Picardin lauseen todistaminen Harnackin epäyhtälön avulla

Jussi Kauppinen

Ohjaajana Tero Kilpeläinen

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2020

Tiivistelmä: Jussi Kauppinen, *Picardin lauseen todistaminen Harnackin epäyhtälön avulla*, Matematiikan pro gradu -tutkielma, 24 sivua, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2020.

Charles Emile Picardin mukaan nimetty Picardin lause ottaa kantaa kompleksisesti differentioituvien eli analyyttisten funktioiden käyttäytymiseen. Kyseinen lause on tutkielman päätulos. Tarkalleen lauseessa väitetään, että kompleksitasossa differentioituva kompleksiarvoinen funktio saa enintään yhtä arvoa lukuunottamatta kaikki arvot. Tutkielmassa tullaan esittämään lauseelle Harnackin epäyhtälöön perustuva todistus.

Tutkielmassa esitellään runsaasti tarvittavia esitietoja, jotta lukija voi perehtyä halutessaan huolella päätuloksen todistuksen taustalla olevaan analyysiin. Esitiedot alkavat kompleksisen differentioituvuuden osuudesta, jossa keskitytään todistamaan harmonisten funktioiden kannalta tärkeät Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Kompleksisen integroinnin osuudessa rakennetaan todistus Taylorin kehitelmälle ja päätulosta muistuttavalle Liouvillen lauseelle. Molemmat tulokset liittyvät olennaisesti harmonisten funktioiden tuloksiin. Myös Möbius-kuvausten teoriaa esitellään sitä varten, että eräs Picardin lausetta muistuttava tulos saadaan todistettua harmonisille funktioille. Harmonisten funktioiden teoria liittyy jo suoraan päätuloksen todistukseen. Erityisesti tärkeitä tuloksia kyseisessä kappaleessa ovat tulokset, jotka liittävät harmoniset funktiot kompleksianalyyttisiin ja reaalianalyyttisiin funktioihin.

Harnackin epäyhtälöä ja Harnack-funktioita käsittelevässä kappaleessa esitellään kyseinen epäyhtälö ja siihen perustuvat funktiot. Harnack-funktioissa tärkeää tutkielman kannalta on niiden yhteys harmonisiin funktioihin. Kappaleessa esitellään päätulokseen tarvittava tulos harmonisten funktioiden jonojen käyttäytymisestä. Viimeinen tulos tutkielmassa ennen päätuloksen todistusta on lemma, jonka avulla Harnack-funktioida voidaan arvioida tarkemmin.

Picardin lauseelle esitettävä todistus ei lauseen luonteesta huolimatta juurikaan nojaudu kompleksianalyysin tuloksiin. Todistuksessa rakennetaan väitteen analyyttisesta funktiosta reaaliarvoisia harmonisia funktioita ja näytetään, että ei ole mahdollista, että alkuperäinen funktio jättää saamatta kaksi eri arvoa. Todistuksessa käytetään siis hyödyksi tutkielmassa esiteltyjen funktioiden yhteyksiä toisiinsa.

1. Johdanto

Charles Emile Picard oli Ranskalainen matemaatikko. Hänen tärkeimmät työnsä liittyvät matemaattiseen analyysiin, funktioteoriaan, differentiaaliyhtälöihin ja analyyttiseen geometriaan. Vuonna 1879 hän todisti, että kaikkialla kompleksisesti differentioituva funktio, joka ei ole vakio, saa kaikki arvot kompleksitasossa mahdollisesti yhtä lukuunottamatta. Tällaisesta funktiosta esimerkki on $f(z) = e^z$, sillä $f(z) \not\equiv 0$. Muuten funktio f saa arvoja $e^{Re(z)}$-säteisen ympyrän kehältä joten on helppo uskoa, että funktio saa kaikki loput kompleksitason arvot.
Picard käytti todistuksessaan Hermiten teoreemaa modulaarifunktioille [**1**]. Picardin jälkeen lauseelle on löydetty lukuisia muitakin todistuksia. Yksi esimerkki näistä on tässä tutkielmassa esiteltävä John Lewisin todistus Harnackin epäyhtälöön perustuen. Harnackin epäyhtälön perustana tässä tutkielmassa ovat harmoniset funktiot, jotka ovat läheisesti yhteydessä kompleksisesti differentioituviin funktioihin.
Tutkielmassa esiteltävät esitiedot alkavat kompleksisen differentioituvuuden osuudella, jossa esitellään tutkielman kannalta erityisen tärkeät Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Kompleksisen integroinnin osiosta on syytä nostaa esille Picardin lausetta muistuttava Liouvillen lause, jota tullaan tarvitsemaan tutkielmassa harmonisten funktioiden teoriassa. Myös Möbius-kuvausten teoriaa on esitelty tarvittava määrä. Kompleksianalyysin jälkeen perehdytetään lukija harmonisten ja kompleksianalyyttisten funktioiden väliseen yhteyteen. Harmonisten funktioiden teorian jälkeen tarkastelemaan niiden yhteyttä Harnack-funktioihin. Harnackin epäyhtälön yhteydessä tarkastellaan myös harmonisten funktioiden jonoihin liittyviä ominaisuuksia. Lopulta päästään päätulosta edeltävään lemmaan, joka liitty Harnack-funktioiden käyttäytymiseen. Kun tarvittavat esitiedot on käyty perusteellisesti läpi osoittautuu päätuloksen todistuskin varsin lyhyeksi. Päätuloksen analyyttisestä funktiosta konstruoidaan harmonisia funktioita joita arvioidaan Harnack-funktioiden ominaisuuksien avulla.

Kaikkien tutkielmassa esiintyvien lauseiden yhteyteen ei ole kirjoitettu todistusta, jolloin lukija voi halutessaan käydä tutustumassa todistukseen tarkemmin merkitystä lähteestä. Varsinkin kompleksiseen integrointiin liittyvä kappale on pyritty pitämään suppeana, koska siitä tulisi tutkielman päätavoitteen kannalta varsin pitkä.

2. Notaatio

Tutkielmassa esiintyy lukuisia määritelmiä tarvittaviin ennakkotietoihin liittyen. Suuri osa näistä tiedoista esitellään lukijalle silloin kun se on ajankohtaista. Useat määritelmät ja notaatiot esiintyvät niin paljon eri kohdissa tutkielmaa, että ne on kerätty tähän kappaleeseen. Erityisesti kappale sisältää joukko-oppiin ja topologiaan liittyvää notaatiota.

Määritelmä 2.1. Olkoon f on joukossa A n kertaa differentioituva funktio. Tällöin käytetään lyhennettä $f \in C^n(A)$.

Määritelmä 2.2 (Alue). Alue on avoin ja yhtenäinen joukko.

Määritelmä 2.3 (Ympäristö). Pisteen x_0 ympäristö on avoin kiekko $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| < r\}$ jollakin $r > 0$.

Seuraavat topologian määritelmät on lainattu Lehtosen Kompleksianalyysi 2-luentomonisteesta [**2**].

Määritelmä 2.4 (Silmukkahomotooppisuus). Polut γ_0 ja γ_1 ovat silmukkahomotooppisia joukon A suhteen, jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $H : [0,1] \times [a,b] \to A$, että

$$
\begin{aligned}
H(0,t) &= \gamma_0(t) \text{ kaikilla } t \in [a,b] \\
H(1,t) &= \gamma_1(t) \text{ kaikilla } t \in [a,b] \\
H(s,a) &= H(s,b) \text{ kaikilla } s \in [0,1].
\end{aligned} \tag{1}
$$

Määritelmä 2.5 (Nollahomotooppisuus). Silmukka $\gamma_0 : [a,b] \to A$ on nollahomotooppinen alueen A suhteen, jos on olemassa vakiopolku $\gamma_1 : [a,b] \to A$ jonka kanssa γ_0 on silmukkahomotooppinen.

Määritelmä 2.6 (Yhdesti yhtenäisyys). Avoin joukko A on yhdesti yhtenäinen, jos A on polkuyhtenäinen ja jokainen joukon A silmukka on nollahomotooppinen alueen A suhteen.

3. Kompleksinen differentioituvuus ja analyyttiset funktiot

Aluksi tullaan tutustumaan tarvittavaan analyyttisten funktioiden teoriaan. Suuri osa määritelmistä ja lauseista on lainattu Ari Lehtosen kompleksianalyysi 1 - luentomonisteesta [**3**].

Määritelmä 3.1. Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko. Sanotaan, että funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa. Tällöin merkitään

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ja sanotaan, että $f'(z_0)$ on funktion f kompleksinen derivaatta pisteessä z_0.

Määritelmä 3.2 (Kompleksianalyyttinen funktio). Analyyttinen funktio on funktio joka on kompleksisesti differentioituva jokaisessa sen määrittelyjoukon pisteessä. Kokonaisella funktiolla tarkoitetaan funktiota, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa.

Pelkän määritelmän lisäksi on hyödyllistä, että differentioituvuus voidaan todeta jollain muulla tavalla. Seuraavaksi tullaan esittelemään differentioituvuuskehitelmä, jota voidaan käyttää muiden olennaisten tulosten todistamisessa.

Lause 3.3 (Differentioituvuuskehitelmä). *Funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on analyyttinen pisteessä $z \in A$ jos ja vain jos on olemassa luku $c \in \mathbb{C}$ ja jossakin origon ympäristössä määritelty funktio E siten, että*

$$f(z+h) = f(z) + ch + E(h), \tag{$\mathbb{C}$D}$$

missä $\frac{E(h)}{|h|} \to 0$, kun $h \to 0$.

Huomattakoon, että yhtälö ($\mathbb{C}$D) muistuttaa vastaavaa tulosta reaaliselle differentioituvuudelle. Tuloksessa on $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja vakion c korvaa funktion f Jakobin matriisi.

TODISTUS. $\Rightarrow$: Oletetaan, että f on analyyttinen ja $f(z)$ on siis olemassa. Asetetaan $r > 0$ siten, että $B(0;r) \subset A$. Määritellään

$$E(h) = \begin{cases} f(z+h) - f(z) - f'(z)h, & \text{kun } 0 < |h| < r \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } h = 0. \end{cases}$$

Tällöin $f(z+h) = E(h) + f(z) + f'(z)h$, kun $|h| < r$, ja

$$\left|\frac{E(h)}{|h|}\right| = \left|\frac{E(h)}{h}\right| = \left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)\right| \to 0, \text{ kun } h \to 0.$$

$\Leftarrow$: Olkoot nyt $c \in \mathbb{C}$ ja E origon ympäristössä $B(0;r)$ määritelty funktio siten, että

$$f(z+h) = f(z) + ch + E(h).$$

Yhtälöstä ($\mathbb{C}$D) saadaan

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = c + \frac{E(h)}{h} \to c$$

eli $f'(z)$ on olemassa ja $c = f(z)$.

$\square$

Differentioituvuuskehitelmästä päästään suoraan seuraavaan tärkeään menetelmään eli Cauchyn ja Riemannin yhtälöihin. Yhtälöiden avulla voidaan funktion differentioituvuus todeta tutkimalla sen reaali- ja imaginääriosien osittaisderivaattoja. Yhtälöt ovat olennaisessa asemassa, kun myöhemmin tarkastellaan analyyttisten ja harmonisten funktioiden yhteyksiä.

Lause 3.4 (Cauchyn ja Riemannin yhtälöt). *Kompleksiarvoinen funktio $f = u+iv$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0 jos ja vain jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja Cauchyn ja Riemannin yhtälöt*

$$\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0) \text{ ja } \partial_x v(z_0) = -\partial_y u(z_0) \tag{2}$$

toteutuvat. Tällöin pätee lisäksi

$$f'(z) = \partial_x f(z) = -i\partial_y f(z).$$

TODISTUS. $\Rightarrow$: Oletetaan, että $f = u + iv$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0. Lauseesta 3.3 seuraa, että on origon ympäristössä määritelty funktio E siten, että

$$f(z_0+h) = f(z_0) + ch + E(h), \quad \frac{E(h)}{|h|} \to 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : h \to ch$ on lineaarinen, joten f on reaalisesti differentioituva.

Osoitetaan vielä mistä Cauchyn ja Riemannin yhtälöt seuraavat. Olkoon $h \in \mathbb{R}/\{0\}$. Tällöin

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = c + \frac{E(h)}{h} \to c, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Toisaalta

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \to \partial_x f(z_0), \quad \text{kun } t \to 0$$

eli $\partial_x f(z_0) = c$. Vastaavasti kun asetetaan $h = it, \quad t \in \mathbb{R}/0$ eli h sijaitsee imaginääriakselilla, saadaan

$$\frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{it} = ic + \frac{iE(it)}{it} \to ic, \quad \text{kun } t \to 0.$$

Toisaalta taas

$$\frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{t} \to \partial_y f(z_0)$$

joten $\partial_y f(z_0) = ic$. Nyt siis

$$\partial_x f(z_0) = c = -i\partial_y f(z_0).$$

Lopulta haluttu yhtälö saadaan siitä tiedosta, että

$$\partial_x f(z_0) = \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0) \text{ ja } \partial_y f(z_0) = \partial_y u(z_0) + i\partial_y v(z_0)$$

joten

$$\partial_x u(z) + i\partial_x v(z) = -i\partial_y u(z) + \partial_y v(z).$$

$\Leftarrow$: Oletetaan, pisteessä z_0 f on reaalisesti differentioituva ja lisäksi Cauchyn ja Riemannin yhtälöt pätevät. Tällöin on olemassa origon ympäristössä määritelty funktio E siten, että

$$f(z_0+h) = f(z_0) + Ah + E(h), \quad \frac{E(h)}{|h|} \to 0, \text{ kun } h \to 0, \tag{3}$$

missä Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden nojalla on

$$A = Df(z_0) = \begin{bmatrix} \partial_x u(z_0) & \partial_y u(z_0) \\ \partial_x v(z_0) & \partial_y v(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x u(z_0) & -\partial_x v(z_0) \\ \partial_x v(z_0) & \partial_x u(z_0) \end{bmatrix}.$$

Kun $h = h_1 + ih_2 = (h_1, h_2)$, niin

$$\begin{aligned} Ah &= \begin{bmatrix} \partial_x u(z_0)h_1 - \partial_x v(z_0)h_2 \\ \partial_x v(z_0)h_1 + \partial_x u(z_0)h_2 \end{bmatrix} \\ &= \partial_x u(z_0)h_1 - \partial_x v(z_0)h_2 + i(\partial_x v(z_0)h_1 + \partial_x u(z_0)h_2) \\ &= (\partial_x u(z_0) + i\partial_y v(z_0))(h_1 + ih_2) \end{aligned} \tag{4}$$

Funktion f reaalinen differentioituvuuskehitelmä on siis muotoa ($\mathbb{C}$D), missä $c = \partial_x u(z_0) + i\partial_y v(z_0)$, eli funktio f on kompleksisesti differentioituva.

$\square$

Lause 3.5. *Funktio $f = u + iv$ on analyyttinen pisteessä $z_0 \in A$, jos osittaisderivaatat $\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v$ ja $\partial_y v$ ovat olemassa joukossa A, jatkuvia pisteessä $z_0 \in A$ ja toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt (2).*

Todistus. Vedotaan tässä todistuksessa usean muuttujan analyysin tulokseen, jonka mukaan osittaisderivaattojen jatkuvuudesta seuraa funktion f reaalinen differentioituvuus pisteessä z_0. Yhdessä Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden kanssa lauseen 3.4 oletukset täyttyvät, joten f on analyyttinen pisteessä $z_0 \in A$. □

Seuraavia lauseita on lainattu Palkan kirjasta [**4**]. Lauseita tarvitaan avuksi osoittamaan vastaavanlaisia tuloksia harmonisille funktioille myöhemmin tutkielmassa.

Lause 3.6. *Olkoon $f = u + iv$ analyyttinen alueessa A. Jos $|f|$, u tai v on vakiofunktio alueessa A, niin myös f itse on vakiofunktio.*

Todistus. Oletetaan ensin, että u on vakiofunktio. Tällöin $\partial_x u = \partial_y u = 0$ kaikilla $z \in A$. Cauchy-Riemannin yhtälöiden mukaan $f' = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_x u - i\partial_y u = 0$ mistä seuraa, että f on vakiofunktio.

Oletetaan seuraavaksi, että $|f|$ on vakiofunktio. Eli tällöin siis $u^2 + v^2 = c$ koko alueessa A. Tässä $c \geq 0$ ja tilanne $c = 0$ on triviaali. Oletetaan siis, että $c > 0$. Kun derivoidaan edellistä lausetta puolittain x:n ja y:n suhteen, saadaan

$$2u\partial_x u + 2v\partial_x v \text{ ja } 2u\partial_y u + 2v\partial_y v.$$

Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden avulla saadaan edelleen

$$u\partial_x u - v\partial_y u \text{ ja } u\partial_y u + v\partial_x u$$

. Kerrotaan ensimmäinen yhtälö u:lla, toinen yhtälö v:llä ja lisätään vasemmat puolet toisiinsa jolloin saadaan

$$c\partial_x u = (u^2 + v^2)\partial_x u = 0,$$

mistä seuraa, että $\partial_x u = 0$ alueessa A. Vastaavasti voidaan näyttää, että $\partial_y u = 0$. Tästä seuraa, että $f' = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_x u - i\partial_y u = 0$. Täten f on vakiofunktio alueessa A. □

4. Kompleksinen integrointi

Seuraavassa osiossa käsitellään kompleksiseen integrointiin liittyviä tuloksia. Esitellään aluksi lyhyesti tärkeimmät määritelmät. Kompleksisen integroinnin osuuteen on käytetty lähteenä Olli Lehdon teosta [**5**].

Määritelmä 4.1 (Sileät polut). Polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on sileä, jos se on jatkuvasti differentioituva jokaisessa sen määrittelyjoukon pisteessä. Polku on paloittain sileä, jos sillä on äärellinen määrä pisteitä joissa se ei ole differentioituva.

Määritelmä 4.2 (Kompleksinen polkuintegraali). Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ kompleksinen polkuintegraali sileän polun $\gamma \subset A$ suhteen on

$$\int_\gamma f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Edellinen kaava yleistyy myös paloittain sileille poluille. Tällöin polku pilkotaan sileisiin osapolkuihin ja summataan integraalit näiden osapolkujen yli.

Lause 4.3. *Olkoon f jatkuva funktio ja γ paloittain sileä umpinainen polku alueessa A. Tällöin funktiolla f on integraalifunktio alueessa A, jos ja vain jos*

$$\int_\gamma f d\gamma = 0. \tag{5}$$

Todistus. $\Rightarrow$: Ehdon (5) välttämättömyys seuraa siitä, että polku γ on umpinainen ja funktiolla f on integraalifunktio. Polkuintegraalin määritelmän mukaan siis tällöin

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = 0.$$

$\Leftarrow$: Ehdosta (5) ja polkuintegraalin määritelmästä seuraa, että voidaan määritellä funktio F alueessa A, joka ei riipu polusta γ. Riittävyyden osoittamiseksi asetetaan siis

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi,$$

missä $z_0 \in A$. Edellinen tarkoittaa siis funktion f polkuintegraalia sellaisen polun yli, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z. Näytetään, että F on funktion f integraalifunktio. Otetaan piste z ja $z + \lambda$ pisteen z ympäristöstä.

$$F(z+\lambda) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\lambda} f(\xi)d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \int_{z}^{z+\lambda} f(\xi)d\xi,$$

missä viimeinen integraali on janapolun $L = [z, z+\lambda]$ yli. Jatkuvuuden nojalla

$$f(\xi) = f(z) + E(\xi - z),$$

missä $E(\xi - z) \to 0$, kun $\xi \to z$. Tästä seuraa, että

$$F(z+\lambda) - F(z) = f(z)\lambda + \int_{z}^{z+\lambda} E(\xi - z)d\xi.$$

Saadaan siis arvioitua

$$\left| \frac{F(z+\lambda) - F(z)}{\lambda} - f(z) \right| \leq \frac{\int_z^{z+\lambda} |E(\xi - z)||d\xi|}{\lambda} \leq \max_{\xi \in L} |E(\xi - z)|.$$

Funktiolla F on siis differentioituva pisteessä z ja $F'(z) = f(z)$.

□

Cauchyn integraalilausetta tarvitaan vain seuraavan lauseen todistuksessa. Lauseen todistuksen teoriaan voi tutustua tarkemmin Lehdon teoksessa [**5**] luvussa 11. Esitellään tässä tutkielmassa lauseen väittämä todistamatta sitä.

Lause 4.4. *Olkoon f analyyttinen alueessa A. Tällöin*

$$\int_\gamma f d\gamma = 0$$

jokaiselle nollahomotooppiselle polulle $\gamma \subset A$.

Lause 4.5. *Jos funktio f on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa A, niin funktiolla f on integraalifunktio alueessa A*

Todistus. Jos funktio on yhdesti yhtenäinen pätee jokaiselle joukon A umpinaiselle polulle γ

$$\int_\gamma f d\gamma = 0.$$

Täten lauseen 4.3 nojalla funktiolla f on alueessa A integraalifunktio.

□

Cauchyn integraalikaavaa tarvitaan Taylorin kehitelmän olemassaolon perustelemiseen. Todistus sivuutetaan tässä tutkielmassa, mutta sen voi käydä lukemassa Lehdon kirjasta [**5**] sivulta 56.

Lause 4.6 (Cauchyn integraalikaava ympyrälle). *Olkoon f analyyttinen alueessa A ja D kiekko, jonka sulkeuma sisältyy alueeseen A. Tällöin jokaisessa pisteessä $z \in D$ pätee*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz$$

Analyyttisyydestä seuraa myös että funktiolla on potenssisarjaesitys. Kyseistä potenssisarjaa kutsutaan Taylorin kehitelmäksi ja kyseinen kehitelmä tulee olemaan tärkeä kun tarkastellaan harmonisten funktioiden reaalianalyyttisyyttä.

Lause 4.7 (Taylorin kehitelmä). *Jos funktio f on analyyttinen alueessa A, niin sillä on jokaisen kertaluvun derivaatat jokaisessa pisteessä $z \in A$. Lisäksi pisteen $a \in A$ ympäristössä on voimassa Taylorin kehitelmä*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n \tag{6}$$

ja sarja suppenee ainakin kun $z \in B(a, \rho)$, missä ρ on pisteen a etäisyys alueen A reunasta

Todistus. Valitaan mielivaltainen piste $a \in A$. Kirjoitetaan

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{z-a}{\xi - a})}.$$

Täten identiteetistä

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=1}^{k} q^{n-1} + \frac{q^k}{1-q}$$

saadaan

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=1}^{k} \frac{(z-a)^{n-1}}{(\xi - a)^n} + \frac{(z-a)^k}{(\xi - a)^k(\xi - z)}$$

Sijoitetaan edellinen Cauchyn integraalikaavaan ja asetetaan $D = \{z : |z-a| < r\}$ siten, että $r < \rho$. Tällöin saadaan kaava

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} c_n(z-a)^n + R_k(z),$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta D} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} \tag{7}$$

ja

$$R_k(z) = \frac{(z-a)^k}{2\pi i}\int_{\delta D} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^k(\xi - z)}.$$

Huomataan, että alueen D reunalla pätee $|\xi - z| \geq r - |z-a|$ ja $|f(\xi)| \leq M$. Tämän perustella saadaan arvioitua

$$|R_k(z)| \leq \frac{Mr}{r - |z-a|}(\frac{|z-a|}{r})^k.$$

Koska $|z-a| < r$ saadaan raja-arvo $\lim_{k\to\infty} R_k = 0$. Tästä seuraa siis, että potenssisarja $\sum c_n(z-a)^n$ suppenee kiekossa D ja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Täten funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat alueessa D ja

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Erityisesti on $f^{(k)}(a) = k!c_k$, mikä siis todistaa kaavan (6). Koska $r < \rho$, voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua ρ, pätee yhtälö (6) jokaisella z, jolla $|z-a| < \rho$. □

Lause 4.8 (Liouvillen lause). *Kokonainen ja rajoitettu funktio f on vakio.*

Todistus. Koska funktio f on kokonainen, on sillä Taylorin kehitelmä kiekossa $D = B(a,r)$, missä $a \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$. Eli siis

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

missä kertoimet $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ määräytyvät kaavasta 7. Kun funktion f Taylorin kehitelmään sijoitetaan $\xi - a = re^{i\theta}$, saadaan

$$c_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta \tag{8}$$

Oletetaan, että $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Kaavasta 8 seuraa, että

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Edellinen pitää paikkansa kaikilla arvoilla $r > 0$ joten $c_n = 0$, kun $n \geq 1$. Siispä $f(z) = c_0$.

□

Liouvillen lauseen kohdalla on osuvaa tarkastella sen yhteyttä Picardin lauseeseen. Molemmat lauseet ottavat kantaa kokonaisen ei-vakion funktion käyttäytymiseen. Liouvillen lause väittää toisin sanoin, että edellä mainitun funktion kuvajoukko ei voi olla rajoitettu, kun taas Picardin lause väittää tarkemmin, että funktio saa lähes kaikki arvot koko kompleksitasossa.

5. Möbius-kuvaukset

Möbius-kuvausten ominaisuuksia tarvitaan lauseen 6.4 todistuksessa. Kappaleen teoriaan on käytetty lähteenä Lehtosen luentomonistetta [**2**].

Määritelmä 5.1 (Möbius-kuvaus). Kuvausta $f : \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

missä $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$ kutsutaan Möbius-kuvaukseksi. Tässä $\tilde{\mathbb{C}}$ tarkoittaa laajennettua kompleksitasoa eli $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Tässä

$$\text{jos } c = 0, \text{ niin } f(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{d}, & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty \end{cases} \tag{9}$$

ja

$$\text{jos } c \neq 0, \text{ niin } f(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\} \\ \infty, & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Huomautus 5.2. Yksinkertaisimmat Möbius-kuvaukset ovat:

(1) siirto $z \to z + w$,
(2) venytys $z \to \lambda z$, missä $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja
(3) inversio $z \to \frac{1}{z}$.

Erityistä on se, että jokainen Möbius-kuvaus on yhdiste näistä kuvauksista, sillä

$$\frac{az+b}{cz+d} = \begin{cases} \dfrac{bc-ad}{c^2(z+d/c)} + \dfrac{a}{c}, & \text{jos } c \neq 0 \\ \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}. \end{cases}$$

Lause 5.3. *Möbius-kuvaus kuvaa yleistetyn ympyrän yleistetyksi ympyräksi. Yleistetyllä ympyrällä tarkoitetaan kompleksitason ympyrää tai suoraa johon on lisätty äärettömyyspiste.*

Todistus. Sijoitetaan $z = x + iy$ yhtälöön $ax + by + c = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{2}(z+\overline{z}) - \frac{b}{2}(z-\overline{z}) + c = 0 \\ &(\frac{a}{2} - \frac{b}{2})z + (\frac{a}{2} + \frac{b}{2})\overline{z} + c = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Kompleksitason suorat ovat siis muotoa

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + c = 0, \text{ missä } B \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ja } c \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

olevien yhtälöiden ratkaisujoukkoja. Vastaavasti ympyrän $|z - z_0| = r$ yhtälö saadaan muotoon

$$z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + c = 0, \tag{13}$$

missä $B = -z_0 \in \mathbb{C}$ ja $c = |B|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$.
Ainakin siirto ja kuvaus säilyttävät selvästi suorat suorina ja ympyrät ympyröinä. Jos z on suoralla 12, niin kuvapiste $w = 1/z$ toteuttaa yhtälön

$$B\overline{w} + \overline{B}w + cw\overline{w} = 0.$$

Jos $c = 0$, on edellinen origon kautta kulkevan suoran yhtälö. Muulloin yhtälö ympyrälle, jonka säde on $|B|/|c|$ ja keskipiste $-B/c$).
Jos z on ympyrän 13 kehällä, niin sen kuvapiste $w = 1/z$ toteuttaa yhtälön

$$1 + \overline{B}\overline{w} + Bw + cw\overline{w} = 0.$$

Jos $c = 0$ edellinen on suoran yhtälö. Muulloin yhtälö on ympyrän yhtälö.

□

Seuraus 5.4. *Jos A on avoin kiekko, suljetun kiekon ulkopuoli tai suoran määräämä avoin puolitaso, niin kuvajoukko $f(A)$ on myös jokin kyseisistä joukoista. Seuraava lause on lainattu Palkan teoksesta* [**4**].

Lause 5.5. *Olkoon f Möbius-kuvaus, joka ei ole identtinen kuvaus. Tällöin kuvauksella f on joko yksi tai kaksi kiintopistettä eli pistettä, jolle pätee $f(z) = z$.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $c = 0$. Tällöin $f(z) = \alpha z + \beta$, missä $\alpha = a/d$ ja $\beta = b/d$. Tällainen kuvaus kiinnittää aina pisteen $z = \infty$. Kun $\alpha \neq 1$ kuvaus f kiinnittää myös pisteen $-\beta/(\alpha - 1)$. Tilanteessa $\alpha = 1$ ja $\beta = 0$ f on identtinen kuvaus.

Yhtälöllä $\alpha z + \beta = z$ ei voi olla muita ratkaisuja kuin edeltävät, joten kiinnitettyjä pisteitä on korkeintaan kaksi.

Oletetaan nyt, että $c \neq 0$. Tällöin $f(-d/c) = \infty$ ja $f(\infty) = a/c$, joten kyseiset pisteet eivät ole kiinnitettyjä. Ainoat kiinnitetyt pisteet ovat siis yhtälön

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

ratkaisuja. Voidaan jättää siis huomiotta pisteen jossa vasemman puolen nimittäjä on nolla, joten yhtälö saadaan muotoon

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Koska $ad - bc = 1$, saadaan tämän yhtälön juuret muotoon

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}{2c},$$

mistä nähdään, että kiinnitettyjä pisteitä on joko yksi tai kaksi.

□

Lause 5.6. *Olkoot $\{z_1, z_2, z_3\}$ ja $\{w_1, w_2, w_3\}$ kaksi kolmen laajennetun kompleksitason eri pisteen joukkoa. Tällöin on olemassa täsmällen yksi Möbius-kuvaus $f : \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ jolle pätee*

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3.$$

Todistus. Oletetaan, että $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ ja $w_3 = \infty$. Tällöin kuvaukseksi f voidaan valita

$$f(z) = \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}.$$

Oletetaan, että on toinen kuvaus g, jolle pätee $g(z_j) = w_j, \quad j \in \{1,2,3\}$. Tällöin yhdistetylle kuvaukselle $h = f \circ c^{-1}$ pätee $h(1) = 1$, $h(0) = 0$ ja $h(\infty) = \infty$. Tällöin kuitenkin h on identtinen kuvaus, koska ei-identtisellä Möbius-kuvauksella korkeintaan kaksi kiintopistettä. Tästä seuraa, että $g = f$.

Oletetaan, että $w_1 \in \tilde{\mathbb{C}}$, $w_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$ ja $w_3 \in \tilde{\mathbb{C}}$ ovat mielivaltaiset eri pisteet. Valitaan Möbius-kuvaukset g ja h, joille pätee $g(w_1) = 1$, $g(w_2) = 0$, $g(w_3) = \infty$, $h(z_1) = 1$, $h(z_2) = 0$ ja $h(z_3) = \infty$. Tällöin $g^{-1}(1) = w_1$, $g^{-1}(0) = w_2$, $g^{-1}(\infty) = w_3$. Tällöin kuvauksella $f := g^{-1} \circ h$ on haluttu ominaisuus. □

Määritelmä 5.7 (Kaksoissuhde). Olkoot $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \tilde{\mathbb{C}}$ eri kompleksilukuja. Kompleksilukua

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_4-z_2)(z_1-z_3)}{(z_4-z_3)(z_1-z_2)}$$

sanotaan kyseisten lukujen kaksoissuhteeksi. Jos $z_i = \infty$ on kaksoissuhteen arvo se raja-arvo, kun kyseinen z_i lähestyy ääretöntä.

Lause 5.8. *Olkoot* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \tilde{\mathbb{C}}$ *neljä eri pistettä. Tällöin Möbius-kuvaukselle* $f : \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ *pätee*

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Todistus. Olkoon g se Möbius-kuvaus, jolle $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = 0$ ja $g(z_3) = \infty$ eli $g(z) = [z_1, z_2, z_3, z]$. Tällöin pätee $g \circ f^{-1}(f(z_1)) = 1$, $g \circ f^{-1}(f(z_2)) = 0$ ja $g \circ f^{-1}(f(z_3)) = \infty$. Toisaalta kuvauksella $z \to [f(z_1), f(z_2), f(z_3), z]$ on samat ominaisuudet. Eli edellisen lauseen nojalla

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g(z_4) = g \circ f^{-1}(z_4) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)].$$

□

Huomattakoon, että edellinen lause antaa meille kätevän tavan rakentaa Möbius-kuvaus, joka kuvaa annetut kolme pistettä z_1, z_2 ja z_3 kolmelle eri pisteelle w_1, w_2 ja w_3. Tehtävänä on vain ratkaista $f(z)$ yhtälöstä

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

.

Esimerkki 5.9. Etsitään Möbius-kuvaus, joka kuvaa puolitason $\{z \in \mathbb{C} | Re(z) \geq a\}$ yksikköympyräksi. Valitaan ensin siirtokuvaus $h_1(z) = z - a$. Valitaan sitten kuvaus $h_2(z) = iz$, joka kiertää pistettä z kulman $\frac{\pi}{2}$ verran. Näiden kuvausten jälkeen alkuperäinen puolitaso on reaaliakselin yläpuolella oleva puolitaso. Käytetään sitten lausetta 5.8 ja rakennetaan kuvaus h_3, joka kuvaa ylemmän puolitason origokeskiseksi yksikkökiekoksi. Oletetaan, että reaaliakseli kuvautuu origokeskisen yksikköympyrän kehäksi ja asetetaan $h_3(-1) = i$, $h_3(0) = -1$ ja $h_3(1) = -i$. Tästä saadaan kaksoissuhde $[i, -1, -i, h_3(z)] = [-1, 0, 1, z]$, josta ratkaistaan

$$\begin{aligned}
\frac{2i(h_3(z)+1)}{(h_3(z)+i)(i+1)} &= \frac{-2z}{-(z-1)} \\
\iff (ih_3(z)+i)(1-z) &= -z(ih_3(z)+h_3(z)-1+i) \\
\iff ih_3(z) - izh_3(z) + i - iz &= -izh_3(z) - zh_3(z) + z - iz \\
\iff (i+z)h_3(z) &= z - i \\
\iff h_3(z) &= \frac{z-i}{z+i}
\end{aligned} \tag{14}$$

Tällöin $h_3(-2i) = 3$ eli kuvapiste on ympyrän ulkopuolella, joten h_3 kuvaa ylemmän puolitason ympyrän sisäpuoleksi. Alunperin haluttu kuvaus on siis $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$. Saadaan siis

$$h(z) = \frac{iz - ia - i}{iz - ia + i}. \tag{15}$$

Vastaavasti jos haluttaisiin kuvata vasemman puolitason yksikköympyräksi, tulisi kiertokuvaukseksi valita $h_2(z) = iz$ jolloin

$$h(z) = \frac{-iz + ia - i}{-iz + ia + i}. \tag{16}$$

Tätä esimerkkiä sovelletaan lauseen 6.4 todistuksessa.

6. Harmoniset funktiot

Seuraavaksi tarkastellaan mitä ovat harmoniset funktiot, ja miten ne liittyvät analyyttisiin funktioihin. Tässä tutkielmassa ollaan kiinnostuneita kompleksitasossa harmonisista funktioista. Seuraavat määritelmät yleistyisivät korkeampiin dimensioihin, mutta päätuloksen kannalta ei ole syytä käsitellä kyseisiä tilanteita. Harmonisten funktioiden teoriaan on käytetty lähteenä Olli Lehdon teosta [**5**].

Määritelmä 6.1 (Harmoninen funktio). Olkoon $A \subset \mathbb{C}$. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$. Funktio f on harmoninen joukossa A, jos se on kaksi kertaa derivoituva molempien muuttujien suhteen ja toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\Delta f(z) = \partial_x \partial_x f(z) + \partial_y \partial_y f(z) = 0.$$

kaikilla $z \in A$.

Seuraava tulos yhdistää reaaliarvoiset harmoniset funktiot suoraan kompleksianalyyttisten funktioiden reaali- ja imaginääriosaan.

Lause 6.2 (Analyyttisen funktion harmonisuus). *Olkoon $f = u + iv$ analyyttinen funktio. Tällöin funktion f reaali- ja imaginääriosat u ja v ovat harmonisia funktioita.*

TODISTUS. Funktio f on analyyttinen, joten se toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt:

$$\partial_x u = \partial_y v \text{ ja } \partial_x v = -\partial_y u.$$

Kun ensimmäistä yhtälöä derivoidaan muuttujan x suhteen ja toista yhtälöä muuttujan y suhteen, saadaan

$$\partial_x \partial_x u = \partial_x \partial_y v \text{ ja } \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u$$

ja vastaavasti muuttujien paikkoja vaihtamalla

$$\partial_y \partial_x u = \partial_y \partial_y v \text{ ja } \partial_x \partial_x v = -\partial_x \partial_y u.$$

Siispä osittaisderivaattojen vaihdannaisuuden nojalla

$$\Delta u = \partial_x \partial_x u + \partial_y \partial_y u = \partial_y \partial_x v - \partial_x \partial_y v = 0 \tag{17}$$

ja

$$\Delta v = \partial_x \partial_x v + \partial_y \partial_y v = -\partial_y \partial_x u + \partial_x \partial_y u = 0. \tag{18}$$

□

Edellisen tuloksen lisäksi myös käänteinen väite pätee lokaalisti.

Lause 6.3. *Olkoon u harmoninen aluessa A ja $z_0 \in A$. Tällöin on olemassa pisteen z_0 ympäristö $U \subset A$ ja joukossa U analyyttinen funktio f siten, että $u = Re(f)$. Lisäksi jos A on yhdesti yhtenäinen, voidaan asettaa $U = A$.*

Todistus. Asetetaan $w = \partial_x u + i(-\partial_y u)$. Funktio w toteuttaa täten Cauchyn ja Riemannin yhtälöt, mikä seuraa suoraan funktion u harmonisuudesta ja osittaisderivaattojen vaihdannaisuudesta. Harmonisen funktion osittaisderivaatat ovat jatkuvia joten w on analyyttinen alueessa A. Valitaan pisteelle z_0 yhdesti yhtenäinen ympäristö U. Analyyttisellä rajoittumafunktiolla $w|U$ on integraalifunktio $f = f_1 + if_2$. Funktio on määritelty lisättävää vakiota vaille joten voidaan olettaa, että $f(z_0) = u(z_0)$. Nyt voidaan laskea

$$f' = w = \partial_x u - \partial_y u = \partial_x f_1 + i\partial_y f_2 = \partial_x f_1 - i\partial_y f_1.$$

Siispä $\partial_x u = \partial_x f_1$ ja $\partial_y u = \partial_y f_1$ joten $u = f_1 + c$. Ehdon $f(z_0) = u(z_0)$ perusteella $u = f_1 = Re(f)$.

□

Lause 6.4. *Koko kompleksitasossa ei-vakio harmoninen funktio on rajoittamaton sekä ylhäältä, että alhaalta.*

Todistus. Olkoon u ei-vakio harmoninen funktio. Tällöin lauseen 6.3 mukaan u on jonkin kokonaisen funktion f reaaliosa. Jos u ei saa jotain arvoa a seuraa jatkuvuudesta, että u ei saa joko arvoja $x \leq a$ tai $x \geq a$. Kyseiset puolitasot halutaan kuvata rajoitetuksi joukoksi. Käytetään tähän apuna Möbius-kuvauksia. Oikean puolitason tapauksessa valitaan kuvaus h kuten yhtälössä (15). Vastaavasti vasemman puolitason tapauksessa valitaan möbius-kuvaus kuten yhtälössä (16). Molemmat kuvaukset kuvaavat vastaavan puolitason yksikköympyräksi eli rajoitetuksi joukoksi. Tällöin $h_1 \circ f$ ja $h_2 \circ f$ ovat kuitenkin Liouvillen lauseen nojalla vakiofunktioita. Tämän perusteella f ja tämän reaaliosa u ovat myös vakioita mikä on ristiriita alkuperäisen oletuksen kanssa.

□

Tarkastellaan miten harmoniset funktiot liittyvät reaalianalyyttisiin funktioihin. Seuraavia kyseiseen aihealueeseen liittyviä lauseita tullaan tarvitsemaan suoraan päätuloksen todistukseen. Määritelmiä ja tuloksia on lainattu Axlerin, Bourdonin ja Rameyn teoksesta "Harmonic Function Theory"[**6**].

Määritelmä 6.5. Sanotaan, että funktio f on reaalianalyyttinen avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{R}^2$, kun jokaiselle $a = (c, d) \in A$ on olemassa $r > 0$ ja reaaliluvut $c_{n,k}$ siten, että

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} (x - c)^k (y - d)^{n-k}$$

ja sarja suppenee jokaisella pisteen a ympäristössä $B(a, r)$ olevalla arvolla $z = (x, y)$.

Seuraava tulos kertoo, että harmoniset funktiot ovat reaalianalyyttisiä. Tulos pätee myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mutta kyseinen todistus on työläs eikä sitä varsinaisesti tarvita tutkielman kannalta. Todistetaan lause siis joukossa $\mathbb{R}^2$ todistuksen yksinkertaisuuden takia.

Lause 6.6. *Alueessa $A \subset \mathbb{R}^2$ harmoninen funktio on reaalianalyyttinen.*

TODISTUS. Samaistetaan A kompleksitason osajoukkoon B siten, että $(x, y) \in A$ tarkoittaa pistettä $x + iy \in B$. Koska funktio on harmoninen, on se jokaisen pisteen $z \in B$ ympäristössä jonkin analyyttisen funktion f reaaliosa. Analyyttisellä funktiolla on toisaalta Taylorin sarja jokaisen pisteen $a \in B$ ympäristössä eli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Oletetaan, että $z = x + iy = (x, y)$ ja $a = c + id = (c, d)$. Tällöin binomikertoimen kaavasta saadaan, että

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_x^{(n)} u(a) + i\partial_x^{(n)} v(a)}{n!}(x - c + i(y-d))^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_x^{(n)} u(a) + i\partial_x^{(n)} v(a)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-c)^{n-k}(y-d)^k i^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial_x^{(n)} u(a)}{n!} \binom{n}{k} (x-c)^{n-k}(y-d)^k i^k \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial_x^{(n)} v(a)}{n!} \binom{n}{k} (x-c)^{n-k}(y-d)^k i^{k+1}
\end{aligned} \tag{19}$$

josta poimimalla reaaliarvoiset komponentit saadaan

$$\begin{aligned}
Re(f(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}(x-c)^{n-k}(y-d)^k, \quad \text{missä} \\
c_{n,k} &= \begin{cases} \dfrac{\partial x^{(n)} u(a)}{n!} \dbinom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}}, & \text{jos } k \text{ on parillinen} \\ \dfrac{\partial x^{(n)} v(a)}{n!} \dbinom{n}{k} (-1)^{\frac{k+1}{2}}, & \text{jos } k \text{ on pariton.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{20}$$

Tästä huomataan, että reaaliosa on reaalianalyyttinen.

□

Lause 6.7. *Olkoon f on reaalianalyyttinen alueessa A ja $f \equiv 0$ epätyhjässä avoimessa joukossa $\Omega \subset A$. Tällöin $f \equiv 0$ joukossa A.*

TODISTUS. Olkoon Ω_0 sellainen joukko pisteitä joukossa A, että $f \equiv 0$ jossain pisteen $x \in A$ ympäristössä. Tällöin Ω_0 on avoin ja epätyhjä. Jos $y \in \overline{\Omega_0} \cap A$, niin jatkuvuuden nojalla f ja kaikki sen osittaisderivaatat häviävät pisteessä y. Täten funktion f potenssisarja pisteessä y häviää identtisesti joten $y \in \Omega_0$. Täten $\Omega_0 = \overline{\Omega_0} \cap A$ ja edelleen joukon A yhtenäisyydestä seuraa, että $\Omega_0 = A$.

□

Lause 6.8 (Harmonisten funktioiden keskiarvo-ominaisuus). *Olkoon u harmoninen funktio avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{C}$. Tällöin, kun $B(z, r) \subset A$ funktiolle u pätee*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta, \tag{21}$$

ja lisäksi

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r(z)} u.$$

Todistus. Olkoon nyt siis $B(z,r) \subset A$. Käytetään Cauchyn integraalikaavaa analyyttiselle funktiolle $f = u + iv$, missä v on funktion u harmoninen konjungaatti. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} u(z) = Re[f(z)] &= Re\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta B(z,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\Big] \\ &= Re\Big[\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta\Big] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta. \end{aligned} \tag{22}$$

Eli

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta})d\theta,$$

kun $0 < \rho \leq r$. Edellistä hyödyntämällä saadaan

$$\begin{aligned} \int_{B_r(z)} u &= \int_0^r \Big(\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta\Big)tdt \\ &= \int_0^r 2\pi t u(z)dt = \pi r^2 u(z), \end{aligned} \tag{23}$$

mikä on siis jälkimmäinen väite.

□

Edellinen tulos pätee myös käänteisesti eli yhtälön (21) olemassaolo karakterisoi funktion harmonisuuden.

Lause 6.9. *Olkoon A alue, $f \in C^2(A)$ ja f toteuttaa keskiarvo-ominaisuuden (21) jokaisessa kiekossa $\overline{B_r(z)} \in A$. Tällöin f on harmoninen funktio alueessa A.*

Todistus. Divergenssilausetta apuna käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \int_{B_r(z)} \Delta f(y)dy = \int_{B_r(0)} \Delta f(y+z)dy &= \int_{\partial B_r(0)} \nabla f(y+z)\cdot \overrightarrow{n} \\ &= ri\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} f(z + re^{i\theta})d\theta \\ &= ri\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta = 2\pi ri\frac{\partial}{\partial r}f(z) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Ottamalla sitten keskiarvo kiekossa $B_r(z)$ ja raja-arvo $r \to 0$ saadaan

$$0 = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(z)} \Delta f(y) dy = \Delta f(z)$$

joten f on harmoninen alueessa A.

□

7. Harnackin epäyhtälö ja Harnack-funktiot

Tässä kappaleessa esitellään Harnackin epäyhtälö ja siihen perustuvat Harnack-funktiot. Kappaleessa tullaan osoittamaan myös tärkeä yhteys harmonisten funktioiden ja Harnack-funktioiden välillä. Teoriaa on lainattu Lewisin teoksesta [**8**].

Määritelmä 7.1 (Harnackin epäyhtälö). Ei-negatiivisen funktion $h : B(x, 2r) \to \mathbb{R}$ sanotaan toteuttavan Harnackin epäyhtälö vakiolla $\theta \geq 1$, kun pätee

$$M(r, h, x) = \sup\{h(y) : y \in B(x, r)\} \leq \theta \inf\{h(y) : y \in B(x, r)\}. \tag{25}$$

Määritelmä 7.2 (Harnack-funktio). Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyä jatkuvaa funktiota u sanotaan Harnack funktioksi vakiolla θ, jos Harnackin epäyhtälö pätee jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ kun $h = \pm u + a$ on ei-negatiivinen kiekossa $B(x, 2r)$ jollakin $a \in \mathbb{R}$.

Seuraavana on jälleen harmonisiin funktioihin liittyvä tulos. Tällä kertaa osoitetaan, että harmoniset funktiot ovat Harnack-funktioita.

Lause 7.3. *Olkoon u harmoninen funktio. Tällöin u on Harnack funktio.*

Todistus. Asetetaan $h = \pm u + a$ siten, että h on mielivaltaisessa kiekossa $B(z, 2r)$ positiivinen. Tällöin h on myös harmoninen funktio. Valitaan $x, y \in B(z, r)$ ja merkitään $d = |x - y| \leq 2r$. Riittää osoittaa, että $h(x) \leq ch(y)$ jollain $c \geq 1$, joka ei riipu pisteiden x, y valinnasta. Valitaan janapolulta $[x, y]$ pisteet a ja b, siten, että $|x - a| = \frac{1}{3}d$ ja $|x - b| = \frac{2}{3}d$. Keskiarvo-ominaisuudesta ja funktion h positiivisuudesta saadaan

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\frac{\pi}{9} r^2} \int_{B_{r/3}(x)} h \\ &= \frac{9}{\pi r^2} \int_{B_{r/3}(x)} h \\ &\leq \frac{9}{\pi r^2} \int_{B_r(a)} h \\ &= 9h(a). \end{aligned} \tag{26}$$

Verrataan vastaavasti pistepareja a, b ja b, y jolloin saadaan lopulta

$$h(x) \leq 9^3 h(y) \tag{27}$$

mikä siis todistaa väitteen.

□

Seuraava lause tulee kuvaamaan harmonisten funktioiden muodostaman jonon käyttäytymistä tiettyjen ehtojen pätiessä. Lauseen todistamiseen tarvitaan avuksi muutamaa lemmaa. Tulokseen tullaan viittaamaan Picardin lauseen todistuksessa. Lause ja sitä edeltävät lemmat on lainattu Armitagen ja Gardinerin "Classical Potential Theory-kirjasta [**7**].

Määritelmä 7.4 (Funktioperheen yhtäjatkuvuus). Avoimessa joukossa $E \subset R^n$ määritelty reaaliarvoisten funktioiden perhe F on yhtäjatkuva pisteessä $x \in E$, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ jokaiselle $f \in F$ jokaisella arvolla $y \in E \cap B(x, \delta)$. Perhe F on yhtäjatkuva joukossa E, jos se on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä $x \in E$.
Perhe F on tasaisesti yhtäjatkuva joukossa E, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, kun $f \in F$ ja $x, y \in E$ ja $||x - y|| < \delta$.

Lemma 7.5. *Olkoon A alue ja F perhe lokaalisti tasaisesti alhaalta rajoitettuja harmonisia funktioita. Tällöin joko $\sup F \equiv \infty$ alueessa A tai F on tasaisesti rajoitettu ja tasaisesti yhtäjatkuva jokaisessa kompaktissa alueen A osajoukossa.*

Todistus. Oletetaan, että $\sup F \not\equiv \infty$ alueessa A ja valitaan $x_0 \in A$ siten, että $(\sup F)(x_0) < \infty$. Olkoon E kompakti joukko ja ω sellainen rajoitettu yhtenäinen joukko, että $E \cup \{x_0\} \in \omega$ ja $\overline{\omega} \in A$. Tällöin F on tasaisesti alhaalta rajoitettu joukossa $\overline{\omega}$. Voidaan siis valita sellaisen vakion M, että jokaiselle $f \in F$ pätee $f + M > 0$. Harmoniset funktiot ovat Harnack-funktioita joten Harnackin epäyhtälöstä seuraa, että on olemassa vakio C siten, että $0 < h < C$ kaikille $h \in F$ joukossa E, joten F on tasaisesti rajoitettu joukossa E. Olkoon $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subseteq \omega$ kaikilla $x \in E$. Harnackin epäyhtälöstä saadaan myös

$$
\begin{aligned}
& h(y) \leq (1+\epsilon)h(x), \quad y \in B(x, \alpha r), 0 < \alpha < 1 \\
\iff & h(y) - h(x) \leq \epsilon h(x) \\
\iff & |h(x) - h(y)| \leq \epsilon h(x) < C\epsilon
\end{aligned}
\tag{28}
$$

kaikille $h \in F$. Täten F on tasaisesti yhtäjatkuva joukossa E.

□

Lemma 7.6. *Olkoon (f_n) tasaisesti yhtäjatkuva jono funktioita rajoitetussa joukossa E ja (f_n) suppenee pisteittäin funktioon $f : E \to \mathbb{R}$. Tällöin joukossa E funktio f on tasaisesti jatkuva ja $f_n \to f$ tasaisesti joukossa E.*

Todistus. Osoitetaan aluksi tasainen jatkuvuus. Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon δ kuten yhtäjatkuvuuden määritelmässä. Jos $x, y \in E$ ja $||x - y|| < \delta$ pätee jollakin arvolla n

$$
|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\epsilon. \tag{29}
$$

Olkoot $x_1, \ldots x_m$ sellaisia pisteitä joukossa E, että $E \subseteq \bigcup_j B(x_j, \delta)$. On olemassa n_0, jolla $|f_n(x_j) - f(x_j)| < \epsilon$ kaikilla $n \geq n_0$ ja kaikilla $j \in \{1, \ldots, m\}$. Jos $y \in E$, niin pätee $y \in B(x_j, \delta)$ jollekin j ja tällöin epäyhtälöstä (29) saadaan

$$
\begin{aligned}
|f_n(y) - f(y)| \leq & |f_n(y) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \\
< & \epsilon + \epsilon + 3\epsilon = 5\epsilon,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

kun $n \geq n_0$.

$\square$

Määritelmä 7.7 (normaali perhe). Merkitään kaikkien avoimessa joukossa A jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden joukkoa merkinnällä $C(A)$. Olkoon $F \subseteq C(A)$ funktioperhe. Sanotaan, että F on normaali, jos jokaisella perheen F jonolla on lokaalisti tasaisesti joukossa A suppeneva osajono.

Lemma 7.8. *Olkoon F perhe alueessa A määriteltyjä reaaliarvoisia funktioita. Oletetaan, että F on tasaisesti rajoitettu ja tasaisesti yhtäjatkuva jokaisessa joukon A kompaktissa osajoukossa. Tällöin F on normaali.*

Todistus. Olkoon (f_n) jono perheessä F. Olkoon $E \subset A$ kompakti ja olkoon $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ joukon E tiheä osajoukko. Jono $(f_n(x_1))$ on rajoitettu jono, joten sillä on suppeneva osajono $(f_{1,n}(x_1))$. Vastaavasti jonolla $(f_{1,n}(x_2))$ on suppeneva osajono $(f_{2,n}(x_2))$ ja niin edelleen on olemassa siis osajonot $(f_{m,n})$ siten, että $(f_{m,n}(x_m))$ suppenee, kun $n \to \infty$ ja jono $(f_{m+1,n})$ on aina jonon $(f_{m,n})$ osajono. Olkoon $g_n = f_{n,n}$ jokaiselle n. Tällöin $(g_n(x_j))$ suppenee jokaisella j.
Oletetaan, että $y \in E$ ja $\epsilon > 0$. Olkoon δ kuten tasaisen yhtäjatkuvuuden määritelmässä. Koska $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ on tiheä, pätee $||x_j - y|| < \delta$ jollain arvolla j. Jonon $(g_n(x_j))$ suppenemisesta seuraa, että

$$|g_k(y) - g_n(y)| \leq |g_k(y) - g_k(x_j)| + |g_k(x_j) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_n(y)| < 3\epsilon,$$

kun k ja n ovat riittävän suuria. Täten $(g_n(y))$ on Cauchyn jono ja siispä suppeneva. Lemmaa 7.6 soveltamalla mielivaltaisille kompakteille joukon A osajoukoille E selviää, että F on normaali. $\square$

Lause 7.9. *Olkoon A alue ja olkoot F perhe alueessa A harmonisia funktioita. Oletetaan lisäksi, että F on lokaalisti tasaisesti rajoitettu alhaalta päin. Jos (f_n) on jono perheen F funktioita, niin on olemassa sellainen osajono (f_{n_j}), että joko (f_{n_j}) suppenee lokaalisti ja tasaisesti alueessa A harmoniseen funktioon tai* $\lim f_{n_j} \equiv \infty$ *alueessa A.*

Todistus. Olkoon (h_n) jono perheessä F. Lemman 7.5 mukaan joko $\sup h_n \equiv \infty$ joukossa A tai (h_n) on tasaisesti rajoitettu ja tasaisesti yhtäjatkuva jokaisessa joukon A kompaktissa osajoukossa. Jälkimmäisessä tapauksessa lemmasta 7.8 seuraa, että on olemassa osajono (f_{n_j}) joka suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa A funktioon f. Täten f on jatkuva joukossa A. Lisäksi lokaalista tasaisesta suppenemisesta seuraa, että keskiarvo-ominaisuus $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta$ pätee kun $\overline{B(z,r)} \subseteq A$. Siispä f on harmoninen alueessa A. Tapauksessa $\sup f_n \equiv \infty$ asetetaan $z_0 \in A$ ja valitaan sellaubeb osajono (f_{n_j}), että $f_{n_j}(z_0) \to \infty$. Pisteelle $z \in A$ valitaan rajoitettu alue ω, jolle $z, z_0 \in \omega$ ja $\overline{\omega} \in A$. Valitaan lisäksi sellainen $M \in \mathbb{R}$, että $f_n \geq M$ joukossa ω kaikilla n. Harnackin epäyhtälöstä seuraa, että on olemassa vakio C, jolla

$$f_{n_j}(z) - M \geq C^{-1}(f_{n_j}(z_0) - M) \to \infty.$$

Eli $f_{n_j} \to \infty$ kuten haluttiin.

$\square$

Seuraava Harnackin epäyhtälöstä johdettu lemma on olennainen osa Picardin lauseen todistusta.

Lemma 7.10. *Olkoon u Harnack funktio vakiolla θ, $u(x_0) = 0$, ja $R > 0$. Tällöin on olemassa $r \in]0, R[$, $x_1 \in B(x_0, 2R)$ ja $c_1 = c_1(\theta) \geq 2$ siten, että $u(x_1) = 0$ ja*

$$(c_1)^{-1} M(R, u, x_0) \leq M(10r, u, x_1) \leq c_1 M(r, u, x_1). \tag{31}$$

Todistus. Olkoon $\sigma(x) = 2R - |x - x_0|$ etäisyys pisteen $x \in B(x_0, 2R)$ ja joukon $\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, 2R)$ välillä. Asetetaan $E = \{x : u(x) = 0\} \cap B(x_0, 2R)$. Olkoon F joukon $\cup_{x \in E} B(x, \frac{\sigma(x)}{100})$ sulkeuma. Asetetaan

$$\gamma = \sup\{M(10^{-2}\sigma(x), u, x) : x \in E\},$$

ja valitaan x_1 joukosta E siten, että jos $r = \frac{\sigma(x_1)}{100}$ niin tällöin

$$\gamma \leq 2M(r, u, x_1). \tag{32}$$

Näytetään, että (31) pätee yllä määrätyille x_1 ja r. Ensinnäkin kaikille $x, y \in B(x_0, 2R)$ pätee

$$\begin{aligned} |\sigma(x) - \sigma(y)| &= |2R - |x_0 - x| - (2R - |x_0 - y|)| \\ &= ||x_0 - y| - |x_0 - x|| \\ &\leq |x_0 - y - (x_0 - x)| = |x - y|. \end{aligned}$$

Tästä saadaan pääteltyä

$$\sigma(y) \leq \sigma(x_1) + |x_1 - y| \leq \sigma(x_1) + \frac{\sigma(x_1)}{100} \leq 2\sigma(x_1)$$

ja

$$\begin{aligned} &\sigma(x_1) \leq \sigma(y) + |x_1 - y| \leq \sigma(y) + \frac{\sigma(x_1)}{100} \\ &\iff \frac{99}{100}\sigma(x_1) \leq \sigma(y) \iff \sigma(x_1) \leq 2\sigma(y). \end{aligned}$$

Eli saadaan

$$\sigma(x_1) \leq 2\sigma(y) \leq 4\sigma(x_1). \tag{33}$$

Valitaan x_2 joukosta $\overline{B(x_1, 10r)}$ siten, että

$$M(10r, u, x_1) \leq 2u(x_2) \tag{34}$$

On kaksi erikoistapausta. Jos $x_2 \in F$ niin epäyhtälöistä (32) ja (34) ja funktion u jatkuvuudesta saadaan epäyhtälöketju

$$M(10r, u, x_1) \leq 2u(x_2) \leq 2\gamma \leq 4M(r, u, x_1). \tag{35}$$

Kun $x_2 \notin F$ niin voidaan löytää $z \in (x_1, x_2) \cap F$ jolle $[x_2, z) \cap F = \emptyset$, koska F on suljettu. Väitetään, että jokaisessa pisteessä $w \in [x_2, z)$ on pallo $B(w, \frac{r}{4})$, jossa $u \geq 0$. Jos näin ei olisi niin funktion u jatkuvuudesta ja epäyhtälöketjusta (33) saataisiin $u(y) = 0$ jollain y jolle

$$(36) \qquad |y - w| \leq \frac{r}{4} = \frac{\sigma(x_1)}{400} \leq \frac{\sigma(y)}{100}$$

eli $w \in F$, mikä on ristiriidassa pisteen z valinnan suhteen. Siispä alkuperäinen väite pätee. Jana $[x_2, z]$ voidaan peittää enintään kahdeksallakymmenellä $\frac{r}{8}$ säteisellä pallolla joiden keskikohdat ovat janalla $[x_2, z)$. Siispä voidaan käyttää Harnackin epäyhtälöä ja epäyhtälöä (34) jolloin saadaan

$$M(10r, u, x_1) \leq 2u(x_2) \leq 2\theta^{80} u(z) \leq 4\theta^{80} M(r, u, x_1).$$

Oikeanpuoleinen epäyhtälö seuraa siitä, että $z \in F$ ja vastaavista päättelyistä kuin kohdassa (35). Kun siis $c_1 = 4\theta^{80}$ niin molemmissa tapauksissa pätee

$$M(10r, u, x_1) \leq c_1 M(r, u, x_1),$$

mikä on siis lemman 7.10 oikeanpuoleinen epäyhtälö. Vasemmanpuoleisen epäyhtälön todistaminen toimii samaan tyyliin. Tällöin valitaan $x_3 \in \overline{B(x_0, R)}$ siten, että $u(x_3) \geq 2M(R, u, x_0)$. Ja jälleen joko $x_3 \in F$ tai $x_3 \notin F$ ja vastaavalla päättelyllä kuin aiemmin tässä todistuksessa saadaan epäyhtälöketjun (31) vasen puoli.

$\square$

8. Picardin pieni lause

Seuraavaksi tullaan esittämään Harnackin epäyhtälöön perustuva todistus Picardin lauseelle. Kyseisen todistuksen on alunperin esittänyt John Lewis [**8**]. Lause todistetaan vastaväitteen avulla. Todistuksessa käytetään avuksi harmonisten funkioiden ominaisuuksia ja lemmaa 7.10.

Lause 8.1. *Kokonainen funktio saa kaikki arvot kompleksitasossa mahdollisesti yhtä arvoa lukuunottamatta.*

Todistus. Oletetaan siis, että F on kokonainen, ei-vakio funktio. Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ eri arvoja, joita F ei koskaan saa. Olkoon $f = \frac{F - a_1}{a_2 - a_1}$, joten f on ei-vakio, kokonainen funktio, joka ei saa arvoja 0 tai 1. Asetetaan $u_1 = \log|f| - 2$ ja $u_2 = \log|f-1| - 2$. Tiedetään, että f ja f' ovat kokonaisia (Cauchyn ja Riemannin yhtälöt), joten myös $\frac{f'}{f}$ on kokonainen. Täten funktion $\frac{f'}{f}$ integraalifunktio $\log(f) = \log|f| + iArg(f)$ on kokonainen. Kokonaisen funktion reaaliosa on harmoninen koko kompleksitasossa, joten u_1 ja u_2 ovat harmonisia. Harmonisina funktioina u_1 ja u_2 ovat Harnack-funktioita vakiolla θ (Lause 7.3). Ei-vakiot kompleksitasossa harmoniset funktiot ovat rajoittamattomia (Lause 6.4) joten on olemassa sellainen x_0, että $u_1(x_0) = 0$. Lemmaa 7.10 käyttämällä vakion R arvoille 2^j, kun $j \in \mathbb{N}$ saadaan muodostettua jonot $\{z_j\}$ ja $\{r_j\}$ joille kyseisen lemman nojalla pätee

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} M(r_j, u_1, z_j) = \infty, \\
(37) \qquad &M(10r_j, u_1, z_j) \le c_1 M(r_j, u_1, z_j) \text{ ja} \\
&u_1(z_j) = 0.
\end{aligned}$$

Määritellään $v_{1,j}$ ja $v_{2,j}$ kiekossa $B(0,1)$ siten, että

$$v_{i,j}(z) = \frac{u_i(z_j + 10r_j z)}{M(10r_j, u_1, z_j)}. \tag{38}$$

Kun $u_2(z) > 0$ saadaan

$$2 < \log|f-1| \le \log(|f|+1) \iff e^2 < |f| + 1,$$

eli $|f| > e^2 - 1$. Tästä saadaan edelleen

$$\log|f-1| \le \log(|f|+1) \le \log(2|f|) \le \log(f^2) = 2\log|f|$$

eli $u_2 \le 2u_1$, kun $u_2 > 0$. Siispä voidaan arvioida

$$\frac{u_i(z_j + 10r_j z)}{M(10r_j, u_1, z_j)} \le \frac{M(10r_j, u_i, z_j)}{M(10r_j, u_1, z_j)} \le \frac{2M(10r_j, u_1, z_j)}{M(10r_j, u_1, z_j)} = 2. \tag{39}$$

Funktiot $v_{i,j}$ ovat siis ylhäältä rajoitettuja. Lausetta 7.9 voidaan nyt soveltaa funktioperheelle joka koostuu funktioista $-v_{i,j}$. Jonolla $\{-v_{i,j}\}$ on siis olemassa osajono, joka suppenee lokaalisti tasaisesti kohti harmonista funktiota tai osajonon raja-arvo on ∞ koko joukossa $B(0,1)$. Nyt kuitenkin $-v_{i,j}(0) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ joten jälkimmäinen vaihtoehto ei voi toteutua. Tästä seuraa siis, että $v_{i,j}$ suppenee arvoilla $i \in 1,2$ lokaalisti tasaisesti vastaaviin harmonisiin funktioihin v_1 ja v_2 kiekossa $B(0,1)$.
Valitaan seuraavaksi osajonot v_{1,j_k} ja v_{2,j_k} samoilla osaindekseillä siten, että molemmat suppenevat. Funktion $v_{i,j}$ määrittelyn ja yhtälöiden (37) ensimmäisen rivin perusteella jos $v_1(z) > 0$ niin $u_1(z_{j_k} + 10r_{j_k}z) \to \infty$. Tällöin myös $\log|f(z_{j_k} + 10r_{j_k}z)| \to \infty$. Olennaisesti myös $\log|f(z_{j_k} + 10r_{j_k}z)| \to \infty$ ja $\log|f(z_{j_k} + 10r_{j_k}z) - 1| \to \infty$. Erityisesti logaritmifunktiot lähestyvät ääretöntä samaa vauhtia. Tästä seuraa, että

$$\frac{v_{1,j_k}(z)}{v_{2,j_k}(z)} = \frac{u_1(z_{j_k} + 10r_{j_k}z)}{u_2(z_{j_k} + 10r_{j_k}z)} \to 1, \text{ kun } k \to \infty$$

joten $\lim v_{1,j_k}(z) = \lim v_{2,j_k}(z)$, kun $v_1(z) > 0$. Vastaava päättely toimii kun oletetaan, että $v_2(z) > 0$. Näytetään lisäksi, että funktioilla tosiaan on positiivisia arvoja yksikkökiekossa. Voidaan valita sellainen $w_j \in \overline{B(0, \frac{1}{10})}$, että kohdan (37) toisesta rivistä saadaan

$$v_{1,j}(w_j) = \frac{u_1(z_j + 10r_j w_j)}{M(10r_j, u_1, z_j)} = \frac{M(r_j, u_1, z_j)}{M(10r_j, u_1, z_j)} \ge \frac{1}{c_1}.$$

Koska $w_j \in \overline{B(0, \frac{1}{10})}$ pätee sen osajonolle $w_{j_i} \to w_0 \in \overline{B(0, \frac{1}{10})}$. Kompaktissa joukossa $\{w_0, w_{j_1}, w_{j_2}, ..., \}$ jono $\{v_{1,j}\}$ suppenee tasaisesti eli

$$v_1(w_0) = \lim_{k\to\infty} v_{1,j_k}(w_{j_k}) \ge \frac{1}{c_1} > 0.$$

Jos taas $v_1(z) < 0$, niin jonon v_{i,j_k} määrittelyn mukaan $u_1(z_{j_k} + 10r_{j_k}z) \to -\infty$ joten $\log|f(z_{j_k} + 10r_{j_k}z)| \to -\infty$ ja siispä $|f(z_{j_k} + 10r_{j_k}z)| \to 0$. Tästä johtuen kuitenkaan ei voi päteä $|f(z_{j_k} + 10r_{j_k}z) - 1| \to 0$, mikä olisi edellytys sille, että $v_{2,j_k}(z) < 0$. Saadaan siis koottua tulokset

$$\begin{aligned} &v_i(0) = 0, \text{ kun } i \in \{1,2\}, \\ &v_1(z) = v_2(z) \text{ joukossa } \cup_{i=1}^2 \{z : v_i(z) > 0\} \neq \emptyset, \\ &\{z : v_1(z) < 0\} \cap \{z : v_2(z) < 0\} = \emptyset. \end{aligned} \tag{40}$$

Koska harmoniset funktiot ovat reaalianalyyttisiä, asettamalla $v_0 = v_1 - v_2$ saadaan lauseesta 6.7, että $v_0 \equiv 0$ eli $v_1 \equiv v_2$. Kohdan (40) kolmannesta rivistä seuraa siis, että $v_1 \geq 0$. Koska $\inf\{v_1(z) : z \in B(0,1)\} = 0$, saadaan Harnackin epäyhtälöstä ja kohdan (40) ensimmäisestä rivistä $v_1 \equiv 0$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa kohdan (40) toisen rivin kanssa joten Picardin lause pätee.

$\square$

Viitteet

[1] http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Picard_Emile.html

[2] Ari Lehtonen *Kompleksianalyysi 2.* Jyväskylän Yliopisto, 2019.

[3] Ari Lehtonen *Kompleksianalyysi 1.* Jyväskylän Yliopisto, 2019.

[4] Bruce P. Palka *An Introduction to Complex Function Theory.* Springer-Verlag New York Inc. 1991

[5] Olli Lehto *Funktioteoria I-II.* Limes ry, Helsinki, 1982.

[6] Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey *Harmonic Function Theory* Springler-Verlag, New York, Inc. 2001.

[7] David H. Armitage, Stephen J. Gardiner *Classical Potential Theory* Springer-Verlag London Limited, 2001

[8] John L. Lewis *Picard's Theorem and Rickman's Theorem by Way of Harnack's Inequality.* American Mathematical Society. https://www.jstor.org/stable/2160861