Normalisoidun p-parabolisen yhtälön radiaaliset ratkaisut

Tapio Kurkinen

Pro gradu -tutkielma

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto
23. kesäkuuta 2020

Tiivistelmä: Tapio Kurkinen, *Normalisoidun p-parabolisen yhtälön radiaaliset ratkaisut* (engl. Radial solutions of the normalized p-parabolic equation), matematiikan pro gradu -tutkielma, 58 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2020.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan stokastisesta peliteoriasta esille tullutta normalisoitua p-parabolista yhtälöä ja tämän radiaalisten ratkaisujen yhteyttä klassiseen lämpöyhtälöön. Radiaalisia ratkaisuja tarkastellessa voidaan redusoida p-parabolinen yhtälö eräänlaiseksi yksiulotteiseksi lämpöyhtälöksi. Työn päätuloksena näytetään ekvivalenssitulos tämän redusoidun yhtälön jatkuvien heikkojen ratkaisujen ja alkuperäisen yhtälön radiaalisten viskositeettiratkaisujen välille. Tämän tuloksen ymmärtämistä varten käsitellään sekä divergenssimuotoisille yhtälöille soveltuvan heikkojen ratkaisujen teorian perusteita että degeneroituneesti elliptisille funktioille soveltuvaa viskositeettiratkaisujen teoriaa.

Käytettyjen merkintöjen esittelyn jälkeen johdamme klassisen lämpöyhtälön ja sen fundamentaaliratkaisun, sekä todistamme alkuarvo-ongelman yksikäsitteisyyden. Tässä johdettu fundamentaaliratkaisu osoittautuu erääksi yksiulotteisen yhtälön ratkaisuksi oikein tulkittuna. Johdatteluna työn päätulokseen todistamme ekvivalenssituloksen näiden kahden ratkaisun käsitteelle lämpöyhtälön tapauksessa.

Avainsanat: Normalisoitu p-parabolinen yhtälö, stokastinen peliteoria, vertailuperiaate, häiritty köydenvetopeli, viskositeettiratkaisu, heikko ratkaisu, lämpöyhtälö.

Sisällys

1. Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan stokastisessa peliteoriassa esille tullutta normalisoitua p-parabolista yhtälöä

$$u_t = \Delta u + (p-2)|\nabla u|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i,x_j} u_{x_j} u_{x_i}, \tag{1.1}$$

missä $p > 1$. Työn tarkoituksena on tutustua tämän yhtälön ominaisuuksiin ja lähestyä yhtälön tarkastelua yhdistämällä sitä lämpöyhtälöön ja tälle tunnettuihin tuloksiin. Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa suoralla laskulla muotoon

$$u_t = |\nabla u|^{2-p} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

ja se on erikoistapaus yleisemmästä epälineaarisesta parabolisesta yhtälöstä

$$u_t = c|\nabla u|^{\kappa} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

missä $c > 0$, $p > 1$ ja $\kappa > 1 - p$. Työssä tarkasteltu yhtälö saadaan tästä muodosta valinnalla $\kappa = 2 - p$. Jos $p \neq 2$, ei yhtälön (1.1) oikeaa puolta ole mahdollista kirjoittaa divergenssimuodossa, joten yleisemmän ratkaisun käsitettä täytyy lähestyä viskositeettiratkaisujen näkökulmasta heikkojen ratkaisujen sijasta.

Rajoittamalla tarkastelu ainoastaan radiaalisiin ratkaisuihin saamme muokattua normalisoidun p-parabolisen yhtälön yksiulotteiseksi yhtälöksi hyödyntämällä radiaalisuuden tuomaa symmetriaa ja määrittelemällä "kuvitteellinen ulottuvuus" d. Mikäli $d \in \mathbb{N}$, saadaan laskulla muokattua yksiulotteisesta yhtälöstä klassinen d-ulotteinen lämpöyhtälö. Lämpöyhtälön yleistä teoriaa tarkastelemme luvussa 3. Jos $d \notin \mathbb{N}$, emme voi siirtyä yksiulotteisesta yhtälöstä takaisin korkeampaan ulottuvuuteen, mutta saamme silti ekvivalenssituloksen tarkasteltujen yhtälöiden ratkaisujen välille.

Tutkielman päätuloksena lauseessa 6.5 todistamme, että yhtälön (1.1) radiaaliset viskositeettiratkaisut ovat ekvivalentteja muokatun yksiulotteisen yhtälön heikkojen ratkaisujen kanssa vakion d arvosta riippumatta. Päätulos todistetaan luvussa 6 ja viskositeettiratkaisujen ja heikkojen ratkaisujen teoriaa käsitellään luvussa 4. Todistus on erikoistapaus Mikko Parviaisen ja Juan Luis Vásquezin työssään [PV18] todistamasta yleisemmästä tulokset tapauksessa $q = 2$, mutta vältämme todistuksen teknisemmän suunnan olettamalla ratkaisujen olemassaolon.

Ekvivalenssituloksen molemmat suunnat perustuvat ratkaisuille voimassaoleviin vertailuperiaatteisiin. Vertailuperiaatteiden mukaan, jos kahden eri ratkaisun erotusfunktio on positiivista joukon reunalla, niin se tulee olemaan positiivista koko tarkastelujoukossa. Heikon ratkaisun näytämme viskositeettiratkaisuksi olettamalla, että löydämme viskositeettiratkaisun määritelmän kanssa ristiriidassa olevan testifunktion. Osoittautuu, että kyseinen testifunktio on automaattisesti yhtälön heikko ratkaisu jossain tarkastelupisteen avoimessa ympäristössä, ja tätä kautta päädymme ristiriitaan heikkojen ratkaisujen vertailuperiaatteen kanssa. Viskositeettiratkaisun todistamisessa heikoksi käytämme tunnettuja olemassaolotuloksia ja todistuksemme toista suuntaa saadaksemme kaksi viskositeettiratkaisua samoilla reuna-arvoilla, ja tästä saamme haluamamme tuloksen soveltamalla vertailuperiaatetta viskositeettiratkaisuille.

Näiden tulosten ymmärtämisen helpottamiseksi työn aiempiin lukuihin on pyritty keräämään kaikki tähän tarvittava teoria. Luvussa 3 esitellään klassisen lämpöyhtälön teoriaa johtamalla yhtälö fysikaalisesta tulkinnasta lähtien, konstruoimalla fundamentaaliratkaisu ja todistamalla alkuarvo-ongelman ratkaisun yksikäsitteisyys. Luvussa 4 esitellään heikkojen ratkaisujen ja viskositeettiratkaisujen teoriaa parabolisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden tapauksessa. Luvussa todistetaan myös ekvivalenssitulos lämpöyhtälön heikkojen ratkaisujen ja viskositeettiratkaisujen välille. Määrittelemme viskositeettiratkaisujen vertailuperiaatteen todistusta varten parabolisten jettien käsitteen ja esitämme parabolisen version Ishiin lemmasta ilman todistusta.

Crandall, Evans, Giga, Ishii, Lions, Souganidis ja useat muut matemaatikot tutkivat stokastisten pelien ja differentiaaliyhtälöiden viskositeettiratkaisujen välistä yhteyttä 1980-luvulla. Viime vuosina yhteys stokastisten köydenvetopelien ja normalisoidun p-Laplace tyyppisien yhtälöiden välillä on ollut tutkimuksen kohteena. Elliptisessä tapauksessa yhteys löydettiin Peresin, Schrammin, Sheffieldin ja Wilsonin julkaisussa [PS08][PSSW08] tilanteessa $1 < p \leq \infty$ ja tapauksessa $p = 1$ [BCQ01][KS06]. Manfredi, Parviainen ja Rossi todistivat julkaisussaan [MPR10], että normalisoidun p-parabolinen yhtälön ratkaisut saadaan kahden pelaajan häirityn köydenvetopelin (tug-of-war with noise) arvofunktioiden raja-arvona, kun yhden askeleen pituus suppenee kohti nollaa. Esittelemme yhteyttä peliteoriaan lyhyesti luvussa 5. Yhtälön (1.1) ratkaisuilla on myös se hyödyllinen ominaisuus, että ne pysyvät ratkaisuina vaikka niitä skaalattaisiin vakiolla. Tämän hyödyntämistä kuvankäsittelyssä on tutkittu julkaisuissa [Doe11] ja [ETT15]. Heuristisesti vakion p arvoa muuttamalla voidaan vaikuttaa siihen miten paljon pikseleiden kirkkauden arvot diffusoituvat gradientin suuntaan verrattuna muihin suuntiin.

Viskositeettiratkaisujen ja heikkojen ratkaisujen väliset ekvivalenssitulokset ovat myös olleet suosittu tutkimuksen aihe sekä elliptisessä, että parabolisessa tapauksessa. Ekvivalenssituloksia on todistettu elliptisessä tapauksessa muun muassa p-Laplacen yhtälölle [JLM01] [JJ11], $p(x)$-Laplacen yhtälölle [JLP10], normalisoidulle $p(x)$-Laplacen yhtälölle [Sil18] ja lineaarisille elliptisille yhtälöille yleisemmin [Ish95]. Parabolisessa tapauksessa tuloksia on todistettu tavalliselle p-paraboliselle yhtälölle töissä [JLM01][Sil19].

2. Esitietoja

Tässä luvussa esitellään työssä käytetyt merkinnät ja joitain tarvittavia perustuloksia. Koko työn ajan r-säteistä x-keskistä avointa palloa merkataan $B(x,r)$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, rajoitettu ja yhtenäinen joukko, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^1-sileä.

2.1. Funktioavaruudet.

Käydään ensiksi läpi funktioavaruuksille käytetty notaatio.

Määritelmä 2.1. *Merkitään $u \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, jos funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$ on k kertaa jatkuvasti derivoituva. Merkinnällä $u \in C^\infty(\Omega)$ tarkoitetaan, että*

$$u \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Jos $u \in C^\infty(\Omega)$ sitä kutsutaan sileäksi funktioksi. Merkitään $u \in C^k(\overline{\Omega})$, jos $u \in C^k(\Omega)$ ja funktio u ja sen kaikki derivaatat ovat tasaisesti jatkuvia koko joukossa $\overline{\Omega}$.

Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ kantajaksi kutsutaan joukkoa

$$\operatorname{spt}(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

Sileiden kompaktikantajaisten funktioiden joukkoa merkitään $C_0^\infty(\Omega)$, eli

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{spt}(u) \Subset \Omega\}.$$

Merkinnällä $A \Subset B$ tarkoitetaan, että $\overline{A} \subset B$.

Viskositeettiteoriassa käytetään suurimmaksi osaksi testifunktioita $\varphi \in C^2(\Omega)$, jolloin Schwarzin lauseen nojalla $D^2\varphi$ on symmetrinen. Käytetään symmetristen $n \times n$ matriisien avaruudelle merkintää $S(n)$ ja tämän avaruuden matriisien vertailussa spektraalisädettä eli normia

$$||A|| = \max\{|\lambda_k| : \lambda_k \in \sigma_A\}, \tag{2.1}$$

missä σ_A on matriisin A ominaisarvojen joukko.

Tässä työssä käsiteltävät lämpöyhtälö ja normalisoitu p-parabolinen yhtälö ovat molemmat parabolisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, joten niiden ratkaisut riippuvat paikkaulottuvuuksien lisäksi ajasta. Parabolisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tarkastellessa aika- ja paikkaulottuvuuksilla on usein erilaiset roolit ja ratkaisuilta vaaditaan erilaista säännöllisyyttä ajan suhteen verrattuna paikkaan. Tämän takia funktioiden muuttujien ja derivaattojen merkinnöissä jaetaan aika- ja paikkaulottuvuudet erikseen. Tarkastelemme yhtälöitä aikapaikkasylintereissä.

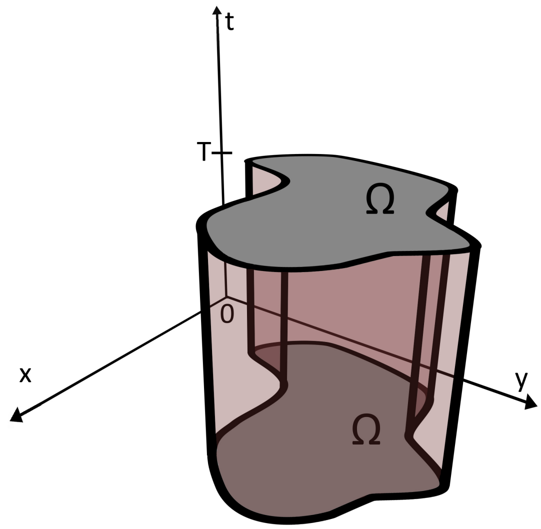
Olkoon $T > 0$. Aikapaikkasylinteriksi kutsutaan joukkoa

$$\Omega_T = \Omega \times]0, T[,$$

ja tämän joukon paraboliseksi reunaksi joukkoa

$$\partial_{par}\Omega_T = (\Omega \times 0) \cup (\partial\Omega \times]0, T[).$$

On hyvä huomata, että tämä ei ole sama kuin joukon Ω_T euklidinen reuna, sillä se ei sisällä sylinterin "kantta". Määritelmänsä nojalla $\Omega_T \subset \mathbb{R}^{n+1}$.



KUVA 1. Esimerkki aikapaikkasylinteristä, jossa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Radiaalisia ratkaisuja käsitellessä on luonnollista käyttää joukkojen Ω_T erikoistapauksena joukkoja

$$B_T := B_T(0,R) = B(0,R) \times]0,T[,$$

missä $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ on R-säteinen, origokeskinen pallo. Säde R jätetään työssä merkitsemättä, sillä tarkastelujoukon säde pidetään vakiona. Tämän joukon parabolinen reuna on määritelty kuten yleisemmälle aikapaikkasylinterille.

Työn laskuissa esiintyy paljon funktioiden derivaattoja eri muuttujien suhteen ja tämän takia käytetään seuraavaa merkintää lukemisen helpottamiseksi.

Määritelmä 2.2. *Vektoria $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ kutsutaan multi-indeksiksi. Multi-indeksin normiksi kutsutaan lukua*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Multi-indeksit ovat erityisen hyödyllisiä yleisien derivaattojen merkinnöissä. Merkitään

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u,$$

eli erityisesti jokaiselle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, mikäli $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, niin $D^\alpha u$ on aina olemassa.

Merkinnöillä ∇u ja $D^\alpha u$ tarkoitetaan aina derivaattoja ainoastaan paikkaulottuvuuksien suhteen. Aikaderivaatat merkataan aina erikseen alaindeksillä

$$
\begin{aligned}
u_t &:= \frac{\partial}{\partial t} u \\
u_{tt} &:= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Samaa merkintää käytetään yksittäisten paikkaderivaattojen kanssa luettavuuden helpottamiseksi eli $u_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} u$.

Olkoon $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jono vektoreita $x_j \in \mathbb{R}^n$ kaikilla j. Näiden vektoreiden yksittäisten koordinaattien merkitsemiseen käytetään työssä suluissa olevaa yläindeksiä sekaannuksen välttämiseksi eli

$$x_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j^{(3)}, \dots, x_j^{(n)}).$$

Matriisin $X \in S(n)$ j:nnen rivin ja i:nnen sarakkeen alkiota merkataan $[X]_{ij}$.

Luvussa 4 esitellään kuuluisa Ishiin lemma. Tämän yhteydessä käsitellään kahdesta muuttujaparista riippuvaa funktiota $\psi(x, t, y, s)$ ja tämän derivaattamatriiseille käytetään merkintää

$$D_{xy}\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1}\psi & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\psi & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_n}\psi \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\psi & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\psi & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_n}\psi \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_1}\psi & \cdots & & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_n}\psi \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Derivaattamatriisit $D_{yx}\psi$,$D_{xx}\psi$ ja $D_{yy}\psi$ määritellään vastaavasti. Tämän funktion gradientteja muuttujien x ja y suhteen merkataan $D_x\psi$ ja $D_y\psi$.

Työssä tarkastelluissa yhtälöissä vaaditaan ajan suhteen ainoastaan ensimmäisen derivaatan olemassaolo. Eri muuttujien derivoituvuuden erottamiseksi käytetään seuraavaa merkintää.

Määritelmä 2.3. *Merkataan $u \in C^{k,l}(\Omega_T)$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jos funktio $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ on k kertaa jatkuvasti derivoituva paikkaulottuvuuksien suhteen ja l kertaa jatkuvasti derivoituva ajan suhteen. Mikäli merkinnässä $k = 0$ tai $l = 0$, tarkoitetaan että funktio on ainoastaan jatkuva tämän muuttujan suhteen. Merkinnällä $u \in C(\Omega_T)$ tarkoitetaan, että funktio $u = u(x, t)$ on jatkuva paikkaulottuvuuksien ja aikaulottuvuuden suhteen.*

Heikkojen ratkaisujen teoriaa varten tarvitaan L^p-avaruuksien käsitteet.

Määritelmä 2.4. *Olkoon $p \geq 1$. Tällöin $u \in L^p(\Omega)$, mikäli normi*

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int_\Omega |u(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}, & \text{jos } p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega u(x), & \text{jos } p = \infty \end{cases}$$

on funktiolle laskettuna äärellinen. Tässä

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} : m_n(\{x \in \Omega : u(x) > a\}) = 0\},$$

missä m_n on n-ulotteinen Lebesguen mitta.

Merkitään $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, mikäli $u \in L^p(\Omega')$ kaikille $\Omega' \Subset \Omega$.

L^p-avaruuden normi ei näe eroa kahden funktion välillä, mikäli se tapahtuu Lebesguen mitan suhteen nollamittaisessa joukossa ja tämän takia aina kun tarkastellaan L^p-funktioita, tarkastellaan itse asiassa funktioiden ekvivalenssiluokkia, joissa kaikki nollamittaisissa joukoissa eroavat funktiot on samaistettu. Tällä on myös rooli myöhemmin heikkojen ratkaisujen teoriassa.

Määritelmä 2.5 (Melkein kaikkialla)**.** *Olkoon $m_n : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ n-ulotteinen Lebesguen mitta. Ominaisuus O pätee <u>melkein kaikkialla</u> (m.k.) mikäli*

$$m_n(A) = 0,$$

missä $A = \{x \in \mathbb{R}^n |$ Ominaisuus O ei päde pisteessä $x\}$.

Määritelmä 2.6 (Positiivi- ja negatiiviosa)**.** *Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ positiiviosa on funktio*

$$u_+(x) = \max\{u(x), 0\},$$

ja negatiiviosa on funktio

$$u_-(x) = -\min\{u(x), 0\}$$

kaikilla $x \in \Omega$. Siis erityisesti $u_+(x) \geq 0, u_-(x) \geq 0$ ja

$$u(x) = u_+(x) - u_-(x)$$

kaikilla $x \in \Omega$.

Raja-arvon ja integraalin järjestyksen vaihtamiseen käytetään myöhemmissä luvuissa dominoidun konvergenssin lausetta.

Lause 2.7 (Dominoidun konvergenssin lause)**.** *Olkoot m_n n-ulotteinen Lebesguen mitta ja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jono mitallisia funktioita, jotka suppenevat pisteittäin kohti funktiota f m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin jos on olemassa funktio $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ siten, että $|f_n(x)| \leq g(x)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, niin tällöin $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} f_n \, dm_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n \, dm_n. \tag{DK}$$

Todistus. Todistus yleiselle mitta-avaruudelle löytyy esimerkiksi [BBT08, Theorem 5.14]. □

2.2. **Osittaisdifferentiaaliyhtälöt.** Käsitellään aluksi osittaisdifferentiaaliyhtälöihin liittyviä perustuloksia ja määritelmiä, joita käytetään työn myöhemmissä kappaleissa. Luvun päälähteenä käytetään Evansin oppikirjaa [Eva98].

Määritelmä 2.8. *Olkoon $u \in C^2(\Omega_T)$. Määritellään Laplacen operaattori Δ siten, että*

$$\Delta u = \Delta^n u := \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

Yläindeksiä käytetään ulottuvuuden merkkaamiseen, mikäli on siihen on tarvetta epäselvyyden ehkäisemiseksi.

Määritelmä 2.9. *Olkoon $u \in C^2(\Omega_T)$ siten, että $|\nabla u(x,t)| > 0$ kaikille $(x,t) \in \Omega_T$. Määritellään normalisoitu ∞-Laplacen operaattori Δ_∞^N siten, että*

$$\Delta_\infty^N u := |\nabla u|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i, x_j} u_{x_j} u_{x_i}.$$

Määritelmä 2.10. *Funktio $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on radiaalinen, mikäli on olemassa $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $u(x) = v(r)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä*

$$r = |x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Funktio $u = u(x,t)$ on radiaalinen, jos se on radiaalinen paikkamuuttujan x suhteen.

Tässä työssä käsitellään pääasiassa radiaalisia ratkaisuja, koska niiden symmetrisyydestä seuraa paljon laskuja helpottavia ominaisuuksia. Esimerkkejä näistä nähdään jo seuraavassa lemmassa.

Lemma 2.11. *Olkoot $u \in C^2(B(0,R))$ radiaalinen funktio ja v ja r määritelty kuten radiaalisuuden määritelmässä 2.10. Tällöin*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = v''(r) + v'(r)\dfrac{n-1}{r} \\ \Delta_\infty^N u(x) = v''(r) \end{cases}$$

kaikille $x \in B(0,R) \setminus \{0\}$, joille $\nabla u(x) \neq 0$.

Todistus. Todistus on suora lasku. Koska u on radiaalinen on määritelmän nojalla olemassa v siten, että $u(x) = v(r)$, missä

$$r = r(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Tällöin derivoimalla saadaan

$$r_{x_i}(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

ja

$$r_{x_i x_j}(x) = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3},$$

missä $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jos } i = j \\ 0 & \text{jos } i \neq j \end{cases}.$

Täten ketjusäännön nojalla

$$u_{x_i}(x) = v'(r)r_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r},$$
$$u_{x_ix_i}(x) = v''(r)r_{x_i}^2 + v'(r)r_{x_ix_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}) \tag{2.3}$$

ja

$$\begin{aligned} u_{x_ix_j}(x) &= v''(r)r_{x_i}r_{x_j} + v'(r)r_{x_ix_j} \\ &= v''(r)\frac{x_ix_j}{r^2} + v'(r)\left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_ix_j}{r^3}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nyt käyttämällä yhtälöä (2.3) saadaan

$$\begin{aligned} \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} &= \sum_{i=1}^n \left(v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\right) \\ &= \frac{v''(r)}{r^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + n\frac{v'(r)}{r} - \frac{v'(r)}{r^3}\sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r}, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa tiedosta $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Toisaalta saadaan myös

$$\begin{aligned} \Delta_\infty^N u &= |\nabla u|^{-2} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i,x_j}u_{x_j}u_{x_i} \\ &= v'(r)^{-2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left[\left(v''(r)\frac{x_ix_j}{r^2} + v'(r)\left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_ix_j}{r^3}\right)\right)v'(r)^2\frac{x_ix_j}{r^2}\right], \end{aligned}$$

missä käytettiin yhtälön (2.4) esityksiä derivaatoille. Tätä sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned} \Delta_\infty^N u &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left[v''(r)\frac{x_i^2x_j^2}{r^4} + v'(r)\frac{\delta_{ij}x_ix_j}{r^3} - v'(r)\frac{x_i^2x_j^2}{r^5}\right] \\ &= \frac{v''(r)}{r^4}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i^2x_j^2 + \frac{v'(r)}{r^3}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \delta_{ij}x_ix_j - \frac{v'(r)}{r^5}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i^2x_j^2 \\ &= \frac{v''(r)}{r^4}\sum_{i=1}^n x_i^2r^2 + \frac{v'(r)}{r^3}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{v'(r)}{r^5}\sum_{i=1}^n x_i^2r^2 \\ &= v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v'(r)}{r} \\ &= v''(r). \end{aligned}$$

□

Tämä lemma yleistyy suoraan samalla todistuksella radiaaliselle funktiolle $u \in C^{2,1}(B_T)$, sillä aikaulottuvuudella ei ole mitään roolia todistuksen laskussa. Tätä käytetään normalisoidun p-parabolisen yhtälön tapauksessa luvussa 5.

Tässä työssä tulee esille kolme eri ratkaisun käsitettä osittaisdifferentiaaliyhtälöille. Kaikki työssä tarkastellut yhtälöt ovat toisen kertaluvun yhtälöitä paikan suhteen ja ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä ajan suhteen eli etsitään funktiota $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ siten, että

$$F(D^2u(x,t), \nabla u(x,t), u_t(x,t), u(x,t), x, t) = 0, \tag{2.5}$$

missä $F : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on annettu funktio. Funktiota u kutsutaan osittaisdifferentiaaliyhtälön (klassiseksi) ratkaisuksi, mikäli kaikki funktion u tarvittavat derivaatat ovat olemassa jatkuvina siten, että ne toteuttavat yhtälön (2.5) pisteittäin. Tämä määritelmä ratkaisulle on helpoin ymmärtää ja ratkaista, mutta tiukat oletukset funktion u derivoituvuudesta johtavat helposti siihen, että alkuarvo-ongelmalle ei löydy ollenkaan ratkaisua. Tämän takia 1900-luvun aikana on kehitetty heikkojen- ja viskositeettiratkaisujen teoriaa, jossa heikennetään oletuksia funktion säännöllisyydestä saaden ratkaisun olemassaolon laajemmalle luokalle differentiaaliyhtälöitä, silti menettämättä monissa tilanteissa ratkaisujen yksikäsitteisyyttä. Määrittelemme heikot ja viskositeettiratkaisut tarkemmin luvussa 4.

Tarvitsemme Gauss-Greenin lauseen osittaisintegraalikaavojen todistamista varten. Todistamme tämän lauseen käyttäen divergenssilausetta.

Lause 2.12 (Divergenssilause)**.** *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko, jonka reuna on C^1-sileä. Tällöin jatkuvasti derivoituvalle vektorikentälle $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pätee*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS,$$

missä ν on pinnasta kohtisuorasti ulos osoittava yksikkövektori ja $\int_{\partial\Omega} dS$ on pintaintegraali. Vektorikenttä $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ on jatkuvasti derivoituva, jos sen jokainen komponenttifunktio $F_i \in C^1(\Omega)$.

Joukon reunan säännöllisyys on määritelty [Eva98, Appendix C].

Lause 2.13 (Gauss-Greenin lause)**.** *Olkoon $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Tällöin*

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu_i(x)\, dS \quad i \in (1, \ldots, n),$$

missä $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ on joukon pintaan nähden joukosta ulospäin osoittava yksikkövektori pisteessä $\in \Omega$.

Todistus. Seuraa suoraan divergenssilauseesta sopivalla valinnalla. Olkoot $i \in \mathbb{N}$ ja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : F(x) = (0, \ldots, u(x), \ldots, 0)$, missä $u(x)$ on funktion i:nnessä koordinaatissa.

Tällöin käyttämällä lausetta 2.12 funktiolle F saadaan

$$\int_{\Omega} u_{x_i}(x)\,dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(F)\,dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot\nu\,dS = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu_i(x)\,dS$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. □

Lemma 2.14 (Divergenssin tulosääntö)**.** *Olkoot $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten, että $g \in C^1(\Omega)$ ja jokainen komponenttifunktio $F_i \in C^1(\Omega)$. Tällöin*

$$\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g\operatorname{div}(F)$$

alueessa Ω.

Todistus. Suora lasku käyttäen tulon derivaatan kaavaa. Kaavan nojalla

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(gF) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i(gF_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (g\partial_i F_i + F_i\partial_i g) \\
&= g\sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i + \sum_{i=1}^{n} F_i\partial_i g \\
&= g\operatorname{div}(F) + F\cdot\nabla g.
\end{aligned}$$

□

3. Lämpöyhtälö

Eräs tunnetuimmista esimerkeistä parabolisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä on lämpöyhtälö, joka tulee esille yleisemmässäkin teoriassa erikoistapauksena p-parabolisesta yhtälöstä. Lämpöyhtälöllä ja normalisoidulla p-parabolisella yhtälöllä on yhteys kuten näemme luvussa 5. Tässä luvussa käsitellään *homogeenista lämpöyhtälöä*

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{3.1}$$

ja *epähomogeenista lämpöyhtälöä*

$$u_t - \Delta u = f. \tag{3.2}$$

Epähomogeenisessa lämpöyhtälössä $f : \Omega \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ on tiedossa oleva funktio.

Tässä luvussa tarkastellaan lämpöyhtälön fysikaalista pohjaa ja johdetaan yhtälölle perusratkaisu. Luku seuraa Evansin oppikirjaa [Eva98].

3.1. **Fysikaalinen tulkinta.** Lämpöyhtälöä käytetään kuvaamaan jonkin fysikaalisen ominaisuuden paikallista tiheyttä ajan kuluessa. Nimensä mukaisesti sitä käytetään esimerkiksi kuvaamaan, miten lämpö leviää joukossa ajan kuluessa jostakin alkutilanteesta eteenpäin. Epähomogeeninen lämpöyhtälö kuvaa tilannetta, jossa lämpöä tulee lisää systeemiin tai poistuu funktion f merkistä riippuen. Jos u on lämpöyhtälön ratkaisu systeemissä, antaa sen arvo $u(x,t)$ pisteen x lämpotilan ajanhetkellä t. Jos $V \subset \Omega$ on mikä tahansa sileä osajoukko, on joukon V sisällä olevan lämmön määrä hetkellä t

$$\int_V u(x,t)\,dx.$$

Tämän määrän muutos ajan suhteen on yhtäsuurta kuin negatiivinen kokonaisvuo joukon reunan läpi, eli

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u(x,t)\,dx = -\int_{\partial V} F\cdot\nu\,dS,$$

missä $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ on vuon tiheys ja ν on pintaa kohtisuorassa ulospäin osoittava yksikkövektori. Divergenssilauseen 2.12 nojalla täten

$$\begin{aligned}\int_V -\operatorname{div} F\,dx &= -\int_{\partial V} F\cdot\nu\,dS\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_V u(x,t)\,dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,dx.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että kunhan oletamme funktion u olevan jatkuvasti derivoituva ajan suhteen, niin derivaatan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_V u(x,t)\,dx &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_V u(x,t+h)\,dx - \int_V u(x,t)\,dx\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\int_V \frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}\,dx\\ &= \int_V \lim_{h\to 0}\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}\,dx\\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,dx.\end{aligned}$$

Integraalin ja raja-arvon järjestystä voidaan vaihtaa dominoidun konvergenssin lauseen (DK) nojalla funktion u jatkuvuuden nojalla. Koska tämä pätee mielivaltaiselle sileälle joukolle V, saadaan

$$u_t = -\operatorname{div} F. \tag{3.3}$$

On loogista olettaa, että vuo F on verrannollinen gradienttiin ∇u mutta vastakkaissuuntainen, sillä lämpö virtaa korkeasta lämpötilasta alempaan lämpötilaan. Täten jollekin verrannollisuuskertoimelle $a>0$ pätee

$$F = -a\nabla u.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (3.3) saadaan

$$u_t = a\operatorname{div}(\nabla u) = a\Delta u.$$

Verrannollisuuskertoimella $a=1$ saadaan yhtälö (3.1).

3.2. **Lämpöyhtälön perusratkaisu.** Aloitetaan lämpöyhtälön ratkaisujen tarkasteleminen etsimällä säännöllistä sileää ratkaisua joukossa

$\mathbb{R}^n \times]0,\infty[$. Mikäli $u(x,t)$ on yhtälön (3.1) ratkaisu on $\overline{u}(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ myös ratkaisu kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$, sillä

$$\begin{aligned}\overline{u}_t(x,t) + \Delta\overline{u}(x,t) =& \frac{\partial}{\partial t}u(\lambda x, \lambda^2 t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(\lambda x, \lambda^2 t)\\ =&\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \sum_{i=1}^n \lambda^2 u_{x_i x_i}(\lambda x, \lambda^2 t)\\ =&\lambda^2 (u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(\lambda x, \lambda^2 t))\\ =&0.\end{aligned}$$

Tämä skaalausominaisuus rohkaisee meitä etsimään radiaalista ratkaisua. Etsitään yhtälölle ratkaisua, jolle mielivaltaisille vakioille $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pätee

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t),$$

kaikille $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$. Valitsemalla $\lambda = t^{-1}$ saadaan

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha}u(\frac{x}{t^\beta}, 1) = \frac{1}{t^\alpha}v(\frac{x}{t^\beta}), \tag{3.4}$$

jos määritellään funktio $v : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $v(x) = u(x,1)$. Merkitään $y := t^{-\beta}x$. Nyt jos (3.4) sijoitetaan yhtälöön (3.1) saadaan

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^\alpha}v(y)\right) + \Delta\left(\frac{1}{t^\alpha}v(y)\right)\\ =&\frac{1}{t^{\alpha+1}}\alpha v(y) + \frac{1}{t^{\alpha+1}}\beta y \cdot \nabla v(y) + \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}}\Delta v(y) = 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Valinnalla $\beta = \frac{1}{2}$ saadaan (3.5) muotoon

$$\alpha v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \Delta v = 0, \tag{3.6}$$

sillä muuttujasta t riippuvat termit supistuvat pois. Tätä saadaan sievennettyä edelleen olettamalla, että v on radiaalinen, eli että on olemassa funktio $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $v(y) = w(r)$, missä $r = |y|$. Merkataan $w' = \frac{d}{dr}w$, jolloin $y \cdot \nabla v = y \cdot w'(r)\frac{y}{r}$ ja lemman 2.11 nojalla

$$\Delta v = w''(r) + w'(r)\frac{n-1}{r}.$$

Tällöin (3.6) saa muodon

$$\alpha w + \frac{1}{2}rw' + w'' + \frac{n-1}{r}w' = 0.$$

Nyt edelleen, jos valitaan $\alpha = \frac{n}{2}$, saadaan

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}(nw(r) + rw'(r)) + w'' + \frac{n-1}{r}w'\right)\frac{r^{1-n}}{r^{1-n}}\\ =&\left((r^{n-1}w')' + \frac{1}{2}(r^n w)'\right)\underbrace{r^{1-n}}_{\neq 0}\\ =&(r^{n-1}w' + \frac{1}{2}(r^n w))' = 0,\end{aligned}$$

eli tästä puolittain integroimalla yhdet derivaatat pois saadaan

$$r^{n-1}w' + \frac{1}{2}(r^n w) = a \in \mathbb{R}.$$

Valitaan vakio $a = 0$, jolloin

$$w' = -\frac{1}{2}rw.$$

Nyt saatiin helposti ratkaistava differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuksi peruskurssien tietojen perusteella saadaan

$$w(r) = be^{-\frac{r^2}{4}},$$

missä $b \in \mathbb{R}$. Näillä valinnoilla siis saatiin lämpöyhtälön ratkaisuksi

$$u(x,t) = t^{-\alpha}v(t^{-\beta}x) = t^{-\frac{n}{2}}w(t^{-\frac{1}{2}}|x|) = \frac{b}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Määritelmä 3.1. *Funktiota*

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0) \end{cases}$$

kutsutaan lämpöyhtälön perusratkaisuksi.

Syy kertoimen b valinnalle selviää seuraavassa lemmassa.

Lemma 3.2. *Jokaiselle ajalle $t > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = 1.$$

Todistus. Todistus on suoraviivainen lasku hyödyntäen funktion symmetriaa integroinnissa. Tekemällä muuttujanvaihto $z = \frac{x}{\sqrt{4t}}$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}\,dz \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n z_i^2\right)dz \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\,dz_i \overset{(\star)}{=} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^n \pi^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}}} = 1.\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus ($\star$) seuraa siitä, että jokaiselle z_i pätee

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\, dz_i\Big)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\, dz_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_j^2}\, dz_j. \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z_i^2+z_j^2)}\, dz_i\, dz_j \\
&= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} re^{-r^2}\, d\phi\, dr \\
&= \int_{0}^{\infty} 2\pi re^{-r^2}\, d\phi\, dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{\infty} = \pi.
\end{aligned}
$$

Tässä kolmas yhtäsuuruus seuraa muutoksesta pallokoordinaatteihin. □

Lause 3.3. *Olkoon Φ lämpöyhtälön perusratkaisu määritelmän 3.1 mukaisesti. Tällöin Φ ratkaisee lämpöyhtälön kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ kun $t > 0$.*

Todistus. Lasketaan osittaisderivaatat ja sijoitetaan lämpöyhtälöön. Aikaderivaataksi saamme

$$
\begin{aligned}
\Phi_t(x,t) &= -\frac{4\pi n}{2(4\pi t)^{n/2-1}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\
&= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{n}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

ja paikkaderivaatoiksi

$$
\begin{aligned}
\Phi_{x_i}(x,t) &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{x_i}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \\
\Phi_{x_i x_i}(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2}\right).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Täten sijoittamalla (3.7) ja (3.8) yhtälöön saadaan

$$
\begin{aligned}
\Phi_t(x,t) - \Delta\Phi(x,t) &= \Phi_t(x,t) - \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2}\right) \\
&= \Phi_t(x,t) - \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Eli funktio Φ on lämpöyhtälön ratkaisu. □

3.3. **Alkuarvo-ongelma.** Seuraavaksi hyödynnetään perusratkaisua Φ ratkaisemaan alkuarvo-ongelma

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta u = 0, & \text{kun } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\
u = g, & \text{kun } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}.
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

Tässä funktio $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuvaa siis miten lämpö on jakautunut alueessa ajan hetkellä $t = 0$. Aiemmin näytetyn nojalla $\Phi(x,t)$ ratkaisee lämpöyhtälön singulariteetin (0,0) ulkopuolella ja sama pätee yhtälölle $\Phi(x-y,t)$ jokaisella kiinteällä $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Saman pitäisi päteä myös konvoluutiolle.

Lause 3.4. *Olkoot $t > 0$, $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja*

$$u(x,t) = (\Phi * g)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy.$$

Tällöin

(1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$.
(2) $u_t - \Delta u = 0$, kun $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$.
(3) Kaikille $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0) \\ (x,t)\in\mathbb{R}^n\times]0,\infty[}} u(x,t) = g(x_0).$$

Todistus.

(1) Ratkaisun sileyden todistaminen perustuu ajatukseen, että funktion u derivaattoja voidaan siirtää integraalin sisälle fundamentaaliratkaisun Φ derivaatoiksi ja $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ eksponenttifunktion ja polynomin summana. Todistetaan aluksi, että

$$u_{x_i}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{x_i}(x-y,t)g(y)\,dy \tag{3.10}$$

kaikilla $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$. Olkoot $e_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ i:s yksikkövektori ja $h > 0$. Derivaatan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
u_{x_i}(x,t) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+he_i,t) - u(x,t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y+he_i,t)g(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x-y+he_i,t) - \Phi(x-y,t)}{h} g(y)\,dy \\
&\overset{(\star)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x-y+he_i,t) - \Phi(x-y,t)}{h} g(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{x_i}(x-y,t)g(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus $(\star)$ seuraa käyttämällä dominoidun konvergenssin lausetta (DK), sillä

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Phi(x-y+he_i,t) - \Phi(x-y,t)}{h} g(y) \right| \\
&\le \frac{1}{h} ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \big[|\Phi(x-y+he_i,t)| + |\Phi(x-y,t)| \big],
\end{aligned}$$

joka on integroituva funktio jokaisella h, sillä $C := ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$ ja

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{h} \left[|\Phi(x-y+he_i,t)| + |\Phi(x-y,t)| \right] dy \\
&\quad = \frac{C}{h} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y+he_i,t)|\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y,t)|\, dy \right) \\
&\quad = \frac{C}{h}(1+1) = \frac{2C}{h} < \infty.
\end{aligned}$$

Tämän nojalla yhtälö (3.10) on voimassa. Koska Φ on sileä, tulos voidaan yleistää multi-indeksille $\alpha \in \mathbb{N}$ siirtämällä derivaatat yksitellen integraalin sisälle. Todistetaan tämä induktiolla multi-indeksin normin k suhteen. Tapaus $k = 1$ vastaa osittaisderivaatan tapausta, jonka todistimme yllä. Oletetaan, että kaikille α, joille $|\alpha| \leq k-1$ pätee

$$D^\alpha u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \Phi(x-y,t) g(y)\, dy. \tag{3.11}$$

Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}$ siten, että $|\alpha| = k$. Valitaan $j = \min\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$ ja määritellään uusi multi-indeksi $\tilde{\alpha}$ määrittämällä

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{jos } i \neq j \\ \alpha_i - 1 & \text{jos } i = j. \end{cases}$$

Tällöin $|\tilde{\alpha}| = k-1$ ja

$$\begin{aligned}
D^\alpha u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\tilde{\alpha}} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} D^{\tilde{\alpha}} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \Phi(x-y,t) g(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Tässä toinen yhtäsuuruus seuraa induktio-oletuksesta ja kolmas voidaan todistaa vastaavasti kuin tilanne $k = 1$, koska $D^{\tilde{\alpha}}\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$. Aikaderivaatoille todistus on vastaava.

(2) Todistuksen ensimmäisen kohdan nojalla derivaatat voidaan siirtää integraalin sisälle, joten

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big((\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x-y,t) \Big) g(y)\, dy \\
&= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0),
\end{aligned}$$

missä Δ_x on Laplacen operaattori muutujan x suhteen. Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että lämpöyhtälön ratkaisuna $\Phi_t - \Delta_x \Phi \equiv 0$.

(3) Olkoot $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$. Funktion g jatkuvuuden perusteella voidaan valita $\delta > 0$ siten, että

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \text{ kaikille } y \in \mathbb{R}^n, \text{ joille } |y - x_0| < \delta. \tag{3.12}$$

Nyt lemman 3.2 nojalla

$$\begin{aligned}
|u(x,t)-g(x_0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,dy\right)g(x_0)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)[g(y)-g(x_0)]\,dy\right| \\
&\le \int_{B(x_0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x_0)|\,dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x_0)|\,dy \\
&=: I + J.
\end{aligned}$$

Arvioidaan saatuja integraaleja erikseen. Nyt (3.12) perusteella

$$I \le \int_{B(x_0,\delta)} \Phi(x-y,t)\varepsilon\,dy \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,dy = \varepsilon,$$

missä viimeisessä yhtäsuuruudessa käytetään taas lemmaa 3.2. Jos $|x-x_0| \le \frac{\delta}{2}$ ja $|y-x_0| \ge \delta$, niin

$$|y-x_0| \le |y-x| + \frac{\delta}{2} \le |y-x| + \frac{1}{2}|y-x_0|,$$

eli $|y-x| \ge \frac{1}{2}|y-x_0|$. Tämän avulla saadaan integraalille J arvio

$$\begin{aligned}
J &\le 2||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} \Phi(x-y,t)\,dy \\
&\le \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy \\
&\le \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\,dy \\
&= \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}\,dr.
\end{aligned}$$

Tehdään muuttujanvaihto $s = \frac{r}{4\sqrt{t}}$, jolloin $ds = \frac{dr}{4\sqrt{t}}$ ja saadaan laskettua integraalin raja-arvoksi

$$\begin{aligned}
J &\le \lim_{t\to 0^+} \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}\,dr \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} \left(4\sqrt{t}s\right)^{n-1} 4\sqrt{t}\,ds \\
&= \lim_{t\to 0^+} Ct^{\frac{n-1-n+1}{2}} \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} 4^n s^{n-1}\,ds \\
&= \lim_{t\to 0^+} 4^n C \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} s^{n-1}\,ds = 0.
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että integroimme positiivista funktiota tyhjäksi joukoksi suppenevan joukon yli ja integraali on joukossa rajoitettu, sillä

$$\int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} s^{n-1}\,ds < \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{n-1}\,ds = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2} < \infty,$$

missä Γ on gammafunktio. Täten jos $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ ja $t > 0$ on tarpeeksi pieni, niin

$$|u(x,t) - g(x_0)| \le I + J \le 2\varepsilon.$$

Koska tämä pätee kaikille $\varepsilon > 0$, seuraa tästä väite.

□

3.4. **Yksikäsitteisyys.** Tässä aliluvussa todistetaan lämpöyhtälön alkuarvo-ongelman (3.9) ratkaisun yksikäsitteisyys tilanteessa, jossa alkuarvot ovat jatkuvia ja ratkaisu toteuttaa kasvuehdon. Tämän todistamista varten tarvitsemme maksimiperiaatteen ratkaisuille.

Lause 3.5 (Maksimiperiaate rajoitetuille joukoille)**.** *Olkoon Ω rajoitettu joukko ja $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ lämpöyhtälön ratkaisu joukossa Ω_T. Tällöin*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial_{par}\Omega_T} u.$$

Todistus. Todistuksen rakenne seuraa [Par17b, Theorem 5.8] todistusta. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja määritellään

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t.$$

Tällöin $v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \varepsilon < 0$ kaikilla $(x,t) \in \Omega_T$ eli v on lämpöyhtälön subratkaisu. Valitaan aluksi jokin $\tau \in]0, T[$ ja etsitään maksimipistettä sylinteristä $\overline{\Omega}_\tau$. Jos tämän joukon maksimipiste (x_0, t_0) olisi sylinterin kannessa $\Omega \times \{t = \tau\}$ pätisi $u_t(x_0, t_0) > 0$ ja $\Delta v(x_0, t_0) < 0$, jolloin

$$v_t - \Delta v \ge 0,$$

joka on ristiriidassa ylemmän laskun kanssa. Jos maksimi olisi joukossa $\Omega \times \{t = \tau_2\}$ jollekin vakiolle $\tau_2 \in]0, \tau[$, saadaan ristiriita samalla päättelyllä sylinterille Ω_{τ_2}. Täten jokaiselle τ maksimin on oltava aikapaikkasylinterin parabolisella reunalla $\partial_{par}\Omega_\tau$. Täten koska v on jatkuva

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v = \lim_{\tau \to T} \max_{\overline{\Omega}_\tau} v = \lim_{\tau \to T} \max_{\partial_{par}\Omega_\tau} v = \max_{\partial_{par}\Omega_T} v. \tag{3.13}$$

Tätä hyödyntäen saadaan funktion u maksimille arvio

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\overline{\Omega}_T}(v + \varepsilon t) \le \max_{\overline{\Omega}_T}(v + \varepsilon T) \le \max_{\partial_{par}\Omega_T}(v + \varepsilon T) \le \max_{\partial_{par}\Omega_T}(u + \varepsilon T).$$

Toisessa epäyhtälössä käytetään yhtälöä 3.13 ja kolmannessa oletusta, että joukon parabolisella reunalla pätee $v \le u$. Tämä arvio pätee nyt kaikille $\varepsilon > 0$, joten ottamalla raja-arvo kun $\varepsilon \to 0$ saadaan epäyhtälö

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u \le \max_{\partial_{par}\Omega_T} u.$$

Epäyhtälön toinen suunta seuraa suoraan siitä, että $\partial_{par}\Omega_T \subset \overline{\Omega}_T$ ja täten

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial_{par}\Omega_T} u.$$

□

Tämä saadaan yleistettyä globaaliin tapaukseen, mikäli oletamme ratkaisun toteuttavan kasvuehdon.

Lause 3.6 (Maksimiperiaate alkuarvo-ongelmalle)**.** *Olkoon* $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times]0,T[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *alkuarvo-ongelman*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \textit{kun } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u = g, & \textit{kun } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ratkaisu, jolle pätee kasvuehto

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$$

kaikille $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ *ja joillekin vakioille* $a, A > 0$*. Tällöin pätee*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Todistus. Todistus seuraa [Eva98, s.57]. Oletetaan aluksi, että kasvuehdon vakiolle a pätee

$$4aT < 1, \tag{3.14}$$

ja valitaan vakio $\varepsilon > 0$ niin pieneksi, että

$$4a(T + \varepsilon) < 1. \tag{3.15}$$

Kiinnitetään $y \in \mathbb{R}^n$ ja $\mu > 0$ ja määritellään

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right).$$

Näytetään ensiksi, että funktio v on edelleen lämpöyhtälön ratkaisu eli

$$v_t - \Delta v = 0$$

kaikilla $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Merkataan

$$f(x,t) = \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right),$$

jolloin

$$\begin{aligned} v_{x_i}(x,t) &= u_{x_i}(x,t) - \frac{\mu f(x,t)}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{|x-y|^2}{4(T + \varepsilon - t)} \\ &= u_{x_i}(x,t) - \frac{\mu f(x,t)}{2(T + \varepsilon - t)^{n/2+1}} (x_i - y_i), \\ v_{x_i x_i}(x,t) &= u_{x_i x_i}(x,t) - \left[\frac{\mu f(x,t)}{2(T + \varepsilon - t)^{n/2+1}} + \frac{\mu f(x,t)}{4(T + \varepsilon - t)^{n/2+2}} (x_i - y_i)^2\right] \end{aligned}$$

ja

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) - \left[\frac{\mu n f(x,t)}{2(T+\varepsilon-t)^{n/2+1}} + \frac{\mu f(x,t)}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)^2}\right]$$
$$= u_t(x,t) - \left[\frac{\mu n f(x,t)}{2(T+\varepsilon-t)^{n/2+1}} + \frac{\mu f(x,t)}{4(T+\varepsilon-t)^{n/2+2}}|x-y|^2\right].$$

Nämä yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= v_t - \sum_{i=1}^n \Bigg(u_{x_i x_i}(x,t) - \Bigg[\frac{\mu f(x,t)}{2(T+\varepsilon-t)^{n/2+1}} \\ &\qquad + \frac{\mu f(x,t)}{4(T+\varepsilon-t)^{n/2+2}}(x_i-y_i)^2\Bigg]\Bigg) \\ &= v_t - \Delta u + \frac{\mu n f(x,t)}{2(T+\varepsilon-t)^{n/2+1}} + \frac{\mu f(x,t)}{4(T+\varepsilon-t)^{n/2+2}}|x-y|^2 \\ &= u_t - \Delta u = 0 \end{aligned}$$

eli v on myöskin yhtälön ratkaisu. Olkoon $r > 0$ ja $B_T(y,r) = B(y,r) \times]0,T[$. Nyt rajoitetun joukon maksimiperiaatteen lauseen 3.5 nojalla

$$\max_{\overline{B}_T(y,r)} v = \max_{\partial_{par} B_T(y,r)} v. \tag{3.16}$$

Jos $t = 0$, niin kaikille $x \in \mathbb{R}^n$

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} \exp(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}) \leq u(x,0) = g(x). \tag{3.17}$$

Jos $0 \leq t \leq T$ ja $|x-y| = r$, niin käyttämällä kasvuehtoa saadaan

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \\ &\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

Nyt yhtälön (3.15) nojalla voidaan valita vakio $\gamma > 0$ siten, että saadaan $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$. Täten yläpuolella oleva arvio voidaan saattaa muotoon

$$\begin{aligned} v(x,t) &\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \underbrace{\mu(4(a+\gamma))^{n/2}}_{:=C_1} e^{(a+\gamma)r^2} \\ &= Ae^{a|y|^2} e^{2a|y|r} e^{ar^2} - C_1 e^{ar^2} e^{\gamma r^2} \\ &= e^{ar^2}\left[Ae^{a|y|^2} e^{2a|y|r} - C_1 e^{\gamma r^2}\right] \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g, \end{aligned} \tag{3.18}$$

tarpeeksi suurelle $r > 0$, sillä negatiivinen termi tulee jokaisella γ dominoimaan ensimmäistä termiä ja täten yhdistämällä (3.16), (3.17) ja (3.18) saadaan

$$v(y,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

kaikille $y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$, kunhan oletus (3.14) pätee. Tapauksessa, jossa (3.14) ei päde muodostetaan jono aikavälejä $([T_m, T_{m+1}])_{m=0}^{\infty}$ missä $T_m = \frac{m}{8a}$ kaikille $m \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$4a(T_{m+1} - T_m) = 4a\frac{m+1-m}{8a} = \frac{1}{2} < 1,$$

eli ylempää arviota voidaan käyttää jokaiselle aikavälille ja täten todistus yleistyy kaikille T. □

Lause 3.7 (Alkuarvo-ongelman ratkaisun yksikäsitteisyys)**.** *Olkoot $g \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Tällöin alkuarvo-ongelmalla*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{kun } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u = g, & \text{kun } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

on enintään yksi ratkaisu $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times]0,T[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, jolle pätee kasvuehto

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$$

kaikille $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ ja joillekin vakioille $a, A > 0$.

Todistus. Olkoon u ja v ratkaisuja, joille kasvuehto on voimassa. Tällöin funktiolle $u - v$ pätee

$$\begin{cases} (u-v)_t - \Delta(u-v) = u_t - \Delta u - v_t + \Delta v = 0 & \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u - v = g - g = 0 & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{3.19}$$

ja

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leq |u(x,t)| - |v(x,t)| \leq 2Ae^{a|x|^2}.$$

Täten maksimiperiaatteen 3.6 nojalla

$$u - v \leq \max_{\mathbb{R}^n} g = 0$$

ja vastaavasti

$$v - u \leq \max_{\mathbb{R}^n} g = 0.$$

Nämä yhdistämällä saadaan $u = v$ kaikille $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$, joten ratkaisu on yksikäsitteinen. □

4. Viskositeettiratkaisut ja heikot ratkaisut

Tässä luvussa johdetaan heikkojen ratkaisujen ja viskositeettiratkaisujen teoriaa parabolisten yhtälöiden tapauksessa ja todistetaan ekvivalenssitulos lämpöyhtälön tapauksessa näiden määritelmien välille.

4.1. **Parabolinen reuna-arvo-ongelma.**

Määritelmä 4.1. *Tässä luvussa tarkastellaan yleisempää reuna-arvo-ongelmaa*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + Lu(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in \partial_{par}\Omega_T, \end{cases} \tag{4.1}$$

missä $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$ *ja* $g : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ *ovat tiedettyjä funktioita ja*

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_j u(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i u(x) + c(x)u(x),$$

missä $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)$ *ovat annettuja riittävän sileitä kertoimia kaikilla* $i, j \in 1, 2, \ldots, n$.

Huomautus 4.2. *Jos valitaan vakioiksi* $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = 0$, $c = 0$ *ja funktioksi* $f(x,t) \equiv 0$, *saadaan homogeenisen lämpöyhtälön reuna-arvo-ongelma*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t), & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in \partial_{par}\Omega_T. \end{cases} \tag{4.2}$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa yleisesti jokaiselle ongelmalle tarkastelemme kolmea fundamentaalikysymystä:

(1) **Olemassaolo:** Onko ongelmalle olemassa ratkaisua?
(2) **Yksikäsitteisyys:** Onko ratkaisuja ainoastaan yksi?
(3) **Stabiliteetti:** Jos muutamme ongelmaa vähän, muuttuuko ratkaisu vain vähän?

Klassisessa teoriassa reuna-arvo-ongelman ratkaisun tulee toteuttaa yhtälö pisteittäin koko joukossa, mutta tämä määritelmä johtaa siihen, että on helppo keksiä ongelma, jolle ei ole olemassa ratkaisua ollenkaan. Esimerkiksi ongelmalla

$$\begin{cases} |u'(x)|^2 = 1 & x \in]-1,1[\\ u(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

ei ole klassista ratkaisua, kuten näemme myöhemmin. Tämän takia pyrimme määrittämään heikompia ratkaisun käsitteitä siten, että saisimme olemassaolon voimaan menettämättä silti yksikäsitteisyyttä ja siten, että eri määritelmät yhtyvät klassisen ratkaisun määritelmään tarpeeksi sileille funktioille. Näistä ensimmäisenä käsitellään distributionaalisen ratkaisun eli niin sanotun heikon ratkaisun käsite.

4.2. **Heikot ratkaisut.**

Lemma 4.3 (Osittaisintegrointi kompaktin kantajan yli)**.** *Olkoon* $u \in C^1(\Omega)$ *ja* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Tällöin*

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i}\, dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi\, dx,$$

ja yleisemmin funktiolle $u \in C^k(\Omega)$ ja multi-indeksille α, $|\alpha| \leq k$ pätee

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \varphi \, dx.$$

Todistus. Ensimmäisen kaavan todistus seuraa Evansin oppikirjan [Eva98] todistusta ja yleinen versio saadaan tästä induktiolla multi-indeksin normin suhteen.

(i) Koska $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, niin on olemassa joukko

$$\operatorname{spt} \varphi \subset A \subset \Omega \tag{4.3}$$

siten, että $u \in C^1(\overline{A})$. Gauss-Greenin lauseen 2.13 nojalla

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x_k}(u\varphi) \, dx = \int_{\partial A} u \varphi \nu_k \, dS(x) = 0,$$

missä ν_k on vektorin x_k suuntainen yksikkövektori joukon pinnalla. Toinen yhtäsuuruus yllä seuraa siitä, että $\varphi = 0$ kaikilla $x \in \partial A$. Toisaalta

$$0 = \int_A \frac{\partial}{\partial x_k}(u\varphi) \, dx = \int_A u_{x_k} \varphi + u \varphi_{x_k} \, dx,$$

eli

$$\int_A u_{x_k} \varphi \, dx = -\int_A u \varphi_{x_k} \, dx. \tag{4.4}$$

Väite seuraa lausekkeesta (4.4), sillä molemmat integrandit ovat nollaa A ulkopuolella.

(ii) Todistetaan kaavan yleinen muoto induktiolla multi-indeksin normin $|\alpha| =: k$ suhteen.
Kun $k = 1$, on $D^\alpha \varphi = \varphi_{x_i}$ jollekin i, eli väite seuraa todistuksen kohdasta (i). Oletetaan, että väite pätee kaikille multi-indekseille, joille $|\alpha| = k \leq m \in \mathbb{N}$ ja kaikille funktioille $u \in C^k(\Omega)$ kun $k \leq m$. Olkoon $u \in C^{m+1}(\Omega)$ mielivaltainen ja α multi-indeksi siten, että $|\alpha| \leq m + 1$. Voidaan olettaa, että $|\alpha| = m + 1$ sillä, muuten väite seuraa suoraan induktio-oletuksesta ja siitä, että $C^m(\Omega) \subset C^{m+1}(\Omega)$. Olkoon $i_0 \in [0, n]$ pienin indeksi, jolla $\alpha_{i_0} \neq 0$. Tällöin $D^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} D^{\tilde{\alpha}} u$, missä

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{kun } i \neq i_0 \\ \alpha_{i_0} - 1, & \text{kun } i = i_0. \end{cases}$$

Nyt pätee $|\tilde{\alpha}| = m$ ja $u_{x_{i_0}} \in C^m(\Omega)$ ja täten jokaiselle testifunktiolle saadaan

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx &= \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} D^{\tilde{\alpha}} \varphi \, dx = -\int_\Omega u_{x_{i_0}} D^{\tilde{\alpha}} \varphi \, dx \\ &= -(-1)^{|\tilde{\alpha}|} \int_\Omega D^{\tilde{\alpha}} u_{x_{i_0}} \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Toisessa yhtäsuuruudessa käytettiin todistuksen kohtaa (i) ja kolmannessa käytettiin induktio-oletusta.

$\square$

Osittaisintegrointikaava yleistyy samalla todistuksella myös tilanteeseen, jossa integroidaan aikaderivaattaa.

Edellisissä yhtälöistä voidaan havaita, että yhtälöiden vasemmat puolet ovat järkeviä integraaleja, vaikka funktio u ei olisikaan jatkuvasti derivoituva. Tästä saadaan motivaatio heikon derivaatan määritelmälle. Lebesguen integraalit havaitsevat funktiossa tapahtuvan muutoksen ainoastaan positiivismittaisessa joukossa Lebesguen mitan suhteen. Tämän takia kun siirrytään käsittelemään derivoituvuutta ja funktioita ainoastaan integraalien sisällä, voidaan heikentää oletuksia niiden säännöllisyydestä joukoissa, joiden Lebesguen mitta ei ole positiivinen.

Määritelmä 4.4. *Olkoot* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *ja* α *multi-indeksi. Tällöin sanotaan, että* v *on funktion* u α*:s heikko derivaatta, mikäli*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx,$$

kaikille testifunktioille $\varphi \in C^2(\Omega)$*. Tällöin merkitään* $D^\alpha u := v$*. Heikot osittaisderivaatat on määritelty vastaavasti, eli* v *on funktion* u *heikko osittaisderivaatta muuttujan* x_i *suhteen, mikäli*

$$\int_\Omega u \varphi_{x_i} \, dx = - \int_\Omega v \varphi \, dx,$$

kaikille testifunktioille $\varphi \in C^2(\Omega)$*. Tällöin merkitään* $u_{x_i} = v$*.*
Heikkoa gradienttia merkataan vastaavasti $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$*.*

Lemmasta 4.3 nähdään, että mikäli $u \in C^1(\Omega)$, niin heikon derivaatan määritelmä antaa aina funktion u tavallisen derivaatan melkein kaikkialla. Käytetty notaatio ei johda ongelmiin, sillä heikon derivaatan käsite jatkaa derivaatan käsitteen funktioihin, jotka eivät ole jatkuvasti derivoituvia ja yhtyy alkuperäiseen määritelmään muulloin.

Heikkojen ratkaisujen teoria vaatii ratkaisuilta heikkojen derivaattojen olemassaolon ja tätä varten on luonnollista tarkastella Sobolev-avaruuksia, jotka määritellään seuraavaksi. Sobolev-avaruuksien määritelmät seuraavat [Par17a] ja [Eva98] määritelmiä.

Määritelmä 4.5 (Sobolev-avaruus)**.** *Olkoot* $1 \leq p \leq \infty$ *ja* $k \in \mathbb{N}$*. Funktio* $u : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *kuuluu Sobolev-avaruuteen* $W^{k,p}(\Omega)$*, jos* $u \in L^p(\Omega)$ *ja sen kaikki heikot derivaatat* $D^\alpha u$*,* $|\alpha| \leq k$*, ovat olemassa ja kuuluvat funktioavaruuteen* $L^p(\Omega)$*.*

Funktio u *kuuluu lokaaliin Sobolev-avaruuteen* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$*, jos* $u \in L^p(\Omega')$ *ja* $D^\alpha u \in L^p(\Omega')$ *jokaiselle kompaktille joukolle* $\Omega' \subset \Omega$*.*

Näissä avaruuksissa käytämme normina normia

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u| & p = \infty. \end{cases}$$

Sobolev-avaruudet on määritelty L^p-funktioiden avulla, joten myös Sobolev-avaruudessa $f = g$ mikäli $f(x) = g(x)$ m.k $x \in \Omega$. Tämän takia käsittelemme periaatteessa funktioiden sijasta funktioiden ekvivalenssiluokkia, jossa samaistamme kaikki funktiot, jotka eroavat toisistaan vain nollamittaisissa joukoissa.

Siirryttäessä ratkaisujen luokassa Sobolev-avaruuksiin on luonnollista, että reuna-arvot otetaan myös Sobolev-mielessä. Tätä varten määritellään nolla reuna-arvoisten Sobolev-funktioiden avaruus ja reuna-arvo-ongelmissa vaaditaan aina ratkaisun ja reuna-arvojen erotusfunktion kuuluvan tähän avaruuteen. Tämä avaruus määritellään sileiden kompaktikantajaisten funktioiden avaruuden täydellistymänä jonojen avulla seuraavan määritelmän mukaisesti

Määritelmä 4.6. *Olkoot* $1 \leq p \leq \infty$ *ja* $k \in \mathbb{N}$. *Funktio* $u : \Omega \to]-\infty, \infty[$ *kuuluu Sobolev-avaruuteen* $W_0^{k,p}(\Omega)$, *jos on olemassa jono funktioita* $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ *siten, että* $u_i \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *kaikilla* $i \geq 1$ *ja*

$$\lim_{i\to\infty} ||u_i - u||_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Kuten seurauksessa [Par17a, Corollary 2.29] todistetaan, olisi ekvivalenttia määritellä tavalliset Sobolev-avaruudet vastaavalla tavalla $u_i \in C^{\infty}(\Omega)$ funktioiden täydellistymänä Sobolev-normin suhteen.

Ajasta riippumattomassa tapauksessa heikkoja ratkaisuja etsitään avaruudesta $W^{k,p}(\Omega)$, mutta tarkastellessa parabolisia yhtälöitä täytyy aikaulottuvuuden rooli erikseen ottaa huomioon.

Määritelmä 4.7 (Parabolinen Sobolev-avaruus)**.** *Olkoon* $T > 0$. *Tällöin funktioavaruus*

$$L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$$

koostuu kaikista mitallisista funktioista $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ *siten, että* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *melkein kaikille* $0 < t < T$ *ja normi*

$$||u||_{L^2(0,T;W^{1,2})} := \left(\int_{\Omega_T} (|u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2)\, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

on äärellinen. Avaruuden lokaali versio on määritelty vastaavasti kuin L^p*-avaruuksien tapauksessa. Tarkempia yksityiskohtia siitä missä mielessä funktion* u *tulee olla mitallinen käsitellään* [Kut98] *luvussa 23.*

Määritelmä 4.8. *Olkoon* $T > 0$. *Tällöin funktioavaruus*

$$C(0, T; L^2(\Omega))$$

koostuu kaikista mitallisista funktioista $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ *siten, että normi*

$$||u||_{C(0,T;L^2(\Omega))} := \max_{[0,T]} \left(\int_{\Omega} u(x,t)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

on äärellinen ja jokaiselle $\varepsilon > 0$ ja $t_1 \in [0,T]$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikille $t_2 \in [0,T]$, joille $|t_1 - t_2| \leq \delta$, pätee

$$\left(\int_\Omega |u(x,t_1) - u(x,t_2)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Seuraavaksi määritellään heikon ratkaisun käsite, joka laajentaa differentiaaliyhtälön ratkaisun käsitettä yhtälöille, joiden paikkaderivaatat voimme kirjoittaa divergenssimuodossa. Tässä käsitelty heikko teoria tarkastelee funktioita Sobolev-avaruuksissa ja reuna-arvo-ongelmassa testataan toteuttaako funktio yhtälön alueen yli integroitaessa.

Määritelmä 4.9. *Olkoot $g \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ ja $f \in L^2(\Omega_T)$. Funktio $u \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ on heikko ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle (4.1), jos*

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_T} u\varphi_t \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i \varphi + \sum_{i=1}^n b_i D_i u \varphi + cu\varphi \, dx \, dt \\ = \int_{\Omega_T} f\varphi \, dx \, dt \end{aligned}$$

kaikille $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$,

$$u - g \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)),$$

sekä

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_\Omega |u-g|^2 \, dx \, dt = 0.$$

Käsitellessä homogeenistä lämpöyhtälöä tämä määritelmä yksinkertaistuu huomattavasti sillä $b_i = 0 = c$ ja $a_{ij} = \delta_{ij}$ kaikilla $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Määritelmä saadaan muotoon

Määritelmä 4.10. *Olkoon $g \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$. Funktio $u \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ on heikko ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle (4.2), jos*

$$\int_{\Omega_T} u\varphi_t \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt$$

kaikille $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$,

$$u - g \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)),$$

sekä

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_\Omega |u-g|^2 \, dx \, dt = 0.$$

Ideana on vaatia funktiolta heikon gradientin olemassaolo, että voimme osittaisintegroida yhden derivaatan testifunktion divergenssistä funktion u heikoksi derivaataksi, eli epäformaalisti tehdä laskun:

$$\int_{\Omega_T} u\varphi_t \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} u_t \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} \operatorname{div}(\nabla u)\varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt.$$

Huomaa, että $\operatorname{div}(\nabla u)$ ei välttämättä ole määritelty funktion u oletuksien nojalla.

Määritelmässä 4.10 on itseasiassa yhtäpitävää vaatia ratkaisulta ainoastaan $u \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, sillä jatkuvuus seuraa ratkaisuille reuna-arvojen säännöllisyydestä ja joukon reunan sileydestä. Tätä käsitellään esimerkiksi lähteessä [Par07].

Sub- ja superratkaisuja määritellessä rajoitetaan testifunktiot joko positiivisiin tai negatiivisiin funktioihin tai muuten epäyhtälön suuntaa voidaan aina vaihtaa testifunktiota vaihtamalla. Reuna-arvojen saavuttaminen määritellään samalla tavalla kuin oikean ratkaisun tapauksessa.

Määritelmä 4.11. *Funktio $u \in L^2_{loc}(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ on lokaali heikko superratkaisu yhtälölle (3.1), jos*

$$\int_{\Omega_T} u\varphi_t \, dx \, dt \leq \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt$$

jokaiselle testifunktiolle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$, jolle $\varphi(x,t) \geq 0$ kaikilla $(x,t) \in \Omega_T$. Vastaavasti funktio u on lokaali heikko subratkaisu, jos

$$\int_{\Omega_T} u\varphi_t \, dx \, dt \geq \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt$$

jokaiselle testifunktiolle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$, jolle $\varphi(x,t) \geq 0$ kaikilla $(x,t) \in \Omega_T$.

Seuraavaksi todistetaan vertailuperiaate lämpöyhtälön jatkuvien heikkojen ratkaisujen välille. Tätä käytetään ekvivalenssituloksen todistamisessa myöhemmin.

Lause 4.12. *Olkoot $u \in C(\Omega_T)$ lämpöyhtälön heikko subratkaisu ja $v \in C(\Omega_T)$ lämpöyhtälön heikko superratkaisu määritelmän 4.11 mukaisesti siten, että $u(x,t) \leq v(x,t)$ kaikille $(x,t) \in \partial_{par}\Omega_T$. Tällöin*

$$u(x,t) \leq v(x,t) \text{ kaikilla } (x,t) \in \Omega_T$$

Todistus. Tämä todistus on muokattu versio lähteen [PV18] Lemman A.1 todistuksesta. Oletuksen nojalla $u(x,t) - v(x,t) \leq 0$ eli $(u-v)_+ = 0$ kaikilla $(x,t) \in \partial_{par}\Omega_T$. Valitaan testifunktioksi

$$\varphi(x,t) = \chi_h^{0,t_1}(u-v)_+(x,t),$$

missä

$$\chi_h(t) = \chi_h^{0,t_1}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq h \\ (t-h)/h, & h < t \leq 2h \\ 1, & 2h < t \leq t_1 - 2h \\ (-t+t_1-h)/h, & t_1 - 2h < t \leq t_1 - h \\ 0, & t_1 - h < t. \end{cases}$$

Tätä funktiota φ approksimoimalla ajan ja paikan suhteen saadaan heikon ratkaisun määritelmään soveltuva testifunktio. Tulevassa laskussa tulemme tarvitsemaan myös tämän heikkoa derivaattaa ajan suhteen, joka on

$$\frac{\partial \chi_h}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{h}, & h < t \leq 2h \\ -\frac{1}{h}, & t_1 - 2h < t \leq t_1 - h \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Nyt siis saadaan heikon ratkaisun määritelmästä, että

$$\int_{\Omega_T} u\varphi_t \, dx \, dt \geq \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt$$

ja

$$\int_{\Omega_T} v\varphi_t \, dx \, dt \leq \int_{\Omega_T} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt,$$

ja näiden erotuksena gradientin lineaarisuutta hyödyntäen saamme

$$\int_{\Omega_T} (u-v)\varphi_t \, dx \, dt \geq \int_{\Omega_T} \nabla(u-v) \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt. \tag{4.6}$$

Olkoot $\Gamma = \{(x,t) \in \Omega_T \mid (u-v)_+ > 0\}$ ja $\Gamma_s = \Gamma \cap \{(x,t) \in \Omega_T \mid t = s\}$. Yhtälön vasempaa puolta voidaan arvioida seuraavasti

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} (u-v)\varphi_t \, dx \, dt &= \int_{\Omega_T} (u-v) \frac{\partial(\chi_h (u-v)_+)}{\partial t} \, dx \, dt \\ &= \int_{\Omega_T} (u-v) \left(\frac{\partial \chi_h}{\partial t} (u-v)_+ + \chi_h \frac{\partial (u-v)_+}{\partial t} \right) dx \, dt \\ &= \int_{\Gamma} (u-v)^2 \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \, dx \, dt + \int_{\Gamma} \chi_h (u-v) \frac{\partial (u-v)}{\partial t} \, dx \, dt \\ &= \int_{\Gamma} (u-v)^2 \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \, dx \, dt + \int_{\Gamma} \chi_h \frac{1}{2} \frac{\partial (u-v)^2}{\partial t} \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Kolmas yhtäsuuruus seuraa siitä, että $(u-v)_+ = u-v$ joukossa Γ ja muulloin $(u-v)_+ = 0$.

Osittaisintegroimalla toista saaduista termeistä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \chi_h \frac{\partial (u-v)^2}{\partial t} \, dx \, dt &= \frac{1}{2} \int_{\partial_{par}\Gamma} \chi_h (u-v)^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u-v)^2 \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \, dx \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u-v)^2 \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \, dx \, dt, \end{aligned}$$

eli syöttämällä tämä yhtälöön (4.7) saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (u-v)\varphi_t \, dx \, dt &= \int_{\Gamma} (u-v)^2 \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u-v)^2 \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \, dx \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u-v)^2 \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \, dx \, dt \\ &= \frac{1}{2h} \int_h^{2h} \int_{\Gamma_t} (u-v)^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2h} \int_{t_1-2h}^{t_1-h} \int_{\Gamma_t} (u-v)^2 \, dx \, dt, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus saadaan sijoittamalla yhtälöön derivaatta (4.5). Määritelmän 4.10 mukaisen alkuarvoehdon nojalla saadaan

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_h^{2h} \int_{\Gamma_t} (u-v)^2 \, dx \, dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_h^{2h} \int_{\Omega} (u-v)^2 \, dx \, dt = 0 \tag{4.8}$$

ja käyttämällä Lebesguen differentioituvuuslausetta toiseen integraaliin saadaan

$$\lim_{h\to 0} -\frac{1}{2h}\int_{t_1-2h}^{t_1-h}\int_{\Gamma_t}(u-v)^2\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{t_1}}(u(x,t_1)-v(x,t_1))^2\,dx. \quad (4.9)$$

Käyttämällä laskua (4.7) ja raja-arvoja (4.8) ja (4.9) yhtälöön (4.6) saadaan

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{h\to 0}\Big[\int_\Gamma \nabla(u-v)\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt - \int_\Gamma (u-v)\varphi_t\,dx\,dt\Big] \\ &\geq \int_0^{t_1}\int_{\Gamma_t}(\nabla(u-v))^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{t_1}}(u(x,t_1)-v(x,t_1))^2\,dx. \end{aligned}$$

Molempien integraalien integrandit ovat positiivisia, eli erityisesti $u(x,t_1) = v(x,t_1)$ m.k $x\in\Gamma_{t_1}$ tai $m_n(\Gamma_{t_1}) = 0$. Jos $m_n(\Gamma_{t_1}) = 0$, niin $u(x,t_1)\leq v(x,t_1)$ m.k $x\in\Omega_T\cap\{t=t_1\}$ eli erityisesti molemmissa tapauksissa

$$u(x,t_1)\leq v(x,t_1) \text{ m.k. } x\in\Omega_T\cap\{t=t_1\}.$$

Vastaava todistus voidaan toistaa jokaiselle t_1 arvolle ja väite seuraa tästä, koska $u,v\in C(\Omega_T)$. □

4.3. **Viskositeettiratkaisut.** Tässä aliluvussa esitellään viskositeettiratkaisun käsite ja sen määrittelemiseen tarvittavia tuloksia. Heikkojen ratkaisujen teoria soveltuu ainoastaan tilanteeseen, jossa tarkasteltava yhtälö voidaan kirjoittaa divergenssimuodossa. Tämän takia 1980-luvulla muun muassa Michael G. Crandall, Lawrence C. Evans, Hitoshi Ishii, Pierre Louis Lions ja useat muuta matemaatikot kehittivät uutta teoriaa, joka laajentaa ratkaisun käsitettä degeneroituneesti elliptisille funktioille.

Nimi "viskositeettiratkaisu" tulee alkuperäisestä ideasta lisätä yhtälöön epsilonista riippuva katoava "viskositeettitermi", ratkaista uusi yhtälö klassisessa mielessä, ja tämän jälkeen määritellä alkuperäisen yhtälön ratkaisuksi saadun funktion raja-arvo epsilonin mennessä nollaan. Tämä soveltuu esimerkiksi ratkaisemaan luvun alussa esitelty reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} |u'(x)|^2 = 1 & x\in\Omega \\ u(x) = 0 & x\in\partial\Omega, \end{cases} \quad (4.10)$$

missä $\Omega =]-1,1[\subset\mathbb{R}$. Tälle ei ole olemassa klassista ratkaisua, mutta lisäämällä termi $-\varepsilon u_\varepsilon''$ saadaan yhtälö

$$\begin{cases} -\varepsilon u_\varepsilon'' + (u_\varepsilon')^2 = 1 & x\in(-1,1) \\ u_\varepsilon(\pm 1) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

jolle löytyy ratkaisu. Funktio

$$u_\varepsilon(x) = -\varepsilon\log\left(\frac{\cosh(\frac{x}{\varepsilon})}{\cosh(\frac{1}{\varepsilon})}\right).$$

ratkaisee yhtälön (4.11), sillä

$$u_\varepsilon'(x) = -\varepsilon\frac{\cosh(\frac{1}{\varepsilon})}{\cosh(\frac{x}{\varepsilon})}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\frac{\sinh(\frac{x}{\varepsilon})}{\cosh(\frac{1}{\varepsilon})} = -\tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ja

$$u_\varepsilon''(x) = -\frac{1}{\varepsilon\cosh^2(\frac{x}{\varepsilon})},$$

joten

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + (u_\varepsilon')^2 = \varepsilon\frac{1}{\varepsilon\cosh^2(\frac{x}{\varepsilon})} + \tanh^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1+\sinh^2(\frac{x}{\varepsilon})}{\cosh^2(\frac{x}{\varepsilon})} = 1.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytetään tunnettua trigonometristen funktioiden identiteettiä $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Tästä ottamalla raja-arvon kun $\varepsilon \to 0$ saadaan funktio $u(x) = 1 - |x|$, joka ratkaisee alkuperäisen ongelmamme klassisessa mielessä kaikkialla paitsi pisteessä $x = 0$ ja on jatkuva koko joukossa. Tämän laskun tarkemmat yksityiskohdat on saatavilla [Koi12] luvusta 2.1.

Viskositeettiratkaisuja ei nykyään määritellä tällä tavalla, vaan ne määritellään pisteittäin testaamalla alhaalta ja ylhäältä koskevilla testifunktioilla seuraavien määritelmien mukaisesti.

Määritelmä 4.13 (Ylhäältä koskeminen)**.** *Funktio φ koskee funktiota u ylhäältä pisteessä $(x,t) \in \Omega_T$, jos*

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \text{ ja } u(y,s) < \varphi(y,s) \text{ kaikille } (y,s) \neq (x,t).$$

Määritelmä 4.14 (Alhaalta koskeminen)**.** *Funktio φ koskee funktiota u alhaalta pisteessä $(x,t) \in \Omega_T$, jos*

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \text{ ja } u(y,s) > \varphi(y,t) \text{ kaikille } (y,s) \neq (x,t).$$

Määritelmä 4.15. *Funktio $u : \Omega_T \to]-\infty,\infty]$ on alhaalta puolijatkuva pisteessä $(x,t) \in \Omega_T$, jos*

$$\liminf_{(y,s)\to(x,t)} u(y,s) \geq u(x,t)$$

tai ekvivalentisti $\{(x,t) \in \Omega_T : u(x) > \lambda\}$ on avoin kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin merkataan $u \in LSC(\Omega_T)$. Vastaavasti $u : \Omega \to [-\infty,\infty[$ on ylhäältä puolijatkuva pisteessä x, jos

$$\limsup_{(y,s)\to(x,t)} u(y,s) \leq u(x,t).$$

tai ekvivalentisti $\{(x,t) \in \Omega_T : u(x) < \lambda\}$ on avoin kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin merkataan $u \in USC(\Omega_T)$. Jos u on alhaalta(ylhäältä) puolijatkuva jokaisessa pisteessä $x \in \Omega$ sanotaan, että u on alhaalta(ylhäältä) puolijatkuva. Alhaalta ja ylhäältä puolijatkuva funktio on jatkuva.

Puolijatkuvilla funktioilla on paljon hyödyllisiä ominaisuuksia.

Huomautus 4.16. *Jos $\{u_i : i \in I\}$ on joukko alhaalta puolijatkuvia funktioita joukossa Ω_T, niin funktio $u = \sup_{i\in I} u_i$ on myös alhaalta puolijatkuva, sillä*

$$\{u > \lambda\} = \bigcup_{i\in I}\{u_i > \lambda\}.$$

Ylhäältä puolijatkuville funktioille funktio $u = \inf_{i\in I} u_i$ on ylhäältä puolijatkuva.

Huomautus 4.17. *Jos* $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ *on alhaalta puolijatkuva funktio, on olemassa kasvava jono jatkuvia funktioita* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *siten, että*

$$u = \lim_{j\to\infty} f_j.$$

Ylhäältä puolijatkuvan tapauksessa olemassa oleva jono on vähenevä.

Todistus. Katso [HKM06, sivu 75]. □

Seuraavaksi määrittelemme viskositeettiratkaisun funktiota koskevien testifunktioiden avulla lämpöyhtälölle. Viskositeettiratkaisujen määritelmien muotoiluissa on eroja, mutta yleinen idea on vaatia kaikkien ylhäältä koskevien testifunktioiden toteuttavan ratkaistavan yhtälön epäyhtälönä yhteen, ja alhaalta koskevien testifunktioiden toiseen suuntaan.

Määritelmä 4.18. *Funktio* $u : \Omega_T \to (-\infty, \infty]$ *on lämpöyhtälön* (3.1) *viskositeettisuperratkaisu jos*

(i) $u \in LSC(\Omega_T)$,
(ii) $u \not\equiv \infty$,
(iii) *Kaikille* $\psi \in C^{2,1}(\Omega_T)$ *jotka koskevat funktiota* u *alhaalta pisteessä* $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ *pätee*

$$\psi_t(x_0, t_0) \geq \Delta\psi(x_0, t_0).$$

Määritelmä 4.19. *Funktio* $u : \Omega_T \to [-\infty, \infty)$ *on lämpöyhtälön* (3.1) *viskositeettisubratkaisu jos*

(i) $u \in USC(\Omega_T)$,
(ii) $u \not\equiv -\infty$,
(iii) *Kaikille* $\varphi \in C^{2,1}(\Omega_T)$ *jotka koskevat funktiota* u *ylhäältä pisteessä* $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ *pätee*

$$\varphi_t(x_0, t_0) \leq \Delta\varphi(x_0, t_0).$$

Jos epäyhtälö on aito jokaiselle testifunktiolle, sanomme ratkaisun olevan aito viskositeettisuper(sub)ratkaisu.

Määritelmä 4.20. *Funktio* $u \in C(\Omega_T)$ *on viskositeettiratkaisu, jos se on viskositeettisubratkaisu ja viskositeettisuperratkaisu.*

Viskositeettiratkaisuiden tapauksessa ratkaisut ovat aina jatkuvia, joten voimme tarkastella reuna-arvojen toteutumista klassisessa mielessä reuna-arvo-ongelmaa ratkaistaessa.

4.4. **Lämpöyhtälön heikot ratkaisut ja viskositeettiratkaisut.** Tässä alaluvussa näytetään, että viskositeettiratkaisun ja heikon ratkaisun määritelmät lämpöyhtälölle antavat saman ratkaisujen luokan.

Lause 4.21. *Funktio* u *on lämpöyhtälön* (3.2) *heikko ratkaisu määritelmän* 4.10 *mukaisesti jos ja vain jos se on lämpöyhtälön viskositeettiratkaisu määritelmän* 4.20 *mukaisesti.*

Lause 4.21 todistetaan kahdessa osassa lauseissa 4.22 ja 4.32. Näissä tuloksissa valitaan jokaisen heikon ratkaisun ekvivalenssiluokan jatkuva edustaja. Jatkuvan edustajan olemassaoloa käsitellään esimerkiksi [Par17a, Theorem 4.28] ja [Kuu09]. Katso myös [Sil19, Section 5] ja [DiB09].

Heikon ratkaisun näyttäminen viskositeettiratkaisuksi on selvästi helpompi suunta ja se todistetaan seuraavaksi. Todistukset ovat erikoistapauksia yleisemmälle p-paraboliselle yhtälölle todistetusta ekvivalenssituloksesta. Katso [JLM01, Theorem 4.4].

Lause 4.22. *Lämpöyhtälön (3.1) heikko ratkaisu on sen viskositeettiratkaisu.*

Todistus. Olkoot $T > 0$ ja u lämpöyhtälön heikko ratkaisu määritelmän 4.10 mukaisesti. Tällöin erityisesti u on heikko superratkaisu. Tehdään antiteesi, että u ei ole lämpöyhtälön viskositeettisuperratkaisu, eli on olemassa jokin testifunktio $\varphi \in C^{2,1}(\Omega \times [-T, T])$ ja $r > 0$ siten, että

(i) $u(0, 0) = \varphi(0, 0)$,
(ii) $u(x, t) > \varphi(x, t)$ kaikille $(x, t) \in \Omega \times [-T, 0[$,

ja

$$\varphi_t(x, t) - \Delta\varphi(x, t) < 0 \tag{4.12}$$

pisteille $(x, t) \in (B(0, r) \times (-r, 0)) \cup \{x \neq 0\}$. Merkataan $Q_r = B(0, r) \times (-r, 0)$. Olkoon $\phi \in C_0^\infty(Q_r)$ kaikkialla positiivinen testifunktio. Kertomalla yhtälöä (4.12) puolittain testifunktiolla ϕ ja integroimalla molempia puolia joukon Q_r yli saadaan

$$\int_{Q_r} \varphi_t \phi \, dx \, dt < \int_{Q_r} \phi \Delta\varphi \, dx \, dt. \tag{4.13}$$

Osittaisintegroimalla epäyhtälön vasempaa puolta ajan suhteen saadaan lemman 4.3 nojalla

$$\int_{Q_r} \varphi_t \phi \, dx \, dt = -\int_{Q_r} \varphi \phi_t \, dx \, dt. \tag{4.14}$$

Divergenssin tulosäännön 2.14 nojalla

$$\operatorname{div}(\phi\nabla\varphi) = \phi(\nabla \cdot \nabla\varphi) + \nabla\varphi \cdot \nabla\phi = \phi\Delta\varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla\phi, \tag{4.15}$$

ja integroimalla tätä puolittain joukon yli saadaan

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} \phi\Delta\varphi \, dx \, dt + \int_{Q_r} \nabla\varphi \cdot \nabla\phi \, dx \, dt &= \int_{Q_r} \operatorname{div}(\phi\nabla\varphi) \, dx \, dt \\ &= \int_{\partial Q_r} \phi\nabla\varphi \cdot \nu \, dS = 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa divergenssilauseesta 2.12 ja kolmas siitä, että $\phi \in C_0^\infty(Q_r)$. Sijoittamalla yhtälöt (4.14) ja (4.16) yhtälöön (4.13) saadaan

$$\int_{Q_r} \nabla\varphi \cdot \nabla\phi \, dx \, dt \leq \int_{Q_r} \phi_t \varphi \, dx \, dt,$$

eli nyt φ on lämpöyhtälön heikko superratkaisu joukossa Q_r. Määritellään funktion φ valinnasta johtuen aidosti positiivinen vakio

$$m = \inf_{\partial_{par} Q_r} (u - \varphi) > 0$$

ja testifunktio

$$\tilde{\varphi} = \varphi + m.$$

Tämä on myöskin heikko superratkaisu, sillä vakio m ei vaikuta funktion aikaderivaattaan tai gradienttiin. Koska u on jatkuva heikko subratkaisu ja koska nyt $\tilde{\varphi} \leq u$ funktion valinnan nojalla kaikille $(x,t) \in \partial_{par} Q_r$, niin vertailuperiaatteen 4.12 nojalla

$$\tilde{\varphi}(x,t) \leq u(x,t) \text{ kaikille } (x,t) \in Q_r.$$

Kuitenkin nyt pätee

$$\tilde{\varphi}(0,0) = \varphi(0,0) + m = u(0,0) + m > u(0,0),$$

joka aiheuttaa ristiriidan. Täten funktion u on oltava viskositeettisuperratkaisu. Täysin vastaavasti kääntämällä kaikki epäyhtälöt toisinpäin saadaan todistettua, että heikko ratkaisu on viskositeettisubratkaisu. Nämä kaksi tietoa yhdistämällä saadaan, että lämpöyhtälön heikko ratkaisu on sen viskositeettiratkaisu. □

Ekvivalenssin toista suuntaa varten tarvitaan vertailuperiaate viskositeettiratkaisujen välille. Tämän todistamista varten tarvitaan jettien käsite ja viskositeettiratkaisujen määritelmä jettien kautta.

Olkoot $(y,s) \in \Omega_T$, $u \in C(\Omega_T)$ ja $\phi \in C^{2,1}(\Omega_T)$ funktio siten, että funktiolla $u - \phi$ on lokaali maksimi pisteessä (y,s). Tällöin jos piste (x,t) on lähellä pistettä (y,s), niin

$$u(x,t) \leq u(y,s) - \phi(y,s) + \phi(x,t).$$

Muodostamalla Taylorin polynomi pisteessä (y,s) saadaan

$$\begin{aligned} u(x,t) \leq\ & u(y,s) + a(t-s) + \langle p, x-y \rangle \\ & + \frac{1}{2}\langle X(x-y), x-y \rangle + o(|t-s| + |x-y|^2), \end{aligned} \tag{4.17}$$

kun $\Omega_T \ni (x,t) \to (y,s)$. Tässä $a = \phi_t(y,s)$, $p = \nabla\phi(y,s)$ ja $X = D^2\phi(y,s)$. Merkinnällä $o(|t-s| + |x-y|^2)$ tarkoitetaan jotakin funktiota, jolle

$$\lim_{(x,t)\to(y,s)} \frac{o(|t-s| + |x-y|^2)}{|t-s| + |x-y|^2} = 0.$$

Yhtälö (4.17) pätee funktion u valinnasta riippuen usealle kolmikolle $(a,p,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n)$ ja määrittelemme näiden muodostavan kuvapisteen jetin.

Määritelmä 4.23. *Funktion u parabolinen superjetti pisteessä $(y,s) \in \Omega_T$ on joukko*

$$\mathcal{P}^{2,+}u(y,s) = \{(a,p,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) | u(x,t) \leq u(y,s) + a(t-s) + \langle p, x-y \rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-y), x-y \rangle + o(|t-s| + |x-y|^2)\},$$

ja vastaavasti parabolinen subjetti pisteessä (y,s) on joukko

$$\mathcal{P}^{2,-}u(y,s) = \{(a,p,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) | u(x,t) \geq u(y,s) + a(t-s) + \langle p, x-y \rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-y), x-y \rangle + o(|t-s| + |x-y|^2)\}.$$

On hyvä huomata, että jetti riippuu funktion u lisäksi sen muodostuspisteestä (y,s) ja pistettä muuttamalla saadaan mahdollisesti eri joukko. Heuristisesti jetti on joukko kaikista "tavoista", joilla testifunktiot voivat koskea funktiota u pisteessä (y,s).

Parabolisten jettien sulkeumat määritellään ottamalla jonoja pisteitä, jotka suppenevat tarkastelupisteeseen ja ottamalla jokaisessa pisteessä muodostuvasta jetistä yhden edustajan siten, että sulkeuman määritellään muodostuvan näiden edustajien muodostamien jonojen raja-arvoista.

Määritelmä 4.24. *Parabolisen superjetin sulkeuma on joukko*

$$\overline{\mathcal{P}}^{2,+}u(y,s) = \{(a,p,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) | \exists((y_n,s_n))_{n=1}^{\infty} \subset \Omega_T \text{ siten, että } (y_n,s_n) \underset{n\to\infty}{\to} (y,s) \text{ ja } \exists(a_n,p_n,X_n)_{n=1}^{\infty} \text{ siten, että } (a_n,p_n,X_n) \in \mathcal{P}^{2,+}u(y_n,s_n) \text{ jokaisella } n \in \mathbb{N} \text{ ja } (a_n,p_n,X_n) \underset{n\to\infty}{\to} (a,p,X)\}.$$

Joukon $\overline{\mathcal{P}}^{2,-}u(y,s)$ määrittelemme samoin paitsi, että vaadimme jokaisen edustajan kuuluvan joukkoon $\mathcal{P}^{2,-}u(y_n,s_s)$.

Käsittelemme tässä muutaman perustuloksen jetteihin liittyen ja ekvivalentin määritelmän viskositeettiratkaisulle jettien kautta myöhempää todistusta varten. Lisätietoa jeteistä ja niiden ominaisuuksista on saatavilla esimerkiksi lähteestä [Cra97].

Jetti on joukkona jokaisessa pisteessä joko tyhjä tai siihen kuuluu ääretön määrä alkioita, sillä mikäli jokin $(a,p,X) \in \mathcal{P}^{2,\pm}u(y,s)$, niin tästä suoraan seuraa, että $(a,p,Y) \in \mathcal{P}^{2,\pm}u(y,s)$ kaikille matriiseille $Y \leq X$. On kuitenkin helppo antaa esimerkkejä, joissa toinen jeteistä on tyhjä. Esimerkiksi alaluvun alussa saimme reuna-arvo-ongelman (4.10) ratkaisuksi funktion $u(x) = 1 - |x|$, jota on mahdoton koskea pisteessä $x = 0$ alhaalta siinä olevan "kulman" takia ja tämän takia pisteen subjetti on tyhjä.

Lämpöyhtälö ja normalisoitu p-parabolinen yhtälö ovat molemmat degeneroituneesti elliptisiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä.

Määritelmä 4.25. *Sanotaan, että osittaisdifferentiaaliyhtälö F on degeneroituneesti elliptinen (tai degeneroituneesti parabolinen), jos*

$$F(x,t,p,a,X) \leq F(x,t,p,a,Y)$$

kaikille $x \in \Omega$, $t, a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ *ja* $X, Y \in S(n)$, *joille*

$$X \geq Y.$$

Matriisien vertailussa käytetään spektraalinormia (2.1).

Viskositeettisub- ja viskositeettisuperratkaisut voidaan määritellä suoraan jettien kautta yleiselle degeroituneesti elliptiselle funktiolle seuraavasti.

Määritelmä 4.26. *Olkoon* $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ *degeneroituneesti elliptinen määritelmän 4.25 mukaisesti. Funktio* $u \in USC(\Omega_T)$ *on viskositeettisubratkaisu yhtälölle* $u_t - F(x, t, u, \nabla u, D^2 u) = 0$, *mikäli jokaiselle* $(x, t) \in \Omega_T$ *pätee*

$$a - F(x, t, u(x, t), p, X) \leq 0$$

kaikille $(a, p, X) \in \mathcal{P}^{2,+}u(x, t)$. *Täysin vastaavasti funktio* $u \in LSC(\Omega_T)$ *on viskositeetisuperratkaisu yhtälölle* $u_t - F(x, t, u, \nabla u, D^2 u) = 0$, *mikäli jokaiselle* $(x, t) \in \Omega_T$ *pätee*

$$a - F(x, t, u, p, X) \geq 0$$

kaikille $(a, p, X) \in \mathcal{P}^{2,-}u(x, t)$.

Sitä miksi jettien ja testifunktioiden kautta määritellyt ratkaisut ovat samat käsitellään [Cra97] luvussa 7 elliptisessä tapauksessa ja lisäyksityiskohtia paraboliseen tapaukseen annetaan luvussa 12. Tätä määritelmää käytetään vertailuperiaatteiden todistuksissa myöhemmin.

Ainut kolmikko $(a, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n)$, joka voi kuulua molempiin sub- ja superjettiin samassa pisteessä koostuu funktion derivaatasta, gradientista ja Hessen matriisista.

Lemma 4.27. *Olkoot* $u \in C(\Omega_T)$ *ja* $(y, s) \in \Omega_T$. *Tällöin jos* $\mathcal{P}^{2,+}u(y, s) \cap \mathcal{P}^{2,-}u(y, s) \neq \emptyset$, *niin* $u \in C^2(\Omega_T)$ *ja*

$$\mathcal{P}^{2,+}u(y, s) \cap \mathcal{P}^{2,-}u(y, s) = (u_t(y, s), \nabla u(y, s), D^2 u(y, s)).$$

Todistus. Olkoon $(a, p, X) \in \mathcal{P}^{2,+}u(y, s) \cap \mathcal{P}^{2,-}u(y, s)$. Tällöin jettien määritelmän nojalla kaikille (x, t) saadaan

$$\begin{aligned} u(x, t) \leq\ & u(y, s) + a(t - s) + \langle p, x - y\rangle \\ & + \frac{1}{2}\langle X(x - y), x - y\rangle + o(|t - s| + |x - y|^2) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} u(x, t) \geq\ & u(y, s) + a(t - s) + \langle p, x - y\rangle \\ & + \frac{1}{2}\langle X(x - y), x - y\rangle + o(|t - s| + |x - y|^2), \end{aligned}$$

ja nämä yhdistämällä ja käyttämällä o-notaation määritelmää saadaan

$$\begin{aligned} u(x, t) =\ & u(y, s) + a(t - s) + \langle p, x - y\rangle \\ & + \frac{1}{2}\langle X(x - y), x - y\rangle + o(|t - s| + |x - y|^2). \end{aligned}$$

Täten differentioituvuuden määritelmän nojalla $u \in C^{2,1}$ jossain pisteen (y, s) ympäristössä ja $a = u_t(y, s)$, $p = \nabla u(y, s)$ ja $X = D^2 u(y, s)$. $\square$

Seuraava lause on nimeltään Ishiin lemma tai *theorem on sums* ja se on keskeisessä roolissa viskositeettiratkaisujen vertailuperiaatteen todistamisessa.

Lause 4.28 (Ishiin lemma)**.** *Olkoot $u \in USC(\overline{\Omega}_T)$ ja $v \in LSC(\overline{\Omega}_T)$. Oletetaan, että funktiolle $\psi \in C^{2,1,2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ on olemassa piste $((x_0, t_0), (y_0, s_0)) \in \Omega_T \times \Omega_T$ siten, että*

$$\begin{aligned}\max_{((x,t),(y,s)) \in \Omega_T \times \Omega_T} & u(x, t) - v(y, s) - \psi(x, t, y, s) \\ &= u(x_0, t_0) - v(y_0, s_0) - \psi(x_0, t_0, y_0, s_0).\end{aligned}$$

Tällöin jokaiselle $\mu > 0$ on olemassa matriisit $X = X(\mu) \in S(n)$ ja $Y = Y(\mu) \in S(n)$ siten, että

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_0, t_0, y_0, s_0), D_x \psi(x_0, t_0, y_0, s_0), X\right) &\in \overline{\mathcal{P}}^{2,+} u(x_0, t_0) \\ \left(-\frac{\partial}{\partial s}\psi(x_0, t_0, y_0, s_0), -D_y \psi(x_0, t_0, y_0, s_0), Y\right) &\in \overline{\mathcal{P}}^{2,-} v(y_0, s_0)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}-(\mu + \left|\left|D^2\psi(x_0, t_0, y_0, s_0)\right|\right|) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix} \\ &\leq D^2\psi(x_0, t_0, y_0, s_0) + \frac{1}{\mu}(D^2\psi(x_0, t_0, y_0, s_0))^2,\end{aligned}$$

missä

$$D^2\psi(x_0, t_0, y_0, s_0) = \begin{bmatrix} D_{xx}\psi(x_0, t_0, y_0, s_0) & D_{xy}\psi(x_0, t_0, y_0, s_0) \\ D_{yx}\psi(x_0, t_0, y_0, s_0) & D_{yy}\psi(x_0, t_0, y_0, s_0) \end{bmatrix}.$$

Matriisien vertailussa käytetään yhtälössä (2.1) määritteltyä spektraalisädettä ja derivaattamatriisit $D_{xx}\psi$ määriteltiin yhtälössä (2.2).

Todistus. Todistus saadaan soveltamalla ajasta riippumattoman tilanteen todistusta ulottuvuudessa $n + 1$. Katso esimerkiksi [Cra97, Section 11]. $\square$

Lauseessa oletetaan, että erotusfunktiolla $u - v - \psi$ on olemassa maksimipiste $((x_0, t_0), (y_0, s_0))$. Tästä oletuksesta seuraa, että ψ on muuttujien (x, t) suhteen vakiota vailla ylhäältä pisteessä (x_0, t_0, y, s) koskeva testifunktio funktiolle $u(x, t) - v(y, s)$ jokaiselle (y, s) ja vastaavasti muuttujien (y, s) suhteen alhaalta pisteessä (x, t, y_0, s_0) koskeva testifunktio $u(x, t) - v(y, s)$ jokaiselle (x, t).

Huomautus 4.29. *Olkoot $u, v \in C^{2,1}(\Omega_T)$ ja määritellään funktio ψ ja piste (x_0, t_0, y_0, s_0) lauseen 4.28 tavoin. Tällöin ääriarvopisteessä $\nabla(u - v - \psi) = 0$ ja toisen derivaatan testin mukaan matriisi $D^2(u - v - \psi)$*

on negatiivisesti definiitti. Hessen matriisi saadaan kirjoitettua muotoon

$$\begin{aligned} D^2(u-v-\psi) =& D^2(u-v) - D^2\psi = \begin{bmatrix} D_{xx}(u-v) & D_{xy}(u-v) \\ D_{yx}(u-v) & D_{yy}(u-v) \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} D_{xx}u & 0 \\ 0 & -D_{yy}v \end{bmatrix} - D^2\psi. \end{aligned}$$

Eli erityisesti matriisin definiittisyydestä seuraa

$$\begin{bmatrix} D_{xx}u(x_0,t_0) & 0 \\ 0 & -D_{yy}v(y_0,s_0) \end{bmatrix} \leq D^2\psi(x_0,t_0,y_0,s_0).$$

Jos ei oleteta, että u ja v ovat sileitä, on lisättävä lauseessa näkyvä vakiosta μ riippuva virhetermi.

Lause 4.30 (Vertailuperiaate viskositeettiratkaisuille)**.** *Olkoon u viskositeettisubratkaisu ja v viskositeettisuperratkaisu lämpöyhtälölle joukossa Ω_T. Tällöin jos $u \leq v$ kaikilla $(x,t) \in \partial_{par}\Omega_T$, niin*

$$u \leq v \text{ kaikilla } (x,t) \in \Omega_T.$$

Todistus. Todistus seuraa [JLM01, Theorem 4.7] todistusta oletuksella, että $q = 2$.
Vakion T arvoa rajaamalla voimme olettaa, että u on ylhäältä rajoitettu ja v on alhaalta rajoitettu joukossa $\overline{\Omega}_T$. Tehdään antiteesi eli oletetaan, että

$$\sup_{\Omega_T}(u-v) > \sup_{\partial_{par}\Omega_T}(u-v). \tag{4.18}$$

Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $\tilde{v}(x,t) := v(x,t) + \frac{\varepsilon}{T-t}$. Olkoot myös $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ ja testifunktio $\phi \in C^{2,1}(\Omega_T)$, joka koskee funktiota $\tilde{v}$ alhaalta pisteessä (x_0,t_0). Tällöin

$$\phi(x_0,t_0) - \frac{\varepsilon}{T-t_0} = \tilde{v}(x_0,t_0) - \frac{\varepsilon}{T-t_0} = v(x_0,t_0)$$

ja

$$\phi(x,t) - \frac{\varepsilon}{T-t} < \tilde{v}(x,t) - \frac{\varepsilon}{T-t} = v(x,t)$$

kaikille $\Omega_T \ni (x,t) \neq (x_0,t_0)$, eli funktio $\phi(x,t) - \frac{\varepsilon}{T-t}$ on funktiota v alhaalta pisteessä (x_0,t_0) koskeva testifunktio. Täten

$$\Delta\phi(x_0,t_0) \leq \phi_t(x_0,t_0) - \frac{\varepsilon}{(T-t)^2} < \phi_t(x_0,t_0), \tag{4.19}$$

ja koska tämä pätee kaikille alhaalta koskeville testifunktioille, on $\tilde{v}$ aito viskositeettisuperratkaisu lämpöyhtälölle joukossa Ω_T. Lisäksi tälle funktiolle pätee $u \leq \tilde{v}$ kaikilla $(x,t) \in \partial_{par}\Omega_T$ ja $\tilde{v}(x,t) \to \infty$ kun $t \to T$. Kun tulos on saatu todistettua tämän tyyppiselle aidolle superratkaisulle kaikille $\varepsilon > 0$, saadaan haluttu vertailuperiaate raja-arvona $\varepsilon \to 0$. Määritellään funktiot

$$\Gamma_j(x,t,y,s) = u(x,t) - \tilde{v}(y,s) - \Psi_j(x,t,y,s) \tag{4.20}$$

ja

$$\Psi_j(x,t,y,s) = \frac{j}{4}|x-y|^4 + \frac{j}{2}(t-s)^2.$$

Olkoon piste (x_j, t_j, y_j, s_j) funktion Γ_j maksimi joukossa $\overline{\Omega}_T \times \overline{\Omega}_T$. Tämä piste ei voi olla joukon reunalla suurilla j, sillä kaikilla $(x,t,y,s) \in \partial_{par}\Omega_T \times \partial_{par}\Omega_T$ saadaan raja-arvoksi

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \Gamma_j(x,t,y,s) &= \lim_{j\to\infty} u(x,t) - \tilde{v}(y,s) - \Psi_j(x,t,y,s) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} -\frac{j}{4}|x-y|^4 - \frac{j}{2}(t-s)^2 = -\infty,\end{aligned}$$

jos $(x,t) \neq (y,s)$. Funktion Γ_j maksimipiste ei voi myöskään olla (x,t,x,t) millään j ja $(x,t) \in \partial_{par}\Omega_T$, koska muuten

$$\sup_{\Omega_T}(u-v) = \sup_{\partial_{par}\Omega_T}(u-v),$$

mikä on ristiriidassa antiteesin kanssa. Tästä saadaan siis pääteltyä, että $(x_j, t_j, y_j, s_j) \in \Omega_T \times \Omega_T$, kunhan valitaan tarpeeksi suuri j. Tarkastellaan erikseen kahta tapausta:

Tapaus 1: Tarkastellaan ensiksi tapausta, jossa $x_j = y_j$ äärettömän monelle $j \in \mathbb{N}$.
Olkoon j sellainen, että $x_j = y_j$. Pisteen (x_j, t_j, y_j, s_j) valinnan nojalla kaikille $(x,y,t,s) \in \overline{\Omega}_T \times \overline{\Omega}_T$ pätee

$$\begin{aligned}0 &< \Gamma_j(x_j, t_j, y_j, s_j) - \Gamma_j(x_j, t_j, y, s) \\ &= u(x_j,t_j) - \tilde{v}(y_j,s_j) - \Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j) \\ &\quad - u(x_j,t_j) + \tilde{v}(y,s) + \Psi_j(x_j,t_j,y,s),\end{aligned}$$

eli

$$\tilde{v}(y,s) \geq -\Psi_j(x_j,t_j,y,s) + \Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j) + \tilde{v}(y_j,s_j)$$

kaikille $(y,s) \in \Omega \times [0,T]$. Täten määrittelemällä

$$\phi(y,s) := -\Psi_j(x_j,t_j,y,s) + \Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j) + \tilde{v}(y_j,s_j) - \frac{j}{4}|y-y_j|^4$$

saadaan testifunktio, joka koskee funktiota $\tilde{v}$ alhaalta päin pisteessä (y_j, s_j). Tämän testifunktion derivaatoiksi saadaan

$$\begin{aligned}\phi_s(y,s) &= j(t_j - s), \\ \partial_{y_i}\phi(y,s) &= -j|x_j - y|^2(x_j^{(i)} - y^{(i)}) - j|y-y_j|(y^{(i)} - y_j^{(i)}), \\ \partial_{y_i y_k}\phi(y,s) &= 2j(x_j^{(k)} - y^{(k)})(x_j^{(i)} - y^{(i)}) - \delta_{ik}|x_j - y|^2 \\ &\quad + 2j(y^{(k)} - y_j^{(k)})(y^{(i)} - y_j^{(i)}) - \delta_{ik}|y - y_j|^2,\end{aligned}$$

joten $\Delta\phi(x_j, y_j) = 0$. Koska aiemman nojalla $\tilde{v}$ on aito viskositeettisuperratkaisu, pätee tälle alhaalta koskevalle testifunktiolle yhtälön 4.19 nojalla

$$0 < \frac{\varepsilon}{(T-s_j)^2} \leq \phi_s(y_j,s_j) - \Delta\phi(y_j,s_j) = j(t_j - s_j), \tag{4.21}$$

sillä oletuksen mukaan $x_j = y_j$. Vastaavalla päättelyllä valitaan testifunktio

$$\theta(x,t) := \Psi_j(x_j,t_j,y,s) - \Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j) + u(x_j,t_j) + \frac{j}{4}|x-x_j|^4,$$

joka koskee funktiota u ylhäältä pisteessä (x_j, t_j), $\Delta\theta(x_j, y_j) = 0$ ja täten

$$0 \geq \theta_s(x,t) - \Delta\theta(x,t) = j(t_j - s_j). \tag{4.22}$$

Nyt kuitenkin (4.21) ja (4.22) yhdistämällä saadaan ristiriita

$$0 = j(t_j - s_j) - j(t_j - s_j) > 0. \tag{4.23}$$

Tapaus 2: Toinen tapaus on se, että olemassa luku J siten, että $x_j \neq y_j$ kaikille $j > J$. Olkoon $j > J$ sellainen, että $x_j \neq y_j$. Käyttämällä Ishiin lemmaa (4.28) saadaan jokaiselle yhtälössä (4.20) määrittelemällemme funktiolle Γ_j valittua symmetriset matriisit $X_j, Y_j \in S(n)$ siten, että

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j), D_x\Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j), X_j\right) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,+}u(x_j,t_j),$$
$$\left(-\frac{\partial}{\partial s}\Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j), -D_y\Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j), Y_j\right) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,-}v(y_j,s_j).$$

Saamme Ishiin lemmasta näille matriiseille myös järjestyksen

$$X_j \leq Y_j. \tag{4.24}$$

Näissä D_x merkkaa funktion gradienttia muuttujan x suhteen ja D_y vastaavasti muuttujan y suhteen. Nyt funktion Ψ_j valinnasta seuraa, että

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\Psi_j(x,t,y,s) & = -\frac{\partial}{\partial s}\Psi_j(x,t,y,s) \\ D_x\Psi_j(x,t,y,s) & = -D_y\Psi_j(x,t,y,s), \end{cases} \tag{4.25}$$

kaikille (x,t,y,s). Koska u on subratkaisu ja $\tilde{v}$ on aito superratkaisu (erityisesti myös määritelmän 4.26 mukaan), saamme nyt yhdistämällä (4.24) ja (4.25)

$$\frac{\partial}{\partial s}\Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j) + \mathrm{Tr}(Y_j) \geq \frac{\epsilon}{(T-s_j)^2} > 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j(x_j,t_j,y_j,s_j) + \mathrm{Tr}(X_j) \leq 0$$

ja jos vähennämme ylemmästä alemman saamme, että pisteessä (x_j, t_j, y_j, s_j) pätee

$$0 < \frac{\epsilon}{(T-s_j)^2} \leq \frac{\partial}{\partial s}\Psi_j + \mathrm{Tr}(Y_j) - \frac{\partial}{\partial t}\Psi_j - \mathrm{Tr}(X_j) \leq 0.$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa yhtälöstä (4.25) ja siitä, että lämpöyhtälö on degeneroituneesti elliptinen ja saamme Ishiin lemmasta matriiseille järjestyksen.

□

Vertailuperiaatteesta seuraa suoraan myös reuna-arvo-ongelman ratkaisun yksikäsitteisyys.

Lause 4.31. *Lämpöyhtälön viskositeettiratkaisu reuna-arvo-ongelmalle* (4.2) *on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon $u, v \in C(\Omega_T)$ molemmat ongelman (4.2) viskositeettiratkaisuja. Tällöin joukon parabolisella reunalla pätee

$$u = v \text{ kaikilla } x \in \partial_{par}\Omega_T.$$

Viskositeettiratkaisuina u ja v ovat erityisesti sekä viskositeettisuper- että viskositeettisubratkaisuja, eli lausetta 4.19 voidaan käyttää molempiin suuntiin. Täten

$$\begin{cases} u \leq v \\ u \geq v \end{cases} \quad \text{kaikilla } (x,t) \in \Omega_T,$$

eli

$$u \equiv v.$$

Ratkaisu on täten yksikäsitteinen. □

Lause 4.32. *Oletetaan, että lämpöyhtälön reuna-arvo-ongelman* (4.2) *reuna-arvot $g \in C(\partial_{par}\Omega_T)$ ovat sellaiset, että ongelmalla on olemassa jatkuva heikko ratkaisu ja viskositeettiratkaisu. Tällöin viskositeettiratkaisu on sen heikko ratkaisu.*

Todistus. Nyt tämä oletettu heikko ratkaisu on 4.22 nojalla jatkuva viskositeettiratkaisu. Koska lauseen 4.31 nojalla viskositeettiratkaisut ovat yksikäsitteisiä, täytyy ainoan viskositeettiratkaisun olla tämä heikko ratkaisu. Ratkaisujen olemassaoloja käsitellään esimerkiksi töissä [CH18] ja [Col20]. □

5. Normalisoitu p-parabolinen yhtälö

Tässä ja seuraavassa luvussa tarkastellaan stokastisessa peliteoriassa esille tullutta normalisoitua p-parabolista yhtälöä

$$\begin{aligned} u_t = \Delta_p^N u &= \Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u \\ &= \Delta u + (p-2)|\nabla u|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i,x_j} u_{x_j} u_{x_i}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

missä $p > 1$. Tämä on erikoistapaus yleisemmästä luokasta epälineaarisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

$$u_t = c|\nabla u|^\kappa \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

joiden radiaalisia ratkaisuja on tarkasteltu muun muassa työssä [PV18]. Tarkasteltu yhtälö saadaan valinnoilla $\kappa = 2 - p$ ja $c = 1$ ja on saanut myös nimen peliteoreettinen p-parabolinen yhtälö alkuperänsä takia.

5.1. Ominaisuuksia.

Kuten lämpöyhtälön tapauksessa, tarkastelemamme yhtälö voidaan kirjoittaa ratkaisun u gradientin ja Hessen matriisin avulla. Näistä muodoista on helpompi nähdä mahdollisia ongelmakohtia ratkaisujen säännöllisyyden tarkastelussa.

Olkoon $u \in C^2(\Omega_T)$. Merkataan gradienttivektorin yksittäistä komponenttia $\nabla u^{(i)}$ ja Hessen matriisin yksittäistä alkiota $[D^2 u]_{i,j}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(D^2 u) + (p-2)\left\langle D^2 u \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + (p-2)|\nabla u|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} [D^2 u]_{i,j} \nabla u^{(j)} \nabla u^{(i)} \\
&= \Delta u + (p-2)|\nabla u|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i,x_j} u_{x_j} u_{x_i} = \Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u,
\end{aligned}$$

eli saamme yhtälölle (5.1) muodon

$$u_t = \mathrm{Tr}(D^2 u) + (p-2)\left\langle D^2 u \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle =: F(\nabla u, D^2 u).$$

Yhtälö voidaan myös kirjoittaa divergenssin avulla muodossa

$$u_t = |\nabla u|^{2-p} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \tag{5.2}$$

sillä käyttäen divergenssin tulosääntöä 2.14 saamme

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \nabla\left(|\nabla u|^{p-2}\right) \cdot \nabla u + |\nabla u|^{p-2} \operatorname{div}(\nabla u). \tag{5.3}$$

Tässä

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla u|^{p-2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} = \frac{p-2}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2 \right)^{\frac{p-2}{2}-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2 \right) \\
&= \frac{p-2}{2} |\nabla u|^{p-4} \left(\sum_{i=1}^{n} 2 u_{x_j} u_{x_j x_i} \right) \\
&= (p-2)|\nabla u|^{p-4} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j} u_{x_j x_i} \right),
\end{aligned}$$

joten syöttämällä tämä yhtälöön (5.3) saadaan

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^{2-p} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= |\nabla u|^{2-p} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla u|^{p-2} \right) u_{x_i} \right] + \operatorname{div}(\nabla u) \\
&= (p-2)|\nabla u|^{-2} \sum_{i=1}^{n} u_{x_j} u_{x_i} u_{x_j x_i} + \Delta u.
\end{aligned}$$

Tästä yhtälön esityksestä nähdään myös suoraan, että mikäli $p \neq 2$, ei yhtälö ole divergenssimuotoinen ja tämän takia yleisemmän ratkaisun käsitettä on lähestyttävä viskositeettiratkaisujen näkökulmasta heikkojen ratkaisujen sijasta. Mikäli $p = 2$, saadaan tavallinen lämpöyhtälö, jonka heikkoja ja viskositeettiratkaisuja tarkasteltiin luvussa 3.

5.2. **Lyhyesti peliteoriasta.** Yhtälön johtaminen pelistä on tehty tarkasti ajasta riippuvassa tapauksessa [MPR10], mutta tarkastelemme tässä pääidean siitä miten yhtälö on johdettu. Peres, Schramm, Sheffield ja Wilson todistivat työssään [PSSW08], että vastaavanlainen yhteys saadaan kahden pelaajan stokastisen pelin ja ∞-Laplacen yhtälön välille, ja tätä on sovellettu eri peleille ja yhtälöille muun muassa lähteissä [MPR12a] ja [KS09].

Tässä kyseisessä tilanteessa lähtökohtana on peli ja johdamme siitä differentiaaliyhtälön. Rakenteeltaan todistus stokastisen pelin ja differentiaaliyhtälön välillä on seuraava:

(1) Oletetaan, että meillä on aluksi tiedossa pelin säännöt, reuna-arvot ja maksufunktio. Muodostetaan molemmille pelaajille strategiafunktiot, jotka kuvaavat pelin edellisten siirtojen kuvaksi pelaajan seuraavan siirron.
(2) Muodostetaan näiden avulla todennäköisyysmitta.
(3) Lasketaan pelistrategioista ja palkintofunktiosta riippuva odotusarvo saadun todennäköisyysmitan suhteen.
(4) Muodostetaan molempien pelaajien peleille omat arvofunktiot ottamalla ristiin infinum ja supremum eri pelaajien kaikkien strategioiden yli.
(5) Todistetaan arvofunktioille dynaamisen ohjelmoinnin periaate.
(6) Etsitään osittaisdifferentiaaliyhtälö, jonka ratkaisut toteuttavat virhetermiä vailla saman dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen.
(7) Osoitetaan yllä olevia käyttäen, että pelaajien arvofunktiot suppenevat osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisuksi kun yhden siirron maksimipituus ε suppenee nollaan.

Tässä tapauksessa kyseessä on kahden pelaajan häiritty köydenvetopeli (tug-of-war with noise) rajoitetulla maksimimäärällä kierroksia ja se määritellään seuraavasti: Olkoon $N \in \mathbb{N}$ valittu kierrosten maksimimäärä ja $\varepsilon > 0$ yhden siirron maksimipituus ja asetetaan pelimerkki johonkin aloituspisteeseen $x_0 \in \Omega$. Jokaisen kierroksen alussa heitetään painotettua kolikkoa, joka antaa kruunan todennäköisyydellä α ja klaavan todennäköisyydellä β $(\alpha + \beta = 1)$. Jos saadaan kruuna heittävät pelaajat tavallista reilua kolikkoa ja kolikonheiton voittaja saa liikuttaa pelimerkkiä haluamaansa pisteeseen $x_1 \in B(x_0, \varepsilon)$. Jos alkuperäisestä kolikonheitosta saadaan klaava, siirtyy pelimerkki tasajakautuneesti satunnaiseen pisteeseen pallosta $B(x_0, \varepsilon)$. Tämän jälkeen heitetään uudestaan painotettua kolikkoa ja peli jatkuu edelleen.

Peli jatkuu tällä tavalla kunnes pelimerkki päätyy joukon Ω ulkopuolella olevalle ε leveyksiselle kaistaleelle S^ε tai kierroksia on pelattu N kappaletta. Merkataan pelin päättymisaikaa $\tau_N \in \{0, 1, \ldots, N\}$ ja pelimerkin sijaintia joukossa pelin päättymishetkellä x_{τ_N}. Pelin lopussa pelaaja 1 saa $F(x_{\tau_N}, \tau_N)$ ja pelaaja 2 saa $-F(x_{\tau_N}, \tau_N)$ pistettä. Tässä F on jokin "maksufunktio", joka kuvaa eri loppusijaintien pistearvoja kuvauksena

$$F : \underbrace{(S^\varepsilon \times \{0, \dots, N\})}_{\substack{\text{päättyi joukon} \\ \text{ulkopuolelle}}} \cup \underbrace{(\Omega \times \{N\})}_{\substack{\text{kierrokset} \\ \text{loppuivat} \\ \text{kesken}}} \to \mathbb{R}.$$

Molemmilla pelaajilla on oma pelistrategiaa kuvaava funktio S_I ja S_{II}. Siis esimerkiksi S_I määrittää mihin pelaaja 1 tulee siirtämään merkin riippuen pelin aikaisemmasta kulusta, mikäli hän voittaa kolikonheiton ja pääsee pelaamaan. Funktio S_I on siis muotoa

$$S_I(x_0, x_1, \dots, x_k) = x_{k+1} \in B(x_k, \varepsilon).$$

Vastaavasti jos pelaaja 2 voittaa kolikonheiton, hän siirtää pelimerkkiä funktion S_{II} antamaan kohtaan. Merkataan koko pelialuetta

$$H = \Omega \cup S^\varepsilon$$

ja yksittäisen pelin kulkua $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N) \in H^{N+1}$. Nyt voimme määrittää todennäköisyysmitan $\mathbb{P}^{x_0,N}_{S_I,S_{II}}$ joukolle H^{N+1}. Tämän mitan määrityksen tarkempia yksityiskohtia käsitellään lähteissä [MPR12b], [MPR12a] ja [PSSW08]. Todennäköisyysmitan avulla voimme määrittää palkintofunktiosta riippuvan odotusarvon pelin kululle

$$\mathbb{E}^{x,N}_{S_I,S_{II}}[F(x_{\tau_N}, \tau_N)] = \int_{H^{N+1}} F(x_{\tau_N}(\omega), \tau_N(\omega))\, d\mathbb{P}^{x_0,N}_{S_I,S_{II}}(\omega).$$

Nyt voimme vihdoin määritellä arvofunktiot molemmille pelaajille. Kun peliä on pelattu $h = N - k$ kierrosta pelaajan 1 arvofunktioksi määritellään

$$u_I^{\varepsilon,N}(x,k) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x,h}_{S_I,S_{II}}[F(x_{\tau_h}, k + \tau_h)]$$

ja pelaajan 2 arvofunktioksi määritellään

$$u_{II}^{\varepsilon,N}(x,k) = \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x,h}_{S_I,S_{II}}[F(x_{\tau_h}, k + \tau_h)].$$

Tässä supremum ja infimum on siis otettu kaikkien pelaajan mahdollisten strategioiden yli.

Lemma 5.1 (Dynaamisen ohjelmoinnin periaate (DPP))**.** *Molempien pelaajien arvofunktiot $u_I^{\varepsilon,N}$ ja $u_{II}^{\varepsilon,N}$ toteuttavat seuraavan yhtälön.*

$$u_I^{\varepsilon,N}(x,k) = \frac{\alpha}{2}\left\{ \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} u_I^{\varepsilon,N}(y,k+1) + \inf_{y\in B(x,\varepsilon)} u_I^{\varepsilon,N}(y,k+1) \right\} \tag{DPP}$$

$$+ \beta \fint_{B(x,\varepsilon)} u_I^{\varepsilon,N}(y,k+1)\, dy, \text{ kun } x \in \Omega \text{ ja } k < N,$$

sekä $u_I^{\varepsilon,N}(x,k) = F(x,k)$, *jos* $x \in S^\varepsilon$ *tai* $k = N$.

Tässä α ja β ovat painotetun kolikon eri puolien todennäköisyyksiä ($\alpha + \beta = 1$).

Heuristinen idea periaatteen takana on se, että jos tarkastellaan yksittäisen kierroksen todennäköisyyksiä, on kolme mahdollista tapahtumaa. Joko pelaaja 1 pääsee tekemään oma strategiansa mukaisen liikeen todennäköisyydellä $\frac{\alpha}{2}$, pelaaja 2 pääsee tekemään liikeen todennäköisyydellä $\frac{\alpha}{2}$ tai liike on satunnainen todennäköisyydellä β.

Seuraava tulos antaa (DPP) ratkaisun olemassaolon ja yksikäsitteisyyden.

Lause 5.2. *Olkoon $F : S^\varepsilon \to \mathbb{R}$ Borel-mitallinen maksufunktio. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $u : H \times \{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$, joka ratkaisee dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen* (DPP).

Todistus. Olemassaolo todistetaan [LPS14, Theorem 2.1] ja yksikäsitteisyys [LPS14, Theorem 2.2]. □

Lemma 5.3. *Olkoon $F : S^\varepsilon \to \mathbb{R}$ Borel-mitallinen maksufunktio. Tällöin pelaajien arvofunktiot u_I^ε ja u_{II}^ε ovat olemassa ja $u = u_I^\varepsilon = u_{II}^\varepsilon$, missä u on lauseen 5.2 antama yksikäsitteinen ratkaisu dynaamisen ohjelmoinnin periaatteelle.*

Todistus. Todistetaan [LPS14, Theorem 3.2]. □

Päästäksemme stokastisesta pelistä differentiaaliyhtälöön tehdään seuraava aikaskaalaus. Olkoot

$$\Gamma_\varepsilon = \left(S^\varepsilon \times]-\frac{\varepsilon^2}{2}, T]\right) \cup \left(\Omega \times (-\frac{\varepsilon^2}{2}, 0)\right)$$

ja $N : [0, T] \to \mathbb{N}$ kuvaus

$$N(t) = \left\lceil \frac{2t}{\varepsilon^2} \right\rceil,$$

missä $\lceil\ \rceil$ on kattofunktio. Asetetaan $t_0 = t$ ja $t_{k+1} = t_k - \frac{\varepsilon^2}{2}$ kaikille $k = 0, 1, \ldots, N-1$, jolloin

$$t_k = \varepsilon^2 \frac{N(t) - k}{2} + t_{N(t)}.$$

Tällä aikaskaalauksella päästään tilanteeseen, jossa yhden kierroksen ($k \to k+1$) pelatessa siirrytään aikasylinterissä ajassa $\frac{\varepsilon^2}{2}$ taaksepäin ja peli päättyy kun siirrytään aikapaikkasylinterin pohjan läpi tai päädytään sen ulkopuolelle paikkaulottuvuuden suuntaan. Olkoot

$$u_I^\varepsilon(x, t) = u_I^{\varepsilon, N(t)}(x, 0) \quad \text{ja} \quad u_{II}^\varepsilon(x, t) = u_{II}^{\varepsilon, N(t)}(x, 0)$$

ja $G : \Gamma_\varepsilon \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel-säännöllinen reuna-arvo funktio. Tästä saadaan (DPP) mukainen maksufunktio määrittämällä

$$F(x, k) := G\left(x, \varepsilon^2 \frac{N(t) - k}{2} + t_{N(t)}\right) = G(x, t_k).$$

Dynaamisen ohjelmoinnin periaate (DPP) saa aikaskaalauksella muodon

$$\begin{aligned} u_I^\varepsilon(x,t) = \frac{\alpha}{2}\Bigg\{ &\max_{y\in B(x,\varepsilon)} u(y,t-\frac{\varepsilon^2}{2}) + \min_{y\in B(x,\varepsilon)} u(y,t-\frac{\varepsilon^2}{2})\Bigg\} \\ &+ \beta \fint_{B(x,\varepsilon)} u(y,t-\frac{\varepsilon^2}{2}) \text{ kaikille } (x,t)\in\Omega_T, \\ \text{sekä } u_I^\varepsilon(x,t) = G(x,t),\ &\text{ jos } (x,t)\in\Gamma_\varepsilon. \end{aligned}$$

Yhteys normalisoituun p-paraboliseen yhtälöön (5.1) voitaisiin todistaa seuraavaa lausetta käyttämällä.

Lause 5.4. *Olkoot $u \in C(\Omega_T)$. Tällöin u on viskositeettiratkaisu yhtälölle*

$$(n+p)u_t = \Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u \tag{5.4}$$

jos ja vain jos

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{\alpha}{2}\Bigg\{ &\max_{y\in B(x,\varepsilon)} u(y,t-\frac{\varepsilon^2}{2}) + \min_{y\in B(x,\varepsilon)} u(y,t-\frac{\varepsilon^2}{2})\Bigg\} \\ &+ \beta \fint_{B(x,\varepsilon)} u(y,t-\frac{\varepsilon^2}{2}) + o(\varepsilon^2) \textit{ kaikille } (x,t)\in\Omega_T, \end{aligned}$$

missä

$$\alpha = \frac{p-2}{p+n} \quad \textit{ja} \quad \beta = \frac{2+n}{p+n}.$$

Todistus. Todistetaan [MPR10, Theorem 4]. □

Yhtälö (5.4) on tarkastelemamme normalisoitu p-parabolinen yhtälö aikaskaalauksella ja tätä kautta sen viskositeettiratkaisujen olemassaolo voidaan todistaa lauseen 5.2 avulla oletusten ollessa voimassa. Viskositeettiratkaisun määritelmä tälle yhtälölle esitetään määritelmänä 6.3.

5.3. **Radiaalinen ekvivalenssi.** Tässä luvussa tarkastelemme yhteyttä yhtälön (5.1) ja lämpöyhtälön radiaalisten ratkaisujen välillä. Osoittautuu, että normalisoidun p-parabolisen yhtälön radiaalinen ratkaisu on aina eräänlaisen lämpöyhtälön ratkaisu.

Seuraava lasku seuraa [PV18] kappaletta 3. Merkataan sekaannuksen välttämiseksi $B_T^n = B^n(0,R)\times]0,T[$, missä $B^n(0,R)$ on n-ulotteinen R-säteinen pallo. Olkoon $u \in C^{2,1}(B_T^n)$ yhtälön (5.1) radiaalinen ratkaisu joukossa B_T^n. Tällöin kaikille $x \neq 0$, joille $\nabla u(x) \neq 0$, pätee lemman 2.11 nojalla

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u \\ &= v_{rr} + \frac{n-1}{r}v_r + (p-2)v_{rr} \\ &= (p-1)\left(v_{rr} + \frac{n-1}{(p-1)r}v_r\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Määritellään vakio $d(n,p)$ siten, että

$$d(n,p) := \frac{n-1}{p-1} + 1 = \frac{n+p-2}{p-1} > 1. \tag{5.6}$$

Sijoittamalla tämän voimme kirjoittaa yhtälön (5.5) muotoon

$$v_t = (p-1)\left(v_{rr} + \frac{d-1}{r} v_r\right). \tag{5.7}$$

Tarkastellaan ensiksi tapausta, jossa $d \in \mathbb{N}$. Määritellään $w : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w(x,t) = v(|x|,t)$, joka on radiaalinen funktio määritelmänsä nojalla. Tämän lisäksi $w \in C^{2,1}(B_T^d)$, joten käyttämällä lemmaa 2.11 funktiolle w saadaan

$$\Delta^d w = v_{rr} + \frac{d-1}{r} v_r,$$

missä Δ^d on nyt d-ulotteinen Laplace operaattori. Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.7) saadaan

$$\frac{v_t}{p-1} - \left(v_{rr} + \frac{d-1}{r} v_r\right) = \frac{w_t}{(p-1)} - \Delta^d w = 0, \tag{5.8}$$

joka vastaa d-ulotteista lämpöyhtälöä, jonka aika-akselia on skaalattu vakiolla $p-1$. Täten kappaleen 3 tietojen avulla tiedämme, että yhtälön ratkaisu lauseen 3.3 nojalla pitäisi olla

$$U(x,t) = Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(p-1)t}\right) = Ct^{-\frac{n+p-2}{2(p-1)}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(p-1)t}\right) \tag{5.9}$$

kaikille $t > 0$. Tarkastetaan vielä, että aika-akselin skaalaaminen ei muuta mitään eli tämä ratkaisee saadun yhtälön edelleen kaikilla $d \in \mathbb{N}$.

Olkoot $M \in \mathbb{R}$ ja $f(x,t) = \Phi(x, Mt)$, missä Φ on lämpöyhtälön fundamentaaliratkaisu määritelmän 3.1 mukaisesti. Tällöin

$$f_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(x, Mt) = M \cdot \Phi_t(x, Mt)$$

ja

$$\Delta f(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{x_i x_i}(x, Mt) = \Delta\Phi(x, Mt),$$

eli

$$\frac{f_t(x,t)}{M} - \Delta f = \Phi_t(x, Mt) - \Delta\Phi(x, Mt) = 0.$$

Tästä valinnalla $M = p-1$ nähdään, että $\dfrac{U_t}{(p-1)} - \Delta^d U = 0$, eli että (5.9) on yhtälön (5.8) ratkaisu.

Tilanteessa $d \notin \mathbb{N}$ ei ole mahdollista käyttää lemmaa 2.11, mutta yhtälöä (5.7) voidaan silti tarkastella yksiulotteisena lämpöyhtälönä ja osoittautuu, että funktio $V : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $V(r,t) = U(|x|,t)$ on yhtälön ratkaisu. Tämä saadaan lähes samalla laskulla, sillä

$$V_t = Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4(p-1)t}\right)\left[\frac{r^2}{4(p-1)t^2} - \frac{d}{2t}\right],$$
$$V_r = Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4(p-1)t}\right)\left(\frac{-r}{2(p-1)t}\right)$$

ja

$$V_{rr} = Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4(p-1)t}\right)\left[\left(\frac{-r}{2(p-1)t}\right)^2 - \frac{1}{2(p-1)t}\right].$$

Syöttämällä nämä yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
&(p-1)[V_{rr} + \frac{d-1}{r}V_r] \\
&\quad = Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4(p-1)t}\right)\left[\frac{r^2}{4(p-1)t^2} - \frac{1}{2t} + \frac{d-1}{r}\left(\frac{-r}{2t}\right)\right] \\
&\quad = Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4(p-1)t}\right)\left[\frac{r^2}{4(p-1)t^2} - \frac{d}{2t}\right] = V_t,
\end{aligned}$$

eli V on yhtälön klassinen ratkaisu.

Yhteys yhtälöiden välillä ei kuitenkaan päde ainoastaan fundamentaaliratkaisun muotoisille ratkaisuille. Seuraavassa luvussa osoitetaan, että yhtälön (5.1) kaikki radiaaliset viskositeettiratkaisut ovat ekvivalentteja laskusta saamamme yhtälön (5.7) heikkojen ratkaisujen jatkuvien edustajien kanssa.

6. Ekvivalenssituloksen todistus

Tässä viimeisessä luvussa tarkoituksenamme on todistaa ekvivalenssi normalisoidun p-parabolisen yhtälön radiaalisien viskositeettiratkaisujen ja yhtälön (5.7) heikkojen ratkaisujen välille. Luvun todistukset ovat erikoistapauksia [PV18] liitteen todistuksista valinnalla $q = 2$. Esittelemme ennen tuloksia versiot heikkojen ratkaisujen ja viskositeettiratkaisujen määritelmistä näille kahdelle yhtälölle.

Määritelmä 6.1. *Olkoot $0 < T < \infty$, $0 < R < \infty$ ja funktio u siten, että $u, u_r \in C(]-R,R[\times]0,T[)$ ja $u_r(0,t) = 0$. Tällöin u on jatkuva heikko ratkaisu yhtälölle*

$$u_t = (p-1)\left(u_{rr} + \frac{d-1}{r}u_r\right), \tag{5.7}$$

jos kaikille $\varphi \in C_0^\infty(]-R,R[\times]0,T[)$ pätee

$$\int_{]-R,R[\times]0,T[} u\varphi_t \, dz = \int_{]-R,R[\times]0,T[} (p-1)u_r\varphi_r \, dz,$$

missä $dz = |r|^{d-1}\, dr\, dt$.

Funktio u *on heikko subratkaisu, jos kaikille* $\varphi \in C_0^\infty(]-R,R[\times]0,T[), \varphi \geq 0$ *pätee*

$$\int_{]-R,R[\times]0,T[} u\varphi_t\, dz \geq \int_{]-R,R[\times]0,T[} (p-1)u_r\varphi_r\, dz,$$

ja u *on heikko superratkaisu, jos* $-u$ *on heikko subratkaisu.*

Kun normalisoitu p-parabolinen yhtälö kirjoitetaan divergenssin avulla yhtälön (5.2) mukaisesti, on helppo nähdä, että ongelmakohtia yhtälön tarkastelussa ovat potentiaalisten ratkaisujen gradienttien nollakohdat. Tämän takia yhtälön viskositeettiratkaisut on määriteltävä puolijatkuvan jatkeen avulla. Taustaa tämän määritelmän takana on saatavilla tarkemmin lähteistä [CGG91] ja [ES91].

Määritelmä 6.2. *Funktio* $u : \Omega_T \to]-\infty,\infty[$ *on viskositeettiratkaisu yhtälölle* (5.1) *jos*

(i) $u \in C(\Omega_T)$,
(ii) *Kaikille* $\varphi \in C^{2,1}(\Omega_T)$, *jotka koskevat funktiota* u *alhaalta pisteessä* $(x_0,t_0) \in \Omega_T$, *pätee*

$$\begin{cases} \varphi_t(x_0,t_0) \geq \Delta\varphi(x_0,t_0) + (p-2)\Delta_\infty^N\varphi(x_0,t_0), & \text{jos } \nabla\varphi(x_0,t_0) \neq 0 \\ \varphi_t(x_0,t_0) \geq \Delta\varphi(x_0,t_0) + \lambda_{\min}((p-2)D^2\varphi(x_0,t_0)), & \text{jos } \nabla\varphi(x_0,t_0) = 0, \end{cases}$$

(iii) *Kaikille* $\phi \in C^{2,1}(\Omega_T)$, *jotka koskevat funktiota* u *ylhäältä pisteessä* $(x_0,t_0) \in \Omega_T$, *pätee*

$$\begin{cases} \phi_t(x_0,t_0) \leq \Delta\phi(x_0,t_0) + (p-2)\Delta_\infty^N\phi(x_0,t_0), & \text{jos } \nabla\phi(x_0,t_0) \neq 0 \\ \phi_t(x_0,t_0) \geq \Delta\phi(x_0,t_0) + \lambda_{\max}((p-2)D^2\phi(x_0,t_0)), & \text{jos } \nabla\phi(x_0,t_0) = 0. \end{cases}$$

Näissä $\lambda_{\min}((p-2)D^2\phi(x_0,t_0))$ *ja* $\lambda_{\max}((p-2)D^2\phi(x_0,t_0))$ *ovat matriisin* $(p-2)D^2\phi(x_0,t_0)$ *pienin ja suurin ominaisarvo.*

Tätä määritelmää on mahdollista yksinkertaistaa pienentämällä sallittujen testifunktioiden luokkaa muuttamatta ratkaisujen luokkaa. Osoittautuu että mikäli testifunktion gradientti on nolla tarkastelupisteessä, on sen Hessen matriisi pisteessä myös identtisesti nolla, jolloin sen kaikki ominaisarvot ovat nollia. Käytämme viskositeettiratkaisulle määritelmänä tätä yksinkertaisempaa versiota ja todistamme näiden yhtäpitävyyden työn lopuksi lemmassa 6.10.

Määritelmä 6.3. *Funktio* $u \in C(\Omega_T)$ *on viskositeettiratkaisu yhtälölle* (5.1) *jos jokaiselle pisteessä* $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ *alhaalta päin koskevalle testifunktiolle* $\varphi \in C^2(\Omega_T)$ *pätee pisteessä* (x_0,t_0)

$$\begin{cases} \varphi_t \geq \Delta\varphi + (p-2)\Delta_\infty^N\varphi, & \text{jos } \nabla\varphi(x_0,t_0) \neq 0 \\ \varphi_t(x_0,t_0) \geq 0, & \text{jos } \nabla\varphi(x_0,t_0) = 0 \text{ ja } D^2\varphi(x_0,t_0) = 0, \end{cases}$$

ja jokaiselle ylhäältä koskevalle testifunktiolle vastaavat ehdot pätevät epäyhtälöt käännettynä. Kutsumme funktiota viskositeettisuperratkaisuksi, jos ehdot pätevät alhaalta koskeville testifunktioille, ja viskositeettisubratkaisuksi, jos ehdot pätevät ylhäältä koskeville testifunktioille.

Seuraavan lauseen todistukseen tarvitsemme yksiulotteisen yhtälön heikoille ratkaisuille sopivaa vertailuperiaatetta.

Lause 6.4. *Olkoot u heikko subratkaisu ja v heikko superratkaisu määritelmän 6.1 mukaan siten, että lisäksi $u, v, u_r, v_r \in C([-R, R] \times [0, T])$. Tällöin jos $u(x, t) \geq v(x, t)$ kaikilla $(x, t) \in \partial_{par}((-R, R) \times (0, T))$, niin*

$$u(x, t) \geq v(x, t) \text{ kaikilla } (x, t) \in (-R, R) \times (0, T).$$

Vertailuperiaate on muotoiltu [PV18, Lemma A2] ja sitä emme todista tarkasti tässä. Todistus on erikoistapaus [PV18, Lemma A1] todistuksesta ja rakenteeltaan vastaa lauseen 4.12 todistusta.

Seuraava lause on ekvivalenssitulos näiden kahden ratkaisun käsitteen välillä. Tulos todistetaan tässä työssä lisäoletuksella $n = 3$ epäyhtälöiden käsittelyn helpottamiseksi ja yleistä ulottuvuutta käsitellään lyhyesti todistuksen jälkeen.

Lause 6.5. *Olkoot $B_T \subset \mathbb{R}^3 \times]0, T[$ ja $u \in C(B_T)$ radiaalinen funktio. Tällöin u on 3-ulotteinen viskositeettiratkaisu normalisoidulle p-paraboliselle yhtälölle (5.1) määritelmän 6.3 mukaisesti jos ja vain jos funktio $v(r, t) := u(re_1, t)$, $r \in]-R, R[$, on määritelmän 6.1 mukaisesti 1-ulotteinen heikko ratkaisu yhtälölle (5.7).*

Todistuksen lukemisen helpottamiseksi jaetaan ekvivalenssin suunnat omiksi lauseikseen ja todistetaan nämä suunnat erikseen.

Lause 6.6. *Olkoot $B_T \subset \mathbb{R}^3 \times]0, T[$, $u \in C(B_T)$ radiaalinen funktio. Tällöin jos $v(r, t) := u(re_1, t)$, $r \in]-R, R[$ on 6.1 mukaisesti heikko ratkaisu yhtälölle (5.7), niin tällöin u on viskositeettiratkaisu yhtälölle (5.1).*

Todistus. Todistus tehdään näyttämällä erikseen, että u on sekä sub- että superratkaisu yhtälölle (5.1). Molemmat todistukset tehdään samalla tavalla antiteesillä olettamalla, että on olemassa viskositeettiratkaisun määritelmän ehdot rikkova testifunktio ja näyttämällä, että tästä seuraa ristiriita. Ristiriita saadaan samalla idealla kuin lämpöyhtälön tapauksessa lauseessa 4.22.

Valitaan alhaalta koskeva testifunktio $\varphi \in C^2(B_T)$ siten, että se on ristiriidassa määritelmän 6.3 kanssa, eli pätee

$$\begin{cases} \varphi(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) \\ \varphi(x, t) < u(x, t) \text{ kaikille } (x, t) \neq (x_0, t_0) \end{cases} \tag{6.1}$$

ja määritelmää vastoin

$$\begin{cases} \varphi_t(x_0,t_0) < \Delta\varphi(x_0,t_0) + (p-2)\Delta_\infty^N\varphi(x_0,t_0), & \text{jos } \nabla\varphi(x_0,t_0) \neq 0 \\ \varphi_t(x_0,t_0) < 0, & \text{jos } \nabla\varphi(x_0,t_0) = 0. \end{cases}$$

Todistamme tässä ainoastaan tapauksen, jossa $\nabla\varphi(x_0,t_0) \neq 0$ ja $x_0 \neq 0$. Muiden tapausten todistus löytyy [PV18, Proposition A.3]. Olkoon $r > 0$ ja siirrytään tarkastelemaan tilannetta pallokoordinaatistoon. Koordinaatiston valinnalla ei ole vaikutusta funktion derivaattaan tarkastelupisteessä, joten voidaan asettaa koordinaatisto siten, että karteesisen pisteen (x_0,t_0) koordinaatit ovat $(\zeta_0,t_0) := (r,0,0,t)$ eli asetetaan kulmamuuttujien nollakohdat origosta pisteeseen kulkevan suoran suuntaisiksi. Nyt voidaan käyttää Laplacen operaattorille sen esitystä pallokoordinaateissa. Saadaan

$$\begin{aligned} &\varphi_t < \Delta\varphi + (p-2)\Delta_\infty^N\varphi \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varphi_r) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} + (p-2)\Delta_\infty^N\varphi \\ &= \frac{2}{r}\varphi_r + \varphi_{rr} + \frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} + (p-2)\Delta_\infty^N\varphi. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Koska u on radiaalinen, on se pallokoordinaateissa kirjoitettuna vakiofunktio kulmamuuttujien θ ja ω suhteen ja tätä tietoa voidaan hyödyntää derivaattojen arvioimisessa tarkastelupisteen (ζ_0,t_0) läheisyydessä. Muuttujan θ suuntaan u on vakiofunktio, joten sitä alhaalta koskevalle $\varphi \in C^2$ pätee pisteessä

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\zeta_0,t_0) = \frac{\partial u}{\partial\theta}(\zeta_0,t_0) = 0.$$

Alhaalta koskemisen nojalla funktiolla $u-\varphi$ on lokaali minimi pisteessä (ζ_0,t_0), eli käyttämällä toisen kertaluvun derivaatan testiä saadaan

$$\frac{\partial^2(u-\varphi)}{\partial\theta^2}(\zeta_0,t_0) > 0,$$

eli

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}(\zeta_0,t_0) < 0.$$

Täysin vastaavasti u on vakio myös muuttujan ω suuntaan, jolloin vastaavasti toisen derivaatan testillä saadaan

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}(\zeta_0,t_0) < 0.$$

Toisien derivaattojen negatiivisuutta käyttäen voidaan arvioida ylläolevan lausekkeen (6.2) neljäs ja viides termi pois negatiivisena. Arvioidaan vielä erikseen termiä

$$\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta,\omega,t).$$

Koska ollaan kiinnostuneita ainoastaan muuttujan θ suuntaisesta muutoksesta jätetään merkintöjen helpottamiseksi seuraavassa laskussa muut muuttujat merkitsemättä, eli merkitään $\varphi(\theta, t) := \varphi(r, \theta, \omega, t)$. Nyt koordinaatiston valinnan ansiosta, jos ollaan pisteestä (ζ_0, t_0) jonkin pienen kulman $\tilde{\theta}$ etäisyydellä, saadaan Taylorin sarjalla sinille, kosinille ja derivaatalle $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ arviot

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\tilde{\theta})}{r^2 \sin(\tilde{\theta})} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\tilde{\theta}, t_0) &= \frac{1 - o(\tilde{\theta})}{r^2\Big(\tilde{\theta} - o(\tilde{\theta}^2)\Big)} \left(\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(0, t_0)}_{=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}(0, t_0) \tilde{\theta}^2 + o(\tilde{\theta}^2) \right) \\ &= \frac{1 - o(\tilde{\theta})}{r^2 \tilde{\theta}\Big(1 - o(\tilde{\theta})\Big)} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}(0, t_0) \tilde{\theta}^2 + o(\tilde{\theta}^2) \right) \\ &\leq \frac{C}{r^2} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}(0, t_0)}_{<0} \tilde{\theta} + o(\tilde{\theta}) \right) \leq 0,\end{aligned}$$

missä C on positiivinen vakio. Merkintä $o(\tilde{\theta})$ kuvaa jotakin funktiota $g(r, \theta, \omega, t)$, jolle pätee

$$\lim_{\tilde{\theta} \to 0} \frac{g(r, \tilde{\theta}, \omega, t)}{\tilde{\theta}} = 0,$$

ja $o(\tilde{\theta}^2)$ on määritelty vastaavasti. Näiden lisäksi pisteessä (ζ_0, t_0) pätee

$$\Delta_\infty^N \varphi(\zeta_0, t_0) = \varphi_{rr}(\zeta_0, t_0).$$

Tämä yhtäsuuruus todistetaan [Sil19, Lemma 3.3], mutta heuristisesti tämä johtuu siitä, että pisteessä muualle kuin säteen suuntaan osoittavien derivaattojen on oltava nollia. Jos jokin näistä ei ole nolla, ei φ voi pysyä pisteen ympäristössä funktion u alapuolella, sillä tarkasteltaessa pallokoordinaateissa u on vakio kaikkien muiden muuttujien suhteen.

Kaikki arviot yhdistämällä saadaan, että

$$\begin{aligned}\varphi_t(\zeta_0, t_0) &< \varphi_{rr}(\zeta_0, t_0) + \frac{2}{r} \varphi_r(\zeta_0, t_0) + (p-2)\varphi_{rr}(\zeta_0, t_0) \\ &= (p-1)\varphi_{rr}(\zeta_0, t_0) + \frac{2}{r} \varphi_r(\zeta_0, t_0) \\ &= (p-1)\Big(\varphi_{rr}(\zeta_0, t_0) + \frac{d-1}{r} \varphi_r(\zeta_0, t_0) \Big),\end{aligned}$$

missä $d(n, p) = \frac{n-1}{p-1} + 1$ kuten aiemmin, eli tässä tilanteessa $d = \frac{2}{p-1} + 1$. Nyt, koska $\varphi \in C^2$ ja edellä saatu epäyhtälö on aito, pätee epäyhtälö jossain pisteen (x_0, t_0) ympäristössä, eli

$$\varphi_t(x, t) < (p-1)\Big(\varphi_{rr}(x, t) + \frac{d-1}{r} \varphi_r(x, t) \Big) \tag{6.3}$$

kaikille $(x, t) \in U$, missä U on jokin pisteen (x_0, t_0) avoin ympäristö.

Siirrytään yksiulotteiseen tapaukseen valitsemalla funktio $\phi(r,t) = \varphi(r\frac{x_0}{|x_0|}, t)$ ja joukko $Q = (|x_0| - \delta, |x_0| + \delta) \times (t_0 - \delta, t_0)$. Valitaan vakio δ riittävän pieneksi epäyhtälöä varten ja erityisesti siten, että $\delta < |x_0|$. Tällöin käyttämällä epäyhtälöä (6.3) saadaan, että

$$\phi_t(r,t) < (p-1)\Big(\phi_{rr}(r,t) + \frac{d-1}{r}\phi_r(r,t)\Big) \tag{6.4}$$

kaikille $(r,t) \in Q$. Olkoon $\psi \in C_0^\infty(Q)$ testifunktio ja dz kuten määritelmässä 6.1. Tällöin saadaan

$$\int_Q \phi\psi_t \, dz = -\int_Q \phi_t \psi \, dz > -\int_Q (p-1)\Big(\phi_{rr} + \frac{d-1}{r}\phi_r\Big)\psi \, dz,$$

missä ensiksi osittaisintegroidaan aikaderivaatta funktioon ϕ lemman 4.3 mukaisesti ja sitten käytetään epäyhtälöä (6.4). Tässä vakion δ valinnan ansiosta $dz = r^{d-1}\, dr\, dt$, joten purkamalla sulkeet saadaan

$$\int_Q \phi\psi_t \, dz > (p-1)\Big[-\int_Q \phi_{rr}\psi r^{d-1}\, dr\, dt - (d-1)\int_Q \frac{\phi_r\psi}{r} r^{d-1}\, dr\, dt\Big]. \tag{6.5}$$

Käsitellään ensimmäistä integraalia osittaisintegroimalla yksi funktion ϕ derivaatoista funktioon ψr^{d-1} ja sieventämällä se muotoon

$$\begin{aligned}
-\int_Q \phi_{rr}\psi r^{d-1}\, dr\, dt &= \int_Q \phi_r\Big(\psi_r r^{d-1} + \psi(d-1)r^{d-2}\Big)\, dr\, dt \\
&= \int_Q \phi_r\psi_r r^{d-1}\, dr\, dt - (d-1)\int_Q \phi_r\psi r^{d-2}\, dr\, dt \\
&= \int_Q \phi_r\psi_r \, dz - (d-1)\int_Q \frac{\phi_r\psi}{r}\, dz.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä takaisin epäyhtälöön (6.5) saadaan

$$\begin{aligned}
\int_Q \phi\psi_t \, dz &> (p-1)\Big[\int_Q \phi_r\psi_r\, dz - (d-1)\int_Q \frac{\phi_r\psi}{r}\, dz + (d-1)\int_Q \frac{\phi_r\psi}{r}\, dz\Big] \\
&= \int_Q (p-1)\phi_r\psi_r\, dz
\end{aligned}$$

eli määritelmän 6.1 nojalla ϕ on heikko ratkaisu yhtälölle 5.1 joukossa Q. Valitaan seuraavaksi vakio $m > 0$ niin pieneksi, että $V := \{\phi + m > u\} \Subset Q$ ja $\phi_r \neq 0$ joukossa V. Tarkastellaan miksi tällainen m voidaan aina valita.

Ensinnäkin oletuksesta $\phi_r(|x_0|, t_0) \neq 0$ ja derivaatan jatkuvuudesta seuraa, että on olemassa pisteen $(|x_0|, t_0)$ avoin ympäristö W siten, että

$$\phi_r(r,t) \neq 0, \text{ kaikille } (r,t) \in W.$$

Funktion φ valinnan nojalla $\phi(|x_0|, t) = u(x_0, t)$ ja $\phi \in C(Q)$, joten jatkuvuuden nojalla funktiota voidaan nostaa funktion u yläpuolelle niin vähän, että yli menevä joukko sisältyy mihin tahansa pisteen $(|x_0|, t_0)$ ympäristöön, eli erityisesti ympäristöön $U \cap W$. Tämän lisäksi, koska joukon reunalla $\phi(r,t) < u(r\frac{x_0}{|x_0|}, t)$, voidaan luku m myös valita niin pieneksi, että

$\phi(r,t)+m \leq u(r\frac{x_0}{|x_0|},t)$ joukossa $\partial_{par}Q$. Tällöin $\phi+m$ on edelleen subratkaisu, sillä

$$\begin{aligned}(\phi+m)_t &= \phi_t\\ F(\nabla(\phi+m),D^2(\phi+m)) &= (p-1)\bigg((\phi+m)_{rr}+\frac{d-1}{r}(\phi+m)_r\bigg)\\ &= (p-1)\bigg(\phi_{rr}+\frac{d-1}{r}\phi_r\bigg) = F(\nabla\phi,D^2\phi),\end{aligned}$$

eli

$$(\phi+m)_t < F(\nabla(\phi+m),D^2(\phi+m)).$$

Nyt koska u on heikko superratkaisu ja funktio $\phi+m$ on heikko subratkaisu jokaisella m, saadaan vertailuperiaatteen 6.4 nojalla

$$\phi(r,t)+m < u\bigg(r\frac{x_0}{|x_0|},t\bigg) \text{ joukossa } V,$$

eli erityisesti $\varphi(x_0,t_0)+m = \phi(|x_0|,t_0)+m \leq u(x_0,t_0)$, mikä on ristiriidassa yhtälön (6.1) kanssa. Täten tällaista alhaalta koskevaa testifunktiota ei täten voi olla olemassa. Vastaava todistus vastakkaisilla epäyhtälöillä antaa, että ylhäältä koskevaa määritelmän 6.3 kanssa ristiriidassa olevaa testifunktiota ei myöskään ole olemassa. Täten u on viskositeettiratkaisu yhtälölle (5.7). $\square$

Lauseen toista suuntaa varten tarvitsemme vielä vertailuperiaatteen normalisoidun p-parabolisen yhtälön viskositeettiratkaisujen välille.

Lause 6.7. *Olkoon u ja v yhtälön (5.5) viskositeettiratkaisuja siten, että $u \leq v$ kaikilla $(x,t) \in \partial_{par}\Omega_T$. Tällöin*

$$u \leq v \textit{ kaikilla } (x,t) \in \Omega_T$$

Todistus. Todistus on yksinkertaistettu versio [PR16] lemman 6.2 todistuksesta ja rakenteeltaan mukailee [MPR10, Lemma 2] todistusta, sekä jo aiemmin todistamaamme lauseen 4.30 todistusta. Tehdään aluksi antiteesi, että

$$\sup_{\Omega_T}(u-v) = (u-v)(x_0,t_0) > \delta$$

jollekin $\delta > 0$. Kuten aiemmin vertailuperiaatteen 4.30 todistuksessa, koska u on viskositeettiratkaisu yhtälölle, on

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \frac{\varepsilon}{T-t}$$

aito viskositeettisubratkaisu tarkastellulle yhtälölle (5.5). Valitaan ε niin pieneksi, että $(\tilde{u}-v)(x_0,t_0) \geq \delta$. Määritellään funktiot

$$\Psi_j(x,t,y,s) = \tilde{u}(x,t) - v(y,s) - \frac{j}{4}|x-y|^4 - \frac{j}{2}|t-s|^2$$

ja olkoon (x_j, t_j, y_j, s_j) funktion Ψ_j maksimipiste suljetussa joukossa $\overline{\Omega}_T \times \overline{\Omega}_T$. Koska antiteesin nojalla (x_0, t_0) on funktion $\tilde{u} - v$ lokaali maksimipiste, saadaan vastaavalla perustelulla kuin lauseen 4.30 todistuksessa, että

$$(x_j, t_j, y_j, s_j) \to (x_0, t_0, x_0, t_0), \text{ kun } j \to \infty$$

ja $(x_j, t_j), (y_j, s_j) \in \Omega_T$ kaikille $j > J$ jollekin $J \in \mathbb{N}$. Käsitellään erikseen kaksi mahdollista tapausta.

Tapaus 1: Oletetaan ensiksi, että $x_j = y_j$ äärettömän monelle j. Olkoon $j \in \mathbb{N}$ sellainen, että $x_j = y_j$ ja määritellään funktio

$$\psi(y, s) = \frac{j}{4}|x_j - y|^4 + \frac{j}{2}(t_j - s)^2 + C_1,$$

missä $C_1 = v(y_j, s_j) - \frac{j}{2}(t_j - s_j)^2$. Tällöin funktiolla $v(y, s) + \psi(y, s)$ on pisteessä (y_j, s_j) lokaali minimi, sillä

$$v(y, s) + \psi(y, s) = -\Psi_j(x_j, t_j, y, s) + \tilde{u}(x_j, t_j) + C_1$$

ja piste (x_j, t_j, y_j, s_j) on funktion Ψ_j maksimipiste. Täten koska $x_j = y_j$ pätee derivoinnin nojalla pisteessä

$$\begin{aligned}
\psi_s(y_j, s_j) &= -j(t_j - s_j), \\
\partial_{y_i}\psi(y_j, s_j) &= j|x_j - y_j|^2(x_j^{(i)} - y_j^{(i)}) = 0, \\
\partial_{y_i y_k}\psi(y_j, s_j) &= -2j(x_j^{(k)} - y_j^{(k)})(x_j^{(i)} - y_j^{(i)}) - \delta_{ik}|x_j - y_j|^2 = 0,
\end{aligned}$$

eli pisteessä $\nabla\psi(y_j, s_j) = 0$ ja $D^2\psi(y_j, s_j) = 0$. Täten ψ on yksi funktiota v ylhäältä pisteessä (y_j, s_j) koskevista testifunktioista, joten sen aikaderivaatalle pätee määritelmän nojalla

$$-j(t_j - s_j) = \psi_s(y_j, s_j) \leq 0. \tag{6.6}$$

Määritellään funktio

$$\phi(x, t) = -\frac{j}{4}|x - y_j|^4 - \frac{j}{2}(t - s_j)^2 + C_2,$$

missä $C_2 = \tilde{u}(x_j, t_j) + \frac{j}{2}(t_j - s_j)^2$. Nyt funktiolla $\tilde{u}(x, t) - \phi(x, t)$ on lokaali maksimi pisteessä (x_j, t_j), sillä

$$\tilde{u}(x, t) + \phi(x, t) = \Psi_j(x, t, y_j, s_j) - v(y_j, s_j) + C_2$$

ja piste (x_j, t_j, y_j, s_j) on funktion Ψ_j maksimipiste. Vastaavalla laskulla kuin yllä saadaan, että

$$\nabla\phi(x_j, t_j) = 0 \text{ ja } D^2\phi(y_j, s_j) = 0.$$

Nyt koska ϕ on yksi funktiota $\tilde{u}$ alhaalta koskeva testifunktio ja koska $\tilde{u}$ on aito viskositeettisubratkaisu, saadaan määritelmästä

$$-j(t_j - s_j) = \phi_t(x_j, t_j) \leq -\frac{\varepsilon}{(T - t_j)^2}, \tag{6.7}$$

eli nyt vähentämällä toisistaan (6.6) ja (6.7) saadaan

$$0 = j(t_j - s_j) - j(t_j - s_j) \geq \frac{\varepsilon}{(T - t_j)^2} > 0$$

eli päädyttiin ristiriitaan.

Tapaus 2: Toinen tapaus on se, että voidaan valita $J \in \mathbb{N}$ siten, että $x_j \neq y_j$ kaikille $j > J$. Ishiin lemman 4.28 nojalla on jokaiselle $j > J$ olemassa matriisit X_j ja Y_j siten, että $X_j - Y_j$ on positiivisesti semidefiniitti ja

$$(j(t_j - s_j), j|x_j - y_j|^2(x_j - y_j), X_j) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,-}u(x_j, t_j)$$
$$(j(t_j - s_j), j|x_j - y_j|^2(x_j - y_j), Y_j) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,+}v(y_j, s_j)$$

Nyt koska v on viskositeettiratkaisu ja $\tilde{u}$ on aito subratkaisu saadaan käyttämällä määritelmän 4.26 muotoilua molemmille viskositeettiratkaisulle ja lemman 5.1 muotoa normalisoidulle yhtälölle saadaan, että jettien alkioiden tulisi toteuttaa epäyhtälöt samaan suuntaan eli

$$-\frac{\varepsilon}{(T - t_j)^2} \geq j(t_j - s_j) + \mathrm{Tr}(X_j) + (p-2)\left\langle X_j \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|} \right\rangle$$

ja

$$0 \leq j(t_j - s_j) + \mathrm{Tr}(Y_j) + (p-2)\left\langle Y_j \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|} \right\rangle.$$

Vähentämällä alemmasta yhtälöstä ylempi saadaan

$$\begin{aligned} 0 <& \frac{\varepsilon}{(T - t_j)^2} \leq -j(t_j - s_j) + j(t_j - s_j) + \mathrm{Tr}(Y_j) - \mathrm{Tr}(X_j) \\ &+ (p-2)\left[\left\langle Y_j \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|} \right\rangle - \left\langle X_j \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|} \right\rangle\right] \\ &= \mathrm{Tr}(Y_j - X_j) + (p-2)\left\langle (Y_j - X_j) \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|} \right\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Jos $p \geq 2$, niin viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että Ishiin lemmasta saaduille matriiseille pätee

$$X_j \leq Y_j,$$

eli erityisesti $\mathrm{Tr}(Y_j - X_j) \leq 0$ ja neliömuoto $\langle (Y_j - X_j)z, z\rangle \leq 0$ kaikille $z \in \mathbb{R}^n$.

Jos $2 > p > 1$, niin saadaan arvio

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(Y_j - X_j) + (p-2)\left\langle (Y_j - X_j) \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|} \right\rangle \\ &\leq \sum_{\lambda_i \in \sigma} \lambda_i + (p-2)\lambda_{\min} = \sum_{\substack{\lambda_i \in \sigma \\ \lambda_i \neq \lambda_{\min}}} \lambda_i + (p-1)\lambda_{\min} \leq 0, \end{aligned}$$

missä $\lambda_{\min}$ on erotusmatriisin pienin ominaisarvo ja σ on sen kaikkien ominaisarvojen joukko. Molemmissa tapauksissa päädyttiin ristiriitaan eli täten pistettä (x_0, t_0) ei voi olla olemassa eli $u \leq v$ kaikilla $(x, t) \in \Omega_T$.

□

Lause 6.8. *Olkoot $B_T \subset \mathbb{R}^3 \times]0, T[$ ja $u \in C(B_T)$ radiaalinen funktio. Tällöin jos u on 3-ulotteinen viskositeettiratkaisu yhtälölle (5.1), niin tällöin*

$v(r,t) := u(re_1,t)$, $r \in]-R,R[$ on 1-ulotteinen heikko ratkaisu yhtälölle (5.7) määritelmän 6.1 mukaisesti.

Todistus. Oletetaan, että $u \in C(B_T)$ on radiaalinen viskositeettiratkaisu yhtälölle (5.1) ja että funktion u määrittämillä reuna-arvoilla on olemassa 6.1 mukaisesti jokin heikko ratkaisu $v(r,t)$. Tällöin lauseen 6.6 nojalla $\tilde{u}(re_1,t) := v(r,t)$ on viskositeettiratkaisu yhtälölle 5.1.

Nyt siis molemmat u ja $\tilde{u}$ ovat viskositeettiratkaisuja tarkastellulle yhtälölle ja $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$ kaikilla $(x,t) \in \delta_{par} B_T$. Tällöin vertailuperiaatteen 6.7 nojalla $\tilde{u} \leq u$ ja $u \leq \tilde{u}$ joukossa B_T eli täten

$$u(re_1,t) = \tilde{u}(re_1,t) = v(r,t),$$

joukossa B_T. Heikon ratkaisun $v(r,t)$ olemassaoloa emme todista tässä. □

Lauseen 6.5 todistus: Yhdistämällä lauseiden 6.6 ja 6.8 tulokset saadaan lause 6.5. □

Huomautus 6.9. *Yleiselle ulottuvuudelle n lauseen 6.5 todistus on suurelta osalta sama. Heikon ratkaisun todistaminen viskositeettiratkaisuksi tehdään vastaavasti olettamalla, että on olemassa määritelmän 6.3 kanssa ristiriidassa oleva testifunktio ja näyttämällä, että tästä testifunktiosta voidaan muodostaa yksiulotteinen heikko ratkaisu jossain kosketuspisteen avoimessa ympäristössä. Yleisessä ulottuvuudessa epäyhtälöissä ei voida käyttää samoja arvioita, mutta epäyhtälö (6.3) saadaan silti muotoon*

$$\varphi_t(\zeta_0,t_0) < (p-1)\Big(\varphi_{rr}(\zeta_0,t_0) + \frac{d-1}{r}\varphi_r(\zeta_0,t_0)\Big),$$

missä $d(n,p) = \frac{n-1}{p-1} + 1$. Ristiriita saadaan nostamalla muodostettua heikkoaratkaisua ϕ vakiolla ja käyttämällä vertailuperiaatetta 6.4.

Todistamme vielä työn lopuksi, että määritelmässä 6.3 tehdyt oletukset testifunktioista eivät muuta ratkaisun käsitettä, eli että määritelmä 6.3 ja määritelmä 6.2 antavat samat ratkaisut tarkastellulle yhtälölle. Huomaa alla, että jos $\nabla\varphi(x_0,t_0) = 0$ ja $D^2\varphi(x_0,t_0) \neq 0$, niin testifunktiolta φ ei vaadita mitään.

Lemma 6.10. *Funktio $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ on viskositeettiratkaisu yhtälölle (5.1) määritelmän 6.2 mukaisesti jos ja vain jos se on viskositeettiratkaisu yhtälölle määritelmän 6.3 mukaisesti.*

Todistus. Todistus seuraa [MPR10, Lemman 2] todistusta. Vastaava testifunktioiden reduktio todistetaan paraboliselle ∞-Laplacen yhtälölle [JK06, Lemma 3.2]. Tehdään aluksi antiteesi, että on olemassa funktio u, jota alhaalta ja ylhäältä koskevat testifunktiot toteuttavat ylläolevan väitteen jokaisessa pisteessä, mutta joka ei silti ole viskositeettiratkaisu yhtälölle (5.1) määritelmän 6.2 mukaisesti.

Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että määritelmään ristiriidassa oleva testifunktio $\phi \in C^2(\Omega_T)$ koskee funktiota u alhaalta päin pisteessä $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ eli pätee

$$\begin{cases} u(x_0,t_0) = \phi(x_0,t_0) \\ u(x,t) > \phi(x,t) \qquad \text{kaikille } (x,t) \in \Omega_T, (x,t) \neq (x_0,t_0). \end{cases}$$

Epäyhtälöt kääntämällä saadaan vastaava todistus ylhäältä koskevalle testifunktiolle. Jotta tämän funktion olemassaolo ei olisi ristiriidassa lemman oletusten kanssa on oltava

$$\nabla\phi(x_0,t_0) = 0 \text{ ja } D^2\phi(x_0,t_0) \neq 0$$

ja jotta viskositeettiratkaisujen määritelmä ei toteudu, on oltava

$$\phi_t(x_0,t_0) < \Delta\phi(x_0,t_0) + \lambda_{\min}((p-2)D^2\phi(x_0,t_0)). \tag{6.8}$$

Valitaan funktio

$$w_j(x,t,y,s) = u(x,t) - \phi(y,s) + \frac{j}{4}|x-y|^4 + \frac{j}{2}|t-s|^2$$

ja merkataan tämän funktion minimipistettä $(x_j, t_j, y_j, s_j) \in \overline{\Omega}_T \times \overline{\Omega}_T$. Nyt piste (x_0, t_0) on funktion $u - \phi$ lokaali minimipiste ja tästä seuraa, että

$$(x_j, t_j, y_j, s_j) \to (x_0, t_0, y_0, s_0) \text{ kun } j \to \infty$$

ja, että $(x_j, t_j), (y_j, s_j) \in \Omega_T$ kaikille $j > J$ jollekin $J \in \mathbb{N}$ samoilla perusteluilla kuin lauseen 4.30 todistuksessa. Käsitellään vastaavasti kaksi mahdollista tapausta.

Tapaus 1: Oletetaan ensiksi, että $x_j = y_j$ äärettömän monelle $j > J$. Olkoon j sellainen, että $x_j = y_j$ ja määritellään funktio

$$\varphi(y,s) = \frac{j}{4}|x_j - y|^4 + \frac{j}{2}(t_j - s)^2.$$

Tällöin funktiolla

$$\phi(y,s) - \varphi(y,s),$$

on lokaali maksimi pisteessä (y_j, s_j). Täten käyttämällä epäyhtälöä (6.8) ja kuvauksen

$$(x,t) \to \Delta\phi(x,t) + \lambda_{\min}((p-2)D^2\phi(x,t))$$

jatkuvuutta saadaan lukujonon suppenemisen perusteella valittua $J \leq J_1 \in \mathbb{N}$ tarpeeksi suureksi siten, että

$$\phi_t(x_j,t_j) < \Delta\phi(x_j,t_j) + \lambda_{\min}((p-2)D^2\phi(x_j,t_j)) \tag{6.9}$$

kaikille $j > J_1$. Koska piste (y_j, s_j) on funktion $\phi - \varphi$ maksimi, pätee pisteessä $\phi_t(y_j, s_j) = \varphi_t(y_j, s_j)$ ja $D^2\phi(y_j, s_j) \leq D^2\varphi(y_j, s_j)$. Käyttämällä näitä epäyhtälöön (6.9) saadaan

$$\begin{aligned} 0 <& -\phi_t(x_j,t_j) + \Delta\phi(x_j,t_j) + \lambda_{\min}((p-2)D^2\phi(x_j,t_j)) && (6.10) \\ \leq& -\varphi_t(x_j,t_j) + \Delta\varphi(x_j,t_j) + \lambda_{\min}((p-2)D^2\varphi(x_j,t_j)) = -j(t_j - s_j) && (6.11) \end{aligned}$$

kaikille $j > J_1$. Viimeinen yhtäsuuruus seuraa samalla laskulla kuin lauseen 6.7 todistuksesa siitä, että koska $y_j = x_j$ niin $D^2\varphi(y_j, s_j) = 0$.

Määritellään seuraavaksi

$$\psi(x,t) = -\frac{j}{4}|x-y_j|^4 - \frac{j}{2}(t-s_j)^2.$$

Nyt vastaavasti kuin edellä funktiolla

$$u(x,t) - \psi(x,t)$$

on lokaali minimi pisteessä (x_j, t_j), ja täten koska taas oletuksen nojalla $D^2\psi(y_j, s_j) = 0$, saamme vastaavalla perustelulla kuin yllä vakion $J \leq J_2 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$0 < \psi_t(x_j, t_j) = j(t_j - s_j) \tag{6.12}$$

kaikille $j > J_2$. Täten valitsemalla $J_3 = \max\{J_1, J_2\}$, saadaan summaamalla (6.10) ja (6.12)

$$0 < -j(t_j - s_j) + j(t_j - s_j) = 0$$

kaikille $j > J_3$, eli päädyttiin ristiriitaan.

Tapaus 2: Toinen tapaus on se, että J voidaan valita niin suureksi, että $x_j \neq y_j$ kaikille $j > J$. Tällöin parabolisen Ishiin lemman 4.28 nojalla on jokaiselle j olemassa matriisit X_j ja Y_j siten, että $X_j - Y_j$ on positiivisesti semidefiniitti ja

$$\begin{aligned}(j(t_j - s_j), j|x_j - y_j|^2(x_j - y_j), X_j) &\in \overline{\mathcal{P}}^{2,-}u(x_j, t_j)\\ (j(t_j - s_j), j|x_j - y_j|^2(x_j - y_j), Y_j) &\in \overline{\mathcal{P}}^{2,+}\phi(y_j, s_j)\end{aligned}$$

Nyt käyttämällä yhtälöä (6.8), määritelmää 4.26 viskositeettiratkaisulle ja lemman 5.1 muotoa normalisoidulle yhtälölle saadaan sijoittamalla

$$\begin{aligned}0 &= j(t_j - s_j) - j(t_j - s_j)\\ &< (p-2)\left\langle Y_j\frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}\right\rangle + \mathrm{tr}(Y_j)\\ &\quad - (p-2)\left\langle X_j\frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}\right\rangle - \mathrm{tr}(X_j)\\ &= (p-2)\left\langle (Y_j - X_j)\frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}, \frac{(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|}\right\rangle + \mathrm{tr}(Y_j - X_j)\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö saadaan samoilla perusteluilla kuin lauseen 6.7 todistuksen lopussa. Molemmissa tapauksissa päädytään ristiriitaan eli antiteesin mukaista funktiota ϕ ei voi olla olemassa. Täten kaikki tälläiset testifunktiot toteuttavat määritelmän automaattisesti, eli niitä ei tarvitse testata viskositeettiratkaisun määritelmän voimassaoloa testattaessa.

$\square$

Lähdeluettelo

[BBT08] Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner, and Brian S. Thomson. *Real Analysis: Second Edition (2008)*, volume 71. 2008.

[BCQ01] Rainer Buckdahn, Pierre Cardaliaguet, and Marc Quincampoix. A representation formula for the mean curvature motion. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(4):827–846, 2001.

[CGG91] Yun Gang Chen, Yoshikazu Giga, and Shun'ichi Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *Journal of Differential Geometry*, 33(3):749–786, 1991.

[CH18] Michael Collins and Andreas Herán. Existence of parabolic minimizers on metric measure spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 176:56–83, 2018.

[Col20] Michael Collins. Existence of variational solutions to a Cauchy-Dirichlet problem with time-dependent boundary data on metric measure spaces. 2020. Hyväksytty julkaistavaksi Collectanea Mathematicassa. Viitattu 04.06.2020. URL: `https://link.springer.com/article/10.1007/s13348-020-00288-0`.

[Cra97] Michael G. Crandall. Viscosity solutions: A Primer. *Lecture notes in Mathematics*, 1660:1–43, 1997.

[DiB09] Emmanuele DiBenedetto. *Partial Differential Equations: Second Edition*. Cornerstones. Birkhäuser Boston, 2009.

[Doe11] Kerstin Does. An evolution equation involving the normalized P-laplacian. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 10(1):361–396, 2011.

[ES91] Lawrence C. Evans and Joel Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I. *J. Differential Geom.*, 33(1):635–681, 1991.

[ETT15] Abderrahim Elmoataz, Matthieu Toutain, and Daniel Tenbrinck. On the p-laplacian and infinity-laplacian on graphs with applications in image and data processing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8(4):2412–2451, 2015.

[Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[HKM06] Juha Heinonen, Tero Kilpeläinen, and Olli Martio. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*. Dover Publications, 2006.

[Ish95] Hitoshi Ishii. On the equivalence of two notions of weak solutions, viscosity solutions and distribution solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*, 38:101–120, 1995.

[JJ11] Petri Juutinen and Vesa Julin. A new proof for the equivalence of weak and viscosity solutions for the p-Laplace equation. 2011. `arXiv:1104.2197`.

[JK06] Petri Juutinen and Bernd Kawohl. On the evolution governed by the infinity Laplacian. *Mathematische Annalen*, 335(4):819–851, 2006.

[JLM01] Petri Juutinen, Peter Lindqvist, and Juan J. Manfredi. On the Equivalence of Viscosity Solutions and Weak Solutions for a Quasi-Linear Equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(3):699, 2001.

[JLP10] Petri Juutinen, Teemu Lukkari, and Mikko Parviainen. Equivalence of viscosity and weak solutions for the p(x)-Laplacian. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 27(6):1471–1487, 2010.

[Koi12] Shigeaki Koike. A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions. 2012. Viitattu 01.02.2019. URL: `http://www.math.tohoku.ac.jp/~koike/evis2012version.pdf`.

[KS06] Robert Kohn and Sylvia Serfaty. A deterministic-control-based approach motion by curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(3):344–407, 2006.

[KS09] Robert Kohn and Sylvia Serfaty. *Second-order PDE's and deterministic games*. 2009. Viitattu 21.05.2020. URL: `https://doi.org/10.4171/056-1%2F12`.

[Kut98] Kenneth Kuttler. *Modern Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC-Press, 1998.

[Kuu09] Tuomo Kuusi. Lower semicontinuity of weak supersolutions to nonlinear parabolic equations. *Differential and Integral Equations*, 22(11-12):1211–1222, 2009.

[LPS14] Hannes Luiro, Mikko Parviainen, and Eero Saksman. On the existence and uniqueness of p-harmonious functions. *Differential and Integral Equations*, 27(3-4):201–216, 2014.

[MPR10] Juan J. Manfredi, Mikko Parviainen, and Julio D. Rossi. An asymptotic mean value characterization for a class of nonlinear parabolic equations related to tug-of-war games. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 42(5):2058–2081, 2010.

[MPR12a] Juan J. Manfredi, Mikko Parviainen, and Julio D. Rossi. Dynamic Programming Principle for tug-of-war games with noise. *ESAIM - Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 18(1):81–90, 2012.

[MPR12b] Juan J. Manfredi, Mikko Parviainen, and Julio D. Rossi. On the definition and properties of p-harmonious functions. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, 2, 2012.

[Par07] Mikko Parviainen. *Global Higher Integrability for Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations in Nonsmooth Domains*. 2007.

[Par17a] Mikko Parviainen. Lecture note for the course Partial Differential Equations 2 MATS340. 2017. Viitattu 09.01.2019. URL: https://www.jyu.fi/science/en/maths/research/nonlinear-pde/pde2/lecturenote2017.pdf.

[Par17b] Mikko Parviainen. Lecture note for the course Partial differential equations MATS230. 2017. Viitattu 08.05.2018. URL: https://koppa.jyu.fi/kurssit/jy-CUR-7555/materiaalikansio/lecturenote/.

[PR16] Mikko Parviainen and Eero Ruosteenoja. Local regularity for time-dependent tug-of-war games with varying probabilities. *Journal of Differential Equations*, 261(2):1357–1398, 2016. arXiv:1512.02066v4.

[PS08] Yuval Peres and Scott Sheffield. Tug-of-war with noise: A game-theoretic view of the p-Laplacian. *Duke Mathematical Journal*, 145(1):91–120, 2008.

[PSSW08] Yuval Peres, Oded Schramm, Scott Sheffield, and David B. Wilson. Tug-of-war and the infinity Laplacian. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(1):167–210, 2008.

[PV18] Mikko Parviainen and Juan Luis Vázquez. Equivalence between radial solutions of different parabolic gradient-diffusion equations and applications. 2018. Hyväksytty julkaistavaksi Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienzessä. arXiv:1801.00613.

[Sil18] Jarkko Siltakoski. Equivalence of viscosity and weak solutions for the normalized p(x)-Laplacian. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 57(6):1471–1487, 2018.

[Sil19] Jarkko Siltakoski. Equivalence of viscosity and weak solutions for a p-parabolic equation. 2019. arXiv:1901.02507.