

**Lukujonotaitojen yhteys laskusujuvuuteen ja riskiryh-  
män laskusujuvuuden kehitys peruskoulun 1–3 luokilla:  
seurantatutkimus**

Tiia Mälkiä ja Nea-Leena Vihreäsaari

Erityispedagogiikan pro gradu -tutkielma  
Kevätlukukausi 2020  
Kasvatustieteiden laitos  
Jyväskylän yliopisto

## TIIVISTELMÄ

**Mälkiä, Tiia & Vihreäsaari, Nea-Leena. 2020. Lukujonotaitojen yhteys laskusujuvuuteen ja riskiryhmän laskusujuvuuden kehitys peruskoulun 1 – 3 luokilla: seurantalutkimus. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden laitos. 67 sivua.**

Lukujonotaidoilla tarkoitetaan sujuvaa lukujen luettelemisen taitoa ja ne ovat varhainen esitaito laskusujuvuudelle. Laskusujuvuuteen yhteydessä olevien esitaitojen tunnistaminen on tärkeää, sillä laskusujuvuus on merkittävimpiä tekijöitä, joka erottaa matematiikassa heikosti suoriutuvat tyypillisesti suoriutuvista vertaisistaan. Aiemmissä tutkimuksissa on havaittu esikouluiän lukujonotaitojen ennustavan myöhempää laskusujuvuutta, mutta tutkimuksia ensimmäisen luokan lukujonotaitojen yhteydestä myöhempään laskusujuvuuteen on vähän. Matematiikassa heikoimmin suoriutuvilla on todettu vakavia puutteita erityisesti lukujonotaidoissa ja näiden oppilaiden on havaittu käyttävän enemmän aikaa laskemiseen sekä tekevän enemmän virheitä kuin tyypillisesti suoriutuvien.

Tutkimuksen aineisto on osa Lasten luku- ja laskutaidon sujuvuus -hanketta (FLARE), jossa tutkittiin neljän Keski-Suomen alueen koulun oppilaita. Tähän tutkimukseen valikoitui 190 oppilasta, joiden lukujonotaitoja mitattiin ensimmäisen luokan keväällä ja laskusujuvuutta seurattiin ensimmäiseltä kolmannelle luokalle. Tutkimuksen ensimmäisenä tavoitteena oli hierarkkisen regressioanalyysin avulla selvittää, missä määrin ensimmäisen luokan lukujonotaidot ennustavat ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan laskusujuvuutta, kun työmuisti on kontrolloitu. Analyysi toteutettiin koko joukon lisäksi erikseen tytöille ja pojille. Tutkimuksen toisena tavoitteena oli tarkastella riskiryhmään kuuluvien laskusujuvuuden kehitystä sekä verrata matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmää (lukujonotaidoissa alin 12,5 persentiili) ja heikosti suoriutuvien riskiryhmää (lukujonotaidoissa 12,5–25 persentiili) toisiinsa. Kolmantena tavoitteena oli tarkastella virheiden ja hyppyjen määriä lukujonotaidoissa sekä niiden yhteyttä laskusujuvuuden kehitykseen. Riskiryhmäksi rajattiin ensimmäisen luokan lukujonotaidoissa alimpaan 25 persentiiliin kuuluvat oppilaat. Ryhmien välisiä eroja tutkittiin U-testillä ja sukupuolten sekä virheiden tekemisen välisiä eroja ristiintaulukoinnilla ja  $\chi^2$ -testillä.

Lukujonotaidot lisäsivät laskusujuvuuden tason selitysosuutta ensimmäisellä luokalla 20 prosenttia, toisella 18 ja kolmannella 16 prosenttia. Sukupuolieroja tarkasteltaessa havaittiin, että pojilla lukujonotaidot ennustivat vahvemmin myöhempää laskusujuvuutta kuin tytöillä. Tulosten perusteella lukujonotaitojen tukeminen varhaisessa vaiheessa on tärkeää. Tässä tutkimuksessa havaittiin lisäksi, että pojilla visuospatiaalinen työmuisti selitti suuremman osan laskusujuvuuden vaihtelusta, kun tytöillä kielellinen työmuisti selitti suuremman osan. Sukupuolten välisiä eroja työmuistin eri osa-alueiden välillä tulisi tutkia lisää. Riskiryhmää tarkasteltaessa ei löydetty eroja matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmän ja heikosti suoriutuvien riskiryhmän laskusujuvuuden kehityksessä eivätkä virheet ja hypyt näyttäneet olevan yhteydessä laskusujuvuuden kehitykseen. Sukupuolella ei ollut merkitystä siihen, kumpaan riskiryhmän alaryhmään oppilas kuului eikä sukupuoli ollut yhteydessä laskusujuvuuden kehitykseen riskiryhmässä. Riskiryhmän havaittiin tekevän hyvin vähän virheitä lukujonotaidoissa, joten haasteet näillä oppilailla vaikuttaisivat olevan lukujonotaitojen sujuvuudessa.

Asiasanat: lukujonotaidot, laskusujuvuus, työmuisti, sukupuolierot, riskiryhmä

## SISÄLTÖ

<b>TIIVISTELMÄ</b> .....	<b>2</b>
<b>SISÄLTÖ</b> .....	<b>3</b>
<b>1 JOHDANTO</b> .....	<b>4</b>
1.1 Lukujonotaidot ja laskusujuvuus .....	7
1.2 Työmuistin yhteys matematiikassa suoriutumiseen .....	10
1.3 Matemaattiset oppimisvaikeudet ja matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat .....	12
1.4 Tutkimusongelmat.....	15
<b>2 TUTKIMUSMENETELMÄT</b> .....	<b>18</b>
2.1 Tutkimuskonteksti ja tutkittavat .....	18
2.2 Mittarit .....	18
2.3 Aineiston analyysi.....	21
<b>3 TULOKSET</b> .....	<b>24</b>
3.1 Ensimmäisen luokan lukujonotaitojen yhteys ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan laskusujuvuuteen.....	24
3.2 Riskiryhmään kuuluvien oppilaiden laskusujuvuuden kehitys vuosiluokilla 1–3 sekä alaryhmien ja sukupuolten väliset erot laskusujuvuuden kehityksessä.....	29
3.3 Riskiryhmän lukujonotaidoissa tehdyt virheet ja hypyt sekä niiden yhteys laskusujuvuuteen.....	32
<b>4 POHDINTA</b> .....	<b>35</b>
4.1 Tulosten tarkastelu .....	35
4.2 Tutkimuksen vahvuudet ja rajoitukset .....	39
4.3 Jatkotutkimusaiheet.....	42
<b>LÄHTEET</b> .....	<b>45</b>
<b>LIITTEET</b> .....	<b>58</b>

# 1 JOHDANTO

Matemaattiset taidot kehittyvät hierarkkisesti; aiempien taitojen tulee olla opittuina ja automatisoitua ennen kuin monimutkaisemmat taidot voivat kehittyä (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Aunola & Nurmi, 2018; Räsänen, 2012). Lapsi oppii useita laskutaidolle tärkeitä esitaitoja jo ennen kouluikää (Aunio, 2008). Edellytykset laskutaidolle ovat lapsilla synnynnäisinä ominaisuuksina (Geary, 2000; Spelke & Kinzler, 2007) ja jo alle vuoden ikäisten vauvojen on osoitettu pystyvän erottelamaan eri lukumääräisyyksiä toisistaan (Antell & Keating, 1983; McCrink & Wynn, 2004; Wood & Spelke, 2005; Wynn, 1992; Xu, Spelke & Goddard, 2005) sekä mielessään lisäämään tai vähentämään lukumäärästä yhden (Wynn, 1992). Kahden ja kolmen vuoden iässä lapsi oppii luettelemaan numerosanoja lorumaisesti, mutta ei välttämättä oikeassa järjestyksessä (Wynn, 1992). Noin neljän vuoden iässä lukujen luetteleminen tarkentuu ja lapsi alkaa sormella osoittaen laskea esineitä kertoakseen, mitä lukumäärää mikäkin lukusana tarkoittaa (Aunio, 2008) ja näin kehittyä yksi yhteen -vastaavuus (Aunio, 2008; Koponen, Salminen & Sorvo, 2019). Viiden vuoden iässä lapsi osaa luetella numerosanat oikeassa järjestyksessä ja rajata jo lasketut esineet pois laskuista (Aunio, 2008) sekä ymmärtää kardinaalisuusperiaatteen eli lukujonon viimeisen luvun merkitsevän koko joukon lukumäärää (Wynn, 1990). Lopuksi kehittyä ymmärrys siitä, että kaikkea voi laskea ja laskemisen voi aloittaa mistä tahansa joukon yksiköstä (Gelman & Gallistel, 1978).

Näistä monista pienistä esitaidoista rakentuvat lukujonotaidot (Aunio, 2008), joilla tarkoitetaan sujuvaa lukujen luettelemisen taitoa (Koponen ym., 2019). Lukujonotaitojen on katsottu olevan yksi merkittävimmistä matemaattisista esitaidoista (Aunio, 2008; Aunola ym., 2004), sillä ne toimivat tärkeänä työkaluna varhaisessa laskutaidossa (Baroody, 1984; Carpenter & Moser, 1984). Laskemisessa ja erityisesti lukujen luettelussa tarvitaan työmuistin kapasiteettia (Bradoory, 1986), jonka vuoksi työmuistin on havaittu olevan yhteydessä varhaiseen laskutaitoon (Alloway, ym., 2005; De Smedt, ym., 2009; Geary, 2000; Mur-

phy, Mazzocco, Hanich & Early, 2007). Tyypillisesti lukujonotaitojen käyttö yhteen- ja vähennyslaskuissa jää muiden taitojen kehittyessä varasuunnitelmaksi (Carr & Alexeev, 2011), mutta heikoimpien oppilaiden kohdalla näin ei kuitenkaan aina ole (Koponen ym., 2018; Ostad, 1997; Rusanen & Räsänen, 2012).

On arvioitu, että jopa 5–7 prosentille oppilaista laskutaitojen oppiminen opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti on ylivoimaista (Räsänen, 2012). Vaikeudet matemaattisissa taidoissa vaikuttavat jatkokouluttautumiseen sekä työn ja arjen vaatimuksista selviytymiseen (Parsons & Bynner, 2005; Räsänen, 2012). Perusopetuksen opetussuunnitelman mukaan yksi perusopetuksen tärkeistä tehtävistä on edistää sukupuolten välistä tasa-arvoa (Perusopetuksen opetussuunnitelma, 2014), jonka vuoksi opetuksen seurauksena tyttöjen ja poikien matematiikan osaamisessa ei tulisi olla eroja, mutta näin ei kuitenkaan aina ole (Hannula, Kupari, Pehkonen, Räsänen & Soro, 2004). TIMSS-tutkimuksen (Trends in International Mathematics and Science Study) mukaan tyttöjen pisteet ovat kasvaneet, kun taas poikien tulokset ovat heikentyneet (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2016). Toisissa tutkimuksissa poikien matemaattisten taitojen on huomattu olevan paremmat koulupolun alussa (Mononen, Aunio, Hotulainen & Ketonen, 2013; Ukkola & Metsämuuronen, 2019), mutta taitojen kehityksessä eroja ei enää ole löydetty (Väisänen & Aunio, 2016).

Suomalaisnuorten matematiikan osaamisen taso on laskenut PISA-tutkimusten (Programme for International Students Assessment) mukaan jopa 37 pistettä huippuvuodesta 2003 vuoteen 2018 (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2019) ja tulosten keskiarvon lasku vuoden 2003 kärkimaista on kaikista suurin (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2013). Huolestuttavaa PISA-tutkimusten tuloksissa on todella hyvin matematiikkaa osaavien määrän lasku sekä heikosti matematiikassa pärjäävien määrän nousu (Kupari & Hiltunen, 2018). Noin 15 prosenttia suomalaisnuorista ei saavuttanut vuoden 2018 PISA-tutkimuksessa matematiikan tasoa kaksi, jonka matemaattisten taitojen saavuttamisen nähdään olevan välttämätöntä yhteiskunnassa toimimisen kannalta (Opetus- ja kulttuuriministeriö 2019). Matematiikan kumulatiivisen luonteen takia matematiikan opetus etenee syste-

maattisesti ja pohja matemaattisille taidoille luodaan jo perusopetuksen ensimmäisillä luokilla (Perusopetuksen opetussuunnitelma, 2014), minkä takia on tärkeää kiinnittää huomiota varhaisiin matemaattisiin esitaitoihin.

Lukujonotaidoissa esiintyvien vaikeuksien havaitseminen auttaa tunnistamaan oppilaita, joilla on riski matemaattisiin oppimisvaikeuksiin (Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & Numtee, 2007), sillä näillä oppilailla on todettu olevan vaikeuksia erityisesti lukujonotaitojen hallinnassa (Aunola & Nurmi, 2018). Matemaattiset oppimisvaikeudet tarkoittavat poikkeuksellisen työlästä peruslaskutaitojen oppimista harjoittelusta huolimatta (DSM-5 - APA, 2013). Laskusujuvuus on yksi merkittävimmistä tekijöistä, joka erottaa oppilaat, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, tyypillisesti suoriutuvista vertaisistaan (Jordan, Hanich & Kaplan, 2003; Locuniak & Jordan, 2008; Rusanen & Räsänen, 2012). Matemaattisilta taidoilta heikommat oppilaat tekevät myös enemmän virheitä laskemisessa (Geary, 1990, 1993; Geary & Brown, 1991; Geary, Fan & Bow-Thomas, 1992; Geary, Hoard, Byrd-Craven & De Soto, 2004; Vanbinst, Ghesquière & De Smedt, 2014). Erojen matemaattisissa taidoissa on todettu kasvavan ja vaikeuksien kasautuvan jo koulun ensimmäisillä luokilla (Jordan, Kaplan, Rami-niemi & Locuniak, 2009; Morgan, Farkas & Wu, 2009). Matemaattisten oppimisvaikeuksien vaikutukset tulevaisuuteen ovat jopa merkittävämmät kuin lukivaikeuden (Parsons & Bynner, 2005), mutta siitä huolimatta matemaattisen oppimisen vaikeuksia on tutkittu selvästi vähemmän kuin lukivaikeutta (Bishop, 2010).

Tässä tutkimuksessa oli kolme tavoitetta. Ensimmäisenä tavoitteena oli selvittää missä määrin ensimmäisen luokan lukujonotaidot ennustavat ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan laskusujuvuuden tasoa, kun työmuistin merkitys on kontrolloitu. Toisena tavoitteena oli selvittää, millaista laskusujuvuuden kehitys on ensimmäiseltä toiselle ja kolmannelle luokalle oppilailla, jotka ensimmäisen luokan keväällä kuuluvat matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmään eli tässä tutkimuksessa lukujonotaidoissa alimpaan 25 prosenttiin. Lisäksi tavoitteena oli verrata matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmää ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmää toisiinsa. Nämä riskiryhmät tehtiin jakamalla lukujonotaitojen riskiryhmä puoliksi. Kolmantena tavoitteena oli

tarkastella kuinka paljon virheitä ja hyppyjä koko riskiryhmä teki lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä sekä tutkia riskiryhmän lukujonotaidoissa tehtyjen virheiden yhteyttä laskusujuvuuden kehitykseen. Kaikissa tutkimuskysymyksessä tutkittiin lisäksi sukupuolten välisiä eroja. Johdannossa käsitellään seuraavaksi lukujonotaitoja ja laskusujuvuutta, työmuistin yhteyttä matematiikassa suoriutumiseen sekä matematiikan oppimisvaikeuksia ja matematiikassa heikosti suoriutuvia oppilaita. Lopuksi esitellään tutkimusongelma. Johdannon jälkeen kerrotaan tutkimusmenetelmistä eli tutkimuskonteksti ja tutkittavat, mittarit sekä aineiston analyysi. Seuraavana tuloksissa vastataan tutkimusongelmiin. Tämän jälkeen tarkastellaan tutkimuksen tuloksia, vahvuuksia ja rajoituksia sekä pohditaan jatkotutkimusaiheita.

## **1.1 Lukujonotaidot ja laskusujuvuus**

Lukujonotaidot tarkoittavat kykyä luetella numeroita oikeassa järjestyksessä etuja takaperin, lukujen luettelemista hyppäyksittäin (esimerkiksi joka toinen tai joka viides luku) sekä luetteloinnin jatkamista annetusta numerosta (Frank, 1989; Koponen ym., 2019). Käytännössä lukujonotaidot ovat siis luettelemalla laskemisen taito, jossa tieto lukujen keskinäisestä järjestyksestä on olennainen (Aunola & Nurmi, 2018). Lukujonotaitojen käyttö laskemisessa vaatii lisäksi yksi yhteen-vastaavuuden ymmärtämistä sekä kardinaalisuus-periaatteen oppimista, jolla tarkoitetaan lukujonossa viimeiseksi olevan luvun merkitsevän koko joukon lukumäärää (Aunio, 2008; Koponen ym., 2019). Lukujonotaidot ovat yksi merkittävimmistä matemaattisista esitaidoista (Aunio, 2008; Aunola ym., 2004; Passolunghi, Vercelloni & Schadee, 2007), sillä lukujonotaitojen on useissa tutkimuksissa todettu ennustavan myöhempää laskutaitoa ja matemaattista osaamista (Aunio & Niemivirta, 2010; Aunola ym., 2004; Koponen, Aunola, Ahonen & Nurmi, 2007; Koponen ym., 2016; Nguyen ym., 2016; Zhang ym., 2014).

Yhteen- ja vähennyslaskut ovat erillisiä matemaattisia toimintoja (Canobi, 2005; Koponen ym., 2018), jotka kummatkin varhaisessa vaiheessa tukeutuvat lukujen luettelemisen taitoon (Carpenter & Moser, 1984). Butterworth (2005) esittää

yhteenlaskutaidon kehittymiselle kolme vaihetta; ensimmäisessä lapsi aloittaa laskemisen (2+3) lukujonon alusta (1, 2, 3, 4, 5), seuraavassa vaiheessa lapsi aloittaa pienemmästä luvusta (2, 3, 4, 5) ja kolmannessa vaiheessa suuremmasta luvusta (3, 4, 5), jolloin laskemisesta tulee nopeampaa sekä virheitä tapahtuu vähemmän. Vähennyslaskutaidon kehittymisen varhaisessa vaiheessa lukujonon taaksepäin luetteleminen on olennainen taito; lapsi etsii vastauksen luettelemalla lukujonoa taaksepäin annetun luvun verran päästäkseen oikeaan tulokseen (Carpenter & Moser, 1984). Vähennyslasku on prosessina yhteenlaskua kognitiivisesti haastavampi, sillä takaperin luettelemisen lisäksi lapsen täytyy pitää mielessä, kuinka monta yksikköä on tarkoitus vähentää lukumäärästä (Baroody, 1984). Vähennyslaskussa (5-2) voidaan käyttää strategiana lukujen taaksepäin luettelua (5, 4, 3) tai hyödyntää yhteenlaskustrategiaa, jolloin vastaus on pienemmästä luvusta ylöspäin lueteltujen lukujen määrä (3, 4, 5) (Carpenter & Moser, 1984). Vaikeuksia yhteen- ja vähennyslaskutaidossa ilmenee, jos lukujonotaidot eivät ole automatisoituneet eikä lapsi välittömästi muista, mikä luku tulee jonnossa seuraavaksi tai ennen annettua lukua (Baroody, 1984).

Lukujonotaitojen tulee olla opittuina ja automatisoituneita ennen kuin lukujonotaitoja voidaan käyttää sujuvassa laskemisessa (Aunio & Räsänen, 2015; Carpenter & Moser, 1984). Kun lukujonotaidot automatisoituvat, vapautuu tarkkavaisuuden resursseja monimutkaisempiin matematiikan tehtäviin, mikä mahdollistaa laskutaidon kehityksen (Gersten & Chard, 1999). Hyvät lukujonotaidot johtavat mieleen palauttamisen automatisoitumiseen ja ennen kaikkea tämän tarkkuuteen (Hopkins & Lawson, 2006), jolloin lukujonotaidot jäävät niin kutsutuksi varasuunnitelmaksi laskustrategiana (Carr & Alexeev, 2011). Näin laskeminen tukeutuu lukujen luettelemisen sijasta muistista palauttamiseen (Barrouillet & Fayol, 1998), joka on nopein ja sujuvin laskutapa (Rusanen & Räsänen, 2012).

Laskusujuvuus tarkoittaa laskunopeutta, eli kykyä laskea annetussa ajassa mahdollisimman monta peruslaskutoimitusta oikein (Carr & Alexeev, 2011; Locuniak & Jordan, 2008). Laskusujuvuus on aikarajoittamattomasta laskemisesta erillinen taito (Petrill, Logan & Hart, 2012), jossa laskemisen tarkkuus kehittyy ennen nopeutta (Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008). Laskusujuvuus



mahdollistaa aritmeettisten ongelmien tehokkaan suorittamisen (Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008) ja sen on todettu olevan yhteydessä laskustrategioiden kehitykseen sekä myöhempään matemaattisten taitojen tasoon (Carr & Alexeev, 2011). Laskemisen ajatellaan sujuvoituneen, kun oppilaan ei enää tarvitse mielessään luetella lukujonoja (Baroody, 1987; Carpenter & Moser, 1984).

Vahvojen lukujonotaitojen esikouluvuonna on todettu olevan yhteydessä parempaan laskusujuvuuteen kolmannella (Koponen ym., 2016) ja neljännellä luokalla (Aunola ym., 2004). Esikouluiän kehittyneet lukujonotaidot ennustavat jopa vielä viidennelle luokalle parempaa matematiikan osaamista (Nguyen ym., 2016). Lukujonotaidoissa taitotasoltaan vahvemmat oppilaat osoittavat suurempaa kehitystä matemaattisissa taidoissa kuin taitotasoltaan heikommat oppilaat, joka johtaa erojen kasvuun matemaattisten taitojen tasossa (Aunola ym., 2004; Zhang ym., 2014). Tutkimukset ovat keskittyneet esikouluvuoden lukujonotaitojen merkitykseen myöhemmän matemaattisen osaamisen ennustajana (Koponen ym., 2007, 2016), ja vasta vähän on tutkittu ensimmäisen luokan lukujonotaitojen vaikutuksesta myöhempään laskusujuvuuteen, tulosten osoittautuessa lupaa-viksi (Koponen, Salmi, Eklund & Aro, 2013). Lisätutkimus aiheesta on tärkeää, sillä vaikeuksien havaitseminen lukujonotaidoissa saattaa auttaa tunnistamaan oppilaita, joilla on riski pitkäaikaisiin vaikeuksiin matematiikassa (Geary ym., 2007).

Esikouluiässä poikien lukujonotaitojen on havaittu olevan paremmat kuin tyttöjen (Zhang ym., 2014), ja tästä syystä mahdollisten sukupuolten välisten erojen matematiikan taidoissa voidaan ajatella kehittyvän jo varhaisessa vaiheessa (Aunola & Nurmi, 2018). Suomessa eroavaisuuksia sukupuolten välillä ei kuitenkaan ole systemaattisesti löydetty matemaattisissa taidoissa koulun ensimmäisillä luokilla (Aunola ym., 2004; Aunio & Niemivirta, 2010; Paukkeri, Pakarinen, Lerkkanen & Poikkeus, 2015). Joissain tutkimuksissa koulupolun alussa pojilla on vahvemmat matemaattiset taidot (Mononen ym., 2013; Ukkola & Metsämuuronen, 2019), kun vastaavasti Aunio kollegoineen (2006) havaitsi tyttöjen keskiarvon olleen parempi kuin poikien. Pojat laskivat tyttöjä sujuvammin toisen

luokan talvella sekä kolmannen luokan syksyllä, mutta tämän jälkeen sukupuolten välillä ei havaittu eroja (Väisänen & Aunio, 2016). Laskusujuvuutta mittavissa tehtävissä pojat suoriutuivat tyttöjä paremmin ensimmäisen luokan keväällä (Zhang ym., 2014).

## 1.2 Työmuistin yhteys matematiikassa suoriutumiseen

Työmuistilla tarkoitetaan kykyä säilyttää ja työstää informaatiota väliaikaisesti muistissa (Baddeley, 1986). Tunnetuin teoria työmuistista on Baddeleyn ja Hitchin vuonna 1972 kehittämä malli, jonka mukaan työmuisti koostuu keskusyksiköstä, joka ohjaa tarkkavaisuutta, sekä kahdesta alayksiköstä: visuospatiaalisesta luonnoslehtiöstä ja fonologisesta silmukasta (Baddeley, 1992). Visuospatiaalinen luonnoslehtiö vastaa työmuistin visuaalisesta kapasiteetista eli kuvien käsittelystä ja avaruudellisista suhteista, kun taas fonologinen silmukka vastaa kielellisestä työmuistista (Baddeley, 2007). Viimeisenä malliin on lisätty episodinen puskuri, jonka tehtävänä on yhdistellä tietoa työmuistin eri yksiköiden sekä pitkäaikaisen muistin välillä (Baddeley, 2000).

Baddeleyn ja Hitchin mallin rinnalle on kehitetty useita vaihtoehtoisia teorioita kuvaamaan työmuistia (Cowan, 2016). Ericsson ja Kintsch (1995) katsoivat, että Baddeleyn työmuisti käsittää vain lyhytkestoisen työmuistin ja lisäsivät sille jatkeen, joka nimettiin pitkäkestoiseksi työmuistiksi: pitkäkestoiseen työmuistiin ovat siirtyneet asiat, jotka ovat harjoiteltuja tai yksilölle tuttuja, ja niihin päästään käsiksi lyhytkestoisessa työmuistissa olevien hakuvihjeiden avulla. Ericssonin ja Kintschin malleista poiketen Cowanin sisäkkäiden prosessien mallissa (eng. *embedded process model*) lyhytkestoista muistia ei nähdä työmuistista erillisenä toimintona, vaan työmuisti jakautuu kahteen päällekkäiseen tasoon: säilömuistiin, jossa on joukko pitkäkestoisen muistin edustuksia, joita pystytään väliaikaisesti aktivoimaan sekä aktivoituneeseen muistiin, jossa ovat tarkkaavaisuuden huomiona olevat säilömuistin edustukset (Cowan, 2016). Aktivaatiot ovat rajalliset, sillä aktivaation kohteena voi olla vain 1–4 edustusta ja nämä edustukset voivat pysyä aktivoituneena rajallisen ajan (Cowan, 2001). Englen ja Kanen

(2002) mallissa, jonka periaate on lähellä Baddeleyn keskusyksikön toimintaa, päätekijänä on tarkkaavaisuuden kontrollointi ja erot työmuistissa johtuvat eroista toiminnanohjauksessa eli kyvyssä ylläpitää tarkkavaisuutta sekä ohjata toimintaa tehtävän vaatimusten mukaisesti.

Työmuistin on todettu olevan vahvasti yhteydessä varhaiseen laskutaitoon (Alloway, ym., 2005; De Smedt, ym., 2009; Geary, 2000; Murphy ym., 2007) ja ennustavan laskutaidon kehitystä (Andersson, 2008; Bull, Espy & Wiebe, 2008; Passolunghi ym., 2007). Taitava laskeminen edellyttää työmuistin käyttöä (Geary ym., 2007), sillä yhteen- ja vähennyslaskuissa tarvitsee luetella lukujonoja sekä samalla pitää mielessä annettu lukumäärä ja siihen lisättävä tai vähennettävä luku (Bradoory, 1984). Työmuisti on yhteydessä laskutaitoon erityisesti lukujonotaitojen kautta, sillä lukujonossa olennaista on muistaa yksittäisten lukusanojen lisäksi niiden järjestys ja paikka (Koponen ym., 2019). Lukujonojen luetteleminen vaatii fonologista koodausta (Logie & Baddeley, 1987) ja lukujonon mielessä hahmottaminen visuospatiaalista koodausta (Geary, Hoard, Nugent & Byrd-Craven, 2008). Lukujonotaitojen on havaittu moderoivan työmuistin ja matemaattisten taitojen yhteyttä (Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016).

Varhaisessa laskutaidossa tukeudutaan enemmän työmuistia vaativiin strategioihin (De Smedt ym., 2009; Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016), kun taas taitojen karttuessa vastaus pyritään palauttamaan mieleen pitkäaikaisesta muistista (Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016), joka vapauttaa työmuistin resursseja monimutkaisempiin matemaattisiin tehtäviin (Geary, 2011; Locuniak & Jordan, 2008). Erityisesti kielellisen työmuistin on havaittu olevan merkityksellinen varhaisessa laskutaidossa (Noël, 2009; Toll & Van Luit, 2014), kun taas visuospatiaalinen työmuisti näyttää ennustavan vaihtelua myöhemmissä matematiikan taidossa (Toll & Van Luit, 2014). Visuospatiaalista työmuistia tarvitaan myös varhaisessa laskutaidossa, sillä nuoremmilla oppilailta on tarve esittää matemaattiset tehtävät konkreettisin keinoin kuten sormilla laskien (De Smedt, ym., 2009; Rasmussen & Bisanz, 2005). Työmuistin eri alayksiköiden on havaittu olevan yhteydessä matematiikan eri osa-alueisiin, jonka on ajateltu johtavan ristiriitaisuuksiin työmuistin merkityksestä matematiikassa (Geary ym., 2007). Pengin

ja kumppaneiden (2016) meta-analyysissä ei kuitenkaan löydetty eroja työmuistin eri yksiköiden ja matemaattisen suoriutumisen välillä tarkoittaen, että työmuistin yhteys oli sama riippumatta siitä, käytettiinkö työmuistin kielellistä tai visuospatiaalista mittaria.

Työmuistin yhteys matematiikassa suoriutumiseen on todettu olevan vahvin lapsilla, jotka ovat matemaattisilta taidoiltaan heikompia (Passolunghi & Sigel, 2004; Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016; Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004). Matemaattisilta taidoilta heikommilla oppilailla on vaikeuksia muistista mieleen palauttamisessa, jonka vuoksi nämä oppilaat joutuvat tukeutumaan enemmän työmuistin resursseja vaativiin strategioihin (Geary, ym., 2007). Tutkimusten mukaan näyttää siltä, että työmuisti olisi käyttökelpoinen indikaattori, jonka kautta voidaan tunnistaa jo varhaisessa vaiheessa lapset, joilla on suurempi riski matematiikan oppimisvaikeuksiin (De Smedt ym., 2009; Fuchs, Fuchs & Compton, 2012; Gersten, Jordan & Flojo, 2005; Swanson & Jerman, 2006; Toll & Van Luit, 2014; Wilson & Swanson, 2001).

### **1.3 Matemaattiset oppimisvaikeudet ja matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat**

Matemaattiset oppimisvaikeudet määritellään DSM-5-luokituksessa (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders – APA, 2013) poikkeuksellisen työlääksi peruslaskutaitojen ja/tai lukujärjestelmän ymmärtämisen oppimiseksi opetuksesta ja harjoittelemisesta huolimatta. ICD-10 –tautitautiluokituksessa (International Classification of Diseases, 1992) matemaattisista oppimisvaikeuksista käytetään termiä laskemiskyvyn häiriö. Taustalla on aivojen toiminnallisia ja rakenteellisia poikkeavuuksia, jotka johtuvat ympäristö- ja perintötekijöiden vaikutuksesta (DSM-5 – APA, 2013; Räsänen, 2012). Vaikeuksien monimuotoisuuden sekä taustalla olevien syiden vuoksi ei ole olemassa yhtä oppimisvaikeutta, vaan käytetään monikkoa matemaattiset oppimisvaikeudet (Koponen ym., 2019). Matemaattiset oppimisvaikeudet alkavat tyypillisesti ilmetä koulun alkutaipaleella (Räsänen, 2012).

Ensimmäisen luokan alussa heikosti matematiikassa suoriutuvat oppilaat ovat epäedullisessa asemassa, eivätkä välttämättä koskaan saavuta taidoissa tyyppillisesti suoriutuvia vertaisiaan (Jordan ym., 2009; Morgan ym., 2009). Matematiikan taitojen heikkoudet vaikuttavat olevan pysyviä ja heikosti suoriutuvien oppilaiden on todettu olevan jäljessä läpi kouluajan (Duncan, ym., 2007; Morgan ym., 2009) yrittäen edelleen hankkia perustaitoja (Jordan ym., 2009; Mazzocco & Räsänen, 2013). Matemaattisissa taidoissa taitavammat oppilaat todennäköisimmin hyötyvät matematiikan opettelemisesta (Jordan ym., 2009; Morgan, ym., 2009), heikosti suoriutuvien jäädessä yhä enemmän taidoissa jälkeen (Morgan, Farkas & Wu, 2011; Stanovich, 1986). Suomessa tehdyn Alkumittaus-tutkimuksen mukaan sekä heikosti matematiikkaa osaavista että matematiikan huippuosaajista suurempi osa on poikia (Ukkola & Metsämuuronen, 2019).

Tyypillisin ominaisuus oppilailla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, on heikompien laskustrategioiden käyttö (Gersten ym., 2005; Koponen ym., 2018; Ostad, 1997), kuten turvautuminen sormilla laskemiseen, lukujonojen lueteluun tai arvaamiseen tehtävän vaikeustasosta riippumatta (Ostad, 1997; Geary ym., 2004). Laskutaito kehittyy tavallisesti ensimmäisillä luokilla lukujen luettelusta kohti muistiin palauttamisen strategioita (Carr & Alexeev, 2011; Geary Hoard & Bailey, 2011), mutta oppilailla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, tätä samaa kehitystä ei tapahdu, vaan heikommat strategiat jäävät käyttöön (Koponen ym., 2018; Ostad, 1997; Rusanen & Räsänen, 2012). Näillä oppilailla on todettu olevan vakavia puutteita erityisesti lukujonotaidoissa (Aunola & Nurmi, 2018), lukujonojen mielessä hahmottamisessa (Geary, ym., 2008) sekä muistista mieleen palauttamisessa (Geary, 1993, 2004; Geary Hoard, & Bailey, 2011; Geary ym., 2007; Gersten ym., 2005; Jordan ym., 2003; Vanbinst ym., 2014). Muistista palauttamisen vaikeudet ovat keskeinen tekijä heikkojen laskustrategioiden käytössä ja tämä johtaa heikompaan laskusujuvuuteen (Koponen ym., 2018), sillä erilaisten laskustrategioiden käyttö on olennainen tekijä laskusujuvuuden kehittämisen kannalta (Siegler, 1996). Laskusujuvuus on yksi merkittävimmistä teki-

jöistä, joka erottaa oppilaat, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia tyypillisesti suoriutuvista vertaisistaan (Jordan ym., 2003; Locuniak & Jordan, 2008; Rusanen & Räsänen, 2012).

Heikompien strategioiden käytön vuoksi oppilaat, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, käyttävät enemmän aikaa laskujen ratkaisemiseen (Geary, 1993) sekä tekevät enemmän virheitä kuin tyypillisesti matematiikassa suoriutuvat oppilaat (Geary, 1990, 1993; Geary & Brown, 1991; Geary, Fan & Bow-Thomas, 1992; Geary ym., 2004; Vanbinst ym., 2014). Virheitä tehdään sekä lukujen luettelemisessa että muistista palauttamisessa (Geary, 1993). Lapset, joilla on matematiikan oppimisvaikeus, ovat myös vähemmän taitavia huomaamaan tekemänsä virheet (Geary, Bow-Thomas & Yao, 1992; Geary ym., 2007).

Matemaattiset oppimisvaikeudet määritellään raja-arvon perusteella, jolloin niillä oppilailta, jotka suoriutuvat alle raja-arvon, katsotaan olevan oppimisvaikeuksia (Mazzocco & Thompson, 2005). Matemaattisten oppimisvaikeuksien määrittäminen ei ole ongelmattonta (Mazzocco & Myers, 2003) ja erityisenä haasteena matemaattisten oppimisvaikeuksien määrittelyssä on erilaisten raja-arvojen käyttö tutkimuksissa (Murphy ym., 2007; Vukovic & Siegel, 2010). Esimerkiksi Räsänen (2012) mukaan matemaattisia oppimisvaikeuksia on oppilailta, jotka kuuluvat alimpaan 5–7 persentiiliin, kun taas Geary (2011) asettaa raja-arvoksi kymmenen persentiiliä ja Fuchs kumppaneineen (2005) 25 persentiiliä. Näitä suurempia raja-arvoja, kuten 35–45 persentiiliä on tyypillisesti käytetty laajemman otannan saamiseksi (Murphy ym., 2007). Matemaattisten oppimisvaikeuksien lisäksi tutkimuksissa on tyypillisesti haluttu rajata heikosti suoriutuvien joukko, jolle tyypillistä on heikko matemaattinen suoriutumisen ilman kriteereihin sopivia matemaattisen oppimisen vaikeuksia (esim. Geary, Hoard & Bailey, 2011). Heikosti suoriutuvien heikkoa menestystä matemaattisissa taidoissa saattaa selittää matematiikkaan liittyvien kognitiivisten taitojen heikkous spesifimpien matematiikan taitojen heikkouksien sijaan (Murphy ym., 2007). Osa siitä joukosta, jolla on todettu matemaattisia oppimisvaikeuksia, ei kuulu tähän joukkoon myöhemmillä mittauskerroilla (Gersten ym., 2005; Mazzocco &

Myers, 2003; Mazzocco & Räsänen, 2013). Tutkimuksessa tiukempien raja-arvojen asettaminen saattaa johtaa oppilaiden, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, valikoitumiseen pois otannasta, kun taas väljempi raja-arvo johtaa otantaan, jossa osalla ei oppimisvaikeuksia ole (Chong & Siegel, 2008; Geary ym., 2007). Suomessa tehdyssä tutkimuksessa matemaattisissa taidoissa sukupuolten välillä ei havaittu eroja raja-arvosta riippumatta (Räsänen, Närhi & Aunio, 2010).

## 1.4 Tutkimusongelmat

Tutkimuksessa oli kolme tavoitetta. Ensimmäisenä tavoitteena oli selvittää missä määrin ensimmäisen luokan lukujonotaidot ennustavat ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan laskusujuvuutta sekä miten tytöt ja pojat eroavat lukujonotaitojen yhteydessä myöhempään laskusujuvuuteen. Tutkittaessa missä määrin lukujonotaidot ovat yhteydessä myöhempään laskusujuvuuteen tulee ottaa huomioon yhteyteen vaikuttavat kognitiiviset taustatekijät (ks. Geary, 2011). Varhaiseen laskutaitoon on vahvasti yhteydessä työmuisti (Alloway, ym., 2005; De Smedt, ym., 2009; Geary, 2000; Murphy ym., 2007), minkä takia työmuisti kontrolloitiin tässä tutkimuksessa. Tutkimus pohjautuu työmuistin osalta Baddeleyn ja Hitchin malliin (ks. Baddeley, 1992). Koska lukujonotaidot edellyttävät työmuistin eri osa-alueista sekä visuospatiaalista (Geary ym., 2008) että kielellistä työmuistia (Logie & Baddeley, 1987), kontrolloitiin tässä tutkimuksessa molemmat työmuistin osa-alueet. On viitteitä siitä, että lukujonotaidot moderoisivat työmuistin ja laskusujuvuuden välistä yhteyttä (Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016), jonka vuoksi tutkimuksessa otettiin tämä mahdollisuus huomioon.

Toisena tavoitteena oli selvittää riskiryhmän laskusujuvuuden kehittymistä ensimmäiseltä toiselle ja kolmannelle luokalle. Lisäksi tutkittiin, miten oppilaat, joilla on riski matemaattisiin oppimisvaikeuksiin sekä oppilaat, jotka suoriutuvat heikosti matematiikassa eroavat laskusujuvuuden kehityksessä. Lisäksi selvitettiin sukupuolten välisiä eroja laskusujuvuuden kehityksessä. Kolmantena tavoitteena oli tarkastella riskiryhmän lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä tekemien

virheiden ja hyppyjen määriä. Lisäksi tutkittiin virheiden tekemisen yhteyttä laskusujuvuuden kehitykseen. Lopuksi tarkasteltiin sukupuolten välisiä eroja virheiden määrissä.

Riskiryhmän raja-arvoksi asetettiin 25 persentiiliä, johon katsotaan kuuluviksi oppilaat, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia sekä heikosti suoriutuvat oppilaat (Fuchs, ym. 2005). Riskiryhmä rajattiin ensimmäisen luokan lukujonotaitoja mittaavien tehtävien perusteella. Lisäksi riskiryhmä jaettiin kahteen alaryhmään ensimmäisen luokan lukujonotaitojen mediaanin kohdalta, jolloin kumpaankin alaryhmään kuului puolet oppilasta. Lukujonotaidoissa heikompaa puoliskoa (alin 12,5 persentiili) kutsutaan tässä tutkimuksessa matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmäksi ja vahvempaa puoliskoa (12,5-25 persentiili) kutsutaan heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmäksi.

Tutkimuskysymykset:

1. Missä määrin ensimmäisen luokan lukujonotaidot ennustavat ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan laskusujuvuutta, kun työmuisti on kontrolloitu?
  - 1.1 Onko sukupuolten välillä eroja?
  
2. Millaista on riskiryhmän, eli ensimmäisellä luokalla lukujonotaidoissa alimman 25 persentiilin, laskusujuvuuden kehitys laskusujuvuudessa vuosiluokilla 1-3?
  - 2.1 Eroaako laskusujuvuuden kehitys matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmässä ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmässä ensimmäiseltä toiselle ja kolmannelle luokalle?
  - 2.3 Onko sukupuoli yhteydessä siihen, kuuluuko oppilas matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmään vai heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmään ja onko sukupuolten välillä eroja laskusujuvuuden kehityksessä?



3. Kuinka paljon virheitä ja hyppyjä riskiryhmään, eli lukujonotaidoissa alimpaan 25 persentiiliin, kuuluvat oppilaat tekivät sekä miten virheiden ja hyppyjen määrät ovat yhteydessä laskusujuvuuden kehitykseen vuosiluokilla 1-3 koko riskiryhmässä?

3.1. Onko sukupuolten välillä eroja?

## 2 TUTKIMUSMENETELMÄT

### 2.1 Tutkimuskonteksti ja tutkittavat

Tutkimuksen aineisto on osa Suomen Akatemian (277340) rahoittamaa Lasten luku- ja laskutaidon sujuvuus -hanketta (FLARE), jonka vastuullisena johtajana toimi professori Mikko Aro. FLARE -hankkeen toteuttamisessa noudatettiin tutkimuseettisiä periaatteita ja sen tekemiseen pyydettiin Jyväskylän yliopiston eettisen toimikunnan lausunto, joka noudattaa Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (TENK, 2019) ohjeistusta. Tutkimuksen toteuttivat siihen koulutetut tutkimusavustajat. Testit teetettiin joko yksilö- (lukujonotaidot ja virheet, työmuisti) tai ryhmämittauksin (yhteen- ja vähennyslaskutaidot). Yksilötestit toteutettiin kahden kesken oppilaan kanssa ja ryhmätilanteissa jokainen oppilas täytti itsenäisesti omaa lomakettaan. Tutkimuksessa mittausajankohtia oli kolme: ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan keväällä.

FLARE -hankkeeseen osallistui viidestä Keski-Suomen koulusta 207 oppilasta, joista tähän tutkimukseen valikoituivat ne oppilaat, joiden tiedot löytyivät kaikista mittauksista (n = 190). Tutkimukseen osallistuvista 92 (48%) oli poikia ja 98 (52%) tyttöjä. Riskiryhmään kuuluviksi katsottiin ne oppilaat, jotka kuuluivat ensimmäisen luokan keväällä lukujonotaidoissa alimpaan 25 persentiiliin. Riskiryhmään kuului yhteensä 48 oppilasta, joista puolet oli poikia ja puolet tyttöjä. Matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmään (alin 12,5 persentiili) kuului 13 (54,2%) poikaa ja 11 (45,8%) tyttöjä. Heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmään (12,5-25 persentiili) kuului 11 (45,8%) poikaa ja 11 (54,2%) tyttöä. Riskiryhmään kuuluvista oppilaista neljältä oppilaalta ei saatu tietoja virheistä ja hypyistä, joten virheitä tutkittaessa tutkittavia on 44.

### 2.2 Mittarit

**Lukujonotaidot.** Lukujonotaitoja mitattiin ensimmäisen luokan keväällä neljällä eri tehtävyytyypillä (Koponen & Salminen, 2016): lukujen eteenpäin luetteleminen

alkaen luvusta 17, lukujen luetteleminen kahden luvun välein alkaen luvusta 1, lukujen luettelu taaksepäin lukuvälillä 20–0 sekä takaperin lukujen luetteleminen alkaen luvusta 52. Tehtävissä aikarajana oli 30 sekuntia, lukuun ottamatta toiseksi viimeisistä tehtävää, jossa mitattiin aikaa tehtävästä suoriutumiseen. Tehtävät mitoitettiin 30 sekuntiin ja laskettiin oikein lueteltujen lukujen määrä tässä ajassa. Arvoista tehtiin z-pisteet, jotta niiden vertaaminen muiden normeerattujen muuttujien kanssa on yksinkertaisempaa.

Tehtävätyypeistä muodostettiin summamuuttuja kuvaamaan lukujonotaitoja. Summamuuttujan testaamiseen ja korrelaatorakenteen kuvaamiseen käytettiin pääkomponenttianalyysiä. Lähtökohtana oli neljä lukujonotaitoja mittaava muuttujaa, joiden korrelaatorakennetta haluttiin kuvata ja selittää pääkomponenttimallin avulla. Pääkomponenttianalyysin perusteella (ks. liite 1) lukujonotaitoja kuvaamaan löydettiin yksi pääkomponentti, joka koostuu neljästä lukujonotaitoja kuvaavasta muuttujasta, jonka perusteella lukujonotaidoista muodostettiin yksi summamuuttuja. Summamuuttujan Cronbachin alfa on .787. Lukujonotaitoja kuvaavat muuttujat selittivät kaikkiaan 67 prosenttia oppilaiden lukujonotaitojen vaihtelusta.

**Laskusujuvuus.** Laskusujuvuus-mittari muodostettiin yhteen- ja vähennyslaskuista. Yhteenlaskutaitoa mitattiin testillä, johon kuului 120 yhteenlaskutehtävää (Koponen, 2010A) ja vähennyslaskutaitoa mitattiin testillä, johon kuului 120 vähennyslaskutehtävää (Koponen, 2010B). Kummankin yksittäisen testin tekemiseen oli aikaa kaksi minuuttia. Laskut olivat lukuvälillä 0-20 ja ne olivat joko yksi- tai kaksinumeroisia (esim. 3+2 tai 14-6). Yhteen- ja vähennyslaskutaitoja mitattiin jokaisella mittauskerralla samanlaisella mittarilla. Testistä saaduista tuloksista muodostettiin muuttujat, jotka kuvaavat minuutissa oikein laskettujen tehtävien määrää. Nämä muutettiin z-pisteiksi. Yhteen- ja vähennyslaskutaitoa mittaavista muuttujista muodostettiin laskusujuvuutta kuvaavat summamuuttujat jokaiselle mittauskerralle. Yhteen- ja vähennyslaskuja mittaavien muuttujien korrelaatiokerroin oli ensimmäisellä luokalla .659 ( $p < .001$  ja 95% luottamusväli [.49, .82]), toisella luokalla .860 ( $p < .001$ , 95% luottamusväli [.77, .92]) ja kolmannella luokalla .762 ( $p < .001$ , 95% luottamusväli [.60, .87]).

**Kielellinen työmuisti.** Kielellistä työmuistia mitattiin ensimmäisen luokan keväällä numerosarjatehtävällä ja sanasarjatehtävillä. Numerosarjatehtävä kuului WISC-IV-testipatteristoon (Weiss, 2006). Muistettavien numerosarjojen yksiköt olivat yksilukuisia numeroita. Oppilaan tehtävänä oli toistaa asteittain pidentyviä numerosarjoja takaperin. Ensimmäiseksi tehtävänä oli toistaa kahden yksikön mittainen sarja, josta sarjat pitenivät yksikkö kerrallaan seitsemän yksikön sarjaan asti. Jokaista samanpituista sarjaa oli kaksi kappaletta. Tehtävää jatkettiin, kunnes oppilas luetteli kaksi kertaa samanpituisen sarjan peräkkäin väärin. Jokaisesta oikein vastatusta sarjasta sai yhden pisteen ja maksimipistemäärä tehtävässä oli 12. Vastaava tehtävä tehtiin myös sanasarjoilla (Koponen & Aro, 2016). Kaikki kielellistä työmuistia kuvaavat muuttujat muutettiin z-pisteiksi.

Kielellisestä työmuistista muodostettiin summamuuttuja, jonka testaamiseen käytettiin pääkomponenttianalyysiä. Lähtökohtana oli neljä kielellistä työmuistia kuvaavaa muuttujaa (ks. liite 1), jotka latautuivat samalle pääkomponentille ja selittivät 53 prosenttia oppilaiden kielellisen työmuistin vaihtelusta, joista muodostettiin summamuuttuja kuvaamaan kielellistä työmuistia. Summamuuttujan Cronbachin alfa on .709.

**Visuospatiaalinen työmuisti.** Visuospatiaalista työmuistia mitattiin Corsi -testillä (1972). Corsi -testi tehtiin tietokoneella, jonka näytöllä oli joukko samanlaisia palikoita. Ennen varsinaista tehtävää oppilas sai esimerkin tehtävän suorittamisesta sekä kaksi harjoituskertaa suoritettavakseen. Tietokoneen näytön palikoihin tuli valo vuorotellen muodostaen sarjan, jonka jälkeen oppilaan tehtävänä oli hiirellä klikkaamalla toistaa sama sarja. Jos oppilas huomasi tehneensä virheen, oli sarja mahdollista katsoa uudelleen ja yrittää toistaa sarja. Visuospatiaalista työmuistia kuvaava muuttuja saatiin laskemalla yhteen oikein suoritettujen sarjojen määrä. Maksimipistemäärä tehtävässä oli 14 pistettä. Muuttujan arvot muutettiin z-pisteiksi.

**Virheet ja hypyt.** Lukujonotaitoa mittaavissa tehtävissä oli kahden tyyppiä virheitä; virheellisiä numeroita sekä liihyppäyksiä. Tutkimusavustaja merkitsi lomakkeeseen lukujonon päälle virheelliset luvut ja ympyröi liihyppätyt luvut. Virheitä, jotka lapsi huomasi ja korjasi itse, ei merkitty ylös. Oppilaalle ei

korjattu yksittäisiä virheitä, mutta jos oppilas muutti koko tehtävän luonnetta (esimerkiksi lähti luettelemaan lukujonoa toiseen suuntaan), ohjattiin oppilas kohtaan, jossa oli viimeksi luetellut oikein. Ajanottoa ei pysäytetty virheiden ajaksi, mutta oppilaan annettiin luetella yhteensä 60 sekuntia. Kummastakin virhetyypistä tehtiin omat muuttujat: virheet ja hypyt.

### 2.3 Aineiston analyysi

Aineisto analysoitiin SPSS 26 -ohjelmalla. Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä selitettävänä muuttujina olivat ensimmäisen, toisen sekä kolmannen luokan laskusujuvuus, joita tutkittiin erikseen ja ennustavina tekijöinä olivat ensimmäisen luokan lukujonotaidot, kielellinen työmuisti ja visuospatiaalinen työmuisti. Muuttujat olivat riittävän normaalisti jakautuneita. Näiden muuttujien välisiä suhteita tarkasteltiin hierarkkisella regressioanalyysillä, jossa ensimmäisellä askeleella malliin lisättiin kielellinen työmuisti ja visuospatiaalinen työmuisti, toisella askeleella lukujonotaidot ja kolmannella askeleella interaktiotermit. Interaktiotermeillä tutkittiin visuospatiaalisen ja kielellisen työmuistin moderaattori-vaikutusta lukujonotaitoihin. Ensimmäinen interaktiotermin muodostettiin lukujonotaitosummamuuttujasta sekä kielellistä työmuistia kuvaavasta summuuttujasta ja toinen interaktiotermin muodostettiin lukujonotaitosummamuuttujasta sekä visuospatiaalista työmuistia mittaavasta muuttujasta. Regressioanalyysi toteutettiin ensin koko tutkimusjoukolle, jonka jälkeen erikseen sekä tytöille että pojille. Regressioanalyysissä riittävänä havaintomääränä voidaan pitää 40 havaintoa yhtä selittävää muuttujaa kohden (Tabachnick & Fidell, 2013), joten havaintojen määrä oli riittävä muuttujien lukumäärään nähden myös sukupuolten mukaan jaetussa tutkimusaineistossa.

Regressioanalyysin taustaoletuksena on, että selittävät muuttujat korreloivat selitettävän muuttujan kanssa. Lisäksi selittävien muuttujien ei tulisi korreloida keskenään voimakkaasti, jottei multikollinearisuudesta tule ongelmaa (Metsämuuronen, 2008). Selittävien muuttujien korrelaatiot olivat koko aineis-

tossa välillä .21-.38, pojilla välillä .26-.35 ja tytöillä välillä .15-.43, joten multikollineaarisuusongelmaa ei tullut. Multikollineaarisuus ja singulaarisuus ovat usein ongelmana erityisesti interaktiotermin kanssa (Tabachnick & Fidell, 2013), mutta tässä tutkimuksessa interaktiotermin kanssa ei syntynyt singulaarisuutta tai multikollineaarisuusongelmaa. Muuttujien väliset Pearsonin korrelaatiokerroimet sekä luottamusvälit esitetään liitteissä 2, 3 ja 4. Luottamusvälillä tarkoitetaan lukualuetta, jonka sisällä koko perusjoukon keskiarvo sijaitsee annetulla todennäköisyydellä, eli luottamusvälien avulla voidaan osoittaa tuloksien todennäköisyys perusjoukossa (Neyman, 1937). Tutkimuksessa käytettiin 95 prosentin luottamusväliä, jota on yleisimmin käytetty analyysissä (Zar, 1999).

Taustaoletuksena tarkistettiin mallin residuaalien normaalijakautuneisuus ja hajonnan homoskedastisuus eli jakauman tasaisuus (Metsämuuronen 2008). Graafisista tulostuksista selvisi residuaalien suuruusjärjestyksien lineaarisuus ja normaalisti jakautuneisuus sekä homoskedastisuus. Poikkeavat havainnot eli outlierit saattavat vääristää tuloksia (Cook, 1979), jonka takia aineistoa tutkittiin tarkastelemalla tarkemmin Cook'sin etäisyyksiä ja residuaalien itseisarvoja. Outlierien poissulkemiseksi Cook'sin etäisyyksien tulisi olla alle yhden (Cook & Weisberg, 1982) ja residuaalien itseisarvojen ei tulisi olla yli itseisarvon kolme (Tabachnick & Fidell, 2013). Diagnostisten tarkasteluiden perusteella aineistosta ei poistettu yhtäkään äärihavaintoa.

Toisessa tutkimuskysymyksessä riskiryhmän yhteen- ja vähennyslaskutaitoa mittaavien muuttujien raakapistemääristä muodostettiin laskusujuvuutta kuvaavat summamuuttujat ensimmäiselle, toiselle ja kolmannelle luokalle. Summamuuuttujien avulla laskettiin laskusujuvuuden kehitystä kuvaavat muutospistemäärät, jotka kuvaavat minuutissa tehtyjen tehtävien määrän muutosta eri mitausajankohtina. Ryhmien välisiä eroja matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmässä ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmässä sekä sukupuolten välillä arvioitiin Mann-Whitneyn U-testillä, sillä kaikki muuttujat eivät olleet normaalisti jakautuneita. Tyttöjen ja poikien sijoittumista matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmään tai heikosti matematiikassa suoriutuvien ris-

kiryhmään tarkasteltiin ristiintaulukoinnilla ja  $\chi^2$ -testillä. Kolmannessa kysymyksessä esitetään riskiryhmän keskimäärin tehdyt virheet ja hypyt. Riskiryhmän tekemien virheiden ja hyppyjen yhteyttä laskusujuvuuden kehitykseen tutkittiin U-testillä. Sukupuolen yhteyttä virheisiin ja hyppyihin tarkasteltiin ristiintaulukoinnilla ja  $\chi^2$ -testillä. U-testien tulokset esitetään visuaalisesti liitteissä boxplot-kuvioilla jokaisena mittausajankohtana. Tuloksissa esitetyt  $p$ -arvot ovat tarkkoja todennäköisyyksiä. Efektin kokoa arvioitiin U testissä  $r$ -arvolla, jota voidaan tulkita Cohenin (1988) luokituksen mukaan seuraavasti: efektin koko on pieni, kun  $r=.10-.29$ , keskisuuri  $r=.30-.49$  ja suuri, kun  $r=.50$  tai suurempi. Efektin kokoa  $\chi^2$  -testissä voidaan tulkita vastaavasti: efektin koko on pieni, kun  $\phi=0.10-.29$ , keskisuuri  $\phi= .30-.49$  ja suuri, kun  $\phi=.50$  tai suurempi (Cohen 1988).

### 3 TULOKSET

#### 3.1 Ensimmäisen luokan lukujonotaitojen yhteys ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan laskusujuvuuteen

Ensimmäisen luokan kielellinen työmuisti, visuospatiaalinen työmuisti ja lukujonotaidot selittivät ensimmäisen luokan laskusujuvuuden tason vaihtelusta yhteensä 49 prosenttia<sup>1</sup> (ks. taulukko 1) [mallin  $F(3, 195)=62.25$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 48%], kun taas toisen ja kolmannen luokan laskusujuvuuden tason vaihtelusta nämä selittivät yhteensä 37 prosenttia [toisella luokalla mallin  $F(3, 191)= 37.69$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 36% ja kolmannella luokalla mallin  $F(3, 186)=36.12$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 36%]. Toisella askelmalla lukujonotaidot lisäsi mallin selitysosuutta tilastollisesti erittäin merkitsevästi ensimmäisellä [muutoksen  $F(1, 195)=76.98$ ,  $p < .001$ ], toisella [muutoksen  $F(1, 191)= 55.40$ ,  $p < .001$ ] ja kolmannella [muutoksen  $F(1, 186)=48.09$ ,  $p < .001$ ] luokalla. Ensimmäisellä luokalla selitysasteen lisäys oli 20 prosenttia, toisella luokalla 18 prosenttia ja kolmannella luokalla 16 prosenttia. Toisella askelmalla lukujonotaitojen oma-vaikutus oli positiivinen ja tilastollisesti merkitsevä jokaisena mittausajankohdalla (ensimmäisellä  $B=.57$ ; toisella  $B=.55$  ja kolmannella  $B=.52$ ): mitä paremmat ensimmäisen luokan lukujonotaidot, sitä parempi oli myös lapsen laskusujuvuuden taso.

---

<sup>1</sup> Kolmannella askeleella malliin lisätyt interaktiotermit eivät lisänneet mallin selitysasetta, eivätkä olleet tilastollisesti merkitseviä ensimmäisellä [ $F(2, 193)= 0.01$ ,  $p= .990$ ], toisella [ $F(2, 189)= 0.67$ ,  $p= .515$ ] ja kolmannella [ $F(2, 184)= 0.36$ ,  $p= .701$ ] luokalla.



**TAULUKKO 1 Hierarkkisen regressioanalyysin tulokset ensimmäisen luokan lukujonotaitojen ja työmuistin yhteydestä laskusujuvuuteen ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan keväällä**

Muuttuja	B	B95%CI	sr <sup>2</sup>	r	Selitysaste	Muutos
Askel 1						
Kielellinen työmuisti 1.lk	0.57**	[0.42, 0.73]	.18	.50***		
2.lk	0.34**	[0.17, 0.51]	.06	.34***		
3.lk	0.38**	[0.20, 0.57]	.08	.35***		
Visuospatiaalinen työmuisti 1.lk	0.22**	[0.09, 0.35]	.05	.34***		
2.lk	0.28**	[0.15, 0.43]	.08	.39***		
3.lk	0.29**	[0.14, 0.44]	.08	.36***		
1.lk mallin F(2, 196)=39.55, p<.001						
2.lk mallin F(2, 192)=22.46, p<.001						
3.lk mallin F(2, 187)=24.07, p<.001						
					1.lk R <sup>2</sup> = .288*	
					2.lk R <sup>2</sup> = .190*	
					3.lk R <sup>2</sup> = .205*	
Askel 2						
Kielellinen työmuisti 1.lk	0.34**	[0.18, 0.51]	.06	.50***		
2.lk	0.12	[-0.03, 0.28]	.01	.34***		
3.lk	0.17*	[0.01, 0.35]	.01	.35***		
Visuospatiaalinen työmuisti 1.lk	0.16**	[0.05, 0.28]	.03	.34***		
2.lk	0.22**	[0.09, 0.36]	.05	.39***		
3.lk	0.23**	[0.09, 0.37]	.05	.36***		
Lukujonotaidot 1.lk	0.57**	[0.42, 0.71]	.20	.63***		
2.lk	0.55**	[0.41, 0.68]	.18	.57***		
3.lk	0.52**	[0.37, 0.65]	.16	.54***		
1.lk mallin F(3, 195)=62.25, p<.001						
2.lk mallin F(3, 191)=37.69, p<.001						
3.lk mallin F(3, 186)=36.12, p<.001						
					1.lk R <sup>2</sup> = .489*	ΔR <sup>2</sup> =.202
					2.lk R <sup>2</sup> = .372***	ΔR <sup>2</sup> =.182
					3.lk R <sup>2</sup> = .368***	ΔR <sup>2</sup> =.163

Huom. \* = p<.05; \*\* = p<.01; \*\*\* = p<.001. sr<sup>2</sup> = osakorrelaatiokertoimien neliöt.

Ensimmäisen luokan kielellinen työmuisti, visuospatiaalinen työmuisti ja lukujonotaidot selittivät laskusujuvuuden tason vaihtelusta ensimmäisen luokan keväällä pojilla yhteensä 53 prosenttia<sup>2</sup> (ks. taulukko 2 ja taulukko 3) [mallin  $F(3, 93) = 34.56$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 51%], kun tytöillä nämä selittivät yhteensä 48 prosenttia [mallin  $F(3, 98) = 29.92$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 46%]. Toisella askelmalla lukujonotaidot lisäsi mallin selitysosuutta tilastollisesti erittäin merkittävästi molemmilla sukupuolilla [pojilla muutoksen  $F(1, 93) = 53.02$ ,  $p < .001$ , tytöillä muutoksen  $F(1, 98) = 19.55$ ,  $p < .001$ ]. Pojilla selitysasteen lisäys oli 27 prosenttia ja tytöillä 10 prosenttia. Toisella askelmalla lukujonotaitojen omavaikutus oli sekä tytöillä että pojilla positiivinen ja tilastollisesti merkitsevä (poikien  $B = .70$ , tyttöjen  $B = .38$ ).

---

<sup>2</sup> Pojilla sekä tytöillä kolmannella askeleella malliin lisätyt interaktiotermit eivät lisänneet mallin selitysasetta eivätkä olleet tilastollisesti merkitseviä ensimmäisellä [pojilla  $F(2, 91) = 0.80$ ,  $p = .451$ ; tytöillä  $F(2, 96) = 0.11$ ,  $p = .892$ ], toisella [pojilla  $F(2, 89) = 1.19$ ,  $p = .310$ ; tytöillä  $F(2, 94) = 0.56$ ,  $p = .573$ ] eikä kolmannella [pojilla  $F(2, 86) = 0.69$ ,  $p = .507$ ; tytöillä  $F(2, 92) = 0.31$ ,  $p = .731$ ] luokalla.

**TAULUKKO 2 Hierarkkisen regressioanalyysin tulokset poikien ensimmäisen luokan lukujonotaitojen ja työmuistin yhteydestä laskusujuvuuteen ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan keväällä**

Muuttuja	B	B95%CI	sr <sup>2</sup>	r	Selitysaste	Muutos
Askel 1						
Kielellinen työmuisti 1.lk	0.55**	[0.29, 0.82]	.12	.44***		
2.lk	0.44*	[0.12, 0.81]	.07	.38***		
3.lk	0.31*	[0.02, 0.65]	.04	.32**		
Visuospatiaalinen työmuisti 1.lk	0.30**	[0.09, 0.52]	.08	.40***		
2.lk	0.39**	[0.18, 0.61]	.12	.49***		
3.lk	0.42**	[0.23, 0.64]	.14	.46***		
1.lk mallin F(2, 94)=16.31, p<.001						
2.lk mallin F(2, 92)=16.27, p<.001						
3.lk mallin F(2, 89)=14.47, p<.001						
					1.lk R <sup>2</sup> = .258***	
					2.lk R <sup>2</sup> = .261***	
					3.lk R <sup>2</sup> = .245***	
Askel 2						
Kielellinen työmuisti 1.lk	0.29*	[0.04, 0.52]	.03	.44***		
2.lk	0.23	[-0.04,	.02	.38***		
3.lk	0.09	[-0.18,	.00	.32**		
Visuospatiaalinen työmuisti 1.lk	0.20*	[0.03 0.38]	.03	.40***		
2.lk	0.30**	[0.08, 0.51]	.07	.49***		
3.lk	0.33**	[0.15, 0.54]	.09	.46***		
Lukujonotaidot 1.lk	0.70**	[0.50, 0.92]	.27	.68***		
2.lk	0.57**	[0.39, 0.75]	.18	.60***		
3.lk	0.59**	[0.39, 0.79]	.21	.59***		
1.lk mallin F(3, 93)=34.56, p<.001						
2.lk mallin F(3, 91)=23.75, p<.001						
3.lk mallin F(3, 88)=24.01, p<.001						
					1.lk R <sup>2</sup> = .527***	ΔR <sup>2</sup> =.270
					2.lk R <sup>2</sup> = .439***	ΔR <sup>2</sup> =.178
					3.lk R <sup>2</sup> = .450***	ΔR <sup>2</sup> = .205

Huom. \* = p<.05; \*\* = p<.01; \*\*\* = p<.001. sr<sup>2</sup> = osakorrelaatiokertoimien neliöt.

**TAULUKKO 3 Hierarkkisen regressioanalyysin tulokset tyttöjen ensimmäisen luokan lukujonotaitojen ja työmuistin yhteydestä laskusujuvuuteen ensimmäisen, toisen ja kolmannen luokan keväällä**

Muuttuja	B	B95%CI	sr <sup>2</sup>	r	Selitysaste	Muutos
Askel 1						
Kielellinen työmuisti 1.lk	0.59**	[0.42, 0.77]	.30	.60***		
2.lk	0.28**	[0.11, 0.46]	.08	.35***		
3.lk	0.44**	[0.23, 0.64]	.15	.42***		
Visuospatiaalinen työmuisti 1.lk	0.13	[0.00, 0.27]	.02	.26**		
2.lk	0.17	[-0.02, 0.37]	.04	.28**		
3.lk	0.15	[-0.03, 0.35]	.03	.24*		
1.lk mallin F(2, 99)=29.57, p<.001						
2.lk mallin F(2, 97)=8.69, p<.001						
3.lk mallin F(2, 95)=12.51, p<.001						
					1.lk R <sup>2</sup> = .374***	
					2.lk R <sup>2</sup> = .152***	
					3.lk R <sup>2</sup> = .208***	
Askel 2						
Kielellinen työmuisti 1.lk	0.43**	[0.22, 0.65]	.13	.60***		
2.lk	0.09	[-0.11, 0.27]	.01	.35***		
3.lk	0.28*	[0.08, 0.51]	.05	.42***		
Visuospatiaalinen työmuisti 1.lk	0.10	[-0.01, 0.23]	.01	.26**		
2.lk	0.14	[-0.03, 0.34]	.03	.28**		
3.lk	0.13	[-0.05, 0.32]	.02	.24*		
Lukujonotaidot 1.lk	0.38**	[0.21, 0.51]	.10	.57***		
2.lk	0.45**	[0.29, 0.61]	.16	.53***		
3.lk	0.36**	[0.19, 0.54]	.09	.46***		
1.lk mallin F(3, 98)=29.92, p<.001						
2.lk mallin F(3, 96)=14.60, p<.001						
3.lk mallin F(3, 94)=13.12, p<.001						
					1.lk R <sup>2</sup> = .478***	ΔR <sup>2</sup> =.104
					2.lk R <sup>2</sup> = .313***	ΔR <sup>2</sup> =.162
					3.lk R <sup>2</sup> = .295**	ΔR <sup>2</sup> =.087

Huom. \* = p<.05; \*\* = p<.01; \*\*\* = p<.001. sr<sup>2</sup> = osakorrelaatiokertoimien neliöt.

Ensimmäisen luokan kielellinen työmuisti, visuospatiaalinen työmuisti ja lukujonotaidot selittivät laskusujuvuuden tason vaihtelusta toisen luokan keväällä pojilla yhteensä 44 prosenttia (ks. taulukko 2 ja taulukko 3) [mallin  $F(3, 91) = 23.75$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 42%], kun taas tytöillä nämä selittivät yhteensä 31 prosenttia [mallin  $F(3, 96) = 14.61$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 29%]. Toisella askelmalla lukujonotaidot lisäsi mallin selitysosuutta tilastollisesti erittäin merkittävästi molemmilla sukupuolilla [pojilla muutoksen  $F(1, 91) = 28.85$ ,  $p < .001$ , tytöillä muutoksen  $F(1, 96) = 22.59$ ,  $p < .001$ ]. Pojilla selityksasteen lisäys oli 18 prosenttia ja tytöillä 16 prosenttia. Toisella askelmalla lukujonotaitojen omavaikutus oli sekä tytöillä että pojilla positiivinen ja tilastollisesti merkitsevä (poikien  $B = .57$ , tyttöjen  $B = .45$ ).

Ensimmäisen luokan kielellinen työmuisti, visuospatiaalinen työmuisti ja lukujonotaidot selittivät laskusujuvuuden tason vaihtelusta kolmannen luokan keväällä pojilla yhteensä 45 prosenttia (ks. taulukko 2 ja taulukko 3) [mallin  $F(3, 88) = 24.01$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 43%], kun taas tytöillä nämä selittivät yhteensä 30 prosenttia [mallin  $F(3, 94) = 13.12$ ,  $p < .001$ , korjattu selitysaste 27%]. Toisella askelmalla lukujonotaidot lisäsi mallin selitysosuutta tilastollisesti erittäin merkittävästi molemmilla sukupuolilla [pojilla muutoksen  $F(1, 88) = 32.78$ ,  $p < .001$ , tytöillä muutoksen  $F(1, 94) = 11.56$ ,  $p < .001$ ]. Pojilla selityksasteen osuus oli 21 prosenttia ja tytöillä 9 prosenttia. Toisella askelmalla lukujonotaitojen omavaikutus oli sekä tytöillä että pojilla positiivinen ja tilastollisesti merkitsevä (poikien  $B = .59$ , tyttöjen  $B = .36$ ).

### **3.2 Riskiryhmään kuuluvien oppilaiden laskusujuvuuden kehitys vuosiluokilla 1–3 sekä alaryhmien ja sukupuolten väliset erot laskusujuvuuden kehityksessä**

Riskiryhmään, eli ensimmäisellä luokalla lukujonotaidoissa alimpaan 25 prosenttiin, kuuluvat oppilaat tekivät keskimäärin 12 tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin ensimmäisellä luokalla ( $k_a = 12.03$ ,  $m_d = 10.25$ ,  $k_h = 7.32$ ); seitsemän tehtävää enemmän minuutissa toisella kuin ensimmäisellä luokalla

(ka=6.55, md=5.00, kh=6.06) ja viisi tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin toisella luokalla (ka=5.48, md=5.25, kh=5.68). Lukujonotaitojen perusteella puoliiksi jaetun riskiryhmän alaryhmät eivät eronneet toisistaan (ks. taulukko 4 ja liite 6): kummatkin alaryhmät tekivät kolmannella luokalla 12 tehtävää enemmän minuutissa kuin ensimmäisellä luokalla. Matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmä (alin 12,5 persentiili) teki keskimäärin kuusi tehtävää enemmän ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmä (12,5-25 persentiili) keskimäärin seitsemän tehtävää enemmän toisella kuin ensimmäisellä luokalla (ks. liite 7). Matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmä teki keskimäärin kuusi tehtävää enemmän ja heikosti matematiikassa suoriutuvien keskimäärin viisi tehtävää enemmän kolmannella kuin toisella luokalla (ks. liite 8). Millään luokalla matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmän ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmän laskusujuvuuden kehitys ei eronnut toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

**TAULUKKO 4. Matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmän (lukujonotaidoissa alin 12,5 persentiiliä) ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmän (lukujonotaidoissa 12,5-25 persentiiliä) laskusujuvuuden kehitys minuutissa tehtyjen tehtävien määrän mukaan sekä Mann-Whitneyn U -testin tulokset**

	Matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmä				Heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmä				U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>				
Laskusujuvuus ensimmäiseltä kolmannelle luokalle	12.06	9.75	7.29	24.46	12.00	10.50	7.50	24.54	287.00	-0.02	.988	0.00
Laskusujuvuus ensimmäiseltä toiselle luokalle	5.98	3.75	5.86	23.23	7.13	6.75	6.32	25.77	257.50	-0.63	.536	0.09
Laskusujuvuus toiselta kolmannelle luokalle	6.08	5.75	5.24	26.15	4.88	4.50	6.13	22.85	248.50	-0.82	.421	0.12

Ensimmäisen luokan keväänä lukujonotaitojen perusteella riskiryhmään kuuluvasta 48 oppilaasta puolet oli poikia ja puolet tyttöjä. Matemaattisten oppimishaasteiden riskiryhmään kuului yhteensä 24 oppilasta, joista 13 (54,2%) oli poikia ja 11 (45,8%) oli tyttöjä (ks. liite 5). Heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmään kuului yhteensä 24 oppilasta, joista 11 (45,8%) oli poikia ja 13 (54,2%) oli tyttöjä. Sukupuoli ei ollut yhteydessä siihen, kumpaan riskiryhmän alaryhmään oppilas kuului [ $\chi^2(1, 48)=1.33$ ,  $\Phi=.167$ ,  $p=.387$ ].

**TAULUKKO 5. Riskiryhmän, eli lukujonotaitojen alimman 25 persentiilin, poikien ja tyttöjen laskusujuvuuden kehitys minuutissa tehtyjen tehtävien määrän mukaan sekä Mann-Whitney U -testin tulokset**

	Pojat				Tytöt				U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>				
Laskusujuvuus ensimmäiseltä kolmannelle luokalle	11.77	9.25	7.78	25.29	12.29	11.00	6.99	23.27	269.00	-0.39	.701	0.06
Laskusujuvuus ensimmäiseltä toiselle luokalle	7.15	6.25	6.34	25.29	5.96	3.75	5.84	23.27	258.50	-0.61	.549	0.09
Laskusujuvuus toiselta kolmannelle luokalle	4.63	5.50	5.88	23.06	6.33	4.75	5.45	25.94	253.50	-0.71	.483	0.10

Riskiryhmässä sekä pojat että tytöt tekivät keskimäärin 12 tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin ensimmäisellä luokalla (ks. taulukko 5 ja liite 9). Pojat tekivät seitsemän tehtävää enemmän minuutissa toisella kuin ensimmäisellä luokalla ja viisi tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin toisella luokalla, kun taas tytöt tekivät kuusi tehtävää minuutissa enemmän sekä toiselta ensimmäiselle että kolmannelle toiselle luokalle (ks. liite 10 ja 11). Millään luokalla riskiryhmän laskusujuvuuden kehityksessä ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa sukupuolten välillä.

### 3.3 Riskiryhmän lukujonotaidoissa tehdyt virheet ja hypyt sekä niiden yhteys laskusujuvuuteen

Riskiryhmään (alin 25 persentiili) kuuluvat oppilaat tekivät lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä keskimäärin alle yhden virheen ( $ka=0.50$ ,  $md=0.50$ ,  $kh=0.51$ ) sekä alle yhden hypyn ( $ka=0.55$ ,  $md=1.00$ ,  $kh=0.50$ ). Molemmat alaryhmät tekivät keskimäärin alle yhden virheen (matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmä (alin 12,5 persentiili)  $ka=0.55$ ,  $md=1.00$ ,  $kh=0.51$ ; heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmä (12,5-25 persentiili)  $ka=0.45$ ,  $md=0.00$ ,  $kh=0.51$ ) ja alle yhden hypyn (matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmä  $ka=0.60$ ,  $md=1.00$ ,  $kh=0.50$ ; heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmä  $ka=0.50$ ,  $md=0.50$ ,  $kh=0.51$ ).

Oppilaat, jotka eivät tehneet lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä yhtäkään virhettä, tekivät keskimäärin 12 tehtävää enemmän minuutissa ja oppilaat, jotka tekivät virheitä, tekivät minuutissa keskimäärin 13 tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin ensimmäisellä luokalla (ks. taulukko 6 ja liite 12). Virheettömästi suoriutuneet tekivät keskimäärin kuusi tehtävää enemmän minuutissa ja virheitä tehneet tekivät keskimäärin kahdeksan tehtävää enemmän minuutissa toisella kuin ensimmäisellä luokalla (ks. liite 13). Sekä virheettömästi suoriutuneet että virheitä tehneet tekivät keskimäärin viisi tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin toisella luokalla (ks. liite 14). Millään luokalla virheettömästi suoriutuneiden ja virheitä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ei eronnut toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.



**TAULUKKO 6 Riskiryhmän, eli lukujonotaitojen alimman 25 persentiilin, virheet ja laskusujuvuuden kehitys minuutissa tehtyjen tehtävien määrän mukaan sekä Mann-Whitneyn U -testin tulokset**

	Ei virheitä				Virheitä				U- testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>				
Laskusujuvuus ensimmäiseltä kolmannelle luokalle	11.61	10.50	6.87	21.27	13.20	11.50	8.21	23.73	215.00	-0.63	.534	0.10
Laskusujuvuus ensimmäiseltä toiselle luokalle	6.25	4.25	5.78	22.95	7.95	9.25	6.04	22.05	187.50	-1.28	.204	0.19
Laskusujuvuus toiselta kolmannelle luokalle	5.36	5.25	6.43	20.02	5.25	4.75	5.24	24.98	232.00	-.024	.281	0.04

**TAULUKKO 7. Riskiryhmän, eli lukujonotaitojen alimman 25 persentiilin, hyppyjen määrät ja laskusujuvuuden kehitys minuutissa tehtyjen tehtävien määrän mukaan sekä Mann-Whitneyn U -testin tulokset**

	0-2 hyppyä				Yli 2 hyppyä				U- testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>	Ka	Md	Kh	Ka <sub>järj</sub>				
Laskusujuvuus ensimmäiseltä kolmannelle luokalle	10.73	9.75	6.66	19.75	13.81	12.25	8.04	24.79	185.00	-1.30	.199	0.20
Laskusujuvuus ensimmäiseltä toiselle luokalle	5.93	3.25	5.58	19.90	8.08	9.25	6.10	24.67	188.00	-1.23	.224	0.18
Laskusujuvuus toiselta kolmannelle luokalle	4.80	5.00	6.46	21.48	5.73	5.00	5.28	23.35	219.50	-0.48	.636	0.07

Oppilaat, jotka tekivät lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä vähemmän hyppyjä, tekivät keskimäärin 11 tehtävää enemmän minuutissa ja oppilaat, jotka tekivät enemmän hyppyjä, tekivät keskimäärin 14 tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin ensimmäisellä luokalla (ks. taulukko 7 ja liite 15). Vähemmän hyppyjä tehneet tekivät keskimäärin kuusi tehtävää enemmän minuutissa ja enemmän hyppyjä tehneet tekivät keskimäärin kahdeksan tehtävää enemmän toisella kuin ensimmäisellä luokalla (ks. liite 16). Vähemmän hyppyjä tehneet tekivät keskimäärin viisi tehtävää enemmän minuutissa kolmannella kuin toisella luokalla, kun enemmän hyppyjä tehneet tekivät keskimäärin kuusi tehtävää enemmän minuutissa (ks. liite 17). Millään luokalla vähemmän hyppyjä tehneiden ja enemmän hyppyjä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ei eronnut toisistaan merkitsevästi. Sukupuoli ei ollut yhteydessä siihen, tekikö oppilaat virheitä [ $\chi^2(1, 44)=.364$ ,  $\Phi=-.091$ ,  $p=.763$ ] tai hyppyjä [ $\chi^2(1, 44)=.367$ ,  $\Phi=-.091$ ,  $p=.763$ ].

## 4 POHDINTA

### 4.1 Tulosten tarkastelu

Tutkimuksen ensimmäisenä tavoitteena oli selvittää miten ensimmäisen luokan keväänä mitatut lukujonotaidot ovat yhteydessä laskusujuvuuteen ensimmäisellä, toisella ja kolmannella luokalla, kun kielellinen työmuisti ja visuospatiaalinen työmuisti ovat kontrolloituina. Ensimmäisen luokan kevään lukujonotaidot olivat yhteydessä laskusujuvuuteen jokaisella mittauspisteellä ja tulokset ovat yhtenevät aiempien tutkimusten kanssa (Aunola ym., 2004; 2010; Koponen ym., 2007; Koponen ym., 2016; Zhang ym., 2014), joiden mukaan lukujonotaidot ennustavat myöhempää laskusujuvuutta ja matemaattista osaamista. Lukujonotaidot lisäsivät laskusujuvuuden tason selitysosuutta ensimmäisellä luokalla 20 prosenttia, toisella 18 ja kolmannella 16 prosenttia. Tutkimuksessa lukujonotaitojen omavaikutus pysyi merkittävänä jokaisella luokalla. Ensimmäisellä luokalla lukujonotaitojen omavaikutus laskusujuvuuden selittäjänä oli 57 prosenttia, toisella 55 prosenttia ja kolmannella 52 prosenttia. Lukujonotaitojen yhteydet laskusujuvuuteen olivat voimakkuudeltaan lähellä aiempien tutkimusten tuloksia, joissa tutkittiin lukujonotaitojen yhteyttä myöhempään laskusujuvuuteen (Koponen, ym., 2016; Aunola, ym., 2004). Selitysosuus laski ensimmäiseltä kolmannelle luokalle vain 5 prosenttiyksikköä, eli lukujonotaidot ovat tärkeä laskusujuvuuden ennustaja kaikkien kolmen ensimmäisen kouluvuoden ajan. Lukujonotaitojen yhteys laskusujuvuuteen johtuu mahdollisesti siitä, että lukujonotaidot ovat tärkeä perusta laskusujuvuudelle (Aunio & Räsänen, 2015).

Sukupuolten välillä oli eroja lukujonotaitojen omavaikutuksessa jokaisena mittausajankohtana; pojilla lukujonotaidot olivat vahvemmin yhteydessä myöhempään laskusujuvuuden tasoon kuin tytöillä kaikkina kolmena mittausajankohtana. Tämä saattaa johtua siitä, että aiemmin on havaittu poikien lukujonotaitojen olevan vahvemmat koulun alussa kuin tyttöjen (Zhang ym. 2014). Vahvojen lukujonotaitojen on todettu olevan yhteydessä muistista mieleen palautta-

miseen (Barrouillet & Fayol, 1998), joka mahdollistaa sujuvan laskemisen (Rusanen & Räsänen, 2012). Pojilla lukujonotaitojen omavaikutus laski ensimmäiseltä toiselle luokalle ja nousi hieman toiselta kolmannella luokalla. Tyttöillä ilmiö oli päinvastainen; lukujonotaitojen omavaikutus oli suurinta toisella luokalla ja laski alhaisimmaksi kolmannella luokalla. Sekä tytöillä että pojilla lukujonotaitojen omavaikutus oli ensimmäisellä luokalla suurempaa kuin kolmannella luokalla.

Vaikka tässä tutkimuksessa ei ollut tavoitteena tutkia työmuistin yhteyttä laskusujuvuuteen, saatiin työmuistin yhteydestä laskusujuvuuteen ja sukupuolten välisistä eroista kiinnostavia tuloksia. Koko aineistoa tarkasteltaessa kielellinen työmuisti oli vahvemmin yhteydessä laskusujuvuuteen kuin visuospatiaalinen työmuisti kaikkina kolmena mittausajankohtana, kun lukujonotaidot eivät olleet vielä mukana mallissa. Se on linjassa aiemmassa tutkimustiedon kanssa, jonka mukaan kielellinen työmuisti on merkityksellinen varhaisessa laskutaidossa, kun taas visuospatiaalinen työmuisti ennustaa vaihtelua myöhemmissä matematiikan taidossa (Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016; Toll & Van Luit, 2014). Kun toisella askeleella lisättiin lukujonotaidot, sekä kielellisen että visuospatiaalisen työmuistin omavaikutus laski, mutta omavaikutukset pysyivät tilastollisesti merkitsevinä, lukuun ottamatta toisen luokan kielellistä työmuistia. Lukujonotaitojen moderaattorivaikutusta työmuistin ja laskusujuvuuden välillä tutkittiin näistä muodostettujen interaktiotermin avulla. Moderaattorivaikutusta ei tutkimuksessa löydetty, mikä on ristiriidassa Pengin ja kollegoiden (2016) meta-analyysin kanssa, jossa työmuistin ja lukujonotaitojen väliltä löytyi mode-roiva yhteys.

Työmuistin eri yksiköiden yhteydessä laskusujuvuuden tasoon oli eroavaisuuksia sukupuolten välillä. Kielellisen työmuistin omavaikutus oli pojilla suurempi ainoastaan toisella luokalla, kun tytöillä kielellisen työmuistin omavaikutus oli suurempi ensimmäisellä ja kolmannella luokalla, kun lukujonotaidot eivät olleet mukana mallissa. Kielellisen työmuistin omavaikutus oli tilastollisesti merkitsevää jokaisena mittausajankohtana kummallakin sukupuolella. Kun lukujonotaidot lisättiin malliin, oli kielellinen työmuisti pojilla tilastollisesti merkitsevä

ainoastaan ensimmäisellä luokalla, kun taas tytöillä kielellinen työmuisti oli tilastollisesti merkitsevää ensimmäisellä ja kolmannella luokalla. Kielellisellä työmuistilla oli tytöillä suurempi omavaikutus laskusujuvuuteen ensimmäisellä ja kolmannella luokalla kuin pojilla. Sekä ilman että lukujonotaitojen kanssa pojilla visuospatiaalinen työmuisti oli tilastollisesti merkitsevää jokaisena mittausajankohtana, kun taas tytöillä visuospatiaalinen työmuisti ei ollut minään mittausajankohtana tilastollisesti merkitsevää. Visuospatiaalisella työmuistilla oli selkeästi suurempi omavaikutus laskusujuvuuteen pojilla kuin tytöillä. Visuospatiaalisen työmuistin omavaikutus kasvoi pojilla ensimmäiseltä luokalta toiselle ja kolmannelle luokalle. Erot sukupuolten välillä työmuistin eri osa-alueiden yhteydessä laskusujuvuuteen saattaa viitata erilaisten strategioiden käyttöön, sillä visuospatiaalinen työmuisti on olennainen erityisesti heikompia strategioita käytettäessä kuten sormilla laskiessa (DeSmedt, ym., 2009; Rasmussen & Bisanz, 2005).

Tutkimuksen toisena tavoitteena oli selvittää riskiryhmän, eli ensimmäisellä luokalla lukujonotaitojen alimman 25 persentiilin, laskusujuvuuden kehitystä sekä matematiikan oppimisvaikeuksien riskiryhmän (alin 12,5 persentiili) ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmän (12,5-25 persentiili) välisiä eroja laskusujuvuuden kehityksessä ensimmäiseltä toiselle ja kolmannelle luokalle. Lisäksi tutkittiin, onko sukupuolten välillä eroja riskiryhmien alaryhmiin sijoittumisessa ja laskusujuvuuden kehityksessä. Laskusujuvuuden kehityksessä oli suuria eroavaisuuksia oppilaiden välillä; kaksi oppilasta teki kolmannella luokalla alle yhden tehtävän enemmän kuin ensimmäisellä luokalla, kun taas yksi oppilas teki lähes 30 tehtävää enemmän. Matematiikassa heikommin suoriutuvien onkin todettu käyttävän heikompia laskustrategioita, joilla on vaikutusta laskusujuvuuden kehitykseen (Siegler, 1996). Suurta vaihtelua oppilaiden välillä laskusujuvuuden kehityksessä saattaa selittää, että osa riskiryhmään kuuluvista ei aiempien tutkimuksen mukaan välttämättä kuulu siihen myöhemmin (Gersten ym., 2005; Mazzocco & Myers, 2003; Mazzocco & Räsänen, 2013). Laskusujuvuuden kehitys ensimmäiseltä kolmannelle luokalle ei kuitenkaan eronnut ma-

temaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmän ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmän välillä tilastollisesti merkitsevästi. Ensimmäiseltä toiselle luokalle heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmä teki keskimäärin yhden tehtävän enemmän kuin matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmä, mutta toiselta kolmannelle luokalle kehitys oli päinvastaista. Tulos on yllättävä, sillä aiemmissa tutkimuksissa laskusujuvuuden vaikeuksien on katsottu olevan yksi matemaattisten oppimisvaikeuksien ominaispiirteistä (Jordan ym., 2003; Locuniak & Jordan, 2008; Rusanen & Räsänen, 2012). Lukujonotaidoissa heikosti suoriutuminen ensimmäisellä luokalla ei vaikuta olevan erotteleva tekijä laskusujuvuuden kehityksessä riskiryhmän sisällä. Aiemmissa tutkimuksissa riskiryhmä on jaoteltu sen vuoksi, että ryhmät eroavat toisistaan (esim. Geary ym., 2011). Tässä tutkimuksessa ei kuitenkaan löydetty näiden kahden alaryhmän väliltä eroja.

Riskiryhmään kuului tutkimuksessa yhtä paljon poikia kuin tyttöjä. Sukupuolella ei ollut merkitystä siihen, kumpaan alaryhmään oppilas kuului, joka on ristiriidassa Ukkolan ja Metsämuurosen (2019) tutkimuksen kanssa, jonka mukaan kaikkein heikoimmin matematiikassa suoriutuvista suurempi osa on poikia. Poikien ja tyttöjen väliltä ei myöskään löydetty eroja laskusujuvuuden kehityksessä tai virheiden määrissä. Zhangin ja kumppaneiden (2014) tutkimuksessa poikien lukujonotaidot olivat paremmat esikouluiässä ja pojat suoriutuivat paremmin laskusujuvuutta mittaavissa tehtävissä, mutta tutkimusta ei ollut rajattu riskiryhmään.

Kolmantena tavoitteena oli tutkia koko riskiryhmän lukujonotaitoa mittaavissa tehtävissä tehtyjen virheiden ja hyppyjen määriä. Riskiryhmässä tehtiin lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä erittäin vähän virheitä ja hyppyjä; keskimäärin riskiryhmässä tehtiin alle yksi virhe sekä alle yksi hyppy. Tämä on ristiriidassa aiempien tutkimusten kanssa, joissa oppilaat, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, tekivät virheitä lukujen luettelussa (Geary, 1990, 1993; Geary & Brown, 1991; Geary, Fan & Bow-Thomas, 1992; Geary ym., 2004; Vanbinst ym., 2014). Syy lukujonotaidoissa alimpaan 25 persenttiin sijoittumisessa ei siis to-

dennäköisesti johdu virheiden määrästä, vaan hitaammasta lukujen luettelemisesta. Oppilailla, joilla on matemaattisia oppisvaikeuksia, on havaittu aiemmissa tutkimuksissa olevan puutteita prosessinopeudessa (Geary & Brown 1991) sekä muistista mieleen palauttamisessa (Geary ym., 2011), jotka saattavat olla yhteydessä hitaampaan lukujen luetteluun. Lisäksi näillä oppilailla on todettu olevan vaikeuksia lukujonojen mielessä hahmottamisessa (Geary, ym. 2008). Riskiryhmän virheitä ja hyppyjä tarkastellessa havaittiin, että ne oppilaat, jotka tekivät virheitä, eivät olleet samoja oppilaita, jotka tekivät hyppyjä. Virheiden ja hyppysten voidaan siis ajatella johtuvat eri syistä. Hidas laskeminen on yhdistetty heikompiin laskustrategioihin ja virheisiin (Geary, 1993), kun taas hypyt saattavat olla seurausta esimerkiksi kiireestä.

Lisäksi tutkittiin, miten virheet ja hypyt vaikuttavat laskusujuvuuden kehitykseen sekä sukupuolten välisiä eroja. Virheettömästi suoriutuneiden ja virheitä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ei eronnut toisistaan, jolloin virheiden tekemisellä ei nähdä yhteyttä laskusujuvuuden kehitykseen. Samankaltainen tulos saatiin hyppysten kanssa; vähän hyppyjä tehneiden ja enemmän hyppyjä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ei eronnut toisistaan. Virheet ja hypyt eivät olleet tilastollisesti merkitsevästi yhteydessä laskusujuvuuden kehitykseen. Myöskään sukupuoli ei ollut yhteydessä siihen, tekikö oppilas virheitä vai ei. Tuloksiin saattaa vaikuttaa se, että virheitä tehtiin ylipäättään hyvin vähän.

## **4.2 Tutkimuksen vahvuudet ja rajoitukset**

Tutkimuksen vahvuutena oli kattava otos. TIMMS-tutkimuksen mukaan alueelliset erot ovat Suomessa pieniä (Vettenranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka & Rautopuro, 2016), joten otanta Jyväskylän alueelta ei vaikuta merkittävästi tutkimustulosten yleistettävyyteen. Lisäksi sukupuolijakauma oli tutkimuksessa tasainen. Etuna tässä tutkimuksessa oli pitkittäisasetelma, sillä pitkittäistutkimuksia on Suomessa vielä suhteellisen vähän. Toisessa tutkimuskysymyksessä tutkittavien joukko rajattiin riskiryhmään, joka oli melko pieni (n=48).

Regressioanalyysin oletuksena on, että vain malliin asetetut selittävät muuttujat vaikuttavat selitettävään muuttujaan. Regressioanalyysissä kontrolloitiin kielellinen työmuisti ja visuospatiaalinen työmuisti, sillä työmuistin on todettu olevan yhteydessä matemaattisiin taitoihin (Alloway, ym., 2005; De Smedt, ym., 2009; Geary, 2000; Murphy ym., 2007). Muita kognitiivisia tekijöitä ei mallissa kontrolloitu, mikä saattaa vaikuttaa tuloksiin siten, että lukujonotaidot saavat suuremman omavaikutuksen, kuin sen todellisuudessa tulisi saada. Kognitiiviset tekijät ovat yhteydessä laskutaitoon (Geary, 2011), joista esimerkiksi nopean sarjallisen nimeämisen (Koponen ym. 2016) ja numerontuntemuksen (Locuniak & Jordan, 2008) on todettu olevan yhteydessä laskusujuvuuteen. Näitä ei kuitenkaan tässä tutkimuksessa kontrolloitu, mikä on tutkimuksen rajoituksena. Malliin asetetut muuttujat selittivät kuitenkin merkittävän osan laskusujuvuudesta, joten tutkimuksen muuttujien voidaan ajatella olevan hyvin valittu.

Erityisesti ihmistieteissä regressioanalyysin oletuksena on, että käytetyt muuttujat on mitattu virheettömästi; väärin mitatut muuttujat väärentävät regressiokerrointa (Tabachnick & Fidell, 2013). Mittareiden luotettavuuden arvioinnissa tulee ottaa huomioon tekijät, jotka saattavat vaikuttaa mittaustuloksiin. Laskusujuvuutta mittaavat tehtävät tehtiin ryhmätilanteessa, jossa ympäröivä hälinä saattaa vaikeuttaa tarkkaavaisuuden ylläpitämistä. Tarkkaavaisuudella on todettu olevan vaikutusta matematiikassa suoriutumiseen (Fuchs, ym., 2006). Oppilailla, joilla on vaikeuksia ylläpitää tarkkaavaisuutta ryhmätilanteissa, saattavat suoriutua heikommin tällaisissa tilanteissa. Lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä käytettiin aikarajaa. Lukujen luettelemisen nopeuteen on saattanut vaikuttaa muutkin tekijät kuin lukujonotaitojen sujuva hallinta; prosessointinopeuden on todettu olevan heikompi oppilailla, joilla on matemaattisen oppimisen vaikeuksia (Geary, 1993). Oppilaan artikuloitinopeudella on saattanut olla vaikutusta siihen, kuinka monta numeroa oppilas ehtii luetella annetussa ajassa. Lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä oppilailla oli mahdollisuus korjata tehdyt virheet, jos oppilas huomasi ne itse, mikä on saattanut vaikuttaa virheiden määrän vähäisyyteen. Toisaalta Geary kumppaneineen (1992) havaitsi tutkimukseensa, että lapset, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, olivat heikompia



huomaamaan tekemänsä virheet, minkä takia virheiden korjaamisella ei riskiryhmässä oleteta olleen suurta merkitystä. Oppimisen pulmat päällekkäistyvät ja matemaattiset oppimisvaikeudet esiintyvät usein yhdessä lukemisen vaikeuksien kanssa (Jordan ym., 2003). Fuchsin ja kollegoiden (2006) mukaan fonologinen koodaus korreloi matemaattisen suoriutumisen kanssa. Laskusujuvuutta mittaavissa tehtävissä laskemisen hitaudessa kyse saattaa olla myös lukemisen vaikeudesta. Tutkimuksen vahvuutena on mittareiden pysyminen samoina jokaisena mittausajankohtana.

Keskustelua käydään siitä, koostuuko työmuisti toisistaan riippumattomista yksiköistä vai ovatko työmuistin yksiköt toisistaan riippuvia, jolloin työmuistin eri alayksiköiden yhteydessä laskutaitoon ei tulisi olla eroja (Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016). Tämän tutkimuksen tuloksista voidaan päätellä kielellisen ja visuospatiaalisen työmuistin olevan erillisiä yksiköitä: ne olivat yhteydessä eri voimakkuuksilla, eri ajankohtina ja eri tavalla sukupuolten välillä. Tässä tutkimuksessa kielellistä työmuistia mitattiin sana- ja numerosarjatehtävällä sekä etu- että takaperin lueteltuina, kun toisissa tutkimuksissa sana- ja numerosarjatehtävällä lueteltuina etuperin on viitattu lyhytkestoiseen muistiin ja takaperin sarjatehtävillä kielelliseen työmuistiin (esim. Passolunghi ym., 2007). Työmuistimittarissa numerosarjatehtävissä saattaa vaikuttaa myös numeroiden prosessointi (Vanbinst ym., 2014). Työmuistimittarin vahvuutena on, että siinä käytettiin normeerattua WISC IV- numerosarjatestiä (Weiss, 2006).

Toisessa ja kolmannessa tutkimuskysymyksessä riskiryhmään valikoituvat oppilaat, jotka kuuluivat ensimmäisen luokan keväällä 25 persentiiliin lukujonotaitoja mittaavissa tehtävissä. Tutkimuksessa valitulla raja-arvolla on merkitystä siihen, millaisia ominaisuuksia matemaattiset oppimisvaikeukset saavat (Mazzocco & Räsänen, 2013). Tässä tutkimuksessa ei otettu kuitenkaan huomioon, että oppilaat, jotka kuuluvat ensimmäisenä mittausajankohtana riskiryhmään eivät välttämättä kuuluneet siihen myöhemmillä mittauskerroilla (Gersten ym., 2005; Mazzocco & Myers, 2003; Mazzocco & Räsänen, 2013). Riskiryhmä on

saattanut muuttua mittauspisteiden välillä. Ei tarkalleen tiedetä, minkälaista tukea kukin oppilas on saanut testien väleissä, ja miten tämä on vaikuttanut riskiryhmään kuulumiseen myöhemmillä mittauskerroilla.

Riskiryhmä valikoitui vain lukujonotaitoja mittaavien tehtävien perusteella ensimmäisen luokan keväällä, vaikka matemaattisten oppimisvaikeuksien määrittelyn perusteena on heikko koulumenestys matematiikassa (Räsänen, 2012). Lukujonotaitojen perusteella riskiryhmään sijoittaminen ei välttämättä anna kokonaiskuvaa oppilaan matemaattisesta suoriutumisesta. Yhtenä avaintekijänä matemaattisten oppimisvaikeuksien määrittelyyn on vaikeuksien pysyvyys (Mazzocco & Myers, 2003), mutta tässä tutkimuksessa käytettiin yhtä mittapistettä rajaamaan riskiryhmä. Vahvuutena tässä tutkimuksessa oli riskiryhmän jakaminen puoliksi, jolloin pystyttiin erottelemaan paremmin ne oppilaat, joilla on todennäköisempi riski matemaattisiin oppimisvaikeuksiin. Matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmää ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmään jakamisessa oli samat rajoitukset kuin koko riskiryhmään jakamisessa. Nämä kaksi riskiryhmää saattoivat olla samankaltaisemmat kuin ajateltiin, eikä eroja näiden ryhmien välillä löydetty. Tässä tutkimuksessa ei verrattu riskiryhmää tyypillisesti matematiikassa suoriutuviin, mikä on yksi syy siihen, etteivät ryhmien väliset erot laskusujuvuuden kehityksessä sekä virheiden ja hyppyjen yhteydestä laskusujuvuuteen olleet merkitseviä.

### **4.3 Jatkotutkimusaiheet**

Tämän tutkimuksen perusteella jo ensimmäisen luokan lukujonotaitojen perusteella laskusujuvuutta pystytään ennustamaan kolmannelle luokalle asti. Opetuksessa tulisi varhaisessa vaiheessa kiinnittää lukujonotaitoihin huomiota, jotta voidaan tunnistaa ne oppilaat, joilla mahdollisesti tulee olemaan myöhemmin vaikeuksia laskusujuvuudessa (Geary ym., 2007). Pojilla lukujonotaidot ennustivat vahvemmin laskusujuvuuden tasoa toisella ja kolmannella luokalla kuin tytöillä, jonka vuoksi erityisesti poikia tulisi tukea lukujonotaidoissa. Aunio ja Räsänen

sänen (2015) esittävät lukujonotaitojen oppimisen kolme tärkeintä tekijää; numeroiden tuntemus, kyky luetella numerot oikeassa järjestyksessä sekä lukujen luettelu laskemisessa. Tässä tutkimuksessa tutkittiin lukujonotaitojen yhteyttä myöhempään laskusujuvuuden tasoon. Jatkotutkimusaiheena olisi selvittää, miten lukujonotaidot ovat yhteydessä laskusujuvuuden kehitykseen. Yhteen ja vähennyslaskutaidot ovat erillisiä toimintoja (Canobi, 2005; Koponen ym., 2018), mutta tässä tutkimuksessa niitä tutkittiin yhdessä. Jatkossa olisi hyödyllistä tutkia, ennustavatko lukujonotaidot yhteenlasku- ja vähennyslaskusujuvuutta eri tavalla. Jatkossa tulisi tutkia lukujonotaitojen ennustavuutta pidemmällä aikavälillä, esimerkiksi selvittää ennustavatko ne vielä viidennellä tai kuudennella luokalla laskusujuvuutta. Tulosten perusteella sukupuolten eroja työmuistin eri osa-alueiden yhteydessä laskusujuvuuteen tulisi selvittää tarkemmin, sillä tutkimuksia sukupuolen merkityksestä työmuistin eri alayksiköiden käytössä ja sen yhteyksistä laskusujuvuuteen ei ole kattavasti.

Matematiikassa heikosti pärjäävien oppilaiden opetusta hankaloittaa Mat-teus-vaikutus; heikommin pärjäävät jäävät yhä enemmän jälkeen ja he, jotka jo osaavat, hyötyvät opetuksesta enemmän (Morgan ym., 2011; Stanovich, 1986). Sen takia on syytä kiinnittää erityistä huomiota niihin oppilaisiin, joilla on suurin riski matemaattisiin oppimisvaikeuksiin. Vaikka tutkimuksessa ei löydetty eroja matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmän ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmän laskusujuvuuden kehityksessä, oli tutkimuksessa huomionarvoista, että osalla oppilaista laskusujuvuuden kehitys ensimmäiseltä kolmannelle luokalle oli hyvin vähäistä. Tämän takia erityisesti riskiryhmän laskusujuvuuden kehitystä tulisi tukea. Lisäksi riskiryhmään liittyvä jatkotutkimus olisi hyvä toteuttaa suuremmalla tutkimusjoukolla, jolloin riskiryhmän alaryhmien erot saattaisivat tulla esille.

Matematiikassa heikosti suoriutuvien kehityksen on aiemmissa tutkimuk-sissa todettu olevan poikkeavaa tai tavanomaista hitaampaa (Ostad, 1999) ja nämä oppilaat turvautuvat enemmän sormilla laskemiseen tai lukujonojen luetteluun (Ostad, 1997; Geary ym., 2004). Jotta riskiryhmällä ei jäisi heikotmat stra-

tegiat käyttöön (Koponen ym., 2018; Ostad, 1997; Rusanen & Räsänen, 2012), tulisi näiden oppilaiden laskustrategioiden kehittymistä tukea. Lukujonotaitojen tukemiseen tähtääviä interventioita on vasta vähän, mutta tulokset ovat olleet lupaavia; Monosen ja Aunion (2016) tutkimuksessa pystyttiin kehittämään heikosti suoriutuvien matemaattista osaamista. Aiemmissä tutkimuksissa on todettu matematiikassa heikosti suoriutuvien tekevän enemmän virheitä laskemisessa (Geary, 1990; Geary, 1993; Geary & Brown, 1991; Geary, Fan & Bow-Thomas, 1992; Geary ym., 2004; Vanbinst ym., 2014), mutta tässä tutkimuksessa koko riskiryhmä teki hyvin vähän virheitä ja hyppyjä. Opetuksessa virheiden sijaan tulisi kiinnittää erityistä huomiota lukujonotaitojen sujuvoitumiseen ja automatisoitumiseen. Hidas lukujonojen työstäminen mielessä vaatii työmuistin resursseja, mikä vaikeuttaa sujuvaa laskemista. Tämän tutkimuksen perusteella Suomessa tunnutaan onnistuneen Perusopetuksen opetussuunnitelman tavoitteessa edistää sukupuolten välistä tasa-arvoa (Perusopetuksen Opetussuunnitelma 2014), sillä riskiryhmässä kumpikaan sukupuoli ei ollut yliedustettuna eikä sukupuolella ollut merkitystä siihen, kuuluiko oppilas riskiryhmässä heikompaan puoliskoon vai ei.

Opetussuunnitelman mukaisten matematiikan tavoitteiden saavuttaminen on haastavaa osalle oppilaista (Räsänen, 2012), eivätkä kaikki saavuta yhteiskunnassa toimimisen kannalta riittäviä matemaattisia taitoja vielä koko peruskoulun aikana (Opetus- ja kulttuuriministeriö 2019). Pohja matemaattisille taidoille luodaan jo perusopetuksen ensimmäisillä vuosiluokilla (Perusopetuksen opetussuunnitelma, 2014), minkä vuosi matemaattisten taitojen tukemiseen tulisi panostaa hyvissä ajoin. Koska lukujonotaidot ovat yksi tärkein ennustaja myöhemmälle laskusujuvuudelle, ei matematiikan opetuksessa voida olla kiinnittämättä huomiota erityisesti lukujonotaitojen oppimiseen ja sujuvoitumiseen.

## LÄHTEET

- Alloway, T. P., Gathercole, S. E., Adams, A-M., Willis, C., Eaglen, R. & Lamont, E. (2005). Working memory and phonological awareness as predictors of progress towards early learning goals at school entry. *British Journal of Developmental Psychology*, 23(3), 417– 426. doi:10.1348/026151005X26804
- Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetical skills in children: The importance of central executive functions. *British Journal of Educational Psychology*, 78(2), 181–203. doi:10.1348/000709907X209854
- Antell, S.E. & Keating, D.P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, 54(3), 695–701. doi:10.2307/1130057
- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*. (5. versio; DSM-5). Washington, DC.
- Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-Bulletin*, 14, 63–74.
- Aunio, P., Hautamäki, J., Heiskari, P. & Van Luit, J. E. (2006). The early numeracy test in finnish: Children's norms. *Scandinavian Journal of Psychology*, 47(5), 369–378. doi:10.1111/j.1467-9450.2006.00538.x
- Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20(5), 427–435. doi:10.1016/j.lindif.2010.06.003
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684–704. doi:10.1080/1350293X.2014.996424
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M-K. & Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713. doi:10.1037/0022-0663.96.4.699

- Aunola, K. & Nurmi, J-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 54–68). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Baddeley, A. (1986). *Working memory*. Oxford: Clarendon.
- Baddeley, A. (1992). Working memory. *Science*, 255(5044), 556–559.  
doi:10.1126/science.1736359
- Baddeley, A. (2000). Episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, 4(11), 417–423. doi:10.1016/S1364-6613(00)01538-2
- Baddeley, A. (2007). *Working memory, thought, and action*. Oxford: Oxford University Press.
- Baroody, A. (1984). Children's difficulties in subtraction: Some causes and questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 203–213.  
doi:10.2307/748349
- Barrouillet, P. & Fayol, M. (1998). From algorithmic computing to direct retrieval: Evidence from number and alphabetic arithmetic in children and adults. *Memory & Cognition*, 26(2), 355–368. doi:10.3758/BF03201146
- Bishop, D.V.M. (2010). Which neurodevelopmental disorders get researched and why? *PLoS ONE*, 5(11). doi:10.1371/journal.-pone.0015112
- Bull, R., Espy, K. A. & Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 205–228. Doi.10.1080/87565640801982312
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3–18. doi:10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x
- Canobi, K. H. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology*, 92(3), 220–246. doi:10.1016/j.jecp.2005.06.001

- Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal of Research in Mathematics Education*, 15(3), 179–202. doi: 10.2307/748348
- Carr, M. & Alexeev, N. (2011). Fluency, accuracy, and gender predict developmental trajectories of arithmetic strategies. *Journal of Educational Psychology*, 103(3), 617–631. doi:10.1037/a0023864
- Chong, S. L. & Siegel, L. S. (2008). Stability of computational deficits in math learning disability from second through fifth grades. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 300–317. doi:10.1080/87565640801982387
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. (2. painos). New York: Routledge.
- Cook, R. D. (1979). Influential Observations in Linear Regression. *Journal of the American Statistical Association*, 74(365), 169–174. doi:10.2307/2286747
- Cook, R. D. & Weisberg, S. (1982). *Residuals and Influence in Regression*. New York, NY: Chapman & Hall.
- Corsi, P. (1972). *Memory and the medial temporal region of the brain*. Montreal: McGill University.
- Cowan, N. (2001). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, 24(1), 87–114. doi:10.1017/S0140525X01003922
- Cowan, N. (2016). Exploring the possible and necessary in working memory development. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 81(3), 149–158. doi:10.1111/mono.12257
- De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B. & Ghesquière, P. (2009). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(2), 186–201. doi:10.1016/j.jecp.2009.01.004
- Ericsson, K. A. & Kintsch, A. (1995). Long-term working memory. *Psychological review*, 102(2), 211–245. doi:10.1037/0033-295X.102.2.211

- Duncan, G., Dowsett, C., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A., Klebanov, P., Pagani, L., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K. & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446. doi:10.1037/0012-1649.44.1.217
- Frank, A. R. (1989). Counting skills – a foundation for early mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 37(1), 14.
- Fuchs, L.S., Compton, D.L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J.D. & Hamlett, C.L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology* 97(3), 495–513. doi:10.1037/0022-0663.97.3.493
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C. & Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29–43. doi:10.1037/0022-0663.98.1.29
- Fuchs, L. S., Fuchs, D. & Compton, D. L. (2012). The early prevention of mathematics difficulty: Its power and limitations. *Journal of Learning Disabilities*, 45(3), 257–269. doi:10.1177/0022219412442167
- Geary, D. C. (1990). A componential analysis of an early learning deficit in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, 49(3), 363–383. doi:10.1016/0022-0965(90)90065-G
- Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114(2), 345–362. doi:10.1037/0033-2909.114.2.345
- Geary, D. C. (2000). From infancy to adulthood: The development of numerical abilities. *European Child & Adolescent Psychiatry*, 9(2). doi:10.1007/s007870070004
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4–15. doi: 10.1177/00222194040370010201



- Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of individual differences in achievement growth in mathematics: A five year longitudinal study. *Developmental Psychology, 47*(6), 1539–1552. doi:10.1037/a0025510
- Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C. & Yao, Y. (1992). Counting knowledge and skill in cognitive addition: A comparison of normal and mathematically disabled children. *Journal of Experimental Child Psychology, 54*(3), 372–391. doi:10.1016/0022-0965(92)90026-3
- Geary, D. C. & Brown. S. C (1991). Cognitive addition: Strategy choice and speed-of- processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children. *Developmental Psychology, 27*(5), 398–406. doi:10.1037/0012-1649.27.5.787
- Geary, D. C., Fan, L. C., & Bow-Thomas, C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. *Psychological Science, 3*(3), 180–185. doi:10.1111/j.1467-9280.1992.tb00023.x
- Geary, D. C., Hoard, M. K. & Bailey, D.H. (2011). Fact retrieval deficits in low achieving children and children with mathematical learning disability. *Journal of Learning Disabilities, 45*(4). doi:10.1177/0022219410392046
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J. & De Soto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 88*(2), 121–151. doi:10.1016/j.jecp.2004.03.002
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L. & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development, 78*(4), 1343–1359. doi:10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning Disability. *Developmental Neuropsychology, 33*(3), 277–299. doi:10.1080/87565640801982361

- Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education*, 33(1), 18–28. doi:10.1177/002246699903300102
- Gersten, R., Jordan, N. C. & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293–304. doi:10.1177/00222194050380040301
- Hannula, M. S., Kupari, P. Pehkonen, L. Räsänen, P. & Soro, R. (2004) Matematiikka ja sukupuoli. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 170–197). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Hopkins, S. L. & Lawson, M. J. (2006). The effect counting speed has on developing a reliance on retrieval in basic addition. *Contemporary Educational Psychology*, 31(2), 208–227. doi:10.1016/j.cedpsych.2005.06.001
- ICD-10. (1992). *Classification of mental and behavioural disorders : clinical descriptions and diagnostic guidelines*. Geneva: World Health Organization.
- Jordan, N., Hanich, L. B. & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74(3), 834–850. doi:10.1111/1467-8624.00571
- Jordan, N.C., Kaplan, D., Raminiemi, C. & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, 45(3), 850–867. doi:10.1037/a0014939
- Kane, M. J. & Engle, R. W. (2002). The role of prefrontal cortex in working-memory capacity, executive attention, and general fluid intelligence: An individual-differences perspective. *Psychonomic Bulletin & Review* 9(4), 637–671. <https://doi.org/10.3758/BF03196323>
- Koponen, T., Salmi, P., Eklund, K. & Aro, T. (2013). Counting and RAN: Predictors of Arithmetic Calculation and Reading Fluency. *Educational Psychology*, 105(1), 162–175. doi:10.1037/a0029285HYPERLINK

"https://search-proquest-com.ezproxy.jyu.fi/eric/pubidlinkhandler/sng/pubtitle/Journal+of+Educational+Psychology/\$N?accountid=11774"

- Koponen & Aro. (2016). Sanasarjat-testi. (Julkaisematon).
- Koponen, T, Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi, J-E. (2007). Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation and their covariation with reading skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 97(3), 220–241. doi:10.1016/j.jecp.2007.03.001
- Koponen & Mononen, (2010a). The 2-minute addition fluency test. (Julkaisematon).
- Koponen & Mononen (2010b). The 2-minute subtraction fluency test. (Julkaisematon).
- Koponen, T., Salmi, P., Torppa, M., Eklund, K., Aro, T., Poikkeus, A-M., Lerkkanen, K. & Nurmi, J-E. (2016). Counting and rapid naming predict the fluency of arithmetic and reading skills. *Contemporary Educational Psychology*, 44-45, 83–94. doi:10.1016/j.cedpsych.2016.02.004
- Koponen, T., Salminen, J. & Sorvo, R. (2019). Matematiikan perustaitojen oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet* (s. 324–349). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Koponen, T. K., Sorvo, R., Dowker, A., Räikkönen, E., Viholainen, H., Aro, M. & Aro, T. (2018). Does multi-component strategy training improve calculation fluency among poor performing elementary school children? *Frontiers in Psychology*, 9, 1187. doi:10.3389/fpsyg.2018.01187
- Kupari, P. & Hiltunen, J. (2018). Matemaattiset taidot kansainvälisten tutkimusten valossa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 16–52). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Logie, R. H. & Baddeley, A. D. (1987). Cognitive processes in counting. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13(2), 310–326. doi:10.1037/0278-7393.13.2.310

- Locuniak, M. N. & Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities*, 41(5), 451–459. doi:10.1177/0022219408321126
- Mazzocco, M. M. M. & Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, 53(1), 218–253. doi:10.1007/s11881-003-0011-7
- Mazzocco, M.M.M & Thompson, R. (2005). Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research and Practice*, 20(3), 142–155. doi:10.1111/j.1540-5826.2005.00129.x.
- Mazzocco, M.M.M. & Räsänen, P. (2013). Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2(2), 65–73. doi:10.1016/j.tine.2013.05.001
- McCrink, K. & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science* (0956-7976), 15(11), 776–781.
- Metsämuuronen, J. (2008). *Monimuuttujamenetelmien perusteet*. Helsinki : International Methelp.
- Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R. & Ketonen, R. (2013). Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa. *NMI-bulletin* 23(4), 12–25.
- Morgan, P.L., Farkas, G. & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 42(4), 306–321. doi:10.1177/0022219408331037
- Morgan, P.L., Farkas, G. & Wu, Q. (2011). Kindergarten children's growth trajectories in reading and mathematics: Who falls increasingly behind? *Journal of Learning Disabilities*, 44(5), 472–488). doi:10.1177/0022219411414010
- Murphy, M. M., Mazzocco, M. M. M., Hanich, L. B. & Early, M. C. (2007). Cognitive characteristics of children with mathematics learning disability (MLD) vary as a function of the cutoff criterion used to define MLD. *Journal of Learning Disabilities*, 40(5), 458–478. doi:10.1177/00222194070400050901

- Neyman, J. (1937). X - Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 236(767): 333–380. doi:10.1098/rsta.1937.0005
- Nguyen, T., Watts, T., Duncan, G., Clements, D., Sarama, J., Wolfie, C. & Spitler, M. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly* 36, 550–560. doi: 10.1016/j.ecresq.2016.02.003
- Noël, M. P. (2009). Counting on working memory when learning to count and to add: A preschool study. *Developmental Psychology*, 45(6), 1630–1643. doi:10.1037/a0016224
- Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2013). PISA 2012: Suomalaisnuorten osaaminen laskussa. Haettu 6.2.2020 osoitteesta: [https://minedu.fi/artikkeli/-/asset\\_publisher/pisa-2012-finlandska-ungas-kunskapsniva-harsjunkit?\\_101\\_INSTANCE\\_0R8wCyp3oebu\\_languageId=en\\_US](https://minedu.fi/artikkeli/-/asset_publisher/pisa-2012-finlandska-ungas-kunskapsniva-harsjunkit?_101_INSTANCE_0R8wCyp3oebu_languageId=en_US)
- Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2016). *Neljäsluokkalaisten matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen heikentynyt*. Haettu 6.2.2020 osoitteesta: [https://minedu.fi/artikkeli/-/asset\\_publisher/neljasluokkalaisten-matematiikan-ja-luonnontieteiden-osaaminen-heikentynyt](https://minedu.fi/artikkeli/-/asset_publisher/neljasluokkalaisten-matematiikan-ja-luonnontieteiden-osaaminen-heikentynyt)
- Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2019). *PISA 18 ensituloksia; Suomi parhaiden joukossa*. Haettu 12.2.2020 osoitteesta: <http://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/161922/Pisa18-ensituloksia.pdf>
- Ostad, S. (1997). Developmental differences in addition strategies: a comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, 67(3), 345–357. doi:10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x
- Parsons S. & Bynner J. (2005). Does numeracy matter more? National Research and Development Centre for adult literacy and numeracy. London: Institute of Education, University of London.

- Paukkeri, V., Pakarinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Poikkeus, A.-M. (2015). Alaryhmätarkastelu matemaattisten taitojen kehityksestä esiopetuksesta neljännelle luokalle. *Psykologia*, 50(4), 277–291.
- Passolunghi, M. C. & Sigel, L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88(4), 348–367.  
doi:10.1016/j.jecp.2004.04.002
- Passolunghi, M. C., Vercelloni, B. & Schadee, H. (2007). The precursors of mathematics learning: Working memory, phonological ability and numerical competence. *Cognitive Development*, 22(2), 165–184.  
doi:10.1016/j.cogdev.2006.09.001
- Peng, P., Namkung, J., Barnes, M. & Sun, C. (2016). A meta-analysis of mathematics and working memory: Moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. *Journal of Educational Psychology*, 108(4), 455–473. doi:10.1037/edu0000079
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. (2014). Opetushallitus. Haettu 8.5.2020 osoitteesta:  
[https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf)
- Petrill, S., Logan, J. & Hart, S. (2012). Math fluency is etiologically distinct from untimed math performance, decoding fluency, and untimed reading performance: Evidence from a twin study. *Journal of Learning Disabilities*, 45(4), 371–381. doi:10.1177/0022219411407926
- Ramos-Christian, V., Schleser, R. & Varn, M.E. (2008). Math fluency: Accuracy versus speed in preoperational and concrete operational first and second grade children. *Early Childhood Educational Journal*, 35(6), 543–549.  
doi:10.1007/s10643-008-0234-7
- Rasmussen, C. & Bisanz, J. (2005). Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*, 91(2), 137–157.  
doi:10.1016/j.jecp.2005.01.004

- Rusanen, E. & Räsänen, P. 2012. Matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioiden kehitys. *NMI-bulletin*, 22(3).
- Räsänen, P. (2012). *Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia*. Helsinki: Duodecim, 128, 1168–1177.
- Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. (2010). Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6. luokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidellen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (s. 164–203). Helsinki: Opetushallitus.
- Siegler, R. S. (1996). *Emerging Minds: The Process of Change in Children's Thinking*. New York, NY: Oxford University Press.
- Spelke, E. S. & Kinzler, K. D. (2007). Core knowledge. *Developmental Science*, 10(1), 89–96. doi:10.1111/j.1467-7687.2007.00569.x
- Stanovich, K. E. (1986). Matthew effects in reading: Some consequences of individual differences in the the acquisition of literacy. *Reading Research Quarterly*, 21(4), 360–407.
- Swanson, H. L. & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 96(3), 471–491. doi:10.1037/0022-0663.96.3.471
- Swanson, H. L., & Jerman, O. (2006). Math Disabilities: A Selective Meta-Analysis of the Literature. *Review of Educational Research*, 76(2), 249–274. doi:10.3102/00346543076002249
- Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (2013). *Using multivariate statistics* (6.painos). Boston: Pearson Education.
- Toll, S.W.M. & Van Luit, J.E.H. (2014). Explaining numeracy development in weak performing kindergartners. *Journal of Experimental Child Psychology*, 124, 97–111. doi:10.1016/j.jecp.2014.02.001
- TENK: Tutkimuseettinen neuvottelukunta. (2019). Ihmiseen kohdistuvan tutkimuksen eettiset periaatteet ja ihmistieteiden eettinen

ennakkoarviointi Suomessa. Haettu 5.5.2020 osoitteesta:

<https://www.tenk.fi/fi/tenkin-lausunnot>

Ukkola, A. & Metsämuuronen, J. (2019). *Alkumittaus – matematiikan ja äidinkielen ja kirjallisuuden osaaminen ensimmäisen luokan alussa*. Kansallinen

koulutuksen arviointikeskus. Haettu 12.2.2020 osoitteesta:

[https://karvi.fi/app/uploads/2019/07/KARVI\\_1719.pdf](https://karvi.fi/app/uploads/2019/07/KARVI_1719.pdf)

Vanbinst, K., Ghesquière, P. & De Smedt, B. (2014). Arithmetic strategy development and its domain-specific and domain-general cognitive correlates: A longitudinal study in children with persistent mathematical learning difficulties. *Research in Developmental Disabilities*, 35(11), 3001–3013. doi:10.1016/j.ridd.2014.06.023

Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E. & Rautopuro, J. (2016). *Lapsuudesta eväät oppimiseen : neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen : kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos.

Vukovic, R. K. & Siegel, L. S. (2010). Academic and cognitive characteristics of persistent mathematics difficulty from first through fourth grade. *Learning Disabilities Research & Practice* 25(1), 25–38. doi:10.1111/j.1540-5826.2009.00298.x

Väisänen, E. & Aunio, P. (2016). Laskemisen sujuvuus toiselta neljännelle luokalle sekä yhteys lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa. *Psykologia*, 51(4), 244–261.

Weiss, L. (2006). *WISC-IV: advanced clinical interpretation*. Burlington, MA: Academic Press/Elsevier.

Wilson, K. M. & Swanson, H. L. (2001). Are Mathematics Disabilities Due to a Domain-General or a Domain-Specific Working Memory Deficit? *Journal of Learning Disabilities*, 34(3), 237–248. doi:10.1177/002221940103400304

Wood, J. & Spelke, E. (2005). Infant's enumeration of actions: Numerical discrimination and its signature limits. *Developmental Science*, 8(2), 173–181. doi:10.1111/j.1467-7687.2005.00404.x



- Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155–193. doi:10.1016/0010-0277(90)90003-3
- Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive psychology*, 24(2), 220–251. doi:10.1016/0010-0285(92)90008-P
- Xu, F., Spelke, E. & Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental Science*, 8(1), 88–101. doi:10.1111/j.1467-7687.2005.00395.x
- Zar, J. H. (1999). *Biostatistical analysis*. (4. painos). Upper Saddle River (N.J.): Prentice Hall.
- Zhang, X., Koponen, T., Räsänen, P., Aunola, K., Lerkkanen M-K. & Nurmi, J-E. (2014). Linguistic and spatial skills predict early arithmetic development via counting sequence knowledge. *Child Development*, 85(3), 1091–1107. doi:10.1111/cdev.12173

## LIITTEET

### Liite 1. Kielellisen työmuistin ja lukujonotaitojen summamuuttujien kommunaliteetit yhden pääkomponentin ratkaisussa

	Kommunaliteetit
Kielellinen työmuisti	
Sanasarjatehtävä etuperin	.525
Sanasarjatehtävä takaperin	.531
Numerosarjatehtävä etuperin	.588
Numerosarjatehtävä takaperin	.493
Lukujonotaidot	
Lukujen luettelu etuperin	.604
Lukujen luettelu hyppäyksittäin	.510
Lukujen luettelu takaperin 20 – 0	.784
Lukujen luettelu takaperin luvusta 52	.766

**Liite 2. Koko aineiston (n = 190) keskiarvot, keskihajonnat ja korrelaatiot sekä korrelaatioiden luottamusvälit**

Muuttujat	ka	kh	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.Sukupuoli	1.52	0.50	—					
2.Lukujonotaidot	-0.01	0.83	-.06 [-.20, .07]	—				
3.Kielellinen työmuisti	-0.02	0.73	.06 [-.08, .18]	.38*** [.26, .49]	—			
4.Visuospatiaalinen työmuisti	0.00	0.99	.00 [-.15, .14]	.21** [.09, .33]	.23** [.11, .34]	—		
5.Laskusujuvuus 1.luokalla	0.02	0.97	-.05 [-.19, .08]	.63*** [.52, .73]	.50*** [.39, .59]	.34*** [.20, .46]	—	
6.Laskusujuvuus 2.luokalla	0.02	0.96	-.19** [-.32, -.07]	.57*** [.45, .67]	.34*** [.20, .45]	.39*** [.24, .52]	.78*** [.70, .84]	—
7.Laskusujuvuus 3.luokalla	0.01	0.97	-.13 [-.27, .00]	.54*** [.42, .65]	.35*** [.22, .47]	.36*** [.21, .49]	.78*** [.71, .84]	.87*** [.83, .90]

Huom. \* =  $p < .05$ ; \*\* =  $p < .01$ ; \*\*\* =  $p < .001$

**Liite 3. Poikien (n = 92) keskiarvot, keskihajonnat ja korrelaatiot sekä korrelaatioiden luottamusvälit**

Muuttujat	ka	kh	1.	2.	3.	4.	5.
1.Lukujonotaidot	0.05	0.90	—				
2.Kielellinen työmuisti	-0.06	0.72	.35** [.16, .50]	—			
3.Visuospatiaalinen työmuisti	0.00	1.03	.26* [.07, .42]	.28** [.12, .43]	—		
4.Laskusuvjuuus 1.luokalla	0.07	1.12	.68*** [.52, .80]	.44*** [.26, .59]	.40*** [.19, .57]	—	
5.Laskusujuvuus 2.luokalla	0.21	1.11	.60*** [.44, .73]	.38*** [.17, .57]	.49*** [.32, .63]	.80*** [.70, .87]	—
6.Laskusujuvuus 3.luokalla	0.13	1.08	.59*** [.43, .73]	.32** [.12, .50]	.46*** [.28, .60]	.79*** [.69, .86]	.89*** [.84, .93]

Huom. \* =  $p < .05$ ; \*\* =  $p < .01$ ; \*\*\* =  $p < .001$

**Liite 4. Tyttöjen (n = 98) keskiarvot, keskihajonnat ja korrelaatiot sekä korrelaatioiden luottamusvälit**

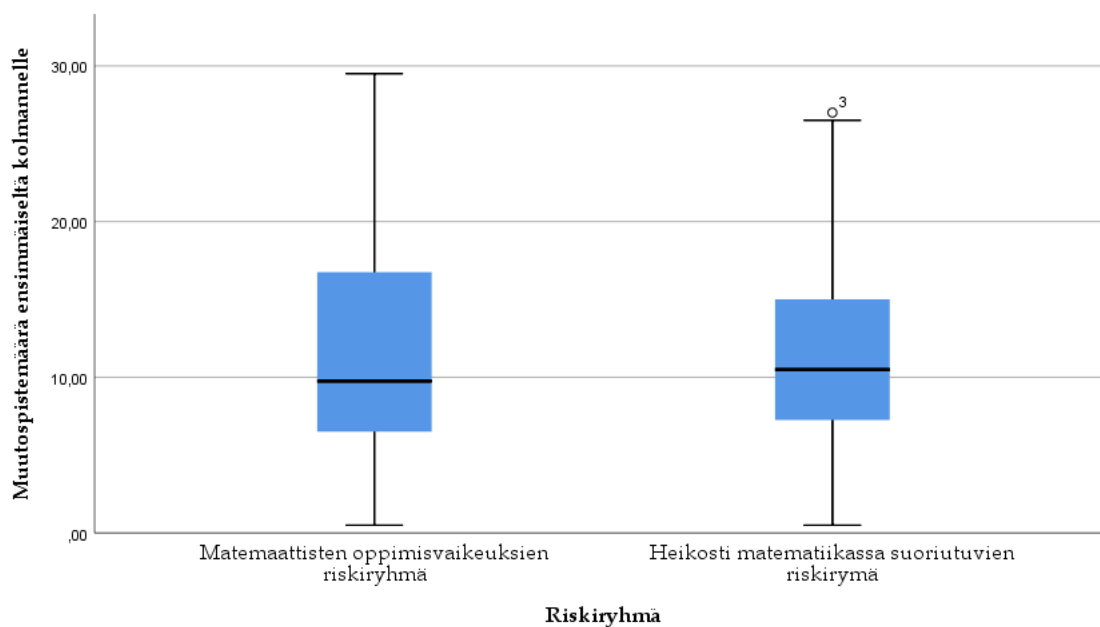
Muuttujat	ka	kh	1.	2.	3.	4.	5.
1.Lukujonotaidot	-0.05	.75	—				
2.Kielellinen työmuisti	0.02	.75	.43*** [.24, .59]	—			
3.Visuospatiaalinen työmuisti	0.00	0.96	.15 [-.07, .35]	.18 [.01, .33]	—		
4.Laskusuvjuuus 1.luokalla	-0.03	0.81	.57*** [.43, .69]	.60*** [.44, .70]	.26** [.07, .43]	—	
5.Laskusujuvuus 2.luokalla	-0.16	0.76	.53*** [.37, .65]	.35*** [.17, .49]	.28** [.04, .52]	.75*** [.66, .82]	—
6.Laskusujuvuus 3.luokalla	-0.11	0.83	.46*** [.31, .60]	.42*** [.24, .55]	.24* [.01, .45]	.79*** [.69, .85]	.83*** [.77, .88]

Huom. \* =  $p < .05$ ; \*\* =  $p < .01$ ; \*\*\* =  $p < .001$

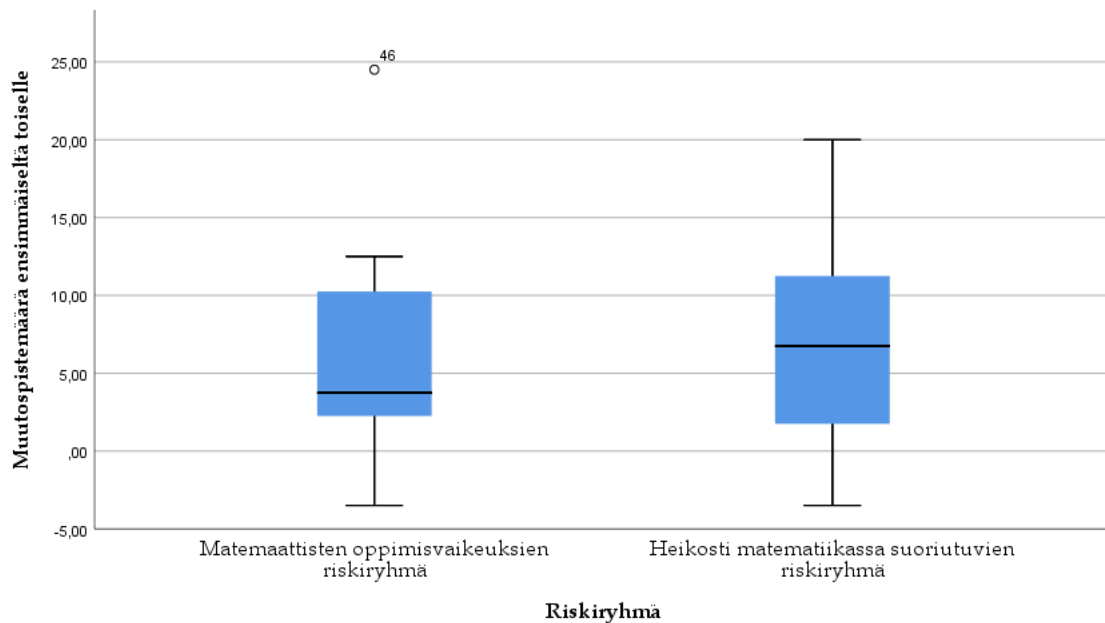
**Liite 5. Sukupuolen yhteys matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmään (lukujonotaidoissa alin 12,5 prosenttiä) ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmään (lukujonotaidoissa 12,5–25 prosenttiä) jakautumisessa**

	Matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmä		Heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmä		Yhteensä	
	n	%	n	%	N	%
pojat	13	54,2	11	45,8	24	50
tytöt	11	45,8	13	54,2	24	50
yhteensä	24	100	24	100	48	100

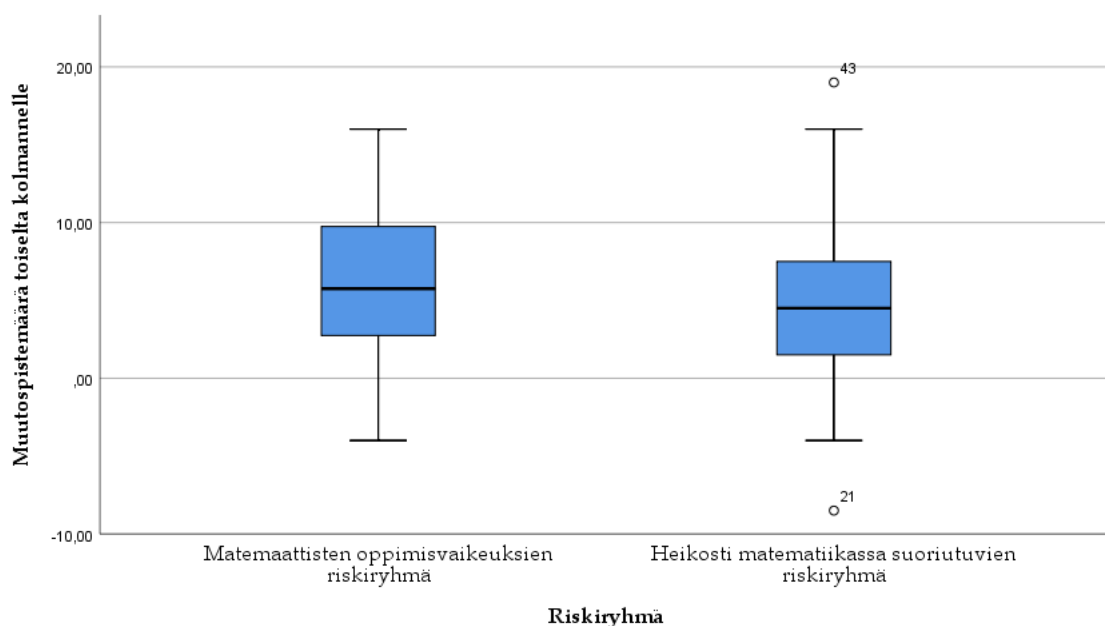
**Liite 6. Lukujonotaitojen perusteella riskiryhmään kuuluvien oppilaiden laskusujuvuuden muutospistemäärien erot ensimmäiseltä kolmannelle luokalle matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmässä (lukujonotaidoissa alin 12,5 prosenttiä) ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmässä (lukujonotaidoissa 12,5–25 prosenttiä)**



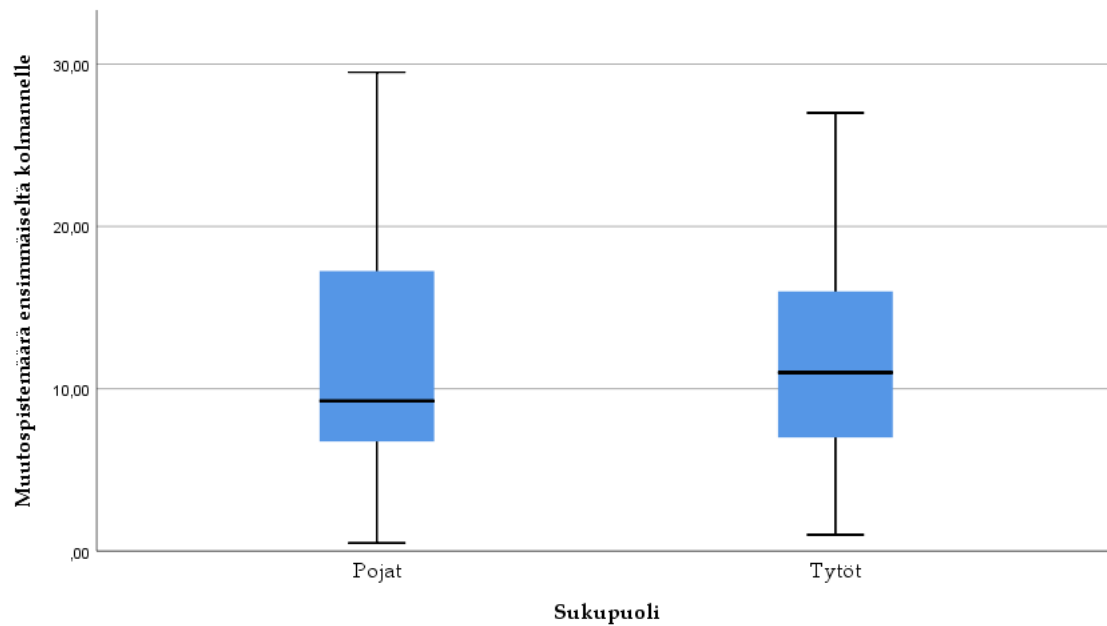
**Liite 7. Lukujonotaitojen perusteella riskiryhmään kuuluvien oppilaiden laskusujuvuuden muutospistemäärien erot ensimmäiseltä toiselle luokalle matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmässä (lukujonotaidoissa alin 12,5 prosenttiä) ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmässä (lukujonotaidoissa 12,5–25 prosenttiä)**



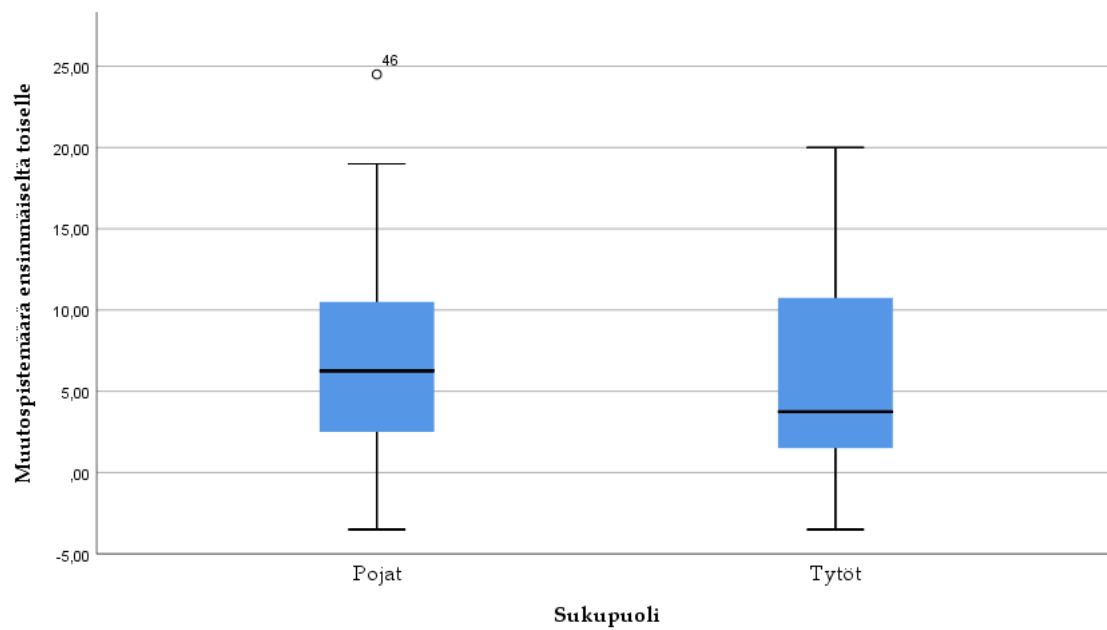
**Liite 8. Lukujonotaitojen perusteella riskiryhmään kuuluvien oppilaiden laskusujuvuuden muutospistemäärien erot toiselta kolmannelle luokalle matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmässä (lukujonotaidoissa alin 12,5 prosenttiä) ja heikosti matematiikassa suoriutuvien riskiryhmässä (lukujonotaidoissa 12,5–25 prosenttiä)**



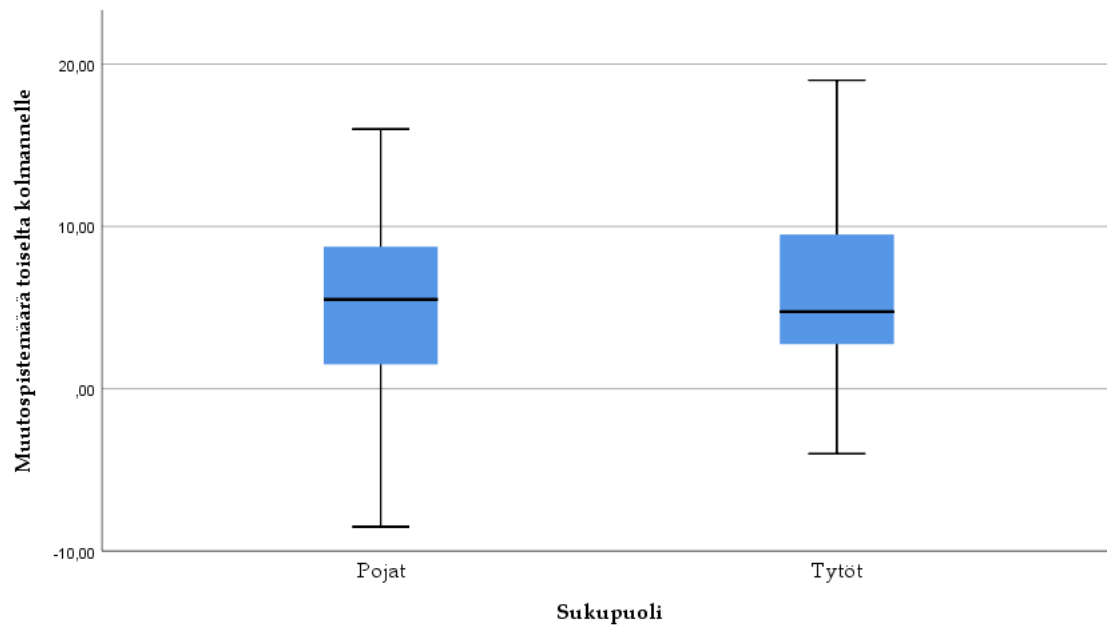
**Liite 9. Sukupuolten väliset erot riskiryhmän, eli lukujonotaitojen alimman 25 persenttiin, laskusujuvuuden kehityksessä ensimmäiseltä kolmannelle luokalle**



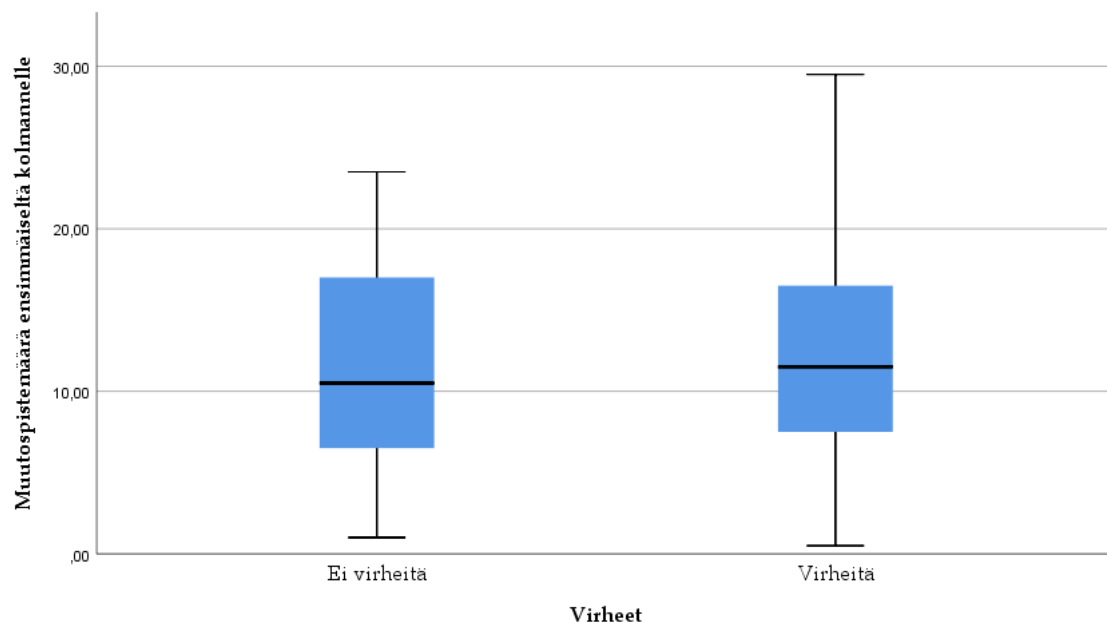
**Liite 10. Sukupuolten väliset erot riskiryhmän, eli lukujonotaitojen alimman 25 persenttiin, laskusujuvuuden kehityksessä ensimmäiseltä toiselle luokalle**



**Liite 11. Sukupuolten väliset erot riskiryhmän, eli lukujonotaitojen alimman 25 persenttilin, laskusujuvuuden kehityksessä toiselta kolmannelle luokalle**

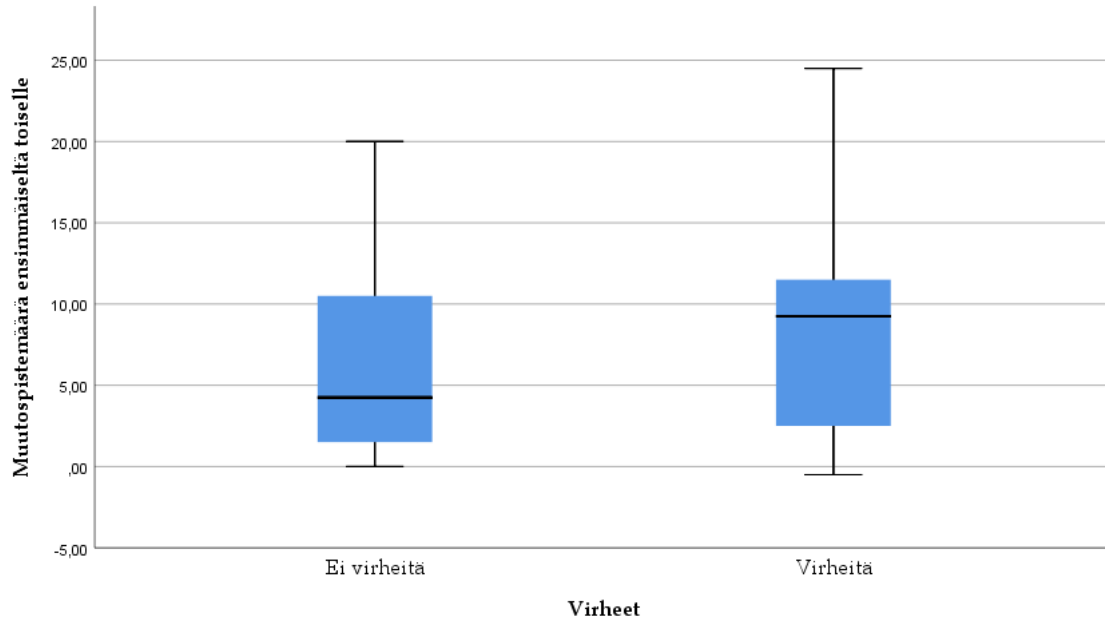


**Liite 12. Riskiryhmässä, eli lukujonotaitojen alimmassa 25 persenttilissä, virheettömästi suoriutuneiden ja virheitä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ensimmäiseltä kolmannelle luokalle**

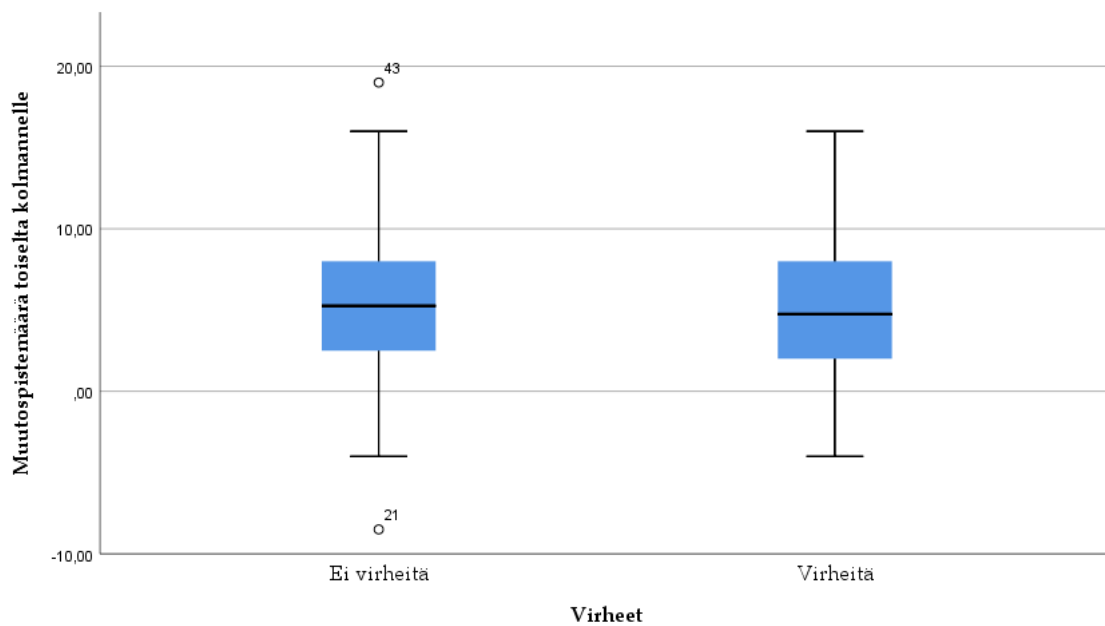




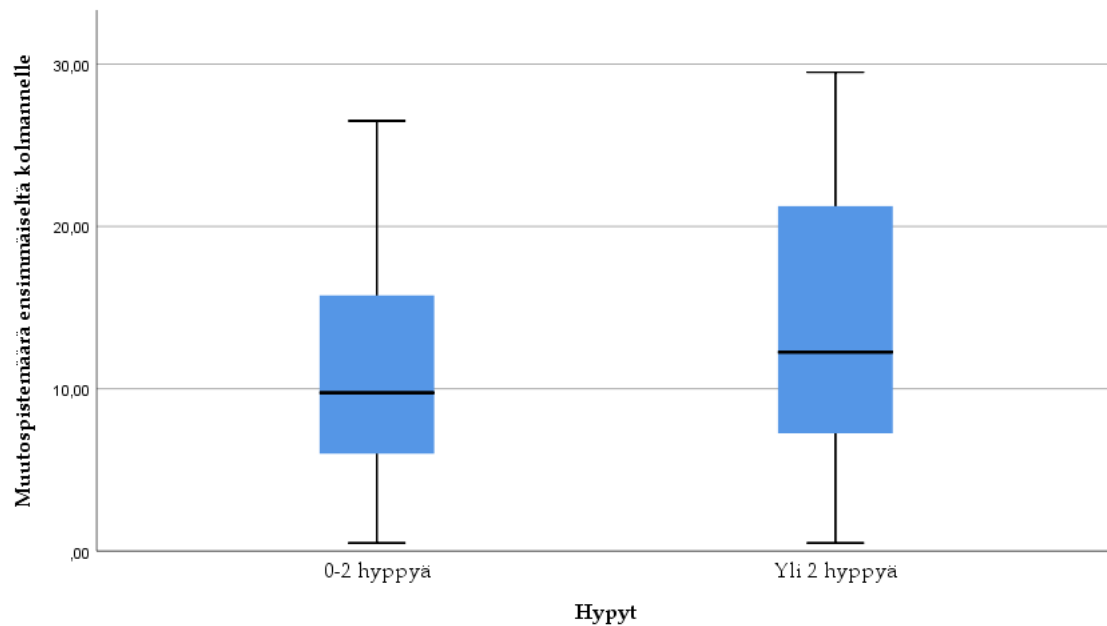
**Liite 13. Riskiryhmässä, eli lukujonotaitojen alimmassa 25 prosenttilisissä, virheettömästi suoriutuneiden ja virheitä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ensimmäiseltä toiselle luokalle**



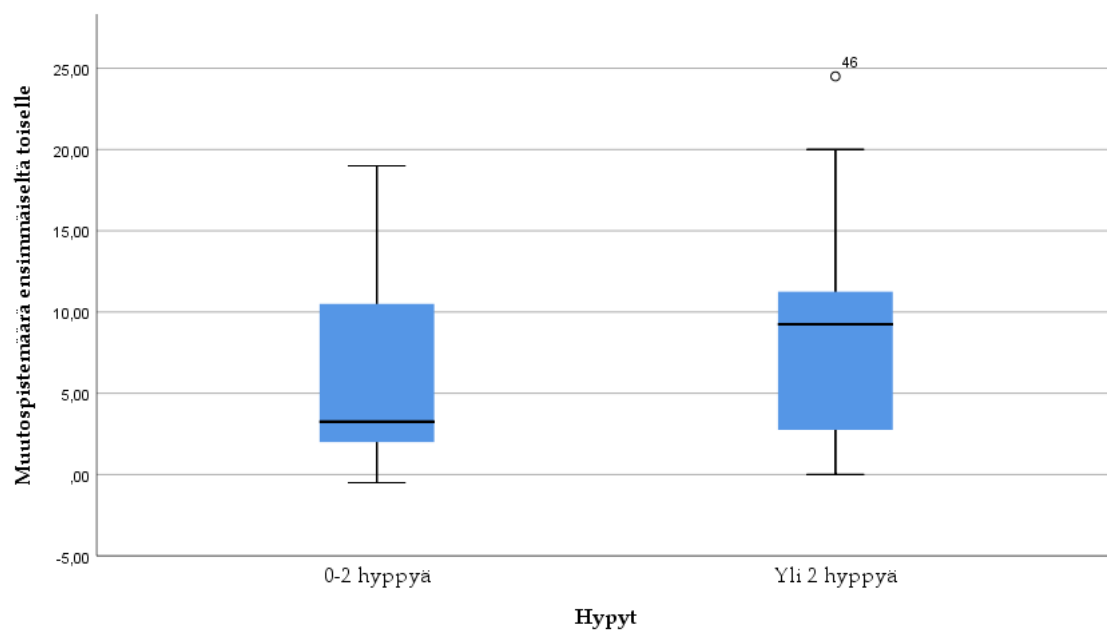
**Liite 14. Riskiryhmässä, eli lukujonotaitojen alimmassa 25 prosenttilisissä, virheettömästi suoriutuneiden ja virheitä tehneiden laskusujuvuuden kehitys toiselta kolmannelle luokalle**



**Liite 15. Riskiryhmässä, eli lukujonotaitojen alimmassa 25 persentiilissä, 0-2 hyppyä tehneiden ja yli kaksi hyppyä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ensimmäiseltä kolmannelle luokalle**



**Liite 16. Riskiryhmässä, eli lukujonotaitojen alimmassa 25 persentiilissä, 0-2 hyppyä tehneiden ja yli kaksi hyppyä tehneiden laskusujuvuuden kehitys ensimmäiseltä toiselle luokalle**



Liite 17. Riskiryhmässä, eli lukujonotaitojen alimmassa 25 persentiilissä, 0-2 hyppyä tehneiden ja yli kaksi hyppyä tehneiden laskusujuvuuden kehitys toiselta kolmannelle luokalle

