, kuten teimme jo Lauseessa 3.1.

Määritelmä 3.10. Möbius-kuvaus $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ voidaan esittää matriisimuodossa 2×2 -matriisina

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Tätä voidaan myös merkitä kuvauksena $\Phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$, missä $GL(2, \mathbb{C})$ tarkoittaa joukon \mathbb{C} kääntyvien matriisien yleistä lineaarista ryhmää. Tarkemmin sanottuna

$$\Phi : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow f, \quad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Lause 3.11. *Kuvaus $\Phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ on homomorfismi.*

TODISTUS. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

ja olkoon $f = \Phi(A)$ ja $g = \Phi(B)$. Olkoon lisäksi $h = \Phi(AB)$ Möbius-kuvaus joka muodostuu matriisien A ja B kertolaskusta. Täytyy osoittaa, että $h = \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B) = f \circ g$. Tämä on osoitettu Lauseessa 3.6. □

Huomautus 3.12. Lauseen 3.11 mukaisesti kahden Möbius-kuvauksen yhdistetty kuvaus voidaan löytää Möbius-kuvausten matriisiesitysten kertolaskun avulla.

Esimerkki 3.13. Olkoon

$$f = \frac{2z+1}{3z-i}, \quad \text{ja } g = \frac{2iz+1}{z-3}$$

Möbius-kuvauksia. Määritetään yhdistetty kuvaus $f \circ g$ matriisien avulla. Kuvausten matriisiesitykset ovat

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -i \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Yhdistetty kuvaus $f \circ g$ vastaa matriisituloa $A_1 A_2$,

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i+1 & -1 \\ 5i & 3+3i \end{bmatrix}.$$

Siispä yhdistetty kuvaus $f \circ g$ on muotoa

$$f \circ g = \frac{(4i+1)z-1}{5iz+(3+3i)}.$$

3.2. Kiintopiste.

Määritelmä 3.14. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, jolle pätee $f(z_0) = z_0$. Tällöin piste z_0 on kuvauksen f **kiintopiste**.

Möbius-kuvaksella on kiintopisteitä enintään 3. Tämä seuraa seuraavan yhtälön ratkaisujen lukumäärästä

$$\frac{az+b}{cz+d} = z, \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}_\infty$$

tai seuraavasta lauseesta:

Lause 3.15. *Olkoon z_1, z_2, z_3 ja w_1, w_2, w_3 joukon \mathbb{C}_∞ eri pisteitä. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus f , jolle $f(z_j) = w_j$ kaikilla $j = 1, 2, 3$.*

TODISTUS. Oletetaan alkuun, että mikään pisteistä z_j ei ole ∞ ja olkoon

$$g(z) = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \right) \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Tällöin $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ ja $g(z_3) = 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että jokin pisteistä z_j on ∞ . Valitaan piste $z_4 \neq 0$, joka on eri kuin z_1, z_2, z_3 ja olkoon $s(z) = \frac{1}{z - z_4}$. Tällöin $s(z) = \infty$ jos, ja vain jos $z = z_4$, jolloin mikään muu $s(z_1), s(z_2)$ tai $s(z_3)$ ei ole ∞ . Niinpä edellisten tulosten nojalla on olemassa Möbius-kuvaus g_1 , joka kuvaa $s(z_1), s(z_2)$ ja $s(z_3)$ pisteiksi $0, 1$ ja ∞ .

Kaikissa tapauksissa, voidaan löytää Möbius-kuvaus, joka on joko muotoa g tai $g_1 \circ s$, joka kuvaa pisteet z_1, z_2, z_3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ .

Vastaavasti, on olemassa Möbius-kuvaus h niin, että $h(w_1) = 0, h(w_2) = \infty$ ja $h(w_3) = 1$. Olkoon $f = h^{-1}g$. Tällöin f on haluttu kuvaus, sillä kaikilla j , $f(z_j) = h^{-1}g(z_j) = w_j$. Esimerkiksi $f(z_1) = h^{-1}g(z_1) = h^{-1}(0) = w_1$.

Yksikäsitteisyyden todistamista varten todetaan, että identtinen kuvaus on ainoa Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet $0, 1$ ja ∞ pisteiksi $0, 1$ ja ∞ . Jos

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

on Möbius-kuvaus joka kuvaa pisteen ∞ itselleen, niin tällöin $c = 0$. Lisäksi, jos f kuvaa pisteen 0 itselleen, niin tällöin $f(0) = \frac{b}{d} = 0$, jolloin $b = 0$. Tästä seuraa, että $f(z) = \frac{a}{d}z$. Koska f kuvaa pisteen 1 itselleen, niin $f(1) = \frac{a}{d} = 1$, mistä seuraa, että $a = d$. Yhdistämällä nämä tiedot, selvää että f on identtinen kuvaus $f(z) = z$ kuten haluttiinkin.

Oletetaan seuraavaksi, että f ja f' ovat Möbius-kuvauksia, jotka toteuttavat lauseen ehdot. Olkoon lisäksi $g(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$. Tällöin yhdistetyt kuvaukset $h_1 = g \circ f$ ja $h_2 = g \circ f'$ kuvaavat pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ ja ovat täten identtisiä kuvauksia. Nyt $h_1 \circ h_2$ on myös identtinen kuvaus, jolloin $h_1^{-1} \circ h_2 = h_1^{-1} \circ h_1$, mistä seuraa, että $h_1 = h_2$. Joten, $g \circ f = g \circ f'$, minkä perusteella $f = f'$

□

SEURAUS 3.16. *Jos Möbius-kuvauksella on kolme kiintopistettä, niin kuvaus on identtinen kuvaus.*

Tämä voidaan todistaa huomaamalla, että yhtälöllä $az + b = z(cz + d) = 0$, on kolme erillistä ratkaisua, kun kuvauksella $f = \frac{az+b}{cz+d}$ on kolme erillistä kiintopistettä. Joten tässä tapauksessa, $c = 0, a = d$ ja $b = 0$.

Mitkä tahansa laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ kolme eri pistettä kuvautuvat Möbius-kuvauksella laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ kolmeksi eri pisteeksi. Konstruoidaan Möbius-kuvaus, joka kuvaa laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ . Jos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, niin muotoa

$$f(z) = K \frac{z-z_1}{z-z_3}, \text{ missä } K \in \mathbb{C}$$

oleva Möbius-kuvaus kuvaa pisteen z_1 pisteeksi 0 ja pisteen z_3 pisteeksi ∞ . Saamme näin tarvittavan Möbius-kuvauksen valitsemalla K niin, että $f(z_2) = 1$. Jos $z_1 = \infty$, niin kuvaus f on muotoa $f(z) = K/(z - z_3)$, jos $z_3 = \infty$, niin kuvaus f on muotoa $f(z) = K(z - z_1)$. Nämä seuraavat suoraan Möbius-kuvausten Määritelmästä 3.3.

Esimerkki 3.17. (1) Määritetään Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet $\frac{1}{2}, -1$ ja 3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ .

Varmistamalla, että $f(\frac{1}{2}) = 0$ ja $f(3) = \infty$, niin olkoon

$$f(z) = K \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 3},$$

jollakin kompleksiluvulla K . Koska $f(-1) = 1$, niin saadaan yhtälö

$$1 = K \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 3},$$

josta ratkaisemalla saadaan $K = \frac{8}{3}$. Tällöin haluttu Möbius-kuvaus on muotoa

$$f(z) = \frac{8z - 4}{3z - 9}.$$

(2) Määritetään Möbius-kuvaus f , joka kuvaa pisteet i, ∞ , ja 3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ .

Jotta $f(i) = 0$ ja $f(3) = \infty$, on kuvauksen oltava muotoa

$$f(z) = \frac{z - i}{z - 3},$$

sillä määritelmän mukaisesti, kun $c \neq 0$, niin $f(\infty) = \frac{a}{c} = 1$. Nyt $f(\infty) = 1$, jolloin vakiota K ei tarvita, ja löydetty kuvaus on haluamamme Möbius-kuvaus.

Kuten Lauseen 3.15 todistuksessa, voimme etsiä Möbius-kuvaukset f , joka kuvaa pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ ja f' , joka kuvaa pisteet w_1, w_2, w_3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ . Tällöin etsimämme kuvaus on yhdistetty kuvaus $f'^{-1} \circ f$.

Esimerkki 3.18. Etsitään Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet $\frac{1}{2}, -1$ ja 3 pisteiksi i, ∞ , ja 3 .

Edeltävässä esimerkissä löydettiin Möbius-kuvaukset f_1 ja f_2 , jotka kuvaavat pisteet $\frac{1}{2}, -1$ pisteiksi $0, 1$ ja ∞ ja pisteet i, ∞ , ja 3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ . Näitä Möbius-kuvauksia vastaavaat matriisiesitykset ovat

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Jokaisella Möbius-kuvauksella on käänteiskuvaus (Lause 3.4) ja matriisiesityksen matriisit ovat kääntyviä, joten

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomautuksen 3.12 mukaan yhdistettyä kuvausta $f = f_2^{-1} \circ f_1$ vastaava matriisi on

$$\begin{bmatrix} -3 & -i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 - 3i & 12 + 9i \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Nyt haluttu Möbius-kuvaus on

$$f(z) = \frac{(-24 - 3i)z + 12 + 9i}{5z - 5}.$$

3.3. Kaksoissuhde. Lauseen 3.15 mukaan on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, joka kuvaa annetut kolme eri pistettä kolmeksi eri pisteeksi. Jos on annettu pisteet z_1, z_2, z_3, z_4 ja w_1, w_2, w_3, w_4 , niin on olemassa enintään yksi Möbius-kuvaus f , jolle

$$f(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Annetaan tällaisen kuvauksen olemassaoloa varten seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.19. Neljän erillisen pisteen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ **kaksoissuhde** on

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Erityisesti, jos jokin $z_j = \infty$, voimme määritellä

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4},$$

$$[z_1, \infty, z_3, z_4] = -\left(\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_4}\right),$$

$$[z_1, z_2, \infty, z_4] = -\left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_2}\right),$$

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

Edellä tehdystä valinnasta seuraa, että $[0, 1, w, \infty] = w$. Tämän määritelmän avulla voimme antaa ratkaisun määritelmää edeltävälle ongelmalle.

Lause 3.20. *Olkoon z_1, z_2, z_3, z_4 eri pisteitä ja w_1, w_2, w_3, w_4 eri pisteitä. Jos $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ niin tällöin on olemassa Möbius-kuvaus f , jolla $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Erityisesti kaikilla Möbius-kuvauksilla f ,*

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

TODISTUS. Oletetaan ensin, että on olemassa Möbius-kuvaus f niin, että $f(z_j) = w_j$ ja jokainen $w_j \neq \infty, z_j \neq \infty$. Jos $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, niin $cz+d \neq 0$ ja

$$w_j - w_k = f(z_j) - f(z_k) = \frac{(ad-bc)(z_j - z_k)}{(cz_j + d)(cz_k + d)}.$$

Tällöin $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$ ja $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ ovat voimassa. Tapaus, jossa jokin luvuista $z_j = \infty$ ja/tai $w_j = \infty$ seuraa samoin käyttämällä kaksoissuhdetta ja sopivaa muotoa $f(\infty)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$. Olkoon g ja h Möbius-kuvauksia niin, että $g(z_1) = 0, g(z_2) = 1, g(z_4) = \infty$ ja $h(w_1) = 0, h(w_2) = 1, h(w_4) = \infty$. Tällöin kaksoissuhteen yksikäsitteisyyden ja oletuksen nojalla saadaan

$$\begin{aligned} g(z_3) &= [0, 1, g(z_3), \infty] \\ &= [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] \\ &= [z_1, z_2, z_3, z_4] \\ &= [w_1, w_2, w_3, w_4] \\ &= [h(z_1), h(z_2), h(z_3), h(z_4)] \\ &= [0, 1, h(z_3), \infty] = h(w_3). \end{aligned}$$

Nyt kun valitaan $f = h^{-1}g$, niin kaikilla j , $f(z_j) = w_j$. □

Kaksoissuhdetta hyödyntämällä voimme etsiä Möbius-kuvauksen, joka kuvaa pisteet z_1, z_2, z_3, z_4 pisteiksi w_1, w_2, w_3, w_4 .

Jos Möbius-kuvaus kuvaa pisteet $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ pisteiksi $[w_1, w_2, w_3, w_4]$, niin tällöin

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}.$$

Esimerkki 3.21. Etsitään Möbius-kuvaus f , jolle $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$.

Kaksoissuhdetta hyödyntämällä, ratkaistavana on yhtälö $[w, 1, 2, 3] = [z, 0, 1, 2]$, jossa

$$\begin{aligned} [w, 1, 2, 3] &= \frac{(w-2)(1-3)}{(w-3)(1-2)} = \frac{2(w-2)}{w-3}, \\ [z, 0, 1, 2] &= \frac{(z-1)(0-2)}{(z-2)(0-1)} = \frac{2(z-1)}{z-2}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan yhtälö

$$\frac{2(w-2)}{w-3} = \frac{2(z-1)}{z-2}.$$

Ratkaisemalla yhtälö muuttujan w suhteen, saadaan

$$\begin{aligned} (2z-2)(w-3) &= (2w-4)(z-2) \\ 2zw - 2zw - 2w + 4w &= -4z + 6z + 8 - 6 \\ 2w &= 2z + 2 \\ w &= z + 1. \end{aligned}$$

Tällöin haluttu Möbius-kuvaus f , on $f(z) = z + 1$. Ratkaisu voidaan tarkistaa sijoittamalla pisteet 0, 1 ja 2 kuvaukseen f .

Kaksoissuhteen avulla voidaan myös määritellä yleistettyjä ympyröitä.

Lause 3.22. *Olkon z_1, z_2, z_3, z_4 eri pisteitä. Kaksoissuhde $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ on reaalin jos ja vain jos pisteet z_1, z_2, z_3, z_4 sijaitsevat yleistetyllä ympyrällä.*

TODISTUS. Jos on olemassa yleistetty ympyrä, joka kulkee pisteiden z_1, z_2, z_3 ja z_4 kautta, on olemassa yleistetty ympyrä C , joka kulkee pisteiden z_1, z_2 ja z_3 kautta. Tarkastellaan Möbius-kuvausta f , joka kuvaa pisteet z_1, z_2, z_3 pisteiksi $0, 1, \infty$. Yleistetyn ympyrän kuva Möbius-kuvauksessa on laajennettu reaaliakseli, sillä se on ainut yleistetty ympyrä, joka kulkee pisteiden $0, 1$ ja ∞ kautta. Jos z_4 on ympyrällä C , sen kuvapisteen $f(z_4)$ on oltava reaaliakselilla. Jos z_4 ei sijaitse ympyrällä C , niin sen kuva $f(z_4)$ ei voi olla reaaliakselilla. \square

Kaksoissuhde on siis sellainen ominaisuus, joka säilyy muuttumattomana Möbius-kuvauksissa.

3.4. Ympyrät ja suorat. Tässä luvussa tarkastellaan tarkemmin miten Möbius-kuvaus kuvaa suoria ja ympyröitä. Aikaisemmin tarkastelimme stereografista projektiota ja totesimme Lauseessa 2.13, että stereografinen projektio kuvaa kompleksitason suorat ja ympyrät ympyröiksi. Tämän luvun päätulos on, että Möbius-kuvaus kuvaa ympyrät ja suorat ympyröiksi tai suoriksi. Erityisesti Möbius-kuvaus kuvaa yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.

Lause 3.23. *Olkon C yleistetty ympyrä ja f Möbius-kuvaus. Tällöin $f(C)$ on yleistetty ympyrä. Lisäksi, olkon C_1 ja C_2 yleistettyjä ympyröitä. Tällöin on olemassa Möbius-kuvaus, joka kuvaa yleistetyn ympyrän C_1 yleistetyksi ympyräksi C_2 .*

TODISTUS. Olkon C yleistetty ympyrä ja pisteet z_1, z_2, z_3 pisteitä ympyrällä C . Olkon $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$ ja $w_3 = f(z_3)$. Nämä kolme pistettä sijaitsevat joko suoralla tai määrittävät yksikäsitteisen ympyrän, jolloin w_1, w_2, w_3 ovat yleistetyn ympyrän C' pisteitä. Olkon z mikä tahansa ympyrän C piste, $z \neq z_1, z_2, z_3$. Nyt Lauseen 3.22 nojalla $[z, z_1, z_2, z_3]$ on reaalin. Lisäksi

$$[f(z), w_1, w_2, w_3] = [f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)] = [z, z_1, z_2, z_3].$$

Näin ollen $f(z)$ sijaitsee pisteiden w_1, w_2, w_3 kautta kulkevalla yleistetyllä ympyrällä.

Olkon z_1, z_2, z_3 eri pisteitä yleistetyllä ympyrällä C_1 ja w_1, w_2, w_3 eri pisteitä yleistetyllä ympyrällä C_2 . Nyt Lauseen 3.15 mukaan, on olemassa Möbius-kuvaus f , joka kuvaa pisteet z_1, z_2, z_3 pisteiksi w_1, w_2, w_3 . Näin ollen todistuksen alun nojalla f kuvaa kaikki yleistetyn ympyrän C_1 pisteet yleistetyille ympyrälle C_2 . \square

4. Peilausgeometria

Ennen kuin siirrymme tarkastelemaan hyperbolista geometriaa, tarkastellaan lyhyesti peilausta, peilausgeometriaa sekä niiden yhteyttä Möbius-kuvauksiin. Euklidisessa geometriassa pisteitä, suoria tai erilaisia kuvioita voidaan peilata jonkun suoran suhteen. Tällöin jokaisen pisteen A etäisyys peilaussuorasta l on yhtä suuri kuin pisteen A peilapisteen A' etäisyys peilaussuorasta. Peilausgeometriassa voimme peilata pisteitä, suoria ja ympyröitä myös ympyröiden suhteen.

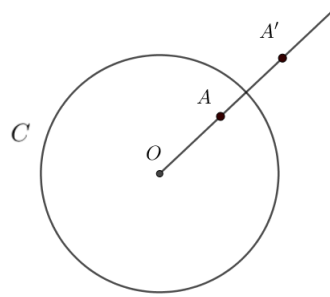
4.1. Peilaus. Euklidinen peilaus suoran suhteen kuvaa pisteet pisteiksi, suorat suoriksi ja ympyrät ympyröiksi. Peilausgeometriassa peilaussuora vaihdetaan ympyräksi, eli peilaus tehdään ympyrän suhteen. Määritellään alkuun peilaus ympyrän suhteen.

Määritelmä 4.1. Olkoon C r -säteinen ympyrä ja olkoon A mikä tahansa keskipisteestä O eroava piste.

Jos piste A' on keskipisteen ja pisteen A kautta kulkevalla suoralla \overrightarrow{OA} niin, että piste A' on joko pisteen O ja A välissä, tai piste A on pisteiden O ja A' välissä ja lisäksi $OA \cdot OA' = r^2$.¹ Tällöin piste A' on pisteen A **peilauspiste** ympyrän C suhteen.

Pistettä O sanotaan peilauksen keskuksiksi ja ympyrää C peilaavaksi ympyräksi.

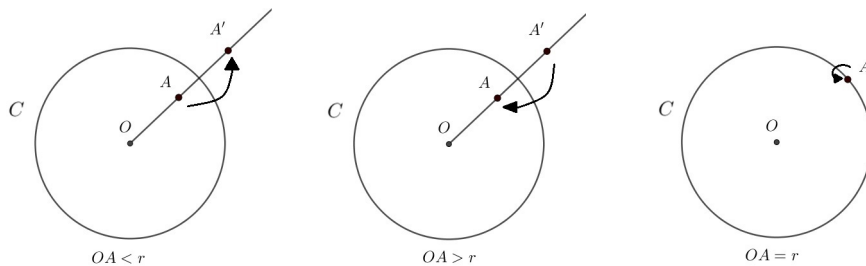
Kuvaus t , missä $t(A) = A', A \in \mathbb{R}^2 \setminus O$ on peilaus ympyrän C suhteen.



KUVA 5. Peilaus ympyrän C suhteen

Huomautus 4.2. Määritelmän mukaisesti $OA \cdot OA' = r^2$, minkä vuoksi kumpikaan OA tai OA' ei voi olla nolla, jolloin kumpikaan pisteistä A tai A' ei voi olla keskipiste O . Tämän vuoksi keskipiste O on poistettu kuvauksesta t .

Peilaus ympyrän suhteen vääristää tasoa huomattavasti, sillä se kuvaa ympyrän sisäpisteet ulkopisteiksi ja ympyrän ulkopisteet sisäpisteiksi. Jos $OA < r$, niin $OA' = \frac{r^2}{OA} > r$, kun taas jos $OA > r$, niin $OA' = \frac{r^2}{OA} < r$. Jokainen ympyrän C kehän piste kuvautuu itselleen.



KUVA 6. Peilaukset ympyrän suhteen

¹ $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2). x \cdot y = x_1x_2 + y_1y_2.$

Huomaa, jos A on pisteen A' peilauspiste, niin A' on pisteen A peilauspiste, sillä

$$OA \cdot OA' = r^2 \iff OA' \cdot OA = r^2.$$

Tässä mielessä peilaus ympyrän suhteen on sama kuin peilaus suoran suhteen: jos peilaamme pisteen ja peilaamme peilauspisteen, päädyimme takaisin alkuperäiseen pisteeseen. Eli peilaus ympyrän suhteen on itsensä käänteiskuvaus. Kuvaus t kuvautuu takaisin itselle, jos $t(t(A)) = A$. Tällöin on olemassa käänteiskuvaus t^{-1} ja $t = t^{-1}$.

Huomautus 4.3. Tästä eteenpäin peilauksella tarkoitetaan joko peilausta suoran suhteen tai peilausta ympyrän suhteen.

Peilaus ympyrän suhteen on erilainen kuvaus kuin Euklidisessa geometriassa. Euklidiset kuvaukset kuvaavat suorat suoriksi [1, s 66, 71].

Peilaus ympyrän suhteen ei ole Euklidinen kuvaus, sillä se ei kuvaa suoria suoriksi. Esimerkiksi olkoon \mathcal{C} yksikköympyrä ja l suora $x = 2$. Kaikki suoran l pisteet ovat ympyrän \mathcal{C} ulkopuolella, jolloin peilaus ympyrän \mathcal{C} suhteen kuvaa kaikki suoran pisteet ympyrän \mathcal{C} sisäpuolelle. Tällöin suoran l kuva ei voi olla suora.

Lause 4.4. *Peilaus yksikköympyrän \mathcal{C} suhteen on kuvaus*

$$t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, t(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus O$$

TODISTUS. Olkoon A piste $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus O$ ja olkoon A' pisteen A peilaus yksikköympyrän \mathcal{C} suhteen. Koska piste A' sijaitsee origon ja pisteen A kautta kulkevalla suoralla, niin pisteen A' koordinaatit ovat muotoa (kx, ky) , jollakin positiivisella k .

Yksikköympyrän \mathcal{C} säde on 1, jolloin $OA \cdot OA' = 1$. Tällöin $OA^2 \cdot OA'^2 = 1$ joten

$$(x^2 + y^2)(k^2x^2 + k^2y^2) = 1.$$

Tästä saadaan,

$$k^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2},$$

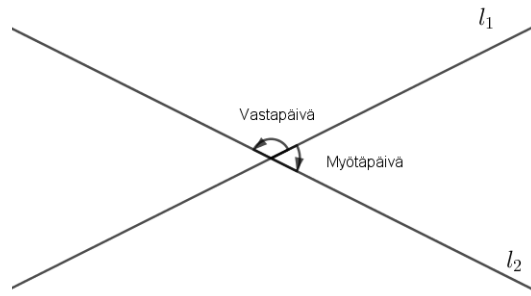
tällöin

$$k = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Pisteen A' koordinaatit ovat siis muotoa $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$. □

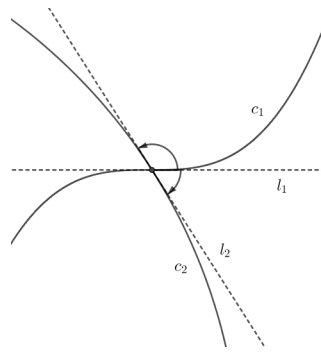
Suorien peilaukset origokeskisten ympyröiden suhteen kuvaavat origon ulkopuolella kulkevan suoran origossa punkteeratuksi ympyräksi ja origossa punkteerattu suora kuvautuu itselleen. Jos ympyrä ei kulje origon kautta, ympyröiden peilaukset origokeskisten ympyröiden suhteen kuvaavat ympyrät ympyröiksi ja origossa punkteerattu ympyrä kuvautuu origon ulkopuoliseksi suoraksi.

Kahden suoran l_1 ja l_2 välinen kulma voidaan mitata kahdella eri tavalla. Voimme tarkastella joko myötäpäivään tai vastapäivään syntyvää kulmaa ja tällöin kulman suuruus riippuu tästä valinnasta. Kulmaa määrittäessä pitää siis tietää sen suuruus ja suunta. Kahden käyrän välinen kulma määritellään leikkauspisteeseen muodostettujen tangenttien avulla.



KUVA 7. Suorien väliset kulmat.

Määritelmä 4.5. Olkoon c_1 ja c_2 käyriä, jotka leikkaavat pisteessä A ja olkoon l_1 ja l_2 leikkauspisteeseen muodostetut käyrien c_1 ja c_2 tangentit. Tällöin käyrien välinen myötäpäiväinen kulma leikkauspisteessä A on tangenttien myötäpäiväinen kulma pisteessä A . Vastaavasti käyrien välinen vastapäiväinen kulma on tangenttien välinen vastapäiväinen kulma.



KUVA 8. Käyrien väliset kulmat

Peilauksessa ympyrän suhteen on tärkeä tietää seuraava tulos. Todistus kulmalauseesta sekä suorien ja ympyröiden kuvautumisista peilauksessa ympyrän suhteen löytyvät tarkemmin lähteestä [1, s. 274].

Lause 4.6 (Kulmalause). *Peilaus minkä tahansa ympyrän suhteen säilyttää kulmien suuruuden, mutta kääntää niiden suunnan.*

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan peilauksia kompleksitasossa.

Lause 4.7. *Olkoon C , $a+ib$ -keskinen, r -säteinen ympyrä. Peilaus yksikköympyrän \mathcal{C} suhteen kompleksitasossa \mathbb{C} voidaan esittää kuvauksella*

$$t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c, \quad z \in \mathbb{C} \setminus c,$$

missä $c = a + ib$.

TODISTUS. Tarkastellaan ensin tilannetta, missä ympyrä C on yksikköympyrä \mathcal{C} . Tällöin pisteen (x, y) kuva peilauksessa ympyrän \mathcal{C} suhteen on Lauseen 4.4 mukaisesti $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$

Voimme kirjoittaa tämän yhtälön kompleksilukujen avulla, sillä Huomautuksen 2.6 (2) mukaan kompleksiluvun $z = x + iy$ moduli $|z|$ toteuttaa yhtälön $x^2 + y^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Tällöin pisteen $z = x + iy$ kuva peilauksessa ympyrän \mathcal{C} suhteen on

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi yleistä tapausta, eli olkoon C (a, b) -keskinen, r -säteinen ympyrä, $r > 0$. Tässä tapauksessa peilaus ympyrän C suhteen voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $t = t_3 \circ t_2 \circ t_1$, missä

$$t_1(z) = \frac{x - c}{r} \text{ on siirto ja skaalaus joka siirtää ympyrän } C \text{ yksikköympyrälle } \mathcal{C}$$

$$t_2(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \text{ on peilaus yksikköympyrän } \mathcal{C} \text{ suhteen ja}$$

$$t_3(z) = rz + c, \text{ on kuvauksen } t_1(z) \text{ käänteiskuvaus, joka siirtää yksikköympyrän } \mathcal{C} \text{ takaisin ympyräksi } C.$$

$$\text{Tällöin } t(z) = t_3 \circ t_2 \circ t_1(z) = \frac{r^2}{z-c} + c. \quad \square$$

Laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ peilauksissa voimme määrittää, että origon kuva peilauksessa on ääretön ∞ ja äärettömyyspisteen ∞ kuva on origo O . Määritellään seuraavaksi yleistetyn ympyrän peilaus ympyrän C suhteen laajennetussa kompleksitasossa \mathbb{C}_∞ .

Määritelmä 4.8. Olkoon C laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ yleistetty ympyrä. Tällöin peilaus ympyrän C suhteen laajennetussa kompleksitasossa on kuvaus t

(1) Jos C on O -keskinen r -säteinen ympyrä, niin

$$t(A) = \begin{cases} \text{pisteen } A \text{ käänteispiste ympyrän suhteen} & , \text{ jos } A \in \mathbb{C} \setminus O \\ \infty & , \text{ jos } A = 0 \\ 0 & , \text{ jos } A = \infty \end{cases}$$

(2) Jos C on laajennettu suora $l \cup \infty$, niin

$$t(A) = \begin{cases} \text{Peilaus suoran } l \text{ suhteen} & , \text{ jos } A \in \mathbb{C} \\ \infty & , \text{ jos } A = \infty \end{cases}$$

Laajennetussa kompleksitasossa suoritetuissa peilauksissa yleistetty ympyrä kuvautuu yleistetyksi ympyräksi.

4.2. Peilausgeometria. Olemme nyt tarkastelleet peilauksia suorien ja ympyröiden suhteen, joten nyt voimme määrittellä peilausgeometrian tarkemmin. Peilausgeometriassa tarkastellaan peilausten yhdisteitä. Määritellään alkuun peilauskuvaus.

Määritelmä 4.9. Kuvaus $t : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ on **peilauskuvaus** jos se voidaan esittää peilausten yhdisteenä.

Jokainen peilaus säilyttää kulmien suuruudet sekä kuvaa yleistetyt suorat yleistetyiksi suoriksi, saman täytyy olla voimassa myös peilausten yhdisteelle. Näin ollen saamme seuraavan tuloksen

Lause 4.10. *Peilauskuvaukset säilyttävät kulmien suuruudet ja kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.*

Muodostetaan seuraavaksi peilausgeometrian määritelmä. Määrittelyä varten täytyy tarkastaa muodostavatko peilauskuvaukset ryhmän.

Lause 4.11. *Peilauskuvausten joukko muodostaa ryhmän varustettuna yhdistetyillä kuvauksilla.*

TODISTUS. Täsmällisempi todistus löytyy lähteestä [1, s 296]. Todistus pohjautuu peilausten ominaisuuksiin. Peilauksien yhdisteet ovat peilauksia sekä peilaukset ovat kääntyviä kuvauksia. Identtinen kuvaus saadaan puolestaan muodostettua yhdistetyllä kuvauksella yksikköympyrän suhteen. Lisäksi yhdistetty kuvaus on aina assosiatiiivinen kuvaus.

Peilauskuvaukset määrittävät siis ryhmän varustettuna yhdistetyillä kuvauksilla. \square

Määritelmä 4.12. Peilausgeometria on joukon \mathbb{C}_∞ lukujen ominaisuuksia jotka säilyvät peilauskuvauksissa.

Vaikka äärettömyyspiste ∞ on tärkeä osa peilausgeometriaa, niin unohtamalla äärettömyyspiste ∞ , jäljelle jäävät tason \mathbb{C} pisteet voidaan tulkita tason \mathbb{R}^2 pisteinä ja laajennetut suorat voidaan tulkita tavallisina suorina.

Tällä tavoin ajateltuna, tason \mathbb{R}^2 vektorit voidaan tulkita lukuina laajennetussa kompleksitasossa \mathbb{C}_∞ ja päinvastoin. Peilaus suoran suhteen voidaan esittää peilauksena, joka kiinnittää äärettömyyspisteen ∞ , joten voimme tulkita jokaisen Euklidisen kuvauksen peilausten yhdisteenä, ja tällöin peilauskuvauksena.

Jotta voimme käsitellä peilausgeometrian ongelmia algebrallisesti, tarvitsemme peilauskuvaukselle algebrallisen esitystavan. Näytämme, että jokainen peilauskuvaus on joko muotoa

$$t(z) = f(z) \text{ tai } t(z) = f(\bar{z}).$$

Tässä f on Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Lause 4.13. *Jokainen Möbius-kuvaus on peilauskuvaus.*

TODISTUS. Olkoon $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Möbius-kuvaus. Jos $c = 0$, niin f on muotoa $f(z) = az + b$ ja $f(\infty) = \infty$ ja f on peilauskuvaus.

Jos $c \neq 0$, niin kun $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, niin kuvaus f on muotoa

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-ad + bc + a(cz + d)}{c(cz + d)} \\ &= -\left(\frac{ad - bc}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Nyt f voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $t_3 \circ t_2 \circ t_1$, missä

$$\begin{aligned} t_1(z) &= \begin{cases} cz + d & , \text{ jos } z \neq \infty, \\ \infty & , \text{ jos } z = \infty, \end{cases} \\ t_2(z) &= \begin{cases} \frac{1}{z} & , \text{ jos } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty & , \text{ jos } z = 0, \\ 0 & , \text{ jos } z = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

ja

$$t_3(z) = \begin{cases} -((ad - bc)/c)z + (a/c) & , \text{ jos } z \neq \infty, \\ \infty & , \text{ jos } z = \infty. \end{cases}$$

Tarkistetaan vielä yhdistetyn kuvauksen $t_3 \circ t_2 \circ t_1$ käyttäytyminen pisteissä ∞ ja $-d/c$.

$$\begin{aligned} t_3 \circ t_2 \circ t_1(\infty) &= t_3 \circ t_2(\infty) = t_3(0) = \frac{a}{c} = f(\infty), \\ t_3 \circ t_2 \circ t_1(-d/c) &= t_3 \circ t_2(0) = t_3(\infty) = \infty = f(-d/c). \end{aligned}$$

Kuvaukset t_1, t_2 ja t_3 ovat laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ kuvauksia ja ovat yksinkertaisten kuvausten, skaalauksen, kierron ja siirron laajennuksia. Kuvaukset ovat peilauskuvauksia, sillä ne voidaan esittää peilausten yhdisteenä ja näin ollen kuvaus f on peilauskuvaus. \square

Möbius-kuvaukset ovat siis peilauskuvauksia, jolloin ne säilyttävät kulmien suuruudet sekä kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi. Peilaus säilyttää kulmien suuruuden, mutta kääntää kulman suunnan (Lause 4.6), kun taas Möbius-kuvaus säilyttää sekä kulman suuruuden että kulman suunnan.

Vaikka peilaukset eivät ole Möbius-kuvauksia, peilausten ja Möbius-kuvausten välillä on tiivis yhteys.

Lause 4.14. *Jokainen peilaus $t : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ on voidaan esittää muodossa $t(z) = f(\bar{z})$, missä f on Möbius-kuvaus*

TODISTUS. Jos t on peilaus laajennetun suoran suhteen joukossa \mathbb{C}_∞ , tällöin kuvauksen on oltava Määritelmän 4.8 mukaan muotoa $t(z) = a\bar{z} + b$, jolla $t(\infty) = \infty$. Tästä seuraa, että $t(z) = f(\bar{z})$, missä f on Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{az + b}{0z + d}.$$

Toisaalta, jos t on peilaus r -säteisen, c -keskisen ympyrän suhteen laajennetussa kompleksitasossa \mathbb{C}_∞ , niin kuvaus t on Lauseen 4.7 mukaan muotoa

$$t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c = \frac{r^2 + c(\bar{z} - \bar{c})}{\bar{z} - \bar{c}} = \frac{c\bar{z} + (r^2 - c\bar{c})}{\bar{z} - \bar{c}}.$$

Jälleen, kuvaus t on muotoa $t(z) = f(\bar{z})$, missä f on Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{cz + (r^2 - c\bar{c})}{z - \bar{c}}.$$

□

Voimme nyt osoittaa, että jokainen peilauskuvaus on t voidaan esittää muodossa $t(z) = f(z)$ tai $t(z) = f(\bar{z})$, missä f on Möbius-kuvaus.

Lause 4.15. *Jokainen laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ peilauskuvaus t voidaan esittää muodossa*

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{tai} \quad t(z) = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$.

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että kahden peilauksen t_1 ja t_2 yhdistetty kuvaus on Möbius-kuvaus. Lauseen 4.14 nojalla voimme esittää peilaukset t_1 ja t_2 Möbius-kuvausten f_1 ja f_2 avulla $t_1(z) = f_1(\bar{z})$ ja $t_2(z) = f_2(\bar{z})$. Tällöin

$$t_1 \circ t_2(z) = t_1(f_2(\bar{z})) = f_1(\overline{f_2(\bar{z})}).$$

Jos

$$f_2(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

voimme määritellä Möbius-kuvauksen f_3 niin, että

$$f_3(z) = \overline{f_2(\bar{z})} = \frac{\overline{a\bar{z} + b}}{\overline{c\bar{z} + d}} = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}.$$

Sillä $t_1 \circ t_2 = f_1(\overline{f_2(\bar{z})}) = f_1(f_3(z))$, niin kuvaus $t_1 \circ t_2$ on kahden Möbius-kuvauksen yhdistetty kuvaus ja on näin ollen Möbius-kuvaus.

Olkoon t jokin peilauskuvaus ja olkoon

$$t = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n,$$

missä t_1, t_2, \dots, t_n ovat peilauksia. Jos n on parillinen, voimme esittää peilauksen t Möbius-kuvausten yhdisteenä yhdistämällä peilauksia muodossa

$$t = (t_1 \circ t_2) \circ (t_3 \circ t_4) \circ \dots \circ (t_{n-1} \circ t_n).$$

Tällöin t on Möbius-kuvaus f ja täten $t(z) = f(z)$.

Jos n on pariton, olkoon $r : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$,

$$r(z) = \begin{cases} \bar{z} & , \text{jos } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & , \text{jos } z = 0. \end{cases}$$

Koska r on itsensä käänteiskuvaus, saamme

$$t = (t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n) \circ r.$$

Tämä yhdiste sisältää parillisen määrän peilauksia, jolloin sen on oltava Möbius-kuvaus f . Joten $t(z) = f \circ r(z) = f(\bar{z})$. □

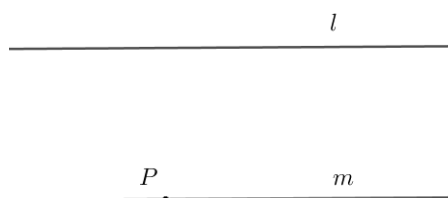
Aikaisemmin saadut tulokset Möbius-kuvauksista, kiintopisteistä ja pisteiden sekä ympyröiden kuvautumisista pätevät peilauksissa ja peilausgeometriassa. Mitkä tahansa laajennetun kompleksitason \mathbb{C}_∞ kolme pistettä kuvautuvat peilauskuvauksella, tarkemmin sanottuna Möbius-kuvauksella, kolmeksi laajennetun kompleksitason pisteeksi. Yleistetty ympyrä on määritelty kolmen eri pisteen avulla ja koska peilauskuvaus kuvaa yleistetyn ympyrän yleistetyksi ympyräksi, niin kuten aikaisemmin jo totesimme, laajennetun kompleksitason yleistetyille ympyröille C_1 ja C_2 voidaan löytää peilauskuvaus joka kuvaa yleistetyn ympyrän C_1 yleistetyksi ympyräksi C_2 .

5. Hyperbolinen geometria

Geometrian kannalta tärkein matemaatikko on kiistelemättä Eukleides (*Eukleides Aleksandrialainen n. 325-265 eaa. Egypti*), joka julkaisi 13-osaisen teoksen *Stoikheia* (Alkeet)[7], joissa hän käsitteli kreikkalaista geometriaa ja lukuteoriaa. Eukleideen esitystapa perustuu *aksioomiin*, joka toimii nykyaikaisen matematiikan prototyypinä. Aksiomat ovat perusoletuksia ja nämä oletetaan oikeiksi. Yleisesti maailmalla esitetään Eukleideen Alkeisiin pohjautuvaa geometriaa. Geometrian pohjalla olevia aksiomia on viisi, jotka sisältävät matemaattisia käsitteitä kuten piste, suora, puolisuora, ympyrä ja kulma. Eukleideen aksiomissa oletetaan joitakin asioita suoraviivaisesti ja pidetään itsestäänselvinä asioita joita ei nimetä erikseen. Aksiomajärjestelmää on laajennettu ja tarkennettu monen eri matemaatikon toimesta. Esimerkiksi David Hilbert (*David Hilbert 1861-1943. Saksa*) esitti vuonna 1902 laajassa teoksessaan (*Grundlagen der Geometrie*) 13 aksiomaa Eukleideen viiden aksioman sijaan. Hilbertin aksiomat määrittelevät tarkemmin sellaisia asioita, joita Eukleides oletti todeksi. Yksi Eukleideen aksiomista kulkee myös nimellä *paralleeliaksioma*, joka kuuluu Euklidiseen geometriaan vankasti. Paralleeliaksioman voi esittää monessa keskenään loogisesti yhtäpitävässä muodossa. Tässä esitettävä muotoilu ei kuitenkaan ole Eukleideen esittämä muoto, vaan tunnetaan myös nimellä *Playfairin aksioma*.

Paralleeliaksioma:

Annetun suoran l ulkopuolisen pisteen P kautta kulkee aina yksi ja vain yksi annettun suoran l kanssa yhdensuuntainen suora.



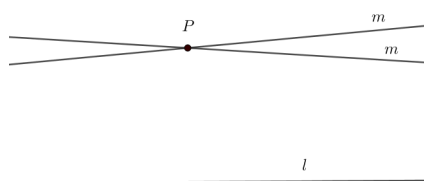
KUVA 9. Paralleeliaksioma

Paralleeliaksiomasta voidaan huomata seuraavaa: Aksioma väittää että tällainen yhdensuuntainen suora on olemassa ja tällaisia yhdensuuntaisia suoria on olemassa täsmälleen yksi. Aksioma tuntuu luonnolliselta, mutta monista yrityksistä huolimatta sitä ei ole saatu todistettua Eukleideen muiden aksiomien avulla. Myöhemmin osoitettiin, että tämä ei ole edes mahdollista. Tämä mahdollistaa hyperbolisen geometrian olemassaolon

Euklidisen geometrian ulkopuolelle on rakentunut erilaisia geometrioita jotka koostuvat Eukleideen aksiomista, mutta paralleeliaksioma on vaihdettu toiseen muotoiluun jossa on eri oletuksia. Tässä luvussa lähdemme tarkastelemaan **Hyperbolista geometriaa**, joka koostuu Euklidisen geometrian aksiomista, mutta paralleeliaksioma on korvattu seuraavalla

Hyperbolinen Paralleeliaksioma:

On olemassa suora l ja piste P suoran l ulkopuolella siten, että pisteen P kautta kulkee ainakin kaksi suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.



KUVA 10. Hyperbolinen Paralleeliaksioma

Hyperboliseen geometriaan liittyy muiden geometrioiden tavoin erilaisia tuloksia liittyen esimerkiksi kolmion kulmien summaan, kolmioihin, yhdenmuotoisuuteen sekä pinta-aloihin. Tässä tutkielmassa keskitymme sellaisiin ominaisuuksiin, joita voidaan tutkia ja tarkastella Möbius-kuvausten avulla. Lisää tietoa näistä muista tuloksista löytyy lähteestä [1], [4] ja [5].

Tarkastellaan Hyperbolista geometriaa Ranskalaisen matemaatikon Henri Poincarén (*Henri Poincaré 1854-1912. Ranska*) luoman mallin mukaan. Poincarén kiekkomallissa avaruus koostuu yksikkökiekkon $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ pisteistä. Kaikki tämän mallin kuviot esitetään geometrisesti niin, miten ne ilmaantuvat tässä kiekkossa.

Hyperboliseen geometriaan liittyvät merkinnät esitetään **lihavoituna**.

5.1. Hyperbolinen geometria: Kiekkomalli. Tarkastellaan hyperbolista geometriaa Poincarén kiekkomallissa.

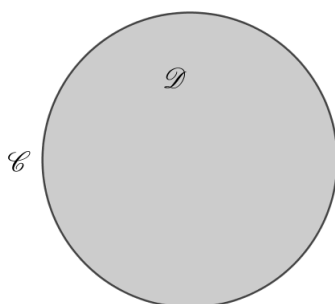
Hyperbolisen geometrian **pisteet**, ovat niitä pisteitä jotka sijaitsevat yksikkökiekkon \mathcal{D} sisällä

$$\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Geometrisesti esitettynä kiekko \mathcal{D} esitetään piirtämällä sen reuna

$$\mathcal{C} = \{z : |z| = 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

On huomioitava, että reunan \mathcal{C} pisteet eivät kuulu geometriaan.



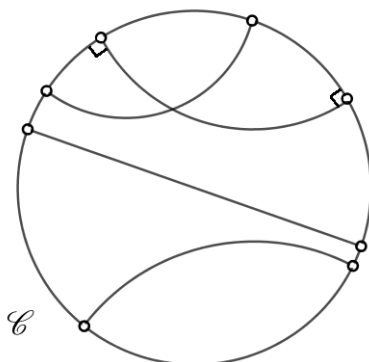
KUVA 11. Poincarén kiekkomalli

Hyperbolisella **suoralla** on tärkeä rooli tässä geometriassa.

Määritelmä 5.1. Hyperbolisen geometrian **suora** on se osa yleistettyä ympyrää, joka on kiekossa \mathcal{D} ja kohtaa reunan \mathcal{C} suorassa kulmassa.

Jokainen **suora** on osa yleistettyä ympyrää, joka kohtaa reunaympyrän kahdessa pisteessä. Näitä pisteitä sanotaan **suoran** reunapisteiksi. Huomioitavaa on, että **suoran** reunapisteet eivät ole **pisteitä**, sillä ne eivät ole kiekossa \mathcal{D} .

Seuraava kuva havainnollistaa erilaisia **suoria**. Jotkut näistä **suorista** ovat ympyröiden kaaria ja jotkut ovat janoja, itseasiassa kiekon \mathcal{D} halkaisijoita.



KUVA 12. Hyperbolisen geometrian *suorat*

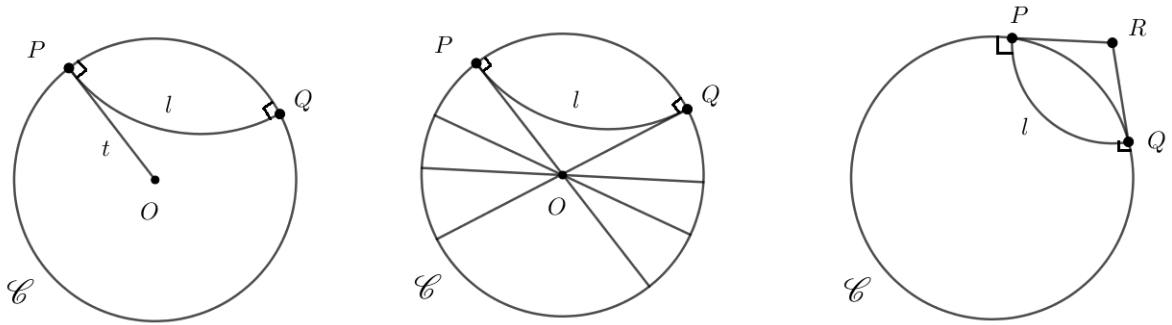
Hyperbolinen **suora** on osa origon kautta kulkevaa suoraa tai ympyrää. Jos l on suora, joka kulkee origon kautta, niin $l \cap \mathcal{D}$ on **suora**. Jos C on ympyrä, joka leikkaa kiekon reunan \mathcal{D} kohtisuorasti, niin $C \cap \mathcal{D}$ on **suora**.

Yksikään Euklidinen ympyrä, joka on kohtisuorassa kiekkoa \mathcal{D} kohtaan, ei kulje origon kautta: jos **suora** l leikkaa ympyrää \mathcal{C} pisteessä P , niin **suoran** l pisteeseen P muodostettu tangentti t on ympyrän \mathcal{C} säde, jolloin se kulkee origon kautta. Tällöin t on suora, joka leikkaa Euklidista ympyrää l pisteessä P ja koska ympyrät sijaitsevat

kokonaan tangenttien toisella puolella, tangentti t ei voi leikata **suoraa** l uudelleen. Joten l ei voi kulkea origon kautta.

Tästä voimme tehdä huomioita. Jos l on **suora**, joka on osa Euklidista ympyrää, ja olkoon l_2 kiekon \mathcal{D} keskipisteen kautta kulkeva **suora** niin, että **suorat** l_1 ja l_2 eivät leikkaa. Tällöin l_2 on kiekon \mathcal{D} halkaisija. Jos l leikkaa ympyrän \mathcal{C} pisteissä P ja Q , niin näihin pisteisiin muodostetut **suoran** l tangentit ovat ympyrän \mathcal{C} säteitä ja näin ollen kulkevat origon kautta. Tangentit jakavat kiekon \mathcal{D} neljään osaan, joista yhdessä sijaitsee **suora** l . Halkaisija l_2 voidaan selvästi piirtää kulkemaan origon pois lukien täysin kahden muun alueen kautta. Ja itseasiassa, tällaisia halkaisijoita on äärettömän monta. Jokainen halkaisija jakaa kiekon \mathcal{D} kahteen osaan, joista toisessa sijaitsee **suora** l .

Huomioitavaa on myös se, että jos l on **suora**, joka on osa Euklidista ympyrää ja l leikkaa ympyrän \mathcal{C} pisteissä P ja Q , niin ympyrän keskipiste R on ympyrän \mathcal{C} pisteisiin P ja Q muodostettujen tangenttien leikkauspiste. Näin ollen piste R on ympyrän \mathcal{C} ulkopuolella.



Pääsemme esittämään **suorille** tarkempaa analyttistä esitystapaa seuraavan lemmän avulla.

Lemma 5.2. *Suoran l yhtälö on yhtä seuraavista muodoista*

$$ax + by = 0, \text{ missä } a \neq 0 \text{ ja } b \neq 0$$

tai

$$x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0, \text{ missä } f^2 + g^2 > 4.$$

Lemman todistusta varten todistetaan ensin seuraava lause

Lause 5.3 (Kohtisuoruudesta). *Kaksi leikkaavaa ympyrää C_1 ja C_2 , joiden yhtälöt ovat*

$$\begin{aligned} C_1 &= x^2 + y^2 + f_1x + g_1y + h_1 = 0 \text{ ja} \\ C_2 &= x^2 + y^2 + f_2x + g_2y + h_2 = 0, \end{aligned}$$

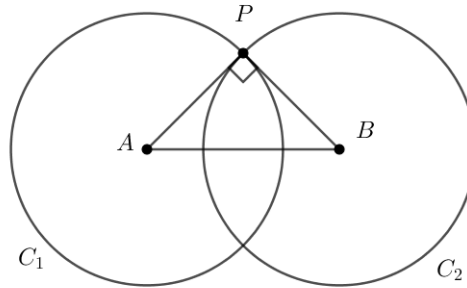
ovat kohtisuorassa toisiaan vasten jos, ja vain jos

$$f_1 f_2 + g_1 g_2 = 2(h_1 + h_2).$$

TODISTUS. Ympyrän C_1 keskipiste on pisteessä $A = (-\frac{1}{2}f_1, -\frac{1}{2}g_1)$ ja sen säde on $r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - h_1}$. Vastaavasti, ympyrän C_2 keskipiste on pisteessä $B = (-\frac{1}{2}f_2, -\frac{1}{2}g_2)$ ja sen säde on $r_2 = \sqrt{\frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_2^2 - h_2}$.

Olkoon P yksi ympyröiden leikkauspisteistä. Tarkastellaan nyt muodostuvaa kolmiota $\triangle ABP$. Jos ympyrät kohtaavat toisensa suorassa kulmassa, niin suora AP on ympyrän C_2 tangenttisuora ja tällöin se on kohtisuorassa suoraa BP kohtaan. Joten kolmio $\triangle ABP$ on suorakulmainen ja Pythagoraan lauseen avulla saamme

$$AP^2 + BP^2 = AB^2$$



Jos edeltävä yhtälö on voimassa, niin kolmion $\triangle ABP$ on oltava suorakulmainen kolmio ja ympyröiden on leikattava kohtisuorasti.

Nyt

$$AP^2 = r_1^2 = \frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - h_1 \text{ ja}$$

$$BP^2 = r_2^2 = \frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_2^2 - h_2.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left(\frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}g_1 - \frac{1}{2}g_2\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}f_1^2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 + \frac{1}{4}f_2^2\right) + \left(\frac{1}{4}g_1^2 - \frac{1}{2}g_1 g_2 + \frac{1}{4}g_2^2\right). \end{aligned}$$

Sijoittamalla AP^2 , BP^2 ja AB^2 yhtälöön $AP^2 + BP^2 = AB^2$ ja sieventämällä yhtälöä, voimme päätellä että yhtälö on yhtäpitävää yhtälön

$$-h_1 - h_2 = -\frac{1}{2}f_1 f_2 - \frac{1}{2}g_1 g_2$$

kanssa. Tämä yhtälö voidaan vielä esittää muodossa

$$f_1 f_2 + g_1 g_2 = 2(h_1 + h_2).$$

□

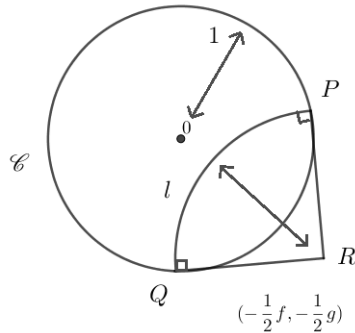
Seuraavaksi voimme palata kohtisuoruustestiä edeltävän Lemman 5.2 todistukseen.

TODISTUS. Hyperbolisen geometrian *suora* on yleistetty ympyrä, joten tarkastellaan erikseen tapauksia, joissa *suora* on osa Euklidista suoraa tai osa Euklidista ympyrää.

Jos *suora* on osa origon kautta kulkevaa suoraa, niin se on selvästi muotoa $ax + by = 0$, missä a ja b ovat nolasta eroavia kertoimia.

Jos *suora* on osa ympyrää C , joka leikkaa kiekkon \mathcal{D} reunaa \mathcal{C} suorassa kulmassa. Olkoon ympyrän C yhtälö muotoa

$$x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0, \text{ joillakin reaaliluvuilla } f, g \text{ ja } h.$$



Ensinnäkin, kohtisuoruustestin nojalla, mikä tahansa tätä muotoa oleva ympyrä leikkaa yksikköympyrää \mathcal{C} , $x^2 + y^2 - 1 = 0$ jos ja vain jos

$$f \cdot 0 + g \cdot 0 = 2 \cdot (h + (-1)).$$

Näin on, jos ja vain jos $h = 1$. Joten ympyrän C yhtälön on oltava muotoa

$$x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0, \text{ joillakin } f \text{ ja } g.$$

Ympyrän C keskipisteen $(-\frac{1}{2}f, -\frac{1}{2}g)$ on oltava ympyrän \mathcal{C} ulkopuolella, jotta $(-\frac{1}{2}f)^2 + (-\frac{1}{2}g)^2 > 1$, joka voidaan yhtäpitävästi esittää muodossa $f^2 + g^2 > 4$.

Lisäksi, ympyröiden C ja \mathcal{C} täytyy leikata. Tämä on mahdollista jos ja vain jos

$$1 + \text{ympyrän } C \text{ säde} > \text{ympyrän } C \text{ keskipisteen etäisyys origosta.}$$

Nyt, sillä $h = 1$, voimme esittää tämän vaatimuksen muodossa

$$1 + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 - 1} > \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2}.$$

Tiedämme jo, että $\sqrt{\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2} > 1$ jolloin edeltävä epäyhtälö seuraa kun osoitamme, että

$$1 + \sqrt{t - 1} > \sqrt{t}, \text{ kaikilla } t > 1.$$

Olkoon $F(t) = 1 + \sqrt{t-1} - \sqrt{t}$. Tällöin

$$F(1) = 1 + \sqrt{0} - \sqrt{1} = 0$$

ja

$$F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}}{2\sqrt{t-1}\sqrt{t}} > 0.$$

Tästä seuraa, kun $F(t) > F(1) = 0$ kaikilla $t > 1$, joten epäyhtälö $1 + \sqrt{t-1} > \sqrt{t}$ on tosi.

□

Tämän lemmän avulla voimme määrittää yksikköympyrän ulkopuolella olevan **suoran** yhtälön, joka on osa Euklidista ympyrää.

SEURAUUS 5.4. *Olkoon $\alpha = a + ib$ piste yksikköympyrän \mathcal{C} ulkopuolella. **Suoran** yhtälö, joka on osa α -keskistä Euklidista ympyrää on*

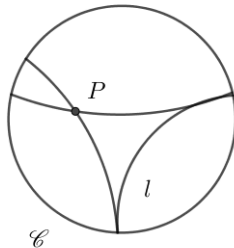
$$x^2 + y^2 - 2ax - by + 1 = 0.$$

Suurin ero Euklidisen geometrian ja Hyperbolisen geometrian välillä liittyy paralleeliaksiomaan, eli suorien yhdensuuntaisuuteen. Määritellään seuraavaksi yhdensuuntaisuus Hyperbolisessa geometriassa. Määritelmässä on hyvä muistaa, että yksikkökierokkeen \mathcal{D} reuna \mathcal{C} ei kuulu yksikkökierokseen \mathcal{D} .

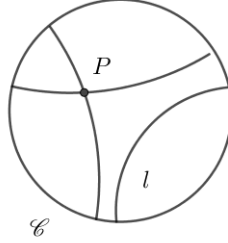
Määritelmä 5.5. Kaksi eri **suoraa** ovat yhdensuuntaisia, jos ne eivät leikkaa kiekossa \mathcal{D} . Lisäksi **suorat** ovat

- (1) **asymptoottisesti yhdensuuntaisia** jos yleistetyt Euklidiset ympyrät, joiden osia ne ovat, leikkaavat yksikköympyrän \mathcal{C} pisteessä;
- (2) **ultrayhdensuuntaisia** jos yleistetyt Euklidiset ympyrät, joiden osia ne ovat eivät leikkaa yksikköympyrällä \mathcal{C} .

Huomautus 5.6. (1) Määritelmästä seuraa, että annetulla **suoralla** l on olemassa täsmälleen kaksi pisteen $P \in \mathcal{D}$, $P \notin l$ kautta kulkevaa, asymptoottisesti yhdensuuntaista **suoraa**.



- (2) Vastavasti, millä tahansa annetulla **suoralla** l on olemassa äärettömän monta pisteen $P \in \mathcal{D}$, $P \notin l$ kautta kulkevaa ultrayhdensuuntaista **suoraa**.



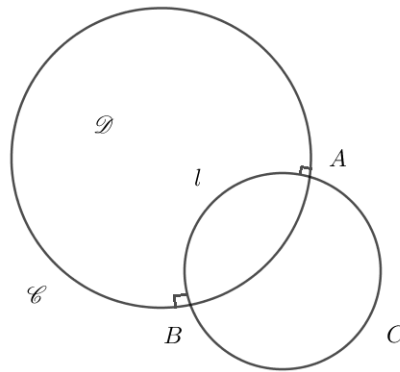
Eri geometrioissa peilaus suoran suhteen ja peilaus ympyrän suhteen ovat tärkeässä roolissa. Yksikkökieken \mathcal{D} peilaus halkaisijan suhteen kuvaa yksikkökieken \mathcal{D} itselleen. Itseasiassa näin käy myös peilauksessa origon ulkopuolella olevan **suoran** suhteen.

Lause 5.7. *Olkoon l suora, joka on osa ympyrää C . Tällöin peilaus ympyrän C suhteen kuvaa yksikköympyrän \mathcal{C} yksikköympyrälle \mathcal{C} ja yksikkökieken \mathcal{D} yksikkökielelle \mathcal{D} .*

TODISTUS. Olkoon A ja B ympyrän C ja yksikköympyrän \mathcal{C} leikkauspisteitä.

Peilaus ympyrän C suhteen on identtinen kuvaus ympyrällä C . Yksikköympyrä \mathcal{C} kuvautuu ympyräksi, joka leikkaa ympyrää C kohtisuorasti pisteittä A ja B . Tällaisia ympyröitä on olemassa täsmälleen yksi, ympyrä \mathcal{C} itse. Näinpä peilaus ympyrän C suhteen kuvaa ympyrän \mathcal{C} itselleen.

Kieken \mathcal{D} pisteet ovat yksikköympyrän \mathcal{C} sisäpuolella, jolloin kiekon \mathcal{D} täytyy kuvautua joko ympyrän \mathcal{C} kuvan sisäpuolelle tai ulkopuolelle. **Suoran** l pisteet kuvautuvat peilauksessa ympyrän C suhteen itselleen, jolloin kiekon \mathcal{D} kuvan on oltava kiekko \mathcal{D} itse.



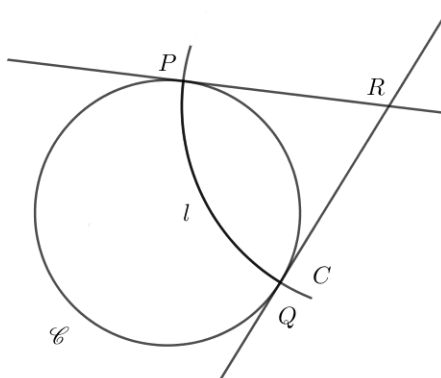
□

Tiedämme nyt, että peilaus **suoran** l suhteen kuvaa kiekon \mathcal{D} itselleen. Lisäksi tiedämme, että peilauskuvauksen t yhdistetty kuvaus itsensä kanssa $t \circ t$ on identtinen kuvaus.

Koska vastaavat ominaisuudet pätevät Euklidisissa peilauksissa, voimme muodostaa seuraavan määritelmän.

Määritelmä 5.8. Olkoon l **suora** ja l' sen määräämä yleistetty suora tasossa. Oletetaan lisäksi, että \mathcal{P} on peilaus suoran l' suhteen. Tällöin **hyperbolinen peilaus** suoran l suhteen kiekossa \mathcal{D} on kuvauksen \mathcal{P} rajoittuma kiekkoon \mathcal{D} .

Huomautus 5.9. (1) Jos **suora** l on osa ympyrää C joka leikkaa yksikköympyrän \mathcal{C} pisteissä P ja Q . Pisteisiin P ja Q muodostetut ympyrän \mathcal{C} tangentit leikkaavat peilauksen keskipisteessä R .



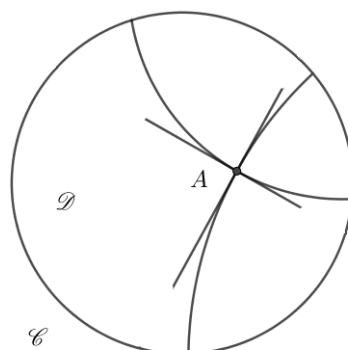
(2) Lause 5.7 voidaan muotoilla myös seuraavasti: Hyperbolinen peilaus minkä tahansa **suoran** l suhteen kuvaa yksikkökiekon \mathcal{D} itselleen.

Hyperboliset peilaukset ovat hyperbolisen geometrian rakennuspalikoita. Äärellisen monen hyperbolisen peilauksen yhdistettä kutsutaan **hyperboliseksi kuvaukseksi**. Näiden kuvausten joukko varustettuna kuvausten yhdistämisellä muodostavat hyperbolisen ryhmän $G_{\mathcal{D}}$.

Määritelmä 5.10. **Hyperbolinen geometria** koostuu yksikkökiekosta \mathcal{D} ja hyperbolisten kuvausten ryhmästä $G_{\mathcal{D}}$.

5.2. Suorat ja kulmat. Määritellään seuraavaksi kulma ja tarkastellaan suorien välisten kulmien käyttäytymistä hyperbolisessa geometriassa,.

Määritelmä 5.11. Kahden pisteen $A \in \mathcal{D}$ kautta kulkevan **suoran** välinen (**hyperbolinen**) **kulma** on pisteeseen A muodostettujen tangenttien välinen Euklidinen kulma.



Euklidiset peilaukset ja peilaukset ympyröiden suhteen säilyttävät kulmien suuruuden. Näinpä ollen myös hyperbolinen kuvaus säilyttää kulmien suuruuden. Lisäksi, Euklidinen peilaus ja peilaukset ympyröiden suhteen kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyksi ympyröiksi. Yhdistämällä nämä tiedot, voimme päätellä että hyperbolinen peilaus kuvaa **suorat suoriksi**, jolloin äärellisen monen kuvauksen yhdisteellä on myös tämä ominaisuus. Näistä tiedoista saamme seuraavan tuloksen.

Lause 5.12. *Hyperbolinen kuvaus kuvaa **suorat suoriksi** ja säilyttää kulmien suuruuden.*

Olkoon A piste kiekossa \mathcal{D} , tällöin on olemassa ainakin yksi **suora**, kiekon \mathcal{D} halkaisija, joka kulkee origon O ja pisteen A kautta. Origon kautta kulkee kuitenkin ääretömän monta **suoraa**, kiekon \mathcal{D} halkaisijaa. Tarkastellaan seuraavaksi kulkeeko pisteen A kautta useampi kuin yksi **suora**.

Tätä varten on hyödyllistä esittää seuraava tulos, joka osoittaa, että on olemassa hyperbolinen kuvaus joka kuvaa pisteen A origoon O .

Lemma 5.13 (Origo-lemma). *Olkoon $A \neq O$ piste kiekossa \mathcal{D} . Tällöin on olemassa **suora** l niin, että hyperbolinen peilaus **suoran** l suhteen kuvaa pisteen A origoon O .*

TODISTUS. Etsimme siis **suoraa** l , joka on osa R -keskistä ympyrää C niin, että peilaus ympyrän C suhteen kuvaa pisteen A origoon O . Oletetaan, että tämä etsimämme ympyrä C leikkaa yksikköympyrän \mathcal{C} pisteessä P .

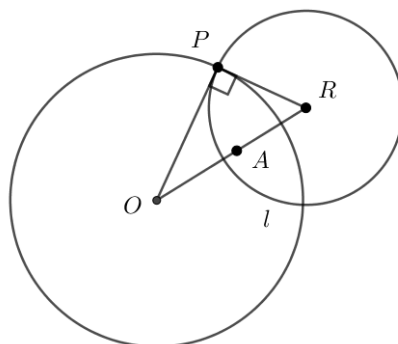
Jotta peilaus kuvaa pisteen A origoon, niin peilauksen määritelmän mukaisesti

$$RO \cdot RA = RP^2,$$

missä RP on tarkastelemamme ympyrän C säde.

Suora l kohtaa ympyrän \mathcal{C} suorassa kulmassa, niin $\triangle RPO$ on suorakulmainen, jolloin Pythagoraan lauseella

$$RP^2 + PO^2 = RO^2.$$



Nyt $OP = 1$, jolloin $RP^2 = RO^2 - 1$. Sijoittamalla $RP^2 = RO \cdot RA$, saadaan

$$RO \cdot RA = RO^2 - 1,$$

mikä on yhtäpitävää yhtälön

$$RO^2 - RO \cdot RA = 1,$$

kanssa, tai yhtälön

$$RO \cdot (RO - RA) = 1$$

kanssa. Mutta $RO - RA = AO$, jolloin voimme päätellä, että

$$RO \cdot AO = 1,$$

eli

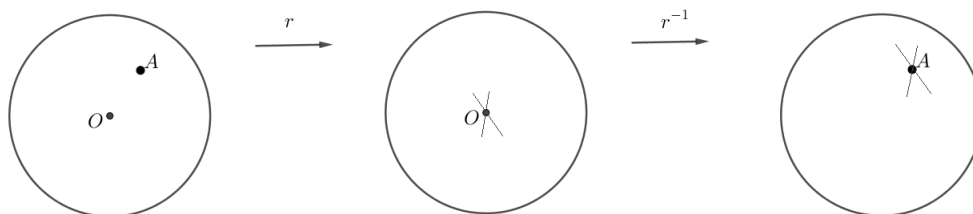
$$AO \cdot OR = 1.$$

Tämä kertoo, että etsimämme ympyrän keskipiste on pisteessä R , joka löydetään peilamalla piste A ympyrän \mathcal{C} suhteen. \square

Origo-lemma on hyperbolisessa geometriassa hyödyllinen tulos, sillä sen avulla voimme kuvata sopivasti valitut pisteet origoon ja siten tuottaa yksinkertaisemman kuvan kuin aikaisemmin. Voimme hyödyntää tätä tulosta esimerkiksi seuraavan tuloksen todistuksessa.

Lause 5.14. *Olkoon A piste kiekossa \mathcal{D} . Tällöin pisteen A kautta kulkee äärettömän monta **suoraa**.*

TODISTUS. Olkoon $A = 0$ piste kiekossa \mathcal{D} . Kuten aikaisemmin totesimme, origon kautta kulkee äärettömän monta kiekon \mathcal{D} halkaisijaa, joista jokainen näistä halkaisijoista on **suora**.



Olkoon $A \neq 0$ piste kiekossa \mathcal{D} . Tällöin Origo-lemman nojalla on olemassa hyperbolinen kuvaus r , joka kuvaa pisteen A origoon O . Origon kautta kulkee äärettömän monta **suoraa**, joista jokainen on kiekon \mathcal{D} halkaisija.

Hyperbolisen kuvauksen r käänteiskuvaus r^{-1} on hyperbolinen kuvaus, jolloin halkaisijoiden kuvat käänteiskuvauksessa ovat myös **suoria**, jotka kulkevat pisteen A kautta. \square

Yksi tärkeistä Euklidisen geometrian tulos ja samalla yksi Eukleideen aksioomista on, että kahden eri pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora. Hyperbolisessa geometriassa pätee vastaava tulos.

Lause 5.15. *Olkoon A ja B eri pisteitä kiekossa \mathcal{D} . Tällöin pisteiden A ja B kautta kulkee täsmälleen yksi **suora**.*

TODISTUS. Aloitetaan todistus tarkastelemalla ensin tällaisen **suoran** olemassaoloa. Origo-lemman mukaan on olemassa hyperbolinen kuvaus r , joka kuvaa kiekon \mathcal{D} pisteen A origoon O . Olkoon B' pisteen B kuvapiste kuvauksessa r .

Tällöin kiekossa \mathcal{D} on olemassa yksikäsitteinen **suora** l' , joka kulkee pisteen B' ja origon O kautta. Tämä **suora** on itse asiassa kiekon \mathcal{D} halkaisija.

Hyperbolisen kuvauksen käänteiskuvaus r^{-1} on myös hyperbolinen kuvaus, jolloin $l = r^{-1}(l')$ on **suora**, joka kulkee pisteiden A ja B kautta.

Tarkastellaan seuraavaksi **suoran** yksikäsitteisyyttä.

Oletetaan, että l_1 on **suora**, joka kulkee pisteiden A ja B kautta. Tällöin kuvaus $r(l_1)$ on **suora** pisteiden O ja B' kautta. Tästä seuraa, että $r(l_1) = l'$, jolloin l_1 on oltava sama, kuin $r^{-1}(l') = l$. Tämä todistaa pisteiden A ja B kautta kulkevan **suoran** yksikäsitteisyyden. \square

Voimme siis Origo-lemman avulla määrittää hyperbolisen kuvauksen, joka kuvaa pisteen A_1 pisteeksi A_2 . Voimme lisäksi määrittää kuvauksen joka tällaisen pisteiden kuvaamisen lisäksi kuvaa minkä tahansa pisteen A_1 kautta kulkevan **suoran** pisteen A_2 kautta kulkeväksi **suoraksi**.

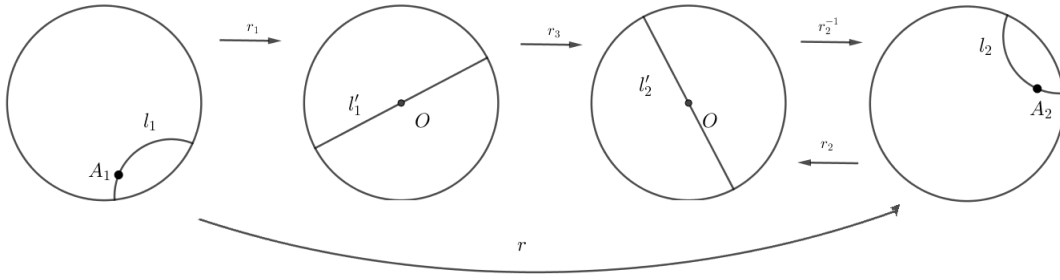
Lause 5.16. *Olkoon A_1 ja A_2 pisteitä kiekossa \mathcal{D} . Olkoon l_1 pisteen A_1 kautta kulkeva **suora** ja l_2 pisteen A_2 kautta kulkeva **suora**.*

*Tällöin on olemassa hyperbolinen kuvaus r , joka kuvaa pisteen A_1 pisteeksi A_2 ja **suoran** l_1 **suoraksi** l_2 .*

TODISTUS. Origo-lemman nojalla on olemassa hyperboliset kuvaukset r_1 ja r_2 , jotka kuvaavat pisteet A_1 ja A_2 origoon. Olkoon $r_1 : l_1 \mapsto l'_1$ ja $r_2 = l_2 \mapsto l'_2$.

Olkoon lisäksi r_3 hyperbolinen kuvaus, joka kiertää kiekkoa \mathcal{D} origon suhteen niin, että $l'_1 \mapsto l'_2$.

Olkoon nyt r hyperbolinen kuvaus $r = r_2^{-1} \circ r_3 \circ r_1$. Tällöin r kuvaa pisteet ja **suorat** kuten halusimme. \square



6. Möbius-kuvaukset hyperbolisessa geometriassa

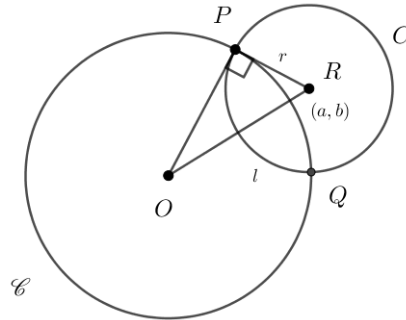
6.1. Hyperbolinen peilaus. Olemme tutustuneet hyperbolisen geometrian ominaisuuksiin peilausten ja peilauskuvausten avulla. Aikaisemmassa luvussa totesimme, että peilaukset voidaan esittää algebrallisesti Möbius-kuvausten avulla.

Jokainen hyperbolisen ryhmän $G_{\mathcal{H}}$ alkio on yhdiste äärellisestä määrästä peilauksista **suorien** suhteen.

Tarkastellaan peilausta **suoran** l suhteen, joka on osa R -keskistä, r -säteistä ympyrää. Oletetaan, että **suora** leikkaa yksikköympyrää \mathcal{C} pisteissä P ja Q .

Olkoon $R = (a, b)$ ja $\alpha = a + ib$. Nyt, sillä l on **suora**, niin $|\alpha| > 1$. Koska **suora** l on osa R -keskistä, r -säteistä ympyrää, niin kolmio $\triangle RPO$ on suorakulmainen pisteessä P . Nyt Pythagoraan lauseesta seuraa

$$RP^2 + PO^2 = RO^2.$$



Saatu yhtälö voidaan esittää muodossa

$$r^2 + 1 = a^2 + b^2.$$

Nyt, koska $a^2 + b^2 = \alpha\bar{\alpha}$, voimme esittää edeltävän yhtälön muodossa

$$r^2 - \alpha\bar{\alpha} = -1.$$

Tämän yhtälön, sekä peilauksen t ympyrän C suhteen avulla, missä t on muotoa $t(z) = \frac{r^2}{z-\alpha} + \alpha$ $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$, voimme muodostaa hyperbolisen peilauksen ρ **suoran**

l suhteen.

Suora l on osa ympyrää C , jolloin hyperbolinen peilaus ρ on yhtälön $r^2 + 1 = a^2 + b^2$ nojalla muotoa

$$\rho(z) = \frac{r^2}{z - \alpha} + \alpha = \frac{r^2 + \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\alpha}}{\bar{z} - \bar{\alpha}} = \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}}.$$

Tämä todistaa seuraavan lemmän.

Lemma 6.1. *Olkoon l suora, joka on osa α -keskistä ympyrää. Hyperbolinen peilaus ρ suoralla l suhteen on hyperbolinen kuvaus muotoa*

$$\rho(z) = \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}}.$$

Huomaa edellä, että $|\alpha| > 1$. Voimme kirjoittaa lemmän tuloksen muodossa

$$\rho(z) = (f \circ B)(z), \quad z \in \mathcal{D},$$

missä $f(z) = \frac{\alpha z - 1}{z - \alpha}$ on Möbius-kuvaus, sillä $\alpha\bar{\alpha} - 1 \neq 0$ ja $B(z) = \bar{z}$ on kompleksikonjugaattikuvaus. Aikaisemmin olemme osoittaneet, että Möbius-kuvaukset säilyttävät kulmien suuruudet (Lause 4.10) ja ne kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi (Lause 3.23). Kulmat ja yleistetyt ympyrät ovat tärkeitä hyperbolisessa geometriassa, jolloin Möbius-kuvaukset ovat tärkeässä roolissa. Möbius-kuvausten yhdistetty kuvaus on Möbius-kuvaus, jolloin voimme muotoilla seuraavan lauseen.

Lause 6.2. *Olkoon ρ ja σ hyperbolisia peilauksia*

$$\rho(z) = \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} \quad \text{ja} \quad \sigma(z) = \frac{\beta\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\beta}}, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Hyperbolisten peilausten yhdiste

$$(\rho \circ \sigma)(z) = \frac{(\bar{\alpha}\beta - 1)z + \alpha - \beta}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + \alpha\bar{\beta} - 1}, \quad z \in \mathcal{D},$$

on hyperbolinen kuvaus.

Hyperboliset peilaukset ovat Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaatin yhdistettä, jolloin hyperbolisten peilausten yhdiste on Möbius-kuvausten ja kompleksikonjugaattien yhdiste. Kompleksikonjugaattien yhdiste on $(B \circ B)(z) = z$, jolloin jäljelle jäävä Möbius-kuvausten yhdiste voidaan esittää halutussa muodossa. Lauseen tarkempi todistus löytyy lähteestä [1, s 358].

Lemma 6.3. (1) *Hyperbolinen peilaus ρ on itsensä käänteiskuvaus.*

(2) *Möbius-kuvausten*

$$f_1(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \quad \text{ja} \quad f_2(z) = \frac{cz + d}{dz + \bar{c}}$$

yhdistetty kuvaus $f_2 \circ f_1$ on samaa muotoa oleva Möbius-kuvaus.

TODISTUS. (1) Haluamme siis osoittaa, että $\rho(\rho(z)) = z$ Edeltävän lauseen nojalla hyperbolisten peilausten yhdiste voidaan esittää muodossa

$$(\rho \circ \rho)(z) = \frac{(\bar{\alpha}\alpha - 1)z + \alpha - \alpha}{(\bar{\alpha} - \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} - 1} = \frac{(\alpha\bar{\alpha} - 1)z}{\alpha\bar{\alpha} - 1} = z.$$

Kuten haluttiinkin.

(2) Yhdistetyn kuvauksen $f_2 \circ f_1$ matriisiesitys saadaan matriisitulosta

$$\begin{bmatrix} c & d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca + d\bar{b} & cb + d\bar{a} \\ \bar{d}a + \bar{c}\bar{b} & \bar{d}b + \bar{c}\bar{a} \end{bmatrix}$$

Tulo on haluttua muotoa, sillä

$$\overline{(ca + d\bar{b})} = \bar{d}b + \bar{c}\bar{a} \quad \text{ja} \quad \overline{(cb + d\bar{a})} = \bar{d}a + \bar{c}\bar{b}.$$

□

Tästä lemmasta seuraa, että yhdistetty kuvaus parillisesta määräst hyperbolisia pelauksia *suoran* l suhteen voidaan esittää Möbius-kuvauksina rajattuna kiekkoon \mathcal{D} muodossa

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Vastaavasti voidaan näyttää, että yhdistetty kuvaus parittomasta määräst hyperbolisia pelauksia voidaan esittää tätä muotoa olevan Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaatin yhdisteenä.

Näinpä ollen, äärellisen monen hyperbolisen pelauksen yhdiste, eli hyperbolinen kuvaus, voidaan esittää muodossa

$$z \mapsto f(z) \quad \text{tai} \quad z \mapsto f(\bar{z}), \quad z \in \mathcal{D},$$

missä f on Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Lisäksi, sillä $f(0) = \frac{b}{\bar{a}}$ ja pisteen 0 kuvan on oltava hyperbolisessa kuvauksessa kiekossa \mathcal{D} , joten täytyy päteä, että

$$|b| < |a|.$$

Ovatko kaikki tällaiset Möbius-kuvaukset hyperbolisia kuvauksia? Kyllä ovat, tämä tulos ja sen perustelu esitetään seuraavassa lauseessa.

Lause 6.4. *Jokainen Möbius-kuvaus $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$*

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad \text{missä } |b| < |a|$$

on kahden hyperbolisen pelauksen yhdiste ja siten hyperbolinen kuvaus.

Todistetaan tämä kahdessa osassa. Käsitellään ensin erikoistapaus, jossa Möbius-kuvaus kuvaa origon itselleen ja sen jälkeen yleinen tapaus hyödyntäen tätä erikoistapautta.

TODISTUS. Tapaus 1 Möbius-kuvaus kuvaa origon origoon.

Osoitetaan, että Möbius-kuvaus f on kahden pelauksen yhdiste.

Ehdosta $f(0) = 0$ seuraa, että $b = 0$, jolloin Möbius-kuvaus f yksinkertaistuu muotoon

$$f(z) = \frac{a}{|\bar{a}|}z,$$

joka on kierto origon suhteen.

Olkoon $a = re^{i\theta}$. Tällöin $\frac{a}{|a|} = e^{2i\theta}$.

Jolloin, jos σ_1 ja σ_2 ovat peilauksia kiekon \mathcal{D} halkaisijan suhteen, jossa

$$\sigma_1(z) = \bar{z} \quad z \in \mathcal{D}, \quad \text{ja} \quad \sigma_2(z) = e^{2i\theta}\bar{z}, \quad z \in \mathcal{D},$$

niin

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(z) = e^{2i\theta}\overline{\bar{z}} = e^{2i\theta}z,$$

joten $f = \sigma_2 \circ \sigma_1$ kuten halusimme.

Tapaus 2 Möbius-kuvaus f ei kuvaa origoa origon.

Osoitetaan jälleen, että Möbius-kuvaus f on kahden peilauksen yhdiste. Tarkastellaan hyperbolista kuvausta $\rho(z) = (f' \circ B)(z)$, missä $f'(z) = \frac{\alpha z - 1}{a - \bar{\alpha}}$ on Möbius-kuvaus ja $B(z) = \bar{z}$ on kompleksikonjugaatti. Valitaan α niin, että ρ ja $f \circ \rho$ ovat hyperbolisia peilauksia. Tämä näyttää, että $f = (f \circ \rho) \circ \rho^{-1}$ on kahden hyperbolisen peilauksen yhdiste.

Möbius-kuvaukset f ja f' voidaan esittää matriisimuodossa, jolloin yhdistettyä kuvausta $f \circ f'$ vastaa matriisi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + b & -(\bar{\alpha} b + a) \\ \alpha \bar{b} + \bar{a} & -\bar{b} - \bar{a} \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Voimme päätellä, että

$$(f \circ f' \circ B)(z) = \frac{(a\alpha + b)\bar{z} - (\bar{\alpha}b + a)}{(\alpha\bar{b} + \bar{a})\bar{z} - \bar{b} - \bar{a}\bar{\alpha}}.$$

Nyt, koska oletuksen mukaan $|b| < |a|$, niin $|\alpha| = \frac{|a|}{|b|} > 1$, jolloin kuvaus $\rho = f' \circ B$ on hyperbolinen kuvaus. Lisäksi

$$(f \circ \rho)(z) = (f \circ f' \circ B)(z) = \frac{(a\alpha + b)\bar{z}}{-\bar{b} - \bar{a}\bar{\alpha}},$$

on muotoa $-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\bar{z}$, missä $\gamma = a\alpha + b$, joten kuvaus $f \circ \rho$ on hyperbolinen peilaus. Tästä seuraa, että kuvaus f on hyperbolisten kuvausten $f \circ \rho$ ja ρ^{-1} yhdiste. \square

Vastaava väite osoittaa, että yleisempi kuvaus

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{\bar{b}\bar{z} + \bar{a}}$$

on kolmen kuvauksen yhdistetty kuvaus. Kuvaus on yhdistetty kuvaus $(f \circ B)(z)$, missä f on Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}},$$

joka on kahden peilauksen yhdiste ja kompleksikonjugaatti $B(z) = \bar{z}$ on peilaus x -akselin suhteen. Tästä voimme muotoilla seuraavan lauseen.

Lause 6.5. *Jokainen hyperbolinen kuvaus voidaan esittää enintään kolmen hyperbolisen peilauksen yhdisteenä.*

Peilausgeometrian kulmalauseesta (Lause 4.6) seuraa, että yksi hyperbolinen peilaus **suoran** suhteen kääntää kulman aukeamissuunnan. Joten kahden tällaisen kuvauksen yhdiste pitää kulman suunnan muuttumattomana, kun taas kolmen kuvauksen yhdiste kääntää sen jälleen.

Hyperbolista kuvausta, joka pitää kulman suunnan muuttumattomana kutsutaan *suoraksi hyperboliseksi kuvaukseksi* ja kuvausta, joka kääntää kulman suunnan kutsutaan *epäsuoraksi hyperboliseksi kuvaukseksi*.

Lauseen 6.5 avulla voimme päätellä, että suora hyperbolinen kuvaus voidaan esittää enintään kahden hyperbolisen peilauksen yhdisteenä ja epäsuora hyperbolinen kuvaus voidaan esittää enintään kolmen hyperbolisen peilauksen yhdisteenä.

Lause 6.6. *Suora hyperbolinen kuvaus f voidaan esittää muodossa*

$$f(z) = K \frac{z - m}{1 - \bar{m}z},$$

missä K ja m ovat kompleksilukuja joilla $|K| = 1$ ja $m \in \mathcal{D}$.

Huomautus 6.7. Kutsumme tätä muotoa hyperbolisen kuvauksen *kanoniseksi* muodoksi. Sillä on etunsa, koska kuvaus f kuvaa pisteen m origoon O .

TODISTUS. Tiedämme jo Lauseen 6.4 nojalla, että suora hyperbolinen kuvaus voidaan esittää muodossa

$$f(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}}, \quad \text{missä } |b| < |a|.$$

Jakamalla kuvauksen $f(z)$ esitysmuodon osoittaja ja nimittäjä luvulla \bar{a} , voimme kirjoittaa kuvauksen muodossa

$$f(z) = \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{b}{\bar{a}}}{\frac{b}{\bar{a}}z + \frac{\bar{a}}{\bar{a}}} = \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{b}{\bar{a}}}{1 - \frac{b}{\bar{a}}z} = \frac{a}{\bar{a}} \left(\frac{z - \frac{-b}{a}}{1 - \frac{-b}{\bar{a}}z} \right).$$

Tämä on vaadittua muotoa, jossa $K = \frac{a}{\bar{a}}$ ja $m = \frac{-b}{a}$. Koska $|a| = |\bar{a}|$, niin tällöin $K = 1$ ja koska $|b| < |a|$, niin $|m| < 1$, kuten vaadittiin. □

Voimme nyt löytää jokaiselle suoralle hyperboliselle kuvaukselle muodon, joka kuvaa kiekon \mathcal{D} pisteen m origoon. Edeltävän lauseen nojalla kuvauksen on oltava muotoa

$$f(z) = K \frac{z - m'}{1 - \bar{m}'z}, \quad \text{missä } |K| = 1 \text{ ja } |m'| < 1.$$

Nyt ehdosta $f(m') = 0$ seuraa, että $m = m'$, jolloin voimme päätellä, että jokainen suora hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa pisteen m origoon on muotoa

$$f(z) = K \frac{z - m}{1 - \bar{m}z}.$$

Suora hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa origon takaisin origoon on selainen kuvaus, jolle $m = 0$, eli se on muotoa $f(z) = Kz$, missä $|K| = 1$. Nämä kuvaukset ovat kiertoja origon suhteen kiekossa \mathcal{D} kulman θ verran, missä $K = \cos \theta + i \sin \theta$.

Yleistäen, jotta voimme kuvata pisteen m origoon, tarvitsemme vain yhden suoran hyperbolisen kuvauksen. Voimme asettaa $K = 1$ ja käyttää kuvausta $f(z) = \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$.

Esimerkki 6.8. (1) Etsitään suoran hyperbolisen kuvauksen yleinen muoto, joka kuvaa pisteen $\frac{1}{3}i$ origoon.

Ratkaisu: Sijoitetaan piste $\frac{1}{3}i$ suoran hyperbolisen kuvauksen yleisen muodon kaavaan

$$f(z) = K \frac{z - \frac{1}{3}i}{1 - (-\frac{1}{3}i)z} = K \frac{3z - i}{iz + 3}, \text{ missä } |K| = 1.$$

(2) Etsitään yksi suora hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa pisteen $\frac{1}{2}$ origoon.

Ratkaisu: Valitsemalla $K = 1$, yksi tällainen kuvaus on

$$f(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z}.$$

Suoran hyperbolisen kuvauksen käänteiskuvauksen yleinen muoto on suora hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa origon O pisteeseen m . Olkoon

$$f(z) = K \frac{z - m}{1 - \bar{m}z} = \frac{Kz - Km}{-\bar{m}z + 1}.$$

Kuvaus f on kiekon \mathcal{D} rajaama, joten käänteiskuvaus f^{-1} on

$$f^{-1}(z) = \frac{z + Km}{\bar{m}z + K},$$

missä $|K| = 1$. Käänteiskuvauksen esitysmuoto seuraa suoraan Möbius-kuvauksen käänteiskuvauksen muodosta (Lause 3.4).

Esimerkki 6.9. Määritä yleinen muoto suoralle hyperboliselle kuvaukselle, joka kuvaa pisteen $\frac{1}{3}i$ pisteeseen $\frac{1}{2}$.

Ratkaisu: Esimerkissä 6.8 kohdassa 1 löysimme yleisen hyperbolisen kuvauksen, joka kuvaa pisteen $\frac{1}{3}i$ origoon. Kuvaus on

$$f_1(z) = K \frac{3z - i}{iz + 3}, \text{ missä } |K| = 1.$$

Kuvausta vastaava matriisiesitys on

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3K & -iK \\ i & 3 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä 6.8 kohdassa 2 löysimme suoran kuvauksen

$$f_2(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z},$$

joka kuvaa pisteen $\frac{1}{2}$ origoon. Kuvausta vastaava matriisiesitys on

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin A_2 käänteismatriisi on

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Nyt, yhdistettyä kuvausta vastaava matriisiesitys on

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3K & -iK \\ i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4K + \frac{2}{3}i & -\frac{4}{3}iK + 2 \\ 2K + \frac{4}{3}i & -\frac{2}{3}iK + 4 \end{bmatrix}.$$

Siten suora hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa pisteen $\frac{1}{3}i$ pisteeseen $\frac{1}{2}$ voidaan esittää muodossa

$$f(z) = \frac{(4K + \frac{2}{3}i)z + (-\frac{4}{3}iK + 2)}{(2K + \frac{4}{3}i)z + (-\frac{2}{3}iK + 4)}, \text{ missä } |K| = 1.$$

6.2. Hyperbolinen etäisyys. Euklidisessa tasogeometriassa tarkastellaan usein kahden pisteen välistä etäisyyttä. Tällöin kahden pisteen välinen etäisyys ei-negatiivinen luku, joka saadaan laskemalla

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Tämä etäisyys säilyy tason isometrioissa, eli Euklidisissa kuvauksissa Etäisyyttä tarkastellessa puhutaan usein etäisyysfunktioista d . Etäisyysfunktioilta vaaditaan tiettyjä ominaisuuksia. Tarkastellaan ensin etäisyysfunktion yleisiä ominaisuuksia, jotka ovat voimassa kaikilla kompleksitason \mathbb{C} pisteillä, geometriasta riippumatta.

Etäisyysfunktion d ominaisuuksia

- (1) $d(z_1, z_2) \geq 0$, kaikilla z_1 ja z_2 .
 $d(z_1, z_2) = 0$ jos ja vain jos $z_1 = z_2$.
- (2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, kaikilla z_1 ja z_2 .
- (3) $d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) \geq d(z_1, z_2)$ kaikilla z_1, z_2 ja z_3 .
- (4) $d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = d(z_1, z_3)$, jos ja vain jos pisteet z_1, z_2 ja z_3 ovat tässä järjestyksessä samalla suoralla.

Ominaisuus 1 kertoo että kahden pisteen välinen etäisyys on aina positiivinen ja etäisyys on 0 jos ja vain jos pisteet ovat samat.

Ominaisuus 2 kertoo, että pisteiden z_1 ja z_2 välinen etäisyys on sama kuin pisteiden z_2 ja z_1 .

Ominaisuus 3 tunnetaan myös nimellä *kolmioepäyhtälö*.

Ominaisuus 4 osoittaa, että suoralla olevien pisteiden välinen etäisyys on additiivinen.

Hyperbolisessa geometriassa etäisyysfunktioilta vaaditaan, että se säilyy hyperbolisissa kuvauksissa.

Etäisyysfunktion ominaisuuksia hyperbolisessa geometriassa

- (5) $d(z_1, z_2) = d(f(z_1), f(z_2))$, kaikilla z_1, z_2 ja kaikilla hyperbolisilla kuvauksilla f ryhmässä $G_{\mathcal{H}}$.

Ominaisuus 5 vaatii siis, että hyperbolinen kuvaus säilyttää pisteiden väliset etäisyydet.

Huomautus 6.10. Kaikkien suorien hyperbolisten kuvausten ja kompleksikonjugaattien yhdistetty kuvaus säilyttää pisteiden välisen hyperbolisen etäisyyden.

Määritellään seuraavaksi tarkemmin pisteiden välinen *hyperbolinen etäisyys*.

Määritelmä 6.11. Pisteiden z_1 ja z_2 välinen *hyperbolinen etäisyys* $d(z_1, z_2)$ yksikkökierokossa \mathcal{D} on $d(z_1, z_2) = \tanh^{-1}\left(\left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|\right)$.

Etäisyysfunktio d toteuttaa kaikki etäisyysfunktion ominaisuudet 1-6. Ominaisuudet 1, 2 ja 5 ovat selviä. Ominaisuus 3 pohjautuu myöhemmin esiteltävään tulokseen, jossa selviää, että hyperboliset ympyrät ovat myös Euklidisia ympyröitä (Lause 6.18). Tähän tulokseen lisättynä tieto, että Möbius-kuvaukset säilyttävät hyperboliset etäisyydet (Lause 6.16), saamme pääteltyä ominaisuuden 6 [1, s 376]. Tarkempi todistus hyperbolisen etäisyyden kaavalle pohjautuu suorien hyperbolisten kuvausten ominaisuuksiin ja on löydettävissä lähteestä [1, s 380]. Oletetaan jatkossa kaikki nämä ominaisuudet todeksi ja tarkastellaan niiden avulla määritelmästä seuraavia käytännöllisiä ominaisuuksia.

Kahden pisteen välinen etäisyys on yksinkertaisin silloin, kun toinen tarkasteltavista pisteistä on origossa O .

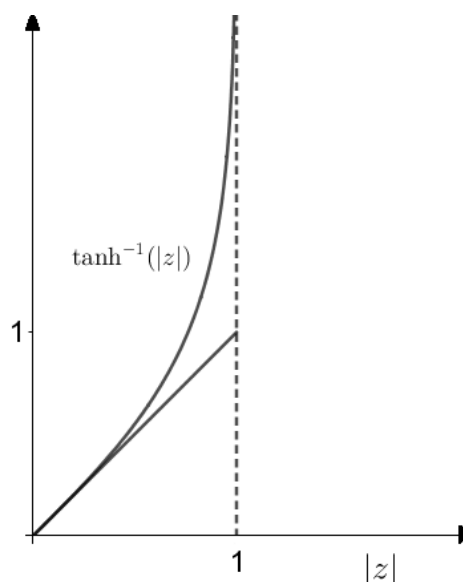
Huomautus 6.12. Pisteiden 0 ja z välinen *hyperbolinen etäisyys* $d(0, z)$ yksikkökierokossa \mathcal{D} on

$$d(0, z) = \tanh^{-1}(|z|).$$

Pisteen z euklidinen etäisyys origosta saadaan laskemalla $|z|$. Määritelmä kertoo siis, että pisteen z hyperbolinen etäisyys origosta saadaan lisäämällä käänteinen hyperbolinen tangenttifunktio pisteen z euklidiseen etäisyyteen origosta. Hyperbolisen tangenttifunktion graafinen esitys paljastaa kaksi hyperbolisen etäisyyden tärkeää ominaisuutta.

1. Origin lähellä kuvaaja on lähes suora kulmakertoimella 1, jolloin pisteen z olessa lähellä origoa, pisteiden z ja 0 välinen hyperbolinen etäisyys vastaa pisteiden z ja 0 välistä euklidista etäisyyttä.

2. Kun piste z lähestyy yksikkökierokkeen \mathcal{D} reunaa, pisteen z hyperbolinen etäisyys origosta kasvaa ilman rajaa. Tosiaan, kun pisteen z euklidinen etäisyys $|z|$ lähestyy lukua 1, hyperbolinen etäisyys $\tanh^{-1}(|z|)$ lähestyy ∞ . Hyperbolisen geometrian näkökulmasta rajapisteet näyttävät olevan ”äärettömän kaukana”. Tämä vastaa ideaa, että yhdensuuntaisilla suorilla on yhteinen leikkauspiste ”reunalla”.



Pisteen z hyperbolinen etäisyys origosta on helposti laskettavissa. Esimerkiksi pisteen $\frac{1}{4}$ hyperbolinen etäisyys origosta on

$$d(0, \frac{1}{4}) = \tanh^{-1}(\frac{1}{4}) = \tanh^{-1}(0.25) \approx 0.255.$$

Yhtälön $d(0, z) = \frac{1}{2} \log_e(\frac{1+|z|}{1-|z|})$ avulla voimme laskea minkä tahansa kiekon \mathcal{D} halkaisijalla olevien pisteiden välisen hyperbolisen etäisyyden.

Esimerkki 6.13. Lasketaan pisteiden 0.1 ja 0.3 välinen hyperbolinen etäisyys. Pisteiden välinen etäisyysfunktio on additiivinen (ominaisuus 4), jolloin

$$d(0.1, 0.3) = d(0, 0.3) - d(0, 0.1).$$

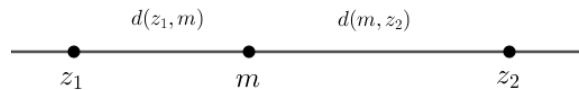
Tällöin

$$\begin{aligned} d(0.1, 0.3) &= d(0, 0.3) - d(0, 0.1) \\ &= \tanh^{-1}(0.3) - \tanh^{-1}(0.1) \\ &\approx 0.3095 - 0.1003 \approx 0.2092. \end{aligned}$$

6.3. Hyperbolinen keskipiste ja hyperbolinen ympyrä. Kuten Euklidisessä geometriassa, myös hyperbolisessa geometriassa voimme etsiä pisteiden z_1 ja z_2 välisen keskipisteen. Keskipiste m sijaitsee pisteiden z_1 ja z_2 välisellä suoralla.

Määritelmä 6.14. Olkoon z_1 ja z_2 eri pisteitä hyperbolisella suoralla. Piste m on janan $z_1 z_2$ **hyperbolinen keskipiste** jos m on janalla $z_1 z_2$ ja

$$d(z_1, m) = d(m, z_2) = \frac{1}{2}d(z_1, z_2).$$



Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitutaan tarkastelemaan kiekon \mathcal{D} halkaisijoita pitkin kulkevia janoja. Hyperbolisen keskipisteen etsimisen tapa riippuu siitä, ovatko janan päätepisteet samalla vai eripuolella origoa O .

Keskipisteen löytämisen apuna käytetään janan päätepisteiden etäisyyttä origosta. Olkoon p ja q kiekon \mathcal{D} halkaisijalle muodostetun janan päätepisteet ja $|p| > |q|$.

Jos p ja q ovat eri puolilla origoa, hyperbolinen keskipiste saadaan laskemalla

$$d = \frac{1}{2}(d(0, p) - d(0, q)).$$

Jos pisteet p ja q ovat samalla puolella origoa O , hyperbolinen keskipiste saadaan laskemalla

$$d = \frac{1}{2}(d(0, p) + d(0, q)).$$

Hyperbolinen keskipiste m saadaan laskemalla $\tanh(d)$.

Esimerkki 6.15. Etsi pisteiden 0.5 ja 0.8 välinen hyperbolinen keskipiste.

Pisteet 0.5 ja 0.8 sijaitsevat samalla puolella origoa, jolloin hyperbolinen keskipiste saadaan laskemalla

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}(d(0, 0.8) - d(0, 0.5)) \\ &= \frac{1}{2}(\tanh^{-1}(0.8) - \tanh^{-1}(0.5)) \\ &\approx \frac{1}{2}(1.0986 - 0.5493) \approx 0.2747. \end{aligned}$$

Hyperbolinen keskipiste m on siis $m \approx \tanh(0.2747) \approx 0.268$.

Huomautus 6.16. Kiekossa \mathcal{D} olevien pisteiden p ja q välinen hyperbolinen keskipiste voidaan laskea myös Möbius-kuvauksella f , joka kuvaa pisteen p origoon ja pisteen q pisteeksi $f(q)$. Kun keskipiste m' on löydetty origon ja pisteen $f(q)$ väliseltä janalta, alkuperäisen janan keskipiste saadaan laskemalla $f^{-1}(m')$.

Euklidisten ympyröiden tapaan, **hyperbolinen ympyrä** voidaan määritellä pisteiden joukolla, jotka sijaitsevat tietyn hyperbolisen etäisyyden päässä kiinnitetystä (keski)pisteestä.

Määritelmä 6.17. **Hyperbolinen ympyrä**, jonka **hyperbolinen säde** on r ja **hyperbolinen keskipiste** c on joukko

$$\{z : d(c, z) = r, z \in \mathcal{D}\}$$

Euklidisestä näkökulmasta tarkastellessa, origokeskinen, r -säteinen hyperbolinen ympyrä on joukko

$$\{z : d(0, z) = r, z \in \mathcal{D}\},$$

joka on joukko

$$\{z : \tanh^{-1}(|z|) = r, z \in \mathcal{D}\}$$

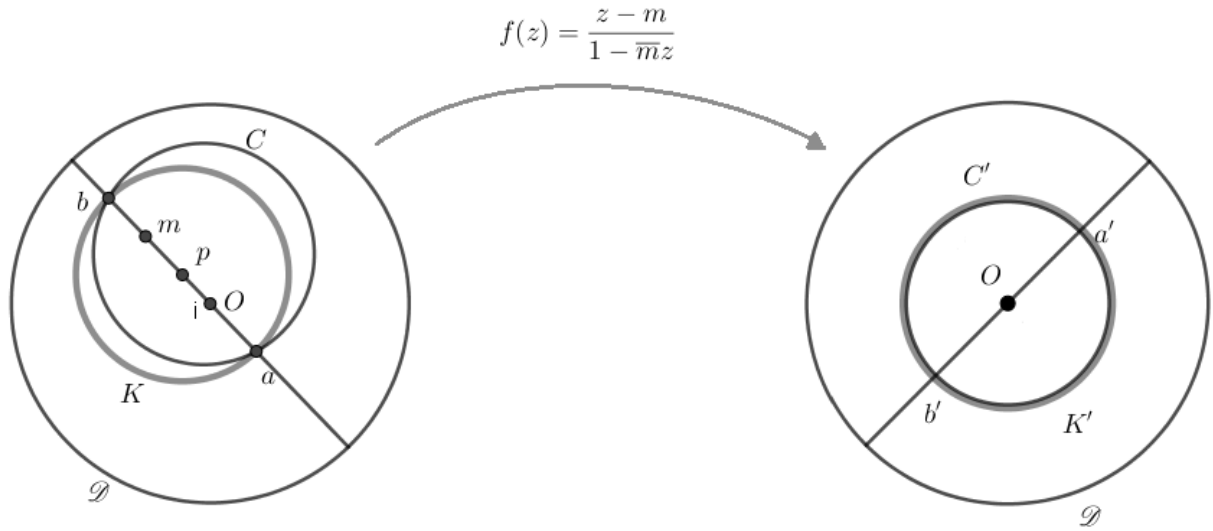
tai

$$\{z : |z| = \tanh r, z \in \mathcal{D}\}.$$

Tämä on origokeskinen, $\tanh r$ - säteinen Euklidinen ympyrä. Itseasiassa jokainen hyperbolinen ympyrä on Euklidinen ympyrä.

Lause 6.18. *Jokainen hyperbolinen ympyrä on Euklidinen ympyrä kiekossa \mathcal{D} ja jokainen Euklidinen ympyrä kiekossa \mathcal{D} on hyperbolinen ympyrä.*

TODISTUS. Olemme jo osoittaneet, että origokeskiset ympyrät toteuttavat tämän. Joten olkoon C mikä tahansa hyperbolinen ympyrä, jonka hyperbolinen keskipiste on $m \neq 0$. Oletetaan, että kiekon \mathcal{D} pisteen m kautta kulkeva halkaisija leikkaa hyperbolisen ympyrän C pisteissä a ja b ja olkoon K Euklidinen ympyrä, jonka halkaisija on jana ab ja p ympyrän keskipiste.



Osoitamme, että C on Euklidinen ympyrä näyttämällä, että se on sama kuin K . Olkoon siis f hyperbolinen kuvaus muotoa

$$f(z) = \frac{z - m}{1 - \bar{m}z}, \quad z \in \mathcal{D}.$$

ja olkoon a' ja b' pisteiden a ja b kuvapisteitä kuvauksessa f .

Sillä f säilyttää hyperboliset etäisyydet ja kuvaa pisteen m origoon O , sen täytyy kuvata ympyrä C hyperboliseksi, origokeskiseksi ympyräksi C' . Tiedämme jo, että tällainen ympyrä on myös Euklidinen ympyrä. Lisäksi, sillä jana ab kulkee pisteen m kautta, sen kuva $a'b'$ kulkee pisteen O kautta ja on täten ympyrän C' halkaisija.

Lisäksi, sillä f säilyttää kulmien suuruudet ja jana ab kohtaa ympyrän K kohtisuorasti, niin f kuvaa ympyrän K ympyräksi K' , joka kohtaa janan $a'b'$ kohtisuorasti pisteissä a' ja b' . Tällöin jana $a'b'$ on myös ympyrän K' halkaisija. Niinpä ympyrä C' vastaa ympyrää K' ja siten ympyrä C vastaa ympyrää K .

Todistuksen toista suuntaa varten, olkoon K mikä tahansa $p \neq 0$ -keskinen Euklidinen ympyrä kiekossa \mathcal{D} ja olkoon pisteen p kautta kulkeva kiekon \mathcal{D} halkaisija siten, että se leikkaa ympyrää K pisteissä a ja b . Jos C on pisteiden a ja b kautta kulkeva hyperbolinen ympyrä, jonka hyperbolinen keskipiste on janan ab hyperbolinen keskipiste, niin vastaavalla päättelyllä kuin edellä saamme, että ympyrä K vastaa ympyrää C . Joten ympyrä K on hyperbolinen ympyrä. \square

Edellä esitetty todistus osoittaa että Euklidisten ja hyperbolisten ympyröiden keskipisteet sijaitsevat samalla origon O kautta kulkevalla suoralla.

Lähdeluettelo

- [1] DAVID A. BRANNAN, MATTHEW F. ESPLEN, JEREMY J. GRAY: *Geometry*. toinen painos, Cambridge University Press, 2012.
- [2] ALAN F. BEARDON: *Algebra and Geometry*. Cambridge University Press, 2005.
- [3] MICHAEL HVIDSTEN: *Exploring geometry, luku 17*. Toinen painos. Crc-press. 2017. (<http://homepages.gac.edu/~hvidsten/geom-text/index.php>) Viitattu 30.6.2021.
- [4] JAMES W. ANDERSSON: *Hyperbolic Geometry*. toinen painos, Springer-Verlag London 2005.
- [5] EDWIN E. MOISE: *Elementary geometry from an advanced standpoint*. kolmas painos, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [6] ARI LEHTONEN: *Kompleksianalyysi*. Luentomoniste Jyväskylän Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteiden laitos 2020.
- [7] DAVID E. JOYCE: *Euklid's Elements*. Department of Mathematics and Computer Science, Clark University, 1996, 1997 (<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/>) Viitattu 30.6.2021.
- [8] JOHN J. O'CONNOR, EDMUND F. ROBERTSON: *MacTutor History of Mathematics Archive*. University of St Andrews, Skotlanti, 2000, 2003 (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Klein/>) Viitattu 12.7.2021.
- [9] LASSI KURITTU, VELI-MATTI HOKKANEN, LAURI KAHANPÄÄ: *Geometria*. Luentomoniste Jyväskylän yliopisto.