# Normaalijakauman teoreettinen tausta ja sen havainnollistuksia lukiotasolle

Pro Gradu -tutkielma

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

17. huhtikuuta 2021
Matias Naskali
matias.e.naskali@student.jyu.fi
Jyväskylän yliopisto

# Tiivistelmä


Matias Naskali, *Normaalijakauman teoreettinen tausta ja sen havainnollistuksia lukiotasolle*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 43 sivua, 3 liitettä, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, huhtikuu 2021.

Tämä tutkielma käsittelee normaalijakaumaa ja siihen liittyvää todennäköisyysteoriaa. Lisäksi osana tutkielmaa on laadittu lukion pitkän matematiikan lisäoppimateriaaliksi tarkoitettu tehtäväpaketti.

Johdannossa käsitellään normaalijakauman historiaa ja sivutaan normaalijakauman merkitystä luonnontieteissä. Lisäksi johdannossa kuvaillaan lyhyesti tutkielman kappaleiden aiheita.

Kappaleissa 2-8 käydään läpi normaalijakaumaan liittyvää todennäköisyysteoriaa. Teoriaosuuden päätulos on keskeinen raja-arvolause, joka todistetaan kappaleessa 8. Teoriaosuuden muut kappaleet käsittelevät keskeisen raja-arvolauseen ja sen todistuksen ymmärtämisen kannalta tärkeitä todennäköisyysteorian kohtia. Tämän lisäksi kappaleessa 5 esitellään Monte Carlo -simulointiin liittyvää teoriaa. Simulointi on keskeinen havainnollistamisen keino tutkielman osana laadituissa tehtävissä.

Tutkielman viimeisessä kappaleessa pohditaan sitä, miksi normaalijakauman teoreettista taustaa ei esitellä lukiossa. Lisäksi kappaleessa kuvaillaan, mitkä ovat olleet keskeisimmät ajatukset tutkielman liitteenä olevan tehtäväpaketin taustalla.

Tutkielman liitteenä oleva tehtäväpaketti pyrkii havainnollistamaan normaalijakauman teoreettista taustaa lukiotasolle soveltuvasti. Tehtäväpaketti sisältää tehtävät, tehtäville laaditut vastaukset sekä tehtävien sisältöä ja aiheita kuvailevan osion. Tutkielman lukeminen ei ole tehtäväpaketin käyttämisen kannalta välttämätöntä.

# Sisällys


**1 Johdanto** **1**

**2 Todennäköisyysavaruus** **3**

**3 Satunnaismuuttuja** **9**

**4 Odotusarvo** **18**

**5 Suppeneminen ja simulointi** **23**

**6 Karakteristiset funktiot** **28**

**7 Normaalijakauma** **34**

**8 Keskeinen raja-arvolause** **38**

**9 Normaalijakauman teoreettisen taustan käsitteleminen lukiossa** **41**

**Lähteet** **43**

**Liitteet** **44**

A Tietoa tehtävistä . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

B Tehtävät . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

C Vastaukset . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

# 1 Johdanto

Todennäköisyyden matemaattisen käsitteen syntymävuodeksi mainitaan usein 1654. Tuona vuonna kaksi kuuluisaa matemaatikkoa, Pierre de Fermat ja Blaise Pascal kävivät kirjeenvaihtoa liittyen erääseen uhkapeliongelmaan. Ensimmäisestä määritelmästä käytetään usein nimitystä **klassinen todennäköisyys**. Muita todennäköisyyden käsitettä yleistäneitä historiallisia määritelmiä ovat **frekventistinen todennäköisyys** ja **geometrinen todennäköisyys**. Todennäköisyyden teoreettisen tarkastelun ja käytännön sovelluksien raja on ollut todennäköisyyden historian alkuaikoina häilyvä. Teoria kehittyi 1800-luvulla matemaattisesti eksaktimpaan muotoon, ja modernin todennäköisyyden käsitteen perustana on 1800-luvun lopun ja 1900-luvun alun aikana kehittynyt **mittateoria**. Nykyinen **aksiomaattisen todennäköisyyden** käsite perustuu Andrei Kolmogorovin vuonna 1933 määrittelemiin todennäköisyyden aksioomiin.

Myös normaalijakauman ja keskeisen raja-arvolauseen kehittyminen on alkanut todennäköisyyslaskennan sovelluksissa heränneistä kysymyksistä. Normaalijakaumaa on käsitelty ensimmäisen kerran Abraham De Moivren toimesta. Hän osoitti, että binomijakauma $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ suppenee kohti normaalijakaumaa, kun $n \to \infty$. Hieman myöhemmin Pierre-Simon Laplace yleisti lauseen koskemaan kaikkia binomijakaumia. Tulos tunnetaan nimellä De Moivre-Laplace -lause. Laplace käytti todistuksessaan monelle todennäköisyysteorian tulokselle tärkeää muunnosta, jota nykyään todennäköisyysteoriassa kutsutaan karakteristiseksi funktioksi. Laplace esitti myös ensimmäisen muotoilun keskeiselle raja-arvolauseelle.

Keskeisen raja-arvolauseen juuret ovat satunnaisten mittausvirheiden analysoinnissa. Mitatun tiedon luotettavuuden ja virheiden jakauman arviointi on olennainen työkalu tarkkoja mittaustuloksia tarvitsevilla tieteenaloilla. Jo ennen matemaattisen todennäköisyyskäsitteen syntymistä Galileo Galilei kuvaili vuonna 1632 julkaisussaan virheiden jakauman ominaisuuksia. Hänen mukaansa pieniä virheitä tapahtui enemmän kuin suuria virheitä ja virheiden jakauma oli nollan suhteen symmetrinen. Hänen kuvaamansa ominaisuudet vastaavat keskeisiä normaalijakauman tunnusmerkkejä. Virheiden analysointia ovat kehittäneet myöhemmin monet tunnetut matemaatikot ja tähtitieteilijät. 1800-luvun alussa Carl Friedrich Gauss liitti normaalijakauman virheiden käsittelyyn osoittamalla tietyn tyyppiset virheet normaalisti jakautuneiksi. Keskeisen raja-arvoaluseen modernin muotoilun ja karakteristisiin funktioihin perustuvan todistuksen antoi Aleksandr Lyapunov vuonna 1901. Normaalijakaumaan liittyvää historiaa käydään läpi tarkemmin lähteissä [13] ja [10, s.1-11].

Normaalijakauma liittyy keskeisen raja-arvolauseen kautta olennaisella tavalla mittaustulosten analysointiin. Tästä syystä normaalijakaumalla on suuri merkitys tilastotieteessä ja tilastotiedettä soveltavilla kvantitatiivisen tutkimuksen aloilla. Lisäksi luonnontieteissä normaalijakaumaa käytetään mallina monille satunnaisilmiöille. Malli on voitu johtaa teoreettisen tarkastelun avulla tai tilastollisen tutkimuksen perusteella.

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä olennaiset todennäköisyysteorian tulokset, jotka tekevät normaalijakaumasta keskeisen työkalun satunnaisilmiöiden mallintamisessa. Kappale 2 käsittelee yleistä mittateoriaa, jonka pohjalle moderni todennäköisyysteoria rakentuu. Kappale 3 käsittelee satunnaismuuttujia, joiden avulla usein kuvaillaan satunnaisilmiöitä. Kappale 4 käsittelee odotusarvoa, joka on erikoistapaus mittaintegraalista. Todennäköisyysteoriaan liittyviä suppenemisen muotoja käsitellään kappaleessa 5. Karakteristinen funktio on tärkeä keskeisen raja-arvolauseen todistuksessa tarvittava todennäköisyysteorian työkalu, jota käsitellään kappaleessa 6. Keskeinen raja-arvolause liittyy olennaisesti normaalijakaumaan, ja kappale 7 käsittelee normaalijakaumaa sekä sen ominaisuuksia. Kappaleessa 8 esitellään ja todistetaan keskeinen raja-arvolause, joka on tämän tutkielman päätulos.

Tutkielman liitteenä on tehtäväpaketti, joka pyrkii havainnollistamaan normaalijakauman matemaattista taustaa lukiomatematiikan pitkän oppimäärän tasoisesti. Tehtävissä tutustutaan satunnaismuuttujien muunnoksiin, keskeiseen raja-arvolauseeseen ja simulointiin. Simulointia käytetään keskeisen raja-arvolauseen havainnollistamiseen sekä esimerkiksi puun muodon matkimiseen. Simulointia käsittelevät tehtävät on tarkoitettu suoritettaviksi GeoGebralla. Tehtäviin ei ole luotu valmiita GeoGebra-appletteja, vaan tehtäviä tekevä henkilö pääsee itse suorittamaan tehtävien yhteydessä annetut simulointiin vaadittavat komennot. Tehtäväpaketti on itsenäinen kokonaisuus, eikä tutkielman lukeminen ole tehtäväpaketin käyttämisen kannalta välttämätöntä.

Normaalijakauman tärkeydelle ei usein anneta matemaattisia perusteita lukio-opetuksessa ja normaalijakauman merkitys saattaa jäädä oppilaalta ymmärtämättä – Motivaationa tämän tutkielman sekä tehtäväpaketin laatimiseen on ollut se, etten itse oikein ymmärtänyt normaalijakauman merkitystä lukion matematiikan tunneilla.

# 2 Todennäköisyysavaruus

Modernin todennäköisyyden käsitteen perustana on 1800-luvun lopun ja 1900-luvun alun aikana kehittynyt **mittateoria**. Mittateoria käsittelee nimensä mukaisesti sitä, miten joukkoja on mahdollista mitata ja mitä ominaisuuksia mitoilla on. Todennäköisyyden käsite määritellään todennäköisyysavaruuden avulla, joka on mitta-avaruuden erikoistapaus. Mitta-avaruus muodostuu perusjoukosta, sen $\sigma$-algebrasta sekä $\sigma$-algebralle määritellystä mitasta. Perusjoukoksi voidaan valita mikä tahansa joukko ja sille määritelty $\sigma$-algebra on perusjoukon osajoukkojen kokoelma (eli joukkojen joukko), jolla on mittaamisen kannalta mielekäs rakenne. Perusjoukon $\sigma$-algebra sisältää joukot, joille halutaan määrittää mitta sekä kyseisten joukkojen numeroituvilla joukko-operaatioilla saatavat joukot.

**Määritelmä 2.1** (**$\sigma$-algebra**)
Olkoon perusjoukko $\Omega \neq \emptyset$ (mikä tahansa epätyhjä joukko) ja joukon osajoukkojen kokoelma $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$. Kokoelma $\mathcal{F}$ on $\sigma$-algebra, jos sillä on seuraavat ominaisuudet.

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.

(3) Joukkojen $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{F}$ yhdiste kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}$ eli

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Jos kolmas ehto pätee ainoastaan äärellisille yhdisteille, kokoelmaa sanotaan algebraksi, jota merkitään usein kirjaimella $\mathcal{A}$.

Rakenteeltaan $\sigma$-algebra vastaa hyvin intuitiota siitä, mitä on mahdollista mitata – yhdistämällä ja leikkaamalla (numeroituvan määrän) mitattavia joukkoja tai niiden komplementteja saadaan luotua mitattavia joukkoja. Lisäksi tyhjää joukkoa sekä perusjoukkoa voidaan mitata. Perusjoukko $\Omega$ ja $\sigma$-algebra muodostavat mitallisen avaruuden. Se on avaruus, jolle voidaan määrittää mitta.

**Määritelmä 2.2** (**Mitallinen avaruus**)
Olkoon perusjoukko $\Omega$ ja sen $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$. Mitallinen avaruus on pari $(\Omega, \mathcal{F})$.

Mitallisen avaruuden $(\Omega, \mathcal{F})$ $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$ sisältää perusjoukon $\Omega$ osajoukot, joita halutaan mitata. Määritellään seuraavaksi, mitä mitalla ja mittaamisella tarkoitetaan.

**Määritelmä 2.3** (**Mitta**)
Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Kuvaus $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ on **mitta**, jos sillä on seuraavat ominaisuudet.

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ja $A_m \cap A_n = \emptyset$ kun $m \neq n$, niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Toisin sanoen erillisten $\sigma$-algebran joukkojen yhdisteen mitta on mittojen summa. Tätä ominaisuutta kutsutaan mitan $\sigma$-additiivisuudeksi.

Mitta vastaa monelta osin intuitiivista käsitystä mittaamisesta. Mitta on ei-negatiivinen, tyhjän joukon mitta on aina 0 ja erillisten joukkojen yhdisteiden mitta on joukkojen mittojen summa. Näiden perusominaisuuksien avulla saadaan todistettua monia muita mitalle intuitiivisesti kuuluvia ominaisuuksia. Mitta-avaruus on mitallisen avaruuden ja mitan muodostama kolmikko.

**Määritelmä 2.4** (**Mitta-avaruus**)
Olkoon mitallinen avaruus $(\Omega, \mathcal{F})$ ja mitta $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. Mitta-avaruus on kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

**Huomautus 2.5**
Mitta-avaruus on äärellinen, jos $\mu(\Omega) < \infty$. Jos mitta-avaruus avaruus on äärellinen, sen mitalla on maksimiarvo $\mu(\Omega) \in \mathbb{R}$.

*Todistus.* Kaikilla $A \in \mathcal{F}$ myös $\Omega \setminus A = A^c \in \mathcal{F}$. Lisäksi $A \cap A^c = \emptyset$, eli joukot $A, A^c$ ovat erilliset. Tällöin mitan additiivisuuden ja ei-negatiivisuuden nojalla

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(A^c) = \mu(A \cup A^c) = \mu(\Omega).$$

□

Nykyisen aksiomaattisen määritelmän todennäköisyydelle antoi venäläinen matemaatikko Andrei Kolmogorov. Aksiomaattinen määritelmä mahdollistaa todennäköisyyden tutkimisen puhtaasti teknisestä näkökulmasta. Aksioomat eivät ota kantaa ilmiön syihin tai tarkoitukseen, vaan antavat minimaaliset säännöt ilmiön kuvaamiseen ja tutkimiseen mittateorian käsitteiden avulla.

**Määritelmä 2.6** (**Todennäköisyysmitta**)
Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus ja $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mitta. Mitta $\mu$ on todennäköisyysmitta, jos $\mu(\Omega) = 1$. Todennäköisyysmittaa merkitään yleisesti kirjaimella $\mathbb{P}$.

**Määritelmä 2.7** (**Kolmogorovin aksioomat ja todennäköisyysavaruus**)
Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus ja $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ todennäköisyysmitta. Mitta-avaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on todennäköisyysavaruus. Mitan arvo $\mathbb{P}(A)$ on joukon $A \in \mathcal{F}$ ja sitä vastaavan tapahtuman todennäköisyys.

Todennäköisyyslaskennassa (esimerkiksi peruskoulussa ja lukiossa) satunnaisilmiötä mallinnetaan valitsemalla perujoukko, sen alkeistapahtumat sekä niiden todennäköisyydet. Alkeistapahtumat ovat todennäköisyysteorian näkökulmasta perusjoukon algebra, jonka valinta on "intuitiivinen" ja sitä ei kirjoiteta auki.

Satunnaisilmiön teoreettisen kuvaamisen kannalta olisi siis mielekästä, että perusjoukon, sille määritetyn algebran $\mathcal{A}$ (satunnaisilmiön alkeistapahtumat, jotka on esitettävissä äärellisten joukko-operaatioiden avulla), sekä sen alkioiden todennäköisyyden valitsemisen jälkeen on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta, joka vastaa valittuja todennäköisyyksiä. Tämän takaa **Carathéodoryn laajennuslause**. Lauseen tarkempi tarkastelu ohitetaan tässä tutkielmassa, ja sen todistus löytyy lähteestä [3, s.343-347].

Käydään seuraavaksi läpi virittävän $\sigma$-algebran ja Borelin $\sigma$-algebran käsitteet, joita tarvitaan satunnaismuuttujan ja satunnaisvektorin määrittelemiseen.

**Lause 2.8** ($\sigma$-algebrojen leikkaus)
Olkoon $\sigma$-algebrat $\mathcal{F}_i$, jossa $i \in I$ ja $I$ on indeksijoukko. Joukkojen leikkaus $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ on $\sigma$-algebra.

*Todistus.*

(1) Koska $\emptyset \in \mathcal{F}_i$ kaikilla $i \in I$, niin $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A \in \mathcal{F}_i$ kaikilla $i \in I$. Tällöin $A^c \in \mathcal{F}_i$ kaikilla $i \in I$, joten $A^c \in \mathcal{F}$.

(3) Jos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, niin $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}_i$ kaikilla $i \in I$. Tällöin siis $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_i$ kaikilla $i \in I$, joten $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$

□

**Määritelmä 2.9** (**Kokoelman virittämä $\boldsymbol{\sigma}$-algebra**)
Olkoon $\Omega \neq \emptyset$ epätyhjä joukko ja $\mathcal{G}$ epätyhjä joukon $\Omega$ osajoukkojen kokoelma. Kokoelman $\mathcal{G}$ virittämä $\sigma$-algebra on

$$\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ on } \sigma\text{-algebra ja } \mathcal{G} \subset \mathcal{F}\}.$$

**Huomautus 2.10**
Joukon $\Omega \neq \emptyset$ osajoukkojen epätyhjä kokoelma $\mathcal{G}$ virittää aina $\sigma$-algebran $\sigma(\mathcal{G})$, sillä lauseen 2.8 mukaan $\sigma$-algebrojen leikkaus on $\sigma$-algebra ja $\mathcal{G} \subset 2^{\Omega}$, missä potenssijoukko $2^{\Omega}$ on tunnetusti $\sigma$-algebra. Lisäksi määritelmää tarkastelemalla havaitaan, että $\sigma(\mathcal{G})$ on pienin kokoelman $\mathcal{G}$ sisältävä $\sigma$-algebra. Perustelu löytyy tarkemmin lähteestä [2, s. 4-5]

**Määritelmä 2.11** (**Borel $\sigma$-algebra ja Borel-joukko**)
Joukon $\mathbb{R}^n$ avointen välien virittämä $\sigma$-algebra on joukon Borel $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{B \subset \mathbb{R}^n : B \text{ on avoin}\})$. Kokoelman $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ joukkoja nimitetään Borel-joukoiksi.

**Huomautus 2.12**
Käytetään jatkossa seuraavia merkintöjä usein esiintyville Borelin $\sigma$-algebroille

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B} \text{ ja } \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_n.$$

Reaalilukujen Borel-$\sigma$-algebra voidaan virittää useiden kokoelmien avulla. Esitellään näistä tutkielmaan liittyvät kokoelmat.

**Lause 2.13** (Borel-$\sigma$-algebran virittävät kokoelmat)
Reaalilukujen Borel-$\sigma$-algebra voidaan virittää myös seuraavien kokoelmien avulla.

$$\mathcal{B} = \sigma(\{[a, b] \subset \mathbb{R} : a < b\}) = \sigma(\{(a, b] \subset \mathbb{R} : a < b\}) = \sigma(\{(-\infty, b] \subset \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\})$$

*Todistus.* Todistus ohitetan ja se on löytyy lähteestä [2, s.7]. □

Satunnaisilmiöitä tutkittaessa on usein tarve käsitellä yksittäisen satunnaisilmiön sijasta usean satunnaisilmiön käytöstä. Tärkeä usean satunnaisilmiön käsittelyä yksinkertaistava ominaisuus on riippumattomuus. Riippumattomat satunnaisilmiöt eivät vaikuta toistensa tapahtumien todennäköisyyksiin, eli eivät toimi ennusteena toisilleen.

**Määritelmä 2.14** (**Riippumattomuus tapahtumille**)
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja tapahtumat $A_i \in \mathcal{F}$, missä $i \in I$ ja $I$ on numeroituva indeksijoukko. Tapahtumat ovat riippumattomia jos kaikilla äärellisillä $J \subset I$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Käsitellään viimeisenä tuloavaruus, joka on useamman todennäköisyysavaruuden "tulona" saatava todennäköisyysavaruus. Tuloavaruus on luonnollinen muoto riippumattomia satunnaisilmiöitä vastaavalle todennäköisyysavaruudelle.

**Määritelmä 2.15** (**Äärellinen tuloavaruus ja tulomitta**)
Olkoon mitalliset avaruudet $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, missä $n \in \mathbb{N}$. Mitallisia avaruuksia vastaa tulo-avaruus $(\otimes_{i=1}^n \Omega_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i) = \otimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, jossa

$$\otimes_{i=1}^n \Omega_i = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \quad \text{ja} \quad \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{F}_i\}).$$

**Lause 2.16**
Olkoon mitta-avaruudet $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Tuloavaruudella $\otimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ on yksikäsitteinen tulomitta $\otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i : \mathcal{F} \to [0, 1]$, jolle kaikilla $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, jossa $A_i \in \mathcal{F}_i$,

$$\otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i(A) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i(A_i).$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lähteestä [3, s. 32]. □

Eräs tärkeä esimerkki tulorakenteen käytöstä on Borel-mitallisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ ilmaiseminen tulona $\otimes_{i=1}^n (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

**Lause 2.17** (Borel-mitallisten reaaliavaruuksien tulo)
Olkoon mitalliset avaruudet $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ ja $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, jossa $m, n \in \mathbb{N}$. Näiden avaruuksien tulona saadaan uusi mitallinen avaruus

$$(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m) \otimes (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n) = (\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{B}_{m+n}).$$

*Todistus.* Yhtäsuuruus on ilmeinen perusjoukolle $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, joten riittää tarkastella, päteekö $\sigma$-algebralle $\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{m+n}$. Tämä todistus löytyy lähteestä [1, s.138]. Todistus nojaa joukon $\mathbb{R}^N$ avointen osajoukkojen ominaisuuksiin ja välien numeroituvien joukko-operaatioiden tarkasteluun. □

**Seuraus 2.18**
Lauseen 2.17 suorana seurauksena saadaan kaikille mitallisille avaruuksille $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n),\ n \in \mathbb{N}$ esitys reaalilukujen Borel-mitallisten avaruuksien tulona

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n) = \otimes_{i=1}^n (\mathbb{R}, \mathcal{B}).$$

Tuloavaruuden käsite saadaan yleistettyä sylinterijoukkojen avulla numeroituvalle määrälle mitallisia avaruuksia.

**Määritelmä 2.19** (**Sylinterijoukko**)
Olkoon mitalliset avaruudet $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, jossa $i \in I$ ja $I$ on numeroituva indeksijoukko. Joukko $C \subset \times_{i \in I} \Omega_i$ on sylinterijoukko, jos on olemassa äärellinen $J \subset I$ siten, että

$$C = \bigtimes_{i \in I} A_i, \text{ jossa } \begin{cases} A_i \in \mathcal{F}_i & , i \in J, \\ A_i = \Omega_i & , i \notin J \end{cases}.$$

**Määritelmä 2.20** (**Numeroituva tuloavaruus**)
Olkoon mitalliset avaruudet $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, jossa $i \in \mathbb{N}$. Sylinterijoukkojen kokoelma $\mathcal{C} = \{C \subset \times_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i : C \text{ on syliterijoukko}\}$ virittää perusjoukolle $\times_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ $\sigma$-algebran $\otimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{C})$. Numeroituva tuloavaruus on mitallinen avaruus $(\times_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i, \otimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i) = \otimes_{i \in \mathbb{N}} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$.

Borel-mitallisten reaaliavaruuksien tulo on todennäköisyysteorian kannalta tärkeä käsite myös siitä syystä, että kyseiseen tuloavaruuteen liittyy tulomitta myös numeroituvan tulon tapauksessa. Numeroituvan tuloavaruuden tulomitta on olemassa myös yleisemmässä tapauksessa tietyt Borel-mitallisen reaaliavaruuden olennaiset ominaisuudet omaaville mitta-avaruuksille [11, s.165-166].

**Lause 2.21** (**Tuloavaruuden** $\otimes_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ **tulomitta**)
Olkoon todennäköisyysavaruudet $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mathbb{P}_i)$, jossa $i\in\mathbb{N}$. Tuloavaruudella $\otimes_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ on yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $\otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_i$, jolle kaikilla sylinterijoukoilla $A = \times_{i\in\mathbb{N}}A_i \in \{C\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : C \text{ on syliterijoukko}\}$

$$\otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_i\,(A) = \prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_i(A_i).$$

Borel-mitallisten todennäköisyysavaruuksien tuloavaruudella tarkoitetaan todennäköisyysavaruutta $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{B},\otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_i) = \otimes_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{R},\mathcal{B},\mathbb{P}_i)$.

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se on esitetty yksityiskohtaisesti lähteessä [5, s.33-35]. Todistus esitetään lähteessä osana satunnaismuuttujiin liittyvää lausetta. Aihetta käsitellään myös laajasti lähteessä [11, s.150-166] ja lyhyesti lähteessä [3, s. 45 ja s. 350-351]. □

**Huomautus 2.22**
Olkoon tuloavaruus $\otimes_{i\in I}(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, jolla on tulomitta $\otimes_{i\in I}\mathbb{P}_i$. Jokaisen alkuperäisen avaruuden joukkoa $A_k\in\mathcal{F}_k$ vastaa joukko

$$\hat{A}_k = \bigtimes_{i\in I} A_i, \text{ missä } A_i = \begin{cases} A_k, & i=k, \\ \Omega_i, & i\neq k \end{cases}.$$

Tuloavaruuden avulla voidaan määrittää jokaisen alkuperäisen tapahtuman todennäköisyys

$$\mathbb{P}_k(A_k) = \otimes_{i\in I}\mathbb{P}\left(\hat{A}_k\right).$$

Lisäksi tuloavaruuden joukot $\hat{A}_k, \hat{A}_l \in \otimes_{i\in I}\mathcal{F}$ ovat riippumattomia kaikilla $k\neq l$.

# 3 Satunnaismuuttuja

Todennäköisyysavaruus ja siihen liittyvät tulokset antavat teoreettisen kehyksen todennäköisyyden käsitteelle. Satunnaisilmiötä käsitellään usein liittämällä mahdollisiin tapahtumiin jokin reaaliluku. Luku valitaan usein vastaamaan sitä, mitä satunnaisilmiön tapahtumasta voidaan "havaita". Tällä menettelyllä todennäköisyysavaruuden abstraktion sijasta voidaan puhua satunnaisilmiön havaittavista arvoista ja niiden todennäköisyyksistä eli jakaumasta. Tapahtumien (todennäköisyysavaruuden perusjoukon alkioiden) ja havaintojen (reaalilukujen) yhteen liittämisessä on kuitenkin otettava huomioon se, että havaittavien arvojen todennäköisyyksiä voidaan mitata. Tämä onnistuu kuvauksella, jota nimitetään satunnaismuuttujaksi.

Mittateorian näkökulmasta satunnaismuuttuja on mitallinen kuvaus todennäköisyysavaruudelta mitalliseen avaruuteen $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Mitallinen kuvaus kuvaa mitallisen avaruuden perusjoukon toiselle mitalliselle avaruudelle siten, että maalijoukon $\sigma$-algebran joukkojen alkukuvat kuuluvat lähtöavaruuden $\sigma$-algebraan. Työssä rajoitutaan tarkastelemaan satunnaismuuttujia ja satunnaisvektoreita, eli mitallisia kuvauksia todennäköisyysavaruudelta mitalliselle avaruudelle $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Yleisemmässä tapauksessa puhutaan satunnaiselementeistä, jotka ovat mitallisia kuvauksia todennäköisyysavaruudelta metriseen avaruuteen [6, s.45-46].

**Määritelmä 3.1** (**Mitallinen kuvaus**)
Olkoon $(\Omega_1, \mathcal{F}_2)$ ja $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ mitalliset avaruudet. Kuvaus $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ on $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$ mitallinen, jos $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ kaikilla $A \in \mathcal{F}_2$.

**Määritelmä 3.2** (**Satunnaismuuttuja ja satunnaisvektori**)
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Kuvaus $X$ on satunnaisvektori, jos se on $\mathcal{F}/\mathcal{B}_n$ mitallinen, eli jos kaikilla $B \in \mathcal{B}_n$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Jos $n = 1$, satunnaisvektoria sanotaan satunnaismuuttujaksi.

Esitellään seuraavaksi satunnaisvektorin muunnoksien mitallisuuteen liittyvä apulause.

**Lause 3.3**
Olkoon mitalliset avaruudet $(\Omega, \mathcal{F})$ ja $(\Omega', \sigma(\mathcal{G}))$, missä $\mathcal{G}$ on epätyhjä joukon $\Omega'$ osajoukkojen kokoelma. Kuvaus $f : \Omega \to \Omega'$ on $\mathcal{F}/\sigma(\mathcal{G})$ mitallinen, jos $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ kaikilla $A \in \mathcal{G}$.

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lähteestä [4, s.38]. □

Lauseen avulla avulla saadaan osoitettua seuraava tärkeä yhteys satunnaismuuttujan ja satunnaisvektorin välille.

**Lause 3.4** (Satunnaisvektorin komponentit ovat satunnaismuuttujia)
Todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}^n,\ X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ on satunnaisvektori jos ja vain jos komponentit $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ovat satunnaismuuttujia.

*Todistus.* Jos $X$ on satunnaisvektori, niin kaikilla $B \in \mathcal{B}$ ja komponenttikuvauksilla $X_i$

$$X_i^{-1}(B) = X^{-1}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\right), \text{ jossa } A_j = \begin{cases} B, & j = i \\ \mathbb{R}, & j \neq i \end{cases}.$$

Koska $\times_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{B}_n$ ja $X$ on satunnaisvektori, $X_i^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Komponenttikuvaukset ovat siis satunnaismuuttujia.

Jos komponenttikuvaukset $X_i$ ovat satunnaismuuttujia, niin kaikilla $A \in \mathcal{B}$ alkukuvat $X_i^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Olkoon $\mathcal{C} = \{B_1 \times \cdots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}\}$ kaikkien $\mathbb{R}^n$ sylinterijoukkojen kokoelma. Kaikilla sylinterijoukoilla $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{C}$, missä $B_i \in \mathcal{B}$, on alkukuva

$$X^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}.$$

Lisäksi seurauksen 2.18 nojalla $\mathcal{B}_n = \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$. Tällöin siis lauseen 3.3 nojalla $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ kaikilla $B \in \mathcal{B}_n$, joten $X$ on satunnaisvektori. □

Indikaattorifunktio (yleisesti mittateoriassa kyseistä funktiota kutsutaan karakteristiseksi funktioksi) on kaikista yksinkertaisin satunnaismuuttuja, joka esiintyy monissa todennäköisyysteorian määritelmissä ja todistuksissa.

**Määritelmä 3.5 (indikaattorifunktio)**
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sekä joukko $A \in \mathcal{F}$. Joukon $A$ indikaattorifunktio on $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$,

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A \\ 1, & \omega \in A \end{cases}.$$

Indikaattorifunktio on selvästi satunnaismuuttuja, sillä kaikilla $B \in \mathcal{B}$ joukolla on alkukuva $1_A^{-1}(B) \in \{\emptyset, A^c, A, \Omega\} \subset \mathcal{F}$.

Määritellään vielä yksinkertainen satunnaismuuttuja. Odotusarvon käsite rakennetaan yksinkertaisten satunnaismuuttujien avulla.

**Määritelmä 3.6 (Yksinkertainen funktio eli yksinkertainen satunnaismuuttuja)**
Funktio $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen, jos on olemassa reaaliluvut reaaliluvut $a_i \in \mathbb{R}$ ja indikaatorifunktiot $1_{A_i} : \Omega \to \{0, 1\}$, jossa $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, joille

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(\omega).$$

Yksinkertainen funktio on siis indikaattorifunktioiden lineaarikombinaatio.

**Huomautus 3.7**
Yksinkertainen funktio on satunnaismuuttuja. Tämä voidaan osoittaa suoraan tarkastelemalla funktion alkukuvia. Olkoon $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(\omega)$ yksinkertainen funktio ja $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Merkitään kokoelmaa $\mathcal{J}_r = \{J \subset I : \sum_{j \in J} a_j = r\}$. Nyt kaikilla $B \in \mathcal{B}$

$$X^{-1}(B) = X^{-1}(B \cap X(\Omega)) = \bigcup_{r \in B \cap X(\Omega)} \bigcup_{J \in \mathcal{J}_r} \left( \bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{i \in I \setminus J} A_i^c \right)$$

Lisäksi $\#\mathcal{J}_r \leq \#2^I = 2^n$ ja $\#X(\Omega) \leq \#2^I = 2^n$. Jokainen alkukuva saadaan ilmaistua äärellisten joukko-operaatioiden avulla joukoista $A_i \in \mathcal{F}$, jossa $i \in I$. Tällöin $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, joten yksinkertainen funktio $X$ on satunnaismuuttuja.

Satunnaisvektori liittää jokaiseen Borel-joukkoon $B \in \mathcal{B}_n$ lähtöjoukon $A \in \mathcal{F}$, jolla on todennäköisyys $\mathbb{P}(A)$. Tämä on todennäköisyys sille, että satunnaismuuttujan arvo $X(\omega) \in B$.

**Määritelmä 3.8** (**Satunnaisvektorin arvojen todennäköisyys**)
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, satunnaisvektori $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ja Borel-joukko $B \in \mathcal{B}_n$. Todennäköisyys sille, että satunnaismuuttujan arvo $X(\omega) \in B$, on alkukuvan $X^{-1}(B)$ todennäköisyys, ja sitä merkitään seuraavilla tavoilla

$$\mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Jos $X$ on satunnaismuuttuja, lukuun $a \in \mathbb{R}$ liittyvistä todennäköisyyksistä käytetään seuraavia lyhenteitä

$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \in \{a\})$$
$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, a]),\ \mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, a))$$
$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X \in [a, \infty)),\ \mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X \in (a, \infty)).$$

Satunnaisvektorin lähtöavaruuden todennäköisyysmitta määrittää todennäköisyyden kaikille $B \in \mathcal{B}_n$, joten se indusoi todennäköisyysmitan mitalliseen avaruuteen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Todennäköisyysteoriassa indusoitua mittaa sanotaan satunnaisvektorin jakaumaksi (mittateoriassa indusoitua mittaa sanotaan kuvamitaksi tai mitan puskuksi). Lisäksi maaliavaruus varustettuna indusoidulla todennäköisyysmitalla on todennäköisyysavaruus.

**Lause 3.9** (**Jakauma ja indusoitu todennäköisyysavaruus**)
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja satunnaisvektori $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Satunnaisvektori $X$ indusoi todennäköisyysavaruuden $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P)$, missä

$$P : \mathcal{B}_n \to [0, 1] : P(B) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Todennäköisyysmitta $P$ on satunnaismuuttujan $X$ jakauma.

*Todistus.* Borel $\sigma$-algebra $\mathcal{B}_n$ on määritelmänsä mukaisesti joukon $\mathbb{R}^n$ $\sigma$-algebra. Osoitetaan vielä, että $P$ on todennäköisyysmitta.

(1) $P(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}^n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$

(2) Olkoon erilliset joukot $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}_n$. Tällöin

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_i\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

□

Tämä on tärkeä havainto, sillä sen nojalla yksittäisen satunnaisvektorin käytöstä voidaan tarkastella ainoastaan sen arvojen todennäköisyyksien avulla. Satunnaisvektorin määrittelyn kannalta riittää siis antaa perusjoukko $\mathbb{R}^n$ ja jokin todennäköisyysmitta $P : \mathcal{B}_n \to [0, 1]$ eli jakauma. Tämä kaksikko sisältää kaiken tiedon yksittäisen satunnaisvektorin käytöksestä.

Jakaumaa tarkastellaan usein kertymäfunktion avulla, joka määräytyy yksikäsitteisesti jakaumasta.

**Määritelmä 3.10** (**Kertymäfunktio**)
Olkoon satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, jolla on jakauma $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$. Satunnaismuuttujan kertymäfunktio on kuvaus

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1] : F(x) = P\left((-\infty, x]\right).$$

Kertymäfunktio $F$ kuvaa todennäköisyyden kertymistä välillä $(-\infty, x] \subset \mathbb{R}$.

Kertymäfunktion vastine satunnaisvektorille on yhteiskertymäfunktio.

**Määritelmä 3.11** (**Yhteiskertymäfunktio**)
Olkoon satunnaisvektori $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, jolla on jakauma $P : \mathcal{B}_n \to [0, 1]$. Satunnaisvektorin yhteiskertymäfunktio on kuvaus

$$F : \mathbb{R}^n \to [0, 1] : F(x) = P\left(\bigtimes_{i=1}^{n} (-\infty, x_i]\right).$$

Satunnaisvektorilla on aina yksikäsitteinen kertymäfunktio, sillä puoliavointen välien tulo $\times_{i=1}^{n} (-\infty, x_i] \in \mathcal{B}_n$

Kertymäfunktiolla on muutamia keskeisiä ominaisuuksia, jotka tulevat esille suppenemista käsittelevässä kappaleessa.

**Lause 3.12**
Kertymäfunktiolla $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ on seuraavat ominaisuudet

(1) $F$ on oikealta jatkuva ja vasemmanpuoleinen raja-arvo on olemassa kaikkialla, eli $\lim_{x \to x_0^+} F(x_0) = F(x_0)$ ja $\lim_{x \to x_0^-} F(x_0) \in [0,1]$ kaikille $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) Funktiolla $F$ on korkeintaan numeroituva määrä epäjatkuvuuspisteitä.

*Todistus.* Todistus ohitetaan, ja se löytyy lähteestä [6, s.31]. □

Satunnaismuuttujan arvojen todennäköisyyksiä tulkitaan jakauman ja kertymäfunktion kautta. Erilaisten jakaumien tutkiminen on olennainen osa todennäköisyysteoriaa. Satunnaismuuttujat voidaan jaotella jakaumatyyppinsä mukaan erilaisiksi satunnaismuuttujiksi, joilla on tietyt ominaisuudet. Tämä mahdollistaa satunnaismuuttujien teoreettisen tarkastelemisen tyyppi kerrallaan. Esitellään seuraavaksi todennäköisyyslaskennasta tutut jakaumatyypit.

Todennäköisyyslaskennassa käsitellään yleensä ensin satunnaismuuttujia, jotka voivat saada numeroituvan määrän eri arvoja. Tätä tyyppiä olevilla satunnaismuuttujilla on diskreetti jakauma. Diskreetin jakauman avulla voidaan mallintaa esimerkiksi yksittäistä nopanheittoa (diskreetti tasajakauma), $n \in \mathbb{N}$ kolikonheiton toistokoetta (binomijakauma), tai kaupan kassalle jonottavien ihmisten lukumäärää (Poisson-jakauma). Yksinkertaisin diskreetti jakauma on nimeltään Diracin pistemassa.

**Esimerkki 3.13** (**Diracin pistemassa**)
Olkoon satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R} : X(\omega) = a$, jollain $a \in \mathbb{R}$. Satunnaismuuttuja voi saada ainoastaan yhden arvon, ja vastaa varmaa determinististä tapahtumaa. Satunnaismuuttujalla on jakauma

$$\delta_a : \mathcal{B} \to \{0,1\} : \delta_a(B) = \begin{cases} 0, & a \notin B \\ 1, & a \in B \end{cases}$$

Kyseistä jakaumaa kutsutaan Diracin pistemassaksi.

**Määritelmä 3.14** (**Diskreetti jakauma**)
Olkoon $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja, $P : \mathcal{B} \to [0,1]$ sen jakauma ja $S = \{x \in X(\Omega) : \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ sen kantaja, eli satunnaismuuttujan mahdollisten arvojen joukko. Satunnaismuuttujan jakauma $P$ on diskreetti, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(B) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X = s)\delta_s(B).$$

**Lause 3.15** (Diskreetti jakauma ja satunnaismuuttujan arvojoukko)
Satunnaismuuttujalla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on diskreetti jakauma, jos ja vain jos sen kantaja $S = \{x \in X(\Omega) : \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ on numeroituva.

*Todistus.* Jos satunnaismuuttujalla $X$ on numeroituva kantaja $S$, niin

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \in B \cap S) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{s \in S} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \{s\} \cap B\}\right) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X = s)\delta_s(B)$$

Jos taas satunnaismuuttujalla $X$ on diskreetti jakauma $P$, niin

$$P(S) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X = s)\delta_s(S) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X = s) = 1.$$

Koska summattava termi $\mathbb{P}(X = s) > 0$ kaikilla $s \in S$ ja summa on äärellinen, summattavia termejä on korkeintaan numeroituva määrä (summa ylinumeroituvasta määrästä positiivisia termejä hajaantuu). Tällöin siis satunnaismuuttujan kantaja $S$ on numeroituva. □

Toinen todennäköisyyslaskennassa käsiteltävä jakaumatyyppi on absoluuttisesti jatkuva jakauma, joka voidaan ilmaista positiivisen reaalifunktion integraalina. Absoluuttisesti jatkuvaa jakaumaa nimitetään usein todennäköisyyslaskennassa jatkuvaksi jakaumaksi. Todennäköisyysteoriassa jatkuva jakauma on absoluuttisesti jatkuvaa jakaumaa yleisempi käsite (esimerkiksi Cantorin jakauma [6, s.40-42] on jatkuva, mutta ei absoluuttisesti jatkuva). Tässä työssä käytetään selkeyden vuoksi todennäköisyysteorian kanssa yhteensopivaa nimitystä absoluuttisesti jatkuvalle jakaumalle. Absoluuttisesti jatkuvan jakauman avulla voidaan mallintaa esimerkiksi elektronisen komponentin elinikää (eksponenttijakauma) ja ihmisen pituutta (normaalijakauma).

**Määritelmä 3.16** (**Absoluuttisesti jatkuva jakauma**)
Olkoon satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, jolla on jakauma $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$. Jakauma $P$ on absoluuttisesti jatkuva, jos se voidaan esittää jonkin funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue-integraalina,

$$P(B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Funktio $f$ on satunnaismuuttujan $X$ tiheysfunktio.

**Huomautus 3.17**
Absoluuttinen jatkuvuus voidaan kuvata myös kertymäfunktion avulla. Satunnaismuuttujalla $X$ on absoluuttisesti jatkuva jakauma, jos ja vain jos sillä on kertymäfunktio $F$, jolle

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Satunnaisilmiötä mallinnetaan usein käyttämällä yhden satunnaismuuttujan sijasta useita satunnaismuuttujia. Satunnaismuuttujien käytöstä voidaan vertailla tai satunnaimuuttujia voidaan yhdistää uusiksi monimutkaisemmiksi satunnaismuuttujiksi. Kuten tapahtumien kohdalla (määritelmä 2.14), myös satunnaismuuttujien käsittelyssä riippumattomuus on olennainen käsite. Riippumattomuus kuvaa tilannetta, jossa tieto yhden satunnaismuuttujan arvosta ei vaikuta muiden satunnaismuuttujien arvojen todennäköisyyksiin.

**Määritelmä 3.18** (**Satunnaismuuttujien riippumattomuus**)
Olkoon satunnaismuuttujat $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ sekä niitä vastaavat jakaumat $P_i$ kaikilla $i \in I$, missä $I$ on numeroituva indeksijoukko. Satunnaismuuttujat ovat **riippumattomia**, jos kaikilla äärellisillä $J \subset I$ ja Borel-joukoilla $B_j \in \mathcal{B}, j \in J$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in B_j\}\right) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}\left(X_j \in B_j\right) = \prod_{j\in J} P_j\left(B_j\right).$$

**Lause 3.19**
Satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots, X_n$, joilla on kertymäfunktiot $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ovat riippumattomia, jos ja vain jos niitä vastaavan satunnaisvektorin $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yhteiskertymäfunktio $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ voidaan kirjoittaa kertymäfunktioiden tulon avulla

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i).$$

*Todistus.* Jos satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, niin jokaiselle välille $(-\infty, x_1]$, $(-\infty, x_2] \ldots (-\infty, x_n] \in \mathcal{B}$ saadaan yhteiskertymäfunktio

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left((-\infty, x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

Toisen puolen tarkastelu ohitetaan, sillä se vaatii mittateorian tuloksia, joita ei käsitellä tässä tutkielmassa. Tulos on todistettu lähteessä [6, s.69]. □

Useat satunnaismuuttujien rajankäyntiin liittyvät tulokset koskevat riippumattomien satunnaismuuttujien jonoa. Empiirisesti "tiedetään", että $n \in \mathbb{N}$ toiston koetta (esimerkiksi $n$ nopanheiton toistokoe) voidaan kuvata $n$ kappaleella riippumattomia satunnaismuuttujia. Olisi luonnolista, että riippumattomien satunnaismuuttujien jonon voi "luoda" äärettömän pitkällä toistokokeella. Tällaisen jonon olemassaolo saattaa tuntua itsestäänselvältä, mutta matemaattisesti sen olemassaolo ei ole triviaalia. Riippumattomien satunnaismuuttujien jonon olemassaolo perustuu tuloavaruutena (Lause 2.21) määriteltävään todennäköisyysavaruuteen.

**Lause 3.20** (Riippumattomien satunnaismuuttujien jonon olemassaolo)
Olkoon jakaumat $P_i : \mathcal{B} \to [0,1]$, jossa $i \in I$ ja $I$ on numeroituva indeksijoukko. Tällöin on olemassa todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja riippumattomat satunnaismuuttujat $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, jossa $i \in I$, joille

$$\mathbb{P}(X_i \in B) = P_i(B), \text{ kaikilla } B \in \mathcal{B}.$$

*Todistus.* Jakaumat $P_i$ ovat todennäköisyysmittoja todennäköisyysavaruuksissa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_i)$. Todennäköisyysavaruuksien avulla saadaan lauseen 2.21 mukaisesti muodostettua tuloavaruus $\otimes_{i\in I}(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_i)$. Määritellään projektiot $X_i : \otimes_{i\in I}\mathbb{R} \to \mathbb{R} : X_i(x) = x_i$. Kaikilla $B \in \mathcal{B}$ projektiolla $X_i$ on alkukuva

$$X_i^{-1}(B) = \bigtimes_{j\in I} A_j, \text{ jossa } A_j = \begin{cases} B, & i = j, \\ \mathbb{R}, & i \neq j \end{cases}.$$

Tällöin siis $X_i^{-1}(B) \in \otimes_{i\in I}\mathcal{B}$, joten $X_i$ on satunnaismuuttuja. Lisäksi tuloavaruuden määritelmän mukaisesti satunnaismuuttujalle saadaan jakauma $\otimes_{i\in I}P_i(X_i \in B) = P_i(B)$.

Satunnaismuuttujat $X_i$ ovat riippumttomia, sillä kaikilla äärellisillä $J \subset I$ ja joukoille $B_j \in \mathcal{B}$, jossa $j \in J$,

$$\otimes_{i\in I}P_i\left(\bigcap_{j\in J}\{x \in \otimes_{i\in I}\mathbb{R} : X_j(x) \in B_j\}\right) = \otimes_{i\in I}P_i\left(\bigtimes_{i\in I} A_i\right), \text{ jossa } A_i = \begin{cases} B_i, & i \in J, \\ \mathbb{R}, & i \notin J \end{cases}.$$

$$= \prod_{j\in J} P_i(X_j \in B_j)$$

□

## Satunnaismuuttujan muunnokset

Yksittäisen satunnaisilmiön käytöksen tutkimisen lisäksi voidaan tutkia miten yhden tai useamman satunnaismuuttujan avulla voidaan johtaa uusia satunnaismuuttujia. Keskeisen raja-arvolauseen kannalta erityisesti riippumattomien mitallisten muunnoksien riippumattomuus, satunnaismuuttujien summa sekä suppeneva satunnaismuuttujien jono ovat tärkeitä tarkastelun kohteita.

**Lause 3.21** (Satunnaismuuttujan pisteittäinen suppeneminen ja raja-arvo)
Olkoon $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ satunnaismuuttujien jono, jossa $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa satunnaismuuttujat

$$\limsup_{n\to\infty} X_n \text{ ja } \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Jonolla on raja-arvo, jos $\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n = X$ ja tällöin $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Jonon raja-arvo $X$ on satunnaismuuttuja.

*Todistus.* Todistus löytyy lähteestä [6, s.28-29]. □

**Lause 3.22** (Satunnaismuuttujan mitallinen kuvaus)
Olkoon satunnaisvektori $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ja Borel-mitallinen kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eli mitallinen kuvaus avaruudelta $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ avaruuteen $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Funktio $f$ kuvaa satunnaisvektorin toiseksi satunnaisvektoriksi $f(X) = Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

*Todistus.* Kuvauksen $f$ mitallisuuden nojalla $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_n$ kaikilla $B \in \mathcal{B}_m$. Tällöin satunnaisvektorin mitallisuuden nojalla $Y^{-1}(B) = (f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$. Yhdistetty kuvaus $Y = f(X)$ on mitallinen kuvaus $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$, eli se on satunnaisvektori. □

**Lause 3.23**
Olkoon jatkuva kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Funktio $f$ on $\mathcal{B}_n/\mathcal{B}_m$ mitallinen, eli mitallinen kuvaus avaruudelta $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ avaruudelle $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$.

*Todistus.* Väite on seuraus reaalianalyysin tuloksesta, jonka mukaan avoimen joukon $A \subset \mathbb{R}^m$ alkukuva $f^{-1}(A)$ on avoin, jos $f$ on jatkuva kuvaus. Lisäksi $\mathcal{B}_m = \sigma(\mathcal{O}_m)$, missä $\mathcal{O}_m$ on kaikkien $\mathbb{R}^m$ avointen joukkojen kokoelma. Tällöin lauseen 3.3 nojalla kuvaus $f$ on $\mathcal{B}_n/\mathcal{B}_m$ mitallinen. Todistus on käyty yksityiskohtaisesti läpi yksiulotteisessa tapauksessa lähteessä [1, s.33]. □

Osoitetaan vielä, että riippumattomien satunnaismuuttujien Borel-mitalliset kuvaukset ovat riippumattomia.

**Lause 3.24** (Satunnaismuuttujien mitallisten kuvausten riippumattomuus)
Olkoon riippumattomat satunnaismuuttujat $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ja Borel-mitalliset kuvaukset $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikilla $i \in I$, missä $I$ on numeroituva indeksijoukko. Satunnaismuuttujat $(h_i(X_i))_{i \in I}$ ovat keskenään riippumattomia.

*Todistus.* Kaikilla äärellisillä $J \subset I$ ja joukoilla $B_j \in \mathcal{B}$, missä $j \in J$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{\omega \in \Omega : h_j(X_j(\omega)) \in B_j\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in h_j^{-1}(B_j)\}\right)$$

Koska $h_j$ on mitallinen kuvaus, niin $\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in h_j^{-1}(B_j)\} \in \mathcal{B}$ kaikilla $j \in J$. Nyt satunnaismuuttujien $X_j$ riippumattomuuden nojalla

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in h_j^{-1}(B_j)\}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in h_j^{-1}(B_j)\}\right)$$

$$= \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : h_j(X_j(\omega)) \in B_j\}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(h_j(X_j(\omega)) \in B_j\right).$$

□

Esitellyt lauseet ovat välttämättömiä esitietoja keskeisen raja-arvolauseen pohjalla. Konkreettisemmin lauseiden avulla saadaan osoitettua seuraavat raja-arvolauseessa tarvittavat ominaisuudet satunnaismuuttujien jonolle $(X_i)_{i=1}^{\infty}$.

- Riippumattomien satunnaismuuttujien lineaarikuvaukset $h_1(X_1), h_2(X_2), \ldots, h_n(X_n)$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia.
- Lineaarikuvausten summa $S_n = h_1(X_1) + h_2(X_2) + \cdots + h_n(X_n)$ on satunnaismuuttuja.
- Jos satunnaismuuttujien $S_n$ jonolla on raja-arvo, se on satunnaismuuttuja.

# 4 Odotusarvo

Odotusarvo on eräs keskeisimmistä satunnaismuuttujan käytöstä tiivistävistä työkaluista. Odotusarvo tulkitaan usein **suurten lukujen lain** (lause 5.7) avulla, joka on yksi todennäköisyysteorian tärkeimmistä raja-tuloksista. Sen mukaan satunnaisilmiöstä saatujen riippumattomien havaintojen keskiarvo suppenee melkein varmasti kohti odotusarvoa havaintojen määrän kasvaessa.

Matemaattisesti odotusarvo on suora mittateorian sovellus. Satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo on mittaintegraali satunnaismuuttujasta sen todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ suhteen. Odotusarvon tarkka määritteleminen ja sen ominaisuuksien todistaminen vaativat mittateorian osaamista ja toisaalta mittateoriaan tutustuneelle lukijalle odotusarvon tarkka määritteleminen ja ominaisuudet ovat mittaintegraalin erikoistapauksen käsittelyä. Lisäksi keskeisen raja-arvolauseen muotoilemisen, ymmärtämisen ja todistamisen kannalta riittää tuntea odotusarvon keskeisimmät ominaisuudet. Näistä syistä työssä ohitetaan odotusarvon laajan mittateoreettisen taustan käsittely. Tarkan käsittelyn sijasta kappaleessa esitellään keskeisimmät mittateorian ideat odotusarvon käsitteen taustalla, sekä keskeisen raja-arvolauseen kannalta välttämättömät odotusarvon ominaisuudet.

Odotusarvon määritelmän tunteminen on sen ominaisuuksien käsittelyn kannalta tärkeää, sillä useiden tulosten todistukset rakentuvat odotusarvon määritelmän vaiheiden mukaisesti. Mittaintegraalin ja odotusarvon määritteleminen tapahtuu kolmessa vaiheessa. Määritellään ensimmäiseksi yksinkertaisen funktion (määritelmä 3.6) odotusarvo.

**Määritelmä 4.1** (**Vaihe 1**)
Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $X : \Omega \to \mathbb{R} : X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}(\omega)$ yksinkertainen satunnaismuuttuja. Satunnaismuuttujalla $X$ on odotusarvo

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{P}(A_k).$$

Yksinkertaisten satunnaismuuttujien odotusarvon avulla saadaan johdettua odotusarvo ei-negatiivisille satunnaismuuttujille. Ajatuksena on ”arvioida satunnaismuuttujaa alhaalta päin” eli muodostaa kasvava yksinkertaisten satunnaismuuttujien jono, joka suppenee kohti alkuperäistä satunnaismuuttujaa. Tälläinen on olemassa seuraavan lauseen nojalla

**Lause 4.2**
Olkoon $X$ ei-negatiivinen satunnaismuuttuja.

1. On olemassa kasvava jono yksinkertaisia satunnaismuuttujia $X_n \nearrow X$, eli $X_1 \leq X_2 \leq \dots$, jolle $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.
2. Jos $X_n \nearrow X$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \sup\{\mathbb{E}[Y] : Y \leq X \text{ ja } Y \text{ on yksinkertainen}\} \in [0, \infty]$

*Todistus.* Ensimmäisen kohdan todistus perustuu valintaan

$$X_n = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, & \frac{k-1}{2^n} \leq X < \frac{k}{2^n}, \text{ kun } k \in \{1, 2, \ldots, n2^n\} \\ n, & n \leq X \end{cases}.$$

Tarkempi perustelu ohitetaan ja se löytyy lähteestä [12, s.28-29]. □

Tämän havainnon avulla odotusarvon käsite saadaan yleistettyä ei-negatiivisille satunnaismuuttujille ensimmäisen määritelmän kanssa yhteensopivalla tavalla.

**Määritelmä 4.3** (**Vaihe 2**)
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja ei-negatiivinen satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujan $X$ mittaintegraali todennäköisyysmitan suhteen on

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \sup\{\mathbb{E}[Y] : Y \text{ on yksinkertainen satunnaismuuttuja ja } Y \leq X\}.$$

Jos $\mathbb{E}[X] < \infty$, niin satunnaismuuttuja $X$ on integroituva ja sillä on odotusarvo $\mathbb{E}[X]$.

Odotusarvon käsite saadaan yleistettyä kaikille satunnaismuuttujille kirjoittamalla satunnaismuuttuja kahden ei-negatiivisen satunnaismuuttujan erotuksena.

**Huomautus 4.4**
Olkoon satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, jolla on positiiviosa $X^+(\omega) = \max\{0, X(\omega)\}$ ja negatiiviosa $X^-(\omega) = -\min\{0, X(\omega)\}$. Nyt satunnaismuuttuja voidaan kirjoittaa kahden ei-negatiivisen satunnaismuuttujan erotuksena

$$X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega).$$

**Määritelmä 4.5** (**Vaihe 3**)
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ja satunnaismuuttujan positiiviosa $X^+$ sekä negatiiviosa $X^-$. Jos positiiviosa tai negatiiviosa ovat integroituvia, eli $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ tai $\mathbb{E}[X^-] < \infty$, niin satunnaismuuttujan $X$ mittaintegraali todennäköisyysmitan suhteen on

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jos $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X^-] + \mathbb{E}[X^+] < \infty$, niin satunnaismuuttuja $X$ on integroituva ja sillä on odotusarvo $\mathbb{E}[X]$.

Odotusarvo voidaan ilmaista myös satunnaismuuttujan jakauman tai kertymäfunktion mittaintegraalina. Yksittäisen satunnaismuuttujan sekä sen mitallisten kuvausten odotusarvo riippuu siis ainostaan satunnaismuuttujan jakaumasta. Seuraava lause on erikoistapaus mittateorian vastineesta muuttujanvaihdolle.

**Lause 4.6** (**Muuttujanvaihto**)
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, jolla on kertymäfunktio $F$. Satunnaismuuttujalla on odotusarvo, jos ja vain jos $\int_{\mathbb{R}} |x| \, \mathrm{d}F(x) < \infty$. Lisäksi tällöin

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}F(x) \, .$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lyhyesti lähteestä [3, s.27], sekä yleisemmässä mittateorian kontekstissa lähteestä [2, s.190-191]. Todistus palautuu lauseen käsittelemiseen ensin yksinkertaisten satunnaismuuttujien, tämän jälkeen positiivisten satunnaismuuttujien ja viimeiseksi yleisen tapauksen kohdalla. □

**Lause 4.7** (**Mitallisen muunnoksen odotusarvo**)
Olkoon Borel-mitallinen kuvaus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, jolla on kertymäfunktio $F$. Satunnaismuuttuja $g(X)$ on integroituva jos ja vain jos $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, \mathrm{d}F(x) < \infty$. Lisäksi tällöin

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, \mathrm{d}F(x) \, .$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lähteestä [12, s.35-36]. Todistuksessa lause käsitellään odotusarvon määritelmän vaiheiden mukaisesti. □

Esitellään seuraavaksi todennäköisyyslaskennasta tutut muodot diskreetin ja absoluuttisesti jatkuvan jakauman odotusarvoille. Seuraavaksi esiteltävät lauseet on muotoiltu siten, että niiden avulla on määritettävissä myös satunnaismuuttujien Borel-mitallisten kuvausten odotusarvot.

**Lause 4.8** (**Diskreetin jakauman odotusarvo**)
Olkoon satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, jolla on diskreetti jakauma $P$ sekä Borel-mitallinen kuvaus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujalla $g(X)$ on odotusarvo jos ja vain jos $\sum_{a \in X(\Omega)} |g(a)| P(\{a\}) < \infty$. Lisäksi tällöin

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{a \in X(\Omega)} g(a) P(\{a\}).$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lyhyesti lähteestä [6, s.61]. □

**Lause 4.9** (**Absoluuttisesti jatkuvan jakauman odotusarvo**)
Olkoon satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, jolla on absoluuttisesti jatkuva jakauma $P$ ja tiheysfunktio $f$ sekä Borel-mitallinen kuvaus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujalla $g(X)$ on odotusarvo jos ja vain jos $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) \, \mathrm{d}x < \infty$. Lisäksi tällöin

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lyhyesti lähteestä [6, s.61-62]. □

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvona saadaan aikaan seuraavat satunnaismuuttujan vaihtelua kuvaavat luvut.

**Määritelmä 4.10** (**Varianssi ja keskihajonta**)
Olkoon $X$ satunnaismuuttuja. Jos $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, niin satunnaismuuttujan varianssi on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Varianssi on satunnaismuuttujan ja odotusarvon etäisyyden neliön odotusarvo. Varianssin avulla saadaan johdettua keskihajonta

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

**Määritelmä 4.11** (Kovarianssi ja korrelaatio)
Olkoon satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$. Jos $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ ja $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, niin satunnaismuuttujien **kovarianssi** on

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Kovarianssin avulla voidaan määrittää korrelaatio

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cor}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots$ ovat keskenään korreloimattomia, jos $\mathrm{Cor}(X_i, X_j) = 0$, kaikilla $i \neq j$.

Seuraavat tulokset odotusarvon lineaarisuudesta ja riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvosta ovat hyvin olennaisessa osassa karakterististisia funktioita käsittelevässä kappaleessa.

**Lause 4.12** (**Odotusarvon lineaarisuus**)
Olkoon $X$ ja $Y$ satunnaismuuttujat, joilla on odotusarvot $\mathbb{E}[X]$ ja $\mathbb{E}[Y]$ sekä reaaliluvut $a, b \in \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujien lineaarikombinaatiolla $aX + bY$ on odotusarvo

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lähteestä [6, s.49-54]. Lause on käsiteltävä jokaiselle odotusarvon yleisyyden vaiheelle erikseen, ja se on esitetty lähteessä vaiheiden määrittelemisen yhteydessä. □

Lauseen 4.12 suorana seurauksena saadaan kaava satunnaismuuttujien lineaarikuvauksen varianssille.

**Lause 4.13** (Lineaarikuvauksen varianssi)
Olkoon satunnaismuuttuja $X$ jolla on varianssi $\mathrm{Var}(X)$, sekä reaaliluku $a \in \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujan lineaarikuvauksella $aX + b$ on varianssi

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX + b) &= \mathbb{E}[(aX + b - \mathbb{E}[aX + b])^2] = \mathbb{E}[(aX + b - a\mathbb{E}[X] - b)^2] \\ &= \mathbb{E}[a^2(X - \mathbb{E}[X])^2] = a^2 \mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

□

Seuraavan tuloksen avulla riippumattomien satunnaismuuttujien tulolle saadaan määritettyä odotusarvo.

**Lause 4.14** (Riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo)
Olkoon riippumattomat satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$, joilla on odotusarvo $\mathbb{E}[X]$ ja $\mathbb{E}[Y]$. Tällöin

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lähteestä [11, s.191]. □

Lauseen suorana seurauksena voidaan osoittaa, että riippumattomien satunnaismuuttujien summan varianssi on varianssien summa.

**Lause 4.15** (Summan varianssi)
Olkoon riippumattomat satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$, joilla on varianssit $\mathrm{Var}(X)$ ja $\mathrm{Var}(Y)$. Satunnaismuuttujalla $X + Y$ on varianssi

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}[(X + Y - \mathbb{E}[X + Y])^2] = \mathbb{E}[((X - \mathbb{E}[X]) + (Y - \mathbb{E}[Y]))^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2 + 2(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) + (Y - \mathbb{E}[Y])^2] \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]] \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\end{aligned}$$

□

# 5 Suppeneminen ja simulointi

Todennäköisyysteoria, kuten muu matematiikka on deduktiivista päättelyä – ennalta tunnettujen tietojen avulla todistetaan uusia lauseita. Satunnaisilmiöitä käsiteltäessä niille määritetään ominaisuuksia, jotka tunnetaan tai pyritään osoittamaan todeksi. Todennäköisyysteorian yksi merkittävimmistä sovelluskohteista on tilastotiede, joka edustaa kuitenkin induktiivista päättelyä – havaintojen avulla pyritään tekemään mahdollisimman vähän väärässä olevia yleistyksiä. Tilastotieteessä tutkittavaa satunnaismuuttujaa ei usein tunneta, vaan siitä tehtävien havaintojen avulla pyritään päättelemään satunnaismuuttujan ominaisuuksia. Mikä todennäköisyysteorian osa antaa matemaattisen pohjan tilastotieteen induktiiviselle päättelylle?

**Määritelmä 5.1** (Havainto ja otos tilastotieteessä)
Olkoon samoin jakautuneet satunnaismuuttujat $(X_i)_{i=1}^n$, jossa $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujasta tehty havainto on satunnaismuuttujan arvo $X_i(\omega)$, jollain $\omega \in \Omega$. Otos on $n \in \mathbb{N}$ havainnosta muodostuva jono $(X_i(\omega_i))_{i=1}^n$. Otos on riippumaton, jos satunnaismuuttujat $(X_i)_{i=1}^n$ ovat riippumattomia.

Tilastotieteessä satunnaisilmiön ominaisuuksia selvitetään otoksesta laskettavien tunnuslukujen avulla. Lisäksi tunnuslukujen "luotettavuutta" voidaan arvioida. Hyvän tunnusluvun luotettavuus kasvaa, kun otoksen koko kasvaa.

Tilastotiede liittyy olennaisesti todennäköisyysteorian suppenemisen muotoihin ja rajatuloksiin. Satunnaismuuttujan pisteittäinen suppeneminen vastaa funktiojonon pisteittäistä suppenemista. Se on yksinkertainen ja hyvin rajoitettu suppenemisen muoto, joka esiintyy lähinnä teoreettisissa tarkasteluissa. Tärkeä rajoite on vaatimus pisteittäisestä suppenemisesta myös joukossa, jonka todennäköisyys lähestyy nollaa. Seuraava esimerkki ilmentää, miksi se ei usein ole mielekäs todennäköisyysteorian yhteydessä.

**Esimerkki 5.2**
Olkoon todennäköisyysavaruus $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, satunnaismuuttuja $Y : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja diskreettien satunnaismuuttujien $X_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ jono $(X_n)_{i=1}^\infty$, joille

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < \omega \le 1 \end{cases}, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega = 0 \\ 0\ , & 0 < \omega \le 1 \end{cases}.$$

Satunnaismuuttujien jono suppenee pisteittäin ja

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 0 \\ 0, & 0 < \omega \le 1 \end{cases}.$$

Saatu raja-arvo $X \neq Y$ sillä $X(0) \neq Y(0)$, eli jono ei suppene pisteittäin kohti satunnaismuuttujaa $Y$. Satunnaismuuttujilla $X$ ja $Y$ on kuitenkin paljon yhteisiä ominaisuuksia, jos niitä tulkitaan mitan avulla.

1. Todennäköisyys joukolle, jossa $X = Y$ on yksi.

$$\lambda(X = Y) = \lambda(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = \lambda((0,1]) = 1$$

2. Todennäköisyys sille, että $X$ ja $Y$ ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan on yksi. Toisin sanoen kaikilla $\varepsilon > 0$

$$P(|X-Y| \leq \varepsilon) = 1 - P(|X-Y| > \varepsilon) = 1 - \lambda(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\})$$
$$= 1 - \lambda(0) = 1$$

3. Satunnaismuuttujilla $X$ ja $Y$ on sama kertymäfunktio

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 1, & a \geq 0 \end{cases}.$$

Vaikka jono $(X_n)_{i=1}^{\infty}$ ei suppene pisteittäin kohti satunnaismuuttujaa $Y$, sen raja-arvo $X$ ja satunnasimuuttuja $Y$ voidaan monessa mielessä samaistaa todennäköisyysteoriassa.

Esimerkissä mainitut kolme ominaisuutta vastaavat seuraavaksi esiteltäviä todennäköisyysteorian suppenemisen muotoja (joille on luonnolliset vastineet yleisemmin mittateoriassa). Ne vaativat vähemmän oletuksia kuin pisteittäinen suppeneminen ja yhdistävät satunnaismuuttujan suppenemisen käsittelyn sitä vastaavaan mittaan.

**Määritelmä 5.3** (**Melkein varma suppeneminen**)
Satunnaismuuttujien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ muodostama jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee melkein varmasti kohti satunnaismuuttujaa $X : \Omega \to \mathbb{R}$, jos

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Melkein varmalle suppenemiselle käytetään merkintää $X_n \overset{m.v}{\to} X$.

**Huomautus 5.4**
Melkein varmaa suppenemista voi ajatella pisteittäisen suppenemisen ehtojen lievennyksenä – jono suppenee pisteittäin raja-arvoon kaikkialla, paitsi lähtöjoukkoa $\Omega$ vastaavan todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nollajoukossa. Joukko $A \subset \Omega$ on **nollajoukko**, jos on $B \in \mathcal{F}$, jolle $A \subset B$ ja $\mathbb{P}(B) = 0$. Melkein varma suppeneminen on eniten oletuksia vaativa todennäköisyysteorian suppenemisen muoto. Määritelmässä vaaditaan, että satunnaismuuttujien jonon jäsenet sekä sen raja-arvo ovat mitallisia kuvauksia samasta todennäköisyysavaruudesta.

**Määritelmä 5.5** (**Stokastinen suppeneminen**)
Satunnaismuuttujien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ muodostama jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee stokastisesti kohti satunnaismuuttujaa $X$, jos kaikille $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)|\ > \varepsilon\}\right) = 0$$

Stokastiselle suppenemiselle käytetään merkintää $X_n \overset{P}{\to} X$.

**Huomautus 5.6**
Stokastinen suppeneminen on aidosti melkein varmaa suppenemista heikompi suppenemisen muoto. Stokastinen suppeneminen mahdollistaa raja-arvon käsittelyn muutamissa tilanteissa, joissa suppenemisesta on mielekästä puhua, mutta melkein varma suppeneminen ei ole voimassa. Esimerkkejä näistä tilanteista on esitetty lähteissä [12, s.84-85] ja [6, s.229]. Kahden määritelmän ero ei ole ensinäkemältä kovin ilmeinen ja sitä on käsitelty tarkemmin lähteissä [12, Luku 7] ja [6, Luku 5]. Tilastotieteen näkökulmasta eroa voi ajatella otoksen kautta. Melkein varmassa suppenemisessa jokainen otos suppenee otoksen koon kasvaessa kohti raja-arvoa todennäköisyydellä yksi. Stokastisessa suppenemisessa todennäköisyys sille, että otos poikkeaa raja-arvosta, suppenee otoksen koon kasvaessa kohti lukua 0.

Suurten lukujen lait ovat eräitä todennäköisyysteorian keskeisimpiä raja-tuloksia. Lauseiden nojalla satunnaismuuttujan odotusarvoa voidaan arvioida laskemalla keskiarvo useista samoin jakautuneista satunnaismuuttujista.

**Lause 5.7** (**Kolmogorovin vahva suurten lukujen laki**)
Olkoon jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ samoin jakautuneita ja riippumattomia satunnaismuuttujia. Tällöin $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$ ja $\mu = \mathbb{E}[X_i]$, jos ja vain jos

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{m.v}{\to} \mu.$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lähteestä [6, s.294-297]. □

Suurten lukujen laki voidaan muotoilla stokastisen suppenemisen avulla, jolloin lausetta sanotaan heikoksi suurten lukujen laiksi.

**Lause 5.8** (**Heikko suurten lukujen laki**)
Olkoon jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ samoin jakautuneita ja riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ . Tällöin jonon $n$ ensimmäisestä termistä laskettu keskiarvo suppenee stokastisesti kohti odotusarvoa, eli

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i \overset{P}{\to} \mu.$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan ja se löytyy lähteestä [11, 325-326]. Todistus on muotoiltu karakterististen funktioiden avulla, ja noudattaa hyvin pitkälti samaa ideaa kuin keskeiselle raja-arvolauseelle (lause 8.1) annettu todistus. □

Heikko suurten lukujen laki voidaan muotoilla myös heikompien oletusten avulla. Se on muotoiltavissa riippumattomille satunnaismuuttujille ilman oletusta odotusarvon olemassaolosta (Kolmogorov-Feller suurten lukujen laki [6, s.279]). Lisäksi oletusta riippumattomuudesta voidaan lieventää ja lause voidaan muotoilla kaikille varianssin omaavien korreloimattomien satunnaismuuttujien jonoille (tämä muotoilu on yksinkertaisin todistaa, ja todistus perustuu Chebyshevin epäyhtälöön [3, 47]). Heikon suurten lukujen lain muotoilu vaihtelee lähteittäin, ja sama tulos saatetaan esittää eri nimillä riippuen lähteestä. Suurten lukujen lait luovat matemaattisen oikeutuksen monelle tilastolliselle menetelmälle ja estimaatille. Käsitellään vielä suurten lukujen lakien suorina seurauksina saatavat empiirinen kertymäfunktio ja Monte Carlo -menetelmä.

**Seuraus 5.9** (**Empiirinen kertymäfunktio**)
Olkoon riippumattomat ja samoin jakautuneet satunnaismuuttujat $(X_i)_{i=1}^n$, joita vastaa kertymäfunktio $F$. Satunnaismuuttujien empiirinen kertymäfunktio (joka siis myös on satunnaismuuttuja) on

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}.$$

Empiirinen kertymäfunktio suppenee melkein varmasti kohti kertymäfunktiota $F$, eli $\hat{F}_n(x) \overset{m.v}{\to} F(x)$.

*Todistus.* Indikaattorifunktiot $1_{\{X_i \leq x\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat Borel-mitallisia kuvauksia, sillä joukko $\{X_i \leq x\}$ on selvästi Borel-joukko. Lisäksi lauseen 3.24 nojalla, riippumattomien satunnaismuuttujien mitalliset kuvaukset $1_{\{X_i \leq x\}}$ ovat riippumattomia. Odotusarvon määritelmän mukaisesti $\mathbb{E}\big[1_{\{X_i \leq x\}}\big] = P(X_i \leq x) = F(x)$. Tällöin vahvan suurten lukujen lain nojalla saadaan $\hat{F}_n(x) \overset{m.v}{\to} F(x)$. □

Empiirinen kertymäfunktio antaa keinon arvioida satunnaismuuttujan todellista kertymäfunktiota otoksen avulla. Arvio on sitä varmemmin lähellä aitoa kertymäfunktiota, mitä suurempi otos on kyseessä.

**Seuraus 5.10** (**Monte Carlo -menetelmä**)
Olkoon riippumattomat samoin jakautuneet satunnaismuuttujat $(X_i)_{i=1}^n$ sekä Borel-mitallinen kuvaus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lauseen 3.24 nojalla, riippumattomien satunnaismuuttujien mitallisina kuvaukset $g(X_i)$ ovat riippumattomia ja lisäksi samoin jakautuneita. Tällöin $\mathbb{E}[|g(X_i)|] < \infty$ ja $\mu = \mathbb{E}[g(X_i)]$ jos ja vain jos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \overset{m.v}{\to} \mu.$$

**Monte Carlo -simulointi** vastaa tämän seurauksen soveltamista tilanteeseen, jossa satunnaismuuttujasta $X$ on tehty otos $(x_i)_{i=1}^n$. Simuloinnissa satunnaismuuttujaa vastaavan otoksen avulla arvioidaan jonkin satunnaismuuttujaan liittyvän mallin $g$ odotusarvoa. Satunnaismuuttujaa vastaava otos voidaan saada aikaiseksi monella eri tavalla tutkittavasta satunnaismuuttujasta riippuen. Jos satunnaismuuttuja tunnetaan, satunnaisuutta voidaan simuloida tietokoneella tai fyysisesti. Jos satunnaisilmiö on tuntematon mutta havaittavissa, otos voidaan saada mittaamalla ilmiötä. Jos otos tehdään absoluuttisesti jatkuvasta tasajakaumasta, puhutaan **Monte Carlo integroinnista**. Monte Carlo on kasinoistaan tunnettu kaupunki ja menetelmän nimi viittaa menetelmän satunnaisuuteen.

Menetelmä on muotoiltavissa myös heikon suurten lukujen lain mukaiseksi. Jos $\mu = \mathbb{E}[|g(X_i)|] < \infty$, niin

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \xrightarrow{P} \mu.$$

Tätä muotoa voidaan soveltaa tilanteessa, jossa on saatu useita $n$ havainnon otoksia $(x_{1_i})_{i=1}^{n}, \ldots, (x_{k_i})_{i=1}^{n}$. Näistä laskettujen keskiarvojen $\hat{\mu}_1, \ldots \hat{\mu}_k$ avulla voidaan arvioida odotusarvoa $\mu$. Lisäksi keskiarvojen $\hat{\mu}_1, \ldots \hat{\mu}_k$ avulla voidaan arvioida $n$ havainnon otoksesta lasketun keskiarvon $\hat{\mu}$ (joka on siis satunnaismuuttuja) jakaumaa empiirisen kertymäfunktion avulla.

Heikoin todennäköisyysteoriassa käsiteltävä suppenemisen muoto on jakaumamielessä suppeneminen eli jakaumasuppeneminen. Jakaumasuppeneminen käsittelee satunnaismuuttujien jonon suppenemisen sijasta niitä vastaavien kertymäfunktioiden suppenemista.

**Määritelmä 5.11** (**Jakaumasuppeneminen**)
Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ satunnaismuuttujat, joilla on kertymäfunktiot $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots$ sekä satunnaismuuttuja $X$, jolla on kertymäfunktio $F$. Merkitään kertymäfunktion $F$ jatkuvuuspisteiden joukkoa $C(F) = \{x \in \mathbb{R} : F \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$. Jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee jakaumaltaan satunnaismuuttujaan $X$, jos

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \text{ kaikilla } x \in C(F_X).$$

Jakaumasuppeneminen ei siis riipu millään tavalla satunnaismuuttujia taustalla olevien todennäköisyysavaruuksien valinnasta, vaan ainostaan satunnaismuuttujien jakaumista.

Jakaumasuppenemisessa ei vaadita suppenemista raja-jakauman kertymäfunktion epäjatkuvuuspisteissä, sillä se ei ole olennaista kertymäfunktion käyttäytymisen kannalta. Lauseen 3.12 mukaan kertymäfunktiolla on korkeintaan numeroituva määrä epäjatkuvuuspisteitä, jolloin niiden joukko on nollamittainen. Lisäksi saman lauseen mukaan kertymäfunktio on jokaisessa pisteessä oikealta jatkuva. Näiden havaintojen nojalla on luonnollista, että rajafunktio voidaan "muuntaa" oikealta jatkuvaksi sen epäjatkuvuuspisteissä (määrittämällä rajafunktion arvo epäjatkuvuuspisteessä vastaamaan kertymäfunktion $F$ arvoa kyseisessä pisteessä). Asiaa havainnollistavia esimerkkejä löytyy lähteestä [6, s.203-204].

Suppenemisen muotojen välille on osoitettavissa useita yhteyksiä, joista keskeisin ilmentää suppenemisen muotojen vahvuutta suhteessa toisiinsa.

**Lause 5.12**
Olkoon satunnaismuuttujien jono $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ sekä satunnaismuuttuja $X$. Suppenemisen muotojen välillä on seuraavat yhteydet

$$X_i \xrightarrow{m.v} X \implies X_i \xrightarrow{P} X \implies X_i \xrightarrow{d} X$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan, ja se löytyy lähteestä [6, s. 209-210]. □

# 6 Karakteristiset funktiot

Satunnaismuuttujan jakauman karakteristinen funktio on satunnaismuuttujan tietyn kompleksiarvoisen muunnoksen odotusarvo. Laajemmin matemaattisen teorian näkökulmasta karakteristinen funktio on kertymäfunktion Fourier-Stieltjes muunnos. Tästä syystä kappaleen käsittelyt nojaavat vahvasti kompleksianalyysin tuloksiin, jotka oletetaan tunnetuiksi. Määritellään ensin kompleksiarvoinen satunnaismuuttuja sekä sen odotusarvo ja riippumattomuus.

**Määritelmä 6.1** (Kompleksiarvoinen satunnaismuuttuja)
Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja kuvaus $Z : \Omega \to \mathbb{C}$. Kuvaus $Z$ on kompleksiarvoinen satunnaismuuttuja, jos on olemassa satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$, joille

$$Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$$

**Määritelmä 6.2** (Kompleksiarvoisen satunnaismuuttujan odotusarvo)
Olkoon $Z = X + iY$ kompleksiarvoinen satunnaismuuttuja, missä $X$ ja $Y$ ovat satunnaismuuttujia. Jos satunnaismuuttujilla $X$ ja $Y$ on odotusarvo, niin kompleksiarvoisella satunnaismuuttujalla on odotusarvo

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + i\mathbb{E}[Y]$$

**Lause 6.3** (Odotusarvon lineaarisuus kompleksiarvoisille satunnaismuuttujille)
Olkoon $Z, W$ kompleksiarvoiset satunnaismuuttujat, joilla on odotusarvot $\mathbb{E}[Z], \mathbb{E}[W]$ sekä kompleksiluvut $a, b \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\mathbb{E}[aZ + b] = a\mathbb{E}[Z] + b \quad \text{ja} \quad \mathbb{E}[Z + W] = \mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[W]$$

*Todistus.* Tämä on suora seuraus reaaliarvoisen satunnaismuuttujan odotusarvon lineaarisuudesta. Todistus tapahtuu kirjoittamalla kompleksiarvoisen satunnaismuuttujan odotusarvo auki ja kompleksiluvut reaaliosan ja imaginääriosan summana. Todistus löytyy lähteestä [12, s.64-65]. □

**Määritelmä 6.4** (Riippumattomuus kompleksiarvoisille satunnaismuuttujille)
Olkoon kompleksiarvoiset satunnaismuuttujat $Z_i : \Omega \to \mathbb{C} : Z_i = X_i + iY_i$ kaikilla $i \in I$, missä $I$ on numeroituva indeksijoukko. Kompleksiarvoiset satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, jos $X_i, i \in I$ ovat riippumattomia, $Y_i, i \in I$ ovat riippumattomia ja $X_j, Y_k$ ovat riippumattomia kaikilla $j, k \in I$ ja $j \neq k$.

**Lause 6.5** (Kompleksiarvoisten satunnaismuuttujien tulon odotusarvo)
Olkoon riippumattomat kompleksiarvoiset satunnaismuuttujat $Z_1 = X_1 + iY_1$ ja $Z_2 = X_2 + iY_2$, joilla on odotusarvot $\mathbb{E}[Z_1]$ ja $\mathbb{E}[Z_2]$. Tällöin

$$\mathbb{E}[Z_1 Z_2] = \mathbb{E}[Z_1]\mathbb{E}[Z_2]$$

*Todistus.* Kirjoittamalla tulo auki $Z_1 Z_2 = (X_1 X_2 - Y_1 Y_2) + i(Y_1 X_2 + X_1 Y_2)$, tulon odotusarvoksi saadaan

$$\mathbb{E}[Z_1 Z_2] = \mathbb{E}[X_1 X_2 - Y_1 Y_2] + i\mathbb{E}[Y_1 X_2 + X_1 Y_2]$$

Käyttämällä odotusarvon lineaarisuutta ja lausetta 4.14, saadaan odotusarvo muotoon

$$= \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[Y_1]\mathbb{E}[Y_2] + i(\mathbb{E}[Y_1]\mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[Y_2]) = \mathbb{E}[Z_1]\mathbb{E}[Z_2].$$

□

Karakteristinen funktio on jokaiselle kertymäfunktiolle määritelty kompleksiarvoinen muunnos, joka on hyvin olennainen työkalu todennäköisyysteorian kannalta. Karakteristinen funktio kelpaa hyvin työkaluksi, sillä jokaista kertymäfunktiota vastaa yksikäsitteisesti jokin karakteristinen funktio ja karakteristista funktiota yksikäsitteisesti kertymäfunktio. Erityisen tärkeä sovellus karakteristiselle funktiolle on riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauman tutkiminen – esimerkiksi keskeiselle raja-arvolauseelle tavanomaisesti esitettävä todistus on muotoiltu käyttäen karakteristisia funktioita.

**Määritelmä 6.6** (**Karakteristinen funktio**)
Olkoon $X$ reaaliarvoinen satunnaismuuttuja ja sen kertymäfunktio $F$. Satunnaismuuttujan karakteristinen funktio $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on tällöin

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\big[e^{itX}\big] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathrm{d}F(x)$$

Esitellään seuraavaksi karakteristisen funktion hyödyllisiä perusominaisuuksia.

**Lause 6.7**
Olkoon $X$ reaaliarvoinen satunnaismuuttuja. Tällöin

(1) $\mathbb{E}\big|e^{itX}\big| < \infty$, eli satunnaismuuttujalla $X$ on olemassa karakteristinen funktio $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

(2) $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$.

*Todistus.*

(1)

$$\mathbb{E}\big|e^{itX}\big| = \mathbb{E}|\cos(tX) + i\sin(tX)| = \mathbb{E}\left[\sqrt{\cos^2(tX) + \sin^2(tX)}\right] = \mathbb{E}[1] = 1 < \infty.$$

(2)

$$|\varphi(t)| = \big|\mathbb{E}\big[e^{itX}\big]\big| \leq \mathbb{E}\big|e^{itX}\big| = 1 = \mathbb{E}[1] = \mathbb{E}\big[e^{0\cdot iX}\big] = \varphi_X(0)$$

□

Satunnaismuuttujan lineaarisen kuvauksen karakteristinen funktio voidaan määrittää alkuperäisen satunnaismuuttujan karakteristisen funktion avulla.

**Lause 6.8** (Lineaarikuvauksen karakteristinen funktio)
Olkoon $X$ satunnaismuuttuja ja $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sen karakteristinen funktio. Satunnaismuuttujan lineaarikuvauksella $Y = aX + b$, jossa $a, b \in \mathbb{R}$, on karakteristinen funktio

$$\varphi_Y(t) = e^{ibt} \cdot \varphi_X(at).$$

*Todistus.* Lauseen 6.3 nojalla

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\big[e^{itY}\big] = \mathbb{E}\big[e^{it(aX+b)}\big] = \mathbb{E}\big[e^{itaX+ibt}\big] = e^{ibt}\mathbb{E}\big[e^{itaX}\big] = e^{ibt} \cdot \varphi_X(at)$$

□

Karakteristisen funktion avulla voidaan myös tutkia riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumaa, jonka määrittäminen suoraan konvoluution avulla on usein teknisesti työlästä.

**Lause 6.9** (Satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio)
Olkoon riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ja niitä vastaavat karakteristiset funktiot $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$. Summalla $S = X_1 + \cdots + X_n$ on karakteristinen funktio

$$\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

Jos satunnaismuuttujat ovat lisäksi samoin jakautuneita ja jokaista vastaava karakteristinen funktio on $\varphi_X$, niin summan karakteristinen funktio pelkistyy muotoon

$$\varphi_S(t) = (\varphi_X(t))^n.$$

*Todistus.*

$$\varphi_S(t) = \mathbb{E}\big[e^{itS}\big] = \mathbb{E}\big[e^{it(X_1+\cdots+X_n)}\big] = \mathbb{E}\big[e^{itX_1} \cdot \ldots \cdot e^{itX_n}\big]$$

Tulon tekijät ovat kompleksiarvoisia satunnaismuuttujia $e^{itX_k} = \cos(tX_k) + i\sin(tX_k)$, jotka ovat keskenään riippumattomia lauseen 3.24 nojalla. Nyt lauseen 6.5 avulla tulo saadaan kirjoitettua muotoon

$$\mathbb{E}\big[e^{itX_1}\big] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}\big[e^{itX_n}\big] = \prod_{i=k}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

Jos satunnaismuuttujat ovat lisäksi samoin jakautuneita, niin

$$\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_X(t) = (\varphi_X(t))^n.$$

□

**Lause 6.10** (Lévyn kääntölause)
Olkoon $X$ satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio on $F$ ja karakteristinen funktio $\varphi_X$. Karakteristisen funktion avulla voidaan määrittää satunnaismuuttujan jakauma niin sanotun kääntökaavan avulla. Olkoon $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, tällöin

$$F(b) - F(a) + \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X = a) - \mathbb{P}(X = b)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) \mathrm{d}t$$

*Todistus.* Käydään läpi todistuksen alkuosa, joka on esitetty usein lähteissä hyvin lyhyesti. Tarkastellaan integraalissa esiintyviä tekijöitä. Osoitetaan ensin, että tekijät ovat rajoitettuja. Tarkastellaan, onko integroitava funktio rajoitettu välillä $[-T, T]$. Lauseen 6.7 mukaan $|\varphi(t)| \leq 1$ ja lisäksi

$$\left|\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it}\right| = \left|\int_a^b e^{-ity} \mathrm{d}y\right| = \int_a^b \left|e^{-ity}\right| \mathrm{d}y \leq \int_a^b 1 \mathrm{d}y = b - a.$$

Lisäksi integraali välillä $[-T, T]$ on rajoitettu, sillä

$$\int_{-T}^{T} \left|\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t)\right| \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \left|\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it}\right| \left|\varphi(t)\right| \mathrm{d}t \leq \int_{-T}^{T} (b - a) \mathrm{d}t = 2T(b - a).$$

Fubinin lauseen nojalla, integraali voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left( \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathrm{d}F(x) \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^{T} \left( \frac{e^{it(x-b)} - e^{it(x-a)}}{-it} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}F(x). \end{aligned}$$

Jakamalla sisemmän integraalin paloihin ja tekemällä jälkimmäiselle muuttujanvaihdon $s = -t$ saadaan integraalin muotoon

$$\int_T^0 \frac{e^{-is(x-b)} - e^{-is(x-a)}}{-is} \mathrm{d}s + \int_0^T \frac{e^{it(x-b)} - e^{it(x-a)}}{-it} \mathrm{d}t.$$

Kääntämällä ensimmäisen integraalin rajat, integraalit saadaan yhdistettyä ja käyttämällä Eulerin kaavaa integraali sievenee muotoon

$$\int_0^T \frac{e^{it(x-b)} - e^{-it(x-b)} - (e^{it(x-a)} - e^{-it(x-a)})}{-it} \mathrm{d}t = 2 \int_0^T \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} \mathrm{d}t.$$

Todistuksen loppuosa löytyy useasta lähteestä, ja se on esitetty selkeästi esimerkiksi lähteessä [6, s.160-161].

□

**Lause 6.11** (**Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys**)
Olkoon $X$ ja $Y$ satunnaismuuttujia. Satunnaismuuttujat ovat jakaumaltaan samat (käytetään merkintää $X \overset{d}{=} Y$) jos ja vain jos niillä on sama karakteristinen funktio $\varphi_X = \varphi_Y$.

*Todistus.* Tämä on seuraus edellisestä lauseesta 6.10 ja lauseesta 2.13. Karakterististen funktioiden avulla saadaan määrättyä todennäköisyydet Borelin $\sigma$-algebran virittävälle kokoelmalle, joten sen avulla saadaan määrättyä yksikäsitteisesti satunnaismuuttujan jakauma. Aihetta on käsitelty tarkemmin lähteessä [6, s. 159-163] □

Satunnaismuuttujien jonon jakaumasuppeneminen ja sen satunnaismuuttujia vastaavien karakterististen funktioiden jonon suppeneminen liittyvät toisiinsa seuraavan lauseen kautta.

**Lause 6.12** (**Lévyn jatkuvuuslause**)
Olkoon $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ satunnaismuuttujien jono ja sen satunnaismuuttujia vastaavien karakterististen funktioiden jono $(\varphi_{X_i})_{i=1}^{\infty}$.

(1) Jos $X_n \xrightarrow{d} X$, niin $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$.

(2) Jos $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $\varphi$ on jatkuva pisteessä $t = 0$, niin on olemassa satunnaismuuttuja $X$ siten, että sen karakteristinen funktio on $\varphi$ ja $X_n \xrightarrow{d} X$, kun $n \to \infty$.

*Todistus.* Todistus ohitetaan. Ensimmäisen kohdan todistus on melko suoraviivainen, mutta toinen kohta vaatii huomattavan määrän aputuloksia todistuksen tueksi. Todistus on muotoiltavissa kahdella eri tavalla. Toinen tavoista [6, s.238-240] nojaa **Hellyn lauseeseen** [6, s.238-240] ja sen seurauksena saatavaan satunnaismuuttujien jonon jakaumasuppenemista ja osajonon heikkoa suppenemista yhdistävään lauseeseen. Toinen tapa pohjautuu enemmän todennäköisyysteorian käsittelemien suppenemisen muotojen välisten suhteiden tarkasteluun [6, s. 247-256]. □

Muotoillaan seuraavaksi karakteristisen funktion Taylorin sarjakehitelmä ja siihen liittyvät ominaisuudet.

**Lause 6.13** (Karakteristisen funktion Taylorin sarja)
Olkoon satunnaismuuttuja $X$, sitä vastaava kertymäfunktio $F$ ja karakteristinen funktio $\varphi$. Jos jollain $n \in \mathbb{N}$ on odotusarvo $\mathbb{E}|X|^n < \infty$, niin

(1) Karakteristisella funktiolla on tasaisesti jatkuva $k$-kertainen derivaatta kaikilla $k \leq n$
$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} \, \mathrm{d}F(x) \, .$$

(2)
$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

(3) Karakteristinen funktio voidaan ilmaista summana
$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k \mathbb{E}[X^k]}{k!} + o(|t|^n), \text{ kun } t \to 0.$$

*Todistus.* Todistus ohitetaan, ja se löytyy lähteestä [6, s.176-177]. □

**Huomautus 6.14**
Kun $n = 2$, saadaan keskeisen raja-arvolauseen todistuksen vaatima arvio karakteristiselle funktiolle
$$\varphi(t) = 1 + it\mathbb{E}[X] - \frac{t^2 \mathbb{E}[X^2]}{2} + o(\left|t^2\right|).$$

# 7 Normaalijakauma

Tämä kappale käsittelee normaalijakaumaa ja normaalijakauman ominaisuuksia.

**Määritelmä 7.1** (**Normaalijakauma**)
Olkoon satunnaismuuttuja $X$, jolla on absoluuttisesti jatkuva jakauma. Jakauma on normaalijakauma, jos sen tiheysfunktio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ missä } \mu \in \mathbb{R} \text{ ja } \sigma^2 \in (0, \infty).$$

Normaalijakaumalle käytetään merkintää $N(\mu, \sigma^2)$ ja normaalijakaumasta $N(0,1)$ käytetään nimitystä **standardinormaalijakauma**. Merkintä $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tarkoittaa, että satunnaismuuttujan $X$ jakauma on ilmoitettujen parametrien mukainen normaalijakauma.

**Lause 7.2** (Standardinormaalijakauma skaalaus ja siirto)
Olkoon satunnaismuuttuja $X \sim N(0,1)$ ja sen lineaarikuvaus $Y = \sigma X + \mu$, missä $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Tällöin satunnaismuuttuja $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

*Todistus.*

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_X(\sigma X + \mu \leq y) = P_X\left(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x$$

Tehdään muuttujanvaihto siten, että yläraja saadaan ilmaistua muodossa $y$. Tämä onnistuu asettamalla $t = \sigma x + \mu \iff x = \frac{t-\mu}{\sigma}$, jolloin $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sigma}$. Nyt integraali saadaan kirjoitettua muotoon

$$\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t\,.$$

Satunnaismuuttuja $Y$ noudattaa siis normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$ □

**Lause 7.3** (Normaalijakauman odotusarvo ja varianssi)
Normaalijakautuneelle satunnaismuuttujalle $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ on odotusarvo $\mathbb{E}[X] = \mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \sigma^2$.

*Todistus.* Osoitetaan ensin, että väite pätee standardinormaalijakautuneelle satunnaismuuttujalle $Y \sim N(0,1)$.

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \Big/_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} = 0.$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \mathrm{d}y$$

Osittaisintegroimalla saadaan summa, jossa ensimmäinen termi on nolla (esimerkiksi L'Hôpitalin säännön nojalla) ja toinen termi on Gaussin integraali, jolloin

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( - \Big/_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, \mathrm{d}y \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 0 + \sqrt{2\pi} \right) = 1.$$

Lauseen 7.2 nojalla satunnaismuuttujalla $X$ ja satunnaismuuttujalla $\sigma Y + \mu$ on sama jakauma, jolloin lauseen 4.6 mukaan niillä on myös sama odotusarvo ja varianssi. Käyttämällä tietoa odotusarvon lineaarisuudesta (lause 4.12) ja lineaarikuvauksen varianssista (lause 4.13), saadaan

$$\mathbb{E}[X] = \sigma \mathbb{E}[Y] + \mu = \mu \quad \text{ja} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \,\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2.$$

□

Määritellään seuraavaksi normaalijakautunutta satunnaismuuttujaa vastaava karakteristinen funktio.

**Lause 7.4** (**Standardinormaalijakauman karakteristinen funktio**)
Olkoon normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja $X \sim N(0,1)$. Satunnaismuuttujan karakteristinen funktio on

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

*Todistus.*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(t+ix)^2 - \frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}x = \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(t+ix)^2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-ti)^2} \mathrm{d}x$$

Tutkitaan integraalia kompleksisen tieintegraalin avulla. Määritellään suljettu polku (suorakaide) $\gamma(s) = \gamma_1(s) * \gamma_2(s) * \gamma_3(s) * \gamma_4(s)$, jossa

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C} : \gamma_1(s) &= s - it \\ \gamma_2 : [-t, 0] \to \mathbb{C} : \gamma_2(s) &= R + is \\ \gamma_3 : [-R, R] \to \mathbb{C} : \gamma_3(s) &= -s \\ \gamma_4 : [0, t] \to \mathbb{C} : \gamma_4(s) &= -R - is \end{aligned}$$

Funktio $e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$ on analyyttinen kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joten Cauchyn integraalilauseen nojalla tieintegraali

$$\oint_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \mathrm{d}z = 0$$

Tämä voidaan kirjoittaa osapolkujen tieintegraalien avulla,

$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(s-it)^2}\mathrm{d}s + \int_{-t}^{0} e^{-\frac{1}{2}(R+is)^2}\mathrm{d}s - \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(s)^2}\mathrm{d}s - \int_{0}^{t} e^{-\frac{1}{2}(-R-is)^2}\mathrm{d}s = 0.$$

Havaitaan, että toinen, kolmas ja neljäs integraali osataan määrittää, kun $R \to \infty$. Kolmas integraali on Gaussin integraali

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(-s)^2}\mathrm{d}s = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(s)^2}\mathrm{d}s = \sqrt{2\pi}.$$

Toinen integraali häviää, sillä

$$\left|\int_{-t}^{0} e^{-\frac{1}{2}(R+is)^2}\mathrm{d}s\right| \leq \int_{-t}^{0} \left|e^{-\frac{1}{2}(R+is)^2}\right|\mathrm{d}s = \left|e^{-\frac{1}{2}R^2}\right| \int_{-t}^{0} \left|e^{\frac{1}{2}s^2}\right|\left|e^{-Rsi}\right|\mathrm{d}s$$

$$= \left|e^{-\frac{1}{2}R^2}\right| \int_{-t}^{0} \left|e^{\frac{1}{2}s^2}\right|\mathrm{d}s \leq \left|e^{-\frac{1}{2}R^2}\right| M, \text{ missä } M \in (0,\infty)$$

Ottamalla ylärasta raja-arvo, saadaan

$$\lim_{R\to\infty} \left|e^{-\frac{1}{2}R^2}\right| M = 0 \implies \lim_{R\to\infty} \int_{-t}^{0} e^{-\frac{1}{2}(R+is)^2}\mathrm{d}s = 0.$$

Samoilla perusteluilla myös neljäs integraali häviää, sillä $e^{-\frac{1}{2}(R+is)^2} = e^{-\frac{1}{2}(-R-is)^2}$ ja $\int_0^t \left|e^{\frac{1}{2}s^2}\right|\mathrm{d}s < M$, missä $M \in (0,\infty)$.

Tutkitaan nyt osapolkujen tie-integraalien summan raja-arvoa, kun $R \to \infty$. Sijoittamalla tunnetut raja-arvot alkuperäiseen yhtälöön, saadaan ensimmäisen integraalin raja-arvoksi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(s-it)^2}\mathrm{d}s = \sqrt{2\pi}.$$

Tällöin siis karakteristinen funktio on

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-ti)^2}\mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

□

**Lause 7.5** (Normaalijakauman karakteristinen funktio)
Olkoon satunnaismuuttuja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Satunnaismuuttujalla $X$ on karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

*Todistus.* Olkoon satunnaismuuttuja $Y \sim N(0,1)$. Tällöin lauseiden 6.8 ja 7.2 nojalla

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu}\varphi_Y(\sigma t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

□

**Lause 7.6** (Normaalijakauman skaalaus ja siirto)
Olkoon $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normaalijakaumaa noudattava satunnaismuuttuja ja reaaliluvut $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $b \in \mathbb{R}$. Satunnaismuuttuja $aX + b$ noudattaa jakaumaa $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

*Todistus.* Satunnaismuuttujalle $aX + b$ saadaan karakteristinen funktio lauseiden 6.8 ja 7.5 avulla.

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \cdot \varphi_X(at) = e^{ibt} e^{iat\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(at)^2} = e^{it(a\mu+b) - \frac{1}{2}a^2\sigma^2 t^2}$$

Satunnaismuuttujan $aX+b$ krakteristinen funktio on normaalijakauman $N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ karakteristinen funktio. Nyt väite seuraa karakterististen funktioiden yksikäsitteisyydestä (lause 6.11). □

**Lause 7.7** (Normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien summa)
Olkoon riippumattomat normaalijakautuneet satunnaismuuttujat $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Satunnaismuuttujien lineaarikombinaatio on normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja ja $Z = aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.

*Todistus.* Satunnaismuuttujalle saadaan karakteristinen funktio lauseiden 6.8, 6.9 ja 7.5 nojalla

$$\varphi_{aX+bY}(t) = \varphi_X(at)\varphi_Y(bt) = e^{iat\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2(at)^2} e^{ibt\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2(bt)^2} = e^{it(a\mu_1+b\mu_2) - \frac{1}{2}t^2(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)}$$

$$= \varphi_Z(t)$$

Nyt väite seuraa karakterististen funktioiden yksikäsitteisyydestä (lause 6.11). □

# 8 Keskeinen raja-arvolause

Keskeinen raja-arvolause on suurten lukujen lain ohella tärkeimpänä pidetty raja-arvolause todennäköisyysteoriassa. Keskeinen raja-arvolause on tulos, joka kuvaa satunnaismuuttujien summan käytöstä summattavien satunnaismuuttujien määrän kasvaessa. Lauseen mukaan muutamin satunnaismuuttujaan liittyvin ehdoin satunnaismuuttujien summa on normaalisti jakautunut. Lauseella on erittäin keskeinen rooli myös todennäköisyysteoriaa soveltavilla aloilla. Sen nojalla summamuotoisten satunnaismuuttujien jakaumaa voidaan approksimoida normaalijakauman avulla. Normaalijakauman käyttäminen approksimaationa mahdollistaa esimerkiksi tilastotieteessä mitatun keskiarvon luotettavuuden arvioinnin. Lauseesta on useita versioita ja tässä kappaleessa esitellään ja todistetaan lauseen yksinkertaisin muoto.

**Lause 8.1** (**Keskeinen raja-arvolause riippumattomille samoin jakautuneille satunnaismuuttujille**)
Olkoon riippumattomat ja samoin jakautuneet satunnaismuuttujat $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, joilla on olemassa odotusarvo $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ sekä satunnaismuuttujien osasummat $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Satunnaismuuttujien normitettu summa $\hat{S}_n$ suppenee jakaumaltaan kohti standardinormaalijakaumaa, eli

$$\hat{S}_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X, \text{ missä } X \sim N(0,1), \text{ kun } n \to \infty.$$

*Todistus.* Lévyn jatkuvuuslauseen 6.12 nojalla normitettu summa $\hat{S}_n$ suppenee jakaumaltaan kohti normaalijakaumaa, jos ja vain jos sitä vastaava karakteristinen funktio $\varphi_{\hat{S}_n}(t)$ suppenee kohti standardinormaalijakauman karakteristista funktiota, joka on lauseen 7.4 mukaisesti $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

Tarkastellaan ensin satunnaismuuttujan normitusta.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \overline{X}_k, \text{ jossa } \overline{X}_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma}.$$

Uudet satunnaismuuttujat $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ ovat lineaarikuvauksia alkuperäisistä satunnaismuuttujista $X_1, \ldots, X_n$ ja näin lauseen 3.24 mukaisesti riippumattomien satunnaismuuttujien mitallisina kuvauksina riippumattomia. Alkuperäiset samoin jakautuneet satunnaismuuttujat on kuvattu samalla lineaarikuvauksella, joten uudet satunnaismuuttujat $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ ovat myös selvästi samoin jakautuneita. Tällöin jokaista satunnaismuuttujaa $\overline{X}_k$ vastaa sama karakteristinen funktio $\varphi_{\overline{X}}$. Uudet satunnaismuuttujat ovat normitettuja, ja niille voidaan määrittää odotusarvo $\mathbb{E}[\overline{X}_k] = 0$ ja varianssi $\mathrm{Var}(\overline{X}_k) = 1$ lauseiden 4.12 ja 4.13 avulla.

Merkitään normitettujen satunnaismuuttujien summaa $\overline{S}_n = \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n$. Määritetään karakteristinen funktio satunnaismuuttujalle $\frac{1}{\sqrt{n}}\overline{S}_n$. Tämä tehdään käyttäen lausetta 6.8 ja lausetta 6.9.

$$\varphi_{\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{\overline{S}_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\overline{X}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Lisäksi satunnaismuuttujalla $\overline{S}_n$ on lauseen 4.12 nojalla odotusarvo ja lauseen 4.13 nojalla varianssi.

$$\mathbb{E}[\overline{S}_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbb{E}[\overline{X}_1] + \cdots + \mathbb{E}[\overline{X}_n]) = 0.$$

$$\mathrm{Var}(\overline{S}_n) = \frac{1}{n}(\mathrm{Var}(\overline{X}_1) + \cdots + \mathrm{Var}(\overline{X}_n)) = 1.$$

Varianssin avulla saadaan määrättyä myös odotusarvo $\mathbb{E}[\overline{S}_n^2]$, sillä

$$\mathrm{Var}(\overline{S}_n) = \mathbb{E}[\overline{S}_n^2] - (\mathbb{E}[\overline{S}_n])^2 = 1 \iff \mathbb{E}[\overline{S}_n^2] = 1.$$

Nyt huomautuksen 6.14 nojalla karakteristiselle funktiolle $\varphi_{\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}}$ saadaan arvio

$$\varphi_{\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n.$$

Osoitetaan nyt, että karakteristiselle funktiolle saatu muoto suppenee kohti normaalijakauman karakteristista funktiota. Seuraavan rajan tarkastelu ohitetaan usein triviaalina tuloksena.

Virhetermin $o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ suuruudelle voidaan määrittää ylä- ja alaraja, sillä $\lim_{n\to\infty} \frac{t^2}{n} = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Jokaiselle $\varepsilon > 0$ ja $t \in \mathbb{R}$ voidaan siis valita $n_0 \in \mathbb{N}$, jolle kaikilla $n \geq n_0$

$$\left|\frac{o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{\frac{t^2}{n}}\right| \leq \varepsilon.$$

Epäyhtälö voidaan kirjoittaa nyt muodossa $\left|o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right| \leq \left|\frac{t^2}{n}\right|\varepsilon = \frac{t^2}{n}\varepsilon$. Tämän avulla karakteristisen funktion arvolle kohdassa $t$ saadaan ala- ja yläraja

$$\left(1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{\varepsilon t^2}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \leq \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon t^2}{n}\right)^n.$$

Huomataan, että

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{\varepsilon t^2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2(1+2\varepsilon)}{n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}t^2(1+2\varepsilon)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon t^2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2(1-2\varepsilon)}{n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}t^2(1-2\varepsilon)}.$$

Tällöin karakteristisen funktion raja-arvo saadaan rajoitettua

$$e^{-\frac{1}{2}t^2(1+2\varepsilon)} \leq \liminf_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \leq \limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \leq e^{-\frac{1}{2}t^2(1-2\varepsilon)}.$$

Nyt $\varepsilon$ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, joten suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n}}}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Saatu raja-funktio $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ on normaalijakauman karakteristinen funktio, joten Lévyn jatkuvuuslauseen 6.12 nojalla satunnaismuuttujien normitettu summa suppenee jakaumaltaan kohti standardinormaalijakaumaa. □

**Huomautus 8.2**
Keskeinen raja-arvolause on muotoiltavissa myös heikompien oletusten vallitessa (Lindeberg-ehdot, [6, s.330-338]) ja lauseelle löytyy satunnaisvektoreita käsittelevä yleistys ([3, s.151]).

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksena saadaan niin sanottu normaaliapproksimaatio. Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summan sekä tiettyjen sen muunnoksien jakaumaa voidaan arvioida normaalijakauman avulla. Normaaliapproksimaatiolla on tärkeä rooli tilastotieteessä.

**Seuraus 8.3** (Normaaliapproksimaatio)
Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomat ja samoin jakautuneet satunnaismuuttujat, joilla on odotusarvo $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ sekä satunnaismuuttujien summa $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ja normitettu summa $\overline{S}_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

Kun $n$ on suuri, keskeisen raja-arvolauseen perusteella normitetun summan $\overline{S}_n$ jakaumaa voidaan approksimoida standardinormaalijakaumalla $N(0,1)$. Tämän lisäksi summa $S_n$ voidaan ilmaista normitetun summan muunnoksena $S_n = \sqrt{n}\sigma\overline{S}_n + n\mu$. Nyt lauseen 7.2 nojalla myös summan $S_n$ jakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla $N(n\mu, n\sigma^2)$. Yleisemmin lauseen 7.6 nojalla muunnoksen $aS_n + b$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$, jakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla $N(na\mu + b, na^2\sigma^2)$.

Esimerkiksi satunnaismuuttujien $X_1, \ldots, X_n$ keskiarvo $\frac{S_n}{n}$ on summan muunnos, jonka jakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

# 9 Normaalijakauman teoreettisen taustan käsitteleminen lukiossa

Normaalijakauman asema lukion pitkän matematiikan opetuksessa on vaihdellut historian aikana. Aihetta on käsitelty laajasti vuoteen 2013 asti Maria Mäkelän Pro Gradu -tutkielmassa [9]. Tutkielmassa todetaan, että normaalijakauman asema pitkän matematiikan opetuksessa on heikentynyt vuosien saatossa. Tällä hetkellä käytössäolevassa vuoden 2015 opetussuunnitelman perusteissa [7] normaalijakauman käsittely määritetään kuuluvaksi lukion pitkän matematiikan viimeiselle pakolliselle kurssille ”Todennäköisyys ja tilastot” (MAA10). Tavoitteeksi on asetettu normaalijakauman soveltamisen osaaminen ja normaalijakauma mainitaan kurssin keskeisissä sisällöissä. Syksyllä 2021 voimaan astuvassa vuoden 2019 opetussuunnitelman perusteissa [8] normaalijakauman käsittely on siirretty pitkän matematiikan viimeiselle valtakunnalliselle syventävälle kurssille ”Analyysi ja jatkuva jakauma” (MAA12). Myös näissä perusteissa tavoitteeksi on asetettu normaalijakauman soveltamisen osaaminen. Lisäksi normaalijakauma ja normittaminen on mainittu kurssin keskeisissä sisällöissä.

Normaalijakauman käsittely painottuu teorian tarkastelun ja tutkimisen sijasta sen soveltamiseen tilanteissa, joissa tutkittavan satunnaismuuttujan kerrotaan noudattavan normaalijakaumaa. Toisaalta tilastotieteessä, joka on yksi merkittävimmistä normaalijakauman sovelluskohteista, jakauman hyödyllisyys perustuu usein keskeisen raja-arvolauseen seurauksena saatavaan normaaliapproksimaatioon. Normaalijakauman matemaattisen taustan käsittely ei kuitenkaan kuulu lukion oppimäärään. Mikä estää keskeisen raja-arvolauseen käsittelemistä lukiossa ja miten esteet voisi kiertää?

Keskeisen raja-arvolauseen käsitteleminen teoreettisesti ei ole mahdollista lukion esitietojen pohjalta. Lause perustuu monen matematiikan osa-alueen (kuten mittateorian, reaali- ja kompleksianalyysin) abstrakteihin tuloksiin, joiden ymmärtäminen vaatii yliopistotason matemaattisen päättelyn ja todistamisen tuntemista. Puuttuvien esitietojen läpikäynti ei ole realistista nykyisten tai voimaan astuvien lukion opetussuunnitelman perusteiden näkökulmasta. Vaikka aiheen teoreettinen käsittely ei ole mahdollista lukiossa, lausetta on mahdollista tutkia ja havainnoida lukion esitietojen pohjalta.

Keskeinen raja-arvolause on havainnollistettavissa simuloinnin avulla. Simulointi itsessään perustuu suurten lukujen lakiin 5.7, jota ei pystytä lukion esitietojen pohjalta käsittelemään. Simuloinnin toimivuus on kuitenkin luonnollista ja uskottavaa, sillä se vastaa hyvin pitkälti frekventistisen tilastotieteen käsitystä satunnaisilmiön tutkimisesta. Keskeisen raja-arvolauseen simuloimisen kannalta riittää se, että lauseen oletukset ymmärretään ja osataan ilmaista simulointiin soveltuvalle ohjelmalle. Tämän lisäksi sähköisten työkalujen ja erityisesti laskinohjelmistojen käyttö on olennainen osa nykyistä pitkän matematiikan opetusta. Esimerkiksi GeoGebra soveltuu hyvin simuloinnin kokeiluun. Simuloinnin toteuttaminen itse vaatii usein ohjelmointitaitoa, jota ei voida olettaa kovin vahvaksi vuoden 2015 tai 2019 opetussuunnitelman perusteiden nojalla. Jos simulointia halutaan käyttää lukio-opetuksessa, simulointiin vaadittavat komennot voidaan tarvittaessa antaa opiskelijalle valmiissa muodossa.

Keskeisen raja-arvolauseen oletusten ymmärtäminen vaatii muutamia esitietoja lukion oppimäärän ulkopuolelta. Satunnaismuuttujien riippumattomuutta ei voida käsitellä tarkasti lukiotasolla, mutta sen voi ymmärtää tapahtumien riippumattomuuden kautta. Satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, jos satunnaismuuttujien avulla ilmaistavien tapahtumien todennäköisyys voidaan määrittää käyttäen riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä. Lisäksi lauseen oletuksessa esiintyy satunnaismuuttujien normitettu summa, joka on siis satunnaismuuttujien summan mitallinen muunnos. Tämän oletuksen ymmärtämisen kannalta on tärkeää käsitellä satunnaismuuttujien muunnoksia. Muunnoksen kohdalla riittää ymmärtää, että satunnaismuuttujien "laskutoimitus" muodostaa uuden satunnaismuuttujan.

Tämän tutkielman liitteenä on tehtäväkokonaisuus, jossa havainnollistetaan keskeiseen raja-arvolauseeseen liittyvää todennäköisyysteoriaa simuloinnin avulla. Toinen tehtävien taustalla olevista ajatuksista on se, että niiden tekijä pääsee itse kokeilemaan simulointia. Tehtäviin ei ole luotu valmiita GeoGebra-appletteja, vaan niitä ratkaiseva henkilö pääsee itse suorittamaan simulointiin vaadittavat komennot, jotka on annettu tehtävien yhteydessä. Tehtävät ja niihin liittyvät simuloinnit on tarkoitettu suorittavaksi GeoGebra Classicin tietokoneelle ladattavalla versiolla. Kokonaisuus sisältää tehtävät, niiden vastaukset sekä tehtävien sisältöä kuvailevan osion. Tähän tutkielmaan tutustuminen ei ole tehtäväpaketin käyttämisen kannalta välttämätöntä. Tehtävien sisältöä avaavassa kappaleessa on viitteet tutkielman osiin, jotka käsittelevät tehtäviin liittyvää teoriaa tarkemmin.

Tehtävät eivät käsittele suoraan keskeistä raja-arvolausetta, vaan sen vaikutusta riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien keskiarvon jakaumaan. Tämä on tärkeä sovelluskohde keskeiselle raja-arvolauseelle tilastotieteessä. Tehtävissä rajoitutaan tarkastelemaan satunnaismuuttujia, jotka kuvaavat riippumattomia nopanheittoja. Valinta on tehty aiheen konkretisoimiseksi. Tehtävät on pyritty laatimaan siten, että hyvät lukion pitkän matematiikan (vuoden 2015 tai 2019 opetussuunnitelman perusteiden mukaiset) esitiedot riittävät tehtävien ratkaisemiseen ja annetun lisämateriaalin ymmärtämiseen.

# Lähteet


[1] Axler, Sheldon 2020
*Measure, Integration & Real Analysis*,
Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-030-33143-6, luettu 8.3.2021

[2] Bogachev Vladimir I. 2007
*Measure Theory*,
Springer, Berlin

[3] Durrett, Rick 2010
*Probability Theory and Examples*, neljäs painos,
Cambridge University Press, Cambridge

[4] Geiss, Christel & Geiss, Stefan 2014
*Todennäköisyysteoria 1*,
https://www.jyu.fi/science/fi/maths/opiskelu/yleista-opiskelusta/luentomonisteita/mats260, luettu 15.4.2021

[5] Geiss, Stefan 2014
*Todennäköisyysteoria 2*,
https://www.jyu.fi/science/fi/maths/opiskelu/yleista-opiskelusta/luentomonisteita/mats262, luettu 16.3.2021

[6] Gut, Allan 2005
*Probability: A Graduate Course*,
Springer, New York

[7] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015* 2015
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf, luettu 1.4.2021

[8] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019* 2019
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf, luettu 1.4.2021

[9] Mäkelä, Maria 2014
*Normaalia vai ei? : Normaalijakauman asema lukio-opetuksessa* (pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto),
http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2017112252235, luettu 1.4.2021

[10] Patel, Jagdish & Read Campbell, 1996
*Handbook of the Normal Distribution*,
Marcel Dekker, New York

[11] Shiryaev, Albert N. 1996
*Probability*,
Springer, New York

[12] Sottinen, Tommi 2006
*Todennäköisyysteoria*,
http://lipas.uwasa.fi/~tsottine/lecture_notes/tnt.pdf, luettu 20.1.2021

[13] Stahl, Saul 2006
”The Evolution of the Normal Distribution” *Mathematics Magazine* Vol. 79 No. 2,
https://doi.org/10.2307/27642916, luettu 2.4.2021

# Liitteet

## A Tietoa tehtävistä

Mistä syystä normaalijakauma on tärkeä luonnontieteille? Lukiossa normaalijakauman tärkeyttä perustellaan usein sillä, että moni luonnon ilmiö noudattaa normaalijakaumaa. Normaalijakauman merkitykselle löytyy kuitenkin myös matemaattiset perusteet, joiden esitteleminen ei kuulu lukion matematiikan oppimäärään. Normaalijakauma liittyy olennaisesti keskeiseen raja-arvolauseeseen, joka on yksi tärkeimmistä matemaattisista tuloksista tilastotieteen taustalla. Lauseen mukaan muutamin satunnaismuuttujaan liittyvin ehdoin riippumattomien normitettujen satunnaismuuttujien summa lähestyy normaalijakaumaa, kun summattavien satunnaismuuttujien määrä kasvaa. Keskeinen raja-arvolause mahdollistaa tilastotieteessä mitatun tunnusluvun luotettavuuden ja tarkkuuden arvioinnin. Lisäksi moni luonnonilmiö on useiden satunnaisten tekijöiden "summa", joten keskeistä raja-arvolausetta voi pitää myös yhtenä selityksenä normaalijakauman yleisyydelle luonnossa.

Keskeinen raja-arvolause kuulostaa yksinkertaiselta, mutta sen teoreettinen käsitteleminen vaatii kuitenkin huomattavan määrän esitietoa monelta matematiikan osa-alueelta (mittateoria, reaali- ja kompleksianalyysi). Lukiotasolla teoreettinen tarkastelu ei ole mahdollista, mutta se ei estä ilmiön havainnollistamista ja tutkimista.

Tämän tutkielman liitteet muodostavat tehtäväpaketin, jonka tarkoituksena on tarjota lukiotasolle soveltuvia havainnollistuksia liittyen satunnaismuuttujien yhdistämiseen, simulointiin ja keskeiseen raja-arvolauseeseen. Tehtäväpaketti on pyritty luomaan siten, että se ilmentäisi todennäköisyysteorian vaativia tuloksia intuitiivisella tavalla. Tehtävät käsittelevät hieman teoriaa tulosten taustalla, mutta painottuvat pääsääntöisesti ilmiöiden tutkimiseen simuloinnin avulla. Toinen tehtävien taustalla olevista ajatuksista on se, että niiden tekijä pääsee itse kokeilemaan simulointia. Tehtäviin ei ole luotu valmiita GeoGebra-appletteja, vaan tehtäviä tekevä henkilö pääsee itse suorittamaan simulointiin vaadittavat komennot, jotka on annettu tehtävien yhteydessä.

Tehtävät ja niihin liittyvät simuloinnit on tarkoitettu suorittavaksi GeoGebra Classicin tietokoneelle ladattavalla versiolla. Tehtävät ovat suunnattu aiheesta kiinnostuneelle ja lisähaastetta kaipaavalle lukiolaiselle, opettajalle tai tämän tutkielman lukijalle.

Osion B.1 tehtävät käsittelevät sellaisia satunnaismuuttujan muunnoksia, jotka ovat ilmaistavissa diskreetisti jakautuneiden ja riippumattomien satunnaismuuttujien laskutoimituksina. Osion on tarkoitus havainnollistaa sitä, että satunnaismuuttujien laskutoimituksella saadaan aikaan uusia satunnaismuuttujia. Tämä on välttämätön esitieto myöhempien osioiden ymmärtämisen kannalta. Satunnaismuuttujien muuntamisen lisäksi osion tehtävissä selvitetään muunnoksien jakaumia. Yksittäisen satunnaismuuttujan muunnoksen tapauksessa jakauma on selvitettävissä taulukoimalla satunnaismuuttujan mahdolliset arvot, niitä vastaavat muunnoksen arvot sekä todennäköisyydet. Riippumattomien satunnaismuuttujien summan tapauksessa jakauman voi selvittää taulukoimalla satunnaismuuttujien mahdollisten arvojen yhdistelmät. Jokaisen yhdistelmän todennäköisyys saadaan selvitettyä riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön avulla. Osioon liittyvää teoriaa käsitellään tarkemmin luvussa 3.

Keskiarvo on hyvin olennainen satunnaismuuttujien muunnos, joka liittyy tilastotieteeseen ja simulointiin suurten lukujen lain kautta. Osion B.2 tehtävissä käsitellään riippumattomien ja samoinjakautuneiden satunnaismuuttujien keskiarvoa ja varianssia konkreettisen esimerkin kautta. Tehtävissä tutkitaan riippumattomia nopanheittoja kuvaavien satunnaismuuttujien keskiarvoa. Tehtävien tulokset pätevät myös yleisemmin riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuutujien keskiarvolle. Osiossa esitellään kaavat satunnaismuuttujien summan odotusarvolle ja riippumattomien satunnaismuuttujien summan varianssille. Tehtävissä johdetaan nopanheittojen keskiarvon odotusarvo ja varianssi näiden kaavojen avulla. Keskiarvon odotusarvo on sama kuin yksittäisen nopanheiton odotusarvo ja keskiarvon varianssi riippuu heittojen lukumäärästä. Tehtävissä havaitaan, että varianssi ja keskihajonta vähenevät kohti nollaa kun nopanheittojen määrä kasvaa. Nämä havainnot liittyvät olennaisesti osiossa esiteltävään suurten lukujen lakiin. Osioon liittyvää teoriaa käsitellään tarkemmin luvussa 4.

Satunnaismuuttujan simulointi tarkoittaa havaintojen arpomista satunnaismuuttujan jakauman todennäköisyyksien mukaisesti. Arpomalla saatavaa otosta voidaan tutkia samalla tavalla kuin tilastollisen tutkimuksen otosta. Osion B.3 tehtävissä tutustutaan simulointiin tutkimalla riippumattomien nopanheittojen keskiarvon odotusarvoa simuloinnin avulla. Tehtävien tarkoituksena on tarjota konkreettinen esimerkki siitä, miten simulointi toimii. Tehtävissä simuloidaan nopanheittoja ja tutkitaan nopanheitoista laskettavan keskiarvon kehitystä, kun heittojen määrä kasvaa. Osion tehtävissä pyritään havainnollistamaan suurten lukujen lain vaikutusta keskiarvon kehitykseen. Osioon liittyvää teoriaa käsitellään tarkemmin luvussa 5.

Simulointia käytetään yleensä tilanteessa, jossa satunnaismuuttujaa ei osata tutkia analyyttisesti. Osion B.4 tehtävissä simulointia käytetään nopanheittojen keskiarvon jakauman tutkimiseen. Simuloinnin avulla muodostetaan empiirinen jakauma ja sitä vastaava histogrammi. Tehtävissä havaitaan, että histogrammi kapenee ja alkaa muistuttaa muodoltaan normaalijakaumaa, kun nopanheittojen määrä kasvaa. Tämä havainto liittyy olennaisesti kappaleessa esiteltävään keskeiseen raja-arvolauseeseen. Lauseen nojalla riippumattomien nopanheittojen keskiarvon jakaumaa voidaan arvioida normaalijakauman avulla, kun nopanheittojen määrä on suuri. Tämä havainto pätee myös yleisesti satunnaismuuttujista laskettavalle keskiarvolle, jos satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, samoin jakautuneita ja niillä on äärellinen odotusarvo sekä varianssi. Osion viimeisissä tehtävissä arvioidaan keskiarvoon liittyviä todennäköisyyksiä normaalijakauman avulla. Osioon liittyvää teoriaa käsitellään tarkemmin luvuissa 7 ja 8.

Satunnaisilmiöiden tutkimisen lisäksi simulointia voidaan käyttää satunnaisilmiöiden matkimiseen. Moni luonnonilmiö noudattaa normaalijakaumaa, joten normaalijakaumasta simuloituja arvoja voidaan käyttää näiden ilmiöiden mallintamiseen. Viimeisen osion

B.5 tehtävissä esitellään yksinkertaiset ohjeet, joiden avulla on mahdollista piirtää puun muotoa mukailevia kuvia. Simuloitujen parametrien lisääminen ohjeisiin mahdollistaa luonnon epätäydellisyyden matkimisen. Yksittäisen oksan parametrit ovat satunnaisia, mutta yhdessä ne muodostavat luontoa matkivan uniikin puun.

# B Tehtävät

## B.1 Satunnaismuuttujien muunnokset

Satunnaismuuttujan avulla voidaan muodostaa matemaattinen malli satunnaisilmiölle. Yksittäisiä satunnaisilmiöitä yhdistämällä saadaan aikaiseksi uusia satunnaisilmiöitä, joiden todennäköisyyksiä voidaan tutkia tapahtumien todennäköisyyksiä koskevien kerto- ja yhteenlaskusääntöjen avulla. Myös satunnaismuuttujia voidaan yhdistellä uusiksi satunnaismuuttujiksi laskutoimituksilla ja loogisilla lauseilla.

1. Olkoon yksittäistä kolikonheittoa kuvaava satunnaismuuttuja $Y$, jolla on jakauma

$$P(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } y \in \{0, 1\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

   (a) Määritä jakauma ja odotusarvo satunnaismuuttujalle $2Y$.

   (b) Määritä jakauma ja odotusarvo satunnaismuuttujalle $Y^2 + 1$.

2. Olkoon yksittäistä nopanheittoa kuvaava satunnaismuuttuja $X$, jolla on jakauma

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{kun } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

   (a) Määritä jakauma ja odotusarvo satunnaismuuttujalle $2X$.

   (b) Määritä jakauma ja odotusarvo satunnaismuuttujalle $(X - 2)^2$.

3. Olkoon riippumattomat satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ kuten 1. ja 2. tehtävissä. Määritä jakauma ja odotusarvo satunnaismuuttujalle $X + Y$.

4. Olkoon riippumattomat satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ kuten 1. ja 2. tehtävissä.

   (a) Keksi säännöt, joiden avulla yhdellä nopanheittolla ja yhdellä kolikonheitolla voidaan arpoa luku joukosta $1, 2, 3, \cdots, 12$ siten, että jokaisen luvun todennäköisyys on $\frac{1}{12}$.

   (b) Muodosta sääntöjäsi vastaava satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ laskutoimitus.

   (c) Perustele sääntöjesi toimivuus määrittämällä satunnaismuuttujien laskutoimituksen antamalle uudelle satunnaismuuttujalle jakauma.

5. Olkoon satunnaismuuttuja $X$ kuten tehtävässä 2. Tutkitaan tilannetta, jossa noppaa heitetään kaksi kertaa. Ensimmäistä nopanheittoa kuvaa satunnaismuuttuja $X_1$ ja toista $X_2$. Satunnaismuuttujat $X_1$ ja $X_2$ ovat riippumattomia.

   (a) Määritä jakauma satunnaismuuttujien summalle $X_1 + X_2$.

   (b) Määritä jakauma satunnaismuuttujien keskiarvolle $\frac{X_1+X_2}{2}$.

6. Tutkitaan tilannetta, jossa noppaa heitetään $n$ kertaa. Nopanheittoja kuvaavat riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$.

   (a) Noppaa heitetään kolme kertaa, ja heitoilla saaduista luvuista muodostetaan jono. Kuinka monta mahdollista jonoa on olemassa?

   (b) Noppaa heitetään $n$ kertaa, ja heitoilla saaduista luvuista muodostetaan jono. Kuinka monta mahdollista jonoa on olemassa?

   (c) Selitä edellisen kohdan avulla, miksi summan $X_1 + \cdots + X_n$ jakauman määrittäminen muuttuu hyvin työlääksi, kun $n$ kasvaa.

## B.2 Keskiarvo on satunnaismuuttuja

Tilastotieteessä satunnaismuuttujan odotusarvoa arvioidaan laskemalla havaituista satunnaismuuttujan arvoista keskiarvo. Tutkitaan seuraavaksi minkälainen satunnaismuuttuja keskiarvo on ja miksi keskiarvon avulla voidaan arvioida odotusarvoa. Tarvitsemme tähän varianssin ja odotusarvon määritelmien lisäksi seuraavan tuloksen.

Olkoon satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ ja reaaliluvut $a, b \in \mathbb{R}$.

Jos satunnaismuuttujilla on odotusarvot $\mathbb{E}[X]$ ja $\mathbb{E}[Y]$, niin summalla $aX + bY$ on odotusarvo

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Jos satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ ovat riippumattomia ja niillä on varianssit $\mathrm{Var}(X)$ ja $\mathrm{Var}(Y)$, niin summalla $aX + bY$ on varianssi

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y).$$

7. Olkoon yksittäistä nopanheittoa kuvaava satunnaismuuttuja $X$, jolla on jakauma

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{kun } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

   (a) Laske satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo $\mathbb{E}[X]$

   (b) Laske satunnaismuuttujan $X$ varianssi $\mathrm{Var}(X)$

Tehtävissä 8 – 20 tutkitaan tilannetta, jossa noppaa heitetään $n$ kertaa. Nopanheittoja kuvaavat riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$. Jokaisella satunnaismuuttujalla $X_1, \ldots, X_n$ on edellisen tehtävän 7 mukainen jakauma, odotusarvo ja varianssi.

8. Määritä odotusarvo ja varianssi seuraaville satunnaismuuttujille.

   (a) $X_1 + X_2$ (b) $X_1 + X_2 + X_3$ (c) $X_1 + \cdots + X_n$

9. Otetaan käyttöön uudet satunnaismuuttujat, jotka kuvaavat $n$ riippumattoman nopanheiton keskiarvoa

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}.$$

Määritä odotusarvo ja varianssi seuraaville satunnaismuuttujille.

(a) $\overline{X}_2$ (b) $\overline{X}_3$ (c) $\overline{X}_n$

10. Tutkitaan, mitä keskiarvon odotusarvolle, varianssille ja keskihajonnalle tapahtuu, kun nopan heittojen määrä lähestyy ääretöntä eli $n \to \infty$.

(a) Määritä odotusarvon raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\overline{X}_n]$.

(b) Määritä varianssin raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\overline{X}_n)$.

(c) Määritä keskihajonnan raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\operatorname{Var}(\overline{X}_n)}$.

Suurten lukujen laki on tärkeä odotusarvoa ja keskiarvoa yhdistävä tulos.

**Suurten lukujen laki**
Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ samoin jakautuneita ja riippumattomia satunnaismuuttujia. Satunnaismuuttujilla on odotusarvo $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \overset{m.v}{=} \mu.$$

Merkintä $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{X}_n \overset{m.v}{=} \mu$ tarkoittaa sitä, että keskiarvo $\overline{X}_n$ lähestyy odotusarvoa $\mu$ **melkein varmasti** eli todennäköisyydellä 1. Toisin sanoen $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \overline{X} = \mu\right) = 1$.

11. Suurten lukujen lain nojalla nopanheittoa kuvaavan satunnaismuuttujan $X$ odotusarvoa $\mathbb{E}[X]$ voidaan arvioida keskiarvon $\overline{X}_n$ avulla. Keskiarvo $\overline{X}_n$ on sitä varmemmin lähellä odotusarvoa, mitä suuremmasta määrästä nopanheittoja vastaavia satunnaismuuttujia keskiarvo on laskettu. Millä tavalla tämä näkyy edellisen tehtävän 10 vastauksissa?

## B.3 Suurten lukujen laki – simuloinnin sydän

Joskus satunnaismuuttujan ominaisuuksien tutkiminen teoreettisesti on hankalaa tai mahdotonta. Tällaisessa tilanteessa sen ominaisuuksia voidaan tutkia simuloinnin avulla. Satunnaismuuttujan simulointi tarkoittaa havaintojen arpomista satunnaismuuttujan jakauman todennäköisyyksien mukaisesti. Simulointi suoritetaan usein tietokoneella käyttäen siihen soveltuvaa ohjelmointikieltä tai ohjelmaa. Arpomalla saatavaa otosta voidaan tutkia samalla tavalla, kuin tilastollisen tutkimuksen otosta. Sovelletaan simulointia ensin edellisessä tehtävässä käsiteltyyn tilanteeseen ja arvioidaan nopan odotusarvoa simuloinnin avulla.

12. Tutkitaan nopanheittoa kuvaavan satunnaismuuttujan $X$ odotusarvoa $\mathbb{E}[X]$ simuloimalla nopanheittoja. Suoritetaan simulointi fyysisellä nopalla.

    (a) Avaa GeoGebrasta taulukkolaskenta-näkymä

    (b) Taulukoi soluihin A1-A100 luvut 1-100.

    (c) Heitä noppaa 100 kertaa. Taulukoi heitoista saadut havainnot soluihin B1-B100.

    (d) Laske soluihin C1-C100 osasummat $n$ ensimmäisestä nopanheitosta.

    (e) Laske soluihin D1-D100 keskiarvot $n$ ensimmäisestä nopanheitosta.

    (f) Piirrä piirtoalueelle pisteet, jotka vastaavat tekemiäsi havaintoja. Piirrä pisteet siten, että $y$-koordinaatti on keskiarvo, joka on laskettu $x$-koordinaatin mukaisesta määrästä havaintoja.

    (g) Palauta kuva piirtämästäsi pisteistä tai murtoviivasta. Kuvaile, mitä keskiarvolle tapahtuu, kun havaintojen määrä kasvaa.

13. Nopan heittäminen on hauskaa ajanvietettä, mutta tehotonta simulointia. Tutkitaan nopanheittoa kuvaavan satunnaismuuttujan $X$ odotusarvoa $\mathbb{E}[X]$ simuloimalla nopanheittoja GeoGebralla.

    (a) Suoritetaan GeoGebralla simulointi, jossa heitetään noppaa 10000 kertaa ja lasketaan keskiarvo $n$ ensimmäisen heiton jälkeen. Käytä seuraavia komentoja.

    ```
    noppa = {1,2,3,4,5,6}
    maxn = 10000
    S = Iteraatiolista(a+SatunnainenAlkio(noppa),a,{SatunnainenAlkio(noppa)},maxn)
    havainnot = Jono((i,S(i)/i),i,1,maxn)
    n = Liukusäädin(1,maxn,1)
    KESKIARVO_n = Murtoviiva(Ensimmäinen(havainnot, n))
    Jos(0 < x < maxn, keskar(noppa))
    ```

    (b) Kerro lyhyesti, mitä (a)-kohdan GeoGebra-komennot tekevät.

    (c) Mitä lukua simuloitu keskiarvo näyttäisi lähestyvän, kun lukua $n$ kasvatetaan?

    (d) Laita murtoviivalle ”jälki käyttöön” ja paina muutamia kertoja näppäintä F9. GeoGebra suorittaa simuloinnin uudestaan, ja piirtää murtoviivan piirtoalueelle.

(e) Jokainen simulaatio tuottaa hieman erilaisen murtoviivan. Mistä syystä simulaatioista piirretyt murtoviivat ovat erilaisia?

(f) Mitä yhteistä eri simulaatioista piirretyillä murtoviivoilla on?

14. Tutki simuloimalla vielä erilaisen nopan odotusarvoa muuttamalla listaa `noppa`. Palauta uusi lista, sen teoreettinen odotusarvo sekä kuva simulaatiosta. Voit keksiä listan itse, tai käyttää esimerkiksi 4-sivuista noppaa vastaavaa listaa `{1,2,3,4}`.

## B.4 Normaalijakauma ja keskeinen raja-arvolause – kaaoksen keskeltä kohoava kumpu

Aikaisemmissa tehtävissä havaitsimme, että satunnaismuuttujien keskiarvon jakauman määrittäminen analyyttisesti on todella työlästä, kun satunnaismuuttujia on paljon. Keskiarvon jakaumaa voidaan kuitenkin tutkia helposti simuloimalla. Simuloinnissa satunnaismuuttujan jakaumaa voidaan arvioida simuloitujen arvojen suhteellisten frekvenssien avulla. Tutkitaan lisäksi, miten keskiarvon jakauma liittyy normaalijakaumaan.

15. Syötetään nopanheittoa kuvaavan satunnaismuuttujan $X$ perustiedot GeoGebraan.

(a) Luo lista `arvot = {1,2,3,4,5,6}`, joka sisältää satunnaismuuttujan mahdolliset arvot ja lista `p = {1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6}`, joka sisältää arvoja vastaavat todennäköisyydet.

(b) Laske listojen avulla satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo ja varianssi. Tallenna ne muuttujiin `EX` ja `VarX`.

16. Simuloidaan GeoGebralla $n$ riippumattoman nopanheiton keskiarvoa kuvaavaa satunnaismuuttujaa $\overline{X}_n$.

(a) Suoritetaan GeoGebralla 10000 simulaatiota. Jokaisessa simulaatiossa listasta `arvot` arvotaan `n` lukua ja saaduista luvuista lasketaan keskiarvo. Käytä seuraavia komentoja.

```
n = Liukusäädin(1, 100, 1)
lkm = 10000
Xn = keskar(Jono(SatunnainenDiskreetti(arvot, p), i, 1, n))
simulaatiot=Jono(Xn,i,1,lkm)
```

(b) Montako kertaa GeoGebra heitti puolestasi noppaa?

17. Tutkitaan keskiarvon $\overline{X}_n$ jakaumaa simuloiduista keskiarvoista piirrettävän histogrammin avulla.

(a) Käytä histogrammin piirtämiseen seuraavia komentoja.

```
leveys = 1/n
luokat = Jono(Min(arvot)-leveys/2, Max(arvot)+leveys, leveys)
h = Histogrammi(false, luokat, simulaatiot, true, 1 / lkm)
```

Histogrammissa luokkaa vastaavan palkin pinta-ala on luokan suhteellinen frekvenssi. Luokan leveys on valittu siten, että jokaiselle mahdolliselle $n$ nopanheiton keskiarvolle on oma luokka.

(b) Aseta liukusäädin arvoon `n=10`. Mitkä keskiarvot ovat yleisimpiä ja mitkä harvinaisimpia histogrammin perusteella?

(c) Histogrammin pitäisi olla lähes symmetrinen kaikilla muuttujan `n` arvoilla. Missä sijaitsee histogrammin keskikohta?

(d) Kuvaile, mitä histogrammin muodolle tapahtuu, kun muuttujan `n` arvoa kasvatetaan.

Suurten lukujen lain lisäksi toinen tärkeä satunnaismuuttujien keskiarvoon liittyvä tulos on keskeinen raja-arvolause. Lause antaa keinon arvioida keskiarvon jakaumaa ja sillä on erittäin tärkeä rooli tilastotieteessä, jossa lausetta käytetään keskiarvon luotettavuuden arviointiin ja mitattujen keskiarvojen vertailuun.

**Keskeinen raja-arvolause**
Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ samoin jakautuneita ja riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Olkoon $\overline{X}_n$ satunnaismuuttujista laskettu keskiarvo, jolloin sillä on odotusarvo $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu$ ja keskihajonta $\mathrm{SD}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Normitetun keskiarvon $\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]}{\mathrm{SD}(\overline{X}_n)} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu)$ jakauma lähestyy normaalijakaumaa $N(0,1)$, kun $n \to \infty$.

Vaikka keskeinen raja-arvolause koskee normitettua keskiarvoa, sen avulla on mahdollista arvioida myös normittamattoman keskiarvon jakaumaa. Arvio on sitä parempi, mitä suuremmasta määrästä satunnaismuuttujia keskiarvo on laskettu.

18. Satunnaismuuttuja $X$ kuvaa yksittäistä nopanheittoa. Tehtävässä 9 osoitimme, että riippumattomien nopanheittojen keskiarvoa kuvaavalla satunnaismuutujalla $\overline{X}_n$ on seuraavat ominaisuudet.

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}[X] \text{ ja } \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n}, \text{ jolloin } \mathrm{SD}(\overline{X}_n) = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{n}}.$$

Tutkitaan, toimiiko näiden parametrien mukainen normaalijakauma $N\left(\mathbb{E}[\overline{X}_n], \mathrm{SD}(\overline{X}_n)\right)$ arviona keskiarvoa kuvaavan satunnaismuuttujan $\overline{X}_n$ jakaumalle.

(a) Piirrä GeoGebralla normaalijakauman $N\left(\mathbb{E}[\overline{X}_n], \mathrm{SD}(\overline{X}_n)\right)$ tiheysfunktio. Käytä tiheysfunktion piirtämiseen seuraavaa komentoa.
`f(x) = Normaalijakauma(EX,sqrt(VarX/n), x, false)`

(b) Tehtävässä 17 piirsimme satunnaismuuttujan $\overline{X}_n$ simuloiduista arvoista histogrammin. Arvioi histogrammin avulla, toimiiko normaalijakauma paremmin arviona pienestä heittomäärästä laskettavan keskiarvon jakaumalle (muuttujan `n` arvo on pieni) vai suuresta heittomäärästä laskettavan keskiarvon jakaumalle (muuttujan `n` arvo on suuri).

Olkoon $X$ ja $\overline{X}_n$ kuten tehtävässä 18. Käytetään tehtävissä $19-20$ normaalijakaumaa $N\left(\mathbb{E}[\overline{X}_n], \mathrm{SD}(\overline{X}_n)\right)$ arviona riippumattomien nopanheittojen keskiarvoa kuvaavan satunnaismuuttujan $\overline{X}_n$ jakaumalle. Todennäköisyyksien selvittämiseen voi käyttää GeoGebran todennäköisyyslaskuria.

19. Selvitä seuraavat todennäköisyydet.

    (a) Laske todennäköisyys sille, että kymmenen nopanheiton keskiarvo on korkeintaan 3, eli $P(\overline{X}_{10} \leq 3)$.

    (b) Laske todennäköisyys sille, että sadan nopanheiton keskiarvo on korkeintaan 3, eli $P(\overline{X}_{100} \leq 3)$.

    (c) Laske todennäköisyys sille, että 200 nopaheiton keskiarvon etäisyys odotusarvosta $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = 3.5$ on korkeintaan 0.25, eli $P(\left|\overline{X}_{200} - 3.5\right| \leq 0.25)$.

20. Kasino on ottanut kiinni kolme epäiltyä pelihuijaria. Pelaajat ovat pelanneet peliä, jossa on tavoitteena heittää mahdollisimman pieni luku nopalla. Valvontakameroista on saatu selville, kuinka monta kertaa pelaaja on heittänyt noppaa ja mikä on ollut hänen nopanheittojensa keskiarvo. Pelaajan epäilyttävyyttä voidaan tutkia $n$ nopanheitosta laskettavaa keskiarvoa kuvaavan satunnaismuuttujan $\overline{X}_n$ jakauman avulla. Huijari on halunnut saada nopanheitoilla mahdollisimman pieniä lukuja, joten huijarin heittojen keskiarvo on epätavallisen pieni.

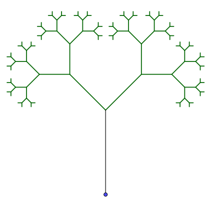
    Laske jokaisen pelaajan kohdalla todennäköisyys sille, että keskiarvoa kuvaava satunnaismuuttuja $\overline{X}_n$ on korkeintaan pelaajan todellisuudessa saama keskiarvo, missä $n$ vastaa pelaajan nopanheittojen lukumäärää. Kuka kiinniotetuista pelaajista on kaikista epäilyttävin?

| | Heittojen lukumäärä | Heittojen keskiarvo |
|---|---|---|
| Pelaaja 1 | 20 | 2.6 |
| Pelaaja 2 | 50 | 2.9 |
| Pelaaja 3 | 2000 | 3.2 |

### B.5 Satunnaisuus on keskimäärin kaunista

Aikaisemmissa tehtävissä käytettiin simulointia satunnaismuuttujan ominaisuuksien selvittämiseen. Tilastollisen tarkastelun lisäksi satunnaismuuttujien avulla on mahdollista matkia satunnaisia ilmiöitä. Tällöin tarkoituksena ei ole välttämättä ymmärtää ilmiötä, vaan käyttää satunnaisuutta loputtomana luovuuden lähteenä. Simuloinnin käyttäminen osana ohjelmointia mahdollistaa esimerkiksi satunnaisten pelikenttien luomisen peleissä, uniikeista puista muodostetun metsän 3D-animaatioissa ja jopa uusien uniikkien ihmiskasvojen luomisen (`https://thispersondoesnotexist.com/`)! Luodaan seuraavaksi yksinkertainen malli puun piirtämiselle GeoGebrassa ja elävöitetään malli käyttämällä simulaatiota.

21. Puun muotoa on mahdollista mallintaa hyvin yksinkertaisten ohjeiden avulla. Piirrä kuvan mukainen puu annettujen ohjeiden mukaisesti.



(1) Piirrä jana.

(2) Piirrä kaksi uutta janaa. Molemmat janoista alkavat edellisen janan päätepisteestä ja niiden pituus on 60% edellisen janan pituudesta. Toinen janoista on 135° ja toinen −135° asteen kulmassa edellisen janan kanssa.

(3) Toista kohdat 2 ja 3 edellisessä kohdassa 2 piirretyille janoille (niin kauan kun jaksat piirtää puuta).

22. Piirretään yksinkertainen puu GeoGebralla. Käytä seuraavia komentoja.

```
n = Liukusäädin(0,10,1)
r = Liukusäädin(0,pi,0.1)
smax = Liukusäädin(0,1,0.01)
P = (0,1)
Jana(P,(x(P),0))
A = {}
B = {}

N = Iteraatiolista(
        Jono(
                B(ceil(i / 2)) + smax*Kierto((B(ceil(i / 2))-A(ceil(i / 4))), r*(-1)^i),
                i,1,2*Pituus(B)
        ),
        A,B,{{P},{P+smax*Kierto((0,y(P)), -r),P+smax*Kierto((0,y(P)),r)}},n
)

Puu = Jono(
        Jono(
                Jana(Alkio(N(i+1),j),Alkio(N(i),ceil(j/2))),
                j,1,Pituus(N(i + 1))
        ),
        i,1,Pituus(N)-1
)
```

23. Piilota pisteet `N` piirtämisen jälkeen. Kerro, miten luodut liukusäätimet `r`, `smax`, `n` vaikuttavat piirrettävään puuhun.

24. Mistä syystä puu ei näytä ”luonnolliselta”?

25. Muutetaan piirtämisohjeita siten, että piirrettävän oksan kulma ja pituus simuloidaan. Pituudet arvotaan tasajakaumasta $U(\texttt{smin},\texttt{smax})$ ja kulma arvotaan normaalijakaumasta $N(\texttt{r}, \texttt{rhajonta})$. Poista pisteet `N` ja lista `Puu` ennen seuraavien komentojen ajamista.

```
smin = Liukusäädin(0,smax,0.01)
rhajonta = Liukusäädin(0.001,r,0.01)

RN = Iteraatiolista(
    Jono(
        B(ceil(i / 2)) + SatunnainenTasajakaumanarvo(smin,smax)*Kierto(
        (B(ceil(i / 2))-A(ceil(i / 4))),SatunnainenNormiarvo(r,rhajonta)*(-1)^i),
        i,1,2*Pituus(B)
    ),
    A,B,
    {
        {P},
        {
            P+SatunnainenTasajakaumanarvo(smin,smax)*Kierto((0,y(P)),SatunnainenNormiarvo(-r,rhajonta)),
            P+SatunnainenTasajakaumanarvo(smin,smax)*Kierto((0,y(P)), SatunnainenNormiarvo(r,rhajonta))
        }
    },
    n
)

RPuu = Jono(
    Jono(
        Jana(Alkio(RN(i+1),j),Alkio(RN(i),ceil(j/2))),
        j,1,Pituus(RN(i + 1))
    ),
    i,1,Pituus(RN)-1
)
```

26. Piilota pisteet `RN` puun piirtämisen jälkeen. Komennot simuloivat uniikin puun ja simuloinnin voi suorittaa uudestaan painamalla näppäintä F9. Kerro, miten luodut liukusäätimet `n`, `r`, `rhajonta`, `smin` ja `smax` vaikuttavat piirrettävään puuhun.

27. Etsi parametrien arvot, jotka tuottavat omasta mielestäsi luonnollisen näköisiä puita. Palauta käyttämäsi parametrit ja kuva simuloidusta puusta.

## C Vastaukset

1. Satunnaismuuttujien jakauman määrittäminen onnistuu tutkimalla satunnaismuuttujan mahdollisten arvojen todennäköisyyksiä.

   (a) Taulukoidaan satunnaismuuttujan mahdolliset arvot, arvoja vastaavat muunnokset ja arvojen todennäköisyydet.

   | $y$ | $f(y) = 2y$ | $P(Y = y)$ |
   |---|---|---|
   | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
   | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ |

   Tällöin $P(2Y = 0) = \frac{1}{2}$ ja $P(2Y = 2) = \frac{1}{2}$.

   Satunnaismuuttujalla on odotusarvo $\mathbb{E}[2Y] = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

   (b) Taulukoidaan satunnaismuuttujan mahdolliset arvot, arvoja vastaavat muunnokset ja arvojen todennäköisyydet.

   | $y$ | $f(y) = y^2 + 1$ | $P(Y = y)$ |
   |---|---|---|
   | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ |
   | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ |

   Tällöin $P(Y^2 + 1 = 1) = \frac{1}{2}$ ja $P(Y^2 + 1 = 2) = \frac{1}{2}$.

   Satunnaismuuttujalla on odotusarvo $\mathbb{E}[Y^2 + 1] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$.

2. (a) Taulukoidaan satunnaismuuttujan mahdolliset arvot, arvoja vastaavat muunnokset ja arvojen todennäköisyydet.

   | $X$ | $f(x) = 2X$ | $P(X = x)$ |
   |---|---|---|
   | 1 | 2 | $\frac{1}{6}$ |
   | 2 | 4 | $\frac{1}{6}$ |
   | 3 | 6 | $\frac{1}{6}$ |
   | 4 | 8 | $\frac{1}{6}$ |
   | 5 | 10 | $\frac{1}{6}$ |
   | 6 | 12 | $\frac{1}{6}$ |

   Tällöin $P(2X = a) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{kun } a \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

   Satunnaismuuttujalla on odotusarvo $\mathbb{E}[2X] = \frac{1}{6}(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) = 7$.

   (b) Taulukoidaan satunnaismuuttujan mahdolliset arvot, arvoja vastaavat muunnokset ja arvojen todennäköisyydet.

| $X$ | $f(x) = (X-2)^2$ | $P(X = x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | 1 | $\frac{1}{6}$ |
| 4 | 4 | $\frac{1}{6}$ |
| 5 | 9 | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | 16 | $\frac{1}{6}$ |

Käyttämällä yhteenlaskusääntöä, saamme muunnoksen jakauman

| $f(x) = (X-2)^2$ | $P(X = x)$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 1 | $\frac{2}{6}$ |
| 4 | $\frac{1}{6}$ |
| 9 | $\frac{1}{6}$ |
| 16 | $\frac{1}{6}$ |

Tällöin siis $P((X-2)^2 = a) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{kun } a \in \{0, 4, 9, 16\} \\ \frac{2}{6}, & \text{kun } a = 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$.

Satunnaismuuttujalla on odotusarvo $\mathbb{E}[(X-2)^2] = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} = \frac{31}{6}$

3. Tehtävä onnistuu helpoiten taulukoimalla mahdolliset yhdistelmät.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Jokaisen yhdistelmän todennäköisyys on $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. Yhdistelmien avulla saadaan summalle jakauma

$$P(X + Y = a) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{kun } a \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \\ \frac{1}{12}, & \text{kun } a \in \{1, 7\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

4. (a) Kolikossa klaavan arvo on 0 ja kruunan arvo on 1. Heitetään noppaa ja kolikkoa. Lasketaan yhteen nopanheitosta saatu luku ja kolikon heitosta saatu luku kerrottuna kuudella.

   (b) $X + 6Y$

   (c) Taulukoidaan satunnaismuuttujan $X + 6Y$ mahdolliset arvot

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Jokaisen yhdistelmän todennäköisyys on $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. Yhdistelmien avulla saadaan summalle jakauma

$$P(X + 6Y = a) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{kun } a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

5. (a) Taulukoidaan satunnaismuuttujan $X_1 + X_2$ mahdolliset arvot

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Jokaisen yhdistelmän todennäköisyys on $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, jolloin satunnaismuuttujalle $X_1 + X_2$ on jakauma

$$P(X_1 + X_2 = a) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{kun } a \in \{2, 12\} \\ \frac{2}{36}, & \text{kun } a \in \{3, 11\} \\ \frac{3}{36}, & \text{kun } a \in \{4, 10\} \\ \frac{4}{36}, & \text{kun } a \in \{5, 9\} \\ \frac{5}{36}, & \text{kun } a \in \{6, 8\} \\ \frac{6}{36}, & \text{kun } a = 7 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

(b) Satunnaismuuttuja $\frac{X_1+X_2}{2}$ voi saada arvot $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{12}{2}\}$. Tällöin satunnaismuuttujalla on jakauma

$$P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} = a\right) = P(X_1 + X_2 = 2a) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{kun } a \in \{1, 6\} \\ \frac{2}{36}, & \text{kun } a \in \{\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\} \\ \frac{3}{36}, & \text{kun } a \in \{2, 5\} \\ \frac{4}{36}, & \text{kun } a \in \{\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\} \\ \frac{5}{36}, & \text{kun } a \in \{3, 4\} \\ \frac{6}{36}, & \text{kun } a = \frac{7}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Huom. myös tämän tehtävän voi tehdä taulukoimalla mahdolliset arvot, arvoja vastaavat muunnokset ja arvojen todennäköisyydet.

6. (a) $6^3$

(b) $6^n$

(c) Yhdistelmien lukumäärä kasvaa eksponentiaalisesti. Tästä syystä yhdistelmien tutkiminen taulukoinnin avulla muuttuu käytännössä mahdottomaksi, kun $n$ on vähänkin suurempi.

7. (a)

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

(b)

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{6} \left( \frac{1}{6} \cdot \left( k - \frac{7}{2} \right)^2 \right) = \frac{35}{12}$$

8. (a)

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 7$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = \frac{35}{6}$$

(b)

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = \frac{21}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) = \frac{35}{4}$$

(c)

$$\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n \cdot \frac{35}{12}$$

9. (a)

$$\mathbb{E}[\overline{X}_2] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]) = \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_2) = \frac{1}{2^2}(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)) = \frac{35}{24}$$

(b)

$$\mathbb{E}[\overline{X}_3] = \frac{1}{3}(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]) = \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_3) = \frac{1}{3^2}(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3)) = \frac{35}{36}$$

(c)

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}(\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{35}{12} = \frac{1}{n} \cdot \frac{35}{12}$$

10. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\overline{X}_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{12} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{35}{12}} = \sqrt{\frac{35}{12}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

11. Keskiarvon $\overline{X}_n$ odotusarvo on sama vakio, kuin satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo. Satunnaismuuttujan vaihtelua ja keskiarvosta poikkeamista kuvaavat varianssi ja keskihajonta lähestyvät nollaa, kun $n \to \infty$.

12. (a) -

    (b) Tämä onnistuu noudattamalla seuraavia ohjeita.

    (1) Sijoita `A1 = 1`
    (2) Sijoita `A2 = A1 + 1`
    (3) Kopioi solun A2 kaava soluihin A3-A100

    (c) Jaksaa jaksaa, tähän ei löydy vastauksista apua!

    (d) Tämä onnistuu noudattamalla seuraavia ohjeita.

    (1) Sijoita `C1 = B1`
    (2) Sijoita `C2 = C1 + B2`
    (3) Kopioi solun C2 kaava soluihin C3-C100

    (e) Tämä onnistuu noudattamalla seuraavia ohjeita.

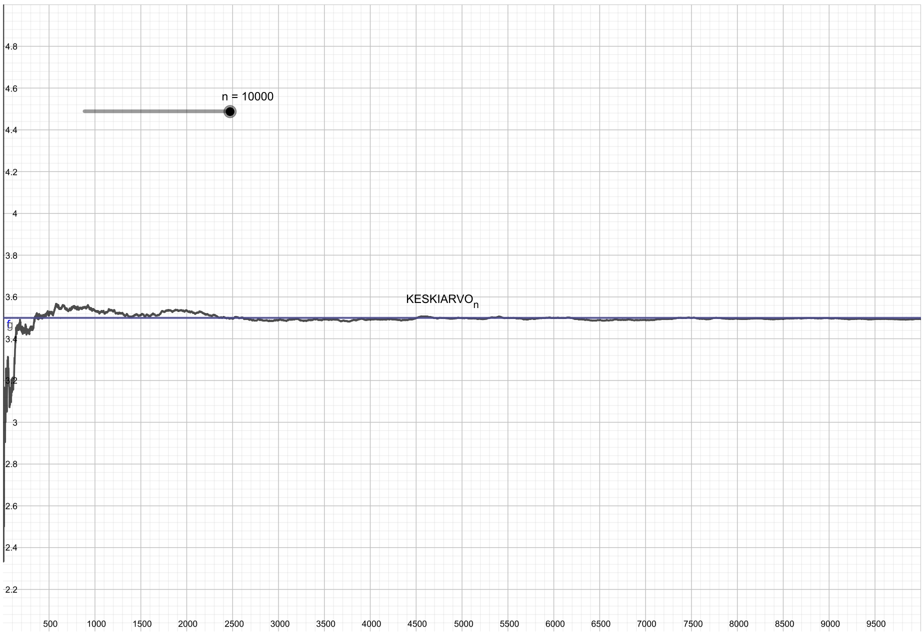
    (1) Sijoita `D1 = C1/A1`
    (2) Kopioi solun D1 kaava soluihin D2-D100

    (f) Tämä onnistuu seuraavilla komennoilla

    (1) `keskiarvot = (A1:A100,D1:D100)`
    (2) `m = murtoviiva(keskiarvot)`

    (g) Keskiarvot näyttäisivät sijoittuvan lähelle odotusarvoa.

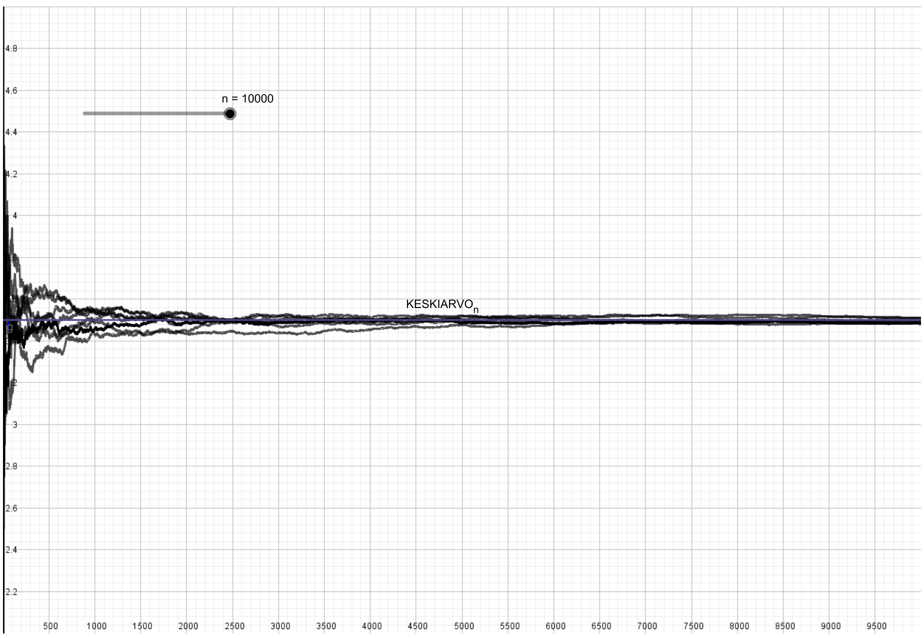
13. (a) Kuvakaappaus GeoGebran piirtoalueesta komentojen ajamisen jälkeen.




(b) Ensimmäinen komento luo nopan arvoja vastaavan listan. Toinen komento määrittää muuttujan `maxn`, joka kertoo simulointien määrän. Kolmas rivi arpoo `maxn`-kappaletta nopanheittoja, joista lasketaan osasummat muuttujaan `S`. Neljäs rivi luo havaintoja vastaavat pisteet osasummista. Viides rivi luo liukusäätimen. Kuudes rivi luo havaintopisteitä vastaavan murtoviivan. Seitsemäs rivi luo teoreettista odotusarvoa kuvaavan puolisuoran.

(c) Simuloitu keskiarvo näyttäisi lähestyvän nopanheittojen odotusarvoa.

(d) Kuvakaappaus GeoGebran piirtoalueesta komentojen ajamisen jälkeen.



(e) Murtoviivat on saatu simuloimalla nopanheittoja eli arpomalla havaintoja nopanheiton jakauman mukaisesti. Tästä syystä simulaatiosta piirrettävä murtoviiva on satunnainen.

(f) Simulaatiot poikkeavat toisistaan ja odotusarvosta sitä vähemmän, mitä suurempi $n$ on.

14. -

15. (a) -

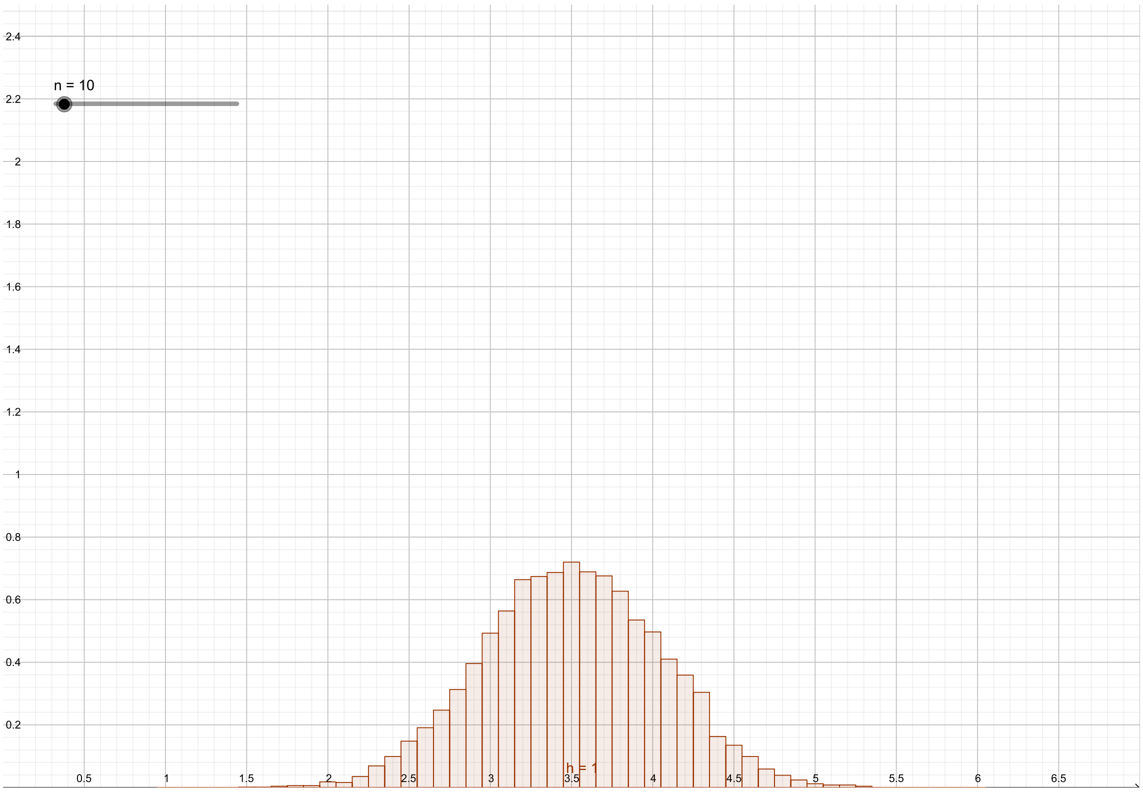
    (b) Tämä onnistuu esimerkiksi seuraavilla komennoilla.

```
EX = Summa(p*arvot)
VarX = Summa(p*(arvot-EX)^2)
```

16. (a) -

    (b) Tämänhetkisten muuttujan arvojen mukaan heittoja tehtiin $1000n$. Muuttujien avulla ilmaistuna heittojen määrä on `lkm*n`

17. (a) Kuvakaappaus GeoGebran piirtoalueesta komentojen ajamisen jälkeen.

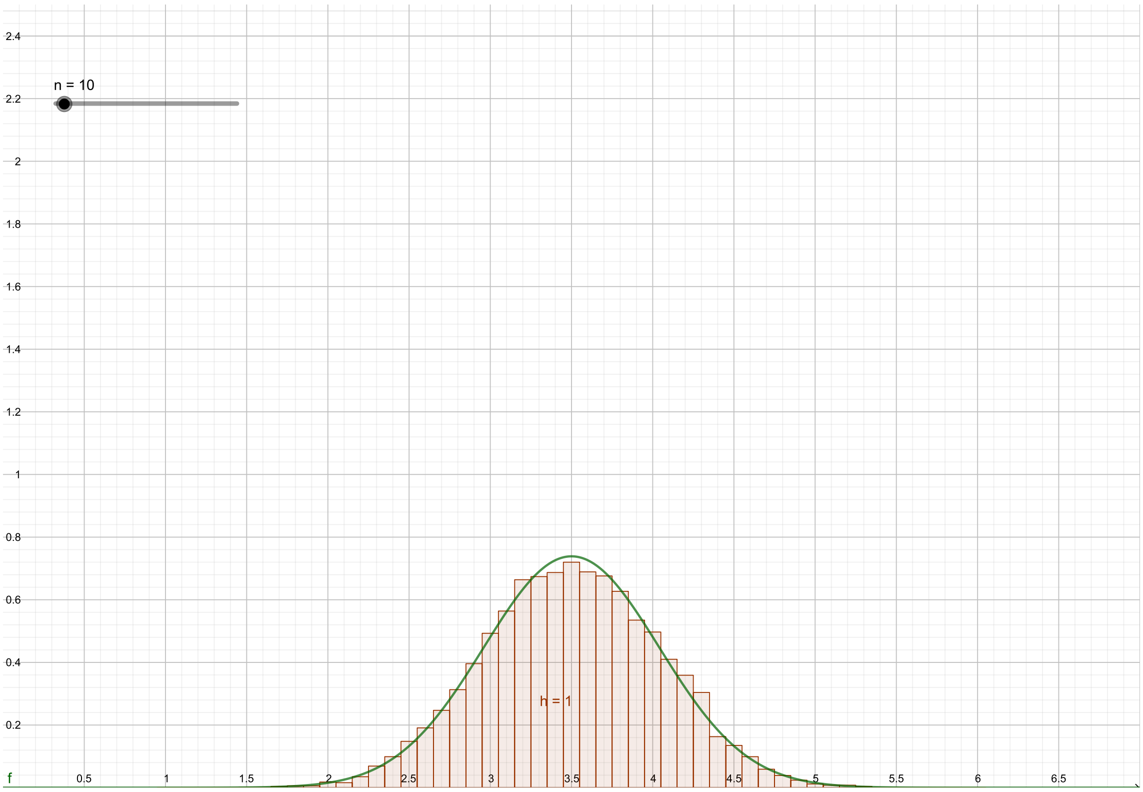



(b) Yleisimpiä ovat odotusarvon lähellä olevat keskiarvot ja harvinaisimpia odotusarvosta eniten poikkeavat keskiarvot. Satunnaismuuttujan arvot ovat sitä yleisempiä, mitä lähempänä ne ovat odotusarvoa.

(c) Histogrammin keskikohta sijaitsee odotusarvon kohdalla.

(d) Histogrammi kapenee ja muuttuu muodoltaan (normaalijakaumaa muistuttavaksi) miltein symmetriseksi ”kummuksi”. Kummun keskikohta on satunnaismuuttujan odotusarvon kohdalla.

18. (a) Kuvakaappaus GeoGebran piirtoalueesta komentojen ajamisen jälkeen.




(b) Histogrammi toimii parempana arviona $n$ nopanheitosta laskettavan keskiarvon jakaumalle, kun $n$ on suuri.

19. Käytetään geogebran todennäköisyyslaskuria todennäköisyyksien selvittämiseen. Parametreille esitetyt pyöristykset vastaavat sitä, millä tarkkuudella todennäköisyyslaskuri käsittelee parametrejä.

(a) Asetetaan $\mu = \mathbb{E}[X] = 3.5$ ja $\sigma = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{10}} \approx 0.5401$.

Valitsemalla tutkittavaksi väliksi $(-\infty, 3]$ saamme $P(\overline{X}_{10} \leq 3) \approx 0.1773$ $\approx 17.8\%$.

(b) Asetetaan $\mu = \mathbb{E}[X] = 3.5$ ja $\sigma = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{100}} \approx 0.1708$.

Valitsemalla tutkittavaksi väliksi $(-\infty, 3]$ saamme $P(\overline{X}_{100} \leq 3) \approx 0.0017$ $= 0.17\%$.

(c) Asetetaan $\mu = \mathbb{E}[X] = 3.5$ ja $\sigma = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{200}} \approx 0.1208$.

Nyt $P(\left|\overline{X}_{200} - 3.5\right| \leq 0.25) = (3.25 \leq \overline{X}_{200} \leq 3.75)$.

Valitsemalla tutkittavaksi väliksi $[3.25, 3.75]$ saamme $(3.25 \leq \overline{X}_{200} \leq 3.75)$ $\approx 0.9615 = 96.15\%$.

20. Tutkitaan jokaisen pelaajan kohdalla, kuinka todennäköistä on saada heidän heittämänsä keskiarvo tai sitä pienempi keskiarvo.

    Pelaaja 1: Asetetaan $\mu = \mathbb{E}[X] = 3.5$ ja $\sigma = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{20}} \approx 0.3819$. Valitsemalla tutkittavaksi väliksi $(-\infty, 2.6]$ saamme $P(\overline{X}_{20} \leq 2.6) \approx 0.0092 = 0.92\%$

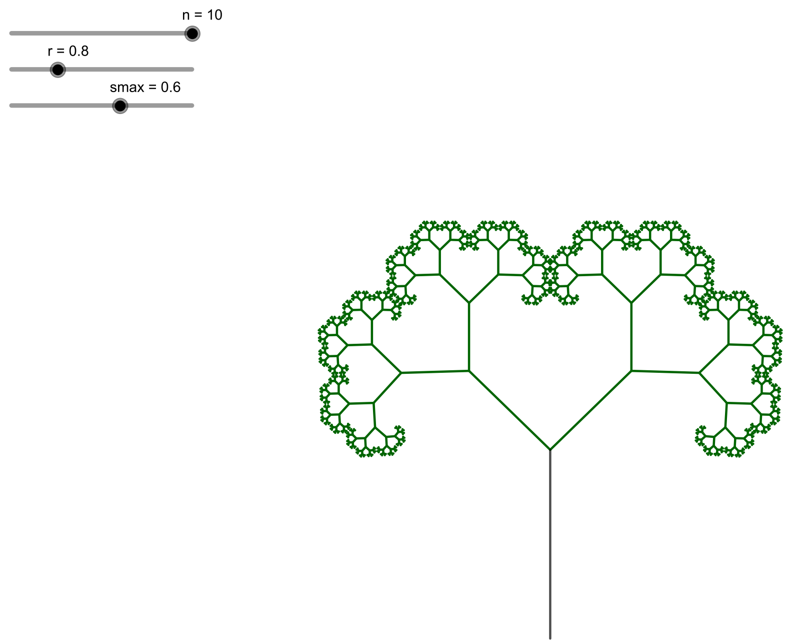
    Pelaaja 2: Asetetaan $\mu = \mathbb{E}[X] = 3.5$ ja $\sigma = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{20}} \approx 0.2415$. Valitsemalla tutkittavaksi väliksi $(-\infty, 2.9]$ saamme $P(\overline{X}_{50} \leq 2.9) \approx 0.0065 = 0.65\%$

    Pelaaja 3: Asetetaan $\mu = \mathbb{E}[X] = 3.5$ ja $\sigma = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{2000}} \approx 0.0382$. Valitsemalla tutkittavaksi väliksi $(-\infty, 3.2]$ saamme niin pienen luvun, että GeoGebra pyöristää sen nollaksi. Tarkemmin $P(\overline{X}_{2000} \leq 3.2) \approx 2 \cdot 10^{-15}$

    Pelaajista pelaaja 3 on selvästi epäilyttävin.

21. -

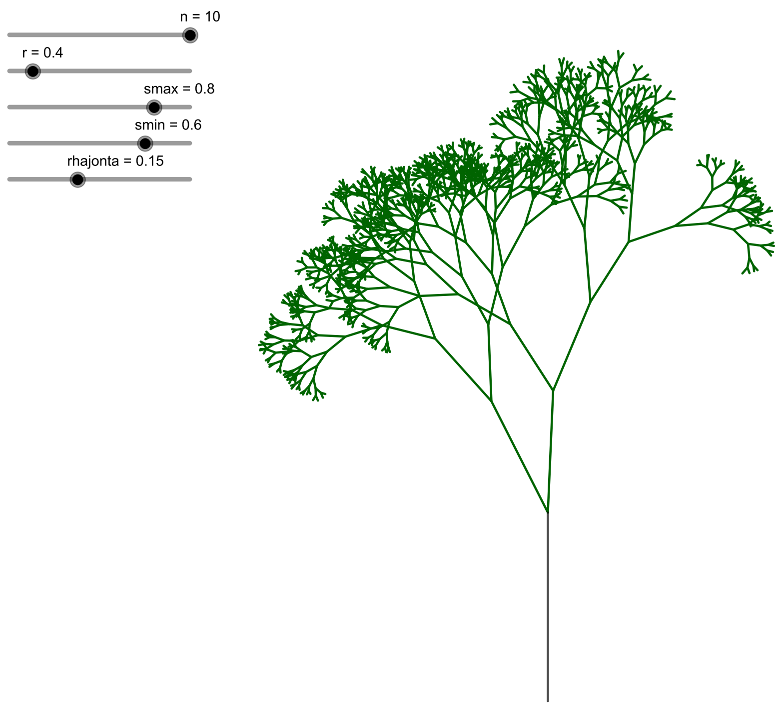
22. Kuvakaappaus GeoGebran piirtoalueesta komentojen ajamisen jälkeen.




23. Muuttuja `r` määrittää piirrettävän janan ja sitä edeltävän janan välisen kulman (tarkemmin kyseisen kulman vieruskulma radiaaineina). Muuttuja `smax` määrittää sen, kuinka monta prosenttia piirrettävä jana on edeltävän janan pituudesta. Muuttuja `n` määrittää sen, kuinka monta kertaa uusien janojen piirtäminen suoritetaan.

24. Puu ei näytä luonnolliselta, sillä puu on täysin symmetrinen. Se näyttää ”liian täydellisesti kasvaneelta”.

25. Kuvakaappaus GeoGebran piirtoalueesta komentojen ajamisen jälkeen.




26. Muuttuja `n` määrittää sen, kuinka monta kertaa uusien janojen piirtäminen suoritetaan. Piirrettävän janan ja edeltävän janan välinen kulma (tarkemmin sen vieruskulma radiaaineina) arvotaan jakaumasta $N$(`r`, `rhajonta`). Muuttuja `r` on kulman odotusarvo ja `rhajonta` on sen keskihajonta. Tasajakaumasta $U$(`smin`,`smax`) arvottu luku määrittää, kuinka monta prosenttia piirrettävä jana on edeltävän janan pituudesta. Muuttuja `smin` on pienin mahdollinen ja `smax` suurin mahdollinen prosenttikerroin.

27. Esimerkiksi arvot `n = 10`, `r = 0.4`, `smin = 0.6`, `smax = 0.8`, `rhajonta = 0.15` tuottavat melko luonnollisen näköisiä puita.