Jana-aritmetiikka geometrisesti

Juuso Hassi

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2021

Tiivistelmä: J. Hassi, *Jana-aritmetiikka geometrisesti* (engl. *Geometric approach to segment arithmetic*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 37 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2021.

Tämän tutkielman tarkoituksena on esittää vaihtoehtoinen tapa määritellä jana-aritmetiikka. Yleisesti jana-aritmetiikkaa määriteltäessä on totuttu antamaan janalle pituus, joka usein kiinnitetään reaalilukuihin. Tällä tavalla saadaan reaalilukujen algebrallisten ominaisuuksien avulla rakennettua jana-aritmetiikka, mutta tässä tutkielmassa lähdetäänkin lähestymään janoja täysin geometrian näkökulmasta. Geometria on yksi matematiikan vanhimmista osa-alueista ja jo noin 300 vuotta ennen ajanlaskun alkua Eukleides Aleksandrialainen julkaisi merkittävän teoksen *Alkeet.* Kirja on yksi kaikkien aikojen menestyneimmistä teoksista ja sitä käytettiin geometrian oppikirjana yli 2000 vuotta.

Geometrian pohjalle tarvitaan perusoletuksia eli aksioomia, joihin pohjautuen voidaan todistaa tuloksia suoraviivaisesti ja täsmällisesti. Tämän tutkielman päälähteenä on käytetty amerikkalaisen matemaatikon Robin Hartshornen teosta *Geometry: Euclid and Beyond.* Teoksen aksioomat tulevat saksalaisen matemaatikon David Hilbertin esittelemästä aksioomajärjestelmästä tasogeometrialle, jossa hän täydensi Eukleideen aiempia aksioomia.

Tutkielman alussa määritellään yhteen- ja kertolaskutoimitukset janoille geometrisesti ja näiden ominaisuudet todistetaan aksioomien avulla. Kertolaskun ominaisuuksien perusteluissa käytetään apuna myös syklisiä nelikulmioita, jotka ovat neljän pisteen joukkoja saman ympyrän kehältä. Nelikulmiot muodostuvat näiden pisteiden välisistä janoista, jotka eivät leikkaa toisiaan. Laskutoimitusten määrittelyn jälkeen siirrytään yhdenmuotoisiin kolmioihin, joissa vertaillaan kolmioiden kulmia ja sivujen suhteita. Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla voidaan todistaa merkittäviä lauseita, kuten Pythagoraan lause.

Lopuksi ympyrä sulkeutuu osoittamalla, että geometristen ominaisuuksien pohjalta jana-aritmetiikka toimii samalla tavalla kuin koulumatematiikassa karteesiseen koordinaatistoon ja reaalilukuihin pohjautuva tapa. On siis yhtäpitävää käyttää molempia geometrian lähestymistapoja, mutta geometrisen mallin vahvuus piilee siinä, että se ei ole sidottu mihinkään tiettyyn lukujärjestelmään. Näiden mallien yhtäläisyys todistetaan tutkielmassa tekemällä kuvaus geometriselta tasolta karteesiselle koordinaatistolle ja osoittamalla, että tämä kuvaus on isomorfinen.

Sisältö

Johdanto

Kirjoitelmassa määritellään jana-aritmetiikka eli janojen laskutoimitukset geometrisesta lähtökohdasta ja päädytään osoittamaan, että sama jana-aritmetiikka pätee myös algebrallisten ominaisuuksien pohjalta luodussa geometriassa, joka on tunnetumpi tapa koulumatematiikassa. Lukijalla on hyvä olla tietämystä euklidisen tasogeometrian käsitteistä ja tuntea sen perustuloksia.

Jo noin 300 vuotta ennen ajanlaskun alkua kreikkalainen matemaatikko Eukleides Aleksandrialainen kokosi kreikkalaisen geometrian perusteet kirjaansa *Alkeet* (kreikaksi *Stoikheia*, latinaksi *Elementa*). Tämä kirja on sekä kaikkien aikojen menestynein matematiikan oppikirja että myös yksi kaikkien aikojen menestyneimmistä teoksista. Kirjan oletetaan säilyneen muita teoksia paremmin, koska se oli siihen aikaan yksinkertaisesti niin paljon vastaavia kirjoja parempi [**3**, $s.155-161$]. Ennen kirjapainojen keksimistä teosten kopiointi oli työlästä, joten vain parhaimmat selvisivät. *Alkeet* koostuu 13 kirjasta, jotka käsittelevät matematiikan eri osa-alueita. Ensimmäiset kuusi liittyvät oleellisesti tämän kirjoitelman aiheeseen ja siksi olenkin käyttänyt lähteenä Pekka Aschanin suomennosta ja Lauri Kahanpään nykysuomennosta Eukleideen *Alkeiden* kuudesta ensimmäisestä kirjasta [**1**]. Eukleides kirjoitti myös noin tusinan tutkielmia monista muista tieteenaloista, mutta käytännössä hänet yhdistetään aina teokseen *Alkeet*.

Eukleideen menestysteosta lukiessa voi huomata, kuinka hän on onnistunut hämmästyttävän hyvin kehittämään teorian puhtaalle geometrialle ilman numeroita. Esimerkiksi janan pituutta ei ole määritelty teoksessa mutta siinä on kuitenkin vertailtu kappaleita samankokoisiksi eli on käytetty kappaleiden yhtenevyyksiä. Tämä on erilainen lähestymistapa verrattuna koulugeometriaan, jossa jokaisella janalla on pituus, joka perustuu sille annettuun yksikköön. Yksikkö kiinnitetään usein reaalilukuihin ja janat ovat yhteneviä, jos niillä on sama pituus. Samaan tapaan *Alkeissa* myöskään kulmia ei mitata asteilla, vaan niitä pystytään vertailemaan yhtenevyyksien avulla.

Vaikka *Alkeet* on menestynyt teos, niin silti Eukleideen todistuksista löytyy joitakin puutteita. Vasta 1800- ja 1900-lukujen vaihteessa saksalainen matemaatikko David Hilbert täydensi tätä Eukleideen geometrian pohjaa luomalla puhtaan geometrian aksioomat teoksessaan *Foundations of Geometry* [**6**] (saksaksi *Grundlagen der Geometrie*). Hilbert onnistui kokoamaan aksioomat täsmälliseksi kokonaisuudeksi ja teos vaikuttikin voimakkaasti 1900-luvun matematiikkaan. Lisää tietoa Hilbertistä ja hänen teoksistaan löytää kirjasta *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa 2* [**4**, $s.844-858$]. 1900-luvulla on tehty myös muita aksioomapohjaisia ehdotuksia geometrialle, joissa on alkuun oletettu reaalilukujen olemassaolo, kuten esimerkiksi Birkhoff [**2**, $s.329-345$]. Reaalilukujen olemassaolon olettaminen ei kuitenkaan sovi *Alkeiden* geometrian henkeen, koska reaaliluvut ovat ennemminkin hienostunut moderni tapa esittää asioita 1800-luvulta lähtien.

Eukleides oli selvästi tietoinen irrationaalisten suhteiden olemassaolosta, mutta hänen teoksistaan ei löydy väitteitä reaalilukujen täydellisyydestä. Hän on käsitellyt irrationaalisia suhteita teoksen *Alkeet* kymmenennessä kirjassa. Eukleides onnistui kehittämään hänen neljän ensimmäisen kirjansa sisällön ilman mainintaa suureiden suhteista. On siis täysin eri asia puhua, miten koulumatematiikassa opetetaan yhdenmuotoisia kolmioita. Ongelmat syntyvät, kun kolmioiden sivut eivät ole yhteneviä vaan kolmiot ovat samassa suhteessa toisiinsa ja tämän takia ne ovat yhdenmuotoisia. Toisin sanottuna kolmiot saadaan yhteneviksi, kun venytetään tai kutistetaan kolmioita niiden säilyttäessä alkuperäiset sivujen suhteensa. Jos suhde on 2, niin ei ole vaikeaa kehittää sääntöä, jossa toinen kolmio on kaksinkertainen toiseen nähden. Pienellä lisävaivalla sääntöä voitaisiin kehittää koskemaan jokaista kolmiota, jonka sivut saadaan jollakin kokonaisluvulla kerrottuna toisesta kolmiosta. Mutta jos suhde ei olekaan rationaalinen, on vaikea ilmaista sivujen suhteet ilman numeroita. Tässä tapauksessa voitaisiin sanoa, että sivujen pituuksien suhde on sama, mutta on ongelmallista, jos sivulla ei ole pituutta numeerisesti eikä sitä voi jakaa toisella numerolla.

Edellinen ongelma ratkaistaan teoksen *Alkeet* viidennessä kirjassa, joka käsittelee suhteiden teoriaa. Kirjan avain yhdenmuotoisuuden ongelmaan saadaan sen viidennestä määritelmästä, joka sanoo että suureet a, b ja c, d ovat samassa suhteessa, jos suureita $a, c \in \mathbb{Z}$ kerrotaan millä tahansa luvulla $n \in \mathbb{N}$ ja suureita $b, d \in \mathbb{Z}$ kerrotaan millä tahansa luvulla $m \in \mathbb{N}$, niin silloin

$$\begin{gathered} na > mb \text{ jos ja vain jos } nc > md, \\ na = mb \text{ jos ja vain jos } nc = md, \text{ ja} \\ na < mb \text{ jos ja vain jos } nc < md. \end{gathered}$$

Jos a, b, c, d ovat lukuja, niin on yhtäpitävää sanoa, että rationaaliluku $\frac{m}{n}$ on pienempi tai yhtä suuri tai suurempi kuin $\frac{a}{b}$, jos ja vain jos sama rationaaliluku on pienempi tai yhtä suuri tai suurempi kuin $\frac{c}{d}$. Jos a, b, c, d ovat reaalilukuja niin voitaisiin sanoa, että $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, koska rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa. Itse asiassa saksalainen matemaatikko Richard Dedekind käytti tätä määritelmää lähes sanatarkasti omassa työssään, kun hän rakensi pohjaa reaaliluvuille niin sanotuissa Dedekindin leikkauksissa.

Voisi siis sanoa, että Eukleides tiesi reaaliluvuista ja kirjoitti niiden määritelmän jo 2000 vuotta ennen Dedekindiä, mutta aivan näin ei ollut. Eukleides käytti määritelmäänsä vain selittääkseen suhteita, jotka ilmenevät luonnostaan hänen geometriassaan, koska joidenkin janojen suhde harppi-viivain konstruoinnissa saattaa olla irrationaalinen. Eukleideen teoksessa ei kuitekaan ole todisteita siitä, että hän olisi käsittänyt reaalilukujen kattavan myös muita lukuja kuten esimerkiksi Neperin luvun e. Dedekind kuitenkin käsitti leikkaustensa kokonaisuuden ja kehittikin leikkausten joukosta uuden matematiikan järjestelmän eli reaaliluvut.

On huomattava, että Eukleideen suhteiden teorialle tarvitaan pohjaksi Arkhimedeen aksioomaa. Tämän aksiooman mukaan, jos AB ja CD ovat kaksi janaa, niin on olemassa sellainen luku n, että kun asetetaan n kappaletta janoja CD puolisuoralle $\overrightarrow{AB}$ siten, että ensimmäinen alkaa pisteestä A ja seuraava jatkuu edellisen päätepisteestä puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ mukaisesti, niin jokin näistä janoista kulkee pisteen B kautta. Aksiooma siis käytännössä sanoo, että jos on kaksi janaa, niin janojen pituuksia pystytään vertailemaan janojen monikertojen avulla. Ilman Arkhimedeen aksioomaa kaikki janat eivät välttämättä olisi vertailtavissa eikä myöskään voitaisi verrata kappaleita, jotka eivät ole yhtä suuria.

Kehitettyään suhteiden teorian viidennessä kirjassaan Eukleides jatkaa sen soveltamista seuraavassa kirjassa, joka käsittelee geometriaa. Tässä kuudennessa kirjassa hän luo pohjan yhdenmuotoisille kolmioille. Kirjan toinen määritelmä muodostaa perustan myöhemmälle kehitykselle. Määritelmässä sanotaan, että jos kolmion pohjan kanssa yhdensuuntainen suora leikkaa kolmion toiset sivut, niin se leikkaa ne samassa suhteessa ja päinvastoin. Eukleideen todistus on taidonnäyte, joka käyttää aikaisemmin ensimmäisessä kirjassa kehitettyä pinta-alan teoriaa tämän tuloksen vahvistamiseksi.

On kaksi syytä, miksi etsitään vaihtoehtoisia tapoja kehittää yhdenmuotoisten kolmioiden teoriaa. Ensimmäinen on, että voidaan vapautua Arkhimedeen aksioomasta ja toinen on välttää Eukleideen tapaa käyttää apuna pinta-alan käsitettä. Tutkielman ensimmäisessä luvussa annettujen aksioomien ja muiden esitietojen jälkeen janoille määritellään yhteen- ja kertolasku, jotka määrittävät jana-aritmetiikan kunnan. Kertolaskun määritelmää varten tarvitaan avuksi syklisen nelikulmion ominaisuuksia, jotka esitellään kappaleessa 1.3.

Ensimmäisen luvun jana-aritmetiikan pohjalta tutkielman toisessa luvussa voidaan kehittää teoriaa yhdenmuotoisille kolmioille, jotka ovat keskeisessä roolissa tulevissa todistuksissa. Aluksi osoitetaan monia ominaisuuksia, joiden mukaan määräytyy kolmioiden yhdenmuotoisuus. Esimerkiksi johdannossa aiemmin esille tullut ongelmatapaus, jossa kolmioiden sivut ovat samassa suhteessa, todistetaan heti luvun alkupuolella. Yhdenmuotoisten kolmioiden ja jana-aritmetiikan avulla luvussa todistetaan myös merkittäviä lauseita kuten Pythagoraan, Cevan ja Desargues'n lauseet.

Viimeisesessä luvussa määritellään ensin karteesinen koordinaatisto jana-aritmetiikan avulla. Tämän jälkeen luvussa osoitetaan, että tutkielman alussa esitellyt tasogeometrian aksioomat pätevät tässä koordinaattigeometriassa. Nyt siis ilman reaalilukuja luotu pohja toimii samoin, kuin koulumatematiikasta tuttu karteesinen koordinaatisto. Aksioomat käydään läpi samassa järjestyksessä, missä ne on esitetty tutkielman alussa. Lopuksi osoitetaan vielä, että nämä kaksi geometrian esitystapaa käyttäytyvät samoin eli ovat keskenään isomorfiset.

LUKU 1

Jana-aritmetiikka

Jana-aritmetiikan avulla saadaan ketju loogisia yhteyksiä Hilbertin aksiomaattisen geometrian ja karteesisen tason välille. Tämän jana-aritmetiikan hyöty tulee siitä, että tällä tavalla ei olla sidoksissa reaalilukuihin, joka on modernimpi esitystapa puhtaaseen geometriaan verrattuna. Aloitetaan määrittelemällä janoille yhteen- ja kertolaskutoimitukset niiden yhtenevyyden avulla. Toisin sanottuna operaatiot $+$ ja $\cdot$ määritellään pohjautuen janojen ekvivalenssiluokkiin. Osoitetaan, että nämä operaatiot noudattavat kaikkia aritmetiikan perussääntöjä positiivisille luvuille. Kun lisätään mukaan nollaluokka ja negatiiviset luokat, niin ekvivalenssiluokista saadaan muodostettua kunta.

Kun käytetään tätä kuntaa perustana, voidaan määritellä janojen ekvivalenssiluokat tarkoittamaan niiden pituuksia ja päästään kirjoitelman seuraavassa kappaleessa kehittämään teoriaa yhdenmuotoisille kolmioille, joiden vastinsivujen osamäärä on vakio tässä kunnassa. Siten saadaan korvattua Eukleideen suhteiden teoria, kuten se on kehitetty *Alkeiden* kirjassa viisi, käyttämällä algebrallisia suhteita jana-aritmetiikassa $[\mathbf{5}, s.165 - 168]$.

Ennen kuin päästään määrittelemään jana-aritmetiikan laskutoimitukset, tarvitaan pohjalle aksioomia ja muita tärkeitä lauseita.

1.1. Aksioomat ja muut esitiedot

Pisteen ja suoran käsitteet ovat peruskäsitteinä aksioomien pohjalla. Seuraavat aksioomat mukailevat Hartshornen kirjassa esitettyjä aksioomia $[\mathbf{5}, s.66 - 96]$ mutta niitä muotoillessa on käytetty alkuperäisiä Hilbertin aksioomia $[\mathbf{6}, s.2 - 18]$. Kolmea ensimmäistä Hilbertin aksioomaa kutsutaan insidenssiaksioomiksi eli ne liittyvät pisteiden ja suorien olemassaoloon (*Axioms of Incidence*).

I1. Mitkä tahansa kaksi pistettä virittävät yksikäsitteisen suoran.
I2. Jokaisella suoralla on vähintään kaksi pistettä.
I3. On olemassa kolme pistettä, jotka kaikki eivät ole samalla suoralla.

Jos pisteet ja suorat toteuttavat nämä kolme aksioomaa niin silloin voidaan puhua insidenssigeometriasta.

Neljä seuraavaa aksioomaa ovat nimeltään järjestysaksioomia (*Axioms of Betweenness*).

B1. Jos piste B on pisteiden A ja C välissä, niin pisteet A, B, C ovat kolme eri pistettä samalla suoralla ja ne merkitään seuraavasti: $A * B * C$. Tällöin myös $C * B * A$ pätee.
B2. Minkä tahansa kahden eri pisteen A, B virittämältä suoralta AB löytyy piste C

siten, että $A * B * C$.
B3. Jos on annettu kolme eri pistettä samalta suoralta, niin ainoastaan yksi voi olla kahden muun välissä
B4. **Paschin aksiooma**. Olkoon A, B, C kolme eri pistettä, jotka kaikki eivät ole samalla suoralla, ja olkoon suora l siten, että se ei kulje kyseisten pisteiden kautta. Jos suora l sisältää pisteen D siten, että $A * D * B$, niin tällöin sen täytyy sisältää myös piste E siten, että $A*E*C$ tai $B*E*C$, mutta ei kuitenkaan molempia. Toisin sanoen, jos suora l leikkaa janan AB, niin tällöin sen täytyy leikata jana AC tai jana BC, mutta ei molempia.

Viimeisiä aksioomia ennen määritellään selvennykseksi, mitä janat, puolisuorat ja kulmat ovat.

Määritelmä 1.1. Olkoon pisteet A ja B suoralla l ja piste C suoralla l', joka leikkaa suoraa l ainoastaan pisteessä A. Tällöin jana AB on suoran l osajoukko, johon sisältyy päätepisteet A ja B sekä kaikki suoran l pisteet näiden kahden väliltä. Puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on suoran l osajoukko, johon sisältyy pisteet A ja B sekä kaikki suoran l pisteet C, joille pätee $A*C*B$ tai $A*B*C$. Kulma $\angle BAC$ on suorien l ja l' väliin jäävän tason osa siten, että jana AB on kulman oikealla sivulla ja jana AC on kulman vasemmalla sivulla.

Kuusi viimeistä Hilbertin aksioomaa ovat nimeltään yhtenevyysaksioomat (*Axioms of Congruence*). Kolme ensimmäistä liittyy janojen yhtenevyyteen ja kolme jälkimmäistä kulmien yhtenevyyteen.

C1. Jos on annettu jana AB ja puolisuora $\overrightarrow{r}$, joka lähtee pisteestä C, niin on olemassa yksikäsitteinen piste D puolisuoralla $\overrightarrow{r}$ siten, että $AB \cong CD$.
C2. Jos $AB \cong CD$ ja $AB \cong EF$ niin $CD \cong EF$. Kaikki janat ovat yhteneviä itsensä kanssa.
C3. **Janojen yhteenlasku**. Olkoon pisteet A, B, C suoralta siten, että $A * B * C$ ja kolme muuta pistettä D, E, F siten, että $D * E * F$. Jos $AB \cong DE$ ja $BC \cong EF$ niin tällöin $AC \cong DF$
C4. Olkoon kulma $\angle BAC$ ja puolisuora $\overrightarrow{DF}$. On olemassa yksikäsitteinen puolisuora $\overrightarrow{DE}$ annetulle puolelle puolisuoraa $\overrightarrow{DF}$ siten, että $\angle BAC \cong \angle EDF$.
C5. Olkoon α, β, γ kulmia. Jos $\alpha \cong \beta$ ja $\alpha \cong \gamma$ niin $\beta \cong \gamma$. Kaikki kulmat ovat yhteneviä itsensä kanssa.
C6. **SKS = sivu-kulma-sivu**. Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita. Jos $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ ja $\angle BAC \cong \angle EDF$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä keskenään. Tällöin siis erityisesti $BC \cong EF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ ja $\angle ACB \cong \angle DFE$.

Huomataan, että aksioomista (C2) ja (C5) seuraa, että janojen ja kulmien yhtenevyydet ovat ekvivalenssirelaatioita. Ekvivalenssirelaation ominaisuuksia ovat refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus, jotka kaikki seuraavat lähes suoraan aksioomista (C2) ja (C5). Jos janat tai kulmat ovat yhtenevät, niin ne kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan. Määritellään ekvivalenssiluokka ja tehdään sille oma merkintä, jotta sen erottaa helposti.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Ekvivalenssiluokka on ekvivalenssirelaation $\sim$ määrittelyjoukon A osajoukko, johon kuuluvat kaikki keskenään ekvivalentit alkiot. Merkitään ekvivalenssiluokkaa $[a] = \{x \in A | x \sim a\}$, kun $a \in A$.

Jatkossa tutkielmassa puhutaan janojen ja kulmien yhtenevyydestä myös yhtäsuurutena ja merkitään esimerkiksi $\angle BAC = \angle EDF$. Tämä johtuu siitä, että karteesisessa koordinaatistossa esimerkiksi yhtenevät janat voitaisiin todeta yhtä pitkiksi etäisyyden avulla, mutta geometristen ominaisuuksien pohjalta janat voidaan todeta vain yhteneviksi eli ne kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan.

SKS-säännön avulla saadaan todistettua myös muita samankaltaisia hyödyllisiä lauseita kuten KSK-sääntö (kulma-sivu-kulma). Aksioomalistaa täydentämään tarvitaan vielä paralleeliaksiooma, jonka seurauksena saadaan monia tarpeellisia tuloksia. Kyseisen aksiooman ansiosta tiedetään esimerkiksi, että kolmion kulmien summa on yhteensä kaksi suoraa kulmaa. Yhdensuuntaisuusaksiooma eli Eukleideen viides postulaatti löytyy teoksesta *Alkeet: Kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometria*, mutta tässä tutkielmassa se muotoillaan eri tavalla [**1**, s.33]. Geometriaa, joka toteuttaa edeltävät aksioomat sekä paralleeliaksiooman tässä muodossaan, kutsutaan euklidiseksi tasogeometriaksi.

PA (eli paralleeliaksiooma). Olkoon suora l ja piste P, joka ei ole kyseisellä suoralla. Tällöin pisteen P kautta kulkee täsmälleen yksi suora l', joka on suoran l kanssa yhdensuuntainen. Tämä tarkoittaa sitä, että suorat l ja l' eivät leikkaa eli niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Yhdensuuntaisuutta merkitään $l \parallel l'$.

Tulevissa todistuksissa tarvitaan monia geometriasta tuttuja lauseita, jotka esitellään aksioomien tapaan pohjatiedoksi lukijalle. Niiden avulla voidaan perustella tuloksia täsmällisesti. Seuraavat lauseet löytyvät kirjasta *Alkeet: Kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometria* ja niiden tarkemmat viittaukset ovat lauseiden lopussa.

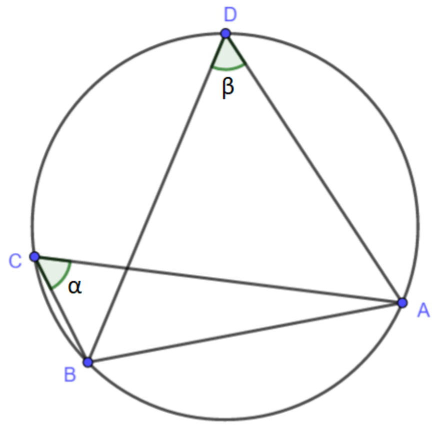
LAUSE 1.3. *(Kehäkulmalause) Olkoon pisteet A ja B ympyrän jänteen päätepisteet (Kuva 1.1). Jos pisteet C ja B ovat ympyrän kehällä samalla puolella suoraa AB, niin tällöin kulmat $\angle BCA = \alpha$ ja $\angle BDA = \beta$ ovat yhtä suuret. Tästä erikoistapauksena saadaan Thaleen lause, jossa pisteet B ja C ovat halkaisijan päätepisteet. Kehäkulmalause löytyy lähdekirjasta hieman eri muodossa* [**1**, s.105 − 106].

LAUSE 1.4. *(Vuorokulmalause) Olkoon suorat s ja t ja kulmat $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ja ϵ kuten kuvassa 1.2. Jos $\alpha = \delta$, niin $s \parallel t$. Tällöin vieruskulmalauseen mukaan α ja ϵ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa ja ristikulmalauseen mukaan $\delta = \beta$ ja $\epsilon = \gamma$* [**1**, s.42].

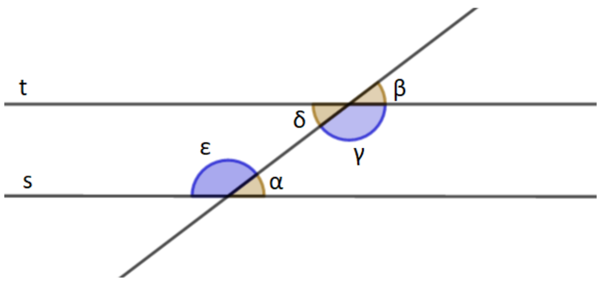
LAUSE 1.5. (*Käänteinen vuorokulmalause*) *Olkoon suorat s ja t ja kulmat $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ja ϵ kuten kuvassa 1.2. Jos $s \parallel t$, niin $\alpha = \beta, \alpha = \delta, \gamma = \epsilon$ ja α ja ϵ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa* [**1**, s.43 − 44].

LAUSE 1.6. *Ulkokulmaepäyhtälö. Kolmion $\triangle ABC$ ulkokulma pisteessä B on suurempi kuin kumpikaan sisäkulmista $\angle A$ ja $\angle C$ (Kuva 1.3)* [**1**, s.31 − 32].

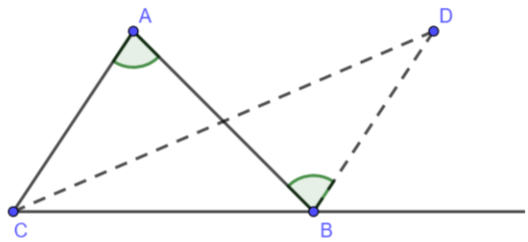
Määritellään seuraavaksi näiden aksioomien ja lauseiden pohjalta aritmeettiset operaatiot yhtenevien janojen ekvivalenssiluokille Hilbertin tapaan, mutta käyttäen



Kuva 1.1. Kehäkulmalause



Kuva 1.2. Vuorokulmalause



Kuva 1.3. Ulkokulmaepäyhtälö

yksinkertaistuksia, jotka ovat ilmeisesti peräisin italialaiselta matemaatikolta Federigo Enriquesilta. Määritelmät tehdään Hilbertin tasolla, joka toteuttaa paralleeliaksiooman [**5**, $s.165 - 168$]. Hilbertin tasolla tarkoitetaan pisteiden ja suorien joukkoa, jotka toteuttavat insidenssi-, välissäolo- ja yhtenevyysaksioomat. Hilbertin taso on tarkemmin määritelty kirjoitelman päälähteessä [**5**, $s.96 - 103$].

Kuva 1.4. Janojen yhteenlasku.

1.2. Janojen yhteenlasku

Lähdetään liikkeelle määrittelemällä janojen yhteenlasku. Ekvivalenssiluokan määrittelystä on syytä muistaa, että kun $a = AB$ on jana, niin

$$[a] = \{CD : AB \cong CD\}.$$

Janojen yhteenlaskun määritelmä perustuu Hartshornen kirjaan [$\mathbf{5}, s.168 - 169$].

Määritelmä 1.7. Määritellään summa janojen ekvivalenssiluokille $[a]$ ja $[b]$. Valitaan pisteet A, B siten, että $[a] = [AB]$ (Kuva 1.4). Sitten suoralta AB valitaan aksioomien (B2) ja (C1) mukaan piste C siten, että $A * B * C$ ja $[b] = [BC]$. Tällöin voidaan määritellä, että $[a] + [b] = [AC]$.

Lause 1.8. *Millä tahansa Hilbertin tasolla janojen yhteenlaskulla on seuraavat ominaisuudet:*

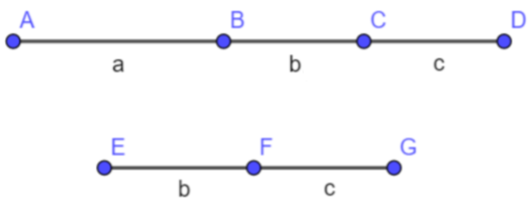
(1) $[a]+[b]$ *on hyvin määritelty. Toisin sanoen, valitaan pisteet* A, B, C *miten tahansa määritelmän mukaan, niin tuloksena on yhtenevät janat.*
(2) $[a] + [b] = [b] + [a]$. *Janojen summa on siis vaihdannainen.*
(3) $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$.
(4) *Mitkä tahansa kaksi ekvivalenssiluokkaa* $[a]$, $[b]$ *toteuttavat täsmälleen yhden seuraavista:*
 (i) $[a] = [b]$.
 (ii) *On olemassa luokka* $[c]$ *siten, että* $[a] + [c] = [b]$.
 (iii) *On olemassa luokka* $[d]$ *siten, että* $[a] = [b] + [d]$

Todistus. Olkoon $[a] = [AB]$ ja $[b] = [BC]$, missä $A*B*C$. Tämä oletus koskee todistuksen kohtia (1) - (3).

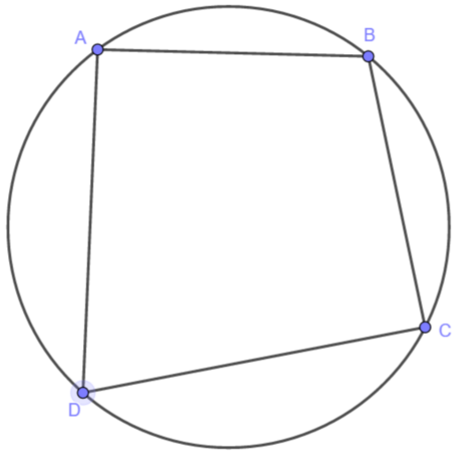
(1) Valitaan eri pisteet A' ja B' siten, että $[a] = [A'B']$, ja piste C' siten, että se on suoralla $A'B'$ ja $[b] = [B'C']$. Tällöin $[AC] = [A'C']$ aksiooman (C3) mukaan.

(2) Olkoon $[a] = [AB]$ ja valitaan piste C siten, että $A * B * C$ ja $[b] = [BC]$, jolloin $[a] + [b] = [AC]$. Nyt valitaan $[b] = [DE]$ ja piste F suoralta DE siten, että $D * E * F$ ja $[a] = [EF]$. Tällöin $[b] + [a] = [DF]$. Huomataan, että $[AB] = [FE]$, $[BC] = [ED]$ ja $F * E * D$, joten $[AC] = [FD]$ aksiooman (C3) mukaan. Tällöin siis $[a] + [b] = [b] + [a]$.

(3) Jotta saadaan $([a]+[b])+[c]$, niin valitaan $[a] = [AB]$ ja sitten valitaan suoralta AB piste C siten, että $A * B * C$ ja $[b] = [BC]$ (Kuva 1.5). Valitaan vielä piste D samalta suoralta siten, että $A*C*D$ ja $[c] = [CD]$. Tällöin saadaan jana AD esitettyä muodossa $([a] + [b]) + [c]$. Toisaalta, jos valitaan $[b] = [EF]$ ja piste G suoralta EF siten, että $E * F * G$, niin tällöin $[b] + [c] = [EG]$. Jotta saadaan $[a] + ([b] + [c])$ niin



KUVA 1.5.



KUVA 1.6. Syklinen nelikulmio

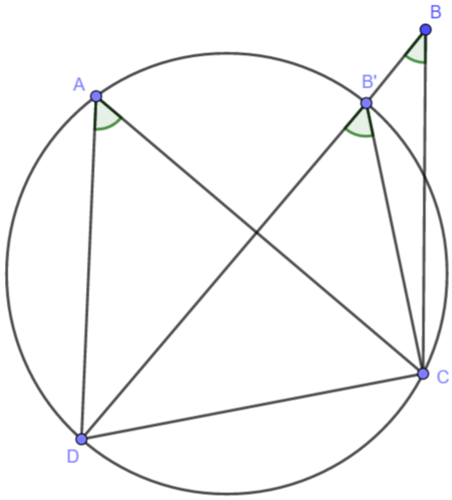
valitaan piste H siten, että $A*B*H$ ja $[BH] = [EG]$. Mutta $[BD] = [EG]$ aksiooman (C3) mukaan, joten $H = D$ janan yksikäsitteisyysaksiooman (C1) takia. Tällöin siis $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$.

(4) Jos annetaan kaksi janaa a, b, niin laitetaan ne samalle puolisuoralle alkamaan samasta pisteestä A. Tällöin ne määräävät pisteet B, C siten, että $[a] = [AB]$ ja $[b] = [AC]$. Nyt jos $B = C$, niin $[a] = [b]$. Jos $B \neq C$, niin olkoon $[c] = [BC]$. Jos $A * B * C$, niin $[a] + [c] = [b]$. Jos taas $A * C * B$, niin $[a] = [b] + [c]$. Aksiooman (B3) mukaan nämä ovat ainoat mahdollisuudet ja tasan yksi näistä on voimassa, mikä todistaa kohdan (4). $\square$

1.3. Syklinen nelikulmio

Janojen kertolaskua ennen täytyy ymmärtää mitä sykliset nelikulmiot ovat. Näitä kuvioita käytetään apuna määriteltäessä janojen tuloa. Syklisten nelikulmioiden määritelmä löytyy teoksen *Geometry: Euclid and Beyond* viidennestä kappaleesta [**5**, *s*.55].

MÄÄRITELMÄ 1.9. Syklinen nelikulmio on neljän pisteen A, B, C, D joukko, jotka ovat kaikki saman ympyrän kehällä siten, että janat AB, BC, CD, DA yhdistävät niitä (Kuva 1.6). Janojen tulee toteuttaa myös yleisen nelikulmion määritelmä eli nelikulmion vastakkaiset sivut eivät saa leikata. Janat AC ja BD ovat syklisen nelikulmion lävistäjiä.



KUVA 1.7.

Syklisen nelikulmion hyöty saadaan siihen muodostuvien eri kulmien suuruuksista, jotka saadaan pisteiden A, B, C, D ominaisuuksista ympyrän kehällä.

LAUSE 1.10. *Olkoon neljä pistettä A, B, C, D siten, että A ja B ovat samalla puolella suoraa CD. Tällöin pisteet A, B, C, D ovat samalla ympyrän kehällä, jos ja vain jos kulmat $\angle DAC$ ja $\angle DBC$ ovat yhtä suuret.*

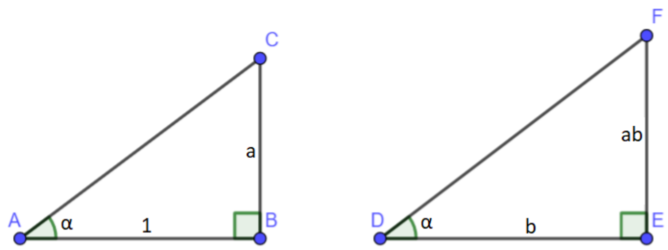
TODISTUS. Jos A, B, C, D ovat samalla ympyrän kehällä, niin kehäkulmalause 1.3 sanoo, että kulmat $\angle DAC$ ja $\angle DBC$ ovat yhtä suuret, koska ne ovat samalla puolella saman ympyrän kaarta, jonka pisteet D ja C määräävät (Kuva 1.7).

Toiseen suuntaan todistettaessa oletetaan, että kulmat kulmat $\angle DAC$ ja $\angle DBC$ ovat yhtä suuret. Nyt piirretään kolmion $\triangle ADC$ ympärille ympyrä, jonka keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä [**1**, $s.124$]. Piirretään suora DB siten, että se leikkaa ympyrän kaarta pisteessä B'. Tällöin kehäkulmalauseen nojalla kulma $\angle DB'C$ on yhtä suuri kuin kulmat $\angle DAC$ ja $\angle DBC$. Jos $D * B' * B$, niin tämä on ristiriidassa ulkokulmaepäyhtälön nojalla, koska kulma $\angle DB'C$ on kolmion $\triangle BCB'$ ulkokulma ja tällöin sen tulisi olla suurempi kuin vastakkainen sisäkulma $\angle DBC$. Jos taas $D * B * B'$, niin kulma $\angle DBC$ on kolmion $\triangle BCB'$ ulkokulma ja tällöin sen tulisi olla suurempi kuin vastakkainen sisäkulma $\angle DB'C$. Täten $B = B'$ ja kaikki neljä pistettä ovat samalla ympyrällä. □

1.4. Janojen kertolasku

Nyt kun tiedetään, mitä sykliset nelikulmiot ovat, tarvitaan vakioitu yksikköjana. Valitaan yksikköjana ja merkitään sitä luvulla 1. Kuten syklisiä nelikulmioita määriteltäessä, tarvitaan paralleeliaksioomaa myös tulon määritelmän viimeisen kohdan todistamisessa. Jotta voidaan puhua yhdenmuotoisista kolmioista, täytyy kolmion kulmien summa olla sama, johon tarvitaan myös paralleeliaksioomaa [**5**, $s.170 - 173$].

MÄÄRITELMÄ 1.11. Olkoon $[a]$ ja $[b]$ janojen ekvivalenssiluokkia. Määritellään tulo $[a][b]$ seuraavasti. Ensiksi tehdään suorakulmainen kolmio $\triangle ABC$, jossa $[AB] =$



KUVA 1.8.

[1] ja $[BC] = [a]$ ja kulma $\angle CBA$ on suora kulma. Olkoon kulma $\angle BAC = \alpha$ (Kuva 1.8). Sitten tehdään toinen suorakulmainen kolmio $\triangle DEF$ siten, että $[DE] = [b]$ ja kulma $\angle EDF = \alpha$, kuten edellisessä kolmiossa $\triangle ABC$. Tällöin tulo $[a][b]$ määritellään uuden kolmion sivua EF vastaavaksi luokaksi $[EF]$.

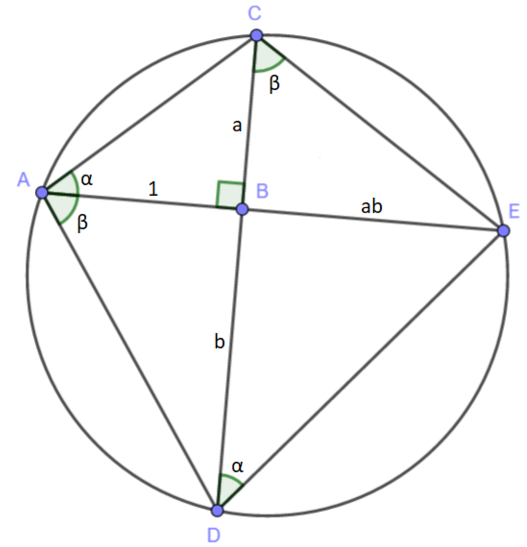
LAUSE 1.12. *Millä tahansa Hilbertin tasolla, joka toteuttaa paralleeliaksiooman, janojen kertolaskulla on seuraavat ominaisuudet:*
(1) $[a][b]$ *on hyvin määritelty.*
(2) $[a] \cdot [1] = [a]$ *kaikilla* $[a]$.
(3) $[a][b] = [b][a]$ *kaikilla* $[a], [b]$.
(4) $[a]([b][c]) = ([a][b])[c]$ *kaikilla* $[a], [b], [c]$.
(5) *Mille tahansa luokalle* $[a]$ *on yksikäsitteinen* $[b]$ *siten, että* $[a][b] = [1]$.
(6) $[a]([b] + [c]) = [a][b] + [a][c]$ *kaikilla* $[a], [b], [c]$.

TODISTUS. (1) Tulo on hyvin määritelty. Jos $\triangle A'B'C'$ on toinen suorakulmainen kolmio, jolla on sivut a ja 1, niin silloin se on yhtenevä kolmion $\triangle ABC$ kanssa aksiooman (C6) mukaan. Siten saadaan myös yhtenevä kulma α. Jos kolmio $\triangle D'E'F'$ on toinen suorakulmainen kolmio, jolla on kulma α ja sivu b, niin se on yhtenevä kolmion $\triangle DEF$ kanssa KSK-säännön perusteella. Tällöin erityisesti sivu $E'F'$ on yhtenevä sivun EF kanssa, joten $[EF] = [E'F']$.

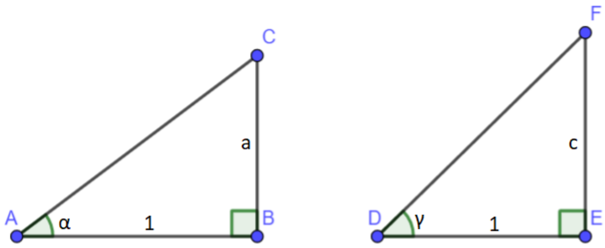
(2) Lasketaan $[a] \cdot [1]$ käyttämällä kolmiota $\triangle DEF$, jossa $[b] = [1]$ ja kulma $\angle EDF = \alpha$. Tällöin $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ KSK-säännön mukaan, joten $[a] \cdot [1] = [a]$.

(3) Lähdetään liikkeelle janoilla a, b. Ensiksi tehdään suorakulmainen kolmio $\triangle ABC$, jolla on sivut 1 ja a (Kuva 1.9). Sivut ja suora kulma määräävät kolmiolle kulman $\alpha = \angle BAC$. Jatketaan sivua BC suoran AB toiselle puolelle pisteeseen D asti siten, että $[BD] = [b]$. Nyt pisteeseen D voidaan tehdä kulman α suuruinen kulma aksiooman (C4) mukaan siten, että kulma on toisella puolella suoraa CD kuin piste A. Kulman sivu jatkuu, kunnes se leikkaa suoran AB jatkeen pisteessä E. Tällöin kolmio $\triangle DBE$ on suorakulmainen ja sillä on sivu b ja kulma α, joten $[BE] = [a][b]$ määritelmän mukaan.

Nyt voidaan käyttää lausetta 1.9 hyväksi näihin neljään pisteeseen A, C, E, D. Koska kulmat $\angle EAC$ ja $\angle EDC$ ovat yhtenevät, niin lause 1.9 sanoo, että pisteet A, C, E, D ovat samalla ympyrän kehällä ja muodostavat täten syklisen nelikulmion. Koska nelikulmio $\square ACED$ on syklinen nelikulmio, niin myös kulmat $\angle DAE$ ja $\angle DCE$ ovat yhtenevät ja merkitään niitä symbolilla β. Nyt tulon $[b][a]$ määrittelemiseksi sovelletaan tulon $[a][b]$ tapausta, mutta lähdetäänkin liikkeelle suorakulmaisesta



KUVA 1.9.



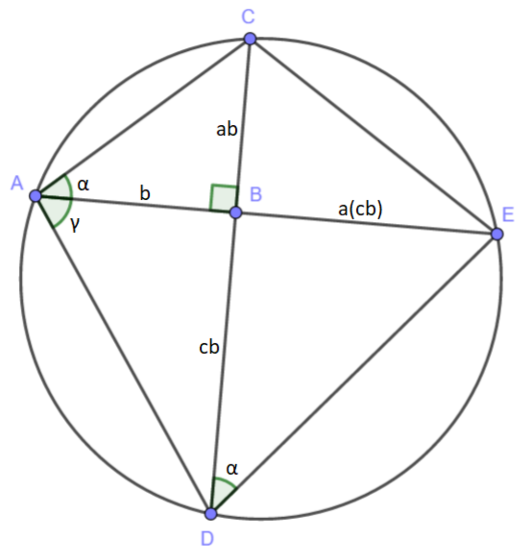
KUVA 1.10.

kolmiosta $\triangle ABD$, jolla on kulma β ja sivut $1, b$. Tällöin, kun muodostetaan suorakulmainen kolmio $\triangle CBE$, jolla on kulma β ja sivu a, niin kolmion toiseksi sivuksi BE muodostuu tulo $[b][a]$. Saadaan siis $[a][b] = [BE] = [b][a]$.

(4) Tulon liitännäisyyden osoittamiseksi muodostetaan ensin kaksi suorakulmaista kolmiota, joista toisella on sivut $1, a$ jotka muodostavat kulman α ja toisella on sivut $1, c$ jotka muodostavat kulman γ (Kuva 1.10). Tulon $[a][b]$ määrittämiseksi tehdään vielä yksi suorakulmainen kolmio $\triangle ABC$, jonka sivu b ja kulma α määrittävät toisen sivun ab.

Jatketaan sivua CB suoran AB toiselle puolelle kunnes se kohtaa suoran, joka alkaa pisteestä A kulman γ määräämästi (Kuva 1.11). Olkoon tämä leikkauspiste D, jolloin $[BD] = [c][b]$. Tehdään uusi suora pisteestä D kulman α määräämästi kohtaamaan sivun AB jatkeen pisteessä E. Tällöin $[BE] = [a]([c][b])$.

Jo kohdan (3) todistuksessa osoitettiin, että koska $\angle EAC = \alpha = \angle EDC$, niin nelikulmio $\square ACED$ on syklinen nelikulmio. Tällöin syklisen nelikulmion ominaisuuksien avulla pystyttiin päättelemään, että myös kulma $\angle BCE = \gamma$. Tämän ansiosta sivu BE voidaan esittää muodossa $[c]([a][b])$ eli saadaan $[a]([c][b]) = [BE] = [c]([a][b])$.



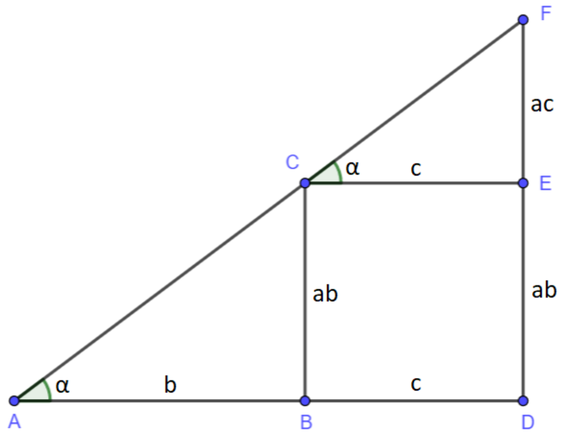
Kuva 1.11.

Nyt, kun käytetään jo aiemmin todistettua tulon vaihdannaisuutta, niin saadaan $[a]([b][c]) = ([a][b])[c]$.

(5) Tehdään suorakulmainen kolmio, jonka suoran kulman sivut ovat $1, a$. Olkoon kulma α sivun 1 toinen kulma, jolloin kolmion kolmanneksi kulmaksi määräytyy β. Sitten tehdään toinen suorakulmainen kolmio, jonka suoran kulman toinen sivu on 1. Olkoon kulma β sivun 1 toinen kulma, jolloin kolmion kolmanneksi kulmaksi määräytyy α. Olkoon suoran kulman toiseksi sivuksi määräytyvä sivu b. Nyt, kun käytetään kolmioihin kohdan (3) todistuksen päättelyä, saadaan yhtälö $[a][b] = [1]$.

(6) On annettu sivut a, b, c ja kulma α määräytyy suorakulmaisen kolmion mukaan, jonka sivut ovat $1, a$. Tehdään suorakulmainen kolmio $\triangle ABC$, jolla on sivu b ja kulma α (Kuva 1.12). Tällöin $[BC] = [a][b]$. Valitaan piste D suoralta AB siten, että $A * B * D$ ja $[BD] = [c]$. Tällöin vastaavasti suoralta AC määräytyy piste F siten, että $A * C * F$ ja pisteet A, D ja F muodostavat suorakulmaisen kolmion. Piirretään suoran AB kanssa yhdensuuntainen suora CE siten, että piste E on janalla DF. Koska $AB \parallel CE$, niin käänteisen vuorokulmalauseen 1.5 mukaan kulma $\angle ECF = \alpha$. Huomataan myös, että jos tehdään suora, joka kulkee pisteiden B ja E kautta, niin muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota $\triangle BDE$ ja $\triangle ECB$, joilla käänteisen vuorokulmalauseen 1.5 mukaan kulmat $\angle BED = \angle EBC$. Kyseisten kulmien viereinen sivu BE on sama molemmilla kolmioilla, joten SKK-säännön mukaan kolmiot $\triangle BDE$ ja $\triangle ECB$ ovat yhtenevät ja erityisesti $[CE] = [c]$. Koska alkuperäinen suorakulmainen kolmio, jolla on sivut $1, a$ on yhdenmuotoinen kolmion $\triangle CEF$ kanssa, niin tulon määritelmän mukaan $[EF] = [a][c]$.

Koska $\triangle BDE \cong \triangle ECB$, niin erityisesti $[DE] = [a][b]$. Nyt summan määritelmän mukaan $[AD] = [b] + [c]$ ja $[DF] = [a][b] + [a][c]$. Toisaalta kolmiolla $\triangle AFD$ on sivu $[b] + [c]$ ja kulma α, joten sivu DF voidaan esittää muodossa $[a]([b] + [c])$. Tällöin $[a]([b] + [c]) = [a][b] + [a][c]$. $\square$



Kuva 1.12.

Nyt on määritelty aritmetiikka janojen ekvivalenssiluokille. Ekvivalenssiluokista saadaan muodostettua kunta, kun lisätään mukaan nollaluokka $[0]$ ja negatiiviset luokat, samaan tapaan kuin luonnolliset luvut laajennetaan kokonaisluvuiksi, katso *Geometry: Euclid and Beyond* [**5**, $s.173-174$]. Näin saatu jana-aritmetiikan kunta F on muiden kuntien tapaan joukko, johon on määritelty yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku siten, että näiden laskutoimitusten tulos kuuluu myös samaan joukkoon. Kootaan nämä ominaisuudet seuraavaan tulokseen:

Lause 1.13. *Jana-aritmetiikan kunnassa F on voimassa yhteen- ja kertolaskutoimitukset eli jokaiselle $[a],[b] \in F$ on olemassa $[a]+[b] \in F$ ja $[a] \cdot [b] \in F$ seuraavin ehdoin:*

(1) *Kunta F varustettuna yhteenlaskutoimituksella muodostaa Abelin ryhmän eli*
  (*i*) $([a]+[b])+[c] = [a]+([b]+[c])$ *kaikilla* $[a],[b],[c] \in F$.
  (*ii*) $[a]+[b] = [b]+[a]$ *kaikilla* $[a],[b] \in F$.
  (*iii*) *On olemassa luokka* $[0] \in F$ *siten, että* $[a]+[0] = [a]$ *kaikilla* $[a] \in F$.
  (*iv*) *Jokaiselle* $[a] \in F$ *on olemassa luokka* $-[a] \in F$ *siten, että* $[a]-[a] = [0]$.

(2) *Kunta $F^* = F - \{0\}$ varustettuna kertolaskutoimituksella muodostaa Abelin ryhmän eli*
  (*i*) $([a][b])[c] = [a]([b][c])$ *kaikilla* $[a],[b],[c] \in F^*$.
  (*ii*) $[a][b] = [b][a]$ *kaikilla* $[a],[b] \in F^*$.
  (*iii*) *On olemassa luokka* $[1] \in F^*$ *siten, että* $[a][1] = [a]$ *kaikilla* $[a] \in F^*$.
  (*iv*) *Jokaiselle* $[a] \in F^*$ *on olemassa luokka* $[a]^{-1} \in F^*$ *siten, että* $[a][a]^{-1} = [1]$.

(3) *Yhteen- ja kertolaskulle pätee osittelulaki*

$$[a]([b]+[c]) = [a][b]+[a][c].$$

LUKU 2

Yhdenmuotoiset kolmiot

Seuraavaksi päästään luomaan pohjaa yhdenmuotoisten kolmioiden teorialle aritmetiikan ja kunnan F avulla. Eukldeideen kuudes kirja antaa samat tulokset, mutta tavat, joilla vastaaviin tulosiin päästään, ovat erilaisia. Kappaleessa jatkamme samalla Hilbertin tasolla, joka toteuttaa paralleeliaksiooman.

Olkoon pisteet A ja B siten, että $[a] = [AB]$. Ekvivalenssiluokka $[a]$ on kunnan F alkio. Kutsutaan luokkaa $[a]$ janan AB pituudeksi, kuten sitä on totuttu kutsumaan. Kun $[a] = [AB]$ ja $[b] = [CD]$ niin voidaan sanoa, että niiden suhde on osamäärä $\frac{[a]}{[b]} \in F$. Voidaan sanoa myös, että jos janojen pituudet ovat $[a], [b], [c], [d]$ niin ne ovat samassa suhteessa, jos $\frac{[a]}{[b]} = \frac{[c]}{[d]}$. Yhdenmuotoisten kolmioiden teoriaa käydään läpi Hartshornen kirjan kappaleessa 20 [**5**, $s.175 - 186$]. Cevan ja Desargues'n lauseet ovat kappaleen harjoitustehtäviä.

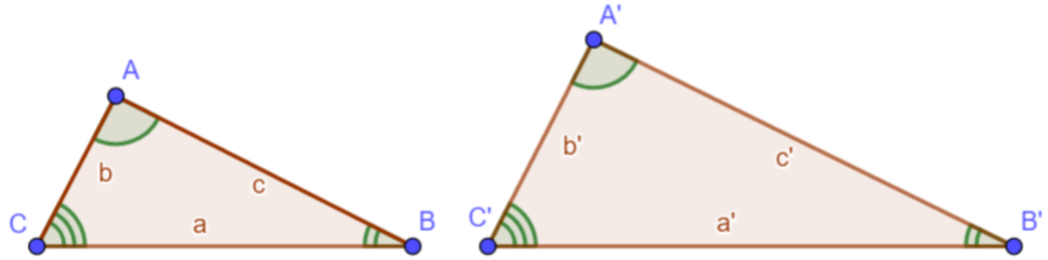
2.1. Yhtenevät kulmat ja sivujen suhde

Määritelmä 2.1. Kaksi kolmiota $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset, jos toisen kolmion kaikki kulmat ovat yhtenevät toisen kolmion vastaavien kulmien kanssa ja myös niiden sivut ovat samassa suhteessa (Kuva 2.1), eli

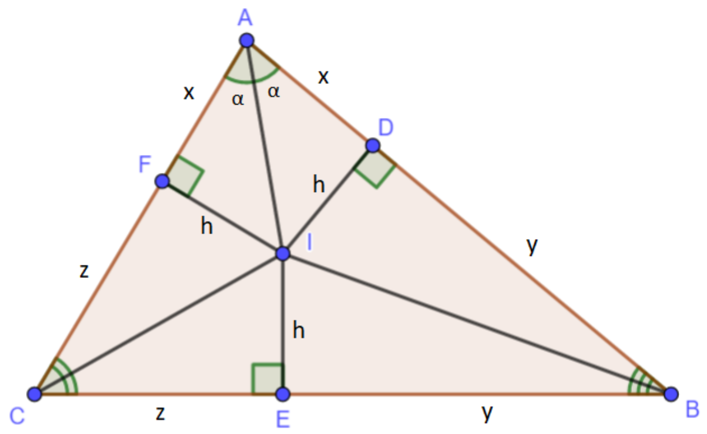
$$\frac{[AB]}{[A'B']} = \frac{[BC]}{[B'C']} = \frac{[CA]}{[C'A']}.$$

Lause 2.2. *KKK-lause (kulma-kulma-kulma). Jos kahdella kolmiolla $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ on kolme yhtenevää kulmaa, niin tällöin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

Lause on totta itse asiassa jo silloin, kun kahdella kolmiolla on kaksi yhtenevää kulmaa. Paralleeliaksiooman ollessa voimassa kolmioiden kulmien summat ovat yhtä



Kuva 2.1. Yhdenmuotoiset kolmiot.



Kuva 2.2.

suuret ja tällöin jos kahdet kulmat ovat yhtä suuret, niin täytyy viimeistenkin kulmien olla yhtä suuret.

Todistus. Janojen tulon määritelmä perustui yhdenmuotoisten kolmioiden erikoistapaukseen, koska siinä vertailtiin suorakulmaisten kolmioiden sivuja, joilla oli yhtenevä kulma. Sen takia todistetaan tämä tulos palauttamalla tilanne suorakulmaisiin kolmioihin.

Ensimmäiseksi todistetaan, että kolmion $\triangle ABC$ sisään voidaan piirtää ympyrä (Kuva 2.2). Aluksi puolitetaan kulmat $\angle BCA$ ja $\angle CAB$, jolloin kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa paralleeliaksiooman perusteella pisteessä I, koska kahden kulman puolikkaiden summa on alle kaksi suoraa kulmaa. Piirretään pisteestä I normaalit kolmion kaikille sivulle. Olkoon piste D sivulla AB, piste E sivulla BC ja piste F sivulla CA siten, että normaalit ovat ID, IE ja IF. Jotta kolmion sisälle voitaisiin piirtää I-keskinen ympyrä, niin normaalien täytyy olla yhtä pitkät.

Konstruktion nojalla $\angle FAI \cong \angle IAD$ ja suorina kulmina $\angle IFA \cong \angle ADI$, joten myös kulmat $\angle AIF \cong \angle DIA$. Lisäksi sivu AI on yhteinen kolmioille $\triangle ADI$ ja $\triangle AFI$, joten kolmiot ovat yhtenevät KSK-säännön mukaan. Tällöin erityisesti $ID \cong IF$ ja samalla päättelyllä kolmioista $\triangle CEI$ ja $\triangle CFI$ saadaan $IF \cong IE$. Voidaan siis piirtää I-keskinen ID-säteinen ympyrä, joka sivuaa pisteissä D, E, F kolmion $\triangle ABC$ sivuja, koska kulmat näissä pisteissä ovat suoria.

Nyt, kun tiedetään kaikkien normaalien olevan yhtä pitkiä, niin olkoon niiden pituus $[h]$. Todistuksesta saadaan myös, että jokaiseen kolmion kärkeen muodostuvat pienemmät kolmiot ovat yhtenevät keskenään eli esimerkiksi $\triangle ADI \cong \triangle AFI$. Tästä tiedosta saadaan yhtenevät janat $AD \cong AF$, jotka ovat pituudeltaan $[x]$. Muut yhtenevät janat ovat $BD \cong BE$, joiden pituus on $[y]$, ja $CE \cong CF$, joiden pituus on $[z]$.

Tehdään sama myös kolmiolle $\triangle A'B'C'$, jolloin saadaan vastaavat pisteet D', E', F', I' ja pituudet $[x']$, $[y']$, $[z']$, $[h']$.

Olkoon α toinen puoli kulmasta $\angle A$. Piirretään suorakulmainen kolmio, jolla on kulma α ja kateettien pituudet $[1]$ ja $[r]$. Tällöin janojen tulon määritelmän mukaan $[h] = [r][x]$. Toisessa kolmiossa kulma $\angle A'$ on yhtenevä kulman $\angle A$ kanssa kolmion oletuksen mukaan. Tällöin kulman $\angle A'$ toinen puolikas on α ja samanlaisella päättelyllä saadaan $[h'] = [r][x']$. Jakamalla tämä yhtälö ensimmäisestä kolmiosta saadulla yhtälöllä saadaan $\frac{[x]}{[x']} = \frac{[h]}{[h']}$.

Samalla tavalla kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ toisista kärjistä saadaan yhtälöt $\frac{[y]}{[y']} = \frac{[h]}{[h']}$ ja $\frac{[z]}{[z']} = \frac{[h]}{[h']}$. Olkoon $\frac{[h]}{[h']} = [k]$, jolloin yhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{aligned}[x] &= [k][x'] \\ [y] &= [k][y'] \\ [z] &= [k][z'].\end{aligned}$$

Nyt, kun katsotaan alkuperäisiä kolmioita niin nähdään, että kolmioiden sivut ovat edellisten yhtälöiden summia. Esimerkiksi $[a] = [y] + [z]$ saadaan muotoon $[a] = [k][y]+[k][y']$. Kun käytetään yhtälöihin aiemmin todistettua kertolaskun osittelulakia ja sivujen yhteyksiä, saadaan sivujen pituudet muotoon

$$\begin{aligned}[a] &= [k][a'] \\ [b] &= [k][b'] \\ [c] &= [k][c'].\end{aligned}$$

Tällöin siis

$$\frac{[a]}{[a']} = \frac{[b]}{[b']} = \frac{[c]}{[c']}$$

joten kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset. $\square$

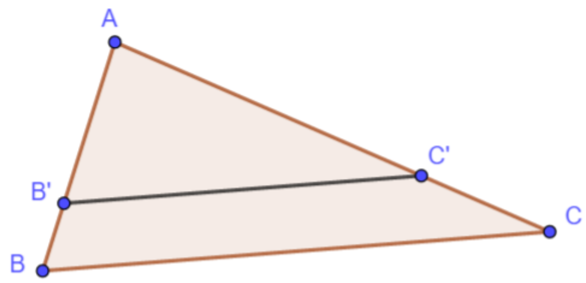
Vaikka tämä todistus poikkeaa täysin Eukleideen tavasta, niin muut yhdenmuotoisten kolmioiden tulokset saadaan helpommin mutta eri järjestyksessä. Kirjassa *Alkeet* tämä KKK-lause todistettiin laittamalla kulmiltaan yhtenevät kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ samalle suoralle siten, että sivut AB ja $A'B'$ olivat samalla suoralla ja kolmiot koskettivat toisiaan kulmapisteissä B ja A' eli $B = A'$. Tällöin sivujen AC ja $B'C'$ jatkeet leikkaavat pisteessä D, jolloin syntyy suunnikas $\square BC'DC$ ja tämän suunnikkaan avulla saadaan suhteet kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ sivujen välille.

Seuraavaksi todistetaan muita tuloksia liittyen kolmioiden yhdenmuotoisuuteen.

2.2. Kolmion jakava yhdensuuntainen suora

LAUSE 2.3. *Olkoon kolmio $\triangle ABC$ ja piirretään sivulle BC yhdensuuntainen sivu $B'C'$ siten, että se on kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella eli piste B' on sivulla AB ja piste C' on sivulla AC. Tällöin sivujen AB ja AB' suhde on sama kuin sivujen AC ja AC' suhde. Sama pätee myös toiseen suuntaan eli jos pisteet B' ja C' jakavat sivut AB ja AC siten, että sivut AB ja AB' ovat samassa suhteessa kuin sivut AC ja AC', niin sivu $B'C'$ on yhdensuuntainen sivun BC kanssa (Kuva 2.3).*

TODISTUS. Koska sivu $B'C'$ on yhdensuuntainen sivun BC kanssa, niin kulmat $\angle B'$ ja $\angle C'$ ovat yhtä suuret kulmien $\angle B$ ja $\angle C$ kanssa käänteisen vuorokulmalauseen mukaan. Tällöin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset KKK-lauseen mukaan, koska kulma $\angle A$ on yhteinen molemmille kolmioille.



Kuva 2.3.

Toista suuntaa todistettaessa oletetaan pisteiden B' ja C' jakavan sivut AB ja AC siten, että sivujen AB ja AB' suhde on sama kuin sivujen AC ja AC' suhde eli

$$\frac{[AB]}{[AB']} = \frac{[AC]}{[AC']}.$$

Otetaan piste D sivulta AC siten, että $BC \parallel B'D$. Tällöin jo todistetun suunnan perusteella sivujen AB ja AC suhde on myös sama kuin sivujen AB' ja AD suhde eli

$$\frac{[AB]}{[AB']} = \frac{[AC]}{[AD]}.$$

Nämä kaksi yhtälöä yhdistämällä saadaan

$$[AC'] = \frac{[AB]}{[AB'] \cdot [AC]} = [AD],$$

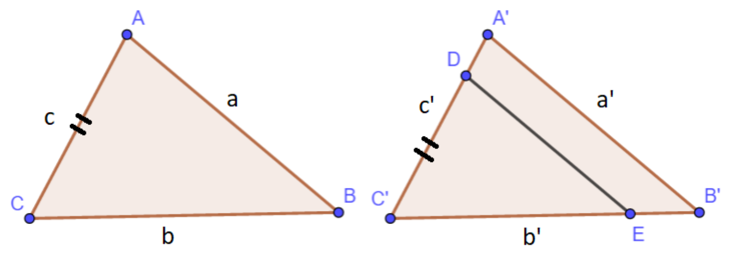
jolloin aksiooman (C1) mukaan piste $C' = D$ on yksikäsitteinen, koska $[AC'] = [AD]$ ja ne ovat samalla sivulla AC. Tällöin siis $B'C' \parallel BC$. $\square$

2.3. SSS-säännön yleistys

Seuraava tulos on kehitetty versio SSS-säännöstä (sivu-sivu-sivu) [**5**, $s.177-178$]. Siinä todistetaan, että jos kahden kolmion kaikki vastinsivut ovat samassa suhteessa, niin tällöin kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Alkuperäinen SSS-sääntö sanoo, että jos kolmion kaikki sivut ovat yhtenevät toisen kolmion vastinsivujen kanssa, niin tällöin kolmiot ovat yhtenevät [**1**, $s.24-25$]. Normaalista poiketen tässä lauseessa tulokseksi ei saada yhteneviä kolmioita, mutta toisaalta tässä versiossa riittää, kun sivut ovat samassa suhteessa.

Lause 2.4. *Olkoon kaksi kolmiota $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$, joista ensimmäisen kolmion sivut $AB = a, BC = b$ ja $CA = c$ ovat samassa suhteessa kuin toisen kolmion vastaavat sivut a', b' ja c'. Tällöin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset.*

Todistus. Oletetaan, että toinen kolmioista, esimerkiksi $\triangle A'B'C'$, on suurempi, koska muuten SSS-säännön mukaan kolmiot olisivat yhtenevät. Tällöin löydetään aksiooman (C1) mukaan piste D sivulta c' siten, että $[c] = [C'D]$ (Kuva 2.4). Pisteen D kautta voidaan piirtää sivun a' kanssa yhdensuuntainen suora, joka leikkaa sivua



Kuva 2.4.

b' pisteessä E. Nyt lauseen 2.3 mukaan kolmiot $\triangle A'B'C'$ ja $\triangle DEC'$ ovat yhdenmuotoiset, joten niiden sivut ovat samassa suhteessa. Oletuksen mukaan kolmion $\triangle ABC$ sivut ovat samassa suhteessa kolmion $\triangle A'B'C'$ sivujen kanssa, joten jana-aritmetiikan kunnan F mukaan myös kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEC'$ sivut ovat samassa suhteessa.

Toisaalta jana $C'D$ valittiin yhteneväksi janan c kanssa, minkä takia näiden sivujen suhde on 1. Tästä seuraa, että kolmion $\triangle ABC$ kaikki sivut ovat yhtenevät kolmion $\triangle DEC'$ vastaavien sivujen kanssa, joten alkuperäisen SSS-säännön mukaan kolmiot ovat yhtenevät. Tällöin myös kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEC'$ kaikki kulmat ovat yhtenevät ja samoin myös kolmion $\triangle A'B'C'$ kulmat, koska kaksi viimeistä kolmiota ovat yhdenmuotoisia. On siis osoitettu, että kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kulmat ovat yhtenevät, joten lauseen 2.2 mukaan ne ovat yhdenmuotoiset. $\square$

2.4. Pythagoraan lause

Seuraavaksi todistetaan, että Pythagoraan lause on voimassa jana-aritmetiikan kunnassa F. Tämän lauseen Eukleides todisti sivujen neliöiden pinta-alojen yhtäsuuruudella [**1**, $s.62 - 64$]. Jana-aritmetiikan tavalla todistus on täysin erilainen, koska tässä kirjotelmassa ei ole todistettu mitään yhteyksiä pinta-alan ja jana-aritmetiikan välille.

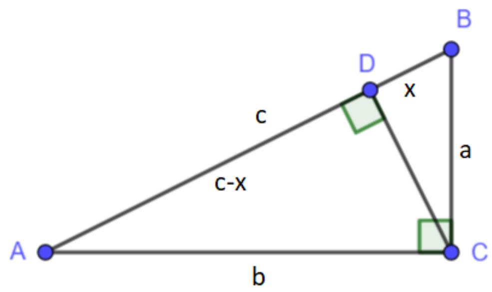
Lause 2.5. *Jos suorakulmaisella kolmiolla $\triangle ABC$ on kateetit a, b ja hypotenuusa c, niin*

$$[a]^2 + [b]^2 = [c]^2$$

jana-aritmetiikan kunnassa F.

Todistus. Lauseen todistamiseksi täytyy ensin piirtää jana CD, joka on kohtisuorassa hypotenuusaan nähden ja piste D on hypotenuusalla (Kuva 2.5). Tällöin muodostuu kaksi pienempää kolmiota $\triangle ADC$ ja $\triangle CDB$, jotka ovat yhdenmuotoiset alkuperäisen kolmion kanssa. Tämä siksi, koska molemmilla pienemmillä kolmioilla on yksi yhteinen kulma kolmion $\triangle ABC$ kanssa ja suora kulma, jolloin KKK-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska kaikki kolmiot ovat yhdenmuotoisia, niin tällöin niiden sivut ovat samassa suhteessa ja kolmioista $\triangle CDB$ ja $\triangle ABC$ saadaan yhtälö

$$\frac{[x]}{[a]} = \frac{[a]}{[c]}.$$



KUVA 2.5.

Toisaalta kolmioista $\triangle ADC$ ja $\triangle ABC$ saadaan yhtälö

$$\frac{[c]-[x]}{[b]} = \frac{[b]}{[c]}.$$

Nyt kun kerrotaan molemmat yhtälöt ristiin, saadaan

$$[c][x] = [a]^2$$

ja

$$[c]^2 - [c][x] = [b]^2.$$

Yhdistämällä nämä kaksi yhtälöä, saadaan todistettua Pythagoraan lause

$$[a]^2 + [b]^2 = [c]^2.$$

$\square$

SEURAUS 2.6. *(Pythagoraan lauseen seuraus) Hilbertin tasolla, joka toteuttaa paralleeliaksiooman, jana-aritmetiikan kunta F on Pythagoraan kunta eli kaikilla $[a] \in F$ on olemassa $\sqrt{[1]+[a]^2} \in F$.*

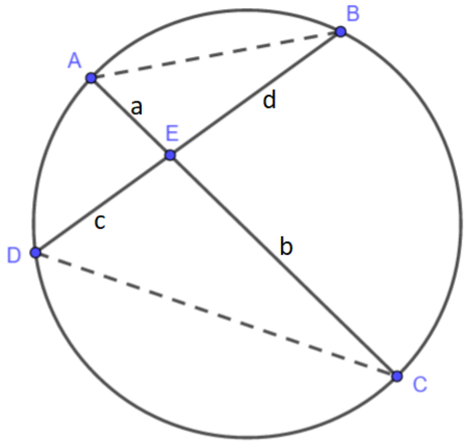
TODISTUS. Tulee osoittaa, että mille tahansa janalle $[a] \in F$ pätee $\sqrt{[1]+[a]^2} \in F$. Jos $[a] = 0$, niin tapaus on triviaali. Kunnan F ominaisuuksien mukaan voidaan siis olettaa, että $[a]$ on positiivinen. Muodostetaan suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat $[a]$ ja $[1]$. Tällöin lauseen 2.5 mukaan hypotenuusa on $\sqrt{[1]+[a]^2} \in F$. Siten kunta F on Pythagoraan kunta. $\square$

2.5. Ympyrän jänteiden suhde

LAUSE 2.7. *Jos kaksi saman ympyrän jännettä AC ja BD leikkaavat toisensa pisteessä E, niin kummankin jänteiden osien pituudet $[AE] = [a]$, $[EC] = [b]$, $[DE] = [c]$ ja $[EB] = [d]$ toteuttavat yhtälön*

$$[a][b] = [c][d]$$

jana-aritmetiikan kunnassa F.



Kuva 2.6.

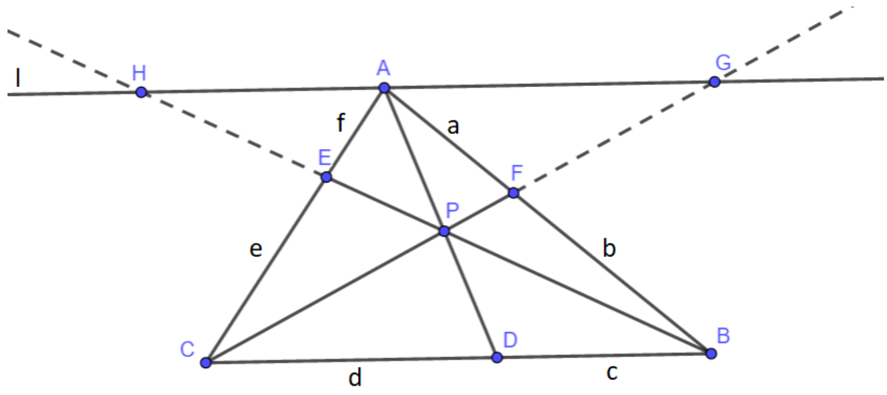
Todistus. Piirretään janat AB ja CD (Kuva 2.6). Tällöin kehäkulmalauseen mukaan kulmat $\angle ABD$ ja $\angle ACD$ ovat yhtä suuret ja myös kulmat $\angle CAB$ ja $\angle CDB$ ovat yhtä suuret. Huomataan myös, että kulmat $\angle BEA$ ja $\angle DEC$ ovat yhtä suuret toistensa ristikulmina, joten myös kolmannet kulmat ovat yhtä suuret ja lauseen 2.2 mukaan kolmiot $\triangle ABE$ ja $\triangle CDE$ ovat yhdenmuotoiset. Tästä seuraa, että kolmioiden sivut ovat samassa suhteessa eli $\frac{[a]}{[d]} = \frac{[c]}{[b]}$. Ristiin kertomalla saadaan yhtälö $[a][b] = [c][d]$. $\square$

2.6. Cevan lause

Lause 2.8. *Olkoon kolmio $\triangle ABC$ ja olkoon piste P mikä tahansa piste kolmion sisältä. Kun piirretään suorat jokaisesta kärjestä pisteen P kautta, niin ne leikkaavat vastakkaiset sivut pisteissä D, E ja F ja muodostuu $[AF] = [a], [FB] = [b], [BD] = [c], [DC] = [d], [CE] = [e]$ ja $[EA] = [f]$ (Kuva 2.7). Tällöin*

$$\frac{[a]}{[b]} \cdot \frac{[c]}{[d]} \cdot \frac{[e]}{[f]} = [1].$$

Todistus. Piirretään suora l pisteen A kautta, joka on sivun BC kanssa yhdensuuntainen. Jatketaan janoja CF ja BE siten, että niiden jatkeet leikkaavat suoran l pisteissä G ja H. Janojen jatkeet leikkaavat suoran l paralleeliaksiooman nojalla, koska $l \parallel CB$ ja piste P ei kuulu näistä kummallekaan. Tällöin syntyy monia yhdenmuotoisia kolmioita, kuten esimerkiksi kolmiot $\triangle AFG$ ja $\triangle BFC$. Nämä ovat yhdenmuotoisia lauseen 2.2 mukaan, koska kulmat $\angle GFA$ ja $\angle CFB$ ovat toistensa ristikulmia ja kulmat $\angle FAG$ ja $\angle FBC$ sekä $\angle AGF$ ja $\angle BCF$ ovat toistensa vuorokulmia, joten kaikkien kolmioiden kaikki kolme kulmaa ovat yhteneviä. Samaan tapaan kolmiot kolmiot $\triangle AEH$ ja $\triangle CEB$ ovat yhdenmuotoisia, jolloin kyseisten kolmioiden sivut



KUVA 2.7.

ovat suhteessa

$$\frac{[a]}{[AG]} = \frac{[b]}{[c]+[d]}, \quad \frac{[f]}{[AH]} = \frac{[e]}{[c]+[d]}$$
$$\iff [AG] = \frac{[a]\cdot[BC]}{[b]}, \quad [AH] = \frac{[f]\cdot[BC]}{[e]}.$$

Lauseen 2.2 mukaan myös kolmiot $\triangle APH$ ja $\triangle DPB$, $\triangle APG$ ja $\triangle DPC$ ovat yhdenmuotoiset, joten niiden sivut ovat suhteessa

$$\frac{[AH]}{[AP]} = \frac{[c]}{[PD]}, \quad \frac{[AG]}{[AP]} = \frac{[d]}{[PD]}.$$

Näistä yhtälöistä saadaan eliminoitua sivut $[AP]$ ja $[PD]$ pois ja ne voidaan yhdistää, jolloin saadaan

$$\frac{[c]}{[AH]} = \frac{[d]}{[AG]} \iff [AH] = \frac{[c]\cdot[AG]}{[d]}.$$

Kun tämä tieto sijoitetaan ensimmäisistä yhdenmuotoisista kolmioista saatuun yhtälöön, saadaan

$$[AG] = \frac{[a]\cdot[BC]}{[b]}, \quad \frac{[c]\cdot[AG]}{[d]} = \frac{[f]\cdot[BC]}{[e]}$$
$$\iff \frac{[AG]}{[BC]} = \frac{[a]}{[b]}, \quad \frac{[AG]}{[BC]} = \frac{[d]\cdot[f]}{[c]\cdot[e]}.$$

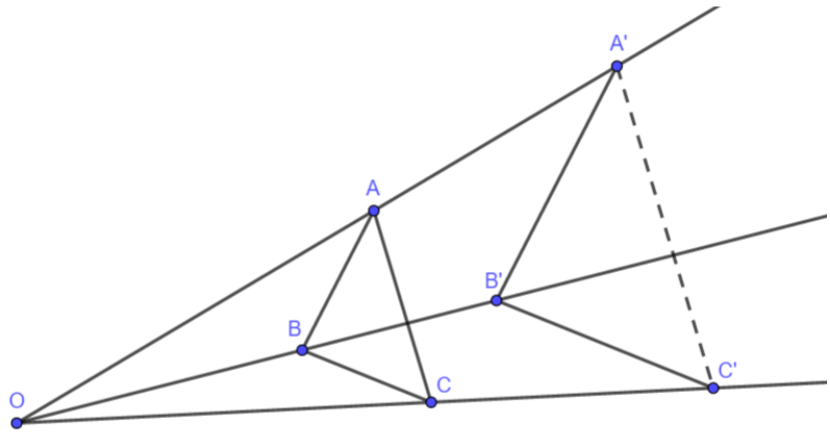
Nyt voidaan yhdistää nämä yhtälöt ja saadaan

$$\frac{[a]}{[b]} = \frac{[d]\cdot[f]}{[c]\cdot[e]} \iff \frac{[a]\cdot[c]\cdot[e]}{[b]\cdot[d]\cdot[f]} = [1].$$

□

2.7. Desargues'n lause

LAUSE 2.9. *Olkoon kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ja oletetaan, että ne ovat perspektiivissä pisteen O suhteen eli suorat AA', BB' ja CC' leikkaavat pisteessä O. Jos sivut $AB \parallel A'B'$ ja $BC \parallel B'C'$, niin sivut $CA \parallel C'A'$.*



Kuva 2.8.

Todistus. Piirretään kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kulmien välille suorat AA', BB' ja CC', jolloin ne leikkaavat pisteessä O, kuten oletettiin (Kuva 2.8). Tällöin muodostuvat yhdenmuotoiset kolmiot $\triangle ABO$ ja $\triangle A'B'O$ lauseen 2.3 mukaan, koska $AB \parallel A'B'$ ja toiset yhdenmuotoiset kolmiot $\triangle CBO$ ja $\triangle C'B'O$, koska $CB \parallel C'B'$. Tällöin kolmioiden sivut ovat suhteessa

$$\frac{[OA]}{[OA']} = \frac{[OB]}{[OB']}, \quad \frac{[OC]}{[OC']} = \frac{[OB]}{[OB']},$$

josta yhtälöt saadaan yhdistettyä muotoon

$$\frac{[OA]}{[OA']} = \frac{[OC]}{[OC']} \iff \frac{[OA]}{[OC]} = \frac{[OA']}{[OC']}.$$

Kolmioilla $\triangle ACO$ ja $\triangle A'C'O$ on yhteinen kulma $\angle COA \cong \angle C'OA'$ ja kulmasta lähtevät sivut OA ja OA' ovat samalla suoralla ja myös sivut OC ja OC' ovat samalla suoralla. Koska kolmioiden $\triangle ACO$ ja $\triangle A'C'O$ sivujen suhde $\frac{[OA]}{[OA']} = \frac{[OC]}{[OC']}$, niin lauseen 2.3 mukaan sivut CA ja $C'A'$ ovat yhdensuuntaisia. $\square$

LUKU 3

Koordinaattigeometria

Kirjoitelma aloitettiin luomalla jana-aritmetiikan kunta F Eukleideen tapaan puhtaan geometrian avulla. Tämä geometrian perusta luotiin Hilbertin aksioomien avulla ja sen myötä pystyttiin todistamaan luvussa 2 esitettyjä lauseita, jotka liittyivät yhdenmuotoisiin kolmioihin. Tässä luvussa näytetään, että kun aiemmin määritelty jana-aritmetiikka liitetään koordinaattigeometriaan, niin kaikki tutkielmassa käsitellyt tulokset pätevät myös koordinaatistossa. Matemaattisesti sanottuna, olkoon Π Hilbertin taso, joka toteuttaa paralleeliaksiooman, ja olkoon kunta F tason Π jana-aritmetiikan kunta. Tällöin Π on isomorfinen kuntaan F liittyvän karteesisen koordinaatiston F^2 kanssa.

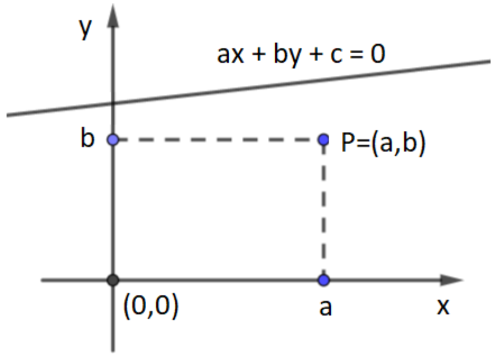
Janojen ekvivalenssiluokkien kunta F muodostettiin pistepareista, joiden välille muodostuu jana. Näitä ekvivalenssiluokkia pystyttiin vertailemaan aksioomien avulla ja työkaluiksi todistuksiin määriteltiin laskutoimitukset näille luokille. Tavallisesti ekvivalenssiluokat yhdistetään janojen pituuksiin, ja kun pituudet liitetään esimerkiksi reaalilukuihin, pystytään vertailemaan janoja. Tämä on juuri karteesinen lähestymistapa, jossa pituuden ja lineaaristen yhtälöiden avulla saadaan määriteltyä suorat ja yhtenevyys, jonka jälkeen algebrallisten ominaisuuksien avulla voidaan todistaa geometrian aksioomien olevan totta.

Tutkielmaa lukiessa on hyvä muistaa, että kunnassa F jotkin asiat voivat olla totta, vaikka ne eivät päde kaikissa geometrisissa malleissa. Karteesinen koordinaatisto F^2 on vain yksi monista geometrisista malleista. Esimerkiksi jos $F = \mathbb{R}$, niin tällöin Dedekindin aksiooma, joka koskee reealilukujen täydellisyyttä, on voimassa, mutta se ei päde rationaalilukujen kunnassa.

On olemassa myös geometrioita, joilla ei ole vastaavaa yhteyttä kunnan kanssa ja niiden ominaisuudet poikkeavat tämän kunnan päälle rakennetun geometrian ominaisuuksista. Jos jätetään tässä tutkielmassa käytetystä aksiomaattisesta geometriasta paralleeliaksiooma pois, saadaan erilaisia geometrian malleja, jotka poikkeavat tämän tutkielman geometriasta. Esimerkiksi hyperbolisessa geometriassa kolmion kulmien summa on aina pienempää kuin kaksi suoraa kulmaa ja tietyn suoran kanssa yhdensuuntaisia suoria kulkee suoran ulkopuolisen pisteen kautta äärettömän monta. Projektiivisessa geometriassa taas yhdensuuntaiset suorat leikkaavat pisteissä äärettömän kaukana, mikä perustuu perspektiiviin. Nyt kuitenkin keskitytään tämän kirjoitelman euklidiseen geometriaan, johon liittyvää karteesusta koordinaatistoa F^2 käsitellään Hartshornen teoksen kappaleessa 21 [**5**, $s.186 - 193$].

3.1. Karteesinen koordinaatisto

Karteesisen koordinaatiston pohjaa luodaan Hartshornen kirjassa luvussa 13 [**5**, $s.118 - 119$] ja luvuissa 14-16 määritellään sen algebrallisia ominaisuuksia ja todistetaan Hilbertin aksioomien pitävyys koordinaatistossa [**5**, $s.128-148$]. Piste tavallisessa



KUVA 3.1.

koordinaatistossa on reaalilukupari (a,b) ja karteesinen koordinaatisto $\mathbb{R}^2$ on kokoelma kaikista näistä pisteistä (Kuva 3.1). Nyt halutaan vastaavasti yhdistää karteesinen koordinaatisto aiemmin määriteltyyn jana-aritmetiikan kuntaan F. Karteesisen koordinaatiston F^2 pisteet ovat ekvivalenssiluokkien pareja $([a],[b])$. Koordinaatiston pisteet, jotka ovat muotoa $([a],[0])$, muodostavat x-akselin, kun taas pisteet muotoa $([0],[b])$ muodostavat y-akselin. Näiden kahden akselin leikkauspiste $([0],[0])$ on origo. Näiden tietojen avulla voidaan määritellä suoran yhtälö.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon karteesinen koordinaatisto F^2 jana-aritmetiikan kunnassa F. Suora koordinaatistossa on pisteiden $(x,y) \in F^2$ joukko, jotka toteuttavat lineaarisen yhtälön

$$[a]x + [b]y + [c] = 0,$$

jossa luokista joko $[a]$ tai $[b]$ on nollasta poikkeava (Kuva 3.1).

Jos $[b] = [0]$, niin muodostuu y-akselin suuntaisia suoria, jotka voidaan antaa muodossa $x = -\frac{[c]}{[a]}$. Kaikki muut suorat voidaan antaa muodossa $y = [m]x + [b]$, jossa $[m]$ on suoran kulmakerroin ja $[b]$ kertoo missä kohtaa suora leikkaa y-akselin. Kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, jos ne ovat samat tai niillä ei ole yhtäkään yhteistä pistettä. Karteesisen koordinaatiston esitystavassa tämä tarkoittaa sitä, että suorat ovat yhdensuuntaiset jos ja vain jos suorilla on sama kulmakerroin. Täsmällisemmin yhdensuuntaisuuden saa ratkaistua suoran yhtälöistä siten, että laitetaan muuttujan y suhteen ratkaistut yhtälöt yhtä suuriksi ja katsotaan mitä yhtälölle käy. Valitaan kaksi suoraa $y = [m]x + [b]$ ja $y = [m']x + [b']$, joista muodostuu yhtälö

$$[m]x + [b] = [m']x + [b'],$$

joka saadaan muotoon

$$([m] - [m'])x = [b'] - [b].$$

Yhdensuuntaisten suorien tapauksessa on kaksi vaihtoehtoa. Jos $[m] = [m']$ ja $[b'] = [b]$, niin yhtälöstä tulee $[0] = [0]$, jolloin suorat ovat samat eli niillä on äärettömän monta leikkauspistettä. Jos taas $[m] = [m']$ mutta $[b'] \neq [b]$, niin yhtälö on epätosi eli suorilla ei ole yhteisiä pisteitä. Kun $[m] \neq [m']$ niin tällöin yhtälöstä voidaan ratkaista muuttuja x

$$x = \frac{[b'] - [b]}{[m] - [m']},$$

joka on suorien leikkauspisteen x-koordinaatti.

3.2. Insidenssiaksioomat

Seuraavaksi todistetaan, että Hilbertin aksioomat pätevät myös tässä luvussa käsitellyssä karteesisessa koordinaatistossa. Ensimmäisenä käydään läpi insidenssiaksioomat.

LAUSE 3.2. *Olkoon F jana-aritmetiikan kunta. Hilbertin insidenssiaksioomat (I1), (I2), (I3) ja paralleeliaksiooma (PA) toteutuvat karteesisessa koordinaatistossa F^2.*

TODISTUS. Aksiooman (I1) mukaan kaksi pistettä virittävät yksikäsitteisen suoran. Koska jana-aritmetiikan kunnassa voidaan käyttää peruslaskutoimituksia $+, -, \cdot, \div$, niin normaalin analyyttisen geometrian tapaan löydetään pisteille $P, Q \in F^2$ suora, joka kulkee näiden pisteiden kautta. Valitaan pisteet $P = ([a], [b])$ ja $Q = ([c], [d])$. Yhtälö suoralle, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta, saadaan sijoittamalla pisteet yhtälöön

$$y - [b] = k(x - [a])$$

jossa $k = \frac{[d]-[b]}{[c]-[a]}$ on pisteiden P ja Q määräämän suoran kulmakerroin, kun $[c] \neq [a]$. Jos taas $[c] = [a]$, on halutun suoran yhtälö $x = [c]$.

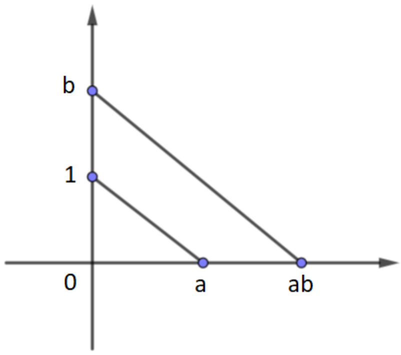
Aksiooman (I2) mukaan jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä. Kunnassa F on vähintään kaksi luokkaa $[0]$,$[1]$, jolloin laittamalla $x = [0]$ tai $x = [1]$ saadaan suoran yhtälöstä $y = [m]x + [b]$ pisteet $([0], [b])$ ja $([1], [m] + [b])$. Jos suora on muotoa $x = [c]$, niin voidaan valita $y = [0]$ tai $y = [1]$, jolloin sadaan pisteet $([c], [0])$ ja $([c], [1])$. Siispä jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä.

Aksiooman (I3) mukaan on olemassa kolme pistettä, jotka kaikki eivät ole samalla suoralla. Valitaan pisteet $([0], [0])$, $([0], [1])$ ja $([1], [0])$, jolloin kahden ensimmäisen pisteen kautta kulkee yksikäsitteinen suora $x = [0]$, joka ei kulje kolmannen pisteen kautta.

Paralleeliaksiooman mukaan, jos on suora l ja piste P, joka ei ole kyseisellä suoralla, niin tällöin pisteen P kautta kulkee täsmälleen yksi suora l', joka on suoran l kanssa yhdensuuntainen. Karteesista koordinaatistoa määritellessä käytiinkin jo läpi yhdensuuntaisuutta. Todettiin, että suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä tai ne ovat samat. Karteesisessa koordinaatistossa tämä tarkoittaa sitä, että suorat ovat yhdensuuntaisia jos ja vain jos suorilla on sama kulmakerroin. Olkoon $[m]$ annetun suoran kulmakerroin. Tällöin pisteen P kautta kulkee täsmälleen yksi suora, jonka kulmakerroin on myös $[m]$. Suorien l ja l' yhtälöt ovat samat lukuun ottamatta y-akselin leikkauskohtia määräävää luokkaa $[b]$. □

3.3. Järjestysaksioomat

Järjestysaksioomien todistamiseksi määritellään kunnan F positiivinen osajoukko P.



KUVA 3.2.

MÄÄRITELMÄ 3.3. Olkoon P kunnan F osajoukko, johon kuuluvat positiiviset jana-aritmetiikan kunnan F luokat, eli ne luokat, jotka vastaavat janojen pituuksia.

Tällöin pätee:

(i) Jos $[a],[b] \in P$, niin $[a]+[b] \in P$ ja $[a][b] \in P$.
(ii) Mille tahansa luokalle $[a]$ pätee yksi ja vain yksi seuraavista: $[a] \in P$; $[a] = [0]$; $-[a] \in P$.

LAUSE 3.4. *Järjestetyssä kunnassa* (F, P) *määritellään* $[a] > [b]$ *jos* $[a]-[b] \in P$ *ja* $[a] < [b]$ *jos* $[b]-[a] \in P$. *Tämä järjestyksellinen ominaisuus toteuttaa luonnollisesti seuraavat:*

(i) *Jos* $[a] > [b]$ *ja* $[c] \in F$, *niin* $[a]+[c] > [b]+[c]$.
(ii) *Jos* $[a] > [b]$ *ja* $[b] > [c]$, *niin* $[a] > [c]$.
(iii) *Jos* $[a] > [b]$ *ja* $[c] > [0]$, *niin* $[a][c] > [b][c]$.
(iv) *Olkoon* $[a]$,$[b] \in F$. *Yksi ja vain yksi seuraavista on voimassa:* $[a] > [b]$; $[a] = [b]$; $[a] < [b]$.

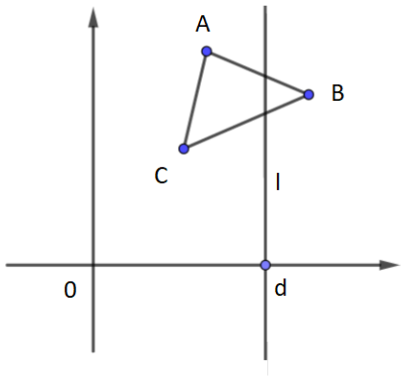
Kunnan (F, P) järjestyksen ansiosta voidaan nyt näyttää, että Hilbertin järjestysaksioomat pätevät karteesisessa koordinaatistossa. Pisteiden välissäolo määritellään karteesisessa koordinaatistossa siten, että $A * B * C$ on voimassa jos pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla ja pisteen B x-koordinaatti on pisteiden A ja C x-koordinaattien välissä. Jos suora on pystysuuntainen, niin käytetään pisteiden y-koordinaatteja.

LAUSE 3.5. *Olkoon* (F, P) *jana-aritmetiikan kunta. Tällöin aksioomat (B1)-(B4) ovat voimassa tasossa* F^2.

TODISTUS. (B1) Olkoon $A = ([a_1], [a_2])$, $B = ([b_1], [b_2])$, $C = ([c_1], [c_2])$ kolme pistettä suoralla $y = [m]x + [b]$. Tällöin $A * B * C$ pätee, jos joko $[a_1] < [b_1] < [c_1]$ tai $[a_1] > [b_1] > [c_1]$ kunnan (F, P) järjestyksen mukaan. Jos suora on pystysuuntainen, niin käytetään toisia koordinaatteja samaan tapaan. Tästä nähdään, että myös $C * B * A$ on voimassa.

(B2) seuraa myös suoraan tiedosta, että millä tahansa järjestetyn kunnan alkioilla $[b] > [d] \in F$ on olemassa $[a]$,$[c]$,$[e] \in F$ siten, että $[a] < [b] < [c] < [d] < [e]$. Esimerkiksi voidaan valita $[a] = [b] - [1]$, $[c] = \frac{[1]}{[2]}([b] + [d])$ ja $[e] = [d] + [1]$.

(B3) seuraa tiedosta, että järjestetyssä kunnassa F, jos $[a]$, $[b]$, $[c]$ ovat kolme erillistä luokkaa, niin yksi ja vain yksi seuraavista voi olla voimassa:



KUVA 3.3.

$$[a] < [b] < [c];$$
$$[a] < [c] < [b];$$
$$[b] < [a] < [c];$$
$$[b] < [c] < [a];$$
$$[c] < [a] < [b];$$
$$[c] < [b] < [a].$$

(B4) Oletetaan, että on annettu kolmio $\triangle ABC$ ja suora l, joka leikkaa sivua AB (Kuva 3.3). Oletetaan myös, että A, B, $C \notin l$. Täytyy näyttää, että suora l leikkaa myös sivua AC tai BC mutta ei molempia.

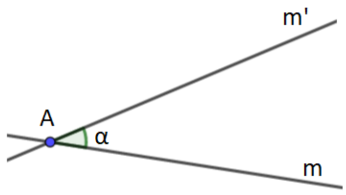
Ensin oletetaan, että suora on pystysuora, joten sen yhtälö on $x = [d]$. Olkoon $[a]$, $[b]$, $[c]$ pisteiden A, B, C x-koordinaatit. Tällöin joko $[a] < [d] < [b]$ tai $[b] < [d] < [a]$. Oletetaan ensimmäinen, jotta pisteet menevät kuten kuvassa. Jos $[c] < [d]$, niin on selvää, että suora l leikkaa sivua BC mutta ei sivua AC. Jos $[c] > [d]$, niin suora l leikkaa sivua AC mutta ei sivua BC.

Jos l ei ole pystysuora, niin voidaan tehdä koordinaattien muutos, joka säilyttää järjestyksen ja muuttaa suoran l pystysuoraksi, mutta tämän yksityiskohdat ohitetaan. Hartshorne tekee teoksessaan koordinaattien muutoksen lauseessa 14.2 $[\mathbf{5}, s.130 - 131]$. □

3.4. Yhtenevyysaksioomat

Jotta voidaan todistaa vielä yhtenevyysaksioomat koordinaatistossa, niin täytyy yhtenevyydet ensin määritellä siellä. Jana AB on siis kokoelma kaikista pisteistä, jotka ovat suoralla AB pisteiden A ja B välissä, mukaan lukien päätepisteet. Janojen yhtenevyyden todistamiseksi tarvitsee janoja pystyä vertailemaan. Tämä voidaan toteuttaa käyttämällä tuttua euklidisen etäisyyden funktiota kahdelle pisteelle $A = ([a_1], [a_2])$ ja $B = ([b_1], [b_2])$:

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{([a_1] - [b_1])^2 + ([a_2] - [b_2])^2}.$$



KUVA 3.4.

Yleisessä järjestetyssä kunnassa F ei kuitenkaan ole välttämättä määritelty neliöjuurta, joten käytetään tutun etäisyyden mittauksen sijasta etäisyyden neliötä eli

$$\mathrm{dist}^2(A, B) = ([a_1] - [b_1])^2 + ([a_2] - [b_2])^2.$$

Nyt janat voidaan määritellä yhteneviksi tämän funktion avulla.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Kaksi janaa AB ja CD ovat yhtenevät järjestetyn kunnan F määräämässä karteesisessa koordinaatistossa, jos

$$\mathrm{dist}^2(A, B) = \mathrm{dist}^2(C, D).$$

Seuraavaksi määritellään yhtenevyys kulmille funktion $\tan\alpha \in F$ avulla. Tässä funktiossa on taustalla tavallinen trigonometrian tangenttifunktio, mutta koska tässä tutkielmassa ei olla määritelty trigonometriaa koordinaatistossa, ei voida olettaa mitään tangenttifunktion ominaisuuksia todistamatta.

Kulma $\angle CAB$ muodostuu kahden janan AB ja AC välille, kun ne alkavat samasta pisteestä A. Jos jana AB on suoralla l ja jana AC suoralla l', niin kulman sisäpisteiden joukko muodostuu kaikista niistä tason pisteistä, jotka ovat pisteen B kanssa samalla puolella suoraa l' ja pisteen C kanssa samalla puolella suoraa l.

Kulma $\angle CAB$ on suora kulma, jos sen muodostavien suorien kulmakertoimet toteuttavat yhtälön $mm' = -1$. Kulma on terävä, jos se on suoran kulman sisäpuolella ja se on tylppä, jos sen sisällä on suora kulma.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Jos kulma α muodostuu kahdesta puolisuorasta r, r', jotka ovat suorilla joiden kulmakertoimet ovat m ja m', niin kulman α tangentti on

$$\tan\alpha = \pm\left|\frac{m' - m}{1 + mm'}\right|,$$

jossa otetaan $+$, jos kulma on terävä ja $-$, jos kulma on tylppä (Kuva 3.4). Suoralle kulmalle $\tan\alpha = \infty$.

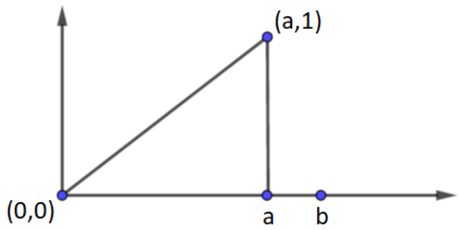
LAUSE 3.8. *Olkoon F jana-aritmetiikan kunta ja F^2 sen määräämä karteesinen koordinaatisto. Tällöin F^2 toteuttaa aksioomat (C1)-(C5).*

HUOMAUTUS 3.9. Jos luokka $[a] \in F$ on mikä tahansa luokka jana-artimetiikan kunnassa F, niin tarkastellaan janaa, joka lähtee pisteestä $([0], [0])$ pisteeseen $([a], [1])$ (Kuva 3.5). Tälle janalle on yhtenevä jana x-akselilla alkaen myös origosta vain jos on olemassa luokka $[b] \in F$ siten, että

$$\mathrm{dist}^2(([0], [0]), ([a], [1])) = \mathrm{dist}^2(([0], [0]), ([b], [0])).$$

Tällöin siis

$$[1] + [a]^2 = [b]^2.$$



KUVA 3.5.

Tarvitaan siis luokka $[b] \in F$, joka on luokan $[1]+[a]^2$ neliöjuuri. Toisin sanottuna, jos aksiooma (C1) on voimassa karteesisessa koordinaatistossa F^2, niin tulee kunnan F olla Pythagoraan kunta. Seuraus 2.6 kertoo, että näin todella on.

TODISTUS. (C1) Koska kunta F on Pythagoraan kunta, niin mille tahansa luokalle $[c] \in F$ on olemassa $\sqrt{[1]+[c]^2} \in F$. Toisaalta mille tahansa luokille $[a]$, $[b] \in F$, jossa $[a] \neq [0]$, saadaan yhtälö

$$[a]^2 + [b]^2 = [a]^2 \left([1] + \left(\frac{[b]}{[a]}\right)^2\right).$$

Kun $[c] = \frac{[b]}{[a]}$, niin saadaan, että

$$\sqrt{[a]^2+[b]^2} = |[a]| \cdot \sqrt{[1]+[c]^2}$$

kuuluu myös kuntaan F. Tästä seuraa, että mille tahansa kahdelle pisteelle A, $B \in F^2$ pisteiden välinen etäisyys kuuluu myös kuntaan F, joten saadaan etäisyysfunktio

$$\mathrm{dist}(A, B) = \sqrt{([a_1]-[b_1])^2 + ([a_2]-[b_2])^2} \in F.$$

Oletetaan, että on annettu suora $y = [m]x + [b]$ ja piste A, joka on suoralla. Halutaan saada jana, jonka pituus on $[d]$. Voidaan sanoa, että piste $A = ([a], [m][a] + [b])$ ja ollaan etsimässä pistettä $C = ([c], [m][c] + [b])$ samalta suoralta, niin että

$$\mathrm{dist}(A, C) = [d].$$

Tällöin siis

$$\sqrt{([a]-[c])^2 + ([m][a] + [b] - ([m][c] + [b]))^2} = [d],$$

josta tulee

$$|[a]-[c]| \cdot \sqrt{[1]+[m]^2} = [d].$$

Koska F on Pythagoraan kunta, niin luokka $\sqrt{[1]+[m]^2}$ kuuluu kuntaan F. Tällöin yhtälö voidaan ratkaista luokan $[c]$ suhteen. Muokataan ensin yhtälöä

$$|[a]-[c]| = \frac{[d]}{\sqrt{[1]+[m]^2}}.$$

Itseisarvo huomioiden tulee kaksi vaihtoehtoa

$$[c] = [a] \pm \frac{[d]}{\sqrt{[1]+[m]^2}}$$

riippuen siitä kumpaan suuntaan pituus $[d]$ halutaan mitata pisteestä A.

(C2) selvästi kaikki janat ovat yhteneviä itsensä kanssa. Myös transitiivisuus on selvää etäisyysfunktion dist^2 avulla, jolla määriteltiin janojen yhtenevyys koordinaatistossa.

(C3) aksiooma voidaan todistaa myös etäisyysfunktion dist^2 avulla. Koska pisteet A, B, C ovat suoralla siten, että $A * B * C$, niin tällöin

$$\mathrm{dist}(A,B) + \mathrm{dist}(B,C) = \mathrm{dist}(A,C).$$

Jotta edellisessä yhtälössä ei esiintyisi neliöjuuria, niin korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin, koska molemmat puolet ovat positiivisia:

$$(\mathrm{dist}(A,B) + \mathrm{dist}(B,C))^2 = \mathrm{dist}^2(A,C),$$
$$\mathrm{dist}^2(A,B) + [2] \cdot \mathrm{dist}(A,B) \cdot \mathrm{dist}(B,C) + \mathrm{dist}^2(B,C) = \mathrm{dist}^2(A,C).$$

Keskimmäinen termi yhtälön vasemmalla puolella on vielä funktion dist avulla muodostettu, mutta todistuksen lopuksi huomataan, että keskimmäinenkin termi voidaan esittää ilman neliöjuuria.

Olkoon suora $y = [m]x + [b]$ ja piste $A = ([a_1], [a_2])$, jolla on pienin x-koordinaatti annetuista kolmesta pisteestä. Jos kaikilla pisteillä on sama x-koordinaatti, niin valitaan piste A siten, että silä on pienin y-koordinaatti ja tehdään vastaava päättely. Valitaan $[h], [k] > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} B &= ([a_1] + [h], [a_2] + [m][h]) \\ C &= ([a_1] + [h] + [k], [a_2] + [m]([h] + [k]). \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(A,B) &= \sqrt{([a_1] - ([a_1] + [h]))^2 + ([a_2] - ([a_2] + [m][h]))^2} \\ &= \sqrt{[h]^2 + ([m][h])^2} = [h]\sqrt{[1] + [m]^2}, \\ \mathrm{dist}(B,C) &= [k]\sqrt{[1] + [m]^2}, \\ \mathrm{dist}(A,C) &= ([h] + [k])\sqrt{[1] + [m]^2}. \end{aligned}$$

Toiseen korottamalla edelliset yhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}^2(A,B) &= [h]^2([1] + [m]^2), \\ \mathrm{dist}^2(B,C) &= [k]^2([1] + [m]^2), \\ \mathrm{dist}^2(A,C) &= ([h] + [k])^2([1] + [m]^2). \end{aligned}$$

Nyt kun sijoitetaan saatuja tietoja alkuperäiseen yhtälöön, niin saadaan

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}^2(A,B) + [2] \cdot \mathrm{dist}(A,B) \cdot \mathrm{dist}(B,C) + \mathrm{dist}^2(B,C) \\ &= [h]^2([1] + [m]^2) + [2]([h]\sqrt{[1] + [m]^2})([k]\sqrt{[1] + [m]^2}) + [k]^2([1] + [m]^2) \\ &= [h]^2([1] + [m]^2) + [2][h][k]([1] + [m]^2) + [k]^2([1] + [m]^2) \\ &= ([h] + [k])^2([1] + [m]^2) \\ &= \mathrm{dist}^2(A,C). \end{aligned}$$

(C4) aksioomassa on kyse kulmien muodostamisesta. On siis annettu kulma α ja jana, joka alkaa pisteestä A ja on suoralla, jonka kulmakerroin on m. Täytyy siis löytää jana, joka kulkee pisteen A kautta ja on suoralla, jonka kulmakerroin on m' siten, että

$$\tan\alpha = \pm\left|\frac{m'-m}{1+mm'}\right|.$$

Yhtälö voidaan ratkaista kulmakertoimen m' suhteen. Jos kulma on terävä, niin valitaan etumerkiksi $+$ ja saadaan

$$(1+mm')\tan\alpha = m'-m,$$
$$(mm')\tan\alpha - m' = -m-\tan\alpha,$$

$$m' = \frac{-m-\tan\alpha}{m\tan\alpha-1},$$
$$m' = \frac{m+\tan\alpha}{1-m\tan\alpha}.$$

Jos kulma on tylppä, niin valitaan etumerkiksi $-$ ja saadaan samaan tapaan

$$(1+mm')\tan\alpha = -m'+m,$$

jolloin

$$m' = \frac{m-\tan\alpha}{1+m\tan\alpha}.$$

Kun yhdistetään nämä kaksi tulosta, saadaan yhtälö

$$m' = \frac{m\pm\tan\ \alpha}{1\mp m\tan\ \alpha}.$$

(C5) kaikki kulmat ovat yhteneviä itsensä kanssa. Myös transitiivisuus saadaan suoraan tangenttifunktion avulla, jolla määriteltiin kulmien yhtenevyys. □

Yhtenevyysaksioomien jälkeen aksioomalistalla tulee SKS-sääntö, mutta sen todistamista ei käydä läpi tässä kirjoitelmassa. Todistus on esitetty Hartshornen teoksen kappaleessa 17 [$\mathbf{5}, s.148-158$], jossa annetaan ensin määritelmä kuvioiden siirtämiselle Hilbertin tasolla. Tätä ominaisuutta tarvitaan, koska Eukleides todistaa SKS-säännön siirtämällä kolmion toisen päälle. Kun kolmioiden vastaavat kulmat laitetaan alkamaan samasta pisteestä, voidaan kolmioiden välisiä vertailuja tehdä helpommin.

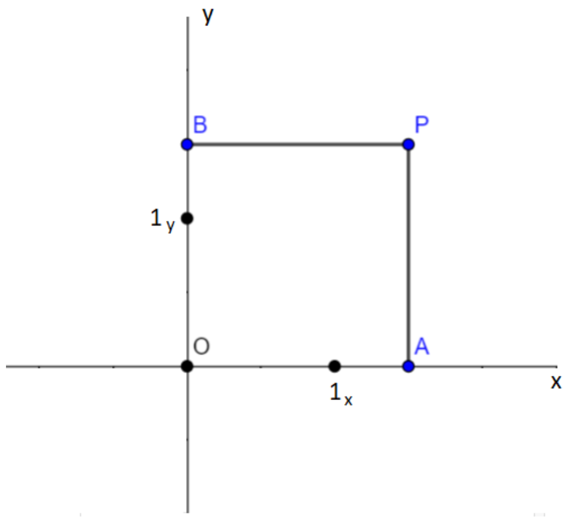
3.5. Isomorfinen kuvaus

Tässä tutkielman viimeisessä kappaleessa näytetään, että mikä tahansa Hilbertin taso, joka toteuttaa paralleeliaksiooman, on isomorfinen vastaavan jana-aritmetiikan kunnan karteesiselle geometrialle. Termi isomorfisuus juontaa juurensa Kreikan kielen sanoista ”iso”ja ”morph”, jotka vastaavat ilmaisua ”samaa muotoa”. Tässä tapauksessa isomorfisuus tarkoittaa, että molemmat geometriset mallit käyttäytyvät samoin.

Täsmällinen määritelmä isomorfisuudelle geometriassa menee näin:

Määritelmä 3.10. Olkoon tasot Π ja Π' Hilbertin tasoja. Isomorfia tasojen Π ja Π' välillä on bijektiivinen kuvaus $\phi : \Pi \to \Pi'$ tasolta Π tasolle Π', joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) Osajoukko $L \subseteq \Pi$ on suora, jos ja vain jos $\phi(L) \subseteq \Pi'$ on suora.
(2) Kolme pistettä $A, B, C \in \Pi$ toteuttaa järjestyksen $A * B * C$ jos ja vain jos kuvapisteet toteuttavat järjestyksen $\phi(A) * \phi(B) * \phi(C)$ tasolla Π'.



Kuva 3.6.

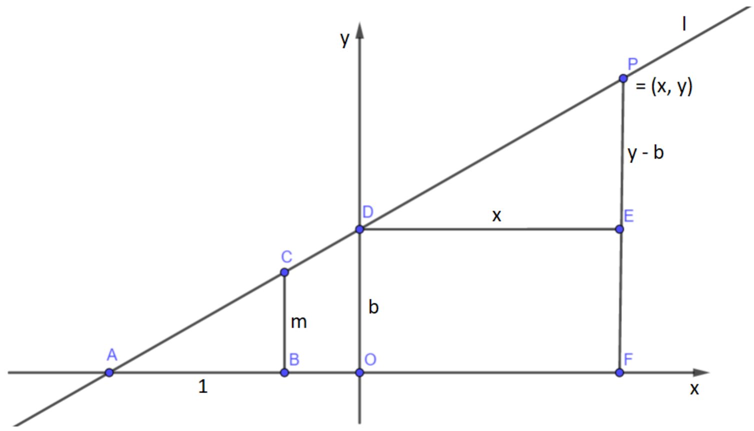
(3) Olkoon neljä pistettä $A, B, C, D \in \Pi$. Muodostetaan janat AB ja CD. Janoille pätee $AB \cong CD$ jos ja vain jos janat $\phi(A)\phi(B)$ ja $\phi(C)\phi(D)$ ovat yhtenevät tasossa Π'.
(4) Jos kulma α on muodostettu janoista AB ja AC tasossa Π voidaan sanoa, että $\phi(\alpha)$ on muodostettu janoista $\phi(A)\phi(B)$ ja $\phi(C)\phi(D)$ tasossa Π'. Jos kulmat α ja β ovat tasossa Π, niin ne ovat yhtenevät jos ja vain jos $\phi(\alpha)$ ja $\phi(\beta)$ ovat yhtenevät tasossa Π'.

Lause 3.11. *Olkoon Π Hilbertin taso, joka toteuttaa paralleeliaksiooman ja olkoon kunta F aiemmin määritelty jana-aritmetiikan kunta tasossa Π. Tällöin kunta F on Pythagoraan kunta (seuraus 2.6) ja Π on isomorfinen karteesisen koordinaatiston F^2 kanssa kunnassa F.*

Todistus. Pohjaksi otetaan kaksi kohtisuoraa suoraa tasossa Π, joita kutsutaan x-akseliksi ja y-akseliksi, ja niiden leikkauspiste O on origo (Kuva 3.6). Molemmilta akseleilta valitaan pisteet 1_x ja 1_y siten, että molemmat janat $O1_x$ ja $O1_y$ vastaavat luokkaa $[1] \in F$. Kun $P \in \Pi$, niin valitaan piste A x-akselilla ja piste B y-akselilla siten, että suora PA on kohtisuorassa x-akseliin nähden ja suora PB on kohtisuorassa y-askeliin nähden. Näin mikä tahansa piste P voidaan ilmoittaa luokkien $[OA] = [a] \in F$ ja $[OB] = [b] \in F$ avulla.

Määritellään kuvaus $\phi : \Pi \to F^2$, $\phi(P) = (\pm[a], \pm[b])$, jossa valitsemme luokalle $[a]$ $+$ merkin, jos piste A on positiivisella x-akselilla, ja $-$ merkin, jos A on negatiivisella x-akselilla. Samoin pisteen B ja y-akselin mukaan määräytyy luokan $[b]$ etumerkki. Näin saadaan bijektiivinen kuvaus ϕ, joka kuvaa tason Π pisteet karteesiseen koordinaatistoon F^2.

Osoitetaan, että kuvaus ϕ on isomorfinen. Tulee siis näyttää, että määritelmän 3.10 neljä ehtoa toteutuvat kyseisessä kuvauksessa. Tämä tarkoittaa sitä, että luvuissa 1 ja 2 määritelty aksiomaattinen geometria tasolla Π käyttäytyy täsmälleen samoin kuin luvun 3 alussa algebrallisten ominaisuuksien avulla määritelty geometria karteesisessa koordinaatistossa.



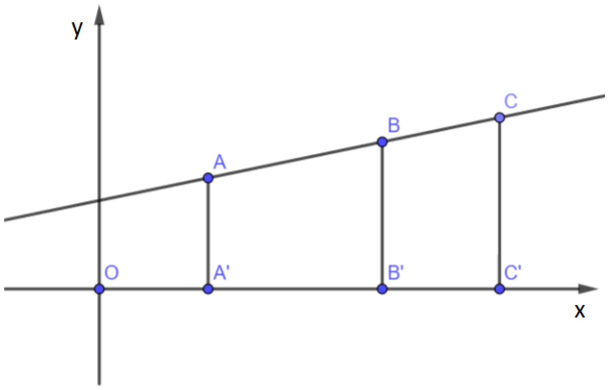
Kuva 3.7.

(1) Olkoon suora l tasossa Π (Kuva 3.7). Jos suora l on x- tai y-akselin suuntainen, niin piste P voidaan ilmaista aiemmin määriteltyjen janojen $[a]$ ja $[b]$ avulla ja yhteys pätee myös toiseen suuntaan. Annetaan siis suoran l leikata x-akselia yksikäsitteisessä pisteessä $A \neq O$, koska jos $A = O$, niin $[b] = [0]$, jolloin suora l olisi origokeskeisenä muotoa $y = [m]x$. Mitataan x-akselille piste B siten, että $[AB] = [1]$. Olkoon jana $[BC] = [m]$, missä $C \in l$, kohtisuorassa x-akseliin nähden. Ekvivalenssiluokka $[m]$ on nyt suoran l kulmakerroin ja olkoon kulma $\angle BAC = \alpha$.

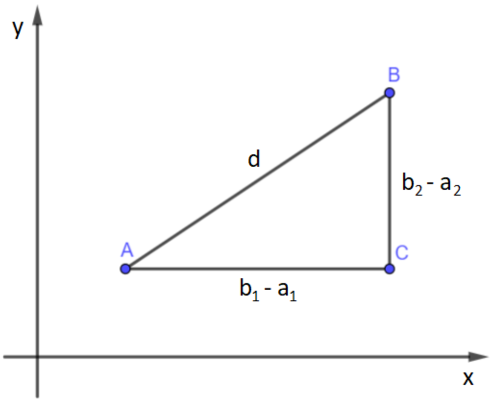
Olkoon piste D positiivisen y-akselin ja suoran l leikkauspiste ja olkoon $[OD] = [b] \in F$. Jos piste D olisi negatiivisella y-akselilla, niin määriteltäisiin $-[OD] = [b]$. Nyt piste $P = (x, y)$ voi olla mikä tahansa piste koordinaatistossa F^2. Tehdään kolmio $\triangle DPE$ käyttäen akselien suuntaisia suoria. Olkoon $[DE] = [x]$ ja $[PE] = [y] - [b]$. Piste P on suoralla l jos ja vain jos kulma $\angle EDP = \alpha$. Jana-aritmetiikan tulon määritelmän mukaan tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $[y] - [b] = [m][x]$, koska jos valitaan määritelmän 1.11 tapaan kolmioiksi $\triangle ABC$ ja $\triangle DEP$, niin tuloksi tulee $[1]([y] - [b]) = [m][x]$. Tällöin piste $P = (x, y)$ on suoralla l jos ja vain jos $[y] = [m][x] + [b]$. Koska koordinaatistossa F^2 suorat määritellään lineaarisina yhtälöinä, tämä todistaa ensimmäisen ominaisuuden isomorfisuudesta: $L \subsetneq \Pi$ on suora, jos ja vain jos $\phi(L) \subsetneq F^2$, on suora.

(2) Olkoon pisteet A, B ja C samalla suoralla tasossa Π (Kuva 3.8). Kohdan (1) mukaan niiden kuvat tasossa F^2 ovat myös samalla suoralla. Olkoon A', B' ja C' näiden pisteiden projektiot x-akselille. Käydään yksinkertaisuuden vuoksi läpi vain tapaus, jossa pisteet A, B ja C ovat koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä. Todistus menee samoin myös muissa tapauksissa, mutta koordinaattipisteiden etumerkit vaihtelevat.

Koska suorat AA', BB' ja CC' ovat yhdensuuntaiset, pisteet A ja C ovat eri puolilla suoraa BB' jos ja vain jos A' ja C' ovat eri puolilla tätä suoraa. Tällöin siis $A*B*C$ jos ja vain jos $A' * B' * C'$. Olkoon $[OA'] = [a], [OB'] = [b]$ ja $[OC'] = [c]$ kunnan F ekvivalenssiluokkia. Tällöin $A' * B' * C'$ tarkoittaa, että joko janat ovat järjestyksessä $[a] < [b] < [c]$ tai päinvastoin $[c] < [b] < [a]$, minkä ansiosta pystytään vertailemaan janojen ekvivalenssiluokkia kunnassa F. Välissäolon määritelmän mukaan tasossa F^2 on yhtäpitävää sanoa, että $\phi(A) * \phi(B) * \phi(C)$.



KUVA 3.8.



KUVA 3.9.

(3) Olkoon pisteet A ja B kaksi pistettä tasossa Π ja olkoon $[AB] = [d] \in F$ (Kuva 3.9). Toisaalta olkoon $\phi(A) = ([a_1], [a_2])$ ja $\phi(B) = ([b_1], [b_2])$. Piirretään suorakulmainen kolmio $\triangle ABC$, jonka kateetit ovat yhdensuuntaiset koordinaatiston akselien kanssa. Huomataan, että $[AC] = [b_1] - [a_1]$ ja $[BC] = [b_2] - [a_2]$ oletusten nojalla. Lauseen 2.5 mukaan saadaan

$$[d]^2 = ([b_1] - [a_1])^2 + ([b_2] - [a_2])^2$$

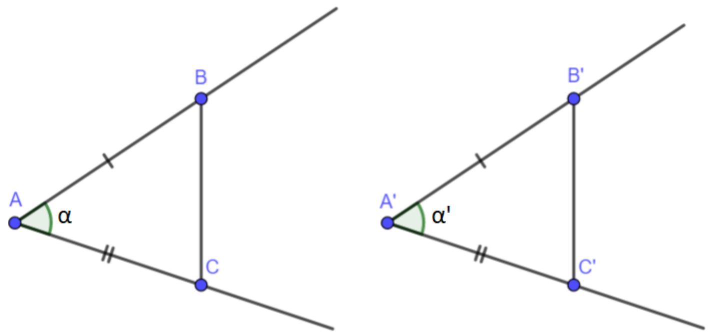
kunnassa F.

Olkoon $[A'B'] = [d'] \in F$. Jos $\phi(A') = ([a_1'], [a_2'])$ ja $\phi(B') = ([b_1'], [b_2'])$, niin saadaan

$$[d']^2 = ([b_1'] - [a_1'])^2 + ([b_2'] - [a_2'])^2.$$

Koska kunta F rakennettiin janojen ekvivalenssiluokista, niin tiedetään, että $[d] = [d']$ jos ja vain jos $[d]^2 = [d']^2$ sillä molemmat ovat kunnan F positiivisia alkioita. Voidaan siis sanoa, että $[AB] = [A'B']$ jos ja vain jos $[d] = [d']$, josta saadaan $[AB] = [A'B']$ jos ja vain jos $\phi(A)\phi(B) \cong \phi(A')\phi(B')$.

(4) Osoitetaan että kaksi kulmaa α ja α' tasossa Π ovat yhtenevät jos ja vain jos $\phi(\alpha)$ ja $\phi(\alpha')$ ovat yhtenevät tasossa F^2.



KUVA 3.10.

Olkoon kulmat α ja α' pisteissä A ja A' ja valitaan mitkä tahansa pisteet B ja C kulman α molemmilta sivuilta (Kuva 3.10). Sitten valitaan kulman α' sivuilta vastaavat pisteet B' ja C' siten, että $[AB] = [A'B']$ ja $[AC] = [A'C']$. Tehdään janat BC ja $B'C'$, jotta saadaan kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$.

Jos $\alpha \cong \alpha'$, niin SKS-säännön mukaan kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhtenevät joten erityisesti $[BC] = [B'C']$. Myös toisinpäin saadaan, että jos $[BC] = [B'C']$ niin SSS-säännön mukaan kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhtenevät ja $\alpha \cong \alpha'$. Täten $\alpha \cong \alpha'$, jos ja vain jos $BC \cong B'C'$.

Kun kuvataan pisteet A, B, C, A', B' ja C' kuvauksella ϕ tasoon F^2, niin $\phi(A)\phi(B) \cong \phi(A')\phi(B')$ ja $\phi(A)\phi(C) \cong \phi(A')\phi(C')$ kohdan (3) mukaan. Koska Hilbertin aksioomat pätevät koordinaattigeometriassa, niin vastaavasti nähdään, että $\phi(\alpha) \cong \phi(\alpha')$ jos ja vain jos $\phi(B)\phi(C) \cong \phi(B')\phi(C')$ tasossa F^2. Kun yhdistetään tämä tulos kohdan (3) tuloksen kanssa janoille BC ja $B'C'$, niin nähdään että

$$\alpha \cong \alpha' \iff BC \cong B'C' \iff \phi(B)\phi(C) \cong \phi(B')\phi(C') \iff \phi(\alpha) \cong \phi(\alpha').$$

$\square$

Kirjallisuutta

[1] Eukleides Aleksandrialainen, suom. Pekka Aschan, nykysuom. Lauri Kahanpää: *Alkeet. Kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometria.* toinen painos, Grano, Helsinki, 2016.

[2] George D. Birkhoff: *A set of postulates for plane geometry.* Annals of Mathematics, 33, 329-345, 1932. http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/ahg/1932_Birkhoff.pdf

[3] Carl B. Boyer, suom. Kimmo Pietiläinen: *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa 1.* toinen painos, Art House, Helsinki 1994.

[4] Carl B. Boyer, suom. Kimmo Pietiläinen: *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa 2.* toinen painos, Art House, Helsinki 1994.

[5] Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond.* toinen painos, Springer-Verlag, New York, 2000.

[6] David Hilbert: *Foundations of Geometry.* La Salle Illinois, 1950. http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf