Hähkiöniemi, M. (2018). Derivaatan ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen ja opetus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (Toim.), Matematiikan opetus ja oppiminen (s. 110-131). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

1 DERIVAATAN YMMÄRTÄMISEEN TÄHTÄÄVÄ OPPIMINEN JA OPETUS

Markus Hähkiöniemi

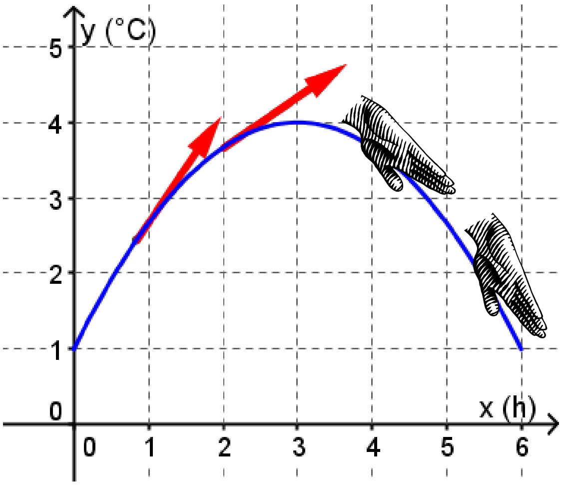
Jyväskylän yliopisto

Useissa ilmiöissä jokin suure riippuu toisesta suureesta. Esimerkiksi ilman lämpötila muuttuu ajan suhteen. Jonain hetkenä lämpötila muuttuu nopeasti ja jonain hetkenä hitaasti. Tällaisia tilanteita voidaan tarkastella muutosnopeuden eli derivaatan avulla. Muutosnopeus voidaan havaita erilaisista esitysmuodoista kuten kuvaajista, taulukoista tai funktioiden lausekkeista. Suureiden välisiä riippuvuuksia on tarkoitus harjaantua tarkastelemaan funktion avulla alakoulusta lähtien. Lukiossa tarkastelua syvennetään tutkimalla funktion arvojen muutosnopeutta eli derivaattaa. Yhtenä mahdollisuutena on edetä muutosnopeuden havaitsemisesta keskimääräisen muutosnopeuden laskemiseen ja hetkellisen muutosnopeuden arvioimiseen. Tärkeintä on oppia ajattelemaan funktion arvojen muuttumisen nopeutta – se paitsi rakentaa ymmärrystä derivaatasta, myös vahvistaa funktioiden tutkimisen taitoja.

2 MITÄ DERIVAATAN YMMÄRTÄMINEN TARKOITTAA?

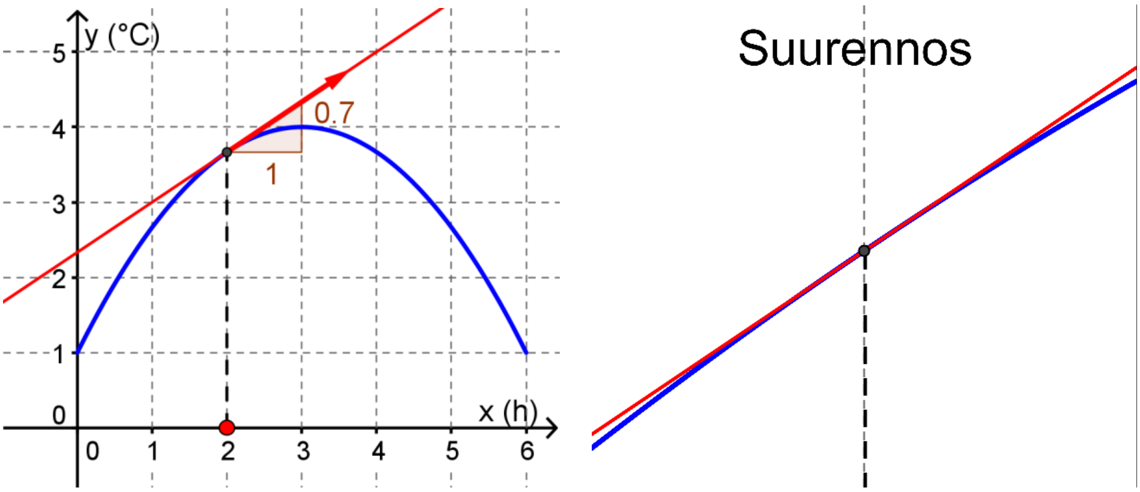
On tärkeää erottaa menetelmällinen sujuvuus käsitteellisestä ymmärtämisestä (Haapasalo, 2004; Hiebert & Carpenter, 1992; Pehkonen, 2000). Molempia tarvitaan matematiikassa, mutta toinen yksinään ei riitä. Menetelmällisellä sujuvuudella tarkoitetaan matematiikan algoritmien, menetelmien, kaavojen ja merkintöjen hallintaa. Käsitteellinen ymmärrys sen sijaan muodostuu, kun henkilö yhdistää tiedon osia muodostaen tietoverkon. Menetelmällinen sujuvuus tarkoittaa sitä, että henkilö tietää, miten tehdään jotain, kun taas käsitteellisen ymmärryksen myötä henkilö tietää myös, miksi jotain tehdään.

Derivaatan yhteydessä monet ovat harjoitelleet lukiossa runsaasti menetelmällistä sujuvuutta esimerkiksi laskemalla seuraavantyyppisiä tehtäviä: $\mathrm{D}x^4 = 4x^3$. Mekaaninen laskeminen ei kuitenkaan takaa, että opiskelija ymmärtäisi, mitä hän on tekemässä tai mitä derivaatta tarkoittaa. Ymmärtäminen alkaa muodostua, kun aiempia tietoja yhdistetään uudella tavalla. Derivaatan yhteydessä aiempia tietojaan voi käyttää tarkastellessaan esimerkiksi, millä nopeudella lämpötila muuttuu kuvassa 1. Kuvaajan jyrkkyyden avulla voidaan havaita muutosnopeuden suunta ja suuruusluokka. Apuna voi käyttää kättä tai kuvaan merkittyä nuolta. Aluksi lämpötila kasvaa nopeasti, sitten hitaammin. Noin kolmen tunnin kohdalla lämpötila alkaa vähetä. Tämän jälkeen lämpötila vähenee yhä nopeammin.



Kuva 1. Lämpötilan muutosnopeuden suunnan ja suuruusluokan havaitseminen (http://ggbm.at/RBKKcxgM)

Kuvasta 1 voidaan havaita, että kahden tunnin kohdalla lämpötila kasvaa hitaasti. Tästä voidaan edetä arvioimaan muutosnopeuden suuruutta esimerkiksi kuvaan 2 merkityn tangenttisuoran avulla. Kuvaajan suurennoksesta nähdään, että lämpötila kasvaa tangenttisuoran mukaisesti eli noin 0,7 °C/h. Tämä on arvio lämpötilan muutosnopeudelle eli derivaatalle kohdassa $x = 2$.



Kuva 2. Lämpötilan muutosnopeuden suuruuden arvioiminen (http://ggbm.at/ByckgxzP)

Tällaisilla tarkasteluilla derivaatta eli muutosnopeus alkaa tarkoittaa jotain, jonka arvojen laskemiseen voidaan kehittää menetelmiä. Oppija voi yhdistää intuitiivisia havaintoja, graafisia tulkintoja ja erilaisia laskemisen menetelmiä tarkastellakseen muutosnopeutta. Myös derivaatan laskusäännöt voidaan yhdistää muihin tiedon osiin. Lukion lyhyessä matematiikassa derivaatan merkitys voidaan rakentaa edellä kuvatun kaltaisten havaintojen varaan. Pitkässä matematiikassa muutosnopeuden arviointia tarkennetaan vielä ja päädytään raja-arvon käsitteen hyödyntämiseen. Tähän palataan myöhemmin tässä luvussa.

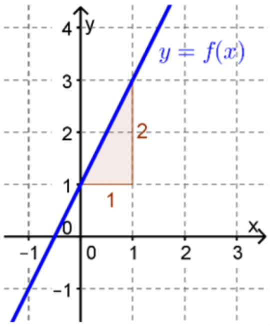
2 MITEN DERIVAATAN YMMÄRTÄMINEN KEHITTYY?

3 Monipuoliset esitysmuodot

Kuten edellä huomattiin, kuvallisten ideoiden yhdistäminen laskuihin auttaa ymmärtämään, mitä muutosnopeus tarkoittaa. Matematiikan käsitteiden ymmärtämisessä on jo pitkään korostettu erilaisten esitysmuotojen (eli representaatioiden) ja niiden välisten yhteyksien vahvistamista (Goldin, 1998; Goldin & Kaput, 1996; Davis & Maher, 1997; Hähkiöniemi, 2006a, 2006b; Viholainen, 2008). Esitysmuodot ovat merkkejä, joiden välityksellä käsitteitä ajatellaan. Esitysmuodolla on jokin ulkoinen osa kuten esimerkiksi paperille piirretty merkki $f'(x)$. Kuitenkin esitysmuodolla on oltava myös jokin sisäinen osa, koska se mitä merkki tarkoittaa riippuu yksilöstä, joka merkkiä käyttää. Esitysmuoto ei ainoastaan esitä käsitettä vaan on pikemminkin ajattelun apuväline käsitteen tarkasteluun (Hähkiöniemi, 2006a).

Esitysmuotoja voidaan jakaa ominaisuuksiensa mukaan eri tyyppeihin. Matematiikassa käytetään paljon graafisia, numeerisia, sanallisia ja symbolisia esitysmuotoja (esim. Tall, 2003). Esimerkiksi funktion graafinen esitysmuoto on funktion kuvaaja, numeerinen esitysmuoto funktion arvojen taulukko, sanallinen esitysmuoto funktion sääntö sanallisesti ilmaistuna ja symbolinen esitysmuoto funktion lauseke. Kuvassa 3 on esimerkkejä funktion $f(x) = 2x + 1$ esitysmuodoista sekä muutosnopeuden havaitsemisesta niistä.

Graafinen:



Numeerinen:

x	$f(x)$	
−1	−1	
0	1	+2
1	3	+2
2	5	+2
3	7	+2

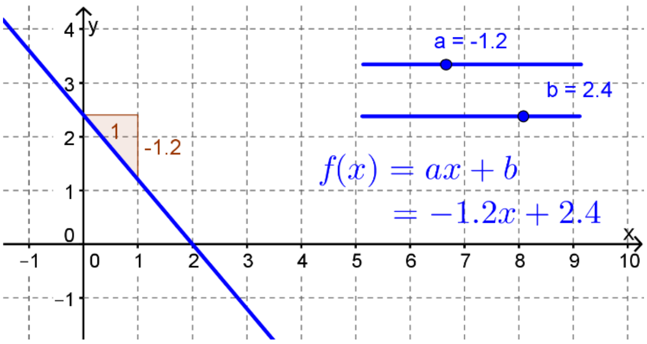
Sanallinen:

Funktion sääntö on ”kerro annettu luku kahdella ja lisää tähän yksi”. Muutosnopeus on 2, koska kun x kasvaa yhdellä, niin funktion arvo kasvaa kahdella.

Symbolinen: $f(x) = 2x + 1$, $f\,'(x) = \mathrm{D}(2x + 1) = 2$

Kuva 3. Funktion ja muutosnopeuden erilaisia esitysmuotoja

Myös eleet ovat hyödyllinen esitysmuoto. Esimerkiksi käden liu’uttaminen kuvaajaa pitkin kuten kuvassa 1 voi auttaa havaitsemaan muutosnopeuden. Lisäksi teknologia tarjoaa käyttöön dynaamisia esitysmuotoja, joita käyttäjä voi muokata. Esimerkiksi sopivalla ohjelmalla voi muuttaa vakioita a ja b funktiossa $f(x) = ax + b$ (kuva 4). Muutkin kuin symboliset esitysmuodot ovat matematiikassa arvokkaita, sillä niiden avulla keksitään uusia ominaisuuksia. Esimerkiksi graafisen tarkastelun (kuva 4) perusteella voi huomata, että funktion $f(x) = ax + b$ muutosnopeus eli derivaatta on jokaisessa kohdassa a, olivatpa vakiot a ja b mitä tahansa lukuja.



Kuva 4. Dynaaminen esitysmuoto, jossa käyttäjä voi muuttaa vakioita a ja b (http://ggbm.at/DvebMrG6)

Ymmärtämisen merkkinä pidetään erilaisten esitysmuotojen välisten yhteyksien muodostamista. Lisäksi mahdollisuus esitysmuodon vaihtamiseen tuo joustavuutta matemaattiseen ajatteluun ja ongelmanratkaisuun. Erilaisten yhteyksien tarkastelemiseksi olen määritellyt assosiatiivisen ja reflektiivisen esitysmuotojen välisen yhteyden (Hähkiöniemi, 2006c). Henkilö muodostaa assosiatiivisen kytkennän kahden esitysmuodon välille, kun hän vaihtaa toisesta esitysmuodosta toiseen. Henkilö voi esimerkiksi laskun $\mathrm{D}(2x + 1) = 2$

tarkistamiseksi piirtää funktion $f(x) = 2x + 1$ kuvaajan ja arvioida sen kulmakertoimen olevan 2. Tässä henkilö tietäisi, että nämä esitysmuodot liittyvät toisiinsa. Sen sijaan kun henkilö selittää toisen esitysmuodon avulla toista, hän muodostaa reflektiivisen kytkennän, mitä voidaan pitää korkeamman ymmärryksen merkkinä. Henkilö voisi esimerkiksi selittää laskun $D(2x + 1) = 2$ tarkoittavan, että funktion $f(x) = 2x + 1$ derivaatta jokaisessa kohdassa on 2, mikä vastaa kuvaajaa, koska sen kulmakerroin on jokaisessa kohdassa 2.

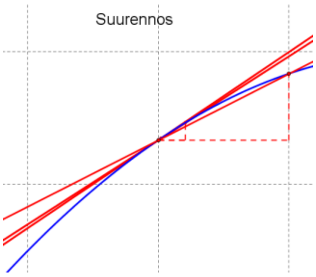
3 Prosessi–objekti-teoriat

Matemaattiset käsitteet voidaan usein ymmärtää toisaalta prosesseina ja toisaalta objekteina (Dubinsky, 1991; Gray & Tall, 2001; Sfard, 1991). Esimerkiksi 2 + 5 voidaan ymmärtää yhteenlaskuna, jossa luvut kaksi ja viisi lasketaan yhteen. Toisaalta 2 + 5 voidaan myös ymmärtää lukujen kaksi ja viisi summana ilman, että tähän sisältyisi vaatimusta laskuprosessista. Ensimmäisessä tapauksessa 2 + 5 ymmärretään prosessina ja jälkimmäisessä tapauksessa objektina. Ero on olennainen, sillä käsitettäessä 2 + 5 objektina voidaan sille edelleen suorittaa toimintoja kuten kertoa se luvulla 3. Käsitettäessä summa objektina on helpompi siirtyä käsittelemään summia, jotka sisältävät tuntemattomia. Esimerkiksi lauseke $3 + x$ ei kuulosta järkevältä, jos yhteenlasku ymmärretään ainoastaan prosessina; eihän yhteenlaskua voida suorittaa ellei toista lukua tiedetä. Tällaisessa tapauksessa voi käydä niin, että lukua $3 + x$ ei voida esimerkiksi kertoa jollain toisella luvulla ennen kuin yhteenlasku on suoritettu.

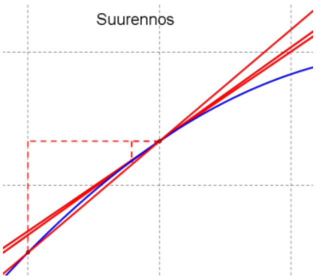
Sfard (1991) on esittänyt, että matematiikan historiassa useat käsitteet ovat kehittyneet siten, että ne ovat ensin olleet luonteeltaan prosesseja ja vasta sittemmin ne on alettu hahmottaa objekteina. Sfardin mukaan vastaavanlainen kehitys on usein havaittavissa myös yksittäisillä oppijoilla heidän muodostaessaan käsitystään matematiikan käsitteistä. Esimerkiksi luvun käsite opitaan useimmiten lukumäärän laskemisen kautta, ja vasta myöhemmin tämän prosessin pohjalta yksilö alkaa käsitellä lukuja objekteina. Sfard esittää, että prosessi- ja objektiluonnetta ei pidä nähdä erillisinä vaan ikään kuin saman kolikon eri puolina.

Derivaatankin oppimista on käsitelty prosessi–objekti-näkökulmasta (Asiala ym., 1997; Repo, 1996). Palataan asian havainnollistamiseksi lämpötilan muutosnopeuden arvion tarkentamiseen. Jos kuvaan 2 asetellaan suurin piirtein kuvaajaa mukaileva tangenttisuora, ei menetelmä ole tarkka. Keskimääräinen muutosnopeus voidaan kuitenkin laskea tarkasti käyttäen lämpötilan ilmaisevaa funktion lauseketta $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$. Keskimääräisiä muutosnopeuksia $\dfrac{\overbrace{f(x) - f(2)}^{\text{funktion arvojen eli lämpötilan muutos}}}{\underbrace{x - 2}_{\text{muuttujan eli ajan muutos}}}$ voidaan taulukoida yhä pienemmillä väleillä [2, *x*]. Kuvassa 5 on esitetty lämpötilan keskimääräisiä muutosnopeuksia sekä piirretty niitä vastaavia suoria.

Väli	Keskimääräinen muutosnopeus (°C/h)
[2; 2,5]	0,5
[2; 2,1]	n. 0,63333
[2; 2,01]	n. 0,66333
[2; 2,001]	n. 0,66633

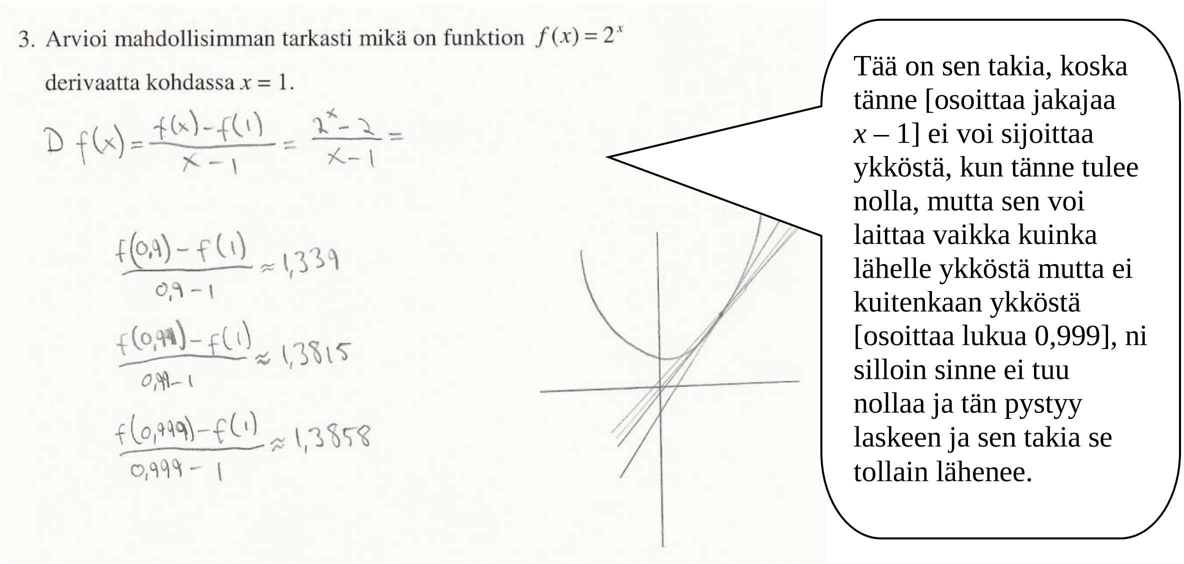


Väli	Keskimääräinen muutosnopeus (°C/h)
[1,5; 2]	n. 0,83333
[1,9; 2]	0,7
[1,99; 2]	0,67
[1,999; 2]	0,667



Kuva 5. Keskimääräisiä muutosnopeuksia ja niitä vastaavia suoria.

Taulukoinnin perusteella näyttää siltä, että keskimääräiset muutosnopeudet lähestyvät noin lukua 0,67 (°C/h). Tämä on arvio hetkelliselle muutosnopeudelle. Tällöin muutosnopeus ymmärretään prosessina, jossa keskimääräinen muutosnopeus lasketaan yhä pienemmällä välillä. Samaa prosessia voi tarkastella myös graafisesti, jolloin keskimääräisiä muutosnopeuksia vastaavat sekanttisuorat lähestyvät tangenttia (http://ggbm.at/rtCCzHnP). Esimerkiksi kuvassa 6 eräs opiskelija selittää, mitä lähestyminen tarkoittaa.



Kuva 6. Eräs opiskelija selittää, kuinka keskimääräiset muutosnopeudet lähestyvät hetkellistä muutosnopeutta (Hähkiöniemi, 2006a)

Asialan ja kollegoiden (1997) mukaan ymmärryksessä tapahtuu suuri muutos tai siirtyminen toiselle tasolle, kun oppija siirtyy ajattelemaan rajankäynnin tulosta objektina, joka on hetkellinen muutosnopeus, jota keskimääräiset muutosnopeudet lähestyvät. Tämä luku, jota keskimääräiset muutosnopeudet lähestyvät, voidaan myös laskea tarkasti raja-arvona:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{8}{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-4)\cancel{(x-2)}}{3\cancel{(x-2)}}=\frac{2}{3}$$

Funktion f arvojen muutosnopeus eli derivaatta kohdassa $x = 2$ on siis $\frac{2}{3}\approx 0{,}6667$. Se, mitä matematiikan käsite derivaatta tarkoittaa, määritellään vastaavasti raja-arvoa hyödyntäen.

Kun derivaatan määritelmään liittyvä rajankäynti ymmärretään objektina, voidaan ryhtyä kehittämään sääntöjä, joiden avulla saataisiin funktion derivaatta missä tahansa määrittelyjoukon kohdassa. Tämä on esimerkki siitä, kuinka objektikäsitys toimii lähtölaukauksena seuraavan opittavan asian (derivaattafunktion) prosessikäsitykselle (ks. Sfard, 1991). Rakentamalla edellisen kaltaisia sääntöjä voidaan kehittää ymmärrystä derivaattafunktiosta prosessina, joka muuttaa syötetyn funktion määrittelyjoukon kohdan funktion derivaatan arvoksi. Ymmärryksessä tapahtuu suuri hyppäys, kun derivaattafunktio ymmärretään objektina eli funktiona, jolla itsellään voi olla derivaattafunktio. Oleellista prosessi–objekti-kehityksessä on, että opittavaa käsitettä pitää todella ajatella prosessista kiteytyneenä objektina eikä ainoastaan käsitellä merkityksettömänä näennäisobjektina (Sfard, 1991). Jos esimerkiksi derivaattaa käsitellään vain näennäisobjektina, joka voidaan derivoida uudelleen, on vaikea muodostaa ymmärrystä siitä, mitä toinen derivaatta tarkoittaa.

3 Matematiikan kolme maailmaa

Matemaattiseen työskentelyyn kuuluu luvuilla laskemista ja symbolien manipuloimista, havaintojen tekemistä ja intuition saamista kuvaajista sekä formaalia päättelyä määritelmien ja todistettujen teoreemojen avulla. Tall (2003, 2013) on rakentanut matematiikan kolmen maailman teorian siten, että siinä huomioidaan monipuolisten esitysmuotojen sekä prosessi–objekti-teorioiden merkitys:

1. Havaintomaailma perustuu havaintoihin ja toimintoihin reaalimaailman kontekstissa. ”Todistaminen” perustuu tässä maailmassa ajatuskokeisiin, joissa kuvitellaan tai suoritetaan jokin tapahtuma ja ajatellaan tai havaitaan tämän seuraukset. Havaintomaailmassa voidaan esimerkiksi tarkastella laadullisesti funktion arvojen muutosnopeutta funktion kuvaajasta vaikkapa huomaamalla intuitiivisesti funktion arvojen kasvavan nopeasti, kun kuvaaja nousee jyrkästi.

2. Symbolimaailmassa lasketaan hyödyntäen matemaattisia symboleja. Matemaattisia käsitteitä tarkastellaan symbolien välityksellä sekä prosesseina että objekteina. Tässä maailmassa todistaminen perustuu symbolien manipulointiin. Esimerkiksi funktion arvojen muutosnopeuden tarkka arvo voidaan laskea keskimääräisten muutosnopeuksien raja-arvona.

3. Formaalimaailma puolestaan koostuu käsitteiden määrittelemisestä sekä deduktiivisista päättelyistä aksioomista ja määritelmistä teoreemoihin. Esimerkiksi derivaatalle voidaan muotoilla määritelmä, joka liittää sen osaksi matematiikan aksioomajärjestelmää. Määritelmän nojalla voidaan edelleen todistaa teoreemoja joistakin derivaatan ominaisuuksista.

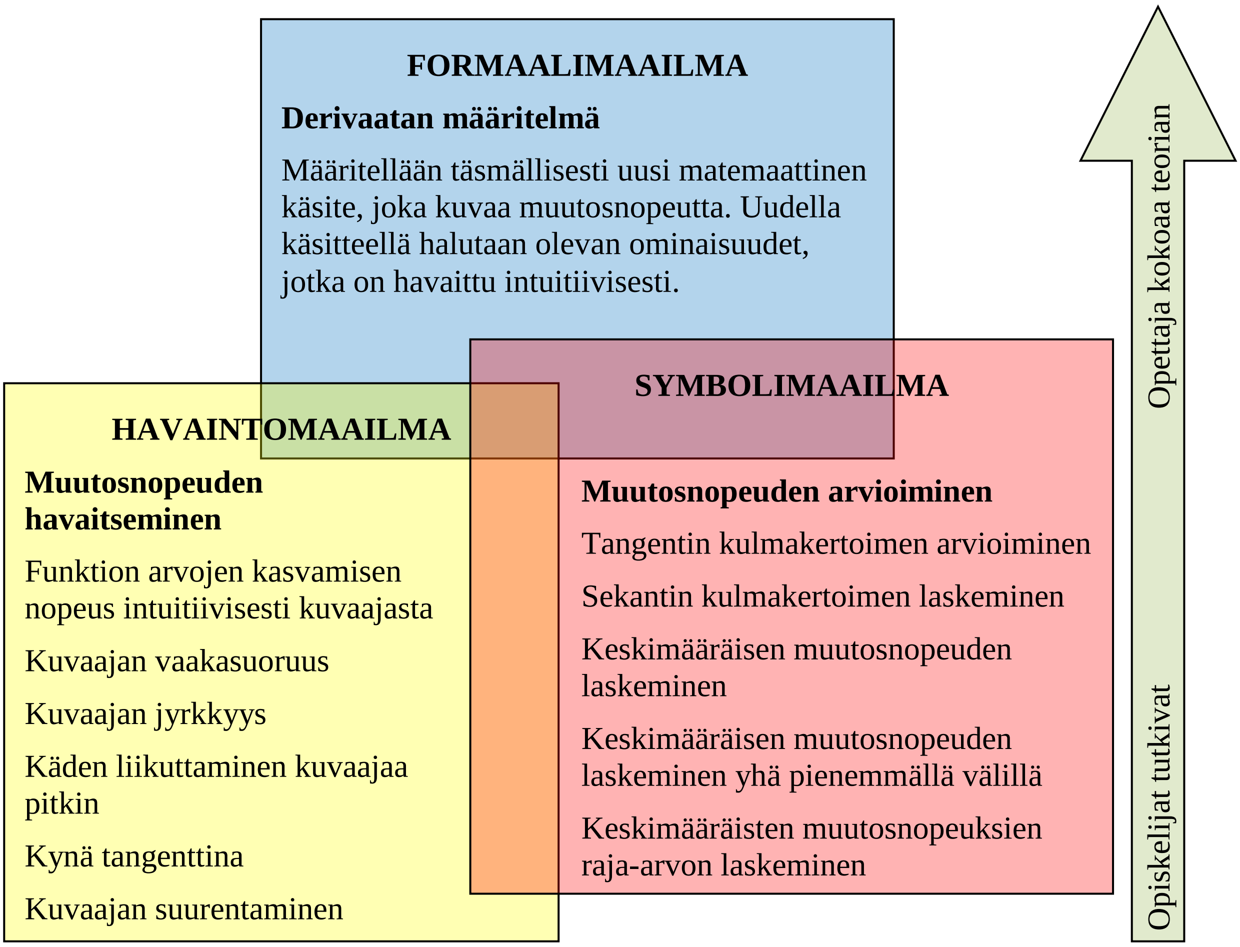
Matemaattiset tekstit alkavat usein tarvittavien käsitteiden määrittelyllä. Matematiikan tekeminen ei kuitenkaan ala määritelmistä. Sen sijaan määritelmä laaditaan käsitteen ominaisuuksien hahmottamisen jälkeen. Myöskään oppiminen ei useimmiten ala luonnollisesti määritelmästä vaan ensin muodostuu jokin syy muotoilla kyseinen määritelmä. Jos esimerkiksi derivaatan opettaminen aloitetaan siten, että opettaja esittää, kuinka tangentin kulmakerroin saadaan kaavalla $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, on aivan luonnollista, että opiskelijat eivät pidä kyseistä määritelmää kovinkaan järkevänä; tangentin kulmakerroin on suhteellisen yksinkertainen juttu, mutta erotusosamäärän raja-arvo vaikuttaa aika monimutkaiselta. Jotta määritelmälle olisi jokin syy, opiskelijoiden pitäisi ensin huomata, että tangentin kulmakertoimen määrittäminen ei onnistu tarkasti, jos tangenttisuora asetellaan silmämääräisesti kuvaan sopivaksi.

Oppiminen ei myöskään usein ala luontevasti laskuprosessien suorittamisella symbolimaailmassa. Esimerkiksi laskettaessa derivaatan arvoja, olisi hyvä olla jo jokin käsitys siitä, mikä derivaatta on. Siksi derivaatan oppiminen voi alkaa mielekkäästi siten, että derivaatta havaitaan ensin objektina havaintomaailmassa (Hähkiöniemi, 2006a). Kun ensin on tarkasteltu, mitä funktion arvojen muutosnopeus tarkoittaa funktion kuvaajassa, on luontevampaa alkaa tutkia, miten muutosnopeudelle voitaisiin laskea arvioita ja miten sen tarkka arvo saataisiin selville. Havaintomaailmassa muutosnopeutta tarkastellaan siis ensin objektina, sitten symbolimaailmassa lasketaan muutosnopeuden arvoja ja viimein formaalimaailmassa määritellään uusi käsite, derivaatta, johon kiteytyy muutosnopeuden olemus.

2 LÄHESTYMISTAPOJA DERIVAATAN OPETTAMISEEN JA OPPIMISEEN

3 Muutosnopeuden havaitsemisesta tarkan arvon määrittämiseen

Suunnittelin väitöskirjassani derivaattaan johdattavan opetusjakson lukion pitkään matematiikkaan (Hähkiöniemi, 2006a; ks. myös Hähkiöniemi, 2006b). Jakson yleiskuva on esitetty kuvassa 7. Tällä jaksolla tunnit etenevät siten, että ensin opiskelijat ratkaisevat tehtäviä. Sitten ratkaisuja käsitellään opettajan johtamassa koko luokan yhteisessä keskustelussa. Tämän keskustelun yhteydessä opettaja ottaa käyttöön ”virallisia” matematiikan käsitteitä opiskelijoiden kehittämien ideoiden pohjalta. Esimerkiksi opettaja ottaa sanan derivaatta käyttöön ja esittää sen matemaattisen määritelmän vasta, kun opiskelijat ovat keksineet, kuinka funktion hetkellistä muutosnopeutta voidaan arvioida laskemalla keskimääräinen muutosnopeus yhä pienemmällä aikavälillä.

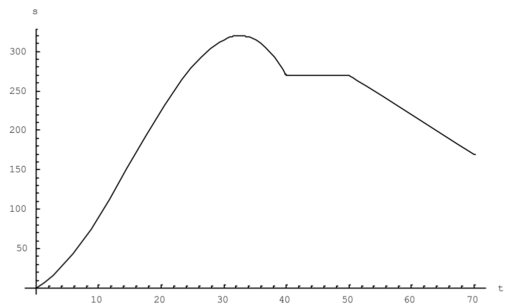


Kuva 7. Derivaatan opetusjakso (Hähkiöniemi, 2006a)

Opetusjakson mukaan derivaatan oppiminen alkaa tarkastelemalla liikettä. Opiskelijoilla on paljon kokemuksia liikkeestä. He ovat liikkuneet nopeammin ja hitaammin, he ovat laskeneet keskinopeuksia ja ovat jo käyttäneetkin tietämättään keskinopeutta pienellä välillä arvioidakseen hetkellistä nopeutta (esim. polkupyörän nopeusmittari). Siten derivaatan opiskelu on luontevaa aloittaa liikettä tarkastelemalla. Aluksi muutosnopeuden laadullista tarkastelua voidaan pohjustaa esimerkiksi seuraavantyyppisellä tehtävällä:

1. Oheisessa kuvassa on esitetty auton etäisyys *s* (m) lähtöpisteestä ajan *t* (s) funktiona.

a) Kuinka kaukana auto käy ja kuinka kauaksi lähtökohdasta se lopulta päätyy?



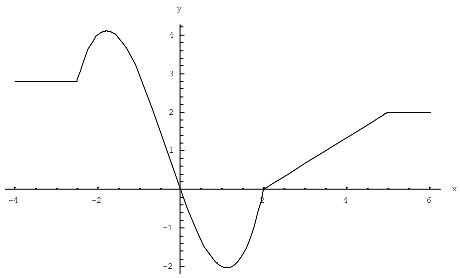
b) Kuinka kauan matkaan kuluu aikaa?

c) Mikä on auton keskinopeus koko matkalla?

d) Mitä voit kertoa auton nopeudesta eri kohdissa?

Tämän jälkeen voidaan siirtyä tarkastelemaan funktion arvojen muutosnopeutta seuraavanlaisessa tehtävässä:

2. Kuvassa on funktion *f* kuvaaja.

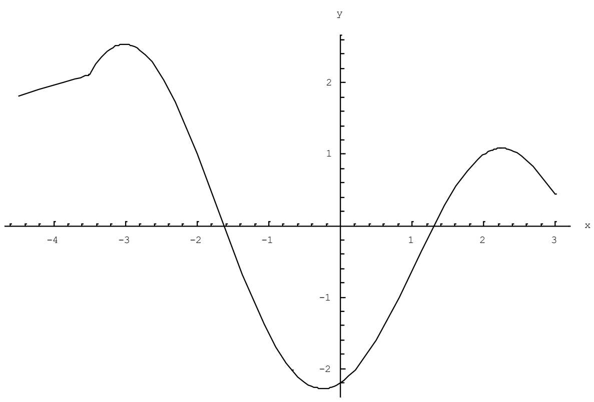


a) Milloin funktion *f* arvojen muutosnopeus on positiivinen ja milloin negatiivinen?

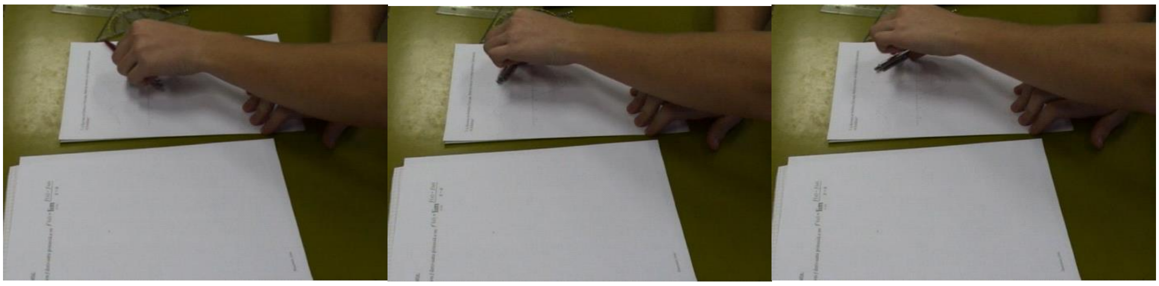
b) Milloin funktion *f* arvojen muutosnopeus on nolla?

c) Milloin funktion *f* arvojen muutosnopeus on suurin ja milloin pienin?

Nopeuden ja funktion arvojen muutosnopeuden laadullisen tarkastelun tavoitteena on alkaa muodostaa havaintomaailmassa käsitystä siitä, mitä muutosnopeus tarkoittaa. Opiskelijat pystyvät itse tekemään tällaisia huomioita intuitiivisesti. Lisäksi yhdessä voidaan keskustella siitä, miten muutosnopeus voidaan havaita. Esimerkiksi kuvaajan nousemisesta ja laskemisesta nähdään muutosnopeuden merkki, käyrän jyrkkyys kertoo muutosnopeuden suuruusluokan, kättä liikuttamalla voidaan aistia kasvamisen nopeus ja kynää voidaan liikuttaa ”tangenttina”. Vielä vuodenkin kuluttua tämän tunnin jälkeen eräs opiskelija teki funktion kuvaajan perusteella havaintoja derivaattafunktion derivaatasta seuraavasti (ks. kuva 8):

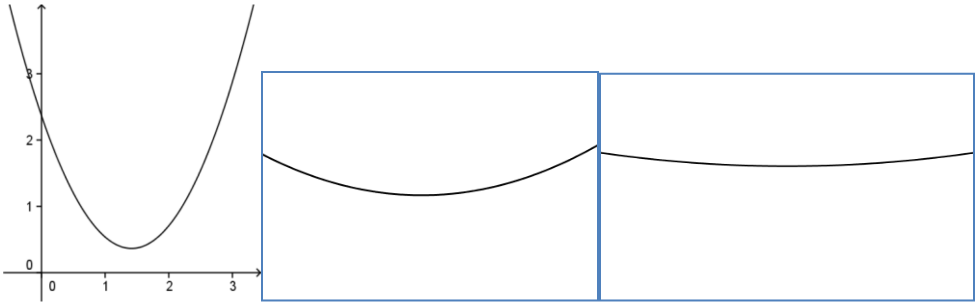


”Derivaatan derivaatta. [Laittaa kynän tangentiksi.] … Eiks se oo tota. Onks se niinku tolla välillä positiivinen [välillä [–1,5; 1]] ja tuolla [välillä [–3,4; –1,5]] ja tuolla negatiivinen [välillä [1, 3]]. … Mää vaan ajattelin, että derivaatta kuvaa sitä kulmakerrointa siinä, niin onks se kääntymässä niinkun mihinkä suuntaan [kääntelee kynää ilmassa] seuraavaks, kun mennään käyrää eteenpäin [seuraa kuvaajaa]. … Tosta pisteestä eteenpäin se kääntyy kokoajan ylöspäin [liikuttaa kynää tangenttina] ja sitten täältä lähtee kääntymään niinku alaspäin kokoajan [liikuttaa kynää tangenttina, ks. kuva 8]. Ja sitten vastaavasti tuolla kääntyy alaspäin.” (Hähkiöniemi, 2008.)



Kuva 8. Opiskelija tekee havaintoja derivaatasta käyttäen kynää tangenttina (Hähkiöniemi, 2008)

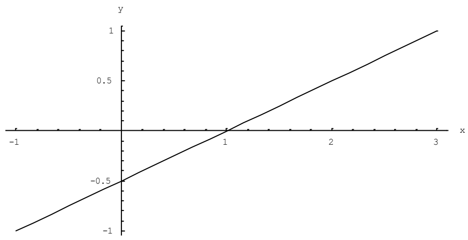
Mielenkiintoisia keskusteluja voi herätä myös siitä, miksi muutosnopeus olisi nolla jossain kohdassa. Tässä yhteydessä perusteena voi toimia vaikkapa kuvaajan suurentaminen piirto-ohjelmalla niin, että kuvaaja näyttää menevän hetkellisesti vaakasuoraan kuten kuvassa 9. Kuvaajan suurentaminen havainnollistaa myös, että kynä ”tangenttina” toimii funktion kuvaajan suurennoksena.



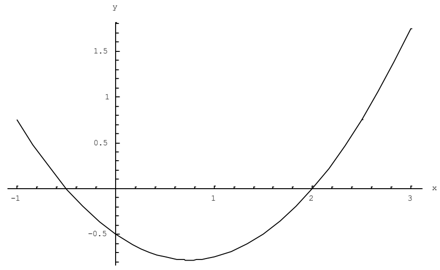
Kuva 9. Funktion kuvaaja on todellakin hetkellisesti vaakasuora (ks. myös http://ggbm.at/MBPmu6z5)

Havaintomaailmassa opiskelijat pystyvät tarkastelemaan hetkellistä muutosnopeutta laadullisesti, mutta sen arvojen laskemista ei vielä tavoitella. Sen sijaan symbolimaailmassa opiskelijat voivat laskea keskimääräisiä nopeuksia ja funktioiden keskimääräisiä muutosnopeuksia esimerkiksi seuraavantyyppisissä tehtävissä:

3. a) Kuinka monella yksiköllä funktion *f* arvot kasvavat, kun *x* kasvaa yhdellä yksiköllä (eli mikä on funktion *f* arvojen muutosnopeus)?



b) Kuinka monella yksiköllä funktion arvot keskimäärin kasvavat, kun *x* kasvaa yhdellä yksiköllä välillä [1, 3] (eli mikä on funktion *g* arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 3])?



Yhteisessä keskustelussa tehtävien ratkaisemisen jälkeen opettaja voi jopa käyttää termiä erotusosamäärä ja käsitellä erotusosamäärän kaavaa. Lisäksi opettaja voi yhdistää sekantin kulmakertoimen tilanteeseen. Tämän jälkeen opiskelijat ovat valmiita tutkimaan, miten funktion hetkellisen muutosnopeuden arvon voisi määrittää esimerkiksi seuraavantyyppisessä tehtävässä:

4. Auto lähtee liikkeelle hetkellä $t = 0$, jonka jälkeen sen etäisyys lähtöpaikasta *s* (m) riippuu ajasta *t* (s) funktion $s(t) = t^2$ mukaisesti.

a) Mikä on auton etäisyys lähtöpaikasta hetkellä $t = 5$?

b) Milloin auto on kulkenut 100 metriä?

c) Miten auton nopeus muuttuu ajan kasvaessa? Entä funktion *s* muutosnopeus?

d) Määritä auton keskimääräinen nopeus välillä [5, 7].

e) Määritä funktion *s* arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä [4, 5].

f) Mikä on auton nopeus hetkellä $t = 5$? Keksi erilaisia tapoja määrittää tai arvioida nopeus.

Opiskelijat voivat keksiä hetkellisen (muutos)nopeuden arvioimiseen monia keinoja. Joku voi saada idean ”tangentiksi” asetetun kynän (ks. kuva 8) kulmakertoimen laskemisesta. Joku voi suurentaa kuvaajaa niin, että se näyttää suoralta, ja laskea suoran kulmakertoimen. Joku voi ottaa keskiarvon d- ja e-kohtien keskimääräisistä nopeuksista. Joku arvioi keskimääräisten nopeuksien ja kuvaajan muodon perusteella muutosnopeuden olevan d- ja e-kohtien keskinopeuksien välissä, mutta lähempänä e-kohdan keskinopeutta. Tätä ratkaisua on myös helppo lähteä tarkentamaan välejä pienentämällä.

Opettajan tavoitteena onkin ohjata opiskelijat huomaamaan, että arviota voidaan tarkentaa pienentämällä väliä, jolla keskinopeus lasketaan. Esimerkiksi piirtämällä keskinopeuksia vastaavat sekantit opiskelijat voivat huomata, että ne arvioivat hetkellistä nopeutta paremmin, kun väliä pienennetään. Tavoitteena on, että kaikki opiskelijat keksivät jonkin arviointimenetelmän, saavat onnistumisen elämyksiä ja ovat pohtineet tehtävää niin, että yhteisen käsittelyn aikana tarkankin arvon määrittäminen on ymmärrettävissä. Lisäksi jotkut opiskelijat voivat jopa keksiä, että hetkellisen nopeuden arvioita voidaan tarkentaa loputtomasti, ja alkaa selvittää, mitä lukua keskimääräiset nopeudet lähestyvät, kun aikaväli pienenee.

Tehtävän ratkaisemisen jälkeisessä keskustelussa opettaja huolehtii, että esille tulee idea keskinopeuden laskemisesta yhä pienemmällä välillä. Tässä kannattaa laskea muutamia arvioita ja käyttää kaavaa $\frac{s(x)-s(5)}{x-5}$ keskinopeuksien laskemiseen. Opettaja pyrkii myös herättämään keskustelua siitä, mitä lukua keskinopeudet lähestyvät ja miten se luku voidaan selvittää. Tämä luku myös määritetään raja-arvon avulla: $\lim_{x\to 5}\frac{s(x)-s(5)}{x-5}$. Tämän keskustelun jälkeen opettaja ottaa käyttöön uuden matemaattisen käsitteen, derivaatan, joka tarkoittaa funktion arvojen muutosnopeutta, ja muotoilee käsitteen määritelmän. Näin on päädytty derivaatan määritelmään niin, että monimutkaiselle määritelmälle on jokin syy ja opiskelijat ovat itse osallistuneet määritelmän idean keksimiseen.

Kuvattuun opetusjaksoon kuluu kolme tai neljä 45 minuutin oppituntia. Lukion opetussuunnitelman perusteissa korostetaan derivaatan merkitystä, joten ajankäyttö on perusteltua. Ilman derivaatan ymmärtämistä voisi käydä niin, että opiskelijat joutuvat opettelemaan funktion kulkukaavion käyttämisen sekä seuraavien derivaattaa soveltavien kurssien sisällöt ulkoa ilman ymmärrystä. Lisäksi derivaatan ymmärtämiseen käytetty aika säästää aikaa myöhemmin, kun opiskelijat ovat jo yhdistäneet derivaatan merkin funktion kasvamiseen/vähenemiseen, derivaatan nollakohdan kuvaajassa olevaan ”huippuun” ja derivaatan arvon tangentin kulmakertoimeen. Olen itse havainnut derivaatan käsitteeseen johdattamisen sekä tässä esitetyllä tavalla että hieman muunnellusti teknologiaa hyödyntävällä tavalla (ks. seuraavat luvut) toimivaksi ja jatkon kannalta hyödylliseksi.

3 Liikeanturi derivaatan oppimisessa

Edellisessä luvussa esittämässäni opetusjaksossa derivaatan oppiminen alkoi tarkastelemalla liikettä. Tätä vaihetta voidaan tehostaa käyttämällä liikeanturia (CBR), jonka tehokkuudesta oppimisen kannalta on useita esimerkkejä (ks. esim. Berry & Nyman, 2003). Lisäksi liikeanturia käyttäen matematiikan tuntiin saadaan virkistävän erilaista toimintaa, kun opiskelijat pääsevät liikkumaan ja tutkimaan omaa liikettään. Liikeanturi toimii siten, että se mittaa kohteen etäisyyden anturista ja tuottaa aika–etäisyys-kuvaajan. Esitän tässä joitain ideoita liikeanturin käytöstä, jotka perustuvat omaan kokemukseeni. Aivan ensimmäisellä derivaattaan johdattavalla tunnilla opiskelijat voisivat pienissä ryhmissä käyttää liikeanturia esimerkiksi seuraavanlaisissa tehtävissä:

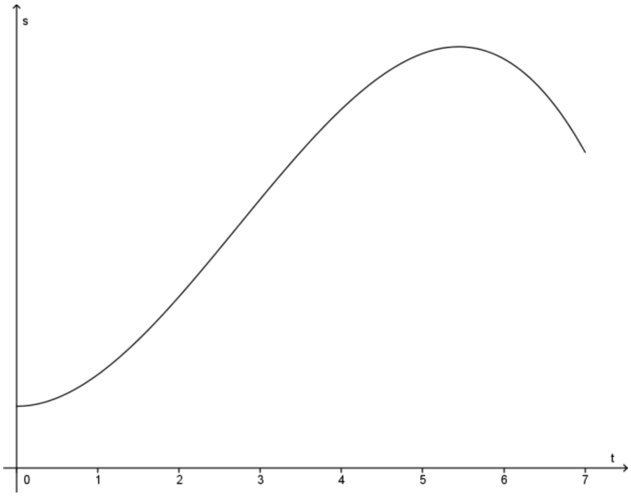
1. s = etäisyys liikeanturista (m), t = aika (s).

a) Kuvailkaa kuvassa esitetyn liikkeen nopeutta.

b) Hahmotelkaa nopeuden kuvaaja aika–nopeus-koordinaatistoon.

c) Tuottakaa samanlainen etäisyyden kuvaaja liikkumalla liikeanturin edessä.

d) Verratkaa hahmottelemaanne nopeuden kuvaajaa liikeanturin tuottamaan kuvaajaan.



Yrittäessään kävellä kuvaajia opiskelijat kiinnittävät kuin itsestään huomiota siihen, että saadakseen jyrkkenevän kuvaajan heidän täytyy liikkua nopeammin, tasaisella nopeudella kuvaaja on suora ja ”huippukohdissa” nopeus on hetkellisesti nolla. Lisäksi nopeuden kuvaajan avulla on helpompi ymmärtää negatiivisen nopeuden merkitys.

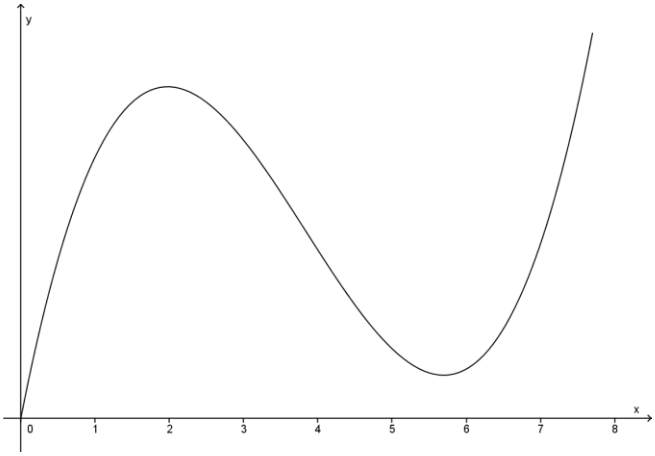
Liikeanturin käyttö voidaan myös yleistää funktion arvojen muutosnopeuden tarkasteluun esimerkiksi seuraavanlaisella tehtävällä:

2. Kuvassa on funktion *f* kuvaaja.

a) Millä väleillä funktion *f* arvot kasvavat? Entä vähenevät?

b) Kuvailkaa funktion *f* arvojen muutosnopeutta.

c) Missä kohdissa funktion *f* arvojen muutosnopeus on nolla?



d) Millä väleillä funktion *f* arvojen muutosnopeus on positiivinen ja millä väleillä negatiivinen?

e) Missä kohdassa funktion *f* arvojen muutosnopeus on pienin ja missä suurin?

f) Hahmotelkaa funktion *f* arvojen muutosnopeuden kuvaaja.

g) Kuvitelkaa funktion *f* kuvaaja etäisyyden kuvaajaksi ja kävelkää se. Verratkaa liikeanturin tuottamaa nopeuden kuvaajaa f-kohdassa piirtämäänne muutosnopeuden kuvaajaan.

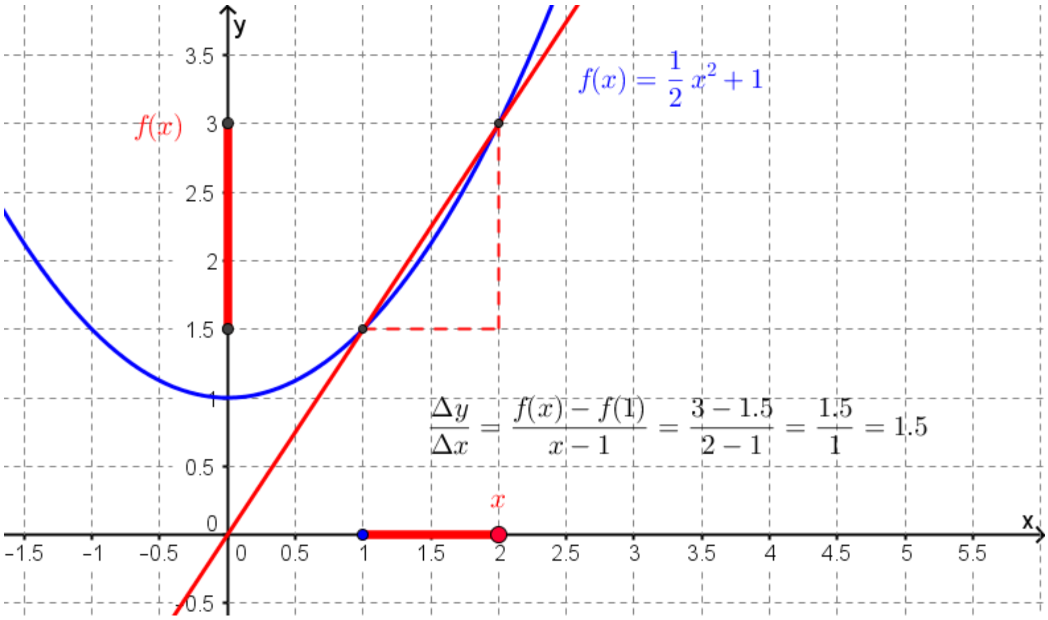
Tunnin lopussa opettajan kannattaa johtaa myös keskustelua opiskelijoiden tekemistä havainnoista, jotta liikeanturin käyttäminen ei jää irralliseksi leikkimiseksi. Aikaa liikeanturin käyttöön kuluu vain yksi tunti. Lisäksi sillä voidaan korvata osa edellisessä luvussa esitetyn opetusjakson tehtävistä. Liikeanturin käyttö tarjoaa myös mahdollisuuden fysiikan ja matematiikan opintojen integrointiin.

3 Tietokoneavusteinen derivaatan oppiminen

Tietokoneohjelmien käyttäminen voi tehostaa matematiikan oppimista ja säästää aikaa, kun opiskelijoiden omatoiminen tutkiminen nopeutuu. Jotta matematiikan opetusohjelmien käyttö olisi mahdollisimman tehokasta, tulisi niitä käyttää niin, että opiskelijat itse saavat tutkia opittavia käsitteitä ohjelmia käyttäen. Derivaatankin tietokoneavusteisen oppimisen hyötyjä on tutkittu useissa tutkimuksissa (Artigue, 2005; Heid, 1988; Repo, 1996). Esimerkiksi Heidin (1988) tutkimuksessa derivaatan opiskelu aloitettiin kehittämällä laadullista ymmärrystä derivaatasta ja suorittamalla laskut tietokoneella. Heidin tulosten mukaan koeryhmä ymmärsi derivaatan kontrolliryhmää paremmin, mutta suoriutui myös laskutaito-osiossa yhtä hyvin kuin laskutaitoa opetellut kontrolliryhmä. Myös Revon (1996) tutkimuksessa saatiin samansuuntaisia tuloksia. Tietokoneen käyttö ei siis välttämättä heikennä opiskelijoiden laskutaitoa vaan ymmärryksen kehittyminen mahdollistaa laskutaidon nopeamman kehittymisen.

Esitän seuraavaksi joitain mahdollisuuksia tietokoneen käyttöön derivaatan oppimisessa. Olen käyttänyt esimerkeissä ilmaista GeoGebra-ohjelmaa, mutta useimmat ideat ovat toteutettavissa myös kaupallisilla ohjelmilla. Kaikki havainnollistukset löytyvät sivulta http://ggbm.at/SafHGeke.

Esimerkiksi derivaatan määritelmän oppimista voidaan tehostaa appletilla, jossa opiskelija voi raahata *x*-akselin kohtaa *x*, joka määrittää funktion kuvaajalle asetetun sekantin toisen pisteen (ks. kuva 10).



Kuva 10. Erotusosamäärän raja-arvoon johdattava tehtävä (http://ggbm.at/wccG2gDy).

Jos opettaja itse käyttäisi kuvan 10 sovellusta ja toteaisi, että sekantit lähestyvät tangenttia, niin se havainnollistaisi hienosti raja-arvon merkitystä derivaatan määritelmässä. Opiskelijat eivät kuitenkaan välttämättä yhdistä hienoa kuvaa erotusosamäärän raja-arvon kaavaan. Siksi oppiminen on tehokkaampaa, jos opiskelijat itse saavat käyttää havainnollistusta ja heille on annettu esimerkiksi seuraavanlainen tehtävä:

1. Kuvassa on funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ kuvaaja ja siihen liittyvä kaava. Vastaa kuvaa tutkimalla seuraaviin kysymyksiin:

a) Kuinka paljon funktion *f* arvot muuttuvat välillä [1; 1,5] eli kun *x* muuttuu arvosta 1 arvoon 1,5?

b) Mikä on funktion *f* arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 2]?

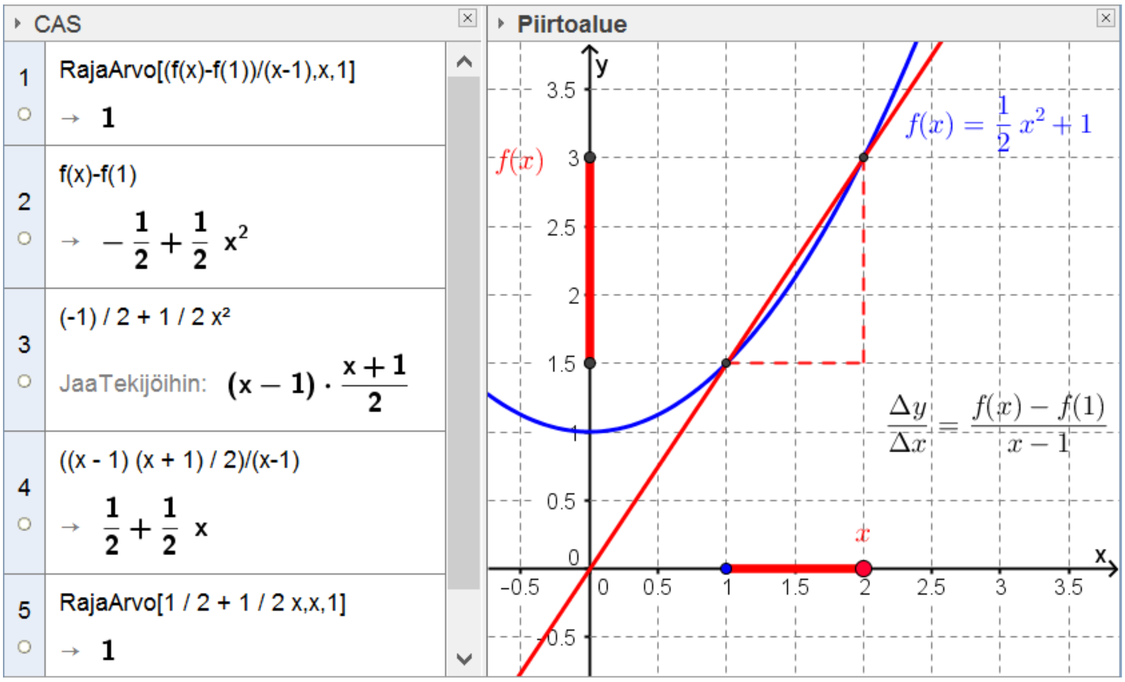
c) Mikä on funktion *f* arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 1]?

d) Mikä näyttäisi olevan funktion *f* hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$? Selitä lyhyesti, miten selvitit tämän.

e) Edellisessä kohdassa keksittiin, miten hetkellisen muutosnopeuden voi arvioida. Tutki, miten arvon voi määrittää tarkasti, ja määritä tarkka arvo funktion *f* hetkelliselle muutosnopeudelle kohdassa $x = 1$.

Tehtävän d-kohdassa opiskelijoiden on tarkoitus keksiä, että arvio paranee, kun kohta x lähestyy kohtaa a. Koska toinen piste on kiinnitetty kohtaan, jossa muutosnopeutta haetaan, ohjaa se opiskelijoita kohti erotusosamäärää. Kohdassa e opiskelijat voivat hyödyntää joko symbolista laskinta, WolframAlphaa[1], GeoGebran CAS-näkymää tai jotain muuta symbolisen laskennan ohjelmaa. Kohdan e ratkaiseminen GeoGebralla on esitetty kuvassa 11. Myös laskun välivaiheet voidaan selvittää symbolisen laskennan komennoilla (rivit 2–5 kuvan 11 CAS-ikkunassa).

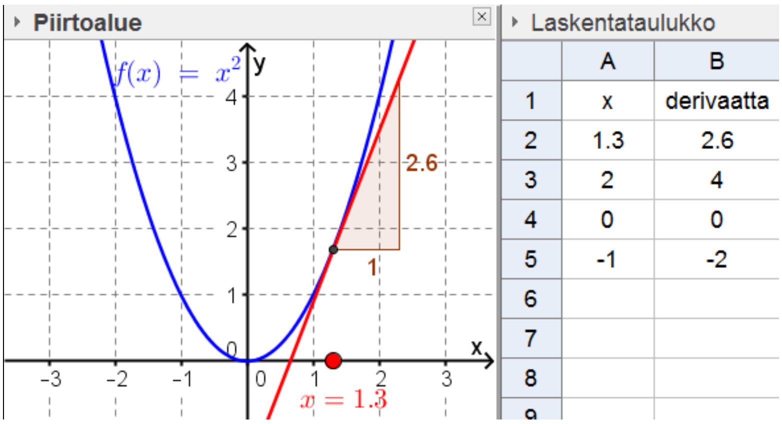
[1] Nettisivulla toimiva ilmainen sovellus, jolla voidaan laskea raja-arvo komennolla lim (0.5x^2+1-1.5)/(x-1), x, 1 (http://www.wolframalpha.com).



Kuva 11. Hetkellisen muutosnopeuden tarkan arvon määrittäminen GeoGebran CAS-ikkunassa (http://ggbm.at/zTGz2kGb)

Mikäli opettaja päättää kuitenkin olla pohjustamatta muutosnopeutta, voi edellisen tehtävän muuttaa tangentin kulmakertoimen määrittämiseksi. Tällöin opiskelijoiden tehtävänä on selvittää, miten tangentin kulmakerroin voidaan määrittää sekanttien avulla. Tässä tangentin asettaminen on ongelmallista, sillä suora on määritelty, jos tiedetään kaksi suoran pistettä tai yksi piste ja suunta, mutta nyt tiedetään vain yksi piste.

Myös derivaattafunktion ymmärtämistä ja derivointisääntöjen muodostamista voidaan tehostaa teknologian avulla. Usein derivaattafunktio tarkoittaa opiskelijoille vain mekaanista derivointia, kun taas jatkon kannalta derivaattafunktio pitäisi ymmärtää sääntönä, jolla saadaan muutosnopeus eli tangentin kulmakerroin halutussa kohdassa. Tämä ongelma voidaan välttää aloittamalla derivaattafunktion ja derivointisääntöjen käsittely esimerkiksi seuraavantyyppisellä tehtävällä, jonka ratkaisemiseen käytetään kuvassa 12 esitettyä applettia: Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion $f(x) = x^2$ derivaatta missä tahansa kohdassa x.



Kuva 12. Derivaattafunktion säännön muodostaminen (http://ggbm.at/xBV3KjtQ)

Keksitty sääntö voidaan tietysti myös todistaa oikeaksi derivaatan määritelmää käyttäen joko käsin tai symbolisen laskennan toiminnoilla kuten kuvassa 11. Jos halutaan korostaa määritelmän käyttöä, voidaan derivoimissäännön keksimisessä käyttää GeoGebra-applettia, jossa derivaatan arvo arvioidaan jokaisessa kohdassa erikseen sekanttien avulla (http://ggbm.at/DmWuE9rk).

Lyhyessä matematiikassa, jossa raja-arvon käsitettä ei opiskella, voidaan tyytyä perustelemaan vain osa säännöistä. Esimerkiksi derivointisääntöjen keksimisen jälkeen opiskelijat voivat perustella lineaaristen funktioiden tangenttien olevan jokaisessa kohdassa funktion suuntaisia, joten derivaatan arvo on missä tahansa kohdassa sama kuin alkuperäisen funktion kuvaajan kulmakerroin. Tehtävien ratkaisemisen jälkeen opettaja voi myös havainnollistaa derivaattafunktion muodostumista appletilla, jossa derivaattafunktion kuvaaja muodostuu tangenttia raahatessa (http://ggbm.at/VMpFb5Hs). Huomattavaa on, että tällaisella opettajan havainnollistuksella ei kuitenkaan kannata aloittaa opetusta, sillä muutoin opiskelijat eivät välttämättä pohdi yksityiskohtia siitä, miten derivaattafunktion kuvaaja syntyy.

Myös jatkossa teknologian avulla voidaan tutkia esimerkiksi trigonometristen funktioiden derivoimissääntöjä (http://ggbm.at/b5GJJz5s[2]) tai derivoituvuutta ja toispuoleisia derivaattoja (http://ggbm.at/e6Yk6Tn4).

[2] Vastaavasti derivaattafunktion arvaaminen ilman tietokonetta tapahtuu liikuttamalla kynää tangenttina.

2 TIIVISTELMÄ

Derivaatan kuten muidenkin matematiikan käsitteiden opiskelussa on tärkeintä aktivoida opiskelijat itse tutkimaan, kehittelemään ideoita, päättelemään ja harrastamaan matemaattista ajattelua. Opiskelijoille ei kannata tarjota esimerkkejä, joiden mukaan tehtävät ratkeavat, sillä se johtaa usein passiiviseen jäljittelevään oppimiseen eikä ymmärrys asiasta pääse kehittymään. Sen sijaan opiskelijat kannattaa laittaa 2–3 hengen ryhmissä ratkaisemaan tehtäviä, joissa he tulevat miettineeksi opiskeltavan käsitteen ydinideoita. Tehtävissä kannattaa hyödyntää monipuolisia esitysmuotoja, sillä usein matemaattisessa ajattelussa kehitellään ideoita esimerkiksi kuvaajien avulla. Opettaja voi myös ohjata opiskelijat muodostamaan yhteyksiä esitysmuotojen välille. Tietokoneohjelmat voivat nopeuttaa ja helpottaa tutkimista. Myös esitysmuotojen välisten yhteyksien muodostaminen helpottuu, kun tietokoneella voi esimerkiksi raahata jotain kuvaajan pistettä ja tarkastella, miten se vaikuttaa yhtälöön.

Jotta opiskelijoiden tutkimukset eivät jäisi irrallisiksi, niin tehtävien ratkaisemisen jälkeen opettaja johtaa koko luokan keskustelua, jossa opiskelijoiden muodostamista ideoista edetään opittavan asian standardiin matemaattiseen muotoiluun. Opiskelijat eivät välttämättä käytä täsmällisiä perusteluita tai kiinnitä huomiota kaikkiin mahdollisiin vaihtoehtoihin, mutta koko luokan keskustelussa opettaja voi täydentää opiskelijoiden ideoita. Opettajan johtaman koko luokan keskustelun tavoitteena on myös ”virallistaa” opittu tieto siten, että opiskelijoille ei jää epäselvyyksiä siitä, mikä oli opittavan asian lopullinen muotoilu. Olen käyttänyt tällaisesta opetusmenetelmästä nimitystä tutkiva matematiikka (Hähkiöniemi, 2011; ks. myös http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat).

Tietolaatikko:

– Painota ymmärtämistä, älä esimerkin jäljittelemistä.

– Käytä monipuolisesti erilaisia esitysmuotoja.

– Järjestä tunti niin, että opiskelijat saavat itse tutkia opittavaa asiaa.

– Pohjusta määritelmää, älä aloita esittämällä määritelmä.

– Hyödynnä teknologian tarjoamia mahdollisuuksia.

2 LÄHTEET

Artigue, M. (2005). The integration of symbolic calculators into secondary education: some lessons from didactical engineering. Teoksessa D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (toim.), The didactical challenge of symbolic calculators. Mathematics education library (Vol. 36, s. 231–294). New York, NY: Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 399–431.

Berry, J. & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. Journal of Mathematical Behavior, 22, 481–497.

Davis, R. & Maher, C. (1997). How students think: The role of representations. Teoksessa L. English (toim.), Mathematical reasoning. Analogies, metaphors, and images, 93–115. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Teoksessa D. Tall (toim.), Advanced mathematical thinking, 95–123. Dordrecht, Hollanti: Kluwer.

Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137–165.

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representations in learning and doing mathematics. Teoksessa L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (toim.), Theories of mathematical learning, 397–430. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gray, E. & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. Teoksessa M. van den Heuval-Panhuizen (toim.), Proceedings of the 25^{th} conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 3, s. 65–72). Utrecht, Alankomaat: PME.

Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen (2. uudistettu painos, 50–83). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Heid, K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. Journal for Research in Mathematics Education, 19(1), 3–25.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. Teoksessa D. Grouws (toim.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (s. 65–97). New York, NY: Macmillan.

Hähkiöniemi, M. (2006a). The role of representations in learning the derivative. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Raportti 104.

Hähkiöniemi, M. (2006b). Ajattelun apuvälineet – tapaustutkimus derivaatan representaatioista. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 82.

Hähkiöniemi, M. (2006c). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. Journal of Mathematical Behavior, 25(2), 170–184.

Hähkiöniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge – The case of the derivative concept. Proceedings of PME 32 & PME-NA XXX (Vol. 3, 113–120). Morelia, Meksiko: PME.

Hähkiöniemi, M. (toim.) (2011). GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa: tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-4623-4

Pehkonen, E. (2000). Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus 4/2000, 375–381.

Repo, S. (1996). Matematiikkaa tietokoneella. Derivaatan käsitteen konstruoiminen symbolisen laskennan ohjelman avulla. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja, N:o 33.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36.

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. Teoksessa L. Carvalho & L. Guimarães (toim.), História e tecnologia no ensino da matemática (vol. 1, 1–28). Rio de Janeiro, Brasilia.

Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

Viholainen, A. (2008). Prospective mathematics teachers' informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Raportti 115.