p-harmoniset funktiot tasossa

Erno Kauranen

pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2020

Merkintöjä

$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}^d$	d-kertainen tuloavaruus $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^d$	d-uloitteinen euklidinen avaruus
$\overline{\mathbb{R}}$	Laajennettu reaalilukujoukko $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$B(a, r)$	$\{x \in \mathbb{R}^d : \lvert x - a \rvert < r\}$
$\mathbb{D}(a, r), \mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z - a \rvert < r\}, \mathbb{D}(0, 1)$
$\mathbb{D}^*(a, r), \mathbb{D}^*$	$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} : \lvert z - a \rvert < r\}, \mathbb{D}^*(0, 1)$
$A \subset\subset B$	$\bar{A} \subset B, A$ avoin ja $\bar{A}$ on rajoitettu
$n(\gamma, z)$	Polun γ kierrosluku pisteen z ympäri
$\ell(\cdot)$	Parametrisoivan polun pituus
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Euklidisen avaruuden standardi sisätulo
$\mathrm{spt}_\Omega\ u$	$\overline{\{z \in \Omega : u(z) \neq 0\}}$
$J_{ab}(t)$	$tb + (1 - t)a$, kun $t \in [0, 1]$ ja $a, b \in \mathbb{R}^d$
Df	Funktion f Jacobin matriisi
dA	$dx\, dy, \qquad z = x + iy$
$\mathcal{J}_f$	Funktion f Jacobin determinantti
$\mathrm{diam}\, A$	$\sup\{\lvert a - a' \rvert : a, a' \in A\}$
$\mathrm{dist}(A, B)$	$\inf\{\lvert a - b \rvert : a \in A, b \in B\}$
u^+	$\max\{u, 0\}$
u^-	$-\min\{u, 0\}$
$C(\Omega)$	$\{u : u$ on jatkuva joukossa $\Omega\}$
$C^k(\Omega)$	$\{u : u$ on k kertaa jatkuvasti derivoituva joukossa $\Omega\}$
$C_0^k(\Omega)$	$\{u : u \in C^k(\Omega)$ ja $\mathrm{spt}_\Omega\, u$ on kompakti$\}$
$C_0^\infty(\Omega)$	$\bigcap_{k=1}^\infty C_0^k(\Omega)$
$\mathrm{div}\ u$	$D^{(1,0,\ldots,0)}u + D^{(0,1,\ldots,0)}u + \ldots + D^{(0,0,\ldots,1)}u$
$\lvert \Omega \rvert$	Joukon Ω Lebesguen mitta
$⨍_\Omega u(x)\, dx$	$\frac{1}{\lvert \Omega \rvert} \int_\Omega u(x)\, dx$
$a \lesssim b$	$a \leq Cb$, missä C ei riipu luvusta a tai luvusta b

Tiivistelmä: Erno Kauranen, pro gradu -tutkielma, 72 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2020.

Tämän tutkielman tarkoitus on perehdyttää lukija p-harmonisiin funktioihin ja erityisesti niiden säännöllisyyteen tasossa. Tutkielman päätulos koskee tason p-harmonisen funktion heikkojen derivaattojen optimaalista lokaalia Hölder-jatkuvuutta. Vastaavaa optimaalista säännöllisyystulosta ei tunneta korkeammissa ulottuvuuksissa. Yleisessä dimensiossa p-harmoninen funktio on reaalianalyyttinen avoimessa joukossa, missä sen gradientti ei häviä. Tasossa p-harmonisten funktioiden sileys kriittisten pisteiden eli gradientin nollakohtien ulkopuolella voidaan osoittaa elegantisti.

Tutkielmassa lähdetään liikkeelle Sobolev-avaruuksista, jonka jälkeen esitellään kvasisäännölliset kuvaukset ja käydään läpi kvasisäännöllisten funktioiden teoriaa. Kappaleen tärkein tulos tutkielman päätuloksen näkökulmasta on Stoïlow-hajotelma. Tason p-harmonisten funktioiden säännöllisyyskysymys palautuu kyseistä hajotelmaa ja hodograafimuunnosta hyväksi käyttäen Fourier-sarjan tutkimiseen.

Avainsanat: p-harmoninen, Kvasikonformikuvaus, Sobolev-avaruus, Hodograafimuunnos, Konjugaattifunktio, Kvasiradiaalinen funktio

Sisältö

1 Johdanto

Tunnetuin osittaisdifferentiaaliyhtälö lienee Laplacen yhtälö $\Delta u = 0$, missä Δ on niin kutsuttu Laplacen operaattori:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Laplacen yhtälön klassisia ratkaisuja kutsutaan harmonisiksi funktioksi. Harmoniset funktiot minimoivat funktionaalia

$$I[u] = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

annetuilla reuna-arvoilla yksikäsitteisesti luokassa $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, kun $\partial\Omega$ on riittävän säännöllinen. Voidaan myös kysyä mikä yhtälö karakterisoi minimoijat, jos luku kaksi korvataan funktionaalissa I luvulla $p > 2$. Jos $u \in C^2(\Omega)$, niin u on minimoija edellä kuvatussa mielessä jos ja vain jos $\Delta_p = 0$, missä Δ_p on niin kutsuttu p-Laplacen operaattori

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Osoittautuu, että $C^2(\Omega)$ ei tässä tapauksessa ole funktioluokkana riittävä karakterisoimaan kaikkia minimoijia. Tarkalleen ottaen ongelmakohdat ovat gradientin nollakohtia. Minimoija voidaan karakterisoida Eulerin yhtälön heikon muodon

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \psi \rangle \, dx = 0 \qquad \text{kaikilla} \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.1}$$

avulla. Ehdon (1.1) toteuttavia jatkuvia funktioita kutsutaan *p-harmonisiksi* funktioksi. Määritelmä asetetaan myös arvoille $p \in (1, 2)$ sopimalla, että $|\nabla u|^{p-2} := 0$ aina, kun $\nabla u = 0$. Vaikka p-harmonisten funktioiden voidaan katsoa olevan puhtaasti matemaattinen yleistys, niin tasossa p-harmonisilla funktioilla on yhteyksiä laminaaristen eli kitkattomien virtausten mallintamiseen. Edelleen niin kutsutussa hodograafitasossa p-harmoniset funktiot toteuttavat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, joita esiintyy virtausdynamiikassa.

Tässä tutkielmassa keskitytään p-Laplacen yhtälöön erityisesti tasossa. Osoitamme, että tasossa vektorikenttä $|\nabla u|^{p-2} \nabla u$ on heikosti derivoituva, joten osittaisintegroimalla päästään divergenssimuotoiseen yhtälöön. Kyseinen yhtälö voidaan kompleksisten osittaisderivaattojen avulla kirjoittaa muodossa

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\{(|u_{\bar{z}}|^{p-2}u_{\bar{z}})\right\} = 0, \qquad z = x + iy, \tag{1.2}$$

missä yhtälössä esiintyvät derivaatat melkein kaikkialla a priori ilmaisevat heikkoja derivaattoja. Edelleen osoitamme, että tasossa p-harmonisen funktion gradientin nollakohtien joukko on diskreetti ja gradientin nollakohtien komplementissa p-harmoniset funktiot voidaan karakterisoida yhtälöllä

$$f_{\bar{z}}(z) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\overline{f(z)}}{f(z)}f_z(z) + \frac{f(z)}{\overline{f(z)}}\overline{f_z(z)}\right), \qquad f := u_x - iu_y. \tag{1.3}$$

Yhtälöstä (1.3) seuraa helpohkosti kompleksisen gradientin f kvasisäännöllisyys. Edelleen kvasisäännöllisten funktioiden Hölder-jatkuvuuden nojalla saadaan säännöllisyystulos p-harmonisille funktioille. Yhtälön (1.3) avulla voidaan kuitenkin osoittaa parempi säännöllisyys. Kolmannessa luvussa todistetaan niin kutsuttu Stoïlow-hajotelma, jonka avulla f voidaan kirjoittaa funktio u nollakohdan ympäristössä muodossa $f = \chi^n$, missä χ on homeomorfismi. Kuvauksen χ käänteiskuvaukselle löydetään yhtälön (1.3) ja hodograafimuunnoksen avulla Fourier-sarja. Tämän sarjan avulla voidaan osoittaa p-harmonisten funktioiden optimaalinen säännöllisyys tasossa. Erityisesti saadaan, että tasossa p-harmonisen funktion gradientti on Hölder-jatkuva eksponentilla $\frac{1}{3}$, kun taas yleisessä avaruudessa tunnetaan pelkkä Hölder-jatkuvuus. Erityisenä seurauksena saadaan lisäksi heikkojen derivaattojen olemassaolo kolmanteen kertalukuun asti. Myös tämä tulos on parempi kuin korkeammissa ulottuvuuksissa, jolloin toisen kertaluvun heikkojen derivaattojen olemassaolo tunnetaan vain, jos p on pieni.

Sobolev-avaruuksien teorian tuntemus on tämän tutkielman lukijalle eduksi, sillä tutkielmassa ei esitetä todistuksia Sobolev-avaruuksien perustuloksille. Tutkielma pohjautuu erityisesti artikkeliin [IM]. Tärkeitä kirjallisuuslähteitä tason kvasikonformikuvauksien teoriaan ovat [AIM], [R], ja [A].

2 Esitietoja

Määritellään L^p-normi $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ mitan μ suhteen asettamalla

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \begin{cases} (\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1,\infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Puhuttaessa Lebesguen mitasta dx merkitään lyhyemmin vain $L^p(\Omega)$. L^p-avaruus on tekijäavaruus

$$L^p(\Omega,\, \mu) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}} : \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty,\ f \text{ on mitallinen}\}/\sim,$$

missä ekvivalenssirelaatio $\sim$ määritellään siten, että $f \sim g$ jos ja vain jos $f = g$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Määrittelemme tapauksessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ myös

$$L^p(\Omega) = \{f : \int_\Omega |f(z)|^p \, dA < \infty, \operatorname{Re} f \text{ ja } \operatorname{Im} f \text{ ovat mitallisia}\}/\sim .$$

Tarkastelu on usein tarpeellista rajata joukon Ω kompakteihin osajoukkoihin tai kompaktikantajaisten funktioiden joukkoon. Tätä varten merkitään lisäksi

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \bigcap_{K \subset \Omega \text{ kompakti}} L^p(K)$$

ja

$$L^p_0(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \text{spt } u \text{ on kompakti}\}.$$

L^p-avaruudet ovat täydellisiä normiavaruuksia eli Banachin avaruuksia. Erityisesti L^2-avaruus on täydellinen sisätuloavaruus eli Hilbertin avaruus. Keskeisin epäyhtälö L^p-avaruuksiin liittyen on Hölderin epäyhtälö.

Lause 2.1 *(Hölderin epäyhtälö). Olkoot $p, q \in (1,\infty)$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin jos $f \in L^p(\Omega,\mu)$ ja $g \in L^q(\Omega,\mu)$ niin*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hölderin epäyhtälö voidaan myös yleistää.

Lause 2.2 *(Yleistetty Hölderin epäyhtälö). Oletetaan, että $p_i \in (1,\infty)$ kaikilla $i = 1,\dots,k$ siten, että $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = 1$ ja $f_i \in L^{p_i}(\Omega,\mu)$ kaikilla $i = 1,\dots,k$. Tällöin $\prod_{i=1}^k f_i \in L^1(\Omega,\mu)$ ja*

$$\int_\Omega \left| \prod_{i=1}^k f_i(x) \right| d\mu \le \prod_{i=1}^k \left(\int_\Omega |f_i(x)|^{p_i} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Jos $k = 1$ niin väite on Hölderin epäyhtälö. Tehdään induktioaskel eli oletetaan, että väite pätee, kun $k = m-1$, missä $m \ge 3$. Koska $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1/(p_1-1)} = 1$, niin Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| \prod_{i=1}^m f_i(x) \right| d\mu &\le \left(\int_\Omega |f_1(x)|^{p_1} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_\Omega \left| \prod_{i=2}^m f_i(x) \right|^{\frac{p_1}{p_1-1}} d\mu \right)^{\frac{p_1-1}{p_1}}. \\
&= \left(\int_\Omega |f_1(x)|^{p_1} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_\Omega \left| \prod_{i=2}^m f_i(x)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right| d\mu \right)^{\frac{p_1-1}{p_1}}.
\end{aligned}$$

Huomataan seuraavaksi, että $\sum_{i=2}^m \frac{p_1}{(p_1-1)p_i} = \frac{p_1}{p_1-1} \sum_{i=2}^m \frac{1}{p_i} = 1$. Koska summattavia on $m-1$ kappaletta, voimme soveltaa induktio-oletusta ja saamme edelleen, että

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| \prod_{i=1}^m f_i(x) \right| d\mu &\le \left(\int_\Omega |f_1(x)|^{p_1} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_\Omega \left| \prod_{i=2}^m f_i(x)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right| d\mu \right)^{\frac{p_1-1}{p_1}} \\
&\le \left(\int_\Omega |f_1(x)|^{p_1} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_\Omega \left| \prod_{i=2}^m f_i(x)^{\frac{p-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_1-1}{p-1} p_i} \right| d\mu \right)^{\frac{p_1-1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{(p_1-1)p_i}} \\
&= \prod_{i=1}^m \left(\int_\Omega |f_i(x)|^{p_i} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_i}}.
\end{aligned}$$

Väite seuraa nyt induktioperiaatteesta.

$\square$

3 Sobolev-avaruudet ja kvasikonformikuvaukset

Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa tärkeäksi funktioavaruudeksi osoittautuu niin kutsuttu Sobolev-avaruus. Johdannossa todettiin, että osittaisdifferentiaaliyhtälöllä ei välttämättä ole klassisia ratkaisuja. Toisaalta osittaisintegroinnin nojalla $\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} u'(x)\varphi(x)\,dx$ kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, kun $u \in C^1(\mathbb{R})$. Fubinin lauseesta seuraa edelleen, että kaikilla $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ja kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx \qquad \text{kaikilla} \;\; j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Edellinen yhtälö pätee myös tapauksissa, missä u on lokaalisti Lebesgue-integroituva. Tämä motivoi heikon derivaatan käsitteeseen.

Määritelmä 3.1. (Heikko derivaatta). Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Oletetaan, että on olemassa $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ siten, että

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{3.1}$$

kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, missä

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_d}^{\alpha_d}}$$

ja

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d), \qquad\qquad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d.$$

Tällöin sanotaan, että $v = D^\alpha u$ on funktion u *heikko derivaatta.* Edelleen *heikko gradientti* määritellään asettamalla

$$\nabla u := (D^{(1,0,0,\ldots)}u, D^{(0,1,0,\ldots)}u, \ldots, D^{(0,0,\ldots,1)}u).$$

Määritelmä 3.2. (Sobolev-avaruus). Sobolev-avaruus määritellään asettamalla

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \;\text{ kaikilla }\; \alpha \in \mathbb{N}^d, \;\text{ joilla }\; |\alpha| \le k\}.$$

Huomautus 3.3. Sobolev-avaruuksille löytyy myös vaihtoehtoisia karakterisaatioita. Näistä tärkeimmät ovat ACL-karakterisaatio ja erotusosamääräkarakterisaatio [Z, s. 44–45].

Rajoittumalla relatiivikompakteihin osajoukkoihin asetamme lisäksi

$$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \bigcap_{G \subset\subset \Omega} W^{k,p}(G).$$

Huomautettakoon, että funktio $u \in C^k(\Omega)$ toteuttaa osittaisintegerointikaavan (3.1), kun v on sen klassinen derivaatta. Todettakoon myös, että heikon derivaatan olemassaolo on yksikäsitteistä normin $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ mielessä mikä seuraa niin kutsutusta variaatiolemmasta. Sobolev-avaruus on täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus, kun se varustetaan normilla

$$\|u\|_{k,p,\Omega} := \begin{cases} \sum_{|\alpha| \le k} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \le k} \operatorname{ess\,sup} |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Normin $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ sijaan voidaan myös käyttää muita ekvivalentteja normeja. Inkluusion $W^{1,p}(\Omega) \supset W^{k,p}(\Omega)$ nojalla on usein riittävää tarkastella normia $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$. On helppo osoittaa, että

$$\widetilde{\|u\|}_{1,p,\Omega} := \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

on ekvivalentti normin $\|\cdot\|_{1,p}$ kanssa. Sobolev-avaruus voidaan myös määritellä täydellistymänä normin (3.2) suhteen, mikä seuraa niin kutsutusta ykkösen osituksesta. On myös luonnollista määritellä sileiden ja kompaktikantajaisten funktioiden täydellistymä Sobolev-avaruudessa. Tätä varten merkitään lisäksi

$$W^{k,p}_0(\Omega) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists\, \varphi_j \in C^\infty_0(\Omega) \text{ siten, että } \lim_{j \to \infty} \|u - \varphi_j\|_{k,p} = 0\}.$$

Listataan vielä muutamia laskusääntöjä.

Lause 3.4 *(Tulon derivointi). Olkoot $u, v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Jos $u, v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, niin $uv \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja*

$$\nabla(u(x)v(x)) = \nabla(u(x))v(x) + u(x)(\nabla v(x)).$$

Todistus. [HKM, s. 21]. □

Lause 3.5 *(Kommutointi). Olkoon $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Tällöin*

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u)$$

aina, kun $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

Todistus. Seuraa variaatiolemmasta ja määritelmästä. □

Lause 3.6 *(Leibnizin kaava). Olkoot $u, v \in C^\infty(\Omega)$. Tällöin*

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v,$$

missä

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_d!}{\beta_1 \cdots \beta_d (\alpha_1 - \beta_1)! \cdots (\alpha_d - \beta_d)!}.$$

Todistus. [E2, s. 261–262]. □

Sobolev-funktioiden keskeisin tulos on Sobolevin upotuslause, jonka mukaan heikosti derivoituva funktio $u \in L^p(\Omega)$ on lokaalisti integroituva suuremmalla eksponentilla kuin p.

Lause 3.7 *(Upotuslause). Olkoot $p \in [1, d)$ ja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Tällöin $D^\alpha u \in L^{\frac{dp}{d-p}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ aina, kun $|\alpha| \leq k - 1$.*

Todistus. Perustuu yleistettyyn Hölderin epäyhtälöön [GT]. □

Oletusta $p < d$ ei voida Sobolevin upotuslauseessa lieventää. Lisäksi funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ säännöllisyys riippuu lukujen p ja d suuruusjärjestyksestä.

Esimerkki 3.8. Olkoon $f(x) = |x|^a$. Pallokoordinaattien avulla laskemalla saadaan, että $f \in W^{1,p}(B(0,1))$ jos ja vain jos $a > 1 - \frac{d}{p}$. Jos $p < d$ niin huomataan, että funktiolla f ei ole olemassa jatkuvaa edustajaa. Jos $p > d$, niin f on jatkuva yksikköpallossa.

Edellisen esimerkin nojalla voidaan kysyä onko funktio $u \in W^{1,p}(\Omega)$ yleisesti ottaen jatkuva, kun $p > d$. Osoittautuu, että tällöin funktiolla u on jatkuva edustaja, joka on jopa Hölder-jatkuva. Tämä tulos nimetään usein Morreyn mukaan ja sen todistus perustuu Poincarén epäyhtälöön.

Lause 3.9 *(Morrey). Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $p \in (d, \infty)$. Tällöin kaikilla $U \subset\subset \Omega$ on olemassa funktio $v \in C^{0,1-\frac{d}{p}}(U)$ siten, että $u = v$ melkein kaikilla $x \in \Omega$.*

Todistus. [EG, s. 143]. $\square$

Lause 3.10 *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$, missä $p > d$. Tällöin u on melkein kaikkialla differentioituva joukossa Ω. Lisäksi heikko gradientti yhtyy klassiseen gradienttiin niissä pisteissä, missä jälkimmäinen on olemassa.*

Todistus. [EG, s. 235]. $\square$

Morreyn lauseen nojalla heikosti derivoituvat funktiot ovat lokaalisti Hölder-jatkuvia ekpsponentilla $1 - \frac{d}{p}$. Saamme upotuksia lokaalisti myös korkeammille kertaluvuille. Muotoillaan upotukset yhdeksi lauseeksi. Seuraavan lauseen upotukset ovat voimassa ilman lokaaliusoletusta, jos Ω on esimerkiksi niin kutsuttu Lipschitz-alue.

Lause 3.11 *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avoin, $p > d$ ja $q = \frac{dp}{d+p} < d$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee*

$$W^{k+2,q}_{\text{loc}}(\Omega) \subset W^{k+1,p}_{\text{loc}}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega),$$

$\alpha = 1 - \frac{d}{p} \in (0, 1)$. *Lisäksi* $C^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega) = W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Seuraus 3.12 *Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, niin kaikilla $\alpha \in (0, 1)$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee*

$$W^{k+2,q}_{\text{loc}}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega), \qquad q = \frac{2}{2-\alpha}.$$

Mainittakoon lisäksi, että Sobolev-avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ on enemmän kuin vektoriavaruus, sillä heikosti derivoituvat funktiot muodostavat niin kutsutun hilan. Kyseinen ominaisuus ei päde avaruudessa $W^{k,p}(\Omega)$, kun $k > 1$.

Lause 3.13 *Oletetaan, että $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin $|u|, u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$. Erityisesti $\nabla u^+ = \nabla u$ kun $u(x) > 0$ ja $\nabla u = 0$ muuten. Vastaavasti $\nabla u^- = \nabla u$ kun $u(x) < 0$ ja $\nabla u(x) = 0$ muuten. Erityisesti jos $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, niin $\min(u, v) \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $\max(u, v) \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Todistus. [HKM, s. 20]. $\square$

Tutkielman päätulokseen liittyy kaksi muuta funktioavaruutta, jotka ovat Hölder-avaruuksia. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ja määritellään

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} : |D^\nu u(x) - D^\nu u(y)| \le |x - y|^\alpha,\ |\nu| = k\}.$$

Varustamme avaruuden $C^{k,\alpha}(\Omega)$ seminormilla

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(F)} := \sup_{x\in F}|u(x)| + \sup_{x,y\in F}\sum_{|v|=k}\frac{|D^v u(x) - D^v u(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{3.4}$$

Seminormin (3.4) avulla määrittelemme lokaalin avaruuden

$$C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{C^{k,\alpha}(G)} < \infty \ \text{ kaikilla } \ G \subset\subset \Omega\}.$$

Olkoon edelleen $C^{k+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avaruuden $C^\infty(\Omega)$ täydellistymä seminormin (3.4) suhteen. Tällöin avaruus $C^{k+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on avaruuden $C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ aito aliavaruus mikäli $\alpha \neq 1$. Tämä nähdään tarkastelemalla kuvausta $x \mapsto |x|^{\alpha+k}$. Jos $\alpha = 1$ niin $C^{k+\alpha}(\Omega) = C^{k,\alpha}(\Omega)$. Avaruus $C^{k+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on tarkemmin niiden funktioiden u joukko, joille

$$\sum_{|\nu|=k}|D^\nu u(x) - D^\nu u(y)| = o(|x-y|^\alpha)$$

tasaisesti joukon $\Omega \times \Omega$ kompakteissa osajoukoissa.

Huomautus 3.14. $C^{k+\alpha}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}(\Omega) \subset C^{k+\beta}(\Omega)$ aina, kun $0 < \beta < \alpha \leq 1$.

Esitellään lopuksi *leikkausfunktio*, jonka gradientti on rajoitettu.

Lause 3.15 *(Leikkausfunktio). Olkoon $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ avoin ja $K \subset \Omega$ kompakti. Tällöin on olemassa $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ siten, että $\varphi|_K \equiv 1$. Lisäksi funktio φ voidaan valita siten, että $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \Omega$ ja*

$$|\nabla\varphi(x)| \leq \frac{2}{\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)},$$

kaikilla $x \in \Omega$.

Todistus. Merkitään $\delta = \mathrm{dist}(K, \partial\Omega) < \infty$ ja määritellään funktio u asettamalla

$$u(x) = \min\left(\frac{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) - \frac{\delta}{c})^+}{\frac{\delta}{c}}, 1\right).$$

Etäisyysfunktio $\varrho : x \to \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ on 1-Lipschitz, joten $\varrho \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Toisaalta Lauseen 3.13 nojalla u on heikosti derivoituva ja $v = c \cdot \min\{u, \frac{1}{c}\}$ on heikosti derivoituva. Olkoon sitten v_ε funktion v standardi silotus. Tarkemmin

$$v_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^d} v(x)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy,$$

missä $\eta_\varepsilon = \varepsilon^{-d}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$ ja

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

missä $C = (\int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\,dx)^{-1}$.

Arviosta $u \leq 1$ seuraa silotuksen määritelmän nojalla suoraan, että $v_\varepsilon \leq 1$. Edelleen, jos $c > 1$, niin $v_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $v_\varepsilon|_K \equiv 1$ ja $\operatorname{spt} v_\varepsilon \subset \Omega$. Silotuksen ominaisuuksista [EG, s. 122] seuraa siten, että $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Koska etäisyysfunktio on 1-Lipschitz, niin $|\nabla\varrho| \leq 1$ ja

$$\begin{aligned} |\nabla v_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(D^{(1,0,\ldots,0)}v(y), D^{(0,1,\ldots,0)}v(y), \ldots, D^{(0,0,\ldots,d)}v(y)\big)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |\eta_\varepsilon(x-y)||\nabla v(y)|\,dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |\eta_\varepsilon(x)|\,dx \\ &= \frac{c}{\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Väite seuraa valitsemalla $\varphi \equiv v_\varepsilon$ ja $c = 2$ joukossa Ω. □

3.1 Kvasikonformikuvaukset

Konformikuvaukset määritellään usein kulmien säilyttävinä kuvauksina. Konformikuvaukset voidaan myös ekvivalentisti määritellä analyyttisinä injektioina. Analyyttiset ovat jäykkiä kuvauksia, mistä kertoo jo klassinen Schwarzin lemma. Schwarzin lemmasta seuraa muun muassa, että analyyttinen funktio f yksikkökiekolta itselleen on kierto, jos $f(0) = 0$ ja jollekin $z \neq 0$ pätee $|f(z)| = |z|$. Yleisesti kolme kiinnitettyä kuvapistettä määrää konformikuvauksen kahden alueen välillä yksikäsitteisesti. Edelleen neliötä ei voida kuvata konformikuvauksella mielivaltaiselle suorakulmioille siten, että neliön kärkipisteet kuvautuvat suorakulmion kärjiksi. Tämä tunnetaan niin kutsuttuna Grötzchin ongelmana [A]. Sen sijaan kahden annuluksen välille voidaan löytää konformikuvaus, jos annulusten sisä- ja ulkosäteiden suhteet ovat samat. Grötzschin ongelma antaa toisaalta aiheen kysyä millainen kuvaus olisi melkein konforminen. Sopivaksi yleistyksi osoittautuu kvasikonformikuvaus. Tavoitteena on todistaa pääpiirteittäin Stoïlow-hajotelma, jonka mukaan kvasisäännöllinen funktio on yhdiste analyyttisestä funktiosta ja kvasikonformikuvauksesta.

Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differentioituvuus voidaan ilmaista kätevästi matriisien sijaan ilmaista kompleksisten osittaisderivaattojen avulla. Jos f jatkuvasti derivoituva reaalisessa mielessä, niin löytyy $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(\overline{z - z_0}) + o(z - z_0),$$

missä

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \text{ja} \\ f_{\bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Kaiken kaikkiaan Cauchy-Riemannin yhtälöt voidaan kirjoittaa yhtälönä $f_{\bar{z}} = 0$. Erityisesti $f'(z_0) = f_z(z_0)$, kun f on kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0. Osittaisderivaattoja laskettaessa voidaan ajatella, että z ja $\bar{z}$ ovat välillisesti toisistaan riippumattomia muuttujia. Esimerkiksi funktiolle $f(z) = |z|^2$ on $f_z = \bar{z}$, sillä $|z|^2 = z\bar{z}$. Edelleen kompleksisille osittaisderivaatoille on helppo todeta yhtälöt

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \qquad \text{ja} \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \tag{3.5}$$

kun oletetaan, että f on reaalisessa mielessä derivoituva. Derivoituvuus reaalisessa mielessä tarkoittaa, että kuvaus $(x, y) \mapsto (u, v)$ on differentioituva. Jatkossa, jos $\Omega \subset \mathbb{C}$, niin merkinnällä $f \in C^k(\Omega)$ tarkoitetaan, että funktio f on k. kertaa jatkuvasti derivoituva reaalisessa mielessä. Tarvitsemme myös Sobolev-avaruuden käsitettä funktioille $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Esimerkiksi $f \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, jos on funktiot $f_z, f_{\bar{z}} \in L^p(\mathbb{C})$ siten, että kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ pätee

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi_z f \, dA = -\int_{\mathbb{C}} f_z \varphi \, dA \qquad \int_{\mathbb{C}} \varphi_{\bar{z}} f \, dA = -\int_{\mathbb{C}} f_{\bar{z}} \varphi \, dA.$$

Tästä eteenpäin merkinnät f_z ja $f_{\bar{z}}$ ilmaisevat heikkoja derivaattoja ja analogia korkeamman kertaluvun derivaattoihin sekä merkintään D^α on ilmeinen.

Lause 3.16 *(Gehring-Lehto). Homeomorfismi $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on melkein kaikilla $z \in \Omega$ differentioituva.*

Todistus. [LV, s. 128–130]. □

Tarvitsemme vielä absoluuttisen jatkuvuuden käsitettä muun muassa ketjusääntöjen muotoilemista varten. Äärellistä Borel-mittaa τ sanotaan absoluuttisesti jatkuvaksi, jos $\tau(E) = 0$ aina, kun $m^*(E) = 0$. Jos w on homeomorfismi, niin mitta $\tau(e) := |w(e \cap G')|, G' \subset\subset G$ on äärellinen Borel-mitta. Vastaavasti homeomorfismia w sanotaan absoluuttisesti jatkuvaksi, jos edellä asetettu mitta on absoluuttisesti jatkuva. Kirjoitetaan kompleksiarvoinen funktio f muodossa $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, missä u ja v ovat reaaliarvoisia kuvauksia. Jacobin matriisiksi saadaan tällöin

$$Df = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

ja Jacobin determinantiksi

$$\mathcal{J}_f = \det(Df) = u_x v_y - u_y v_x.$$

Huomataan, että Jacobin determinantti voidaan kirjoittaa kompleksisten osittaisderivaattojen avulla myös muodossa

$$\mathcal{J}_f = \det(Df) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

.

Lause 3.17 *Olkoon $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ suunnansäilyttävä [AIM, s. 33] lokaalisti absoluuttisesti jatkuva homeomorfismi siten, että f^{-1} on lokaalisti absoluuttisesti jatkuva. Tällöin $\mathcal{J}_f > 0$ melkein kaikilla $z \in \Omega$ ja kaikilla Lebesgue-mitallisilla joukoilla $G \subset \Omega$ pätee*

$$|G| = \int_G \mathcal{J}_f \, dA.$$

Todistus. [LV, s. 131]. □

Lause 3.18 *Homeomorfismi $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on absoluuttisesti jatkuva.*

Todistus. [LV, s. 150–151]. □

Lause 3.19 *(Tulosääntö). Olkoon $f \in W^{1,r}(G)$ ja $g \in W^{1,s}(G)$ siten, että $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t} \leq 1$. Tällöin $fg \in W^{1,t}(G)$. Lisäksi*

$$(fg)_z = f_z g + f g_z \qquad \text{ja} \qquad (fg)_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} g + f g_{\bar{z}}. \tag{3.6}$$

Jos $f, g \in W^{1,r}_{\text{loc}}(G) \cap C(G)$ tai jos $f \in W^{1,r}(G), g \in C^1(G)$, niin $fg \in W^{1,r}_{\text{loc}}(G)$ ja rivin (3.6) kaavat ovat voimassa.

Todistus. Hölderin epäyhtälön ja approksimointiargumentin nojalla $fg \in W^{1,t}(G)$. Väitetyt tulosäännöt pätevät funktioiden f ja g silotuksille

$$f_\varepsilon = e\pi \int_{\mathbb{C}} \varepsilon^{-2}(f(z))e^{-\frac{1}{1-|\frac{z-\tau}{\varepsilon}|^2}}\, dA(\tau) \quad \text{ja} \quad g_\varepsilon = e\pi \int_{\mathbb{C}} \varepsilon^{-2}(f(z))e^{-\frac{1}{1-|\frac{z-\tau}{\varepsilon}|^2}}\, dA(\tau).$$

Yleinen tapaus seuraa antamalla $\varepsilon \to 0$.

□

Lause 3.20 *(Ketjusääntö) Olkoon $f \in W^{1,q}(G') \cap L^s(G'), q \in (1,2)$ ja $g : G \to G', G \subset \mathbb{C}$ alue. Oletetaan, että g on suunnansäilyttävä homeomorfismi, joka on lisäksi absoluuttisesti jatkuva siten, että $g^{-1} \in W^{1,p}(G')$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja $(p/2)^{-1} + s^{-1} = 1$. Tällöin $f \circ g(z) \in W^{1,1}(G)$ ja*

$$(f \circ g)_z = (f_z \circ g)g_z + (f_{\bar{z}} \circ g)\bar{g}_z, \quad \text{ja}$$

$$(f \circ g)_{\bar{z}} = (f_z \circ g)g_{\bar{z}} + (f_{\bar{z}} \circ g)\bar{g}_{\bar{z}}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $f \in C^1(G')$ ja $w \in W^{1,p}(G) \cap C(G)$. Kirjoitetaan $(f \circ g) = u_{f \circ g} + iv_{f \circ g}$, missä $u_{f \circ g}$ ja $v_{f \circ g}$ ovat reaaliarvoisia. Nyt useampiuloitteisen ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{f\circ g}}{\partial x}(z) &= \frac{\partial u_f}{\partial x}(g(z))\frac{\partial u_g}{\partial x}(z) + \frac{\partial u_f}{\partial y}(g(z))\frac{\partial v_g}{\partial x}(z),\\
\frac{\partial u_{f\circ g}}{\partial y}(z) &= \frac{\partial u_f}{\partial x}(g(z))\frac{\partial u_g}{\partial y}(z) + \frac{\partial u_f}{\partial y}(g(z))\frac{\partial v_g}{\partial y}(z),\\
\frac{\partial v_{f\circ g}}{\partial x}(z) &= \frac{\partial u_f}{\partial x}(g(z))\frac{\partial u_g}{\partial x}(z) + \frac{\partial u_f}{\partial y}(g(z))\frac{\partial v_g}{\partial x}(z) \quad \text{ja}\\
\frac{\partial v_{f\circ g}}{\partial y}(z) &= \frac{\partial u_f}{\partial x}(g(z))\frac{\partial u_g}{\partial y}(z) + \frac{\partial u_f}{\partial y}(g(z))\frac{\partial v_g}{\partial y}(z).
\end{aligned}$$

Ketjusäännöt seuraa nyt helppojen algebrallisten manipulaatioiden jälkeen yhtälöitä (3.5) apuna käyttäen. Yleisempi tapaus on oleellisesti approksimointia [R, s. 13].

□

Seuraus 3.21 *Olkoon $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ suunnansäilyttävä ja absoluuttisesti jatkuva* *homeomorfismi siten, että $f^{-1} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Jos $\xi = f(z)$, niin*

$$(f^{-1})_\xi = \mathcal{J}_f^{-1}\overline{f_{\bar z}} \qquad \text{ja} \qquad (f^{-1})_{\bar\xi} = -\mathcal{J}_f^{-1} f_{\bar z}. \tag{3.7}$$

Jatketaan Greenin lauseella, joka voidaan kätevästi esittää kompleksisten osittaisderivaattojen avulla. Huomautettakoon, että seuraava lause on klassinen Greenin lause C^1-funktioille kompleksianalyysin merkinnöin. Yleisempi versio seuraa luonnollisesti approksimointiargumentilla.

Lause 3.22 *(Greenin lause). Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ Jordan-alue siten, että $\ell(\partial\Omega) < \infty$. Oletetaan lisäksi, että $f \in W^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$. Tällöin*

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2i\int_\Omega f_{\bar z}\,dA \qquad \text{ja} \qquad \int_{\partial\Omega} f(z)\,d\bar z = -2i\int_\Omega f_z\,dA.$$

Todistus. Todistus Stieltjesin integraalille [LV, s. 150–152]. □

Niin kutsutun kvasikonformikuvausten geometrisen määritelmän [A, LV] nojalla on helppo todeta, että kvasikonformikuvauksen käänteiskuvaus on kvasikonformikuvaus. Pienellä vaivalla nähdään myös, että kahden kvasikonformikuvauksen yhdistetty kuvaus on kvasikonformikuvaus. Annetaan ekvivalentti määritelmä, joka soveltuu paremmin tutkielman teemaan mutta jonka avulla edellä mainitut ryhmäominaisuudet ovat vaikeampia todistaa.

Määritelmä 3.23. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Sanotaan, että $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D) \cap C(D)$ on K-kvasisäännöllinen, jos on vakio $K \geq 1$ siten, että melkein kaikilla $z \in D$ pätee

$$|f_z| + |f_{\bar z}| \leq K(|f_z| - |f_{\bar z}|) \tag{3.8}$$

tai yhtäpitävästi, jos

$$(|f_z| + |f_{\bar z}|)^2 \leq K\mathcal{J}_f.$$

Edelleen merkitsemällä $k = \frac{K-1}{K+1}$ epäyhtälö (3.8) saa muodon

$$|f_{\bar z}| \leq k|f_z|. \tag{3.9}$$

Jos f on lisäksi homeomorfismi sanotaan, että f on kvasikonformikuvaus.

Huomautus 3.24. Hadamardin epäyhtälöstä [Ga, s. 233] seuraa, että $\mathcal{J}_f \leq (|f_z| + |f_{\bar z}|)^2$, joten ehto $K \geq 1$ kvasisäännöllisen funktion määritelmässä ei ole rajoittava.

Huomautus 3.25. Jatkuvuusoletus kvasisäännöllisen funktion määritelmässä on luonnollinen, sillä muista oletuksista seuraa jatkuvan edustajan olemassaolo. Tämä voidaan todistaa käyttämällä apuna Cauchyn muunnosta [AIM, s. 175].

Esimerkki 3.26. Funktio $f_1(z) = z|z|^{\frac{1}{K}-1}, f_1(0) := 0$ ja sen käänteisfunktio $f_2(z) = z|z|^{K-1}$ ovat jatkuvia bijektioita kompleksitasolta itselleen. Edelleen f_1 on K-kvasikonformikuvaus ja f_2 on K^{-1}-kvasikonformikuvaus. Näitä funktioita kutsutaan radiaalisiksi kvasikonformikuvauksiksi.

Analyyttisen määritelmän mukaan 1-kvasikonformikuvaukset, joiden osittaisderivaatat ovat jatkuvia, ovat analyyttisiä Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla. Pätee myös vahvempi tulos, jota kutsutaan Weylin lemmaksi.

Lemma 3.27 *(Weyl). Jos $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ ja $f_{\bar{z}} = 0$, niin f on analyyttinen.*

Todistus. [Hu, s. 115]. □

Muotoillaan Hölder-jatkuvuustulos, joka alun perin on todistettu geometrisen määritelmän nojalla [LV, s. 66–68]. Tulokselle on myös elegantti analyyttinen todistus. Kyseinen todistus perustuu isoperimetriseen epäyhtälöön, joka puolestaan on helpohko seuraus Greenin ja Fubinin lauseista sekä kierrosluvun käsitteestä.

Lause 3.28 *Olkoon $f : \Omega \to \Omega'$ kvasikonformikuvaus. Tällöin f on lokaalisti Hölder-jatkuva eksponentilla K^{-1}.*

Todistus. [AIM, s. 81–82]. □

3.2 Cauchyn ja Beurlingin muunnos

Kvasikonformikuvaukset voivat olla paljon monimutkaisempia olioita kuin radiaalinen kvasikonformikuvaus. Voimme näet valita Lebesgue-mitallisen kuvauksen μ, jolle $\|\mu\|_\infty < 1$, ja joka määrittää kvasikonformikuvauksen dilataation sekä suunnan mihin maksimaalinen venytys tapahtuu. Kyseiseen dilataatiokarakterisaatioon liittyy Beltramin yhtälö, joka liittää kvasikonformikuvauksen kompleksiset osittaisderivaatat toisiinsa. Karakterisaation todistukseen voidaan käyttää niin kutsuttuja singulaarisia operaattoreita. Aloitetaan näiden johtaminen Cauchyn integraalikaavan yleistyksestä. Olkoon Ω Jordan-alue siten, että $\ell(\partial\Omega) < \infty$, $\phi \in W^{1,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ja $\mathbb{D}(z,\varepsilon) \subset \Omega$. Soveltamalla Greenin lausetta joukoissa $\mathbb{D}(z,\varepsilon)$ ja Ω saadaan

$$2i \int_\Omega \frac{\phi_{\bar{\tau}}(\tau)}{\tau - z}\, dA(\tau) - 2i \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{\phi_{\bar{\tau}}(\tau)}{\tau - z}\, dA(\tau) = \int_{\partial\Omega} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau - \int_{\partial\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau. \tag{3.10}$$

Polkuintegraalin määritelmän, Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen ja funktion ϕ jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathbb{D}(z,\varepsilon)}\frac{\phi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau = 2\pi i\phi(z).$$

Antamalla $\varepsilon\to 0$ saadaan yhdessä kaavan (3.10) nojalla *Pompeiun kaava*

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\phi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\Omega\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)}\frac{\phi_{\bar\tau}(\tau)}{\tau-z}\,dA(\tau).$$

Sileille kompaktikantajaisille funktioille edellisen rivin viimeinen integraali on olemassa myös ilman pääarvotulkintaa, tarkemmin

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\phi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{\phi_{\bar\tau}(\tau)}{\tau-z}\,dA(\tau), \qquad \phi\in C_0^\infty(\mathbb{C}).$$

Tästä motivoituneena määritellään *Cauchyn muunnos* asettamalla

$$(\mathcal{C}\phi)(z) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\phi(\tau)}{z-\tau}\,dA(\tau), \qquad \phi\in C_0^\infty(\mathbb{C}).$$

Tarkastellaan aluksi sopivaa apufunktiota, jonka avulla voidaan laskea Cauchyn muunnoksen kompleksiset osittaisderivaatat.

Lause 3.29 *Jos $z_0\in\mathbb{C}$ ja $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{C})$, niin funktiolle $\psi(z) := \mathcal{C}\phi(z)-\phi(z_0)\bar z$ pätee*

$$\psi'(z_0) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\phi(\tau)-\phi(z_0)}{(\tau-z_0)^2}\,dA(\tau).$$

Erityisesti

$$(\mathcal{C}\phi)_z = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\phi(\tau)-\phi(z)}{(\tau-z)^2}\,dA(\tau) \qquad \text{ja} \qquad (\mathcal{C}\phi)_{\bar z} = \phi.$$

Todistus. Olkoon $R>0$ siten, että $\operatorname{spt}\phi\subset\mathbb{D}(0,R)$ ja $z_0\in\mathbb{D}(0,R)$. Soveltamalla väliarvolausetta funktion ϕ reaali- ja imaginääriosaan nähdään, että ϕ on Lipschitz-jatkuva. Siispä integraali $\int_{\mathbb{C}}\frac{\phi(\tau)-\phi(z_0)}{(\tau-z_0)^2}\,dA(\tau)$ on olemassa tiedon

$\tau^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ nojalla. Lisäksi

$$
\begin{aligned}
&\left| -\frac{\psi(z_0+h)-\psi(z_0)}{h} - \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\tau)-\phi(z_0)}{(\tau-z_0)^2}\, dA(\tau) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{D}(0,R)} \frac{\phi(\tau)-\phi(z_0)}{(\tau-z_0-h)(\tau-z_0)}\, dA(\tau) - \int_{\mathbb{D}(0,R)} \frac{\phi(\tau)-\phi(z_0)}{(\tau-z_0)^2}\, dA(\tau) \right| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{D}(0,R)} \frac{|h|}{|\tau-z_0||\tau-z_0-h|}\, dA(\tau) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}(0,2R)} \frac{|h|}{|\tau||\tau-h|}\, dA(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{D}(0,\frac{|h|}{2})} \frac{|h|}{|\tau||\tau-h|}\, dA(\tau) + \int_{\mathbb{D}(0,2R)\setminus\mathbb{D}(0,\frac{|h|}{2})} \frac{|h|}{|\tau||\tau-h|}\, dA(\tau) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{D}(0,\frac{|h|}{2})} \frac{1}{|\tau|}\, dA(\tau) + |h| \int_{\mathbb{D}(0,2R)\setminus\mathbb{D}(0,\frac{|h|}{2})} \frac{1}{|\tau|^2}\, dA(\tau) \\
&= 4\pi|h| + 6\pi|h| \ln\frac{4R}{|h|}.
\end{aligned}
$$

Väite seuraa, sillä L'Hospitalin säännön nojalla $|h|\ln\frac{4R}{|h|} \to 0$, kun $|h| \to 0$. $\square$

Huomautettakoon, että edellisessä lauseessa tarkasteltua osittaisderivaatan $(\mathcal{C}\phi)_z$ integraaliesitystä ei voida hajottaa, sillä kuvaus $\tau \mapsto \frac{1}{(\tau-z_0)^2}$ ei ole integroituva alueessa, joka sisältää pisteen z_0. Kuitenkin Greenin lauseen ja Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}(0,R)\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{1}{(z-\tau)^2}\, dA(\tau) &= \int_{\mathbb{D}(0,R)\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{1}{z-\tau}\, d\bar{\tau} \\
&= \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{1}{z-\tau}\, d\bar{\tau} - \int_{\partial\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{1}{z-\tau}\, d\bar{\tau} \\
&= R^2 \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{1}{\tau^2(z-\tau)}\, d\tau \\
&= R^2 \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} -\frac{1}{z^2\tau} + \frac{1}{z^2(\tau-z)} - \frac{1}{z\tau^2}\, d\tau \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Toisaalta Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{\phi(\tau)-\phi(z)}{(z-\tau)^2}\, dA(\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\tau)-\phi(z)}{(z-\tau)^2} \chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)}\, dA(\tau)
$$

$$= \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\tau) - \phi(z)}{(z-\tau)^2} \, dA(\tau).$$

Kaiken kaikkiaan Cauchyn muunnoksen kompleksinen osittaisderivaatta $(\mathcal{C}\phi)_z$ voidaan kirjoittaa Cauchyn pääarvona

$$(\mathcal{C}\phi)_z = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{\phi(\tau)}{(z-\tau)^2} \, dA(\tau) := (\mathcal{S}\phi)(z).$$

Operaattoria $\mathcal{S}$ kutsutaan *Beurlingin muunnokseksi*. Huomautettakoon, että pääarvomuodossa kirjoittamisen etuna on myöhemmin operaattorin laajentaminen. Muotoillaan identiteetti Beurlingin muunnokselle, joka osoittautuu myöhemmin erityisen hyödylliseksi Beltramin yhtälön todistuksessa.

Lause 3.30 *Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Tällöin $\mathcal{S}(\phi_{\bar{z}}) = \phi_z$.*

Todistus. Olkoon $R > 0$ siten, että $\operatorname{spt} \phi \subset \mathbb{D}(0, R)$. Koska $\phi(z) = 0$ kaikilla $z \in \partial\mathbb{D}(0, R)$, niin Pompeiun kaavan nojalla $\phi = \mathcal{C}\phi_{\bar{z}}$. Nyt $\mathcal{S}\phi_{\bar{z}} = (\mathcal{C}\phi_{\bar{z}})_z = \phi_z$. $\square$

Osoittautuu, että edellä esiteltyjen muunnosten määrittelyavaruuksia voidaan laajentaa. Olkoon $\phi \in L_0^1(\mathbb{C})$. Tiedon $\tau^{-s} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}), s < 2$ nojalla huomataan, että

$$\int_{\operatorname{spt}\phi} \int_{\operatorname{spt}\phi} \left| \frac{\phi(\tau)}{z-\tau} \right| dA \, dA(\tau) = \int_{\operatorname{spt}\phi} \phi(\tau) \int_{\operatorname{spt}\phi} \left| \frac{1}{z-\tau} \right| dA \, dA(\tau) < \infty.$$

Toisaalta Fubinin lauseen nojalla

$$\int_{\operatorname{spt}\phi} \int_{\operatorname{spt}\phi} \left| \frac{\phi(\tau)}{z-\tau} \right| dA(\tau) \, dA = \int_{\operatorname{spt}\phi} \int_{\operatorname{spt}\phi} \left| \frac{\phi(\tau)}{z-\tau} \right| dA \, dA(\tau).$$

Siispä jälleen Fubinin lauseen nojalla Cauchyn muunnos on hyvin määritelty myös avaruudessa $L_0^1(\mathbb{C})$. Laajennetaan vielä Beurlingin muunnoksen määrittelyavaruutta todistamalla ensin, että Beurlingin muunnos säilyttää L^2-normin.

Lause 3.31 *Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Tällöin $\int_{\mathbb{C}} |\mathcal{S}\phi|^2 \, dA = \int_{\mathbb{C}} |\phi|^2 \, dA$.*

Todistus. Olkoon $R > 0$ siten, että $\operatorname{spt}\phi \subset \mathbb{D}(0, R)$. Koska $\phi = 0$ kaikilla $z \in \partial\mathbb{D}(0, R)$, niin Greenin lauseen nojalla

$$\int_{\mathbb{C}} (\phi \, \overline{\mathcal{C}\phi})_z \, dA = -\frac{1}{2i} \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \phi \, \overline{\mathcal{C}\phi} \, d\bar{z} = 0.$$

Toisaalta, jos $\operatorname{spt}\phi \subset \mathbb{D}(0,R_0) \subset \mathbb{D}(0,R)$, niin Greenin lauseen nojalla

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}\phi\,\overline{\mathcal{C}\phi})_{\bar z}\, dA \right| &= \left| \frac{1}{2i} \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \mathcal{S}\phi\,\overline{\mathcal{C}\phi}\, dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} |\mathcal{S}\phi|\,|\overline{\mathcal{C}\phi}|\,|d\tau| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{\|\phi\|_{L^1(\mathbb{C})}\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{C})}}{\pi(|z|-R_0)^2\pi(|z|-R_0)}\,|d\tau| \\
&= \pi^{-1}R\,\|\phi\|^2_{L^1(\mathbb{C})}\,(R-R_0)^{-3}.
\end{aligned}
$$

Siispä $\int_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}\phi\,\overline{\mathcal{C}\phi})_{\bar z}\, dA = 0$. Nyt, koska $\overline{\mathcal{S}\phi} = \overline{(\mathcal{C}\phi)_z} = (\overline{\mathcal{C}\phi})_{\bar z}$, niin

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |\mathcal{S}\phi|^2\, dA &= \int_{\mathbb{C}} \mathcal{S}\phi(\overline{\mathcal{C}\phi})_{\bar z}\, dA \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}\phi\,\overline{\mathcal{C}\phi})_{\bar z}\, dA - \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}\phi)_{\bar z}\,\overline{\mathcal{C}\phi}\, dA \\
&= -\int_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}\phi)_{\bar z}\,\overline{\mathcal{C}\phi}\, dA \\
&= -\int \phi_z\,\overline{\mathcal{C}\phi}\, dA \\
&= \int \phi(\overline{\mathcal{C}\phi})_z\, dA - \int_{\mathbb{C}} (\phi\,\overline{\mathcal{C}\phi})_z\, dA \\
&= \int \phi(\overline{\mathcal{C}\phi})_z\, dA \\
&= \int_{\mathbb{C}} |\phi|^2\, dA.
\end{aligned}
$$

□

Lause 3.32 *Beurlingin muunnos voidaan laajentaa jatkuvaksi lineaariseksi operaattoriksi $\hat{\mathcal{S}}$ avaruuteen $L^2(\mathbb{C})$ siten, että $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$, kun $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$.*

Todistus. Olkoon $\phi \in L^2(\mathbb{C})$ ja $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\varphi_m \to \phi$. Lauseen 3.31 nojalla $\|\mathcal{S}\varphi_n - \mathcal{S}\varphi_m\|_{L^2(\mathbb{C})} = \|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{C})}$, joten $(\mathcal{S}(\varphi_m))_{m\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono. Avaruuden $L^2(\mathbb{C})$ täydellisyyden nojalla tällä jonolla on yksikäsitteinen raja-arvo $\hat{\mathcal{S}}$ siten, että $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{S}\varphi_n - \hat{\mathcal{S}}\|_{L^2(\mathbb{C})} = 0$. Väite seuraa L^2-normin ja operaattorin $\mathcal{S}$ jatkuvuudesta.

□

Seuraus 3.33 *Olkoon $\phi \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Tällöin $\hat{\mathcal{S}}(\phi_{\bar z}) = \phi_z$.*

Määrittelyavaruuksien laajentamisen jälkeen voidaan tarkastella muunnoksia karakteristiselle funktiolle.

Esimerkki 3.34. Lasketaan ensin Cauchyn muunnos karakteristiselle funktiolle kiekossa. Pompeiun kaavan nojalla

$$\overline{z-a} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}(a,r)} \frac{\overline{\tau-a}}{\tau-z}\,d\tau - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\Omega\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{1}{\tau-z}\,dA(\tau).$$

Muuttujanvaihdon, identiteetin $\tau\bar{\tau} = |\tau|^2$ ja osamurtokehitelmän nojalla

$$\int_{\partial\mathbb{D}(a,r)} \frac{\overline{\tau-a}}{\tau-z}\,d\tau = r^2\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \frac{1}{\tau(\tau-z)}\,d\tau = r^2\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{\tau}\,d\tau = 0.$$

Kaiken kaikkiaan $\mathcal{C}\chi_{\mathbb{D}(a,r)}(z) = \overline{z-a}$, jos $z \in \mathbb{D}(a,r)$. Oletetaan sitten, että $z \notin \mathbb{D}(a,r)$. Greenin lauseen, muuttujanvaihdon ja residylauseen [P, s. 323] nojalla saadaan sopivalla analyyttisellä logaritmin haaralla log, että

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\chi_{\mathbb{D}(a,r)}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}(a,r)} \frac{1}{z-\tau}\,dA(\tau) \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \log(z-a-\tau)\,d\bar{\tau} \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \frac{r^2}{\tau^2}\log(z-a-\tau)\,d\tau \\
&= \frac{r^2}{z-a}.
\end{aligned}$$

Beurlingin muunnoksen laskemista varten käytetään apuna identiteettiä $\hat{\mathcal{S}}(f_{\bar{z}}) = f_z, f \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Valitsemalla $f(z) = \overline{z-a}$, jos $z \in \mathbb{D}(a,r)$ ja $f(z) = \frac{r^2}{z-a}$, jos $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(a,r)$ saadaan Sobolev-avaruuksien ACL-karakterisaation nojalla, että $f \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Täten $f_{\bar{z}} = \chi_{\mathbb{D}(a,r)}$ ja

$$\hat{\mathcal{S}}\chi_{\mathbb{D}(a,r)}(z) = -\frac{r^2(1-\chi_{\mathbb{D}(a,r)})}{(z-a)^2}.$$

Lause 3.35 *Avaruudessa $L^2(\mathbb{C})$ pätee $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.*

Todistus. Esimerkissä 3.34 laskettua Beurlingin muunnosta hyväksi käyttäen huomataan, että

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \frac{f(\tau)}{(z-\tau)^2}\,dA(\tau) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\mathbb{C}} -\frac{\varepsilon^2(1-\chi_{\mathbb{D}(\tau,r)})}{(z-\tau)^2}f(\tau)\,dA(\tau)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\mathbb{C}} \hat{\mathcal{S}}(\chi_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)}(\tau)) f(\tau)\, dA(\tau) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\mathbb{C}} \chi_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)}(\tau)\hat{\mathcal{S}}(f(\tau))\, dA(\tau) \\
&= \frac{1}{|\mathbb{D}(z,\varepsilon)|}\int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \hat{\mathcal{S}}(f(\tau))\, dA(\tau),
\end{aligned}
$$

missä yhtälö $(*)$ seuraa Fubinin lauseesta, operaattorin $\mathcal{S}$ symmetrisyydestä luokassa $C_0^\infty(\mathbb{C})$ ja operaattorin $\hat{\mathcal{S}}$ jatkuvuudesta. Väite seuraa nyt Lebesguen differentioituvuuslauseesta. $\square$

Edellisen lauseen todistus toimii myös L^p-avaruudessa, kun Beurlingin muunnoksen olemassaolo L^p-avaruudessa tunnetaan. Edelleen myös itse Beurlingin muunnos kuuluu avaruuteen $L^p(\mathbb{C})$ kaikilla $p \in (1,\infty)$. Välillä $p \in (2,\infty)$ tämä seuraa niin kutsutusta Calderon-Zygmundin epäyhtälöstä $\|\mathcal{S}\phi\|_p \leq C_p \|\phi\|_p$ [A, s. 62–65]. Toinen lähestymistapa maksimaalifunktioiden teorian avulla on tehty lähteessä [AIM]. Muotoillaan vielä Beurlingin muunnoksen operaattorinormin jatkuvuustulos.

Lause 3.36 *Beurlingin muunnoksen operaattorinormi* $\mathbf{S}_p$ *on jatkuva kaikilla* $p \in (1,\infty)$. *Lisäksi* $\mathbf{S}_2 = 1$.

Todistus. Olkoon $f \in L^p(\mathbb{C})$. Epäyhtälö $\|\mathcal{S}\phi\|_p \leq C_p \|\phi\|_p$ yhdessä Riesz-Thorinin lauseen [AIM, s. 117] kanssa antaa epäyhtälön

$$
\|\mathcal{S}f\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C_{p_1}^t C_{p_2}^{1-t} \|f\|_{L^p(\mathbb{C})}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}. \tag{3.11}
$$

Epäyhtälön (3.11) nojalla $t \mapsto \log \mathbf{S}_{\frac{1}{t}}$ on konveksi jokaisella suljetulla välillä $[\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}]$, joten $\mathbf{S}_p$ on jatkuva kaikilla $p \in (1,\infty)$. Edelleen $\mathbf{S}_2 = 1$ seuraa yhtälöstä $\|\mathcal{S}f\|_{L^2(\mathbb{C})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{C})}$. $\square$

Jatketaan Cauchyn muunnoksen ominaisuuksilla. Huomataan, että Cauchyn muunnos ei ole hyvin määritelty kaikilla $\phi \in L^p(\mathbb{C})$, mutta aiemmin todetun nojalla kaikilla $\phi \in L_0^p(\mathbb{C}) \subset L_0^1(\mathbb{C})$. Oletusta kompaktikantajaisuudesta voidaan kuitenkin lieventää oletukseen $\phi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C})$[1], missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[1]Muista, että L^p-avaruuksien sisäkkäisyys vaatii joukon äärellismittaisuuden.

Lause 3.37 *Olkoon* $p \in (2, \infty)$ *ja* $\phi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C})$. *Tällöin* $\mathcal{C}\phi \in C^{0,1-\frac{2}{p}}(\mathbb{C})$ *ja* $\lim_{|z|\to\infty} \mathcal{C}\phi(z) = 0$.

Todistus. [R, s. 14]. □

Huomautus 3.38. Olkoon $p > 2$. Asettamalla

$$P\phi(z) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \phi(z) \left(\frac{1}{z-\tau} - \frac{1}{\tau} \right) dA(\tau)$$

saadaan operaattori avaruuteen $L^p(\mathbb{C})$ siten, että $\mathcal{C}\phi(z) - P\phi(z) = \mathcal{C}\phi(0)$ kaikilla $\phi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C})$.

Laajennetaan aiemmin todistetut Cauchyn muunnoksen relaatioiden määrittelyavaruudet ja muotoillaan lisää relaatioita Beurlingin muunnokselle.

Lause 3.39 *Cauchyn muunnoksen osittaisderivaatoille pätee relaatiot*

$$(\mathcal{C}\phi)_z = \mathcal{S}\phi, \qquad \text{ja} \qquad (\mathcal{C}\phi)_{\bar{z}} = \phi, \qquad \phi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C}), p > 2.$$

Erityisesti $\mathcal{C} : L^p_0(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$, *jos* $p > 2$ *ja* $\mathcal{C} : C^\infty_0(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$. *Lisäksi*

$$(\mathcal{S}\phi)_z = \mathcal{S}\phi_z \qquad \text{ja} \qquad (\mathcal{S}\phi)_{\bar{z}} = \mathcal{S}\phi_{\bar{z}}, \qquad \phi \in W^{1,p}(\mathbb{C}), p > 1.$$

Erityisesti $\mathcal{S} : W^{1,p}(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$, *jos* $p > 1$.

Todistus. Lauseen 3.30 nojalla Cauchyn muunnoksen relaatiot pätevät funktioille avaruudessa $C^\infty_0(\mathbb{C})$. Approksimointiargumentin, Lauseen 3.37 sekä estimaatin $\|\mathcal{S}h\|_{L^p(\mathbb{C})} \le C_p \|h\|_p$ nojalla myös funktioille avaruudessa $L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C})$. Toisaalta $\mathcal{C} : L^p_0(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$, koska Hölderin epäyhtälön nojalla $L^p_0(\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C})$. Relaatioiden $(\mathcal{C}\phi)_z$ ja $(\mathcal{C}\phi)_{\bar{z}} = \phi$ avulla nähdään, että $\mathcal{C} : C^\infty_0(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$. Edelleen Beurlingin muunnoksen relaatiot pätevät sileille funktioille ja approksimoimalla myös avaruudessa $W^{1,p}(\mathbb{C})$. □

3.3 Stoïlow-hajotelma

Singulaaristen operaattorien ja niihin liittyvien tulosten avulla olemme valmiita tarkastelemaan Beltramin yhtälöä.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \qquad |\mu(z)| < k \le 1. \tag{3.12}$$

Beurlingin muunnoksen operaattorinormin jatkuvuuden ja tiedon $\mathbf{S}_2 = 1$ nojalla löytyy väli $2 < p < P(k)$ siten, että $k\mathbf{S}_p \leq 1$ tällä välillä. Edelleen kyseisellä välillä operaattori $\mathrm{Id} - \mu\mathcal{S}$ on kääntyvä ja sen käänteisoperaattorilla on Neumannin sarjaesitys

$$(\mathrm{Id} - \mu\mathcal{S})^{-1} = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu\mathcal{S})^k,$$

joka suppenee geometrisen sarjan suppenemisominaisuuksien nojalla. Todetaan ensin, että kompaktikantajaista dilataatiokuvausta μ vastaavan Beltramin yhtälön ratkaisu on yksikäsitteinen sopivalla normalisointiehdolla.

Lemma 3.40 *Olkoon $\mu \in L^1_0(\mathbb{C})$ siten, että $|\mu(z)| \leq k < 1$. Tällöin kuvausta μ vastaavalla Beltramin yhtälöllä voi olla korkeintaan yksi jatkuva ratkaisu $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}), p > 2$ siten, että $f(z) = z + O(z^{-1})$.*

Todistus. Huomataan, että μ on kompaktikantajainen, joten $f_{\bar{z}} \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C})$. Lauseen 3.37 nojalla $\mathcal{C}(f_{\bar{z}})$ on jatkuva. Erityisesti apufunktio $H(z) = f(z) - \mathcal{C}(f_{\bar{z}})$ on jatkuva siten, että $H_{\bar{z}} = 0$. Täten Weylin lemman nojalla H on analyyttinen. Normalisointiehdon nojalla $f(z) = z + O(z^{-1})$. Siispä $H(z) \equiv z$, koska Lauseen 3.37 nojalla $\lim_{|z|\to\infty} \mathcal{C}(f_{\bar{z}})(z) = 0$. Nyt $f(z) = z + \mathcal{C}f_{\bar{z}}$. Derivoimalla saadaan edelleen, että $f_z = 1 + (\mathcal{C}f_{\bar{z}})_z$. Ekvivalentisti siis $\mu f_{\bar{z}} = \mu + \mu(\mathcal{C}f_{\bar{z}})_z$ eli $h = \mu + \mu\mathcal{S}h, h := f_{\bar{z}}$. Viimeisimmän yhtälön ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa Banachin kiintopistelauseesta [V1, s. 92], sillä jos $2 < p < P(k)$, niin

$$\|\mu\mathcal{S}h\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq k\,\|\mathcal{S}h\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq k\mathbf{S}_p\,\|h\|_{L^p(\mathbb{C})}, \qquad k\mathbf{S}_p < 1. \qquad \square$$

Todetaan seuraavaksi ratkaisun sileys tapauksessa, missä dilataatiokuvaus on sileä ja kompaktikantajainen.

Lause 3.41 *Olkoon $\mu \in C^\infty_0(\mathbb{C})$ siten, että $k = \|\mu\|_\infty < 1$. Tällöin on olemassa $\frac{1+k}{1-k}$-kvasikonforminen funktio $\sigma \in C^\infty(\mathbb{C})$ siten, että $\sigma_{\bar{z}} = \mu\sigma_z$.*

Todistus. Neumannin sarjaesityksestä nähdään, että $(\mathrm{Id} - \mu\mathcal{S})^{-1}\mu \in L^p_0(\mathbb{C})$. Nyt Lauseen 3.39 nojalla $\tilde{\sigma} = \mathcal{C}((\mathrm{Id} - \mu\mathcal{S})^{-1}\mu) \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Huomataan, että $\sigma := z + \tilde{\sigma}$ ratkaisee yhtälön $\sigma_{\bar{z}} = \mu\sigma_z$. Osoitetaan sitten, että $\sigma \in C^\infty(\mathbb{C})$. Pääratkaisujen yksikäsitteisyyden nojalla

$$\tilde{\sigma}_{\bar{z}} = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu\mathcal{S}\mu)^i := \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i.$$

Lauseen 3.37 nojalla Beurlingin muunnos operoi avaruudelta $W^{1,p}(\mathbb{C})$ itselleen. Saman lauseen seurauksena on helppo huomata, että lineaariselle operaattorille

$D := \alpha\frac{\partial}{\partial z}+\beta\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ pätee $\mathcal{S}\circ D = D\circ\mathcal{S}$. Fatoun lemman nojalla Minkowskin epäyhtälöä voidaan soveltaa sarjoille, joten

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{\infty} D\omega_i\right\|^p_{L^p(\mathbb{C})}\\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|D\omega_i\|^p_{L^p(\mathbb{C})}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \|D\mu(\mathcal{S}\mu(\mathcal{S}\ldots\mu\mathcal{S}\mu) + \mu\mathcal{S}D\mu(\mathcal{S}\ldots\mu\mathcal{S}\mu) + \ldots + \mu\mathcal{S}\mu\mathcal{S}\ldots\mu\mathcal{S}D\mu\|^p_{L^p(\mathbb{C})}\\
&\lesssim \mathbf{S}_p \|D\mu\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty}(i+1)(k\mathbf{S}_p)^{i-1}.
\end{aligned}$$

Nyt viimeinen sarja suppenee suhdetestin nojalla, kun huomioidaan ehto $k\mathbf{S}_p < 1$. Siispä $\tilde{\sigma}_{\bar{z}} \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Lisäksi $\tilde{\sigma}_z = \mathcal{S}\tilde{\sigma}_{\bar{z}} \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, joten $\tilde{\sigma} \in W^{2,p}(\mathbb{C})$ ja edelleen argumenttia iteroimalla

$$\tilde{\sigma} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} W^{k,2}(\mathbb{C}) \subset C^\infty(\mathbb{C}).$$

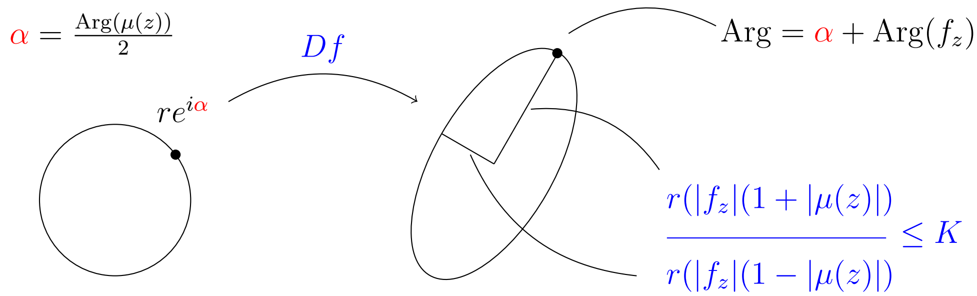
Kaiken kaikkiaan $\sigma \in C^\infty(\mathbb{C})$. Todetaan sitten ratkaisun homeomorfisuus. Olkoon $F(z) = z + \mathcal{C}(\mu e^{\tilde{\sigma}})(z)$, missä $\tilde{\sigma} := (\mathrm{Id} - \mu\mathcal{S})^{-1}\mu_z$. Tällöin $\tilde{\sigma}_{\bar{z}} = \mu_z + \mu\tilde{\sigma}_z$. Huomataan, että $F_{\bar{z}} = \mu e^{\tilde{\sigma}}$. Cauchyn muunnos kommutoi kompleksisen osittaisderiointioperaation $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ avaruudessa $C_0^\infty(\mathbb{C})$, joten

$$e^{\tilde{\sigma}} - 1 = \mathcal{C}((e^{\tilde{\sigma}})_{\bar{z}}) = \mathcal{C}(\sigma_{\bar{z}} e^{\tilde{\sigma}}) = \mathcal{C}((\mu_z + \mu\tilde{\sigma}_z)e^{\tilde{\sigma}}) = \mathcal{C}((\mu e^{\tilde{\sigma}})_z) = \mathcal{S}(\mu e^{\tilde{\sigma}}),$$

josta $F_z = 1 + \mathcal{S}(\mu e^{\tilde{\sigma}}) = e^{\tilde{\sigma}}$. Siispä $\mu F_z = F_{\bar{z}}$. Lemman 3.40 nojalla ratkaisu on yksikäsitteinen, joten $\sigma \equiv F$. Nyt

$$\mathcal{J}_\sigma = \mathcal{J}_F = |F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2 = |e^{\tilde{\sigma}}|^2 - |\mu e^{\tilde{\sigma}}|^2 = |e^{2\tilde{\sigma}}|(1-|\mu|^2) > 0,$$

joten σ on lokaalisti homeomorfismi käänteiskuvauslauseen nojalla. Laajennetaan nyt σ funktioksi $\hat{\sigma}$ Riemannin pallolle asettamalla $\hat{\sigma}(\infty) := \infty$. Tämä funktio on analyyttinen pisteessä ∞, sillä apufunktiolle $h(z) = \hat{\sigma}(z^{-1})$ pätee $h'(0) = 1$. Kaiken kaikkiaan $\hat{\sigma}$ on lokaalisti homeomorfismi Riemannin pallolla ja siten avoin kuvaus. Toisaalta σ on jatkuva Hausdorff-avaruudelta kompaktille avaruudelle, joten se on suljettu kuvaus. Nyt $\hat{\sigma}(\mathbb{C})$ on suljettu ja avoin eli $\hat{\sigma}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ tai $\hat{\sigma}(\mathbb{C}) = \varnothing$. Erityisesti, koska $\hat{\sigma}(\infty) = \infty$, niin $\hat{\sigma}(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$ ja $\hat{\sigma}$ on surjektio. Todetaan sitten,



Kuva 1: Kvasikonformikuvauksen Jacobin matriisi Df.

että $\hat{\sigma}$ on injektio. Kompaktisuudesta saatavan peitteen äärellisyyden nojalla kaikilla pisteillä on korkeintaan n alkukuvaa kuvauksella $\hat{\sigma}$. Merkitään A_n joukkoa, jonka jokaisella pisteellä on täsmälleen n alkukuvaa. Tällöin $\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Jokainen A_i on suljettu, sillä muuten löytyisi ristiriitaisesti jono $(z_k) \in A_i$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joka suppenee pisteeseen z, siten, että $z \notin A_i$. Nyt selvästi A_i on myös avoin kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Toisaalta $\sigma(\infty) = \infty$, joten $A_1 = \hat{\mathbb{C}}$ eli $\hat{\sigma}$ on injektio. Kaiken kaikkiaan $\hat{\sigma} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ on homeomorfismi, sillä jatkuva bijektio kompaktilta avaruudelta Hausdorff-avaruudelle on homeomorfismi [V2, s. 120].

□

Edellisessä lauseessa differentioituvuusoletuksesta voidaan luopua tarkastelemalla dilataatiokuvauksen μ silotusta μ_ε ja toteamalla, että rajankäynnit toteutuvat halutulla tavalla. Edelleen kompaktikantajaisuusoletuksesta voidaan luopua tarkastelemalla dilataatiokuvausta $\mu\chi_{\mathbb{D}(0,r)}$ ja toteamalla approksimointilemman avulla, että vastaavien ratkaisujen jono f_r raja-arvo $\lim_{r\to\infty} f_r$ on ratkaisu alkuperäistä dilataatiota μ vastaavalle Beltramin yhtälölle [AIM, s. 170–171]. Voimme nyt muotoilla seuraavan olemassaolotuloksen.

Lause 3.42 *(Beltramin yhtälö). Olkoon $f : \Omega \to \Omega'$ homeomorfismi siten, että $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ ovat alueita. Tällöin f on K-kvasikonformikuvaus jos ja vain jos on olemassa $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ siten, että melkein kaikilla $z \in \Omega$*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \mu(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z),$$

ja

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\Omega} |\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1} < 1.$$

Lause 3.43 *(Stoïlow-hajotelma). Olkoon φ kvasisäännöllinen alueessa D. Tällöin φ voidaan esittää muodossa $\varphi = h \circ \omega$, missä $\omega : D \to D'$ on kvasikonformikuvaus ja $h : D' \to \mathbb{C}$ on analyyttinen.*

Todistus. Olkoon $\nu = \frac{\varphi_{\bar{z}}}{\varphi_z}$, kun $\varphi_z = 0$ ja $\nu = 0$ muuten. Lauseen 3.42 nojalla löytyy kvasikonformikuvaus $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ siten, että $\omega_{\bar{z}} = \nu \omega_z$. Jos $\xi = f^{-1}(z)$, niin $\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial \xi} = \frac{\bar{\omega}_{\bar{z}}}{\mathcal{J}}$ ja $\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial \bar{\xi}} = -\frac{\omega_{\bar{z}}}{\mathcal{J}}$. Edelleen funktio $h = \varphi \circ \omega^{-1}$ on heikosti derivoituva. Ketjusäännön avulla nähdään, että $h_{\bar{\xi}} = 0$. Siispä h on Weylin lemman nojalla analyyttinen.

□

Huomautus 3.44. Lauseen 3.43 mukaista olemassaolotulosta ei ole käytettävissä korkeammissa ulottuvuuksissa [K, s. 81–83].

Seuraus 3.45 *K-kvasisäännöllinen funktio on lokaalisti Hölder-jatkuva eksponentilla K^{-1}.*

Huomautus 3.46. Stoïlow-hajotelma on olemassatulos eikä kerro mitä funktiot h ja ω ovat.

Voimme nyt todistaa kvasikonformikuvausten ryhmäominaisuudet analyyttisen määritelmän avulla.

Lause 3.47 *Olkoon $f : \Omega \to \Omega'$ K-kvasikonformikuvaus. Tällöin $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ on K-kvasikonformikuvaus.*

Todistus. Voidaan selvästi olettaa, että joukot Ω ja Ω' ovat rajoitettuja. Olkoon $\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ siten, että $\nu = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$, jos $f_z = 0$ ja $\nu = 0$ muuten. Stoïlow-hajotelman nojalla $f = F \circ f^\nu$, missä F on analyyttinen ja f^ν dilataatiota ν vastaava kvasikonformikuvaus. Nyt $(f^\nu)^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ [R, s. 29] ja $(f^\nu)^{-1} = f^{\hat{\nu}}$, missä $f^{\hat{\nu}}$ on dilataatiokuvausta $\hat{\nu} = -\nu(f^{-1}(w))\overline{f^{-1}_w}/(f^{-1})_w$ vastaava kvasikonformikuvaus. Edelleen ketjusäännön nojalla

$$\frac{f^{-1}_{\bar{w}}}{f^{-1}_w} = \nu^{-1} \frac{(F^{-1}(w))\overline{F^{-1}_w}}{F^{-1}_w},$$

mistä väite seuraa. □

Lause 3.48 *Jos $f : \Omega' \to \Omega''$ on K_1-kvasikonformikuvaus ja $g : \Omega \to \Omega'$ on K_2-kvasikonformikuvaus, niin $f \circ g : \Omega \to \Omega''$ on $K_1 K_2$-kvasikonformikuvaus.*

Todistus. Selvästi $f \circ g$ on homeomorfismi. Nyt g on absoluuttisesti jatkuva ja sen käänteisfunktio kuuluu edellisen lauseen nojalla avaruuteen $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega')$. Lisäksi $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, joten ketjusäännöstä seuraa, että $f \circ g \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega')$. Siispä Lauseen 3.16 nojalla $f \circ g$ on melkein kaikkialla differentioituva. Edelleen

$$|(f \circ g)_{\bar{z}}|^2 \leq |(f \circ g)_z|^2 \leq \frac{1}{1-k^2}(|(f \circ g)_z|^2 - |(f \circ g)_{\bar{z}}|^2), \qquad K_1 K_2 = \frac{1+k}{1-k}.$$

Olkoon sitten $G \subset\subset \Omega'$. Mitta $m(A) := |(f \circ g)(A \cap G)|$ on äärellinen ja säännöllinen Borel-mitta. Nyt

$$\int_G |(f \circ g)_z|^2 - |(f \circ g)_{\bar{z}}|^2 \, dA = m'(G) < \infty,$$

joten $f \circ g \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega')$. On vielä todistettava dilataatioepäyhtälö eli ehto (3.9). Tätä varten sovelletaan alkeisepäyhtälöä

$$\left| \frac{z_1 + z_2}{1 + \overline{z_1} z_2} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1 z_2|},$$

joka on voimassa aina, kun $|z_1|, |z_2| < 1$. Ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(f \circ g)_{\bar{z}}}{(f \circ g)_z} \right| &= \left| \frac{(f_z \circ g) g_{\bar{z}} + (f_{\bar{z}} \circ g) \bar{g}_{\bar{z}}}{(f_z \circ g) g_z + (f_{\bar{z}} \circ g) \bar{g}_z} \right| \\
&= \left| \frac{g_{\bar{z}} + \frac{(f_{\bar{z}} \circ g)}{(f_z \circ g)} \bar{g}_{\bar{z}}}{g_z + \frac{(f_{\bar{z}} \circ g)}{(f_z \circ g)} \bar{g}_z} \right| \\
&= \left| \frac{\frac{g_{\bar{z}}}{g_z} + \frac{(f_{\bar{z}} \circ g)}{(f_z \circ g)} \frac{\bar{g}_{\bar{z}}}{g_z}}{1 + \frac{(f_{\bar{z}} \circ g)}{(f_z \circ g)} \frac{\bar{g}_z}{g_z}} \right| \\
&\leq \frac{\frac{|g_{\bar{z}}|}{|g_z|} + \frac{|f_{\bar{z}} \circ g|}{|f_z \circ g|}}{1 + \left| \frac{(f_{\bar{z}} \circ g)}{(f_z \circ g)} \frac{\bar{g}_z}{g_z} \right|} \\
&\leq \frac{K_1 K_2 - 1}{K_1 K_2 + 1},
\end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa havainnosta, että funktion $f(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$ osittaisderivaatat muuttujien x ja y suhteen ovat aidosti nollaa suurempaa, kun $x, y \in (0, 1)$. $\square$

Hölder-jatkuvuuden lisäksi osoittautuu, että tason kvasikonformikuvausten heikot derivaatat ovat integroituvia suuremmalla eksponentilla kuin kaksi. Toisaalta on otaksuttu, että d-uloitteiset K-kvasikonformikuvaukset kuuluvat avaruuteen $W^{1, \frac{dK}{K-1}}_{\text{loc}}(\Omega)$. Tuloksen tiedetään kuitenkin pätevän tasossa ja se on optimaalinen. Lauseen todistamiseksi tarvitaan kvasikonformikuvausten syvällistä vääntölausetta koko tason kvasikonformikuvauksille, joka sivuutetaan tässä yhteydessä.

Lause 3.49 *(Vääntölause). Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $K-$kvasikonformikuvaus. Tällöin* *on olemassa $C_K > 0$ siten, että*

$$|f(E)| \leq C_K |f(\mathbb{D}(a,r))| \left(\frac{|E|}{|\mathbb{D}(a,r)|} \right)^{\frac{1}{K}}$$

aina, kun $E \subset \mathbb{D}(a,r) \subset \mathbb{C}$.

Todistus. [AIM, s. 325]. □

Vääntölauseen avulla olemme valmiita todistamaan kvasisäännöllisten kuvausten optimaalisen säännöllisyyden tasossa.

Lause 3.50 *Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{C}$ K-kvasisäännöllinen. Tällöin $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ aina, kun $p < \frac{2K}{K-1} = 2 + \frac{2}{K-1}$ ja tulos on optimaalinen.*

Todistus. Stoïlow-hajotelman nojalla voidaan olettaa, että f on kvasikonformikuvaus. Jatkamalla dilataatiokuvaus μ nollaksi avaruuteen $\mathbb{C}$ ja tarkastelemalla tarvittaessa nollajatkoa vastaavan kvasikonformikuvauksen rajoittumaa voidaan olettaa, että $\Omega = \mathbb{C}$. Oletuksen nojalla $|f_z|^2 + |f_{\bar{z}}|^2 \leq \sqrt{K}\sqrt{\mathcal{J}_f}$, joten riittää näyttää, että

$$\int_{\mathbb{D}(a,r)} \mathcal{J}_f^q \, dA < \infty, \qquad \text{kaikilla } \ 0 < q < \frac{K}{K-1}, \qquad \mathbb{D}(a,r) \subset \mathbb{C}.$$

Merkitään $E_t = \{z \in \mathbb{D}(a,r) : \mathcal{J}_f > t\}$ ja olkoon $T > 0$. Cavalierin periaatteen nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}(0,a)} \mathcal{J}_f^q \, dA = q \int_{[0,\infty)} t^{q-1}|E_t| \, dt &= q \int_{[0,T]} t^{q-1}|E_t| \, dt + q \int_{(T,\infty)} t^{q-1}|E_t| \, dt \\ &\leq T^q |\mathbb{D}(a,r)| + q \int_{(T,\infty)} t^{q-1}|E_t| \, dt.\end{aligned}$$

Väite seuraa, jos näytetään, että $\int_{(T,\infty)} t^{q-1}|E_t| \, dt < \infty$. Tšebyšovin epäyhtälön nojalla $t|E_t| \leq \int_{\mathbb{D}(a,r)} \mathcal{J}_f \, dA$. Lauseesta 3.49 seuraa edelleen, että

$$t|E_t| \leq \int_{E_t} \mathcal{J}_f \, dA \leq |f(E_t)| \leq C_K f(\mathbb{D}(a,r))| \left(\frac{|E_t|}{|\mathbb{D}(a,r)|} \right)^{\frac{1}{K}}.$$

Erityisesti

$$|E_t| \le C_K |\mathbb{D}(a,r)|^{\frac{1}{1-K}} \left(\frac{|f(\mathbb{D}(a,r))|}{t} \right)^{\frac{K}{K-1}}.$$

Kaiken kaikkiaan siis

$$\begin{aligned}
\int_{(T,\infty)} t^{q-1} |E_t| \, dt &\le C_K |\mathbb{D}(a,r)|^{\frac{1}{1-K}} |f(\mathbb{D}(a,r))|^{\frac{K}{K-1}} \int_{(T,\infty)} t^{q-1-\frac{K}{K-1}} \, dt \\
&= C_K |\mathbb{D}(a,r)|^{\frac{1}{1-K}} |f(\mathbb{D}(a,r))|^{\frac{K}{K-1}} \lim_{a \to \infty} \left(a^{q-\frac{K}{K-1}} - T^{q-\frac{K}{K-1}} \right) \\
&= C_K |\mathbb{D}(a,r)|^{\frac{1}{1-K}} |f(\mathbb{D}(a,r))|^{\frac{K}{K-1}} T^{q-\frac{K}{K-1}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Tuloksen optimaalisuus seuraa tarkastelemalla radiaalista kvasikonformikuvausta.

□

4 p-Laplace

Tässä kappaleessa päästään käsiksi tutkielman pääteemaan eli p-harmonisiin funktioihin, joiden johdattelu aloitetaan yleisestä tapauksesta. Oletetaan, että tehtävänä on minimoida funktionaali

$$I_p[u] := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx$$

sopivilla reunaehdoilla. Minimin olemassaolon takaamiseksi nojautuen variaatiolaskennan työkaluihin on minimiä haettava Sobolev-avaruudesta. Tulemme kuitenkin tasossa huomaamaan, että minimoija on vähintään jatkuvasti derivoituva. Tarkemmin, oikeaksi funktioluokaksi minimin etsimiselle osoittautuu avaruus $\{u \in W^{1,p}(\Omega) : u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$, kun $v \in W^{1,p}(\Omega)$ on kiinnitetty reuna-arvot määrittelevä funktio. Tällöin I on koersiivinen, alhaalta puolijatkuva ja edellä mainittu funktioluokka on konveksi. Minimin olemassaolo on tällöin tunnettua ja minimin karakterisoi Eulerin yhtälön heikko muoto, toisin sanoen yhtälö

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla \psi\rangle \, dx = 0 \qquad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.1}$$

Voimme todistaa ekvivalenttiuden myös helpohkosti ilman yleisiä tuloksia:

Lause 4.1 *Oletetaan, että $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin*

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla \psi\rangle \, dx = 0 \qquad \text{kaikilla} \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

jos ja vain jos

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \le \int_\Omega |\nabla v(x)|^p \, dx$$

aina, kun $v \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Todistus. Välttämättömyyttä varten huomataan ensin, että funktion $g(x) = |x|^p$ konveksisuuden nojalla

$$\langle \nabla g(b) - \nabla g(a), b - a\rangle \ge 0.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}\langle \nabla g(b) - \nabla g(a), b-a\rangle &= 2p\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle \\ &= 2p(|b|^p - 2|b|^{p-2}\langle a,b\rangle - |a|^p).\end{aligned}$$

Erityisesti

$$\int_\Omega |b|^p\,dx \geq \int_\Omega |a|^p\,dx + p\int_\Omega \langle |a|^{p-2}a, b-a\rangle\,dx.$$

Siispä

$$\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + p\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(v-u)\rangle\,dx,$$

mistä väitteen välttämättömyys seuraa. Riittävyyttä varten tarkastellaan funktiota

$$J(\varepsilon) = \int_\Omega |\nabla u + \varepsilon\nabla\eta|^p\,dx.$$

Valitaan $\eta = \frac{v-u}{\varepsilon}$, jolloin $v-u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Funktio J saavuttaa minimiarvonsa pisteessä $\varepsilon = 0$, joten $J'(0) = 0$, mikä oli todistettava. $\square$

Huomautus 4.2. Jos $u \in C^2(U), \varphi \in C^\infty(U)$ ja ∂U on luokkaa C^1, niin pätee osittaisintegrointikaava

$$\int_U f\operatorname{div}\varphi\,dx = -\int_U \langle \nabla f, \varphi\rangle\,dx + \int_{\partial U}\varphi f\,dS.$$

Osittaisintegrointikaavaa voidaan soveltaa Eulerin heikkoon muotoon alueelle Ω riippumatta reunan säännöllisyydestä, sillä testifunktio ψ on kompaktikantajainen. Siispä tiedon $\varphi = 0$ kaikilla $x \in \partial\Omega$ nojalla saadaan

$$0 = \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\psi\rangle\,dx = -\int_\Omega \psi\cdot\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\,dx.$$

Edelleen variaatiolemman nojalla $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$.

Määritelmä 4.3. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avoin, $p \in (1,\infty)$ ja $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\Omega)$. Jos

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\psi\rangle \, dx = 0, \qquad (|0|^{p-2}\,0 := 0)$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, niin funktiota u kutsutaan *p-harmoniseksi* funktioksi. Edelleen p-Laplacen operaattori Δ_p määritellään asettamalla

$$\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

ja yhtälöä $\Delta_p u = 0$ kutsutaan *p-Laplacen yhtälöksi.*

Huomautus 4.4. Jos $u \in C^2(\Omega)$ ja $\nabla u(x) \neq 0$, niin

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |\nabla u|^{p-4}\Bigg(|\nabla u|^2\Delta u + (p-2)\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Bigg).$$

Esimerkki 4.5. Radiaalinen ratkaisuyrite $u(|x|) \in C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ p-Laplacen yhtälössä johtaa yhtälöön

$$|u'(|x|)|^{p-2}\Big((p-1)u''(|x|) + \frac{d-1}{|x|}u'(|x|)\Big) = 0.$$

Sulkujen sisällä olevasta differentiaaliyhtälöstä saadaan ehto $(\log u')' = (\log |x|^{\frac{d-1}{p-1}})$, joten $u'(|x|) = |x|^{\frac{d-1}{p-1}}$. Kaiken kaikkiaan saadaan niin kutsuttu perusratkaisu

$$u : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{p-d}{p-1}} & p \neq d \\ -\log|x| & p = d. \end{cases}$$

Yleisesti, jos $p = d$, niin p-Laplacen yhtälön ratkaisut ovat invariantteja Möbiuskuvausten ja siten erityisesti konformikuvausten suhteen. Lisäksi konformikuvauksen komponenttikuvaukset toteuttavat d-harmonisen yhtälön

Osoittautuu, että eksplisiittisiä ratkaisuja perusratkaisun lisäksi ei ainakaan yleisessä dimensiossa ole helppo antaa. Radiaalisen ratkaisuyritteen lisäksi on luonnollista tarkastella myös niin kutsuttuja kvasiradiaaleja ratkaisuja, jotka ovat muotoa $u(|x|) = |x|^k\Phi(\frac{x}{|x|})$. Tasossa kaikki kvasiradiaalit ratkaisut tunnetaan ja ne voidaan luokitella ominaisuuksiltaan eri alaluokkiin riippuen luvusta k. Näitä on käsitelty yksityiskohtaisesti lähteessä [Pe] ja palaamme näihin lyhyesti myöhemmin.

Tässä tutkielmassa on tarkoitus todistaa tason p-harmonisten funktioiden optimaalinen säännöllisyys. Säännöllisyyskysymys on erityisen kiinnostava gradientin nollakohdissa, sillä p-harmoninen funktio on reaalianalyyttinen joukossa, missä sen gradientti ei häviä [Le1]. Edelleen yleisesti tiedetään, että $u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ [E1]. Tasossa jälkimmäinen tulos seuraa funktiota u vastaavan kompleksisen gradientin kvasisäännöllisyydestä. Kvasisäännöllisyyttä varten tarvitsee ensin osoittaa, että p-harmonisella funktiolla u on tasossa toisen kertaluvun heikot derivaatat. Tämä tehdään etsimällä niin kutsuttu Caccioppoli-estimaatti apufunktioille

$$F(x) = |\nabla u(x)|^{\frac{p-2}{2}} \cdot \nabla u(x), \qquad (|F(x)|^2 = |\nabla u(x)|^p).$$

Cacciopolin epäyhtälö voidaan tulkita käänteiseksi Poincarén epäyhtälöksi.

Todistetaan seuraavaksi apufunktiolle F Caccioppolin epäyhtälö soveltamalla Sobolev-avaruuksien erotusosamääräkarakterisaatiota kuvaukseen F. Sopivan testifunktion tutkiminen p-harmonisuuden määritelmässä johtaa sisätuloon, joka on muotoa $\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}^d$. Näin ollen on luonnollista etsiä arvioita vektorin $|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a$ pituudelle. Muotoillaan lemmaksi kaksi epäyhtälöä liittyen näihin arvioihin.

Lemma 4.6 *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}^d$ ja $p \geq 2$. Tällöin*

$$\left| |b|^{\frac{p-2}{2}} b - |a|^{\frac{p-2}{2}} a \right|^2 \leq \frac{p^2}{4} \langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle, \qquad \textit{ja}$$

$$\left| |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a \right| \leq \frac{2(p-1)}{p} (|b|^p + |a|^p)^{\frac{p-2}{2p}} \left| |b|^{\frac{p-2}{2}} b - |a|^{\frac{p-2}{2}} a \right|.$$

Todistus. Merkitään $J_{ab}(t) := tb + (1-t)a$, missä $t \in [0,1]$. Soveltamalla analyysin peruslausetta funktioon $|J_{ab}(t)|^{p-2} J_{ab}(t)$ saadaan, että

$$\begin{aligned} |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a = (b-a) \int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2} \, dt \\ + (p-2) \int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-4} \langle J_{ab}(t), b-a\rangle J_{ab}(t) \, dt. \end{aligned}$$

Siispä

$$\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle = |b-a|^2 \int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2} \, dt$$

$$+ (p-2)\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-4}\langle J_{ab}(t), b-a\rangle^2\, dt.$$

Jälkimmäinen integraali on aina ei-negatiivinen, joten erityisesti

$$|b-a|^2\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2}\, dt \leq \langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle. \tag{4.2}$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}||b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a| &\leq |b-a|\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2}\, dt + (p-2)\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2}|b-a|\, dt\\ &= (p-1)|b-a|\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2}\, dt.\end{aligned}$$

Koska $p \geq 2$, niin $\frac{p+2}{2} > 2$. Epäyhtälön (4.2) ja Hölderin epäyhtälön nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}||b|^{\frac{p-2}{2}}b - |a|^{\frac{p-2}{2}}a|^2 &\leq \frac{p^2}{4}|b-a|^2\left(\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{\frac{p-2}{2}}\, dt\right)^2\\ &\leq \frac{p^2}{4}|b-a|^2\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2}\, dt\\ &\leq \frac{p^2}{4}\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\rangle,\end{aligned}$$

mikä todistaa ensimmäisen epäyhtälön. Jälkimmäistä epäyhtälöä varten huomataan, että

$$\begin{aligned}\big||b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\big| &\leq (p-1)|b-a|\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{p-2}\, dt\\ &= (p-1)|b-a|\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{\frac{p-2}{2}}|J_{ab}(t)|^{\frac{p-2}{2}}\, dt\\ &\overset{i)}{\leq} (p-1)|b-a|(|b|^{\frac{p-2}{2}} + |a|^{\frac{p-2}{2}})\int_0^1 |J_{ab}(t)|^{\frac{p-2}{2}}\, dt\\ &= (p-1)|b-a|(|b|^{\frac{p-2}{2}} + |a|^{\frac{p-2}{2}})\frac{2}{p|b-a|}\big||b|^{\frac{p-2}{2}}b - |a|^{\frac{p-2}{2}}a\big|\\ &\overset{ii)}{\leq} \frac{2(p-1)}{p}(|b|^p + |a|^p)^{\frac{p-2}{2p}}\big||b|^{\frac{p-2}{2}}b - |a|^{\frac{p-2}{2}}a\big|,\end{aligned}$$

missä epäyhtälö $ii)$ seuraa Jensenin epäyhtälöstä [Ga, s. 25]. Epäyhtälö $i)$ vaatii vielä perustelun. Jos $p \geq 4$, niin kyseinen epäyhtälö seuraa Jensenin epäyhtälöstä. Jos $p \in [2, 4)$, niin epäyhtälö seuraa epäyhtälöstä $|b+a|^s \leq 2^{s-1}(|b|^s + |a|^s)$, missä $s > 0$. Todistetaan vielä tämä:

$$\begin{aligned}
|b+a|^s \leq (|b| + |a|)^s &\leq 2^s \cdot \max\{|a|^s, |b|^s\} \\
&= 2^s \cdot \frac{1}{2}(|a|^s + |b|^s - ||a|^s - |b|^s|) \\
&\leq 2^{s-1} \cdot (|a|^s + |b|^s).
\end{aligned}$$

□

Lause 4.7 *Olkoon $p \in (2, \infty)$ ja u p-harmoninen funktio avoimessa joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Olkoon lisäksi $F(x) = |\nabla u(x)|^{p-2} \cdot \nabla u(x)$ ja $G \subset \Omega$ kompakti. Tällöin*

$$\sup_{0<|h|<\mathrm{dist}(G,\partial\Omega)} \left(\int_G \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{|h|} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_{d,p}}{\mathrm{dist}(G, \partial\Omega)} \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Lauseen 3.15 nojalla on olemassa leikkausfunktio φ siten, että $\varphi|_G \equiv 1$ ja $\mathrm{spt}_\Omega \varphi$. Olkoon $h \in \mathbb{R}^d$ sellainen, että $|h| < \mathrm{dist}(G, \partial\Omega)$. Tällöin selvästi $\eta(x) = \varphi(x)^2(u(x+h) - u(x)) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nyt, koska $u(x+h)$ on p-harmoninen, niin p-harmonisuuden määritelmän nojalla

$$\int_\Omega \langle |\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla\eta(x)\rangle \, dx = 0. \tag{4.3}$$

Funktion η heikko gradientti on

$$\begin{aligned}
\nabla\eta(x) &= \nabla(\varphi(x)^2(u(x+h) - u(x))) \\
&= 2 \cdot \nabla\varphi(x)(u(x+h) - u(x))\varphi(x) + \varphi(x)^2(\nabla u(x+h) - \nabla u(x)).
\end{aligned}$$

Sijoittamalla heikko gradientti yhtälöön (4.3) saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi^2(x)\langle |\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla u(x+h) - \nabla u(x)\rangle \, dx \\
&= -2 \int_\Omega \varphi(x)(u(x+h) - u(x))\langle |\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx.
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\int_\Omega \varphi^2(x)\langle |\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla u(x+h) - \nabla u(x)\rangle \, dx$$
$$\leq 2\int_\Omega |\varphi(x)||u(x+h)-u(x)||\,|\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)||\nabla\varphi(x)|\, dx.$$

Lemman 4.6 ensimmäisen epäyhtälön ja tiedon $F(x) = |\nabla u(x)|^{\frac{p-2}{2}} \cdot \nabla u(x)$ nojalla saadaan arvio

$$\int_\Omega \varphi^2(x)|F(x+h)-F(x)|^2\, dx$$
$$\leq p^2\int_\Omega |\varphi(x)||u(x+h)-u(x)|\big||\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\big||\nabla\varphi(x)|\, dx.$$

Lemman 4.6 jälkimmäisen epäyhtälön nojalla edelleen

$$\int_\Omega \varphi^2(x)|F(x+h)-F(x)|^2\, dx$$
$$\leq 2\int_\Omega |\varphi(x)||u(x+h)-u(x)|(|\nabla u(x+h)|^p + |\nabla u(x)|^p)\big|F(x+h)-F(x)\big||\nabla\varphi(x)|\, dx.$$

Hajotetaan leikkausfunktion eksponentti ja sovelletaan yleistettyä Hölderin epäyhtälöä eksponentein p, $\frac{2p}{p-2}$ ja 2 ($\frac{2p}{p-2} > 1$, sillä $p \geq 2$). Nyt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x)^2|F(x+h)-F(x)|^2\, dx \leq 2\cdot &\left(\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2|u(x+h)-u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\cdot\left(\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2(|F(x+h)|^2+|F(x)|^2)\, dx\right)^{\frac{2p}{p-2}}\\ &\cdot\left(\int_\Omega \varphi(x)^2|F(x+h)-F(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega \varphi(x)^2|F(x+h)-F(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{4}{\operatorname{dist}(G,\partial\Omega)}&\left(\int_{\operatorname{spt}\varphi} |u(x+h)-u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\cdot\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2(|F(x+h)|^2+|F(x)|^2)\, dx\right)^{\frac{2p}{p-2}}.\end{aligned}$$

Epäyhtälön oikealla puolella olevaa ensimmäistä integraalia varten muistetaan, että $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Siispä $u \in W^{1,p}(\text{spt}\varphi)$. Erityisesti integraali on Sobolev-avaruuksien erotusosamääräkarakterisaation nojalla luokkaa $O(h)$. Saadaan siis, että

$$\begin{aligned}\left(\int_G \varphi^2 \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{|h|}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{C_{d,p}}{\text{dist}(G,\partial\Omega)}\left(\int_\Omega |F(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{C_{d,p}}{\text{dist}(G,\partial\Omega)}\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

aina, kun $0 < |h| < \text{dist}(G, \partial\Omega)$, missä $\varphi|_G \equiv 1$. On vielä todistettava väite tapauksessa $\Omega = \mathbb{R}^d$. Olkoon siis $\Omega = \mathbb{R}^d$ ja valitaan kompaktille joukolle $G \subset \Omega$ avoin $\hat{\Omega}$ siten, että $G \subset \hat{\Omega} \subset\subset \Omega$. Tällöin Lauseen 3.15 nojalla on olemassa leikkausfunktio φ siten, että $\varphi|_G \equiv 1$ ja $|\nabla\varphi(x)| \leq 2/\text{dist}(G, \partial\hat{\Omega})$. $\square$

Seuraavaksi tarvitsemme Sobolev-avaruuden käsitettä vektoriarvoisille funktioille. Sanotaan, että $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, jos jokainen funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ komponenttifunktio kuuluu avaruuteen $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Huomautettakoon, että kyseisen avaruuden funktioille on myös voimassa erotusosamääräkarakterisaatio [AIM, s. 622]. Siispä edellisen lauseen nojalla saamme

Seuraus 4.8 *Olkoon $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ p-harmoninen siten, että $p \in (2, \infty)$. Tällöin $|\nabla u|^{\frac{p-2}{2}}\nabla u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.*

Huomautus 4.9. Jos $p \in (2, \infty)$ niin p-harmonisella funktiolla u on olemassa heikko derivaatta $\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j})$, mutta toisen kertaluvun heikkojen derivaattojen olemassaoloa ei pystytä suoraan toteamaan gradientin nollakohdissa.

Lauseen 4.7 oletus $p \in [2, \infty)$ ei ole tasossa välttämätön. Tämä nähdään myöhemmin konjugaattifunktioiden avulla. Toisaalta kompleksisen gradientin kvasisäännöllisyys voidaan osoittaa approksimaatioargumentilla kuten artikkelissa [IM], missä kompleksisen gradientin kvasisäännöllisyys todistetaan kaikille $p > 1$. Todetaan seuraavaksi tason p-harmonisten funktioiden gradientin Hölder-jatkuvuus todistamalla kompleksiselle gradientille kvasilineaarinen yhtälö.

Lause 4.10 *Olkoon $p > 2$ ja u p-harmoninen funktio alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin funktiota u vastaavalle kompleksiselle gradientille $f = u_x - iu_y$ pätee yhtälö*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\overline{f(z)}}{f(z)}\frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{f(z)}{\overline{f(z)}}\frac{\overline{\partial f(z)}}{\partial z}\right) \tag{4.4}$$

melkein kaikilla $z \in \{x+iy : (x,y) \in \Omega\} \setminus \{x+iy : \nabla u(x,y) = 0\}$ *. Lisäksi*

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}\right| \leq \left(1 - \frac{2}{p}\right)\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right|$$

melkein kaikilla $z \in \{x+iy : (x,y) \in \Omega\}$ *eli* f *on* $(p-1)$*-kvasisäännöllinen.*

Todistus. Tarkastellaan kuvausta $F_a = |f|^a f$. Oletetaan aluksi, että $f \neq 0$. Huomataan, että

$$|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}(F_a + \bar{F}_a) = ||f|^a f|^{-\frac{a}{a+1}}(2|f|^a u_x) = |f|^{-a}|f|^a 2u_x = 2u_x \tag{4.5}$$

ja

$$i|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}(F_a - \overline{F_a}) = i||f^a|f|^{-\frac{a}{a+1}}(-2i|f|^a u_y) = 2u_y, \tag{4.6}$$

missä u_x ja u_y ilmaisevat heikkoja derivaattoja. Lauseen 4.7 nojalla $F_a \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, joten $u_{xy} = u_{yx}$, ks. Lause 3.5. Yhtälöiden (4.5) ja (4.6) nojalla saadaan

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}(F_a + \overline{F_a})\right) = i\frac{\partial}{\partial x}\left(|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}(F_a - \overline{F_a})\right),$$

eli

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}(\overline{F_a} - F_a)\right) = i\frac{\partial}{\partial y}\left(|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}(F_a + \overline{F_a})\right).$$

Edelleen pätee

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}F_a - \frac{\partial}{\partial z}|F_a|^{-\frac{a}{a+1}}\overline{F_a}\right) = 0.$$

Nyt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|F_a|^{\frac{-a}{a+1}}F_a = \frac{\partial}{\partial z}|F_a|^{\frac{-a}{a+1}}\overline{F_a}. \tag{4.7}$$

Ketjusääntöjen nojalla

$$\frac{\partial}{\partial z}|F_a|^{\frac{(p-2-a)}{(a+1)}} = \frac{(p-2-a)}{2(a+1)}\left(\overline{F_a}|F_a|^{\frac{(p-2-a)}{(a+1)}-2}\frac{\partial}{\partial z}F_a + F_a|F_a|^{\frac{(p-2-a)}{(a+1)}-2}\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_a}\right) \quad \text{ja}$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|F_a|^{\frac{(p-2-a)}{(a+1)}} = \frac{(p-2-a)}{2(a+1)}\left(\overline{F_a}|F_a|^{\frac{(p-2-a)}{(a+1)}-2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_a + F_a|F_a|^{\frac{(p-2-a)}{(a+1)}-2}\overline{\frac{\partial}{\partial z}F_a}\right).$$

Tulon derivointisäännöllä siis

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_a\right\} = \frac{p-2-a}{2(a+1)}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\overline{F_a}}{F_a}\frac{\partial}{\partial z}F_a\right\}. \tag{4.8}$$

Toisaalta kompleksisten osittaisderivaattojen avulla kirjoitettuna p-harmoninen yhtälö saa muodon

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_a|F_a|^{\frac{p-2-a}{a+1}}\right\} = 0. \tag{4.9}$$

Yhtälö voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial z}F_a\right\} = \frac{(p-2-a)}{2(a+1)}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\overline{F_a}}{F_a}\frac{\partial}{\partial z}F_a\right\}. \tag{4.10}$$

Laskemalla yhteen yhtälöt (4.8) ja (4.10) saadaan, että

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_a = q_1\frac{\partial}{\partial z}F_a + q_2\overline{\frac{\partial}{\partial z}F_a}, \tag{4.11}$$

missä

$$q_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{p-2-a}{p+a} + \frac{a}{a+2}\right)\frac{\overline{F_a}}{F_a}, \qquad q_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{p-2-a}{p+a} - \frac{a}{a+2}\right)\frac{F_a}{\overline{F_a}}.$$

Huomataan nyt, että

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_a\right| \leq (|q_1| + |q_2|)\left|\frac{\partial}{\partial z}F_a\right|,$$

missä

$$|q_1| + |q_2| = \max\left\{\left|\frac{p-2-a}{p+a}\right|, \left|\frac{a}{a+2}\right|\right\} < 1.$$

Kaiken kaikkiaan $|(F_a)_{\bar{z}}| \leq k|(F_a)_z|$ melkein kaikilla z, kun $f \neq 0$. Toisaalta, jos f häviää L^p-normin mielessä, niin heikot derivaatat häviävät tunnetusti [GT, s. 152]. Siispä $|(F_a)_{\bar{z}}| \leq k|(F_a)_z|$ melkein kaikilla z ja F_a on kvasisäännöllinen, jos $a = \frac{p-2}{2}$. Toisaalta, jos $a > -1$, niin F_a on yhdistetty kuvaus kuvauksesta $F_{(p-2)/2}$ sekä radiaalisesta kvasikonformikuvauksesta $\xi \mapsto |\xi|^\alpha \xi$, missä $\alpha = 2(a+1)/(p-1)$. Siispä F_a on kvasisäännöllinen kaikilla $a > -1$ eli erityisesti silloin, kun $a = 0$. Siispä f on kvasisäännöllinen ja väitetty yhtälö on voimassa melkein kaikilla $(x, y) \in \Omega$. Yhtälö (4.4) siis seuraa ja koska

$$\max\left\{\left|\frac{p-2-0}{p+0}\right|, \left|\frac{0}{0+2}\right|\right\} = 1 - \frac{2}{p},$$

niin koko väite seuraa. □

Edellisen lauseen ja Lauseen 3.50 nojalla saadaan seuraava säännöllisyystulos.

Seuraus 4.11 *Olkoon u p-harmoninen alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja $p \in (2, \infty)$. Tällöin*

$$u \in C^{1,\frac{1}{p-1}}_{\text{loc}}(\Omega) \cap W^{2,2+\frac{2}{p-2}}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Toisena seurauksena saadaan kriittisten pisteiden muodostaman joukon diskreettiys.

Seuraus 4.12 *Olkoon $p \in (2, \infty)$ ja u p-harmoninen funktio alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, joka ei ole vakiofunktio. Tällöin kompleksista gradienttia f vastaava alkukuva*

$$f^{\{-1\}}(0) = \{(x, y) \in \Omega : \nabla u(x, y) = 0\},$$

on diskreetti, toisin sanoen se ei sisällä kasautumispisteitä.

Todistus. Tehdään antiteesi, että alkukuva $f^{\{-1\}}(0)$ sisältää kasautumispisteen. Lauseen 3.43 nojalla kuvaus f voidaan kirjoittaa muodossa $f = h \circ \chi$, missä h on analyyttinen ja χ kvasikonformikuvaus. Koska χ on erityisesti injektio, niin joukko $\{h(z) : z \in \Omega\}$ sisältää kasautumispisteen. Tällöin identtisyyslauseen [P, s. 307] nojalla $h \equiv 0$ joukossa Ω. Tämä on ristiriita. □

Todetaan seuraavaksi, että tason p-harmoninen funktio on sileä siinä joukossa, missä sen gradientti ei häviä. Tämän toteamiseksi riittää tarkastella p-harmonista funktiota yhden kriittisen pisteen ympäristössä.

Lause 4.13 *Olkoon $p \in (2, \infty)$ ja u p-harmoninen funktio alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ siten, että $(0,0) \in \Omega, \nabla u(0,0) = 0$ ja $\nabla u \neq 0$ muuten. Tällöin $u \in C^\infty(\Omega \setminus (0,0))$.*

Todistus. Lauseen 4.10 todistuksesta saadaan, että

$$\frac{\partial F_a}{\partial \bar{z}} = \frac{1-\sqrt{p-1}}{1+\sqrt{p+1}} \frac{\overline{F_a}}{F_a} \frac{\partial F_a}{\partial z}, \qquad a = \sqrt{p-1} - 1.$$

Kirjoitetaan funktio F_a Stoïlow-hajotelman nojalla muodossa $F_a(z) = h \circ \chi$, missä h on analyyttinen ja χ kvasikonformikuvaus. Seuraavassa luvussa todettavan nojalla voidaan kirjoittaa $F_a(z) = y(z)^n$, missä y on kvasikonformikuvaus origon ympäristössä ja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nyt

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1-\sqrt{p-1}}{1+\sqrt{p-1}} \frac{\bar{y}^n}{y^n} \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Edelleen funktiolle $F(\xi) = y^{-1}$ pätee

$$F_{\bar{\xi}}(\xi) = \frac{\sqrt{p-1}-1}{\sqrt{p-1}+1} \frac{\bar{\xi}^n}{\xi^n} \overline{F}_{\bar{\xi}}(\xi). \tag{4.12}$$

Tarkastellaan sitten kuvausta

$$W(\xi) = \left(\xi^n F - \frac{\sqrt{p-1}-1}{\sqrt{p-1}+1} \bar{\xi}^n \overline{F} \right) |\xi|^C,$$

missä luku C valitaan myöhemmin. Merkitään $C_p := \frac{\sqrt{p-1}-1}{\sqrt{p-1}+1}$. Jos $\xi \neq 0$, niin kompleksisten osittaisderivaattojen tulosäännön nojalla

$$W_{\bar{\xi}} = (\xi^n F_{\bar{\xi}} - nC_p \bar{\xi}^{n-1} \overline{F} - C_p \bar{\xi}^n \overline{F}_{\bar{\xi}}) |\xi|^C + (\xi^n F - C_p \bar{\xi}^n \overline{F}) \left(|\xi|^C \bar{\xi}^{-1} \frac{C}{2} \right).$$

Rivin (4.12) nojalla $\xi^n F_{\bar{\xi}} - C_p \bar{\xi}^n \overline{F_\xi} = 0$, joten edelleen

$$W_{\bar{\xi}} = -nC_p \bar{\xi}^{n-1} \overline{F} |\xi|^C + (\xi^n F - C_p \bar{\xi}^n \overline{F}) \left(|\xi|^C \bar{\xi}^{-1} \frac{C}{2} \right).$$

Edelleen

$$\begin{aligned}\bar{\xi}W_{\bar{\xi}} &= -nC_p\bar{\xi}^n\overline{F}|\xi|^C + (\xi^n F - C_p\bar{\xi}^n\overline{F})\left(|\xi|^C\frac{C}{2}\right)\\ &= \left[\frac{C}{2}\xi^n F - nC_p\bar{\xi}^n\overline{F} - \frac{C}{2}C_p\bar{\xi}^n\overline{F}\right]|\xi|^C.\end{aligned}$$

Huomataan, että

$$\overline{W(\xi)} = (\bar{\xi}^n\overline{F} - C_p\xi^n F)|\xi|^C.$$

Ratkaistaan vakio D yhtälöistä $\frac{C}{2} = -DC_p$ ja $-nC_p - \frac{CC_p}{2} = D$. Tällöin saadaan

$$D = \frac{nC_p}{C_p^2 - 1} = -\frac{n(p-2)}{4\sqrt{p-1}} \qquad \text{ja} \qquad C = \frac{-2nC_p^2}{C_p^2 - 1} = -n + \frac{np}{2\sqrt{p-1}}.$$

Kaiken kaikkiaan

$$W_{\bar{\xi}}(\xi) = -\frac{n(p-2)}{4\sqrt{p-1}} \cdot \frac{1}{\bar{\xi}}\overline{W(\xi)}.$$

Derivoimalla tätä yhtälöä nähdään kuvauksen W sileys origon ulkopuolella. Nyt myös y^{-1} on sileä. Käänteiskuvauslauseen nojalla y on sileä ja $u \in C^\infty(\Omega \setminus (0,0))$. □

4.1 Konjugaattifunktioista

Tässä kappaleessa tarkastellaan konjugaattifunktioita, joiden olemassaolon avulla voidaan todistaa p-harmonista funktiota vastaavan kompleksisen gradientin kvasisäännöllisyys, kun $p \in (1,2)$. Tämän seurauksena edellisen kappaleen tulokset pätevät myös, kun $p \in (1,2)$.

Lause 4.14 *Olkoon φ p-harmoninen yhdesti yhtenäisessä alueessa Ω siten, että $\nabla\varphi \neq 0$ kaikilla $x \in \Omega$ ja $p \in (2,\infty)$. Tällöin on olemassa alueessa Ω q-harmoninen konjugaattifunktio siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Todistus. Lauseesta 4.13 seuraa, että $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Tällöin p-harmonisuuden määritelmän mukaan $\Delta\varphi = 0$ joukossa Ω, toisin sanoen

$$\frac{\partial}{\partial x}(|\nabla\varphi|^{p-2}\varphi_x) = \frac{\partial}{\partial y}(-|\nabla\varphi|^{p-2})\varphi_y \tag{4.13}$$

Yhtälön (4.13) nojalla vektorikenttä

$$(|\nabla\varphi|^{p-2}\varphi_x, -|\nabla\varphi|^{p-2}\varphi_y) \tag{4.14}$$

on gradienttikenttä, joten on olemassa funktio $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, siten, että

$$\psi_x(x,y) = |\nabla\varphi(x,y)|^{p-2}\varphi_x(x,y) \qquad \text{ja} \qquad \psi_y(x,y) = -|\nabla\varphi(x,y)|^{p-2}\varphi_y(x,y).$$

Nyt siis $\nabla\psi(x,y) = |\nabla\varphi(x,y)|^{p-2}\nabla\varphi(x,y)$. Olkoon sitten q luvun p konjugaattieksponentti, jolloin $(p-1)(q-1) = 1$. Nyt, koska $|\nabla\psi(x,y)| = |\varphi(x,y)|^{p-1}$, niin $|\nabla\varphi(x,y)| = |\nabla\psi(x,y)|^{q-1}$. Siispä

$$\begin{cases} \varphi_x = |\nabla\psi|^{q-2}\psi_y \\ \varphi_y = -|\nabla\psi|^{q-2}\psi_x. \end{cases} \tag{4.15}$$

Nyt

$$-\frac{\partial}{\partial x}|\nabla\psi|^{q-2}\psi_x = \frac{\partial}{\partial y}|\nabla\psi|^{q-2}\psi_y,$$

joten ψ on q-harmoninen funktio. □

Jos $p = 2 = q$, niin yhtälöt (4.15) palautuvat Cauchy-Riemannin yhtälöiksi. Yhtälöitä (4.15) voidaan täten kutsua p-Cauchy-Riemannin yhtälöiksi. Edelleen

$$\begin{aligned} \langle\nabla\varphi, \nabla\psi\rangle &= |\nabla\psi|^{q-2}\psi_y \cdot |\nabla\varphi|^{p-2}\varphi_x + |\nabla\psi|^{q-2}\psi_x \cdot |\nabla\varphi|^{p-2}\varphi_y \\ &= -|\nabla\psi|^{q-2}|\nabla\varphi|^{p-2}|\nabla\varphi|^{p-2}\varphi_y\varphi_x + |\nabla\psi|^{q-2}|\nabla\varphi|^{p-2}|\nabla\varphi|^{p-2}\varphi_y\varphi_x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Funktiota ψ, jolla on edellä mainittu ominaisuus kutsutaan myös virtafunktioksi (engl. *stream function*).

Esimerkki 4.15. Logaritmin päähaara $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Näin ollen sen reaali- ja imaginääriosa ovat tunnetusti harmonisia. Itse asiassa perusratkaisun $\varphi(x,y) = \frac{p-1}{p-2}(x^2+y^2)^{\frac{(p-2)}{2(p-1)}}$ konjugaattifunktio on $\psi(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ joukossa, missä arkustangentti on hyvin määritelty.

Lauseen 3.43 yhteydessä todettiin, että kvasisäännöllinen kuvaus voidaan kirjoittaa analyyttisen kuvauksen ja kvasikonformikuvauksen yhdisteenä. Myös kuvaus $\tau = \varphi + i\psi$ voidaan hajottaa, mutta kvasikonformisuudesta on luovuttava. Tarkastellaan tilannetta kvasiradiaalisen funktion avulla, johon palataan myöhemmin erityisesti optimaalisen säännöllisyyden yhteydessä. Seuraavan esimerkin kvasiradiaalilla p-harmonisella funktioilla on origossa kriittinen piste, kun taas kriittisten pisteiden olemassaolo ei-vakioilla p-harmonisilla funktioilla on avoin korkeammissa ulottuvuuksissa.

Esimerkki 4.16. Olkoot $p \in (2,\infty), k > \frac{p-2}{p-1}$ ja $\varphi(x,y) = r^k f(\phi)$ ei-vakio p-harmoninen funktio joukossa $\mathbb{R}^2$ siten, että $f \in C^2(\mathbb{R}), x+iy = re^{i\phi} = z$. Semieksplisiittinen parametrisaatio funktiolle $f(\phi)$ on tällöin [Ar3, s. 146]

$$\phi = \tau - a(k-1)\int_0^\tau \frac{d\tau'}{ak-\cos^2\tau'} + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$
$$f(\phi) = C_2 \cdot \left(1 - \frac{\cos^2\tau}{ak}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cos\tau, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

missä $\tau \in \mathbb{R}$ on parametri. Tässä f on parillinen funktio, jonka jakso on

$$\sigma = \pi\left(1 - (1-1/k)\frac{\sqrt{ak}}{\sqrt{ak-1}}\right).$$

Erityisesti kuvaus $\phi \mapsto f(\phi)$ on origon ympäristössä jatkuva jos ja vain jos $2\pi = m \cdot 2\sigma$, missä $m \in \mathbb{N}$. Tapauksessa $k > 1, m > 1$ näin on täsmälleen silloin, kun valitaan

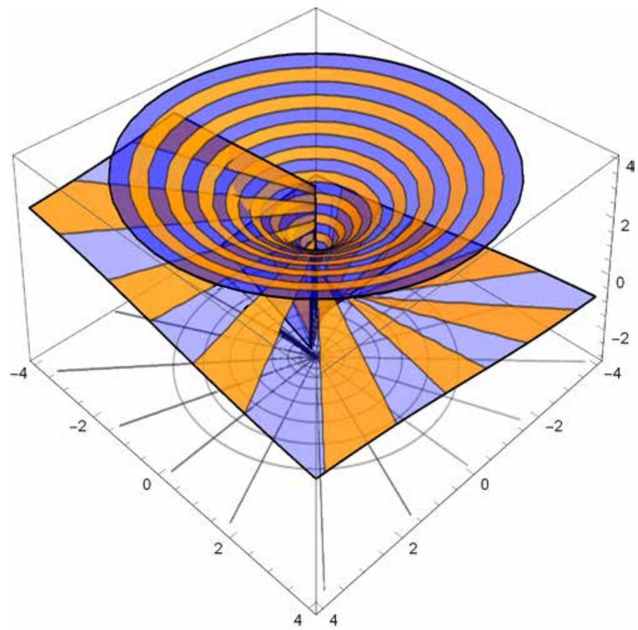
$$k(m,p) = \frac{2a - (1-\frac{1}{m})^2 + (1-\frac{1}{m})\sqrt{4a(a-1) + (1-\frac{1}{m})^2}}{2a(1-(1-\frac{1}{m}))^2}. \tag{4.16}$$

Edelleen p-Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla on olemassa q-harmoninen kvasiradiaalinen funktio $\psi = r^l g(\phi)$ siten, että $l-1 = (q-1)(k-1)$. Valitaan $C_1 = 0$ ja $C_2 = \frac{1}{k}$. Tällöin

$$g(\phi) = -\frac{1}{l} f'(\phi)(k^2 f(\phi)^2 + f'(\phi)^2)^{\frac{p-2}{2}},$$

missä $f'(\phi) = -(\frac{1-\cos^2\tau}{ak})^{\frac{k-1}{2}}$. Jos $\mathrm{Arg}(z) = \frac{n\pi}{m}$, niin on vakio $A > 0$ siten, että $|\varphi(x,y) + i\psi(x,y)| = A|z|^k$. Vastaavasti on olemassa $B > 0$ siten, että $|\varphi(x,y) + i\psi(x,y)| = B|z|^l$. Erityisesti kuvausta $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ ei voida esittää muodossa $H \circ \chi$, missä H on analyyttinen ja χ on kvasikonformikuvaus.

Lause 4.17 *Olkoon φ p-harmoninen funktio yhdesti yhtenäisessä alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja ψ sitä vastaava konjugaattifunktio. Tällöin kuvaus $\tau = \varphi + i\psi$ voidaan esittää muodossa $\tau = h \circ \sigma$, missä h on analyyttinen ja σ on homeomorfismi. Erityisesti*



Kuva 2: Esimerkin 4.15 funktiot φ ja ψ.

funktion $F(x) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ nollakohtien joukko on diskreetti.

Todistus. Sivuutetaan, ks. [Be, s. 33]. Vertaa Lauseeseen 3.43. □

Konjugaattifunktion olemassaololla on välitön seuraus Lauseeseen 4.7, joka voidaan nyt esittää vahvemmassa muodossa.

Seuraus 4.18 *Lauseessa 4.7 voidaan tapauksessa $d = 2$ olettaa, että $p \in (1, \infty)$. Lisäksi kyseisen lauseen jälkeisissä seurauksissa sekä Lauseessa 4.13 voidaan olettaa, että $p \in (1, \infty)$. Erityisesti tason p-harmonisen funktion kompleksinen gradientti f on kvasisäännöllinen kaikilla $p \in (1, \infty)$, yhtälö (4.4) on voimassa kaikilla $p \in (1, \infty)$ ja*

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}\right| \leq \left|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right|\left|1 - \frac{2}{p}\right|.$$

Todistus. Jos $p = 2$, niin väite on selvä. Olkoon $p \in (1, 2)$ ja u p-harmoninen funktio. Tällöin rivin (4.15) kaavojen nojalla on olemassa q-harmoninen funktio ψ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Toisaalta, koska $q \in (2, \infty)$ niin Lauseen 4.7 nojalla $\tilde{F} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, kun $\tilde{F} = |\nabla\psi|^{(q-2)/2}\nabla\psi$. Edelleen $F = |\nabla\psi|^{(p-2)/2}\nabla\psi \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$. □

4.2 Ratkaisujen luokittelusta ja argumentin periaatteesta

Tarkastellaan lähemmin kvasiradiaalia p-harmonista ($p > 2$) funktiota eli funktiota φ, joka on napakoordinaateissa (r, ϕ) muotoa $\varphi(r, \phi) = r^k f(\phi)$, $f(\phi) \in C^2(\mathbb{R})$. Jos $k > 1$, niin punkteeratun tason ratkaisu on myös koko tason heikko ratkaisu. Siispä kvasiradiaalit p-harmoniset ratkaisut karakterisoi yhtälö

$$((1+b)(f')^2 + bk^2 f^2)f'' + (2k-1+bk)kf(f')^2 + (k-1+bk)k^3 f^3 = 0,$$

missä $b = \frac{1}{p-2}$. Lisäksi $\varphi \in C^{k,k-\lfloor k \rfloor}(\mathbb{R}^2)$ ja $\nabla\varphi(0,0) = 0$. Koko tason ratkaisulle f on parillinen ja sillä on sopivalla argumentin haaralla semi-eksplisiittinen parametrisaatio [Pe]

$$\phi = \int_0^{\vartheta} \frac{a - \cos^2 \vartheta'}{ak - \cos^2 \vartheta'} \, d\vartheta', \qquad \vartheta = \phi - \operatorname{Arg}(\varphi_x + i\varphi_y)$$

$$f(\phi) = C \cdot |ak - \cos^2 \vartheta|^{\frac{k-1}{2}} \cos \vartheta, \qquad C > 0,$$

kun luku $k := k(m, p)$ valittu rivin (4.16) mukaisesti. Nämä ratkaisut ovat harmonisten funktioiden analogioita. Tarkemmin nämä funktiot lähestyvät funktiota $\operatorname{Re} z^m$, kun $p \to 2$. Jos luku k valitaan toisin, saadaan analogioita sektorimaisissa joukoissa. Sama parametrisaatio antaa analogioita punkteeratussa tasossa, jos $k < 0$. Edelleen perusratkaisun eksponentti $k = \frac{p-2}{p-1}$ jakaa kvasiradiaalit funktiot ominaisuuksiltaan. Nimittäin, jos $0 < k < \frac{p-2}{p-1}$, löytyy olennaisesti toinen luokka ratkaisuja [Pe, Ar3], joita kutsutaan spiraaliratkaisuiksi:

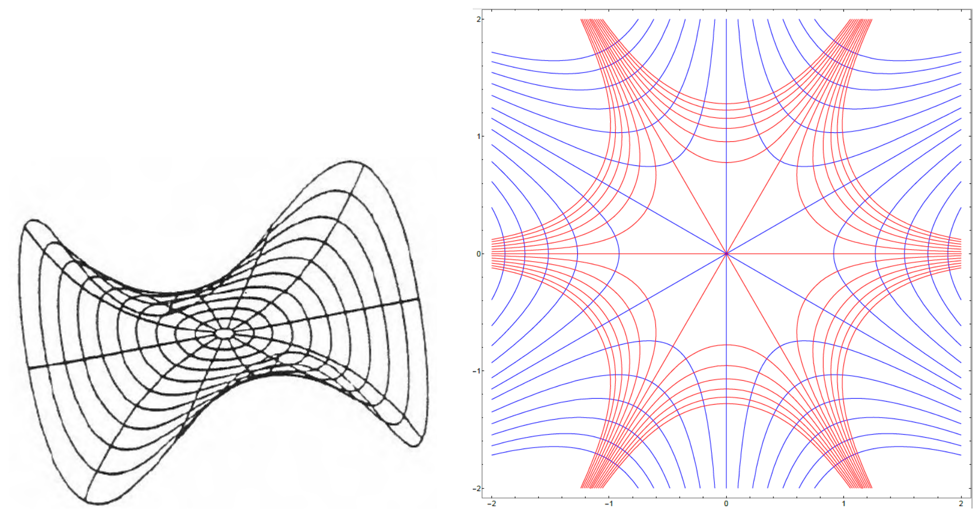
$$\varphi(r, \phi) = r^k e^{\pm\sqrt{\frac{k(p-2)}{p-1} - k^2}\,\phi}.$$

Jäljelle jää vielä tapaukset missä $k \in \{0, 1\}$. Jos $k = 0$, niin f' on vakio eli $f(\phi) = A\phi, A \in \mathbb{R}$. Toisaalta jos $k = 1$, niin $f(\phi) = A\cos\phi + B\sin\phi$ eli $u(x, y) = Ax + By$.

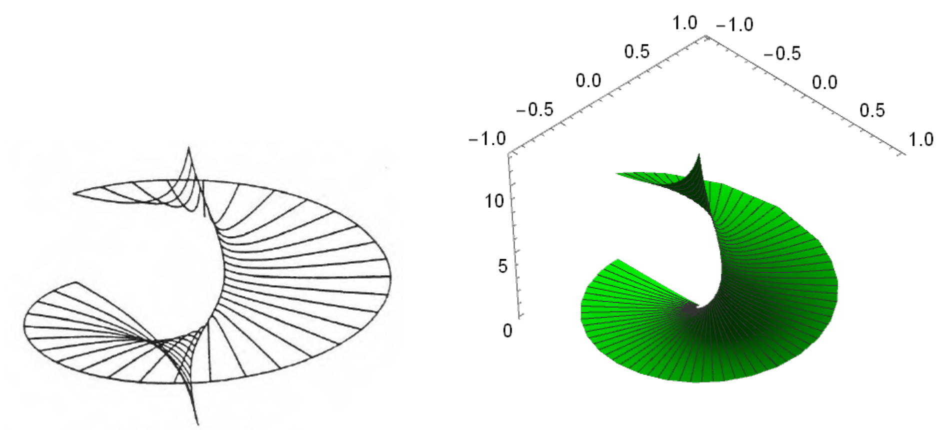
Huomautus 4.19. Kvasiradiaalin funktion konjugaattifunktio on kvasiradiaalinen, jos $k \notin \{0, \frac{p-2}{p-1}\}$.

Edellä mainittujen analogioiden lisäksi p-harmoniset funktiot toteuttavat oikein tulkittuna argumentin periaatteen. Muistutettakoon, että tavanomaisen argumentin periaatteen mukaan meromorfifunktion polkuintegraali riippuu nollakohdista ja navoista, jotka jäävät polun sisäpuolelle.

Lause 4.20 *(Argumentin periaate). Olkoon φ ei-vakio p-harmoninen funktio alueessa $D \subset \mathbb{C}$. Olkoon lisäksi ψ sitä vastaava konjugaattifunktio. Tällöin on*



Kuva 3: 3-harmonisen kvasiradiaalin funktion $\varphi = r^k f(\phi)$ tasa-arvokäyriä (sinisellä) ja $\frac{3}{2}$-harmonisen konjugaattifunktion tasa-arvokäyriä (punaisella), kun $m = 3$. Tässä $k = \frac{\sqrt{19}+8}{5}$, jolloin φ on $3-$harmoninen koko tasossa. Ratkaisulta origon ympäristössä vaaditaan, että $k > 1, m \geq 2$. Konjugaattifunktion tasa-arvokäyrät ovat gradientin $\nabla\varphi$ tasa-arvokäyriä ja vastaavasti funktion φ tasa-arvokäyrät ovat konjugaattifunktion gradientin $\nabla\psi$ tasa-arvokäyriä.



Kuva 4: Kaksi ratkaisua, jotka eivät ole analyyttisten funktioiden analogioita. Välttämätön ehto molemmissa ratkaisuissa on $0 < k < \frac{p-2}{p-1}$ (jos $p > 2$). Vasemmanpuoleisella on aiemmin esitelty semi-eksplisiittinen parametrisaatio. Oikeanpuoleinen on spiraaliratkaisu. Molemmat funktiot pisteestä $(2, -2, 17)$ katsottuna.

olemassa analyyttiset funktiot h, H ja homeomorfismit σ, χ siten, että $\varphi + i\psi = H \circ \sigma$ ja $f = h \circ \chi$. Olkoon $z_0 \in D$ ja $M \in \mathbb{N} - \{0\}$ ensimmäisen nollasta eroavan funktion H derivaatan kertaluku pisteessä $\sigma(z_0)$. Olkoon edelleen $N \in \mathbb{N}$ ensimmäisen nollasta eroavan derivaatan h kertaluku pisteessä $\chi(z_0)$. Tällöin $N = M - 1$.

Todistus. Olkoon U_0 pisteen z_0 ympäristö siten, että $\nabla\varphi \neq 0$ joukossa $U_0 \setminus z_0$ ja $H' \neq 0$ joukossa $\sigma(U_0 \setminus z_0)$. Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että $\varphi(z_0) = 0$ ja $H(0) = 0$. Oletusten nojalla funktiolla H on pisteen $\xi = 0$ ympäristössä U_0 Taylorin sarjakehitelmä

$$H(\xi) = \sum_{k=M}^{\infty} a_k \xi^k = \xi^M \biggl(a_M + \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k \xi^{k-M}\biggr).$$

Määritellä analyyttinen haara ympäristössä $\Omega_1 \subset \Omega_0$ asettamalla

$$\phi(\xi) := \xi \sqrt[M]{a_M + \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k \xi^{k-M}} = \xi_1.$$

Olkoon $\omega = \phi(\Omega_2)$, missä $\Omega_2 \subsetneq \Omega_1$. Merkitään lisäksi

$$A = \{\xi_1 \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\xi_1^M)| < \varepsilon \;\text{ ja }\; |\mathrm{Im}(\xi_1^M)| < \varepsilon\},$$

missä $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että $\bar{A} \subset \omega$. Reuna ∂A leikkaa tasa-arvokäyriä $\mathrm{Re}(\xi_1^M) = \varepsilon, \mathrm{Im}(\xi_1^M) = \varepsilon$, $\mathrm{Re}(\xi_1^M) = -\varepsilon$ ja $\mathrm{Im}(\xi_1^M) = -\varepsilon$ pisteissä, joita on $4M$ kappaletta. Määritellään nyt polku $\gamma := (\sigma^{-1} \circ \varphi^{-1})(\partial A)$ ja olkoon $U_1 = (\sigma^{-1} \circ \varphi^{-1})(A)$. Merkitään polun γ sileitä osia kirjaimin γ_i, $i = 1, 2, \ldots, 4M$. Olkoon $\triangle e_k$ tangenttivektorin argumentin muutos kulmapisteissä $k = 1, \ldots, 4M$. Suunnistamalla polku γ positiivisesti saadaan, että

$$\begin{aligned}
\int_\gamma d\arg(\varphi_x + i\varphi_y) - 2\pi &= \sum_{k=1}^{4M} \biggl(\int_{\gamma_k} d(\arg(\varphi_x + i\varphi_y) - \int_{\gamma_k} d\arg e_t - \triangle_\gamma \arg e_k \biggr) \\
&= -\sum_{k=1}^{4M} \triangle_\gamma \arg e_k \\
&= -M \cdot 2\pi.
\end{aligned}$$

Toisaalta argumentin periaatteen [L, s. 85] nojalla

$$N \cdot 2\pi = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma d \arg f,$$

joten $N = M - 1$. $\square$

5 Hodograafimuunnos

Hodograafimuunnoksella viitataan prosessiin, jolla kvasilineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö voidaan muuttaa lineaariseksi. Sanotaan, että osittaisdifferentiaaliyhtälö on kvasilineaarinen, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0,$$

missä $a_\alpha \in \mathbb{R}$ kaikilla α, joilla $|\alpha| \leq k$. Esimerkki kvasilineaarisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä on minimipinnan yhtälö

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

Kvasilineaarisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä voidaan puhua analogisesti myös kompleksiarvoisten funktioiden joukossa. Sovellamme niin kutsuttua hodograafimuunnosta p-harmonisen funktion u kompleksisen gradientin f toteuttamaan kvasilineaariseen yhtälöön (4.4). Stoïlow-hajotelman ja kompleksisen gradientin kvasisäännöllisyyden nojalla f voidaan kirjoittaa muodossa $f = h \circ \hat{\chi}$, missä h on analyyttinen ja $\hat{\chi}$ on kvasikonformikuvaus. Tämän esitysmuodon sijoittaminen suoraan yhtälöön ei kuitenkaan toimi. Tämän vuoksi käytetään lisäksi apuna analyyttisen funktion esitystä nollakohdan kertaluvun avulla [P, s. 301]. Oletetaan, että $f(0) = 0$ ja $f \neq 0$ muuten. Nyt origon ympäristössä voidaan kirjoittaa $h = G^n$, missä G on analyyttinen injektio ja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tästä seuraa, että origon jossain ympäristössä $f = \chi^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, missä χ on kvasikonformikuvaus ja $\chi(0) = 0$. Sijoittamalla kyseinen hajotelma yhtälöön (4.4) saadaan epälineaarinen yhtälö

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\chi}{\bar{\chi}}\overline{\frac{\partial \chi}{\partial z}} + \frac{\overline{\chi^n}}{\chi^n}\frac{\partial \chi}{\partial z}\right).$$

Olkoon sitten H kuvauksen χ käänteiskuvaus, joka on kvasikonformikuvaus. Merkitään $\xi = \chi(H(\xi))$ ja $z = H(\chi(z))$. Kaavojen (3.7) avulla saadaan, että $\chi_z = \mathcal{J}^{-1}\overline{H_\xi}$ ja $\chi_{\bar{z}} = -\mathcal{J}^{-1}H_{\bar{\xi}}$, missä $\mathcal{J}(\xi) = |H_\xi|^2 - |H_{\bar{\xi}}|^2$. Täten H toteuttaa lineaarisen yhtälön

$$H_{\bar{\xi}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left[\frac{\xi}{\bar{\xi}}H_\xi + \frac{\bar{\xi}^n}{\xi^n}\overline{H}_\xi\right]. \tag{5.1}$$

Aiemmin todistettiin, että p-harmonisen funktion kompleksinen gradientti on sileä nollakohtien ulkopuolella, ja että kyseinen nollakohtien joukko on diskreetti. Huomataan lisäksi, että jos $H(\xi)$ toteuttaa yhtälön (5.1), niin myös $H(t\xi)$ toteuttaa sen kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Olemme siis kiinnostuneita yhtälön (5.1) kvasikonformisista ratkaisuista H olettaen, että $H \in W^{1,2}(\mathbb{D}) \cap C^{\infty}(\mathbb{D}^*)$. Huomautettakoon, että jos $p = 2$ saadaan yhtälö $H_{\bar{z}} = 0$, jonka ratkaisut ovat analyyttisiä, jos $H \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$. Etsitään seuraavaksi kuvaukselle H sarjaesitys. Todistuksen apuna käytetään kompleksisten osittaisderivaattojen napakoordinaattiesityksiä. Merkitsemällä $H(r,\theta) = H(re^{i\theta})$ saadaan ketjusäännön seurauksena seuraavat kaavat kompleksisille osittaisderivaatoille muuttujien ξ ja $\bar{\xi}$ suhteen:

$$H_{\bar{\xi}} = \frac{1}{2}\left(H_r + \frac{i}{r}H_\theta\right)e^{i\theta} \qquad \text{ja} \qquad H_\xi = \frac{1}{2}\left(H_r - \frac{i}{r}H_\theta\right)e^{-i\theta}.$$

Lause 5.1 *Olkoon $H \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ K-kvasikonformikuvaus. Oletetaan lisäksi, että H ratkaisee yhtälön (5.1) joukossa $\mathbb{D}^*$ ja $H(0) = 0$. Tällöin*

$$H(\xi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (A_k \xi^k + \varepsilon_k \overline{A_k} \bar{\xi}^k)|\xi|^{\lambda_k + n - k}\xi^{-n}, \qquad A_k \in \mathbb{C}, \tag{5.2}$$

missä

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4k^2(p-1) + n^2(p-2)^2} - np\right) \qquad \text{ja} \qquad \varepsilon_k = \frac{\lambda_k + n - k}{\lambda_k + n + k}.$$

Edelleen

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k|A_k|^2 < \infty. \tag{5.3}$$

Kääntäen, jos kompleksiluvuille $A_n, A_{n+1}, \ldots$ pätee epäyhtälö (5.3), niin rivin (5.2) sarja suppenee avaruudessa $W^{1,2}(\mathbb{D})$ kohti kvasisäännöllistä ratkaisua ja ratkaisee yhtälön (5.1) joukossa $\mathbb{D}^*$.

Todistus. Yhtälö (5.1) saa napakoordinaattien avulla muodon

$$\frac{1}{2}\left(H_r + \frac{i}{r}H_\theta\right)e^{i\theta} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left[\frac{\xi}{\bar{\xi}}\frac{1}{2}\left(H_r - \frac{i}{r}H_\theta\right)e^{-i\theta} + \frac{1}{2}\frac{\bar{\xi}^n}{\xi^n}\left(\bar{H}_r + \frac{i}{r}\bar{H}_\theta\right)e^{i\theta}\right].$$

Koska $\xi = re^{-i\theta}$, niin

$$2p\left(H_r + \frac{i}{r}H_\theta\right) = (p-2)\left[\left(H_r - \frac{i}{r}H_\theta\right) + \left(\bar{H}_r + \frac{i}{r}\bar{H}_\theta\right)e^{-2ni\theta}\right].$$

Kun tästä ratkaistaan termi H_r niin

$$H_r = \frac{1}{p+2}\left(-\frac{3ipH_\theta}{r} + \frac{2iH_\theta}{r} + (p-2)\bar{H}_r e^{-2ni\theta} - \frac{2i}{r}\bar{H}_\theta e^{-2ni\theta} + \frac{pi}{r}\bar{H}_\theta e^{-2ni\theta}\right).$$

Tällöin toisaalta

$$\overline{H_r} = \frac{1}{p+2}\left(\frac{3ip\bar{H}_\theta}{r} - \frac{2i\overline{H_\theta}}{r} + (p-2)H_r e^{2ni\theta} + \frac{2i}{r}H_\theta e^{2ni\theta} - \frac{pi}{r}H_\theta e^{2ni\theta}\right).$$

Kun tämä sijoitetaan edelliseen yhtälöön niin saadaan edelleen

$$\begin{aligned} H_r = \frac{1}{p+2}\Bigg(&-\frac{3ipH_\theta}{r} + \frac{2iH_\theta}{r} + (p-2)e^{-2ni\theta}\left[\frac{1}{p+2}\left(\frac{3ip\bar{H}_\theta}{r} - \frac{2i\bar{H}_\theta}{r} + \right.\right. \\ &\left.\left.(p-2)H_r e^{2ni\theta} + \frac{2i}{r}H_\theta e^{2ni\theta} - \frac{pi}{r}H_\theta e^{2ni\theta}\right)\right] - \frac{2i}{r}\bar{H}_\theta e^{-2ni\theta} + \frac{pi}{r}\bar{H}_\theta e^{-2ni\theta}\Bigg). \end{aligned}$$

Sieventelyjen jälkeen päädytään yhtälöön

$$2rH_r = -ipH_\theta + (p-2)ie^{-2ni\theta}\overline{H_\theta}. \tag{5.4}$$

Oletuksen nojalla $H \in L^2(\mathbb{D})$, joten $H(r,\theta)$ voidaan esittää Fourier-sarjana muuttujan θ suhteen [Du]. Tarkemmin

$$H(r,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(r)e^{i(k-n)\theta}, \tag{5.5}$$

missä kertoimet $a_k(r)$ määritellään asettamalla

$$a_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2k} H(r,\theta)e^{i(n-k)\theta}d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

Yhtälöiden (5.4) ja (5.6) nojalla saadaan

$$
\begin{aligned}
2ra_k'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(r,\theta)e^{i(n-k)\theta}\,d\theta + (p-2)i2rH_r(r,\theta)e^{i(n-k)\theta}\,d\theta \\
&= -ip\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_\theta(r,\theta)e^{i(n-k)\theta}\,d\theta + (p-2)i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{H_\theta(r,\theta)}e^{-i(k+n)\theta}\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$
I_1 = \overbrace{-ip\frac{1}{2\pi}\Big/_{0}^{2\pi} H(r,\theta)e^{i(n-k)\theta}}^{=0} - p\frac{1}{2\pi}(n-k)\int_0^{2\pi} H(r,\theta)e^{i(n-k)\theta}\,d\theta.
$$

Vastaavasti

$$
\begin{aligned}
I_2 = &\overbrace{(p-2)i\frac{1}{2\pi}\Big/_{0}^{2\pi} \overline{H(r,\theta)}e^{-i(k+n)\theta}\,d\theta}^{=0} \\
&- (p-2)(n+k)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{H(r,\theta)}e^{-i(k+n)\theta}\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Siispä

$$
\begin{aligned}
2ra_k'(r) = I_1 + I_2 = p\frac{1}{2\pi}(n-k)&\int_0^{2\pi} H(r,\theta)e^{i(n-k)\theta}\,d\theta \\
&- (p-2)(n+k)i\frac{1}{2\pi}\overline{\int_0^{2\pi} H(r,\theta)e^{-i(k+n)\theta}\,d\theta}.
\end{aligned}
$$

Päädymme siis tarkastelemaan differentiaaliyhtälöä

$$
2ra_k'(r) = -p(n-k)a_k(r) - (p-2)(n+k)\overline{a_{-k}(r)}. \tag{5.7}
$$

Korvataan luku k vastaluvulla $-k$, jolloin konjugoimalla yhtälön molemmat puolet saadaan

$$
2r\overline{a_{-k}'(r)} = -p(n-k)\overline{a_{-k}(r)} - (p-2)(n+k)a_k(r).
$$

Kertomalla edellinen yhtälö puolittain luvulla $p-2$ saadaan edelleen

$$2r(p-2)\overline{a'_{-k}(r)} = -p(n+k)(p-2)\overline{a_{-k}(r)} - (p-2)^2(n-k)a_k(r).$$

Eliminoidaan termi $(p-2)(n+k)\overline{a_{-k}}$ käyttäen yhtälöä (5.7). Saadaan siis, että

$$2(p-2)r\overline{a'_{-k}} = 2pra'_k + 4(p-1)(n-k)a_k. \tag{5.8}$$

Derivoimalla yhtälö (5.7) saadaan yhtälön (5.8) nojalla yhtälö

$$2r(2ra'k)' = -2pr(n-k)a'_k - (n+k)(2pra'k + 4(p-1)(n-k)a_k). \tag{5.9}$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisut ovat tunnetusti muotoa $a_k(r) = C_1 r^{\lambda^+} + C_2 r^{\lambda^-}$, missä λ^+ ja λ^- ovat karakteristisen yhtälön

$$\lambda^2 + pn\lambda(n^2-k^2)(p-1) = 0,$$

juuria. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan nojalla nämä ovat

$$\begin{aligned}\lambda^+ &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{4k^2(p-1)+n^2(p-2)^2} - np\Big), \text{ ja}\\ \lambda^- &= \frac{1}{2}\Big(-\sqrt{4k^2(p-1)+n^2(p-2)^2} - np\Big).\end{aligned}$$

Oletuksesta $H \in C(\mathbb{D})$ seuraa, että $a_k \in C([0,1))$. Erityisesti a_k on oikealta jatkuva pisteessä $r=0$. Siispä $C_1 = 0$, koska $\lambda^- < 0$. Toisaalta $\lambda^+ < 0$, jos $|k| < n$. Kaiken kaikkiaan

$$a_k(r) = \begin{cases} 0, & \text{jos } |k| < n \\ A_k r^{\lambda_k}, & \text{jos } |k| \geq n, \end{cases} \tag{5.10}$$

missä

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\Big(-pn + \sqrt{4k^2(p-1)+n^2(p-2)^2}\Big).$$

Yhtälö (5.9) ei ole yhtäpitävä (5.7) kanssa, joten sijoitetaan kertoimet (5.10) yhtälöön (5.7). Nyt saadaan ehdot kertoimille A_k kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, joka on yhtälö

$$(2\lambda_k + p(n-k))A_k = (2-p)(n+k)\overline{A_{-k}}.$$

Jos $k = \pm n$, niin $\lambda_{-n} = \lambda_n = 0$, jolloin $A_{-n} = 0$. Tällöin kerroin A_n voi olla mielivaltainen. Jos taas $|k| > n$, niin $A_{-k} = \varepsilon_k \overline{A_k}$, missä

$$\varepsilon_k = \frac{2\lambda_k + p(n-k)}{(2-p)(n+k)} = \frac{\lambda_k + n - k}{\lambda_k + n + k}. \tag{5.11}$$

Näin ollen voimme valita mielivaltaiset kertoimet A_k ja määritellä kertoimet $A_{-n}, A_{n-1}, \ldots$ yhtäsuuruuden $A_{-k} = \varepsilon_k \overline{A_k}$ sekä kaavan (5.11) avulla. Oletuksesta $H(0) = 0$ seuraa, että $A_n = 0$. Sijoittamalla saadut kertoimet Fourier-esitykseen (5.5) saamme väitetyn sarjan napakoordinaattimuodossa

$$H(r,\theta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (A_k e^{ik\theta} + \varepsilon_k A_k e^{-ik\theta}) r^{\lambda_k} e^{-in\theta}.$$

Todetaan sitten, että $\sum_{k=n+1}^{\infty} k|A_k|^2 < \infty$. Tiedon $H \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ nojalla Fourier-sarjaa voidaan derivoida muuttujan r suhteen, tarkemmin

$$H_r(r,\theta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (A_k e^{ik\theta} + \varepsilon_k A_k e^{-ik\theta}) r^{\lambda_k - 1} e^{-in\theta}.$$

Suora lasku osoittaa nyt, että

$$\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (1 + \varepsilon_k^2)|A_k|^2 = \int_0^1 r \left(\int_0^{2\pi} |H_r(r,\theta)|^2 \, d\theta \right) dr. \tag{5.12}$$

Toisaalta, jos $k \geq n+1$, niin $\frac{k(p-1)}{np} \leq \lambda_k(n,p)$. Lisäksi $|H_r|^2 \leq 2(1+K^{-2})(|H_\xi|^2 + |H_{\bar{\xi}}|^2)$, joten

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k|A_k|^2 \lesssim \int_{\mathbb{D}(0,1)} |H_\xi|^2 + |H_{\bar{\xi}}|^2 \, dA < \infty.$$

Oletetaan sitten, että A_k kaikilla $k = n+1, \ldots$ ovat kompleksilukuja siten, että $\sum_{k=n+1}^{\infty} k|A_k|^2 < \infty$. Jos $k \geq n+1$, niin $\lambda_k(n,p) \leq k\sqrt{p-1}$. Lisäksi $|\varepsilon_k| < 1$

ja $2(1+K^2)^{-1}(|H_\xi|^2+|H_{\bar\xi}|^2)\le |H_r|^2$, joten rivin (5.12) nojalla sarja suppenee avaruudessa $W^{1,2}(\mathbb{D})$ kohti yhtälön (5.1) kvasisäännöllistä ratkaisua.

$\square$

Huomautus 5.2. Jokaisella $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, sarjaesityksen ensimmäinen termi vastaa kvasiradiaalia p-harmonista funktiota.

Huomautus 5.3. Olkoon u p-harmoninen funktio origon sisältävässä alueessa siten, että $u(0)=0$, $\nabla u(0,0)=0$ ja $\nabla u\neq 0$ muuten. Artikkelissa [AL] osoitetaan edellä todistetun hodograafiesityksen avulla, että u voidaan kirjoittaa muodossa $u(r,\theta)=\mathcal{U}(r,\theta)+O(r^{\frac{n+\lambda_{n+2}}{\lambda_{n+1}}})$, missä $\mathcal{U}$ on kvasiradiaalinen p-harmoninen funktio. Tämän avulla voidaan todistaa keskiarvokaava tason p-harmonisille funktioille.

Etsitään seuraavaksi edellä todistetun sarjaesitykselle sekä sen derivaatoille estimaatteja.

Lause 5.4 *Olkoon $H\in W^{1,2}(\mathbb{D})$ kvasikonformikuvaus siten, että $H(0)=0$. Oletetaan lisäksi, että H ratkaisee yhtälön (5.1) origon sisältävässä ympäristössä. Tällöin on $\rho>0$ ja vakiot $0<c<C$ siten, että*

$$c|\xi|^{\lambda_{n+1}}\le |H(\xi)|\le C|\xi|^{\lambda_{n+1}} \quad \text{kaikilla} \quad \xi\in\overline{\mathbb{D}}(0,\rho) \tag{5.13}$$

ja vakiot $C_m>0$ kaikilla $m\in\mathbb{N}$ siten, että

$$\sum_{|\nu|=m}|D^\nu H(\xi)|\le C_m|\xi|^{\lambda_{n+1}-m} \quad \text{kaikilla} \quad \xi\in\overline{\mathbb{D}}(0,\rho)\setminus\{0\}. \tag{5.14}$$

Lisäksi

$$\mathcal{J}_H(\xi)=|H_\xi|^2-|H_{\bar\xi}|^2\le C|\xi|^{2\lambda_{n+1}-2} \quad \text{kaikilla} \quad \xi\in\overline{\mathbb{D}}(0,\rho)\setminus\{0\}. \tag{5.15}$$

Todistus. Olkoon ρ siten, että $0\le|\xi|\le\rho<1$. Arvion $|\varepsilon_k|<1$ ja jonon $(\lambda_k)_{k=n+1}^\infty$ kasvavuuden nojalla

$$|H(\xi)|\le\sum_{k=n+1}^\infty(1+|\varepsilon_k|)|A_k||\xi|^{\lambda_k}\le 2|\xi|^{\lambda_{n+1}}\sum_{k=n+1}^\infty|A_k|\rho^{\lambda_k-\lambda_{n+1}}.$$

Cauchyn epäyhtälön nojalla edelleen

$$\sum_{k=n+1}^\infty|A_k|\rho^{\lambda_k-\lambda_{n+1}}\le\left(\sum_{k=n+1}^\infty|A_k|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=n+1}^\infty\rho^{2(\lambda_k-\lambda_{n+1})}\right)^{\frac12}.$$

Lauseen 5.2 seurauksena sarja $\sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|^2$ suppenee ja sarja $\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{(2\lambda_k - 2\lambda_{n+1})}$ suppenee, koska $\frac{k(p-1)}{np} \leq \lambda_k(n,p)$. Kaiken kaikkiaan olemme todistaneet rivin (5.13) ylärajan. Alarajaa varten osoitetaan ensin, että $A_{n+1} \neq 0$. Olkoon A_M jonon $(A_m)_{m=n+1}^{\infty}$ ensimmäinen sellainen termi, että $A_M \neq 0$ ja olkoon H_M sarjaesityksen (5.2) ensimmäinen termi. Kasvattamalla lukua θ nollasta arvoon 2π huomataan, että argumentti $\mathrm{Arg} H_M(r,\theta)$ muuttuu luvun $2\pi(M-n)$ verran. Toisaalta $|\xi|^{\lambda_{n+1}}(1-(2n+1)|\varepsilon_{n+1}|)|A_M| \leq |H_M(\xi)|$ [AL, s. 5] ja

$$|H(\xi)| \leq 2\Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{2(\lambda_k - \lambda_{n+1})}\Bigg)^{\frac{1}{2}} |\xi|^{\lambda_{n+1}}.$$

Siispä riittävän pienellä $\rho > 0$ pätee

$$|H(\xi) - H_M(\xi)| \leq \frac{1}{2}|H_M(\xi)|, \qquad \xi \in \mathbb{D}(0,\rho).$$

Argumentin $\mathrm{Arg} H(r,\theta)$ muutos kasvattaessa θ arvosta 0 arvoon 2π on oltava merkkiä vaille 2π, sillä H on yhdiste analyyttisestä injektiosta ja kvasikonformikuvauksesta, vrt. Lause 4.20. Argumentin muutoksen oltava sama funktiolle $H_M(r,\theta)$, joten $M = n+1$ eli $A_{n+1} \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} |H(\xi)| &\geq (1 - |\varepsilon_{n+1}|)|A_{n+1}||\xi|^{\lambda_{n+1}} - \sum_{k=n+2}^{\infty} (1 + |\varepsilon_k|)|A_k||\xi|^{\lambda_k} \\ &\geq |\xi|^{\lambda_{n+1}} \Bigg((1 - |\varepsilon_{n+1}|)|A_{n+1}| - 2\rho^{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} \sum_{k=n+2}^{\infty} |A_k| \rho^{\lambda_k - \lambda_{n+2}} \Bigg). \end{aligned}$$

Riittävän pienellä $\rho > 0$ suluissa esiintyvä termi on positiivinen. Siispä väitetty alaraja seuraa. Tiedon $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$ nojalla voimme derivoida sarjaesitystä (5.2) termeittäin äärellisen monta kertaa. Cauchyn epäyhtälöä, arviota $\lambda_k \leq k\sqrt{p-1}$ sekä suhdetestiä käyttämällä saadaan, että

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu|=m} |D^\nu H(\xi)| &\leq C(n,p,m) \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^m |A_k||\xi|^{\lambda_k - m} \\ &\leq C(n,p,m) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k\sqrt{p-1})^m |A_k||\xi|^{\lambda_k - m} \\ &\leq C(n,p,m) \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m |A_k||\xi|^{\lambda_k - m} \end{aligned}$$

$$\leq C(n,p,m)|\xi|^{\lambda_{n+1}-m}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^m|A_k|\rho^{\lambda_k-\lambda_{n+1}}$$
$$\leq C(n,p,m)|\xi|^{\lambda_{n+1}-m}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}|A_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{2m}\rho^{2(\lambda_k-\lambda_{n+1})}\Big)^2$$
$$\leq C_m|\xi|^{\lambda_{n+1}-m},$$

mikä todistaa rivin (5.14) epäyhtälön. Lisäksi valitsemalla epäyhtälössä (5.14) $m=1$ saadaan rivin (5.15) epäyhtälö, kun huomataan, että

$$\mathcal{J}_H(\xi)=(|H_\xi|-|H_{\bar{\xi}}|)(|H_\xi|+|H_{\bar{\xi}}|)\leq(|H_\xi|+|H_{\bar{\xi}}|)(|H_\xi|+|H_{\bar{\xi}}|). \qquad \square$$

Arvioidaan seuraavaksi p-harmonisen funktion kompleksisen gradientin f derivaattoja. Kuten aiemmin, kirjotetaan f muotoon $f=\chi(z)^n$, missä χ on kvasikonformikuvaus. Funktio χ on lokaalisti kääntyvä, joten on olemassa kiekko $\mathbb{D}(0,\rho)\subset\mathbb{D}$ siten, että $\chi(H(\xi))=\xi$ kaikilla $\xi\in\mathbb{D}(0,\rho)$. Kaavojen (3.7) nojalla

$$\chi_z(z)=\mathcal{J}^{-1}(\xi)\overline{H_\xi}\qquad\text{ja}\qquad\chi_{\bar{z}}(z)=-\mathcal{J}^{-1}(\xi)H_{\bar{\xi}},$$

missä $\mathcal{J}=\mathcal{J}_H(\xi)=|H_\xi|^2-|H_{\bar{\xi}}|^2$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi esitellään uusi funktioavaruus. Käytetään merkintää H^s ilmaisemaan jompaa kumpaa derivaatoista

$$\frac{\partial^s H}{\partial\xi^i\overline{\partial\xi^j}}\qquad\text{tai}\qquad\frac{\overline{\partial^s H}}{\partial\xi^i\overline{\partial\xi^j}},\qquad i+j=s.$$

Merkitään lisäksi kaikkien niiden monomien muodostamaa lineaarikombinaatioiden avaruutta merkinnällä $\mathbb{P}(s,k)$, jotka on esitettävissä muodossa

$$\mathcal{M}=\prod_{i=1}^{k}H^{s_i}.$$

On ilmeistä, että jos $P\in\mathbb{P}(s,k)$, niin $P_\xi,P_{\bar{\xi}}\in\mathbb{P}(s+1,k)$. Toisaalta, jos $P\in\mathbb{P}(s,k)$ ja $Q\in\mathbb{P}(t,l)$, niin $PQ\in\mathbb{P}(s+t,k+l)$.

Lemma 5.5 *Olkoon $\nu\in\mathbb{N}^2$ siten, että $|\nu|=m$. Tällöin on olemassa $P_\nu\in\mathbb{P}(4m-3,3m-2)$ siten, että*

$$D^\nu\chi(z)=\mathcal{J}(\xi)^{1-2m}P_\nu(\xi), \tag{5.16}$$

missä $z = H(\xi)$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Oletetaan siis, että yhtälö (5.16) pätee jollekin $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$. Ketjusäännöllä saadaan, että

$$\frac{\partial}{\partial \xi} D^\nu \chi(H(\xi)) = (D^\nu \chi)_z H_\xi + (D^\nu \chi)_{\bar{z}} \overline{H_{\bar{\xi}}}.$$

Toisaalta tulon derivointisäännöllä

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{J}(\xi)^{1-2m} P_v(\xi) = \mathcal{J}^{-2m}(\mathcal{J} P_\xi + (1-2m) P \mathcal{J}_\xi).$$

Vastaavasti

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} D^\nu \chi(H(\xi)) = (D^\nu \chi)_z H_{\bar{\xi}} + (D^\nu \chi)_{\bar{z}} \overline{H_{\bar{\xi}}}$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \mathcal{J}(\xi)^{1-2m} P_v(\xi) = \mathcal{J}^{-2m}(\mathcal{J} P_{\bar{\xi}} + (1-2m) P \mathcal{J}_{\bar{\xi}}).$$

Täten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (D^\nu \chi)_z H_\xi + (D^\nu \chi)_{\bar{z}} \bar{H}_{\bar{\xi}} = \mathcal{J}^{-2m}(\mathcal{J} P_\xi + (1-2m) P \mathcal{J}_\xi \\ (D^\nu \chi)_z H_{\bar{\xi}} + (D^\nu \chi)_z \bar{H}_\xi = \mathcal{J}^{-2m}(\mathcal{J} P_{\bar{\xi}} + (1-2m) P \mathcal{J}_{\bar{\xi}}. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä yhtälöryhmästä derivaatat $(D^\nu \chi)_z$ ja $(D^\nu \chi)_{\bar{z}}$, jolloin

$$\begin{aligned} (D^\nu \chi)_z &= \mathcal{J}^{-1-2m}(\mathcal{J} P_\xi \overline{H_\xi} - \mathcal{J} P_{\bar{\xi}} \overline{H_{\bar{\xi}}} + (1-2m) P \mathcal{J}_\xi \overline{H_\xi} - (1-2m) P \mathcal{J}_{\bar{\xi}} \overline{H_{\bar{\xi}}}), \\ (D^\nu \chi)_{\bar{z}} &= \mathcal{J}^{-1-2m}(\mathcal{J} P_{\bar{\xi}} H_\xi - \mathcal{J} P_\xi H_{\bar{\xi}} + (1-2m) P \mathcal{J}_{\bar{\xi}} H_\xi - (1-2m) P \mathcal{J}_\xi H_{\bar{\xi}}). \end{aligned}$$

On vielä todettava, että edellä lasketut derivaatat kuuluvat avaruuteen $\mathbb{P}(4m+1, 3m+1)$. Induktio-oletuksen ja Lemman 5.7 nojalla $P_\xi \in \mathbb{P}(4m-2, 3m-2)$. Huomataan nyt, että $\mathcal{J}_H(\xi) = H_\xi \overline{H_\xi} - H_{\bar{\xi}} \overline{H_{\bar{\xi}}} \in \mathbb{P}(2,2)$. Edelleen, koska $H_\xi, \bar{H}_\xi, H_{\bar{\xi}}, \overline{H_{\bar{\xi}}} \in \mathbb{P}(1,1)$, niin on helppo nähdä, että sulkeissa esiintyvät monomit kuuluvat avaruuteen $\mathbb{P}(4m+1, 3m+1)$ ja väite seuraa induktioperiaatteesta. □

Olemme nyt valmiita etsimään estimaatteja kompleksisen gradientin Sobolev-normille.

Lause 5.6 *Olkoon f yhtälön (4.4) ratkaisu, joka on muotoa $f(z) = \chi(z)^n$, missä χ on homeomorfismi. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ ja vakiot B_m kaikilla $m \in \mathbb{N}$ siten, että punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}^*(0,\delta)$ pätee epäyhtälö*

$$\sum_{|\nu|=m} |D^\nu f(z)| \le B_m |z|^{\frac{d}{\lambda_{n+1}}-m}.$$

Todistus. Kiinnitetään $|\nu| = l = 1, \dots, m$. Lemman 5.5 nojalla on olemassa monomi $P_\nu \in \mathbb{P}(4l-3, 3l-2)$ siten, että

$$D^\nu \chi(z) = J(\xi)^{1-2l} P_\nu(\xi).$$

Olkoon Q mikä tahansa monomi, joka on muotoa $Q = \prod_{i=1}^k H^{\beta_i}, \sum_{i=1}^k \beta_i = s$. Olkoon lisäksi C luvusta ξ riippumaton vakio, joka ei välttämättä ole sama seuraavissa epäyhtälöissä. Nyt epäyhtälön (5.14) nojalla saamme, että

$$|Q(\xi)| \le C \sum_{i=1}^k |\xi|^{\lambda_{n+1}-\beta_i} = C|\xi|^{k\lambda_{n+1}-s}.$$

Erityisesti, jos $Q = P_\nu$, niin

$$|P_\nu(\xi)| \le C|\xi|^{(3l-2)\lambda_{n+1}-4l+3}, \qquad \text{kaikilla } \ \xi \in \mathbb{D}^*(0,\delta).$$

Toisaalta epäyhtälön (5.15) nojalla

$$\mathcal{J}(\xi)^{1-2l} \le C|\xi|^{(1-2l)(2\lambda_{n+1}-2)}.$$

Kaiken kaikkiaan siis

$$|D^\nu \chi(z)| \le C|\xi|^{1-l\lambda_{n+1}}.$$

Yhdessä epäyhtälön (5.13) kanssa tämä antaa estimaatin

$$|D^\nu \chi(z)| \le C|z|^{\frac{1}{\lambda_{n+1}}-l}$$

kiekossa $\mathbb{D}^*(0,\delta)$ riittävän pienellä $\delta > 0$. Soveltamalla Lausetta 3.6 induktiivisesti kompleksiarvoisille kuvauksille saadaan, että

$$|D^\nu f(z)| \leq C|z|^{\frac{n}{\lambda_{n+1}}-m}$$

aina, kun $|\nu| = m$. $\square$

Tarvitsemme vielä lemman, joka karakterisoi ehdon milloin funktio on Hölder-jatkuva konveksissa joukossa, kun tiedämme, että g on jatkuva koko joukossa, mutta jatkuvasti derivoituva vain punkteeratussa joukossa.

Lemma 5.7 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^d$ konveksi, origon sisältävä osajoukko. Olkoon lisäksi $g \in C(U) \cap C^1(U \setminus \{0\})$ siten, että*

1. $|g(x)| \leq M|x|^\alpha$, *jos* $x \in U$
2. $|\nabla g(x) \leq |M|x|^{\alpha-1}$, *jos* $x \in U \setminus \{0\}$.

Tällöin g on Hölder-jatkuva eksponentilla α joukossa U.

Todistus. Olkoon $C = \max\{g(x), g(y)\}$. Tällöin

$$(|g(x)| + |g(y)|)^s \leq (2C)^s \leq 2^s(|g(x)|^s + |g(y)|^s).$$

Erityisesti, jos $s = \frac{1}{\alpha}$, niin

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x)| + |g(y)| \leq 2^{1-\alpha}(|g(x)|^{\frac{1}{\alpha}} + |g(y)|^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha.$$

Oletuksen nojalla edelleen

$$|g(x)| + |g(y)| \leq 2(|g(x)|^{\frac{1}{\alpha}} + |g(y)|^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha \leq 2C(|x| + |y|)^\alpha \leq 2C(|x-y| + 2|y|)^\alpha.$$

Näin ollen, jos $|y| \leq 2|x-y|$, niin

$$2C(|x-y| + 2|y|)^\alpha \leq 2C(|x-y| + 4|x-y|) = 2C5^\alpha \leq 10C.$$

Oletetaan sitten, että $|y| \geq 2|x-y| > 0$. Tällöin kaikilla $t \in [0,1]$ pätee käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$|J_{xy}(t)| = |tx + (1-t)y| \geq |y| - t|x-y| \geq |x-y|.$$

Tästä saadaan arvio $|J_{xy}(t)|^{\alpha-1} \le |x-y|^{\alpha-1}$. Nyt analyysin peruslauseen ja oletuksen $|\nabla g(x)| \le M|x|^{\alpha-1}$ nojalla

$$\begin{aligned} |g(x)-g(y)| &= \left| \int_0^1 \langle x-y, \nabla g(J_{xy}(t)) \rangle \, dt \right| \\ &\le M \int_0^1 |x-y||J_{xy}(t)|^{\alpha-1} \, dt \\ &\le M|x-y|^{\alpha}, \end{aligned}$$

mitä haluttiinkin.

$\square$

Olemme valmiita todistamaan tason p-harmonisten funktioiden optimaalisen säännöllisyyden. Huomautettakoon, että 2-harmoniset funktiot ovat Weylin lemman nojalla sileitä.

Lause 5.8 *Olkoon $p \in (1,\infty)$ ja u p-harmoninen funktio alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin*

$$u \in C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \cap W^{k+2,q}_{\text{loc}}(\Omega),$$

missä kokonaisluvulle $k \ge 1$ ja luvulle $\alpha \in (0,1]$ pätee kaava

$$k + \alpha = \frac{1}{6}\left(7 + \frac{1}{p-1} + \sqrt{1 + \frac{14}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}}\right). \tag{5.17}$$

Luku q on mikä tahansa luku siten, että

$$1 \le q < \frac{2}{2-\alpha}.$$

Tulos on optimaalinen, jos $p \ne 2$. Tarkemmin jokaista $p \in (1,\infty)$, $p \ne 2$ vasten on olemassa p-harmoninen funktio v siten, että $v \notin C^{k+\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \cup W^{k+2,\frac{2}{2-\alpha}}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Todistus. Olkoot λ_{n+1} kaikilla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ kuten Lauseessa 5.4. Merkitään joukon $\{\frac{n}{\lambda_{n+1}} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ minimiä kirjaimella d. Kirjoittamalla $\lambda_{n+1}(n,p)$ muodossa

$$\lambda_{n+1}(n,p) = \frac{n}{2}\left(-p + \sqrt{4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 (p-1) + (p-2)^2}\right)$$

nähdään, että kyseinen minimi saavutetaan arvolla $n = 1$ ja

$$d = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \sqrt{1 + \frac{14}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}}\right).$$

Koska $p-$harmonisen funktion kompleksinen gradientti $f = u_x - iu_y$ toteuttaa yhtälön (4.4), niin Lauseen 5.6 nojalla saadaan kertaluvusta n riippumaton arvio

$$\sum_{|\nu|=m} |D^\nu f(z)| \le B_m |z|^{d-m}, \qquad z \in \mathbb{D}^*(0,\delta).$$

Edelleen siis

$$\sum_{|\nu|=m+1} |D^\nu u(z)| \le B_m |z|^{d-m}, \qquad z \in \mathbb{D}^*(0,\delta).$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (0,1]$ siten, että $d = k - 1 + \alpha$. Jos edellisessä epäyhtälössä valitaan $m = k+1$, saadaan

$$\sum_{|\nu|=k+2} |D^v u(z)| \le B_{k+1} |z|^{\alpha-2}, \qquad z \in \mathbb{D}^*(0,\delta).$$

Kuvaus $z \mapsto |z|^{\alpha-2}$ on integroituva jokaisella eksponentilla q väliltä $[1, \frac{2}{2-\alpha})$. Erityisesti $\sum_{|\nu|=k+2} |D^\nu u(z)| < \infty$, joten $u \in W^{k+2,q}_{\text{loc}}(\Omega)$. Lemman 5.7 nojalla saadaan lisäksi, että $u \in C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$. Siispä $u \in W^{k+2,q}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$. Väitteen optimaalisuutta varten tarkastellaan erään p-harmonisen funktion hodograafiesitystä. Valitsemalla rivin (5.2) sarjaesityksessä $n = 1, A_2 = 1, A_k = 0$ muuten, saadaan

$$H(\xi) = \left(\frac{\xi}{|\xi|} + \varepsilon_2 \frac{|\xi|^3}{\xi^3}\right)|\xi|^{\frac{1}{d}}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 + 3}, \lambda_2 = \frac{1}{d}. \tag{5.18}$$

Nyt $H = L \circ \rho$, missä $L(\xi) = \xi + \varepsilon_2 \frac{\bar{\xi}^2}{\xi}$ ja ρ on radiaalinen kvasikonformikuvaus $\rho(\xi) = |\xi|^{\frac{1}{d}-1}\xi$. Selvästi $L \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$. Lisäksi kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ pätee

$$(1 + 3\varepsilon_2)|z_1 - z_2| \le |L(z_1) - L(z_2)| \le (1 - 3\varepsilon_2)|z_1 - z_2|,$$

joten L on bi-Lipschitz kompleksitasolta itselleen. Erityisesti L on surjektio ja L on homeomorfismi kompleksitasolta itselleen. Funktion L kvasikonformisuuden toteamiseksi on löydettävä $k \in [0,1)$ siten, että $|L_{\bar{\xi}}| \leq k|L_\xi|$ eli yhtäpitävästi $2\varepsilon_2 \leq k|1-\varepsilon_2\frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2}|$. Käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla $|1-\varepsilon_2| \leq |1-\varepsilon_2\frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2}|$, joten riittää löytää $k \in [0,1)$ siten, että $2\varepsilon_2 \leq k(1-\varepsilon_2)$. Voidaan siis valita $k = \frac{2\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}$ ja L on kvasikonformikuvaus kompleksitasolta itselleen. Kaiken kaikkiaan Lauseen 3.48 nojalla H on koko tason kvasikonformikuvaus. Olkoon f funktion H käänteiskuvaus, jolloin f on p-harmonisen funktion $v \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ kompleksinen gradientti. Huomataan seuraavaksi, että f on homogeeninen funktio astetta d, sillä

$$f(tz) = f(tH(\xi)) = f(H(t^d\xi)) = t^d\xi = t^d f(z). \tag{5.19}$$

Homogeenisyydestä seuraa ketjusäännöllä, että $D^\nu f$ on homogeeninen astetta $d-|\nu|$. Erityisesti tiedon $d = k-1+\alpha$ saadaan

$$(D^\nu f)(tz) = t^\alpha D^\nu f(z), \quad \text{jos} \quad |\nu| = k-1 \tag{5.20}$$

ja

$$(D^\nu f)(tz) = t^{\alpha-2} D^\nu f(z), \quad \text{jos} \quad |\nu| = k+1. \tag{5.21}$$

Oletetaan vastoin väitettä, että $f \in W^{k+1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{C}) \cup C^{k-1-\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{C}), q = \frac{2}{2-\alpha}$. Jos $f \in W^{k+1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$, niin rivin (5.21) nojalla saadaan muuttujanvaihtoa apuna käyttäen

$$\int_{\mathbb{D}(0,r)} |D^\nu f(z)|^q \, dA = \int_{\mathbb{D}(0,tR)} |D^\nu f(z)|^q \, dA$$

mielivaltaisilla $t, R > 0$. Siispä $D^v f(z) \equiv 0$, jos $|\nu| = k+1$. Väitetään sitten, että $f \in C^{k-1-\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$. Tällöin rivin (5.20) ja avaruuden $C^{k-1-\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ määritelmän nojalla

$$D^\nu f(z) = \lim_{t\to 0} t^{-\alpha} D^\nu f(tz)$$

aina, kun $\nu \in \mathbb{N}^2$ siten, että $|\nu| = k-1$. Jos $\alpha \in (0,1)$, niin edellisen rivin raja-arvo suppenee selvästi nollaan. Jos $\alpha = 1$ huomataan, että voimme soveltaa Lausetta 3.20 ja saamme, että kaikilla $|\nu| = k-1$ pätee

$$D^\nu f(z) = \lim_{t\to 0} \frac{D^\nu f(tz)}{t} = z(D^\nu f(0))_z + \bar{z}(D^\nu f(0))_{\bar{z}}.$$

Myös tällöin $D^\nu f(z) \equiv 0$, jos $|\nu| = k+1$. Kaiken kaikkiaan oletuksesta $f \in$

$W^{k+1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}) \cup C^{k-1-\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ seuraa, että $D^\nu f(z) = 0$, jos $|\nu| = k+1$. Erityisesti f on polynomi muuttujien z ja $\bar{z}$ suhteen ja polynomissa on korkeintaan k-asteisia termejä. Tarkemmin f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} A_{mn} z^m \bar{z}^n, \qquad A_{mn} \in \mathbb{C}.$$

Toisaalta f on myös homogeeninen astetta d, joten se voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \sum_{m+n=d} A_{mn} z^m \bar{z}^n, \qquad A_{mn} \in \mathbb{C}.$$

Nyt, koska $\xi = f(z) = f(H(\xi))$, niin

$$\xi = \sum_{m+n=a} A_{mn} H(\xi)^m \overline{H(\xi)^n}. \tag{5.22}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että yhtälöä (5.22) toteuttavia kertoimia ei itse asiassa ole olemassa. Tarkastellaan kaavaa hodograafitason yksikkökiekon reunalla. Jos $\xi \in \partial\mathbb{D}$ niin yhtälön (5.18) avulla saadaan, että

$$H(\xi) = \xi + \varepsilon\xi^{-3} \qquad \text{ja} \qquad \overline{H(\xi)} = \xi^{-1} + \varepsilon\xi^3.$$

Siispä

$$\xi = \sum_{m+n=a} A_{mn} (\xi + \varepsilon\xi^{-3})^m (\xi^{-1} + \varepsilon\xi^3)^n, \tag{5.23}$$

kaikilla $\xi \in \partial\mathbb{D}$. Tarkastellaan funktiota

$$g(\xi) = \sum_{m+n=a} A_{mn} (\xi + \varepsilon\xi^{-3})^m (\xi^{-1} + \varepsilon\xi^3)^n. \tag{5.24}$$

Funktion g nollakohdat ovat poistuvia erikoispisteitä, joten g voidaan jatkaa analyyttisesti joukkoon $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Erityisesti yhtälö (5.17) pätee kaikilla $\xi \neq 0$. Yhtälöön voidaan siis sijoittaa funktion g nollakohdat. Sijoittamalla $\xi = \sqrt[4]{-\varepsilon}$ saadaan, että

$$\sqrt[4]{-\varepsilon} = A_{0a}(\xi^{-\frac{1}{4}} + \varepsilon\xi^{\frac{3}{4}})^a.$$

Yhtäpitävästi

$$(\sqrt[4]{-\varepsilon})^{a+1} = A_{0a}(1-\varepsilon^2)^a. \tag{5.25}$$

Nyt, koska $\xi \neq 0$, niin yhtälö (5.25) on voimassa jos ja vain jos $a + 4 \equiv 0 \pmod 4$. Vastaava lasku pisteessä $\xi = \sqrt[4]{-\varepsilon^{-1}}$ osoittaa, että

$$(\sqrt[4]{-\varepsilon_2^{-1}})^{3a+1} = A_{a0}(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^{-1})^a.$$

Tämä on ristiriita, sillä $(a+1) + (3a+1) \equiv 2 \pmod 4$.

$\square$

Huomautus 5.9. Lemmaa 5.7 tarvitaan, vrt. Seuraus 3.12.

Huomautus 5.10. Tasossa gradientin Hölder-jatkuvuuden eksponenttia voidaan kontrolloida, kun taas yleisessä dimensiossa eksponentille ei tunneta alarajaa. Toisen kertaluvun derivaattojen olemassaolo tunnetaan yleiselle p-harmoniselle funktiolle, jos $p \in (1,2) \cup (2, 3 + \frac{2}{d-2}), d > 2$ [MW].

Seuraus 5.11 *Olkoon u p-harmoninen alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Jos $p \in (2, \infty)$, niin*

$$u \in C^{1,\alpha(p)}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap W^{3,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

missä

$$\alpha(p) = \frac{2}{\sqrt{p^2 + 12(p-1)} - p} > \frac{1}{3}.$$

Edelleen, jos $p \in (1,2)$, niin $u \in C^{2,\beta(p)}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap W^{3,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, missä $\beta(p) > 0$.

Huomataan edelleen, että Seurauksen 5.11 Hölder-jatkuvuuden eksponentti gradientille on suurempi kuin Seurauksen 4.11 antama. Seuraus 5.11 antaa toisaalta aiheen kysyä mitä ratkaisujen säännöllisyydelle tapahtuu, kun $p \to \infty$. Osoittautuu, että niin kutsutuille ∞-harmonisille funktioille ei ole olemassa divergenssimuotoista heikkoa karakterisointia kuten p-harmonisille funktioille. Osittaisintegroimalla testifunktion ja operaattorin Δ_∞ tuloa ei päästä divergenssimuotoiseen yhtälöön. Jos $u \in C^2$ ja $\nabla u \neq 0$, niin formaalisti päädytään osittaisdifferentiaaliyhtälöön $\Delta_\infty = 0$. Rajayhtälön $\Delta_\infty u = 0$ heikkojen ratkaisujen karakterisointi voidaan sen sijaan tehdä esimerkiksi niin kutsutun viskositeettiteorian avulla. Sanotaan, että jatkuva funktio u on ∞-harmoninen alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, jos kaikilla $x_0 \in \Omega$ seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa:

(i) $\Delta_\infty v(x_0) \leq 0$ kaikilla sellaisilla $v \in C^2(\Omega)$, joille $u > v$ joukossa $\Omega \setminus \{x_0\}$ ja joille $v(x_0) = u(x_0)$,

(ii) $\Delta_\infty v(x_0) \geq 0$ kaikilla sellaisilla $v \in C^2(\Omega)$, joille $u < v$ joukossa $\Omega \setminus \{x_0\}$ ja joille $v(x_0) = u(x_0)$.

Seurauksen 5.11 nojalla voitaisiin otaksua, että tason ∞-harmoniset funktiot kuuluisivat luokkaan $C^{1,\frac{1}{3}}_{\text{loc}}(\Omega)$. Päätelmiä yleisestä säännöllisyydestä ei kuitenkaan voida tehdä. On osoitettu, että tason ∞-harmonisen funktion gradientti on Hölder-jatkuva jollain eksponentilla $\alpha > 0$ [ES], kun taas korkeammissa ulottuvuuksissa säännöllisyyskysymys on avoin. Tarkastellaan epätriviaalia tason ∞-harmonista funktiota, jolle $C^{1,\frac{1}{3}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \cap W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ kaikilla $p < \frac{3}{2}$, mutta jolle $u \notin W^{3,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Esimerkki 5.12. Olkoon $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{4}{3}} - |x_2|^{\frac{4}{3}}.$$

Selvästi $u \in C(\mathbb{R}^2)$. Lisäksi jos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$, niin huomataan, että $\Delta_\infty u(x_1, x_2) = 0$. Olkoot $(x_1, x_2) = (t, 0), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sellainen, että $v > u$ joukossa $\mathbb{R}^2$. Tällöin saamme arvion

$$\begin{aligned}\Delta_\infty v(t,0) = v_{x_1}^2(t,0) \cdot v_{x_1x_1}(t,0) = \frac{16}{9}\frac{t^2}{|t|^{\frac{4}{3}}} \cdot v_{x_1x_1}(t,0) &\geq \frac{16}{9}\frac{t^2}{|t|^{\frac{4}{3}}} u_{x_1x_1}(t,0) \\ &= \frac{16}{9}\frac{t^2}{|t|^{\frac{2}{3}}}\frac{4t^2}{|t|^{\frac{8}{3}}} > 0.\end{aligned}$$

Olkoon sitten $(x_1, x_2) = (0, t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Koska $v(0, t) > u(0, t)$ ja $v(x_1, 1) > u(x_1, 1)$, niin

$$|x_1|^{4/3} = u(x_1, t) - u(0, t) \leq v(x_1, t) - v(0, t).$$

Taylorin kaavan avulla saadaan approksimaatio

$$v(x_1, t) - v(0, t) = v_{x_1}(0, t)x_1 + \frac{1}{2} v_{x_1x_1}(0, t){x_1}^2 + o(|x_1|^2).$$

Koska $v_{x_1}(0, t) = 0$, niin

$$|x_1|^{\frac{4}{3}} \leq \frac{1}{2} v_{x_1x_1}(0, t){x_1}^2 + o(|x_1|^2).$$

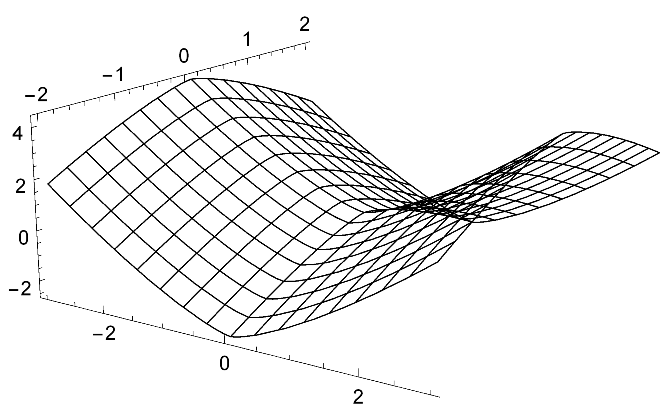
Tämä epäyhtälö ei päde kaikilla $x_1 \in \mathbb{R}$, joten pisteessä $(0,t)$ tarkistettavaa testifunktiota ei ole olemassa. Siispä u toteuttaa ehdon i). Vastaavalla laskulla nähdään, että u toteuttaa ehdon ii). On selvää, että $u \in C^{1,\frac{1}{3}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Todetaan vielä, että $W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ kaikilla $p < \frac{3}{2}$. Huomataan, että $D^{(2,0)}u(x) = \frac{4}{9}x_1^2|x_1|^{-\frac{8}{3}}$. Nyt

$$\frac{4}{9}\int_0^1 |x_1^2|x_1|^{-\frac{8}{3}}|^p \, dx < \infty$$

jos ja vain jos $-\frac{2}{3} \cdot p > -1$. Toisin sanoen, jos $p < \frac{3}{2}$. Vastaavasti $D^{(0,2)}u(x) \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ aina, kun $p < \frac{3}{2}$.

Edellisen esimerkin funktiolle $u \notin W^{3,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Huomataan myös, että u ei ole sileä diskreetin joukon ulkopuolella kuten p-harmoniset funktiot, kun $p < \infty$. Edellinen

Kuva 5: Funktio $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{4}{3}} - |x_2|^{\frac{4}{3}}$ pisteestä $(2, -3, 1)$ katsottuna. Huomaa testifunktioiden 'olemassaolo' koordinaattiakseleilla.



esimerkki yleistyy myös avaruuteen $\mathbb{R}^d$. Funktio

$$u(x) = a_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + a_2|x_2|^{\frac{4}{3}} + \ldots + a_d|x_d|^{\frac{4}{3}}$$

on ∞-harmoninen avaruudessa $\mathbb{R}^d$ aina, kun

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_d^3 = 0.$$

Näin ollen $C^{1,\frac{1}{3}}$-säännöllisyys on parasta mitä missään dimensiossa voidaan otaksua ∞-harmonisille funktioille. Tasoa korkeammissa ulottuvuuksissa myös C^1-säännöllisyys on avoin kysymys. Edellisessä esimerkissä tarkasteltu funktio oli koko tasossa määritelty ∞-harmoninen funktio. Koko avaruuden rajoitetut p-harmoniset C^2-funktiot ovat vakiofunktioita, mikä seuraa p-harmonisten funktioiden Harnackin epäyhtälöstä. Koko tason ∞-harmoniset C^2-funktiot ovat myös melko triviaaleja; nimittäin artikkelissa [Ar1] näytetään, että jos $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ on $\infty-$harmoninen, niin u on lineaarikuvaus. On osoitettu, että mikäli kaksi tason p-harmonista funktiota yhtyy avoimessa joukossa niin funktiot ovat samat. Tämä ominaisuus ei periydy ∞-harmonisille funktioille. Tarkalleen ottaen tämä johtuu siitä, että ∞-harmonisia ratkaisuja voidaan 'liimata' yhteen.

Kuva 6: Kaksi eri ∞-harmonista funktiota alueessa $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$ pisteestä $(0, -3, \frac{3}{2})$ katsottuna.

Mainittakoon vielä, että kaksi kertaa jatkuvasti differentioituvan ei-vakion tason ∞-harmonisen funktion gradientti ei voi hävitä. Riittävä ehto sille, että p-harmonisen funktion gradientti ei häviä on olettaa, että funktio on reaalianalyyttinen. Pelkkä oletus minkään kertaluvun jatkuvista derivaatoista ei tasossa riitä, sillä Lauseen 5.8 todistuksesta seuraa, että löytyy ei-vakio kvasiradiaalinen p-harmoninen funktio $u \in C^k(\mathbb{R}^2)$ kaikilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ siten, että funktiolla u on kriittinen piste origossa.

Viitteet

[A] L. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal Mappings.* University Lecture Series. American Mathematical Society, 2006.

[AIM] K. Astala, T. Iwaniec, and G. Martin. *Elliptic Partial Diffential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane.* Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 2008.

[AL] Á. Arroyo and J. Llorente. On the asymptotic mean value property for planar p-harmonic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144:3859–3868, 2016.

[Ar1] G. Aronsson. On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. *Arkiv för Matematik*, 7:395–425, 1968.

[Ar2] G. Aronsson. On certain singular solutions of the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. *Manuscripta Mathematica*, 47:133–151, 1984.

[Ar3] G. Aronsson. Construction of singular solutions to the p-harmonic equation and its limit equation for $p = \infty$. *Manuscripta Mathematica*, 56:135–158, 1986.

[Ar4] G. Aronsson. Representation of a p-harmonic function near a critical point in the plane. *Manuscripta Mathematica*, 66:73–95, 1989.

[Ar5] G. Aronsson. Aspects of p-harmonic functions in the plane. *Lecture Notes from the Finnish Summer School in Potential Theory 1990, Editor I. Laine*, pages 9–34, 1992.

[ArLi] G. Aronsson and P. Lindqvist. On p-harmonic functions in the plane and their stream functions. *Journal of Differential Equations*, 74:157–178, 1988.

[Be] L. Bers. *Theory of Pseudo-Analytic Functions.* New York University Institute for Mathematics and Mechanics, 1953.

[BI] B. Bojarski and T. Iwaniec. p-harmonic equation and quasiregular mappings. *Banach Center Publications*, 19:25–38, 1987.

[Du] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2000.

[E1] L. Evans. A new proof of local $C^{1,\alpha}$-regularity for solutions of certain degenerate elliptic p.d.e. *Journal of Differential Equations*, 45:356–373, 1982.

[E2] L. Evans. *Partial Differential Equations: Second Edition*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.

[EG] L. Evans and R. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1992.

[ES] L. Evans and O. Savin. $C^{1,\alpha}$ regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 32:325–347, 2008.

[Ga] D. Garling. *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*. 2007.

[GT] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer, 2001.

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2006.

[Hu] J. H. Hubbard. *Teichmüller Theory And Applications To Geometry, Topology, And Dynamics. Volume 1: Teichmüller Theory*. Matrix Press, 2006.

[IM] T. Iwaniec and J. Manfredi. Regularity of p-harmonic functions on the plane. *Revista Matemática Iberoamericana*, 5:1–19, 1989.

[Ja] U. Janfalk. Representation of a p-harmonic function near an isolated singularity in the plane. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica*, 17:181–197, 1992.

[K] P. Koskela. Lectures on quasiconformal and quasisymmetric mappings. `http://urn.fi/URN:NBN:fi:jyu-201510283521`, 2009.

[Ki] T. Kilpeläinen. *Sobolev-avaruudet, luentomoniste*. 2006.

[L] O. Lehto. *Funktioteoria I-II*. Limes ry, 1982.

[Le1] J. Lewis. Capacitary functions in convex rings. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 66:201–224, 1977.

[Le2] J. Lewis. Smoothness of certain degenerate elliptic equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 80:259–265, 1980.

[Li1] P. Lindqvist. Notes on the Infinity-Laplace Equation. http://arxiv.org/abs/1411.1278, 2015.

[Li2] P. Lindqvist. Notes on the p-Laplace equation. http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-7120-5, 2017.

[LV] O. Lehto and K. Virtanen. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Springer, second edition, 1973.

[MW] J. Manfredi and A. Weitsman. On the fatou theorem for p-harmonic function. *Communications in Partial Differential Equations*, 13:651–668, 1988.

[P] B. Palka. *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer, 1991.

[Pe] L. Persson. *Quasi-radial Solutions of the p-Laplace Equation in the Plane and Their Stream Functions*. A Survey, Licentiate thesis, Luleå, 1989.

[R] H. Renelt. *Elliptic Systems and Quasiconformal Mappings*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 1988.

[V1] J. Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2012.

[V2] J. Väisälä. *Topologia II*. Limes ry, 2005.

[W] C. Wang. *An Introduction of Infinity Harmonic Functions*. 2008.

[Z] W. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Graduate Texts in Mathematics 120. Springer-Verlag, 1989.