

# Matemaattista biljardia ja geometriaa

Noora Hovinmäki

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kevät 2020

**Tiivistelmä:** Noora Hovinmäki, *Matemaattista biljardia ja geometriaa* (engl. *Mathematical Billiards and Geometry*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 58s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2020.

Tämän tutkielman tarkoituksena on avata matemaattisen tasobiljardin keskeisiä tuloksia geometrian keinoin. Lisäksi tavoitteena on muodostaa lukioikäisille suunnattu biljardigeometriaan liittyvä tehtäväkokonaisuus, jonka avulla opiskelijat pääsisivät tutustumaan matemaattiseen biljardiin. Tutkielmassa keskitytään pääasiassa ympyrä- ja ellipsibiljardiin ja tutustutaan hieman myös monikulmiobiljardiin neliö- ja kolmiobiljardin muodossa.

Tutkielmassa käydään ensin läpi konveksin, suljetun ja rajoitetun tasoalueen yleinen tasobiljardikuvaus, josta johdetaan myöhemmin ympyräbiljardikuvaus. Ympyräbiljardissa huomataan, että kiertokulmaa vastaavan kaaren pituus  $\theta$  määrää suoraan sen, onko ratakäyrä jaksollinen vai ei. Lisäksi havaitaan, että ympyräbiljardissa rata kulkee aina joko edestakaisin ympyrän keskipisteen kautta tai kiertäen keskipistettä sellaisia ratasegmenttejä pitkin, jotka sivuavat sisempää samakeskistä ympyrää. Tätä ratakäyrien sivuamaa ympyrää kutsutaan ympyräbiljardin kaustiseksi käyräksi.

Ympyräbiljardin jälkeen siirrytään neliöbiljardiin, missä huomataan olevan varsin paljon samankaltaisuutta ympyräbiljardin kanssa. Neliöbiljardissa biljardipallon lähtökulman  $\alpha$  avulla pystytään määrittämään täysin se, onko biljardirata neliöllä jaksollinen vai ei. Neliön jaksottomien ratakäyrien yhteydessä tutustutaan myös kvasijaksollisuuden käsitteeseen.

Kolmiobiljardia tutkittaessa huomataan, että ratakäyrän käyttäytyminen vaihtelee melko suuresti sen mukaan, onko biljardipöytä teräväkulmaisen, suorakulmaisen vai tylppäkulmaisen kolmion muotoinen. Teräväkulmaisten kolmioiden tapauksessa löydetään aina 3-jaksollinen Fagnanon ratakäyrä. Suorakulmaisilla kolmioilla taas voidaan muodostaa minkä tahansa kolmion sisäpisteen kautta jaksollinen ratakäyrä. Sen sijaan tylppäkulmaisten kolmioiden tapauksissa ei edes tiedetä, onko jokaisella kolmiolla jaksollista biljardirataa. Kolmion jaksollisten ratakäyrien yhteydessä perehdytään myös muun muassa kohtisuoriin ratakäyriin, S-ratakäyriin ja peiliratakäyriin.

Viimeisenä biljardia tarkastellaan elliptisellä biljardipöydällä, missä ratakäyrän muotoon näyttää vaikuttavan suuresti se, kulkeeko biljardirata ellipsin polttopisteiden kautta, niiden välistä vai niiden ulkopuolelta. Polttopisteiden kautta kulkeva ratakäyrä suppenee kohti isoakselia, kun taas polttopisteiden välistä tai niiden ulkopuolelta kulkeville radoille muodostuu hyperbelin tai ellipsin muotoinen kaustinen käyrä. Lisäksi Ponceletin lauseen sisältö osoittautuu varsin hyödylliseksi ellipsin jaksollisia ratakäyriä etsittäessä.

Tutkielman loppuun on koottu lukioikäisille suunnattu tehtäväkokonaisuus biljardigeometriasta malliratkaisuineen ja se sisältää vaihtelevasti laskemista, väitteiden todeksi osoittamista ja asioiden tutkimista GeoGebran avulla.

## Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Yleinen tasobiljardikuvaus	3
1. Esitietoja ja merkintöjä	3
2. Yleinen tasobiljardikuvaus sileälle ja konveksille käyrälle	5
Luku 2. Biljardia ympyrällä	8
1. Ympyrän kehän ja reaali­välin yhteys	8
2. Biljardiratakäyrät ympyrällä	10
Luku 3. Biljardia monikulmioilla	23
1. Biljardiratakäyrät neliöllä	24
2. Biljardiratakäyrät kolmioilla	28
Luku 4. Biljardia ellipsillä	35
1. Polttopisteen kautta kulkevat biljardiratakäyrät	36
2. Polttopisteiden välistä kulkevat biljardiratakäyrät	40
3. Polttovälin ulkopuolelta kulkevat biljardiratakäyrät	44
Luku 5. Tehtäviä biljardigeometriasta	48
1. Apuvälineitä tehtävien ratkaisemiseen	49
2. Tehtävät	50
3. Malliratkaisut	53
Lähteet	58

## Johdanto

Matemaattinen biljardi koostuu tasomaisesta suljetusta alueesta eli biljardipöydästä ja pistemäisestä massakappaleesta, eli biljardipallosta. Matemaattinen biljardipöytä ei sisällä tavalliselle biljardipöydälle ominaisia pusseja, joihin pallo voisi pudota. [9] Sen sijaan matemaattisessa biljardissa biljardipallon halutaan jatkavan kulkuaan ikuisesti. Jos kuitenkin halutaan tutkia, millaisella kulkureitillä biljardipallo saataisiin osumaan tiettyssä biljardipöydän kohdassa olevaan pussiin, laitetaan tämä pussin paikka matemaattisella biljardipöydällä ratakäyrän halutuksi päätepisteeksi ja tutkitaan sen jälkeen mahdollisia ratakäyrän kulkureittejä.

Pistemäinen massakappale liikkuu matemaattisella biljardipöydällä vapaasti, eli kitkatta, suoraan eteenpäin annetulla nopeudella, kunnes se törmää pöydän reunaan. Pöydän reunasta kappale kimpoaa täysin kimmoisasti ja heijastuslain mukaisesti: tällöin reunaa kohti tulevan radan ja pöydän reunakäyrän törmäyspisteeseen piirretyn tangentin välinen kulma on yhtä suuri kuin reunasta pois päin kimmonneen radan ja tangentin välinen kulma. Törmäyksessä kappaleen liikkeen suunta muuttuu, mutta kappaleen vauhti säilyy samana. Törmäyksen jälkeen kappale jatkaa suoraa kulkuaan, kunnes törmää uudelleen biljardipöydän reunaan ja sama menettely toistuu. Näin jatkamalla biljardipöydälle muodostuu suorista ratasegmenteistä koostuva biljardiratakäyrä. [9]

Jos biljardipöydän reunakäyrällä ei kuitenkaan ole törmäyspisteessä yksikäsitteistä tangenttia, pallon oletetaan pysähtyvän tähän pisteeseen. Näin ollen biljardipallon heijastusta biljardipöydän kulmista ei ole määriteltä ja siksi matemaattisella biljardipöydällä pallon osuminen pöydän kulmaan pysäyttää pallon liikkeen.

Ensimmäisen julkaisun [6] matemaattiseen biljardiin liittyen teki L. J. Lennes vuonna 1905. Matemaattisen biljardin avulla voidaan havainnollistaa muun muassa säännönmukaisen, jaksollisen ja kaoottisen systeemin dynamiikkaa. Nykyään biljardi on hyvin suosittu aihealue matematiikassa, sillä biljardiin liittyvällä käyttäytymisellä on monia sovellutuksia biologian, matematiikan, lääketieteen ja fysiikan parissa. [9]

Tässä tutkielmassa tarkastellaan biljardigeometriian alkeita. Tutkielman tavoitteena on avata lukijalle matemaattisen biljardin keskeisiä ominaisuuksia ja tuloksia yksinkertaisen geometrian avulla. Lisäksi tutkielman toisena tavoitteena on luoda matemaattiseen biljardiin liittyvä tehtäväkokonaisuus, jonka avulla lukioikäiset opiskelijat voisivat päästä tutustumaan matemaattiseen biljardiin heille tutuin geometrian keinoin.

Matemaattista biljardia on tutkittu monenmuotoisilla biljardipöydillä ja jopa useammassa ulottuvuudessa, mutta tässä tutkielmassa keskitytään tasobiljardiin pääasiassa ympyrän ja ellipsin muotoisilla biljardipöydillä. Lisäksi tutkielmassa tarkastellaan hieman monikulmiobiljardia kolmio- ja neliöbiljardin muodossa. Tutkielman lukijalle

oletetaan olevan tuttuja geometrian perustulokset ja laskusäännöt. Lisäksi lineaarialgebrasta oletetaan tunnetuksi erityisesti vektorit, vektoreiden sisätulo ja vektoriprojektio.

Ensimmäisessä luvussa määritellään yleinen tasobiljardikuvaus sileälle konveksille käyrälle. Toisen luvun alussa osoitetaan ensin ympyrän kehän ja reaaliavaruuden samaisuus, jonka jälkeen määritellään ympyrälle biljardikuvaus johtamalla se aiemmin määritetystä yleisestä tasobiljardikuvauksesta. Luvussa tutkitaan myös biljardiradan jaksollisuuteen vaikuttavia tekijöitä, heijastuspisteiden tasajakautuneisuutta ympyrän kehällä sekä ympyrän kaustista käyrää. Luvun lopuksi tarkastellaan vielä erikseen 2-jaksollisia ratakäyriä.

Kolmas luku käsittelee monikulmiobiljardia ja luvun alussa esitellään monikulmiobiljardissa erityisen hyödyllinen työkalu, aukitaittelumetodi. Tämän jälkeen luvussa keskitytään neliöbiljardiin ja erityisesti jaksollisiin ratakäyriin. Neliöbiljardissa huomataan suuria yhtäläisyyksiä ympyräbiljardin kanssa, jonka myötä monet ympyräbiljardin tulokset saadaan pätemään myös neliöbiljardissa. Neliöbiljardin yhteydessä perehdytään myös kvasijaksollisiin ratakäyriin. Seuraavaksi luvussa siirrytään tarkastelemaan kolmiobiljardia ja sen jaksollisia ratakäyriä. Kolmiobiljardin tulokset eroavat selkeästi toisistaan teräväkulmaisen, tylppäkulmaisen ja suorakulmaisen kolmion osalta. Kolmiobiljardin yhteydessä perehdytään tarkemmin kohtisuoriin ratakäyriin, S-ratakäyriin ja peiliratakäyriin ja niiden avulla löydettäviin jaksollisiin biljardiratoihin. Luvussa on esitetty vain osa tunnetuista kolmiobiljardiin liittyvistä tuloksista.

Neljännessä luvussa päästään tarkastelemaan ellipsibiljardia ja luvussa huomataan, että ratakäyrän kulkureittiin vaikuttaa oleellisesti se, kulkeeko biljardirata ellipsin polttopisteiden kautta, niiden välistä vai niiden ulkopuolelta. Lisäksi ellipsin polttopisteiden kautta kulkevien ratakäyrien huomataan suppenevan kohti isoakselia, kun taas polttopisteiden välistä ja niiden ulkopuolelta kulkevat ratakäyrät sivuavat ellipsin kaustista käyrää (hyperbeli tai ellipsi). Luvun lopussa tarkastellaan vielä ellipsin jaksollisia ratakäyriä ja Ponceletin lauseen merkitystä elliptiselle biljardille.

Tutkielman lopussa viidennessä luvussa on koottu biljardigeometriaan liittyvä tehtäväpaketti mallivastauksineen. Luvun alkupuolella on lyhyt Apuvälineitä tehtävien ratkaisemiseen -osio, jossa esitellään aukitaittelumetodi ja opastetaan, kuinka jaksollisia ratakäyriä voidaan löytää suorakulmioilta. Tehtäväpaketin tehtävät jakautuvat monikulmiobiljardiin ja ympyrä- ja ellipsibiljardiin. Tehtävät sisältävät laskemista, asioiden todeksi osoittamista ja tutkimista GeoGebran avulla.

Tutkielman päälähteenä toimivat U. A. Rozikovin teos *An Introduction to Mathematical Billiards* [9] ja S. Tabachnikovin teos *Geometry and Billiards* [12]. Lisäksi neljännessä luvussa lähteenä on käytetty S. W. Parkin tutkimusartikkelia *An introduction to dynamical billiards* [8]. Tässä tutkielmassa monikulmiobiljardia tarkastellaan melko suppeasti, mutta monikulmiobiljardin jaksollisista radoista löytyy lisää tietoa muun muassa seuraavista lähteistä [9], [2], [11].

## Yleinen tasobiljardikuvaus

Aloitetaan biljardigeometriaan perehtyminen tutkimalla biljardin käyttäytymistä yleisellä tasobiljardipöydällä. Tällä tavalla saadaan käsitys siitä, miten biljardipallo ylipäätään liikkuu biljardipöydällä, ja miten tällaista liikettä voidaan matemaattisesti mallintaa. Ennen biljardiin keskittymistä esitellään kuitenkin muutamia tutkielmassa käytettäviä merkintöjä ja keskeisiä määritelmiä.

### 1. Esitietoja ja merkintöjä

Tutkielmassa lukijan oletetaan tuntevan lineaarialgebrasta erityisesti vektorit, normin ja sisätulon sekä vektorin projektion. Lisäksi lukijan oletetaan tuntevan Geometria-kurssin sisältö [5] ja algebrasta erityisesti tekijäluokat ja niiden laskutoimitukset. Käydään tässä kuitenkin läpi muutamia perusmääritelmiä ja merkintöjä pääasiassa geometriaan ja joukko-oppiin liittyen.

Tässä tutkielmassa geometrinen kuvioiden kärkipisteitä ja keskipisteitä merkitään isoilla kirjaimilla  $A, B, C, \dots$  kun taas biljardipallon törmäyspisteitä merkitään pääasiassa pienillä kirjaimilla  $x_0, x_1, x_2, \dots$  ja  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Lukumäärää ilmaistaan merkinnällä  $\#$ . Huomaa, että kulmamerkinnot  $\alpha, \beta, \varphi, \dots$  saattavat erota toisistaan tutkielman eri luvuissa. Sen sijaan jokaisen luvun sisällä merkinnät pysyvät yhtäläisinä koko luvun ajan.

Kuten geometriassa yleensäkin, kolmiota, jonka kärkipisteinä ovat pisteet  $A, B$  ja  $C$ , merkitään  $\triangle ABC$ . Vastaavasti kolmion  $\triangle ABC$  kulmaa, jonka kärkipisteinä on piste  $A$ , merkitään  $\angle A = \angle BAC$ . Oletetaan lisäksi, että  $\angle BAC = \angle CAB (< 180^\circ)$ . Lisäksi otetaan käyttöön välissäoloa ja eri puolilla suoraa -oloa varten seuraavat merkinnät:

**MÄÄRITELMÄ 1.1.** Olkoon  $A, B$  ja  $C$  kolme eri pistettä samalla suoralla. Jos  $A * B * C$ , niin piste  $B$  on pisteiden  $A$  ja  $C$  välissä. Lisäksi tällöin pätee myös  $C * B * A$ .

**MÄÄRITELMÄ 1.2.** Olkoon  $t$  suora ja  $C$  ja  $D$  pisteitä siten, että  $C, D \notin t$ . Pisteet  $C$  ja  $D$  ovat eri puolilla suoraa  $t$ , jos suora  $t$  leikkaa janaa  $CD$ . Tällöin merkitään  $CtD$  tai  $DtC$ .

Kolmion yhtenevyyslauseiden ja yhdenmuotoisuuslauseen lisäksi todistuksissa tullaan käyttämään muun muassa seuraavia lauseita:

**LAUSE 1.3.** (Käänteinen vuorokulmalause) *Olkoot  $l$  ja  $m$  yhdensuuntaisia suoria ja  $t$  suora, joka leikkaa suoraa  $l$  pisteessä  $A$  ja suoraa  $m$  pisteessä  $B$ . Olkoon lisäksi suoralla  $l$  piste  $C$  ja suoralla  $m$  piste  $D$  siten, että  $CtD$ . Tällöin  $\angle DBA \cong \angle CAB$ .*

**LAUSE 1.4.** *Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio. Tällöin  $BC < AB$  jos ja vain jos  $\angle A < \angle C$ .*

LAUSE 1.5. (Ulkokulmaepäyhtälö) *Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio ja  $B * C * D$ . Tällöin  $\angle B < \angle ACD$ .*

Biljardigeometriassa keskeisessä osassa ovat myös biljardipöydän reunakäyrän tangentit. Geometrisesti ne voidaan määrittellä seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.6. Käyrän tangenteja ovat ne suorat, jotka sivuavat käyrää yhdessä pisteessä ja pysyvät muuten käyrän samalla puolella.

Käydään lisäksi läpi joukkoihin ja raja-arvoon liittyviä merkintöjä:

MÄÄRITELMÄ 1.7. Joukko  $A \subset \mathbb{R}^2$  on *konvekssi*, jos jokainen joukon  $A$  alkioiden välinen jana sisältyy kokonaan joukkoon  $A$ .

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon  $\epsilon > 0$ . Joukon  $A \subset \mathbb{R}^2$  reuna  $\partial A$  on niiden pisteiden  $x \in \mathbb{R}^2$  joukko, joille löytyy pisteet  $y \in A$  ja  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$  siten, että

$$|x - y| < \epsilon \text{ ja } |x - z| < \epsilon.$$

Toisin sanoen jokaisen joukon  $A$  reunapisteen läheltä löytyy aina piste, joka kuuluu joukkoon  $A$  ja piste, joka ei kuulu joukkoon  $A$ .

MÄÄRITELMÄ 1.9. Joukko  $A \subset \mathbb{R}^2$  on *suljettu*, jos jokainen joukon  $A$  reunapiste kuuluu joukkoon  $A$ .

MÄÄRITELMÄ 1.10. Joukko  $A \subset \mathbb{R}^2$  on *rajoitettu*, jos

$$d(A) = \sup\{|x - y|; x, y \in A\} < \infty.$$

MÄÄRITELMÄ 1.11. Olkoon  $\epsilon > 0$  ja  $A \subset X \subset \mathbb{R}^2$ . Joukko  $A$  on *tiheä*  $X$ :ssä, jos kaikille  $x \in X$  löytyy  $a \in A$  siten, että  $d(x, a) = |x - a| < \epsilon$ .

Pienimmän ylärajan eli *supremumin* ja suurimman alarajan eli *infimumin* avulla lukujonolle voidaan määrittää ylä- ja alaraja-arvot:

MÄÄRITELMÄ 1.12. Olkoon  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lukujono, jolle  $M_p = \sup_{n \geq p} x_n$  on pienin yläraja niille lukujonon alkioille, joiden indeksi on suurempaa tai yhtäsuurta kuin  $p$  ja vastaavasti  $m_p = \inf_{n \geq p} x_n$ . Antamalla  $p \rightarrow \infty$  saadaan lukujonon  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *yläraja-arvo*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

ja *alaraja-arvo*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Lukujonon ylä- ja alaraja-arvot voivat olla äärellisiä lukuja tai ne voivat saada arvokseen  $\infty$  (hajaantuu äärettömyyteen) tai  $-\infty$  (hajaantuu negatiiviseen äärettömyyteen).

HUOMAUTUS 1.13. Lukujonolla  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on *raja-arvo*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

jos ja vain jos sen yläraja-arvo ja alaraja-arvo ovat yhtä suuret.

**MÄÄRITELMÄ 1.14.** Lukujono  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *suppenee* kohti reaalilukua  $a$ , jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on olemassa luku  $N \in \mathbb{N}$  siten, että

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ kaikille } n \geq N.$$

Tällöin sanotaan, että  $a$  on lukujonon  $(x_n)$  *raja-arvo* ja merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

**HUOMAUTUS 1.15.** Jos jono  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ei suppene kohti mitään reaalilukua  $a$ , sanotaan, että lukujono *hajaantuu*.

## 2. Yleinen tasobiljardikuvaus sileälle ja konveksille käyrälle

Jotta biljardia voidaan tarkastella matemaattisesti, täytyy biljardipallon rata biljardipöydällä pystyä kuvaamaan jonkinlaisella matemaattisella kuvauksella. Matemaattisessa biljardissa pallo lyödään lähtöpisteestä  $x_0$  tiettyyn suuntaan, jonka jälkeen biljardipallo liikkuu kitkattomalla biljardipöydällä tasaisella nopeudella  $v_0$  suoraan eteenpäin, kunnes törmää pöydän reunaan pisteessä  $x_1$ . Reunasta biljardipallo kimpoaa fysikaalisia lainalaisuuksia noudattaen tiettyyn suuntaan. Tätä fysikaalista lainalaisuutta kutsutaan *Heijastuslaiksi*.

**MÄÄRITELMÄ 1.16.** (Heijastuslaki) Reunaa kohti tulevan radan ja pöydän reunakäyrän törmäyspisteeseen piirretyn tangentin välinen kulma on yhtä suuri kuin reunasta pois päin kimmonneen radan ja tangentin välinen kulma.

Niinpä reunan pisteestä  $x_1$  kimmottuaan pallo jatkaa matkaa uudella nopeudella  $v_1$  heijastuslain määräämään suuntaan, kunnes törmää uudelleen pöydän reunaan pisteessä  $x_2$  ja sama menettely toistuu. Koska nopeuden suuruus säilyy täysin kimmotuksissa törmäyksissä, huomataan, että törmäyksestä seurannut pallon nopeuden muutos johtuu ainoastaan suunnan muuttumisesta.

Näin ollen biljardipallon rata biljardipöydällä koostuu heijastuspisteistä  $x_i$  ja peräkkäisten heijastuspisteiden välisistä janoista. Toisaalta heijastuspisteiden väliset janat määräytyvät täysin janan päätepisteistä, joten biljardiradan tarkastelu voidaan palauttaa radan heijastuspisteiden tarkasteluun. Riittää siis löytää kuvaus, joka kuvaa radan heijastuspisteen seuraavaksi heijastuspisteeksi.

Olkoon biljardipöytä  $D \subset \mathbb{R}^2$  konvekksi, suljettu ja rajoitettu ja olkoon reuna  $\partial D$  pituuden suhteen parametrisoitu polku  $\gamma: [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Oletetaan lisäksi, että käyrä  $\gamma$  on  $C^\infty$ -sileä ja olkoon tangenttivektorin pituus  $\|\gamma'(t)\| = 1$  kaikilla  $t \in [0, l(\gamma)]$ .

Koska törmäyksessä biljardipallon nopeuden muutos johtuu ainoastaan suunnan muuttumisesta, heijastuspisteessä käyrän  $\gamma$  normaalin suuntainen nopeuden komponentti muuttuu vastakkaisuuntaiseksi ja tangentin suuntainen komponentti säilyy vakiona. Olkoon joukko  $S^1 = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2 : \hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1\}$ . Määritellään joukot

$$\mathcal{M} = \{(x, v) : x \in \partial D, v \in S^1\},$$

missä  $v$  on biljardipöydän reunan pisteestä  $x$  lähtevä nopeusvektori, ja

$$M = \{(x, v) \in \mathcal{M} : v \cdot n_1(x) > 0\},$$



missä  $n_1(x)$  on biljardipöydän reunan sisäänpäin osoittava yksikkönormaalivektori pisteessä  $x \in \partial D$ .

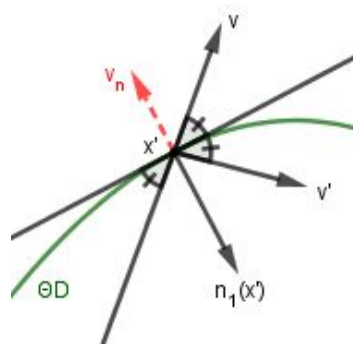
Oletetaan, että  $x \in \partial D$  ja  $v \in S^1$  siten, että  $v \cdot n_1(x) > 0$ . Tällöin joukon  $D$  konvek-  
suisuudesta johtuen on olemassa yksikäsitteinen piste  $x' \in \partial D$  siten, että

$$x' = x + tv$$

jollekin  $t > 0$ . Lisäksi nopeusvektori  $v'$  saadaan vektoreiden  $v$  ja  $n_1(x')$  avulla ilmais-  
tua seuraavasti (katso kuva 1):

$$v' = v - 2v_n,$$

missä  $v_n$  on vektorin  $v$   $n_1(x')$ -suuntainen projektiio.



KUVA 1. Vektorin  $n_1(x')$ -suuntainen vektorin  $v$  projektiio  $v_n$ .

Koska vektoriprojektiolle  $v_n$  pätee

$$v_n = \frac{v \cdot n_1(x')}{n_1(x') \cdot n_1(x')} n_1(x') = \frac{v \cdot n_1(x')}{\|n_1(x')\|^2} n_1(x') = (v \cdot n_1(x')) n_1(x'),$$

saadaan nopeusvektori  $v'$  lopulta muotoon

$$v' = v - 2(v \cdot n_1(x')) n_1(x').$$

Nyt ollaan valmiita määrittelemään yleinen biljardikuvaus konveksille, suljetulle ja rajoitetulle tasobiljardipöydälle, jonka reuna on sileä.

**MÄÄRITELMÄ 1.17.** Olkoon biljardipöytä  $D \subset \mathbb{R}^2$  konvekksi ja sen reunäkäyrä  $\partial D$  suljettu ja rajoitettu sileä käyrä. Tällöin biljardikuvaus on muotoa

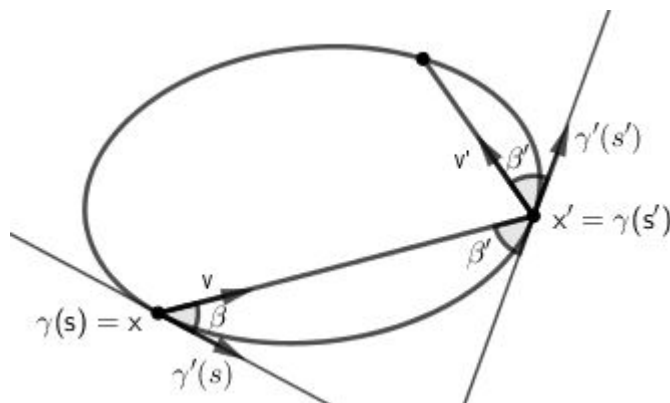
$$T: M \rightarrow M, T(x, v) = (x', v'),$$

missä  $x \in \partial D$  on biljardipallon lähtöpiste ja  $v$  lähtönopeus ja vastaavasti  $x' \in \partial D$  seuraava biljardipallon osumakohta biljardipöydän reunaan ja  $v'$  törmäyksen jälkeinen pallon nopeus.

Toisaalta reuna  $\partial D$  on nyt parametrisoitu pituuden suhteen. Oletetaan reunäkäyrän  $\gamma$  positiiviseksi kulkusuunnaksi se suunta, jolloin käyrän sisäpuoli on vasemmalla ja vastaavasti ulkopuoli oikealla. Olkoon  $s \in [0, l(\gamma)]$  suunnatun käyrän  $\gamma$  parametri.

Olkoon lisäksi  $\beta \in ]0, \pi[$  nopeusvektorin  $v$  ja käyrän  $\gamma$  pisteeseen  $x$  piirretyn positiivisesti suunnatun tangentin välinen kulma. Tällöin pisteiden  $(x, v)$  kuvaamiseen voidaan käyttää koordinaatteja  $(s, \beta)$  (Katso kuva 2). Näin ollen

$$T: M \rightarrow M, T(s, \beta) = (s', \beta').$$



KUVA 2. Biljardikuvauksen koordinaattien  $(x, v)$  ja  $(s, \beta)$  välinen yhteys.

Kuvauksen  $T$  iteroinnin, eli toiston avulla voidaan tutkia muun muassa radan jaksollisuutta:

**MÄÄRITELMÄ 1.18.** Biljardirata on *jaksollinen*, jos on olemassa piste  $x \in M$ , jolle  $T^n(x) = x$  jollakin  $n \in \mathbb{N}$ . Muutoin rata on jaksoton.

**MÄÄRITELMÄ 1.19.** *Jaksollisuuden pituus* on pienin luku  $n \in \mathbb{N}$ , jolle  $T^n(x) = x$ . Tällöin biljardipallo palaa lähtöpisteeseensä  $n$ :än kimmokkeen kautta.

Nyt ollaan avattu hieman matemaattisessa biljardissa käytettävää yleisen tasobiljardikuvauksen luonnetta. Ennen kaikkea biljardin matemaattisessa tarkastelussa ollaan siis kiinnostuneita kuvauksen  $T: M \rightarrow M$  dynamiikasta: Löytyykö jaksollisia ratoja? Entä mikä on jaksollisen radan jaksollisuuden pituus? Miltä löydetyt jaksolliset radat näyttävät? Paljonko löytyy jaksottomia ratoja? Jakautuvatko jaksottomien ratojen heijastuspisteet tasaisesti pöydän reunakäyrälle? Yleisen biljardikuvauksen analysoiminen tällä tapaa on melko hankalaa, joten tässä tutkielmassa keskitytään biljardin peluuseen muutamalla, tietynmuotoisella biljardipöydällä. Aloitetaan tarkastelu ympyränmuotoiselta pöydältä.

## LUKU 2

### Biljardia ympyrällä

Kun biljardipallo lyödään ympyrällä kohti kehän pistettä  $x_1$ , se kimpoaa ympyrän kehältä heijastuslain mukaisesti ja törmää uudelleen ympyrän kehään pisteessä  $x_2$ . Koska ympyrä on kiertosymmetrinen, voidaan pallon ja ympyrän kehän törmäyspisteet saada toisistaan kiertämällä ympyrää aina tietyn kiertokulman  $\alpha$  verran. Niinpä biljardipallon kulkureitin, eli biljardiratakäyrän, tutkiminen ympyrällä näyttäisi olevan helpointa toteuttaa ratakäyrän heijastuspisteiden muuntumisen tutkimisella.

#### 1. Ympyrän kehän ja reaalivälin yhteys

Otetaan biljarditarkastelun keskiöön ympyrä, jonka kehän pituus on yksi (ja säde on  $\frac{1}{2\pi}$ ). Tällöin taittelemalla ympyrän kehä auki, se näyttäisi vastaavan reaaliakselin väliä  $[0, 1]$ , missä pisteet nolla ja yksi samaistetaan. Ennen kuin mennään tarkemmin itse biljardin tarkasteluun, näytetään, että ympyrän kehä todella voidaan ajatella olevan reaaliväli  $[0, 1]$ , kunhan pisteet 0 ja 1 samaistetaan:

**MÄÄRITELMÄ 2.1.** Relaatio  $R$  joukolla  $A$  on ekvivalenssirelaatio, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

- (1)  $aRa$  kaikilla  $a \in A$  (reflektiivisyys),
- (2) jos  $aRb$ , niin  $bRa$  kaikilla  $a, b \in A$  (symmetrisyys) ja
- (3) jos  $aRb$  ja  $bRc$ , niin  $aRc$  kaikilla  $a, b, c \in A$  (transitiivisuus).

Määritelmän 2.1 nojalla joukon  $\mathbb{R}$  relaatio  $\sim$ , missä  $x \sim y$  jos ja vain jos  $x - y \in \mathbb{Z}$ , on ekvivalenssirelaatio, sillä

- (1) nyt  $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ , joten  $x \sim x$ ,
- (2) jos  $x \sim y$  eli  $x - y = k \in \mathbb{Z}$ , niin tällöin  $y - x = -k \in \mathbb{Z}$  ja siten  $y \sim x$ ,
- (3) jos  $x \sim y$  ja  $y \sim z$ , eli  $x - y = k \in \mathbb{Z}$  ja  $y - z = l \in \mathbb{Z}$ , niin tällöin  $x - z = x - y + y - z = k + l \in \mathbb{Z}$ , joten myös  $x \sim z$ .

Ekvivalenssirelaatio  $\sim$  määrää siis erilliset ekvivalenssiluokat  $\{[x] : x \in \mathbb{R}\}$ , missä  $y \in [x]$  jos ja vain jos  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Niinpä tekijäjoukko  $\mathbb{R}/\sim$  on kaikkien reaalilukujen ekvivalenssiluokkien joukko ekvivalenssirelaation  $\sim$  suhteen. Merkitään muodostettua tekijäjoukkoa vastaisuudessa kuvaavammalla merkinnällä  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Tekijäjoukko  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , missä tekijäluokat määräytyvät edellä mainitusta ekvivalenssirelaatiosta, on bijektiivinen välin  $[0, 1[$  kanssa. Tämä nähdään siitä, että kuvaus

$$f: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, f(x) = [x]$$

on bijektio:

Nyt  $[x] = \{y \in \mathbb{R} : y - x = k \in \mathbb{Z}\}$ , joten jos  $x \neq z$  ja  $x, z \in [0, 1[$ , niin varmasti  $0 < |x - z| < 1$ . Tällöin  $f(x) = [x] \neq [z] = f(z)$ . Niinpä funktio  $f(x)$  on injektio.

Olkoon  $[y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  mikä tahansa ja valitaan  $k = \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ , jolloin  $x = y - \lfloor y \rfloor \in [0, 1[$ . Tällöin  $f(x) = f(y - \lfloor y \rfloor) = [y - \lfloor y \rfloor] = [y]$ . Niinpä funktio  $f$  kuvaa lähtöjoukon koko maalijoukoksi, joten funktio  $f(x)$  on myös surjektio ja siten bijektio.

Lisäksi huomataan, että väli  $[0, 1[$  on sama kuin tekijäavaruus, joka saadaan välistä  $[0, 1]$  ekvivalenssirelaatiolla, missä  $x \sim y$  jos ja vain jos  $x - y = 0$  tai  $|x - y| = 1$ . Tällöin siis välin  $[0, 1]$  pisteet 0 ja 1 samaistetaan.

Toisaalta joukkojen  $[0, 1[$  ja  $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = (\frac{1}{2\pi})^2\}$  välillä on luonnollinen bijektio. Olkoon  $\theta$  ympyrän  $S$  kiertokulmaa  $\alpha$  vastaavan kaaren pituus, jolloin pätee  $\alpha = 2\pi\theta$ . Osoitetaan, että kuvaus

$$g: [0, 1[ \rightarrow S, g(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{2\pi\theta i}$$

on bijektio:

Kuvaus voidaan ilmaista muodossa

$$g(\theta) = \left( \frac{\cos(2\pi\theta)}{2\pi}, \frac{\sin(2\pi\theta)}{2\pi} \right).$$

Olkoon  $\theta_1 \neq \theta_2$ , jolloin

$$g(\theta_1) = \left( \frac{\cos(2\pi\theta_1)}{2\pi}, \frac{\sin(2\pi\theta_1)}{2\pi} \right) = \left( \frac{\cos \alpha_1}{2\pi}, \frac{\sin \alpha_1}{2\pi} \right) \text{ ja}$$

$$g(\theta_2) = \left( \frac{\cos(2\pi\theta_2)}{2\pi}, \frac{\sin(2\pi\theta_2)}{2\pi} \right) = \left( \frac{\cos \alpha_2}{2\pi}, \frac{\sin \alpha_2}{2\pi} \right).$$

Nyt sinin ja kosinin ominaisuuksista johtuen  $g(\theta_1) \neq g(\theta_2)$ , sillä jos pisteparien ensimmäiset koordinaatit ovat samat, eli  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$ , niin varmasti toisille pistepareille pätee  $\sin \alpha_1 \neq \sin \alpha_2$  ja vastaavasti toisinpäin. Niinpä funktio  $g(\theta)$  on injektio.

Lisäksi  $\theta$ :n arvoilla välillä  $[0, 1[$  sinin ja kosinin sisäfunctiot saavat kaikki arvot väliltä  $[0, 2\pi[$ . Koska sini- ja kosinifunctiot ovat  $2\pi$ -jaksollisia, saa funktio  $g$  kaikki mahdolliset funktionarvot muuttujan arvoilla  $[0, 1[$ . Niinpä funktio  $g(\theta)$  on myös surjektio ja siten bijektio.

Näin ollen kaikki kolme; ympyrän  $S$  kehä, reaaliväli  $[0, 1[$  ja joukko  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  voidaan bijektiivisinä joukkoina samaistaa keskenään. Ympyrän  $S$  ajattelemisen joukkona  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  helpottaa ympyrän kuvausten kirjoittamista. Tämän vuoksi sovitaan, että tästä eteenpäin tutkielmassa joukko  $S$  tarkoittaa joukkoa  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

## 2. Biljardiratakäyrät ympyrällä

Aloitetaan biljarditarkastelu tutkimalla edellisen luvun biljardikuvausta  $T$  ympyränmuotoisella biljardipöydällä. Ympyrän kiertosymmetrisyydestä huomataan, että biljardiratakäyrän ja ympyrän tangentin välinen kulma  $\beta$  pysyy samana jokaisessa heijastuksessa (katso kuva 1). Niinpä biljardikuvauksessa  $(s, \beta) \rightarrow (s', \beta')$  muuttuu ai-noastaan parametrin  $s$  arvo. Tutkitaan tarkemmin, miten parametri  $s$  muuttuu.

Oletetaan, että ympyrän kehän pituus on yksi, jolloin säde  $r = \frac{1}{2\pi}$ . Olkoon ympyrän keskipiste  $O$  ja olkoon  $xx'$  ratakäyrän jokin segmentti. Kolmio  $\Delta xOx'$  on tällöin tasakylkinen ja sen kantakulmat  $\varphi$  saadaan kulman  $\beta$  avulla siten, että (katso kuva 1)

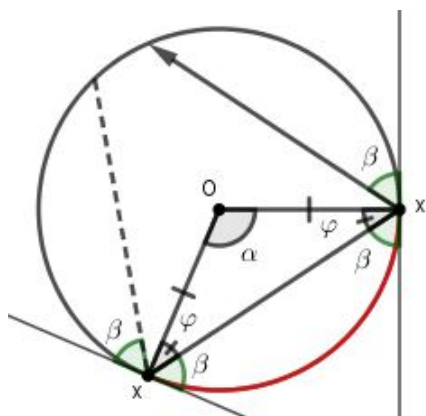
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Niinpä ympyrän kiertokulmalle  $\alpha$  pätee

$$\alpha = \pi - 2\varphi = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\beta.$$

Kierrettäessä ympyrää kiertokulman  $\alpha$  verran, ympyrän kehällä liikutaan siis matka

$$\alpha r = \frac{2\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\pi}.$$



KUVA 1. Ympyräbiljardikuvauksessa kulma  $\beta$  pysyy vakiona, jolloin myös ympyrän kehällä liikuttava matka pysyy vakiona.

Ympyrällä biljardikuvaus saadaan nyt muotoon

$$T: M \rightarrow M, T(s, \beta) = \left(s + \frac{\beta}{\pi}, \beta\right),$$

josta huomataan, että ympyräbiljardissa kahden peräkkäisen heijastuspisteen välinen matka ympyrän kehällä pysyy vakiona. Merkitään tätä kiertokulmaa  $\alpha$  vastaavaa ympyrän kaaren pituutta kulmalla  $\theta$ . Nyt ollaan valmiita määrittelemään biljardikuvaus ympyrällä:

**MÄÄRITELMÄ 2.2.** Olkoon kulma  $\theta$  ympyrän  $S$  kiertokulmaa  $\alpha$  vastaavan kaaren pituus ympyrän kehällä. Tällöin biljardirata ympyrällä voidaan määrätä täysin seuraavan kuvauksen avulla:

$$T_\theta: S \rightarrow S, T_\theta(x) = x + \theta \pmod{1},$$

missä  $x \in [0, 1[$  on ratakäyrän lähtöpiste ympyrän  $S$  kehällä ja  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Kuvaus  $T_\theta$  on hyvin määritelty:

Jos  $x, y \in \mathbb{R}$  siten, että  $x = y \pmod{1}$  eli  $[x] = [y] \in S$ , niin  $T_\theta(x) = x + \theta \pmod{1} = [x + \theta] = [x] + [\theta] = [y] + [\theta] = [y + \theta] = y + \theta \pmod{1} = T_\theta(y)$ .

Ympyrällä ratakäyrän tarkastelu voidaan siis muuttaa reaalivälillä  $[0, 1[$  esiintyvien ratakäyrän heijastuspisteiden tarkasteluun. Määritelmän 2.2 kuvauksen  $T_\theta$   $n$ :s iteratio saadaan nyt seuraavasti:

$$T_\theta^n(x) = x + n\theta \pmod{1}.$$

Tämä voidaan osoittaa induktiolla.

### 2.1. Kulman $\theta$ suuruuden vaikutus ratakäyrän jaksollisuuteen.

Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin sitä, millä tavalla kulman  $\theta$  suuruus vaikuttaa ratakäyrään ympyrällä. Tätä varten täytyy määritellä alkioiden välinen etäisyys joukossa  $S$  ja tutkia, miten hyvin biljardikuvaus  $T_\theta$  nämä etäisyydet tulee säilyttämään.

**MÄÄRITELMÄ 2.3.** Olkoon  $[x], [y] \in S$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteiset pisteet  $x', y' \in [0, 1[$  siten, että  $x' \in [x]$  ja  $y' \in [y]$ . Näin ollen joukon  $S$  ekvivalenssiluokkien  $[x]$  ja  $[y]$  välinen etäisyys

$$d([x], [y]) = \min(|x' - y'|, |x' - (y' - 1)|) = \min(|x' - y'|, |x' - y' + 1|).$$

**MÄÄRITELMÄ 2.4.** Joukko  $X$  on *metrinen avaruus*, jos on olemassa etäisyysfunktio eli *metriikka*  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  siten, että kaikille  $x, y, z \in X$  pätee

- (1)  $d(x, y) \geq 0$
- (2)  $d(x, y) = 0$  jos ja vain jos  $x = y$
- (3)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Metristä avaruutta voidaan merkitä  $(X, d)$ , missä  $d$  on joukon  $X$  metriikka.

Nyt huomataan, että Määritelmän 2.3 mukainen alkioiden välinen etäisyys joukossa  $S$  on metriikka. Niinpä joukkoa  $S$  voidaan tarkastella metrisenä avaruutena.

**MÄÄRITELMÄ 2.5.** Olkoon  $(X, d_1)$  ja  $(Y, d_2)$  metrisiä avaruuksia. Kuvaus  $f: X \rightarrow Y$  on *isometria*, jos ja vain jos kaikille  $x, y \in X$  pätee

$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)).$$

Toisin sanoen isometria on kuvaus, joka säilyttää pisteiden väliset etäisyydet.

Määritelmän 2.5 nojalla biljardikuvaus  $T_\theta: S \rightarrow S, T_\theta(x) = x + \theta \pmod{1}$  on isometria, sillä kaikille  $[x], [y] \in S$  pätee

$$\begin{aligned} d(T_\theta([x]), T_\theta([y])) &= \min\{|x' + \theta - (y' + \theta)|, |x' + \theta - (y' + \theta) + 1|\} \\ &= \min\{|x' - y'|, |x' - y' + 1|\} \\ &= d([x], [y]), \end{aligned}$$

missä  $x', y' \in [0, 1[$  siten, että  $x' \in [x]$  ja  $y' \in [y]$ . Tästä seuraa, että biljardikuvaus  $T_\theta$  säilyttää aina heijastuspisteiden väliset etäisyydet.

**MÄÄRITELMÄ 2.6.** Olkoon *rata*  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  kuvauksen  $T_\theta(x)$  heijastuspisteiden muodostama joukko, eli

$$\mathcal{O}_{T_\theta}(x) = \{T_\theta^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Erityisesti rata liittyy aina johonkin pisteeseen  $x \in S$ .

Nyt kulmasta  $\theta$  voidaan sanoa seuraavaa

**LAUSE 2.7.** *Kulmalle  $\theta$  pätee:*

- (1) *Jos  $\theta \in \mathbb{R}$  on rationaalinen, niin jokainen rata  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  on jaksollinen kaikilla  $x \in S$ . Lisäksi, jos  $\theta = \frac{p}{q}$ , missä  $\text{sy}(p, q) = 1$ , niin jaksollisuuden pituus on  $q$ .*
- (2) *Jos  $\theta \in \mathbb{R}$  on irrationaalinen, niin jokainen rata  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  on tiheä ympyrän  $S$  kehällä kaikilla  $x \in S$ . Tällöin jokainen ympyrän  $S$  epätyhjä avoin kaari sisältää tämän käyrän pisteitä.*

**TODISTUS.**

- (1) Olkoon  $\theta$  rationaaliluku muotoa  $\theta = \frac{p}{q}$ , missä  $p, q \in \mathbb{N}$  ja  $\text{sy}(p, q) = 1$  ja olkoon  $x \in [0, 1[$  mikä tahansa. Tällöin

$$\begin{aligned} T_\theta^q(x) &= x + q \cdot \theta \pmod{1} \\ &= x + q \cdot \frac{p}{q} \pmod{1} \\ &= x + p \pmod{1} \\ &= x \pmod{1}, \end{aligned}$$

joten kuvauksen  $T_\theta(x)$  muodostama rata on jaksollinen.

Toisaalta, koska  $\text{sy}(p, q) = 1$ , niin luonnolliselle luvulle  $k$  pätee, että  $k \cdot \frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$  kaikilla  $1 \leq k < q$ . Niinpä  $T_\theta^k(x) \neq x \pmod{1}$  kaikilla  $k = 1, \dots, q - 1$  ja siten  $k = q$  on pienin luvun  $k$  arvo, jolle  $T_\theta^k(x) = x \pmod{1}$ . Näin ollen jaksollisuuden pituus on  $q$ .

- (2) Olkoon  $\theta$  irrationaaliluku. Näytetään ensin, että jokainen radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  piste on eri piste.

Antiteesi: Olkoon  $i$  ja  $j$  kaksi eri luonnollista lukua siten, että  $T_\theta^i(x) = T_\theta^j(x) + k$  jollekin positiiviselle kokonaisluvulle  $k$ . Tällöin

$$x + i\theta = x + j\theta + k,$$

joten  $(i-j)\theta = k \in \mathbb{Z}_+$ . Koska oletuksen nojalla  $\theta$  on irrationaaliluku, täytyy päteä  $i-j=0$ , eli  $i=j$ . Tämä on ristiriita, sillä oletuksen nojalla  $i \neq j$ . Niinpä jokainen radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  piste on eri piste.

Näytetään seuraavaksi, että jokainen rata  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  on tiheä ympyrän  $S$  kehällä. Jaetaan ympyrän kehä  $n$ :ään yhtä pitkään kaareen, jolloin jokainen ympyrän kaari on pituudeltaan  $\frac{1}{n}$ . Olkoon  $x, T_\theta(x), \dots, T_\theta^n(x)$  radan pisteitä. Yllä olevasta tiedämme, että nämä pisteet ovat erillisiä, joten pisteiden lukumäärä on  $n+1$ . Koska radan pisteitä on enemmän kuin ympyrän kaaria, löytyy sellainen ympyrän kaari, jolla on ainakin kaksi radan eri pistettä;  $T_\theta^i(x)$  ja  $T_\theta^j(x)$ , joille  $j < i \leq n$ . Siispä mille tahansa luonnolliselle luvulle  $n$  on olemassa erilliset luonnolliset luvut  $i$  ja  $j$  siten, että

$$d(T_\theta^i(x), T_\theta^j(x)) < \frac{1}{n}.$$

Näytetään sitten, että minkä tahansa alkupisteen  $x \in [0, 1[$  läheltä löytyy jokin toinen radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  piste. Koska kuvaus  $T_\theta$  on isometria, radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  kahden pisteen välinen etäisyys ei riipu kuvauksen  $T_\theta$  iterointien määrästä. Tällöin luonnollisten lukujen  $i, j$  ja  $n$  avulla saadaan

$$d(T_\theta^{i-j}(x), x) = d(T_\theta^j(T_\theta^{i-j}(x)), T_\theta^j(x)) = d(T_\theta^i(x), T_\theta^j(x)) < \frac{1}{n},$$

missä  $T_\theta^j(T_\theta^{i-j}(x)) = T_\theta^{i-j}(x) + j\theta \pmod{1} = x + (i-j)\theta + j\theta \pmod{1} = x + i\theta \pmod{1} = T_\theta^i(x)$ . Olkoon nyt  $\epsilon > 0$ . Valitsemalla luku  $n$  siten, että  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , saadaan pisteille  $x$  ja  $T_\theta^{i-j}(x)$  pätemään

$$d(T_\theta^{i-j}(x), x) < \epsilon.$$

Näin ollen jokainen rata palaa lähtöpisteen  $x$  läheisyyteen  $i-j$ :n iteraation jälkeen.

Lisäksi lukujen  $i$  ja  $j$  valinta on riippumaton pisteestä  $x$ . Tämä nähdään seuraavasti: Olkoon  $y \in S$ , jolloin piste  $y$  voidaan ilmoittaa pisteen  $x$  avulla ympyrän kiertona  $y = T_{y-x}(x)$ . Tällöin

$$\begin{aligned} d(T_\theta^{i-j}(y), y) &= d(T_\theta^{i-j}(T_{y-x}(x)), T_{y-x}(x)) \\ &= d(T_{y-x}(T_\theta^{i-j}(x)), T_{y-x}(x)) = d(T_\theta^{i-j}(x), x) < \epsilon \end{aligned}$$

Osoitetaan lopuksi, että myös minkä tahansa alkupisteestä  $x$  riippumattoman pisteen  $z \in S$  läheisyydestä voidaan löytää jokin radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  piste. Aiemmasta tiedämme, että kuvaus  $T_\theta^{i-j}$  kiertää jokaista radan pistettä matkan  $s = (i-j)\theta \pmod{1} < \frac{1}{n} < \epsilon$  myötä- tai vastapäivään. Olkoon  $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ . Tällöin joukko  $\{T_\theta^{k(i-j)}(x) : k = 0, 1, \dots, N\}$  jakaa ympyrän  $S$  kehän osiin, joiden kaikkien pituus on pienempää kuin  $\epsilon$ . Niinpä on olemassa luonnollinen luku  $m \leq N(i-j)$  siten, että  $d(T_\theta^m(x), z) < \epsilon$ . Siten jokainen rata  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  on tiheä ympyrän  $S$  kehällä.  $\square$



Havainnollistetaan Lauseen 2.7 (1) sanomaa hieman seuraavan esimerkin avulla:

**ESIMERKKI 2.8.** Onko mahdollista lyödä ympyränmuotoisen pöydän reunalla oleva biljardipallo kahdeksan kimmokkeen kautta takaisin alkupisteeseensä?

Biljardirata olisi nyt 8-jaksollinen, joten Lauseen 2.7 (1) nojalla  $q = 8$ . Siten mahdollisia vaihtoehtoja kulmalle  $\theta$  voisivat olla murtoluvut  $\frac{p}{8}$ , missä  $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  tai  $7$ . Kuitenkin nyt täytyy olla  $\text{sy}(p, q) = 1$ , joten 8-jaksollinen rata saadaan aikaan vain kulman  $\theta$  arvoilla  $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$  ja  $\frac{7}{8}$ .

**HUOMAUTUS 2.9.** Edellisestä Lauseesta huomataan, että

- (1) jos kulma  $\theta$  on rationaalinen, niin ratakäyrän pituus on äärellinen,
- (2) jos kulma  $\theta$  on irrationaalinen, niin ratakäyrän pituus on ääretön,
- (3) ratakäyrän käyttäytyminen on riippumaton alkupisteestä  $x \in S$ .

**SEURAUUS 2.10.** Jos  $\theta$  on irrationaalinen, niin jokaisella radalla  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$ , missä  $x \in S$ , on äärettömän monta pistettä millä tahansa epätyhjällä avoimella ympyrän  $S$  kaarella.

**TODISTUS.** Väite seuraa suoraan Lauseesta 2.7 (2). □

## 2.2. Heijastuspisteiden tasajakautuneisuus ympyrän kehällä.

Tähän mennessä ollaan opittu, että jos  $\theta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  ja  $p$  ja  $q$  ovat jaottomia keskenään, niin rata  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  on  $q$ -jaksollinen ja kiertosymmetrisyydestä johtuen radan pisteet ovat jakautuneet tasaisesti ympyrän kehälle. Voidaanko vastaavanlaista pisteiden tasaista jakautumista ympyrän kehälle odottaa myös irrationaalisella  $\theta$ :n arvolla? Seuraava heijastuspisteiden tasajakautuneisuustarkastelu noudattaa lähdeä [4]

**MÄÄRITELMÄ 2.11.** Olkoon  $\Delta \subset S$  ympyrän kaari ja  $x \in S$  jokin ympyrän kehän piste. Olkoon lisäksi  $n \in \mathbb{N}$  kaikkien radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  heijastuspisteiden lukumäärä. Merkitään kaarella  $\Delta$  sijaitsevien heijastuspisteiden lukumäärää seuraavasti:

$$F_\Delta(x, n) := \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k < n, T_\theta^k(x) \in \Delta\}$$

Määritelmästä 2.11 nähdään, että jos kaarille pätee  $\Delta \subset \Delta'$ , niin  $F_\Delta(x, n) \leq F_{\Delta'}(x, n)$ . Lisäksi selvästi funktio  $F_\Delta(x, n)$  on kasvava luvun  $n$  suhteen. Niinpä irrationaalisella  $\theta$ :n arvolla funktiolle pätee  $F_\Delta(x, n) \rightarrow \infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .

Nyt ympyrän kaarella  $\Delta$  sijaisevien radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  heijastuspisteiden *suhteellinen osuus* kaikista radan heijastuspisteistä voidaan ilmaista muodossa

$$\frac{F_\Delta(x, n)}{n}.$$

**LAUSE 2.12.** Merkitään kaaren  $\Delta$  pituutta  $l(\Delta)$ . Olkoon  $\theta$  irrationaalinen ja ympyrän kiertokuvaus  $T_\theta$ . Olkoon lisäksi  $\Delta$  ja  $\Delta'$  ympyrän  $S$  kaaria, joille  $l(\Delta) < l(\Delta')$ . Tällöin on olemassa  $N_0 \in \mathbb{N}$  siten, että jos  $x \in S$ ,  $N \geq N_0$  ja  $n \in \mathbb{N}$ , niin

$$F_{\Delta'}(x, n + N) \geq F_\Delta(x, n).$$

TODISTUS. Seurauksen 2.10 nojalla rata  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  on tiheä missä tahansa ympyrän kaareissa. Nyt  $l(\Delta) < l(\Delta')$ , joten kiertämällä kaarta  $\Delta$  sopivasti, kaaret saadaan asettumaan sisäkkäin. Tällöin löytyy  $N_0 \in \mathbb{N}$  siten, että  $T_\theta^{N_0}(\Delta) \subset \Delta'$ . Siten tiedosta  $T_\theta^n(x) \in \Delta$  seuraa, että  $T_\theta^{n+N_0}(x) \in \Delta'$ , joten

$$F_{\Delta'}(x, n + N) \geq F_{\Delta'}(x, n + N_0) \geq F_\Delta(x, n)$$

kun  $N \geq N_0$ . □

Edellä ei olla otettu mitään kantaa siihen, ovatko kaaret avoimia, suljettuja vai puoliavoimia. Sillä ei ole väliä. Helpoin tapa on ottaa aina puoliavoin kaari siten, että vasen päätepiste kuuluu kaarelle ja oikea päätepiste ei. Jos kaaren  $\Delta_1$  oikea päätepiste on sama kuin kaaren  $\Delta_2$  vasen päätepiste, niin kaarien yhdiste on yhtenäinen kaari, mutta kuitenkin  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ . Tällöin  $F_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(x, n) = F_{\Delta_1}(x, n) + F_{\Delta_2}(x, n)$ .

Olkoon  $A$  mikä tahansa ympyräkaarien yhdiste. Tällöin Määritelmän 2.11 nojalla ympyräkaarien yhdisteellä  $A$  sijaitsevien radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  heijastuspisteiden lukumäärä on

$$F_A(x, n) = \#\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k < n, T_\theta^k(x) \in A\}.$$

Nyt selvästi  $0 \leq F_A(x, n) \leq n$  kaikilla  $n$ . Lisäksi edelleen  $F_A(x, n) \rightarrow \infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Niinpä ympyräkaarien yhdisteen  $A$  heijastuspisteiden suhteellisten osuuksien

$$\frac{F_A(x, n)}{n}$$

muodostama jono  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rajoittuu välille  $[0, 1]$ . Tällöin selvästi jonon  $(a_n)$  pienin yläraja  $M_0 \leq 1$  ja suurin alaraja  $m_0 \geq 0$ . Niinpä myös jonon  $(a_n)$  kaikilla osajonoilla pienin yläraja ja suurin alaraja ovat reaalilukuarvoisia. Olkoon

$$M_p = \sup_{n \geq p} a_n \text{ ja } m_p = \inf_{n \geq p} a_n.$$

Antamalla  $p$  lähestyä ääretöntä, jonolle  $(a_n)$  saadaan määritettyä yläraja-arvo ja alaraja-arvo.

Näin ollen ympyräkaarien yhdisteellä  $A$  olevien heijastuspisteiden suhteellisen osuuden *yläraja-arvo* voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{f}_x(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_A(x, n)}{n}.$$

Tällöin selvästi pätee  $\bar{f}_x(A_1 \cup A_2) \leq \bar{f}_x(A_1) + \bar{f}_x(A_2)$ . Erityisesti, jos  $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$ , niin  $\bar{f}_x(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1$ .

Yläraja-arvon määritelmän ja Lauseen 2.12 avulla saadaan suora seuraus

SEURAUS 2.13. *Jos  $l(\Delta) \leq l(\Delta')$ , niin  $\bar{f}_x(\Delta) \leq \bar{f}_x(\Delta')$ .*

Vastaavasti kaarien yhdisteellä  $A$  olevien radan  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  heijastuspisteiden suhteellisen osuuden *alaraja-arvo* voidaan kirjoittaa muodossa

$$\underline{f}_x(A) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F_A(x, n)}{n}.$$

Nyt selvästi mille tahansa kaarien yhdisteille  $A$  ja  $A^c = S \setminus A$  pätee  $F_A(x, n) = n - F_{A^c}(x, n)$ . Niinpä, koska suhteellisten osuuksien ylä- ja alaraja-arvot ovat reaalisisina olemassa, niiden välille saadaan yhteys

$$\bar{f}_x(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_A(x, n)}{n} = 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{A^c}(x, n)}{n} = 1 - \underline{f}_x(A^c)$$

Ennen kuin päästään heijastuspisteiden jakautumisen kannalta tärkeän lauseen pariin, otetaan käyttöön vielä yksi lemma:

LEMMA 2.14. *Jos  $l(\Delta) = \frac{1}{k}$ ,  $k \geq 2$ , niin  $\bar{f}_x(\Delta) \leq \frac{1}{k-1}$ .*

TODISTUS. Jaetaan ympyrän kehä  $k-1$  kaareen  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{k-1}$ , joiden kaikkien pituus on  $\frac{1}{k-1}$ . Lauseen 2.12 nojalla löytyy luonnollinen luku  $N_i$ ,  $1 \leq i < k$ , siten, että jos  $x \in S$ , niin

$$F_{\Delta_i}(x, n + N_i) \geq F_{\Delta}(x, n).$$

Ottamalla  $N = \max N_i$ , epäyhtälö saadaan muotoon  $F_{\Delta_i}(x, n + N) \geq F_{\Delta}(x, n)$ . josta edelleen saadaan

$$(k-1)F_{\Delta}(x, n) \leq \sum_{i=1}^{k-1} F_{\Delta_i}(x, n + N).$$

Kun  $N$  on kiinnitetty voidaan antaa  $n \rightarrow \infty$ , jolloin

$$(k-1)\bar{f}_x(\Delta) \leq \bar{f}_x\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \Delta_i\right) = 1.$$

Niinpä jakamalla molemmat puolet luvulla  $k-1$  saadaan lemmän väite.  $\square$

Nyt voidaan muotoilla seuraava lause:

LAUSE 2.15. *Mille tahansa ympyrän kaarelle  $\Delta \subset S$  ja pisteelle  $x \in S$  pätee*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_A(x, n)}{n} = l(\Delta).$$

*Erityisesti raja-arvo on riippumaton pisteestä  $x$ .*

TODISTUS. Olkoon  $\epsilon > 0$  ja olkoon  $\Delta \subset \Delta'$  siten, että  $l(\Delta') = \frac{j}{k} < l(\Delta) + \epsilon$ , missä  $j, k \in \mathbb{N}$ ,  $j \leq k$ . Nyt kaari  $\Delta'$  voidaan ajatella olevan seuraavanlainen:  $\Delta' = \bigcup_{i=1}^j v_i$ , missä kaaret  $v_i$  ovat pistevieraita, ja joille  $l(v_i) = \frac{1}{k}$  kaikilla  $i$ . Tällöin Seurauksen 2.13 ja Lemman 2.14 nojalla

$$\bar{f}_x(\Delta) \leq \bar{f}_x(\Delta') \leq \frac{j}{k-1} = \frac{j}{k} \cdot \frac{k}{k-1} \leq (l(\Delta) + \epsilon) \frac{k}{k-1}.$$

Annetaan  $\epsilon \rightarrow 0$ , jolloin  $k \rightarrow \infty$ , ja nähdään, että

$$\bar{f}_x(\Delta) \leq l(\Delta).$$

Toisaalta myös  $\Delta^c = S \setminus \Delta$  on ympyrän kaari, joten sille pätee  $\bar{f}_x(\Delta^c) \leq l(\Delta^c)$ . Lisäksi aiemmasta tiedetään, että  $\bar{f}_x(\Delta^c) = 1 - \underline{f}_x(\Delta)$ , joten yhdistämällä nämä tiedot saadaan

$$\begin{aligned}\bar{f}_x(\Delta^c) &= 1 - \underline{f}_x(\Delta) \leq l(\Delta^c) \\ \implies \underline{f}_x(\Delta) &\geq 1 - l(\Delta^c) = l(\Delta).\end{aligned}$$

Koska ylä- ja alaraja-arvot ovat yhtä suuret, raja-arvo on olemassa ja se on  $l(\Delta)$ . Niinpä väite on todistettu.  $\square$

Lauseen 2.15 mukaan valitun kaaren sijainti ympyrän kehällä ei vaikuta kaarelle osuvien heijastuspisteiden lukumäärään, vaan pisteiden lukumäärään vaikuttaa ainoastaan kaaren pituus. Tätä ominaisuutta kutsutaan pisteiden *tasajakautuneisuudeksi*. Niinpä Lauseen 2.15 suora seuraus on

LAUSE 2.16. *Jos  $\theta$  on irrationaalinen, niin rata  $\mathcal{O}_{T_\theta}(x)$  kaikille  $x \in S$  on tasajakautunut ympyrällä.*

### 2.3. Ympyräbiljardin kaustinen käyrä.

Tutkitaan sitten hieman tarkemmin biljardiratakäyrän muodostamaa geometrista kuviota biljardipöydän pinnalla. Tehdään tarkastelu ympyrän  $S$  sijaan yleiselle ympyrälle. Edellä osoitetut tulokset ovat voimassa myös tälle ympyrälle, sillä biljardiratakäyrän ominaisuudet eivät riipu ympyrän säteestä.

LAUSE 2.17. *Yksikään biljardiratakäyrä ympyrällä, lukuunottamatta 2-jaksollista ratakäyrää, ei kulje tietyn pienemmän samakeskisen ympyrän sisäpuolelta. Lisäksi kaikki ratakäyrän segmentit ovat tangenttisuoria kyseiselle sisemmälle ympyrälle.*

TODISTUS. Olkoon  $P_0, P_1, P_2, \dots$  biljardiratakäyrän muodostaman monikulmion kärkiä, ts. ratakäyrän heijastuspisteitä. Tällöin kiertosymmetriasta johtuen

$$|P_0P_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = \dots,$$

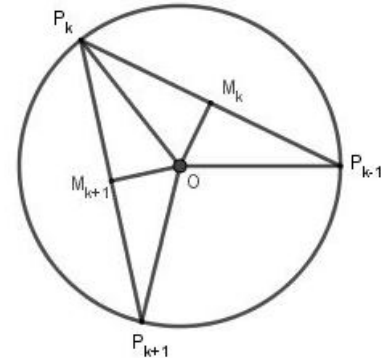
eli jokainen kahden peräkkäisen heijastuspisteen välinen jana on yhtä pitkä. Olkoon  $O$  ympyrän keskipiste. Koska kaikki kärkipisteet  $P_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  sijaitsevat ympyrän kehällä, SSS-lauseen nojalla kolmiot  $\Delta P_{k-1}OP_k$  ja  $\Delta P_kOP_{k+1}$  ovat yhtenevät.

Yhtenevyydestä seuraa, että kolmioiden kärkikulmat ovat yhtäsuuret, eli

$$\angle P_0OP_1 \cong \angle P_1OP_2 \cong \angle P_2OP_3 \cong \dots$$

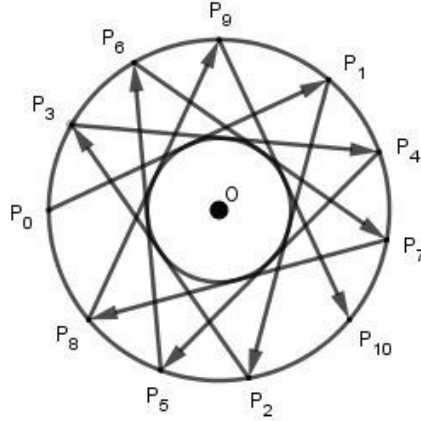
Olkoon lisäksi  $M_k$  janan  $P_{k-1}P_k$  keskipiste kaikilla  $k$ . Tällöin SKS-lauseen nojalla kolmiot  $\Delta P_{k-1}OM_k$  ja  $\Delta P_kOM_k$  ovat yhtenevät kaikilla  $k$ . Erityisesti janat  $OM_k$  kaikilla  $k = 1, 2, 3, \dots$  ovat yhtä pitkät, eli

$$|OM_1| = |OM_2| = |OM_3| = \dots$$



Yhtenevyydestä seuraa lisäksi, että kulmat  $\angle OM_kP_{k-1}$  ja  $\angle OM_kP_k$  ovat vieruskulmina suorina kulmia. Niinpä kaikki janat  $P_{k-1}P_k$ , eli biljardiratakäyrän segmentit, ovat

yhtä etäällä ympyrän keskipisteestä ja toimivat tangenttisuorina  $|OM_k|$ -säteiselle samakesiselle ympyrälle (katso kuva 2).  $\square$



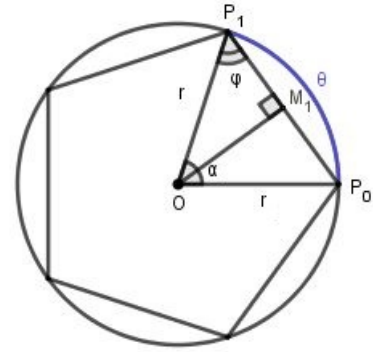
KUVA 2. Ratakäyrän segmentit ovat tangentteja sisemmälle samakesiselle ympyrälle.

HUOMAUTUS 2.18. Jos biljardipöydän säde  $r$  ja kulma  $\theta$  tiedetään, ratakäyrän segmenttien sivuaman sisemmän ympyrän säde voidaan laskea.

ESIMERKKI 2.19. Olkoon ympyrän säde  $r$  ja ympyrän kiertokulmaa  $\alpha$  vastaavan kaaren pituus  $\theta$ . Tällöin kiertokulma  $\alpha = \frac{\theta}{r}$ , joten heijastuskulmaksi  $\varphi$  saadaan (kolmio  $\Delta P_0 O P_1$  tasakylkinen)

$$\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$$

Sisemmän ympyrän säde saadaan suorakulmaisen kolmion  $\Delta P_0 M_1 O$  trigonometriasta:

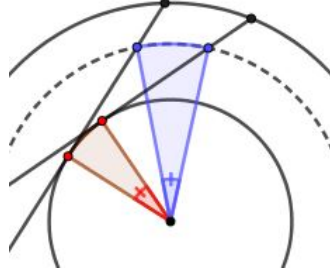


$$\sin \varphi = \frac{|OM_1|}{r}, \text{ joten } |OM_1| = r \sin \varphi = r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2r} \right).$$

HUOMAUTUS 2.20. Lauseesta 2.17 nähdään, että ympyrän sisälle jää aina alue tai alueita, joiden kautta ratakäyrä ei tule kulkemaan. Tällöin sanotaan, että biljardiratakäyrä ympyrän sisällä ei ole *kaikkiällä tiheä*.

Toisaalta aiemmasta tiedetään, että irrationaalisella  $\theta$ :n arvolla ratakäyrän heijastuspisteet ulomman ympyrän kehällä (eli biljardipöydän reunakäyrällä) ovat tiheässä. Lisäksi tiedetään, että ympyrän kiertokulman pysyessä vakiona, kiertokulmaa vastaavan kaaren pituus pienenee ympyrän säteen pienentyessä. Nyt ratakäyrän kahden vierekkäisen segmentin välinen kiertokulma pysyy vakiona riippumatta siitä, miltä etäisyydeltä ympyrän keskipisteestä sitä katsotaan (kunhan katseluetäisyys on vähintään sisemmän ympyrän säteen suuruinen). (Katso kuva 3) Niinpä vierekkäisten

ratakäyrän segmenttien välinen etäisyys on sitä pienempi, mitä lähempänä sisempää ympyrää ollaan. Tästä seuraa, että jos  $\theta$  on irrationaalinen, sisemmän ja ulomman ympyrän välisellä alueella ratakäyrä on kaikkiolla tiheä. Lisäksi ratakäyrä on tihein sisemmän ympyrän kehällä.



KUVA 3. Ratakäyrän segmenttien välinen kiertokulma on vakio riippumatta tarkasteluetaisyydestä sisemmän ja ulomman ympyrän välissä.

Jos siis ajatellaan biljardipöydän reuna peilinä ja biljardiratakäyrä lasersäteenä, joka heijastuu peilistä, niin sisemmän ympyrän reuna olisi merkittävästi kuumempi, kuin muu alue. Tästä syystä sisempää ympyrää kutsutaankin *kaustiseksi*, mikä tarkoittaa *palavaa*. Yleisesti biljardin yhteydessä käsite *kaustinen käyrä* tarkoittaa sellaista käyrää, jota kaikki ratakäyrän segmentit sivuavat. Toisin sanoen kaikki biljardiratakäyrän segmentit ovat kaustisen käyrän tangentteja.[8]

#### 2.4. Yhdensuuntaiset ratakäyrän segmentit.

Tarkastellaan nyt hieman lähemmin biljardiratakäyrän segmenttejä ja niiden yhdensuuntaisuuteen liittyviä ehtoja.

LAUSE 2.21. *Jos  $\theta$  on irrationaalinen, biljardiratakäyrä ympyrällä  $S$  ei sisällä yhdensuuntaisia segmenttejä.*

TODISTUS. Antiteesi: On olemassa jaksoton biljardirata ympyrällä  $S$  siten, että se sisältää yhdensuuntaiset segmentit  $P_n P_{n+1}$  ja  $P_m P_{m+1}$  ( $P_n P_{n+1} \neq P_m P_{m+1}$ ).

Oletuksen nojalla  $\theta$  on irrationaalinen. Olkoon  $O$  ympyrän  $S$  keskipiste ja olkoon segmenttien päätepisteet nimetty siten, että pisteet  $P_{n+1}$  ja  $P_{m+1}$  ovat eri puolilla suoraa  $\overrightarrow{P_n O}$  eli  $P_{n+1} \overrightarrow{P_n O} P_{m+1}$ . Koska segmentit ovat erit ja yhdensuuntaiset, käänteisen vuorokulmalauseen nojalla suora  $\overrightarrow{P_n O}$  leikkaa suoraa  $\overrightarrow{P_{m+1} P_m}$  pisteessä  $M$  siten, että

$$\angle OP_n P_{n+1} \cong \angle OMP_{m+1}.$$

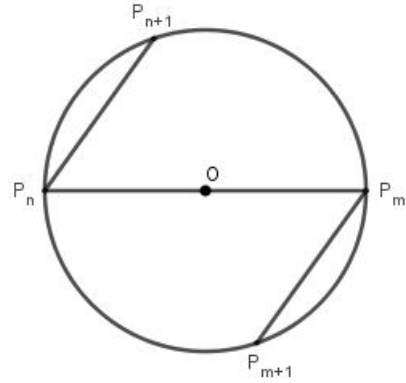
Tällöin pisteelle  $M$  pätee joko  $P_{m+1} * M * P_m$ ,  $M = P_m$  tai  $P_{m+1} * P_m * M$ .

Jos  $P_{m+1} * M * P_m$ , niin ulkokulmaepäyhtälön nojalla  $\angle OP_m P_{m+1} < \angle OMP_{m+1}$ . Vastaavasti jos  $P_{m+1} * P_m * M$ , niin  $\angle OMP_{m+1} < \angle OP_m P_{m+1}$ . Kuitenkin ympyrän kiertosymmetriasta johtuen tiedetään, että

$$\angle OP_m P_{m+1} \cong \angle OP_n P_{n+1} (\cong \angle OMP_{m+1}).$$

Siten ainoaksi vaihtoehdoksi jää, että  $M = P_m$ . Niinpä pisteet  $P_n$ ,  $O$  ja  $P_m$  ovat samalla suoralla ja ympyrälle  $S$  voidaan piirtää halkaisija, joka kulkee segmentin päätepisteestä  $P_n$  toisen segmentin päätepisteeseen  $P_m$ .

Tällöin on olemassa kokonaisluku  $k$  siten, että tekemällä  $k$  kappaletta annetun kulman  $\theta$  pituisia kiertoja, pistettä  $P_n$  on kierretty kiertokulman  $\pi$  verran (mod  $2\pi$ ) ja päädytty pisteeseen  $P_m$ .



Toisin sanoen kulmaa  $\theta$  vastaava kiertokulma  $\alpha$  on  $\pi:n$  rationaalimonikerta. Koska kiertokulmalle  $\alpha$  pätee nyt  $\alpha = 2\pi\theta$ , täytyy kulman  $\theta$  olla rationaaliluku. Tämä on kuitenkin ristiriita oletuksen kanssa. Niinpä alkuperäinen väite on tosi.  $\square$

**LAUSE 2.22.** *Olkoon  $\theta = \frac{p}{q}$ , missä  $p, q \in \mathbb{N}$  ja  $\text{syt}(p, q) = 1$ . Jos biljardiratakäyrä ympyrällä  $S$  sisältää kaksi yhdensuuntaista segmenttiä, niin käyrän segmenttien lukumäärä  $q$  on parillinen.*

**TODISTUS.** Nyt  $\theta = \frac{p}{q}$ , missä  $p, q \in \mathbb{N}$  ovat jaottomia keskenään. Osoitetaan, että  $q$  on muotoa  $q = 2l$ , jollakin  $l \in \mathbb{N}$ .

Kuten edellisen Lauseen todistuksessa, löytyy taas kokonaisluku  $k$  siten, että  $k:n$  kierron jälkeen segmentin päätepiste on kiertynyt kulman  $\beta = \pi + n2\pi$  verran, jollakin  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Tällöin ympyrän  $S$  kehällä kierretty matka saadaan kierretyn kulman  $\beta$  ja ympyrän säteen  $r$  avulla seuraavasti:

$$k\theta = \beta r, \text{ missä } r = \frac{1}{2\pi}.$$

Sijoittamalla yhtälöön tunnetut arvot saadaan ratkaistua  $q$ :

$$\begin{aligned} \frac{kp}{q} &= (\pi + n2\pi) \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{kp}{q} &= \frac{1 + 2n}{2}, \\ \implies q &= \frac{2kp}{1 + 2n} = 2 \cdot \frac{kp}{1 + 2n} \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

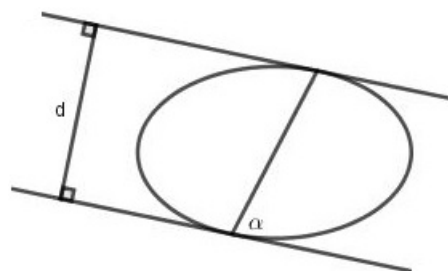
Koska  $q \in \mathbb{N}$ , on luvun  $\frac{kp}{1+2n}$  oltava joko luonnollinen luku tai rationaaliluku muotoa  $\frac{m}{2}$ , missä  $m \in \mathbb{N}$ . Nyt kuitenkin luvun  $\frac{kp}{1+2n}$  nimittäjä on aina pariton luku, joten se ei voi olla muotoa  $\frac{m}{2}$ . Siten luku  $\frac{kp}{1+2n} \in \mathbb{N}$ . Niinpä  $q$  on parillinen.  $\square$

### 2.5. 2-jaksolliset ratakäyrät.

Tutkitaan lopuksi vielä 2-jaksollisia biljardiratakäyriä ympyrällä. Yleisesti 2-jaksollinen ratakäyrä koostuu vain yhdestä segmentistä, joka on kohtisuorassa biljardipöydän reunakäyrää vastaan molemmissa päätepisteissään. Toisin sanoen segmentti on reunakäyrän normaali molemmille segmentin päätepisteille. Tämän vuoksi 2-jaksolliset pisteet ovat sidoksissa reunakäyrän normaalien ominaisuuksiin.

Jokaisella konveksilla, suljetulla ja rajoitetulla tasoalueella  $D$ , jonka reuna on sileä polku, on olemassa ainakin kaksi 2-jaksollista biljardiratakäyrää. Yksi 2-jaksollinen ratakäyrä löydetään helposti etsimällä pisin mahdollinen jänne, joka voidaan piirtää tasoalueen sisään.

Toinen ratakäyrä löydetään seuraavasti: Muodostetaan kaksi yhdensuuntaista suoraa siten, että tasoalue  $D$  jää yhdensuuntaisten suorien väliin sivuten suoria. Nyt 2-jaksollinen ratakäyrä löydetään etsimällä yhdensuuntaisten suorien välisen etäisyyden minimi  $d_{min}$  (suorien suuntaa muuttamalla) ja piirtämällä jänne sivuamispisteiden välille.



Itse asiassa yhdensuuntaisten suorien välisen etäisyyden maksimin  $d_{max}$  avulla löydetään myös 2-jaksollinen ratakäyrä, sillä se vastaa aiemmin löydettyä pisintä jännettä, joka tasoalueen  $D$  sisään voidaan piirtää. [12]

**LAUSE 2.23.** *Jos sileän tasokäyrän  $\gamma$  kaikki normaalit leikkaavat yhdessä pisteessä, niin kyseessä on ympyrän kaari ja tämän ympyrän keskipiste on normaalien leikkauspiste.*

**TODISTUS.** Olkoon  $(x_0, y_0)$  eräs tasokäyrän  $\gamma$  piste. Tällöin voidaan olettaa, että tämän pisteen lähellä tasokäyrä  $\gamma$  on jatkuvasti differentioituvan funktion  $f$  graafi annetulla välillä  $A \subset \mathbb{R}$  [1], eli

$$\gamma = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Olkoon  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  normaalien leikkauspiste ja merkitään  $I$ :llä joukkoa  $I = \{x \in A : f'(x) = 0\}$ . Käyrän  $\gamma$  normaalin yhtälö pisteessä  $(u, f(u)) \in \gamma$  on muotoa

$$\begin{cases} y - f(u) = -\frac{1}{f'(u)}(x - u), & \text{jos } u \in A \setminus I, \\ x = u, & \text{jos } u \in I. \end{cases}$$

Koska normaalit leikkaavat pisteessä  $(a, b)$ , voidaan yhtälö kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} b - f(u) = -\frac{1}{f'(u)}(a - u), & \text{jos } u \in A \setminus I, \\ a = u, & \text{jos } u \in I. \end{cases}$$

Siten tuntemattomalle funktiolle  $y = f(u)$  saadaan differentiaaliyhtälö

$$b - y = -\frac{1}{y'}(a - u) \iff (b - y)y' = -(a - u).$$

Yhtälö on separoituva, joten sen ratkaisut saadaan yhtälöstä



$$\int (b - y)dy = \int (u - a)du,$$

$$by - \frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1}{2}u^2 - au + C_2.$$

Täydentämällä neliöön yhtälö saadaan muotoon

$$b^2 - (y - b)^2 + 2C_1 = (u - a)^2 - a^2 + 2C_2,$$

$$(u - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 2(C_1 - C_2),$$

missä  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Yhtälön oikea puoli sisältää vain vakioita, joten yhtälö voidaan kirjoittaa lyhyemmin muodossa

$$(u - a)^2 + (y - b)^2 = C,$$

missä  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C > 0$ . Niinpä muodostuva käyrä on  $(a, b)$ -keskinen ja  $\sqrt{C}$ -säteinen ympyrä. Näin ollen väite on tosi.  $\square$

**HUOMAUTUS 2.24.** Ympyränmuotoisella biljardipöydällä on äärettömän monta 2-jaksollista biljardiratakäyrää. Tämä nähdään siitä, että Lauseen 2.23 nojalla ympyrän halkaisijat ovat 2-jaksollisia ratakäyriä.

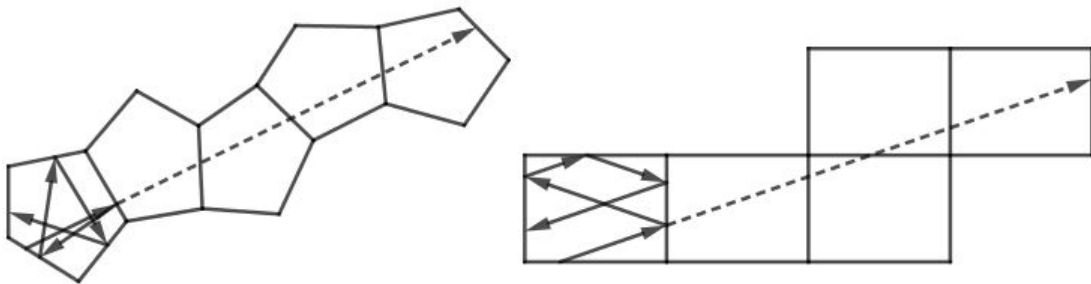
Tähän mennessä ollaan opittu, että ympyränmuotoisella biljardipöydällä kiertokulmaa vastaavan kaaren pituuden  $\theta$  avulla voidaan määrittää se, onko ratakäyrä jaksollinen vai ei, ja kuinka monta kertaa biljardipallo tulee törmäämään pöydän reunaan yhden jakson aikana. Lisäksi ollaan muun muassa havaittu, että biljardipallo kulkee joko edestakaisin ympyrän keskipisteen kautta tai kiertäen keskipistettä tietyllä etäisyydellä olevia janoja pitkin. Koska juuri opitut biljardinpeluutaidot ympyrällä eivät taida vakuuttaa vielä kanssakilpailijoita riittävästi, jatketaan biljardin tarkastelua seuraavaksi monikulmionmuotoisilla biljardipöydillä.

## Biljardia monikulmioilla

Tarkastellaan seuraavaksi biljardia yksinkertaisilla konvekseilla monikulmioilla, erityisesti neliöllä ja kolmioilla. Monikulmioissa selkeänä erona aiempaan ovat biljardipöydässä esiintyvät kulmat, minkä vuoksi myöskään aiemmin määritetty yleinen tasobiljardikuvaus ei toimi monikulmioille. Biljardiratakäyrän heijastusta kulmasta ei ole määritelty ja siksi oletetaan, että pallon törmäys kulmaan pysäyttää pallon liikkeen. Tämän luvun biljarditarkasteluissa ei sallita sellaisia biljardiratoja, jotka törmäävät biljardipöydän kulmaan.

Biljardikäyttäytyminen monikulmioilla ei ole nykyään vielä läheskään kaikilta osin selvää. Ei esimerkiksi edelleenkään tiedetä, löytyykö jokaiselta monikulmiolta edes yhtä periodista biljardiratakäyrää. On kuitenkin olemassa työkaluja, jotka helpottavat monikulmiobiljardin tutkimista. Käydään niistä yksi läpi, ennen kuin keskitytään neliö- ja kolmiobiljardiin.

Varsin hyödyllinen työkalu biljardiratakäyrän tutkimiseen monikulmioilla on taitella biljardirata ”auki” suoraksi linjaksi peilaamalla biljardipöytää aina sen sivun suhteen, johon pallo törmää ja jatkamalla ratakäyrää suoraan reunan läpi uudelle biljardipöydälle. Varsinainen ratakäyrä saadaan näkyviin, kun peilatut biljardipöydät ”taitellaan takaisin päällekkäin”. Biljardiratakäyrän taittelemista auki on havainnollistettu kuvassa 1.



KUVA 1. Eräiden monikulmioiden biljardiratakäyrien taitteleminen auki suoriksi linjoiksi.

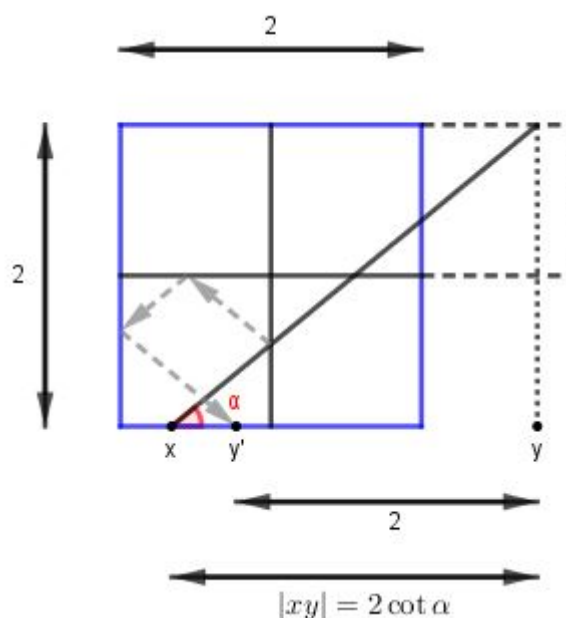
**HUOMAUTUS 3.1.** Biljardiratakäyrän aukitaittelumetodi toimii erityisen hyvin kaikille rationaalisille biljardipöydille, eli sellaisille monikulmioille, joiden kaikki kulmat ovat luvun  $\pi$  rationaalilukumonikertoja.

Rationaalisten biljardipöytien tapauksessa aukitaittelumetodilla löydetäänkin paljon jaksollisia biljardiratoja.

## 1. Biljardiratakäyrät neliöllä

Vaikka ympyrä ja neliö ovat objekteina varsin erilaisia, biljardi niiden sisällä ei itse asiassa eroa juurikaan toisistaan. Tutkitaan heijastuspisteiden kuvautumista neliön kehällä. Otetaan tarkasteluun yksikköneliö ja taitellaan biljardirata auki suoraksi.

Olkoon nyt  $x$  ratakäyrän alkupiste neliön alemmalla sivulla ja olkoon  $\alpha$  lähtökulma neliön alasivuun nähden. Lähdettyään alasivulta biljardipallo törmäilee muihin neliön sivuihin ja palaa jossain vaiheessa takaisin neliön alemmalle sivulle. Jotta voidaan tarkastella ratakäyrää neliön alasivulta takaisin neliön alasivulle, yhden yksikköneliön sijaan täytyy tarkastella  $2 \times 2$ -yksikköneliön kokonaisuutta, missä vierekkäiset yksikköneliöt ovat peilikuvia keskenään. Tällöin  $2 \times 2$ -neliön ylä- ja alasivu voidaan samaistaa keskenään ja vastaavasti vasen ja oikea sivu keskenään.



KUVA 2. Biljardiradan osumakohdan muuntuminen neliön alasivulla.

Kuten kuvasta 2 nähdään, annetuilla alkutiedoilla ratakäyrä leikkaa nyt  $2 \times 2$ -neliön ylemmän sivun pisteessä  $x + 2 \cot \alpha \pmod{2}$ . Tällä tavalla saadaan määritettyä ratakäyrän peräkkäiset osumakohdat neliön alasivuun. Itse asiassa ratakäyrän käyttäytymisen tutkiminen voidaankin siis palauttaa neliön yhden sivun osumapisteen muuntumisen tarkasteluun radan edetessä. Niinpä neliön biljardikuvaus saadaan seuraavasti:

**LEMMA 3.2.** *Olkoon  $x$  biljardiratakäyrän alkupiste yksikköneliön alasivulla ja kulma  $\alpha$  ratakäyrän lähtökulma alasivuun nähden. Ratakäyrä neliöllä määräytyy kuvauksesta*

$$f: \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\mathbb{Z}, f(x) = x + 2 \cot \alpha \pmod{2}.$$

### 1.1. Lähtökulman $\alpha$ vaikutus ratakäyrän jaksollisuuteen.

Lemmasta 3.2 nähdään, että jos  $\cot \alpha$  on rationaaliluku, niin biljardiradan määräämän suoran kulmakerroin on rationaalinen ja jos  $\cot \alpha$  on irrationaaliluku, niin suoran kulmakerroin on irrationaalinen.

HUOMAUTUS 3.3. Lemman 3.2 kuvaus neliölle käyttäytyy täysin samalla tavalla kuin Määritelmän 2.2 kuvaus  $x + \theta \pmod{1}$  ympyrän kierroille.

Huomautuksen 3.3 nojalla luvun  $\cot \alpha$  rationaalisuus merkitsee siis erityisesti sitä, että osumakohta neliön alaosivulla on jaksollinen. Tällöin biljardiratakäyrä tulee palaamaan neliön alaosivulla jossakin vaiheessa takaisin lähtöpisteeseensä. Siten *suoran rationaalisisella kulmakertoimella biljardirata neliöllä on jaksollinen*.

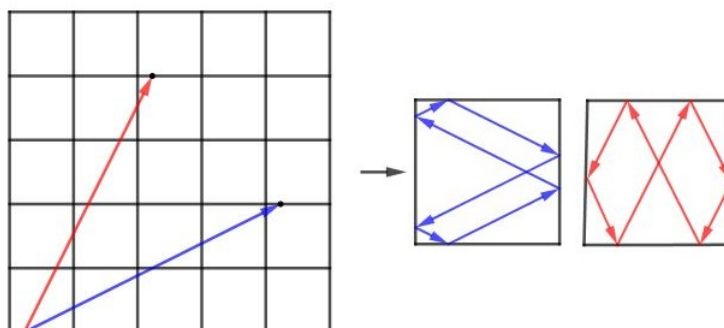
Jos taas  $\cot \alpha$  on irrationaaliluku, niin samaan tapaan kuin ympyrän tapauksessa osumakohdat neliön alaosivulla ovat tiheässä ja jakautuneet tasaisesti. Toisaalta sama tarkastelu voidaan tehdä kaikille kolmelle muullekin neliön sivulle (aliosivun lisäksi), joten osumakohdat neliön jokaisella sivulla ovat tällöin tiheässä. Niinpä *suoran irrationaalisisella kulmakertoimella biljardirata neliöllä on tiheä*.

### 1.2. Jaksolliset ratakäyrät.

Käydään hieman tarkemmin läpi ratakäyrän jaksollisuutta neliöllä seuraavan esimerkin avulla.

ESIMERKKI 3.4. Onko mahdollista lyödä biljardipallo neliön (ala)sivulta kuuden kimokkeen kautta takaisin lähtöpisteeseensä?

Helpoin tapa tutkia asiaa, on käyttää aukitaittelumetodia. Peilataan neliötä siten, että saadaan muodostettua äärellisen kokoinen ruudukko, joka suuntautuu tason ensimmäiseen neljännekkeseen. Jaksollisen ratakäyrän loppupiste tulee olla ratakäyrän alkupistettä vastaava ruudukon piste. Lisäksi kuusiperiodisen ratakäyrän täytyy leikata lähtösivu mukaan lukien ruudukon kuutta sivua. Tällöin alku- ja loppupisteen välisten vaak- ja pystysuuntaan liikuttujen ruutujen yhteenlaskettu lukumäärä täytyy siis olla kuusi. Poistamalla näin muodostettujen ratakäyrien joukosta vielä ne ratakäyrät, jotka kulkevat ruudukon jonkin kärkipisteen kautta (ts. pöydän kulman kautta), löydetään todelliset 6-jaksolliset ratakäyrät (jos niitä on olemassa).



KUVA 3. Aukitaittelumetodilla löydetään kaksi neliön samasta alkupisteestä lähtevää 6-jaksollista ratakäyrää.

Kuvasta 3 nähdään, että ruudukosta on mahdollista löytää alkupistettä vastaava piste, jolle alkupisteestä piirretty jana leikkaa kuutta ruudukon sivua lähtösivu mukaan lukien. Niinpä biljardipallo on mahdollista lyödä neliön sivulta kuuden kimmokkeen kautta takaisin lähtöpisteeseensä.

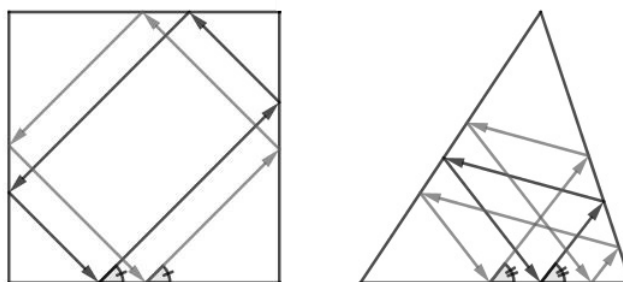
Esimerkin 3.4 tulos ei kuitenkaan päde neliön kulmasta lähteville radoille:

LAUSE 3.5. *Neliön kulmasta ei ole mahdollista lyödä palloa siten, että se palaa takaisin lähtökulmaansa.*

TODISTUS. Aukitaittelumetodin avulla huomataan, että alkupisteestä samaistettavaan pisteeseen kuljettaessa sekä vaaka-, että pystysuuntaan liikuttavien ruutujen määrä on aina parillinen. Niinpä jos alkupiste on origossa  $(0, 0)$ , niin ratakäyrän loppupiste on paikassa  $(2m, 2n)$ , missä  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tällöin myös piste  $(m, n)$  kuuluu kyseiselle ratakäyrälle ja se on lisäksi ruudukon kärkipiste. Jos luvuista  $m$  ja  $n$  jompikumpi tai molemmat ovat parittomia lukuja, piste  $(m, n)$  vastaa jotakin neliön muuta kulmaa. Jos taas molemmat luvut  $m$  ja  $n$  ovat parillisia, piste  $(m, n)$  on alkupistettä vastaava piste ja tällöin myös piste  $(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$  on ratakäyrällä oleva ruudukon kärkipiste. Menettelyä jatkamalla jokaiselta ratakäyrältä löydetään lopulta piste, jolle ainakin toinen koordinaatti on pariton luku. Niinpä neliön kulmasta lähtevä ratakäyrä tulee aina törmäämään neliön johonkin muuhun kulmaan matkalla takaisin lähtöpisteeseensä.  $\square$

HUOMAUTUS 3.6. Koska yhdensuuntaisten suorien välinen etäisyys säilyy heijastuksessa tasopeilistä, jaksolliset biljardiratakäyrät monikulmioilla eivät ole yksittäisiä. Niinpä kuten kuvasta 4 nähdään

- (1) ratakäyrille, joiden jaksollisuuden pituus on parillinen, löytyy joukko yhdensuuntaisia samanjaksoisia ratakäyriä.
- (2) ratakäyrille, joiden jaksollisuuden pituus on pariton, löytyy joukko yhdensuuntaisia ratakäyriä, joiden jaksollisuuden pituus on kaksinkertainen.



KUVA 4. Eräät 4- ja 3-jaksolliset biljardiradat ja niiden kanssa yhdensuuntaiset ratakäyrät.

Huomautuksen 3.6 nojalla Esimerkin 3.4 neliöltä löytyy ääretön joukko 6-jaksollisia ratakäyriä, jotka ovat yhdensuuntaisia Esimerkissä löydettyjen ratakäyrien kanssa.

### 1.3. Jaksottomat ratakäyrät.

Jatketaan biljardin tarkastelua neliöllä seuraavaksi jaksottomien ratakäyrien parissa. Aiemmin nähtiin, että jos neliöllä ratakäyrän kulmakerroin on irrationaalinen, niin biljardirata on jaksoton. Tällaisen ratakäyrän heijastuspisteiden muodostama ääretön jono voidaan vaihtoehtoisesti koodata symboleilla 0 ja 1 sen mukaan, tapahtuuko seuraava heijastus neliön horisontaalisesta vai vertikaalisesta sivusta. Jos käytetään aukitaittelumetodia, ratakäyrä muodostaa suoran  $L$ , joka kohtaa vastaavasti ruudukon vaaka- (symboli 0) ja pystyviivoja (symboli 1). Näin muodostuvaa nollia ja ykkösiä sisältävää jonoa kutsutaan *suoran  $L$  leikkausjonoksi*. Perehdytään hieman tarkemmin tällaisten jonojen ominaisuuksiin.

**MÄÄRITELMÄ 3.7.** Jonoa kutsutaan *kvasisjaksolliseksi*, jos jokainen sen äärellinen osajono sisältyy siihen äärettömän monta kertaa.

Kvasijaksollinen jono muistuttaa siis hyvin paljon jaksollista jonoa, mutta siihen sisältyy pieniä poikkeamia. Edellisen Määritelmän nojalla leikkausjonosta voidaan sanoa seuraavaa:

**LAUSE 3.8.** *Suoran  $L$  leikkausjono  $w$  irrationaalisella kulmakertoimella ei ole jaksollinen, mutta se on kvasisjaksollinen.*

**TODISTUS.** Jos leikkausjonon  $w$  äärellinen osajono sisältää  $p$  kappaletta ykkösiä ja  $q$  kappaletta nollia, niin vastaava suoran  $L$  segmentti liikkuu siis ruudukolla  $p$  yksikköä pystysuuntaan ja  $q$  yksikköä vaakasuuntaan.

Osoitetaan ensin, että suoran  $L$  leikkausjono  $w$  ei ole jaksollinen. Antiteesi: Oletetaan, että leikkausjono  $w$  on jaksollinen ja sisältäköön jakso  $p_0$  ykköstä ja  $q_0$  nollaa. Olkoon lisäksi  $L_n$  leikkausjonon osajono, joka on  $n$ :än jakson pituinen. Tällöin suoran  $L$  kulmakerroin on osajonojen  $L_n$  kulmakertoimien raja-arvo, kun  $n \rightarrow \infty$ . Osajonon  $L_n$  kulmakerroin on  $\frac{np_0}{nq_0}$ , joten raja-arvoksi ja siten myös suoran  $L$  kulmakertoimeksi saadaan  $\frac{p_0}{q_0} \in \mathbb{Q}$ . Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, sillä suoran kulmakertoimen piti olla irrationaalinen. Näin ollen leikkausjono  $w$  ei ole jaksollinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että leikkausjono  $w$  on kuitenkin kvasisjaksollinen: Aiemmasta tiedetään, että tasopeilin heijastus säilyttää yhdensuuntaisten suorien väliset etäisyydet. Niinpä jos kahden lähellä toisiaan olevan neliön sivun pisteen kautta piirretään yhdensuuntaiset ratakäyrät, ne törmäävät neliön seiniin samassa järjestyksessä aina siihen saakka, kunnes ratakäyrät kulkevat niin läheltä neliön jotakin kulmaa, että ratakäyrät törmäävät kulman eri puolille. Näin ollen jos kaksi neliön pistettä ovat riittävän lähellä toisiaan, niin näiden pisteiden kautta piirrettyjen yhdensuuntaisten ratakäyrien leikkausjonojen osajonot ovat riittävän pitkältä matkalta yhtenevät. Nyt suoran  $L$  kulmakerroin on irrationaalinen, joten biljardirata neliöllä on tiheä. Tällöin ratakäyrä tulee palaamaan sen heijastuspisteiden mihin tahansa läheisyyteen äärettömän monta kertaa. Niinpä jokainen ratakäyrän leikkausjonon äärellinen osajono tulee esiintymään siinä äärettömän monta kertaa. Tästä seuraa leikkausjonon  $w$  kvasisjaksollisuus.  $\square$

## 2. Biljardiratakäyrät kolmioilla

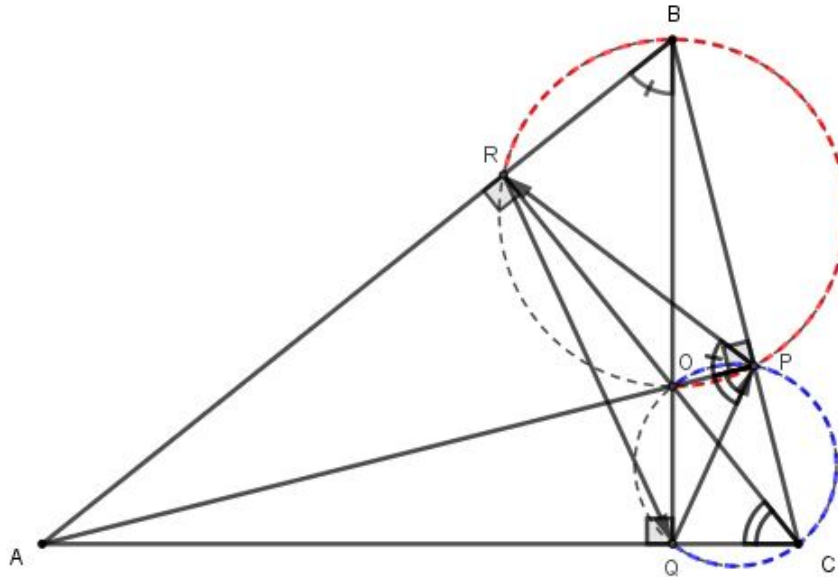
Siirryttäessä neliöstä kolmioon, biljardiratakäyrän tutkiminen muuttuu jo selvästi hankalammaksi, huolimatta kolmion geometrisesta yksinkertaisuudesta. Biljardiratakäyrän ominaisuuksiin kolmioilla vaikuttaa se, onko tarkasteltava kolmio teräväkulmainen, suorakulmainen vai tylppäkulmainen. Eniten biljardiratakäyristä osataan sanoa suorakulmaisilla kolmioilla ja vähiten tylppäkulmaisilla kolmioilla. Aloitetaan tutkimus kuitenkin teräväkulmaisista kolmioista.

### 2.1. Teräväkulmaisten kolmioiden jaksolliset ratakäyrät.

Teräväkulmaisen kolmion jaksollisista ratakäyristä osataan sanoa seuraavaa:

LAUSE 3.9. *Teräväkulmaisen kolmion muotoisella biljardipöydällä sivujen korkeusjanojen päätepisteet yhdistämällä saadaan muodostettua 3-jaksollinen biljardiratakäyrä.*

TODISTUS. Olkoon  $\triangle ABC$  teräväkulmainen kolmio ja olkoon piste  $P$  kulman  $\angle A$  vastaisen sivun korkeusjanan päätepiste, piste  $Q$  kulman  $\angle B$  vastaisen sivun korkeusjanan päätepiste ja piste  $R$  kulman  $\angle C$  vastaisen sivun korkeusjanan päätepiste. Olkoon lisäksi piste  $O$  korkeusjanojen leikkauspiste. Kolmio on esitetty kuvassa 5.



KUVA 5. Korkeusjanojen päätepisteiden kautta kulkeva 3-jaksollinen biljardiratakäyrä.

Nyt huomataan, että nelikulmiolla  $BPOR$  kulmat  $\angle BPO$  ja  $\angle BRO$  ovat suorita kulmia, joten nelikulmion kärkipisteet sijaitsevat nelikulmion ympäri piirretyllä ympyrällä. Tällöin kulmat  $\angle RBO$  ja  $\angle RPO$  ovat saman ympyräkaaren kehäkulmina yhtä suuret.

Vastaavasti nelikulmion  $CQOP$  kärkipisteiden kautta voidaan piirtää ympyrä. Tällöin kulmat  $\angle QPO$  ja  $\angle QCO$  ovat saman ympyräkaaren kehäkulmina yhtä suuret.

Lisäksi huomataan, että kolmiot  $\triangle ABQ$  ja  $\triangle ACR$  ovat yhdenmuotoiset, sillä molemmat kolmiot ovat suorakulmaisia ja kulma  $\angle A$  on molemmille kolmiolle yhteinen. Niinpä kulmat  $\angle ABQ$  ja  $\angle ACR$  ovat yhtä suuret. Toisaalta nyt  $\angle ABQ = \angle RBO$  ja  $\angle ACR = \angle QCO$ , joten pätee  $\angle RPO \cong \angle RBO \cong \angle QCO \cong \angle QPO$ . Erityisesti  $\angle RPO \cong \angle QPO$ , joten myös heijastuskulmat  $\angle BPR$  ja  $\angle CPQ$  ovat yhtä suuret.

Samaan tapaan saadaan osoitettua, että kulmat  $\angle CQP$  ja  $\angle AQR$  ovat keskenään yhtä suuret ja kulmat  $\angle ARQ$  ja  $\angle BRP$  ovat keskenään yhtä suuret.  $\square$

Lauseen 3.9 ratakäyrää kutsutaan Fagnanon biljardiratakäyräksi. Nimi juontuu Giovanni Fagnanon vuonna 1775 esittämästä matemaattisesta ongelmasta, missä haluttiin määrittää teräväkulmaisen kolmion sisälle piiriltään mahdollisimman pieni kolmio. Ongelman ratkaisuna saadaan kolmio, jonka kärkipisteinä ovat korkeusjanojen päätepisteet. Tämä samainen kolmio muodostaa 3-jaksollisen biljardiratakäyrän annetulle teräväkulmaiselle kolmiolle.

Koska tiedetään, että kahden yhdensuuntaisen suoran välinen etäisyys ei muutu heijastuksessa tasopeilistä, Huomautus 3.6 nojalla teräväkulmaiselle kolmiolle pätee 3-jaksollisen radan lisäksi seuraavaa:

**SEURAUUS 3.10.** *Teräväkulmaisella kolmiolla on joukko 6-jaksollisia ratakäyriä, jotka ovat yhdensuuntaisia Fagnanon ratakäyrän kanssa.*

## 2.2. Tylppäkulmaisten kolmioiden jaksolliset ratakäyrät.

Toisin kuin teräväkulmaisille kolmioille, tylppäkulmaisille kolmiolle ei olla löydetty Fagnanon ratakäyrän kaltaista kaikille yhteistä jaksollista ratakäyrää. Itse asiassa edelleenkin ei tiedetä, onko jokaisella tylppäkulmaisella kolmiolla edes jaksollista biljardiratakäyrää. Melko hiljattain on kuitenkin kyetty osoittamaan Richard Schwartzin toimesta, että jokaiselta kolmiolta, jonka kaikki kulmat ovat suuruudeltaan korkeintaan  $100^\circ$ , löytyy jaksollinen biljardirata. [10]

Vaikka tylppäkulmaisille kolmioille ei osata sanoa jaksollisista ratakäyristä paljontaan, pystytään niille kuitenkin sanomaan jotakin:

**LAUSE 3.11.** *Jokaiselle luonnolliselle luvulle  $n$  on olemassa tylppäkulmainen kolmio  $\Delta(n)$ , jonka jokainen jaksollinen ratakäyrä sisältää enemmän kuin  $n$  segmenttiä.*

Lauseen todistus löytyy lähteestä [9]

Määritellään kolmion periodisia ratakäyriä varten seuraavaksi *kohtisuora ratakäyrä*.

**MÄÄRITELMÄ 3.12.** Biljardiratakäyrää kolmiolla kutsutaan *kohtisuoraksi*, jos ratakäyrä kohtaa kolmion jonkin sivun kohtisuorassa sivua vastaan.

Seuraavan lauseen nojalla tietynmuotoisilla tylppäkulmaisilla kolmioilla on olemassa kohtisuora jaksollinen biljardiratakäyrä:

**LAUSE 3.13.** *Jos kolmion  $\triangle ABC$  teräville kulmille  $\alpha$  ja  $\beta$  pätee  $k\alpha = m\beta < \frac{\pi}{2}$ , missä  $k, m \in \mathbb{N}$ , niin kolmiolta  $\triangle ABC$  löytyy kohtisuora  $2(k+m)$ -jaksollinen ratakäyrä.*

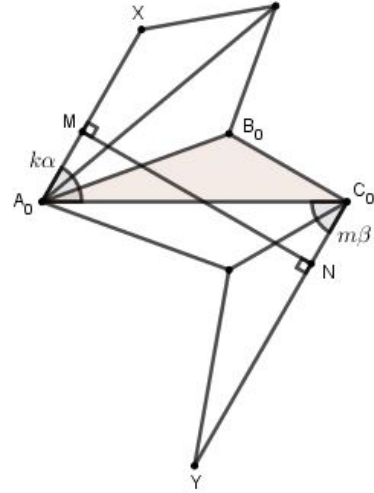


TODISTUS. Käytetään aukitaittelumetodia ja konstruoidaan jono kolmioita siten, että kahdella vierekkäisellä kolmiolla on aina yksi yhteinen sivu ja kyseiset kolmiot on sijoitettu symmetrisesti tämän sivun suhteen. Olkoon kolmio  $\Delta ABC = \Delta A_0 B_0 C_0$ . Tällöin saadaan kolmioiden muodostama ketju

$$\Delta A_{-m} B_{-m} C_0, \dots, \Delta A_{-1} B_{-1} C_0, \Delta A_0 B_0 C_0, \Delta A_0 B_1 C_1, \dots, \Delta A_0 B_{k-1} C_{k-1},$$

missä kolmiota  $\Delta A_0 B_0 C_0$  on peilattu  $m$  kertaa vastapäivään kulman  $C_0$  ympäri ja  $k - 1$  kertaa vastapäivään kulman  $A_0$  ympäri. (Katso kuva)

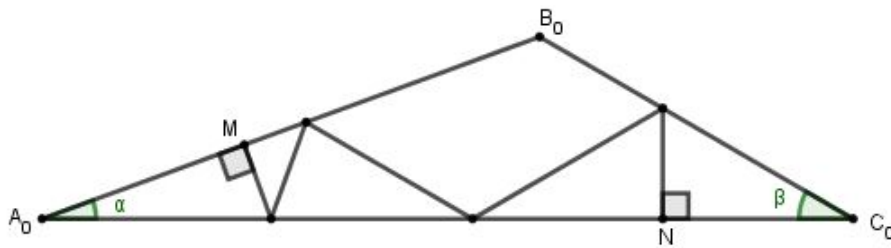
Nyt kolmion  $\Delta A_0 B_{k-1} C_{k-1}$  yksi sivu (kuvassa  $A_0 X$ ) muodostaa sivun  $A_0 C_0$  kanssa kulman  $k\alpha$ . Vastaavasti yksi kolmion  $\Delta A_{-m} B_{-m} C_0$  sivuista (kuvassa  $C_0 Y$ ) muodostaa sivun  $C_0 A_0$  kanssa kulman  $m\beta$ . Koska  $k\alpha = m\beta$ , niin vuorokulmalauseen nojalla sivujen  $A_0 X$  ja  $C_0 Y$  täytyy olla yhdensuuntaiset. Koska lisäksi  $k\alpha < \frac{\pi}{2}$  ja  $m\beta < \frac{\pi}{2}$ , niin voidaan piirtää jana  $MN$  sivulta  $A_0 X$  sivulle  $C_0 Y$  siten, että jana  $MN$  on kohtisuorassa sivuja  $A_0 X$  ja  $C_0 Y$  vastaan ja lisäksi jana  $MN$  on kokonaan kolmioiden muodostaman ketjun sisäpuolella.



Olkoon janan  $MN$  ja kolmioiden sivujen leikkauspisteiden muodostama jono muotoa

$$N = M_{-m}, M_{-m+1}, \dots, M_{-1}, M_0, M_1, \dots, M_{k-1}, M_k = M.$$

Taittelemalla kaikki  $k + m$  kolmiota takaisin päällekkäin, segmentit  $M_i M_{i+1}$ , missä  $-m \leq i \leq k - 1$ , muodostavat kahteen kertaan kuljettaessa kolmion  $\Delta A_0 B_0 C_0$  kohtisuoran jaksollisen ratakäyrän, jossa on  $2(k + m)$  segmenttiä.  $\square$



KUVA 6. Eräällä tylppäkulmaisella kolmiolla oleva kohtisuora ratakäyrä.

### 2.3. Suorakulmaisten kolmioiden jaksolliset ratakäyrät.

Suorakulmaisia kolmioita on helpompi tutkia, minkä vuoksi niiden jaksollisista biljar-diradoista osataankin sanoa eniten.

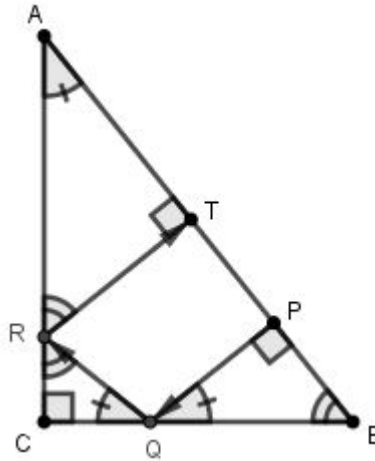
LAUSE 3.14. *Jokaisella suorakulmaisella kolmiolla on ainakin yksi jaksollinen biljar-diratakäyrä.*

TODISTUS. Yksi suorakulmaisen kolmion jaksollinen ratakäyrä löydetään käyttämällä kohtisuoraa ratakäyrää.

Olkoon kolmio  $\triangle ABC$  suorakulmainen, missä  $AB$  on kolmion hypotenuusa ja muille sivuille pätee  $BC \leq AC$ . Olkoon lisäksi ratakäyrän lähtöpiste  $P \in AB \setminus \{A, B\}$  sellainen, että pisteestä  $P$  kohtisuoraan lähtevä ratakäyrä osuu kateettiin  $BC$ . Merkitään kateetin  $BC$  ja ratakäyrän leikkauspistettä pisteellä  $Q$ . ( $Q \notin \{B, C\}$ )

Jos nyt  $BC < AC$  (katso kuva 7), niin sivujen vastaisille kulmille pätee  $\angle A < \angle B$ . Toisaalta huomataan, että kolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle QBP$  ovat KK-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, sillä molemmat kolmiot ovat suorakulmaisia ja kulma  $\angle B$  on niille yhteinen. Niinpä  $\angle PQB \cong \angle A < \angle B$ . Heijastuslain nojalla  $\angle PQB \cong \angle CQR$ , missä  $R$  on ratakäyrän seuraava osumapiste kolmion jollekin sivulle. Koska nyt  $\angle CQR < \angle B$ , niin täytyy olla, että  $R \in AC$ . Nyt huomataan, että kolmiot  $\triangle PQB$  ja  $\triangle CQR$  ovat suorakulmaisina kolmioina yhdenmuotoiset, joten  $\angle QRC \cong \angle B$ . Edelleen heijastuslain nojalla  $\angle QRC \cong \angle ART$ , missä  $T$  on ratakäyrän seuraava osumakohta kolmion jollekin sivulle. Nyt  $\angle ART \cong \angle B < \angle C$ , joten täytyy olla, että  $T \in AB$ . Toisaalta nyt  $\angle ART \cong \angle B$  ja kulma  $\angle A$  on yhteinen kolmioille  $\triangle ABC$  ja  $\triangle ART$ , joten kolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle ART$  ovat yhdenmuotoiset. Niinpä kulma  $\angle RTA$  on suorakulmainen. Näin ollen biljardipallo kimmottuaan pisteestä  $T$  palaa samaa reittiä takaisin lähtöpisteeseensä, jolloin kolmiolle muodostuu 6-jaksollinen biljardiratakäyrä.

Jos taas  $BC = AC$ , niin kulmat  $\angle A$  ja  $\angle B$  ovat yhtäsuuret. Tällöin ratakäyrän muodostama segmentti  $QR$  on yhdensuuntainen kolmion sivun  $AB$  kanssa, joten varmasti myös tällöin  $R \in AC$  ja vastaava todistus pätee.  $\square$



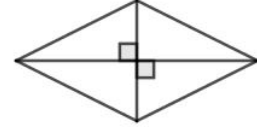
KUVA 7. Hypotenuusalta kohtisuorasti lähtevä 6-jaksollinen ratakäyrä suorakulmaisella kolmiolla.

Seuraava lause kertoo lisää jaksollisista ratakäyristä suorakulmaisella kolmiolla. Lauseen todistus on melko pitkä, minkä vuoksi se jätetään tässä läpikäymättä. Lauseen yksityiskohtainen todistus on luettavissa lähteestä [9]

LAUSE 3.15. *Suorakulmaiselle kolmiolle lähes kaikki biljardiratakäyrät, jotka alkavat kohtisuorassa kolmion sivua vastaan, ovat jaksollisia.*

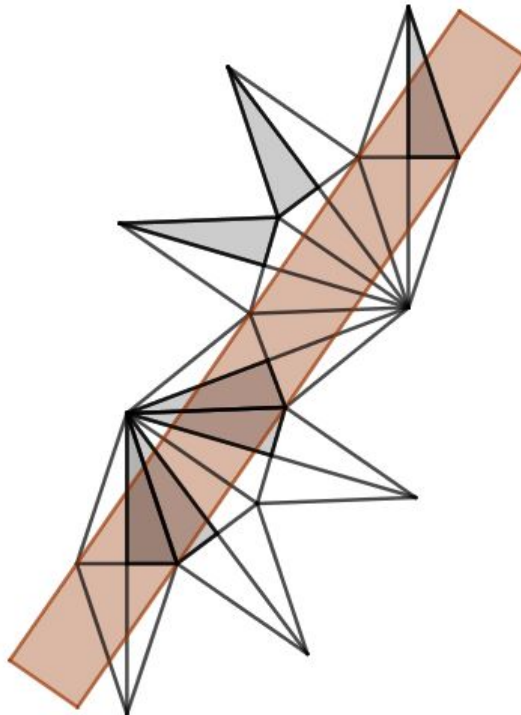
Lauseen todistuksen idea perustuu siihen, että tutkitaan neljästä suorakulmaisesta kolmiosta muodostettua neljästä, jonka diagonaalilta alkava ratakäyrä avataan aukitaittelumetodilla.

Suorakulmaisten kolmioiden ratojen jaksollisuuden tutkiminen onkin helpointa juuri neljäkkäiden ja aukitaittelumetodin avulla. Ensin muodostetaan neljäkäs peilaamalla kolmiota molempien kateettien suhteen, jolloin neljän yhtenevän kolmion kateetit muodostavat neljäkkään diagonaalit.



Näin syntyneenä neljäkässtä peilaamalla saadaan konstruoitua neljäkäsjono siten, että viimeinen neljäkäs on samassa asennossa kuin ensimmäinen neljäkäs (katso kuva 8). Tällöin neljäkäsjonon sisälle muodostuu kuvan 8 mukaisesti suora ”käytävä”. Käytävän sivut ovat yhdensuuntaiset sellaisen suoran kanssa, joka kulkee ensimmäisen ja viimeisen neljäkkään keskipisteiden kautta. Jos ensimmäisessä ja viimeisessä neljäkkäessä toisiaan vastaavat pisteet liitetään yhteen janalla ja muodostunut jana pysyy kokonaan ”käytävän”sisäpuolella, niin janaa vastaava ratakäyrä on jaksollinen.

Itse asiassa kaikkia tällaisen käytävän sisällä kulkevia, käytävän suuntaisia biljardiratakäyriä kutsutaan alan kirjallisuudessa *S-ratakäyriksi*. Tällaiset S-ratakäyrät ovat kaikki paitsi jaksollisia, mutta myös kohtisuoria. Kohtisuoruus johtuu siitä, että ratakäyrä on ensimmäisen ja viimeisen neljäkkään keskipisteiden kautta piirretyn suoran suuntainen. Tällöin ratakäyrä tulee aina olemaan kohtisuorassa joko jonkin peilatun neljäkkään sivun kanssa, tai diagonaalin kanssa.



KUVA 8. Neljäkässtä aukitaittelemalla muodostuva jaksollisten ratakäyrien ”käytävä”. Kuvassa alkuperäinen suorakulmainen kolmio on tummennettu jokaiseen neljäkkääseen.

Suorakulmaisten kolmioiden jaksollisuudesta voidaan sanoa myös seuraavaa:

LAUSE 3.16. *Jokaisen suorakulmaisen kolmion sisällä olevan pisteen kautta kulkee jokin jaksollinen ratakäyrä.*

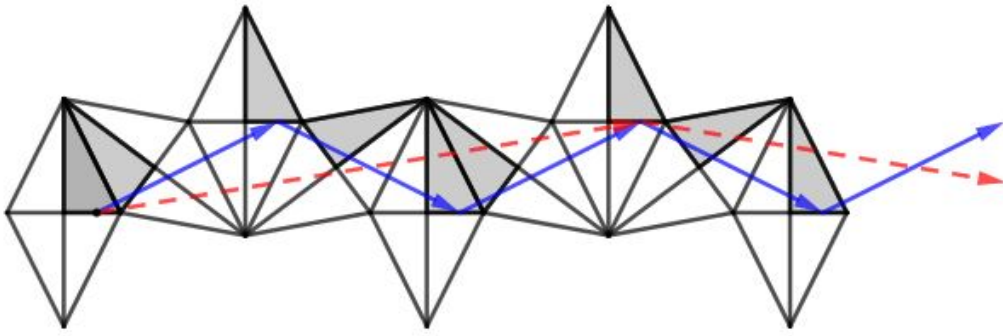
TODISTUS. Yksityiskohtainen todistus on nähtävissä lähteessä [9] mutta käydään tässä läpi todistuksen kulkua pääpiirteittäin. Olkoon kolmion pienempi terävä kulma suuruudeltaan  $\alpha$ , jolloin neljäkkään terävä kulma on suuruudeltaan  $2\alpha$ . Neljäkkään peilaaminen jonkin sivun suhteen vastaa neljäkkään kiertoa kulman  $2\alpha$  verran myötätai vastapäivään neljäkkään terävän kulman suhteen.

Peilataan nyt alkuperäistä neljäkästä ensin  $n$  kertaa siten, että ollaan kierretty kulman  $2n\alpha$  verran vastapäivään terävän kulman suhteen. Tämän jälkeen peilataan  $n$  kertaa lisää, mutta siten, että neljäkäs kiertyy myötätapäivään kulman  $2n\alpha$  verran neljäkkään toisen terävän kulman suhteen. Tällöin ensimmäinen ja viimeinen neljäkäs ovat samassa asennossa ja neljäkäsjonon sisälle voidaan piirtää jaksollisten ratakäyrien ”käytävä”(katso kuva 8). Oletetaan, että  $2n\alpha < \pi \leq 2(n+1)\alpha$ . Tällöin edellä muodostettu jaksollisten ratakäyrien ”käytävä”peittää ensimmäisessä neljäkkäessä olevan alkuperäisen suorakulmaisen kolmion alaosan kuvan 8 osoittamalla tavalla.

Koska ”käytävä”ei peitä kolmiota kuitenkaan kokonaan, täytyy neljäkästä yrittää taiteilla auki vielä siten, että muodostuva uusi ”käytävä”kulkisi jäljelle jääneen kolmion osan kautta. Kierretään neljäkästä samaan tapaan kuin edellä, mutta tällä kertaa kulman  $2(n+1)\alpha$  verran vastapäivään ja sen jälkeen kulman  $2(n+1)\alpha$  verran myötätapäivään, jolloin viimeinen neljäkäs on taas samassa asennossa ensimmäisen kanssa. Tällöin muodostuva jaksollisten ratakäyrien ”käytävä”peittää alkuperäisen kolmion yläosan. Nämä kaksi muodostettua ”käytävää”peittävät koko alkuperäisen kolmion jos ja vain jos aluksi muodostetun ”käytävän”ylempi reunakäyrä leikkaa jälkimmäisen ”käytävän”alempaan reunakäyrän alkuperäisen kolmion ulkopuolella. Leikkauspiste tulee todella olemaan kolmion ulkopuolella, sillä neljäkkään kolmen kärkipisteen ja mainitun leikkauspisteen kautta voidaan piirtää ympyrä, jonka sisälle koko neljäkäs jää.  $\square$

S-ratakäyrien lisäksi suorakulmaiselta kolmiolta voidaan löytää muitakin periodisia ratakäyriä. Olkoon edelleen kolmion pienempi terävä kulma suuruudeltaan  $\alpha$ , jolloin neljäkkään terävä kulma on  $2\alpha$ . Jos neljäkästä kierretään ensin kulman  $2\alpha$  verran vastapäivään ja sen jälkeen toisen terävän kulman suhteen  $2\alpha$  verran myötätapäivään, on viimeinen neljäkäs samassa asennossa kuin ensimmäinen mutta ylempänä. Jatetaan neljäkkään kiertoa kulman  $2\alpha$  verran edelleen myötätapäivään ja kierretään tämän jälkeen taas toisen terävän kulman suhteen  $2\alpha$  verran vastapäivään. Tällöin ollaan jälleen samassa asennossa ja samassa linjassa alkuperäisen neljäkkään kanssa. Jatetaan samaan tapaan neljäkkäiden peilaamista.

Muodostuneella neljäkäsjonolla alkuperäisen neljäkkään kanssa samassa asennossa olevien neljäkkäiden horisontaaliset diagonaalit toimivat nyt eräänlaisina peilipintoina, joista ratakäyrä heijastuu (katso kuva 9). Tällaisia ratakäyriä kutsutaan *peiliratakäyriksi*. Jos alkuperäisen kolmion horisontaaliselta kateetilta lähtevä ratakäyrä heijastuu jonkin ylemmän neljäkkään peilipinnalta alkuperäistä pistettä vastaavasta pisteestä, muodostunut peiliratakäyrä on jaksollinen.



KUVA 9. Kaksi samasta pisteestä lähtevää jaksollista peiliratakäyriä. Kuvassa alkuperäinen suorakulmainen kolmio on tummennettu jokaiseen neljääkkäeseen.

Tässä luvussa opittiin käyttämään biljardipöydän aukitaittelumetodia monikulmioiden jaksollisia ratakäyriä etsittäessä. Neliöbiljardin huomattiin toimivan varsin samalla tavalla kuin ympyräbiljardi, joten biljardipallon lähtökulman  $\alpha$  avulla pystytään määrittämään täysin se, onko biljardirata neliöllä jaksollinen vai ei. Kolmioiden tapauksissa ratakäyrän tarkasteleminen osoittautuikin sitten huomattavasti haasteellisemmaksi ja erimuotoisille kolmioille löydettiin erilaisia ratakäyriä. Kolmiobiljardin jaksollisia ratakäyriä etsittäessä tutuksi tulivat myös kohtisuora ratakäyrä, S-ratakäyrä ja peiliratakäyrä.

Tässä luvussa opituilla biljarditaidoilla pystyttäisiin luultavasti jo vakuuttamaan ainakin osa pelikavereista, mutta pyörryksiin heitä ei näillä taidoilla vielä puhuttaisi. Jotta voitaisiin nauttia kaveriporukassa jonkinlaisesta biljardimaisterin tittelistä, täytyy taitoja kerryttää vielä lisää. Tarkastellaankin seuraavaksi elliptistä biljardia.

## Biljardia ellipsillä

Käydään aluksi läpi hieman ellipsin ominaisuuksia.

**MÄÄRITELMÄ 4.1.** Olkoon  $F_1$  ja  $F_2$  tason kaksi eri pistettä. Ellipsi  $\mathcal{E}$  on joukko tason pisteitä  $P$ , joille etäisyyksien summa pisteistä  $F_1$  ja  $F_2$  on vakio,  $2a > |F_1F_2|$ . Toisin sanoen

$$\mathcal{E} = \{P : |PF_1| + |PF_2| = 2a\}.$$

Annettuja pisteitä  $F_1$  ja  $F_2$  kutsutaan ellipsin  $\mathcal{E}$  *polttopisteiksi* ja polttopisteiden välistä janaa  $F_1F_2$  ellipsin  $\mathcal{E}$  *polttoväliksi*. Lisäksi janoja  $PF_1$  ja  $PF_2$  kutsutaan pisteen  $P$  määräämiksi *polttosäteiksi*.

Ellipsin polttopisteiden kautta kulkevaa segmenttiä kutsutaan ellipsin *isoakseliksi* ja sitä vastaan kohtisuoraa segmenttiä, joka kulkee isoakselin keskipisteen kautta ellipsin *pikkuakseliksi*. Iso- ja pikkuakselien leikkauspiste on ellipsin keksipiste.

**MÄÄRITELMÄ 4.2.** Piste  $X \in \mathbb{R}^2$  on ellipsin  $\mathcal{E}$  ulkopuolella, jos  $|XF_1| + |XF_2| > 2a$ , ja vastaavasti piste  $X$  on ellipsin  $\mathcal{E}$  sisäpuolella, jos  $|XF_1| + |XF_2| < 2a$ .

Olkoon isoakselin pituus edelleen  $2a$  ja olkoon pikkuakselin pituus  $2b$ , missä  $a > b > 0$ . Tällöin koordinaattien  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avulla ilmaistuna origokeskisen ellipsin yhtälö on muotoa

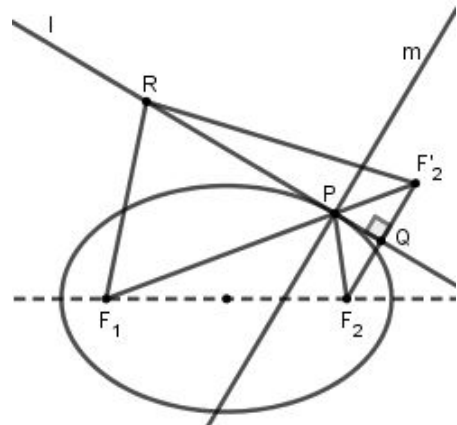
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seuraava ellipsin ominaisuus on varsin hyödyllinen biljarditarkasteluja silmällä pitäen:

**LEMMA 4.3.** *Mille tahansa ellipsin pisteelle  $P$  suorien  $\overleftrightarrow{F_1P}$  ja  $\overleftrightarrow{F_2P}$  muodostamien kulmien kulmanpuolittajasuorat  $l$  ja  $m$  ovat ellipsin pisteeseen  $P$  piirretyt tangentti ja normaali.*

**TODISTUS.** Olkoon suora  $m$  kulman  $\angle F_1PF_2$  kulmanpuolittaja ja suora  $l$  sen vieruskulman kulmanpuolittaja. Piirretään pisteen  $F_2$  kautta suora, joka on kohtisuorassa suoran  $l$  kanssa. Olkoon piste  $Q$  muodostetun suoran ja suoran  $l$  leikkauspiste ja olkoon piste  $F'_2$  muodostetun suoran ja suoran  $\overleftrightarrow{F_1P}$  leikkauspiste. Tällöin KSK-lauseen nojalla kolmiot  $\triangle F_2PQ$  ja  $\triangle F'_2PQ$  ovat yhtenevät ja siten erityisesti

$$|F_2P| = |F'_2P|.$$



Nyt mille tahansa suoran  $l$  pisteelle  $R \neq P$  pätee, että

$$|F_1R| + |RF'_2| > |F_1F'_2| = |F_1P| + |PF_2| = 2a.$$

Niinpä jokainen pisteestä  $P$  eroava suoran  $l$  piste on ellipsin ulkopuolella, joten suora  $l$  on ellipsin pisteeseen  $P$  piirretty tangentti. Lisäksi, koska suorat  $l$  ja  $m$  ovat vieruskulmien kulmanpuolittajat, ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Niinpä suora  $m$  on ellipsin pisteeseen  $P$  piirretty normaali.  $\square$

Lemmasta 4.3 saadaan suora seuraus:

**SEURAUS 4.4.** *Jokaiseen ellipsin pisteeseen voidaan piirtää tangentti.*

Kuten muunkin muotoisilla biljardipöydillä myös ellipsillä heijastuslaki pätee, joten reunakäyrän tangentin ja reunaan kohti tulevan ratasäteen välinen kulma on yhtä suuri kuin lähtevän säteen ja reunakäyrän tangentin välinen kulma. Toisaalta heijastuskulma voidaan ilmoittaa myös ratasäteen ja reunakäyrän normaalin välisen kulman avulla, sillä myös nämä kulmat ovat keskenään yhtä suuret.

Elliptisellä biljardipöydällä ratakäyrän tarkastelu voidaan jakaa kolmeen tapaukseen. Lähdetään tarkastelemaan niistä ensimmäistä.

## 1. Polttopisteen kautta kulkevat biljardiratakäyrät

Ennen kuin tarkastellaan lähemmin ratakäyrän kulkureittiä, otetaan käyttöön seuraava hyödyllinen lause:

**LAUSE 4.5.** *Polttosäteet  $F_1A$  ja  $F_2A$  muodostavat yhtä suuret kulmat ellipsin pisteeseen  $A$  piirretyn tangentin kanssa.*

**TODISTUS.** Lemman 4.3 nojalla pisteeseen  $A$  piirretty normaali puolittaa kulman  $\angle F_1AF_2$ , joten kyseisten polttosäteiden ja normaalin väliset kulmat ovat yhtä suuret. Toisaalta pisteeseen  $A$  piirretty tangentti on kohtisuorassa normaalia vastaan, joten tangentin ja polttosäteen välinen kulma saadaan vähentämällä suorasta kulmasta polttosäteen ja normaalin välinen kulma. Näin ollen polttosäteiden ja tangentin väliset kulmat ovat siis yhtä suuret.  $\square$

Tarkastellaan nyt biljardipallon kulkua biljardipöydällä. Olkoon biljardipallo elliptisellä biljardipöydällä aluksi paikassa  $P_1$  ja lyödään se ellipsin polttopisteen  $F_1$  suuntaan. Kun pallo törmää seuraavan kerran pöydän reunaan pisteessä  $P_2$ , se kimpoaa siitä heijastuslain mukaisesti. Lauseen 4.5 nojalla pallo jatkaa pisteestä  $P_2$  matkaa kohti ellipsin toista polttopistettä  $F_2$ . Seuraavan kerran pöydän reunaan törmättyään biljardipallo kulkee taas polttopisteen  $F_1$  läpi ja niin edelleen. Siispä voidaan todeta:

**LEMMA 4.6.** *Jos biljardiratakäyrän yksi segmentti kulkee ellipsin polttopisteen kautta, niin sen jokainen segmentti kulkee polttopisteen kautta siten, että peräkkäiset segmentit kulkevat eri polttopisteiden kautta.*

Seuraavan lauseen mukaan polttopisteen kautta kulkevan ratakäyrän segmentit alkavat lähestyä melko nopeasti isoakselia.

LAUSE 4.7. Olkoon biljardipöytä  $Q$  elliptinen ja olkoon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  biljardipöydän reunakäyrällä  $\partial Q$  olevien törmäyspisteiden muodostama jono. Oletetaan lisäksi, että kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ , segmentti  $a_n a_{n+1}$  kulkee ellipsin polttopisteen kautta. Tällöin biljardiratakäyrä suppenee kohti ellipsin isoakselia.

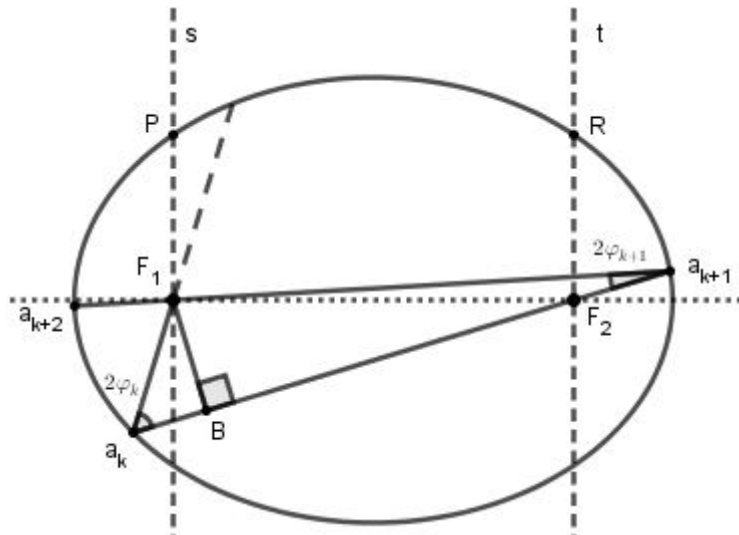
TODISTUS. Piirretään ellipsille molempien polttopisteiden kautta pikkuakselin suuntaiset suorat  $s$  ja  $t$  kuten kuvassa 1. Nämä suorat jakavat ellipsin, eli biljardipöydän reunakäyrän  $\partial Q$ , kolmeen osaan siten, että  $\partial Q_1$  on suoran  $s$  vasemmalle puolelle jäävä osa,  $\partial Q_2$  on suorien  $s$  ja  $t$  väliin jäävä osa ja  $\partial Q_3$  on suoran  $t$  oikealle puolelle jäävä osa.

Tutkitaan ensin sellaisten ratakäyrien joukkoa  $W_1$ , jonka ratakäyrät alkavat reunalta  $\partial Q_1$  ja kulkevat läpi polttopisteen  $F_2$  (seuraava heijastuspiste on siten reunalla  $\partial Q_3$ ):

Nyt huomataan, että polttopisteen kautta kulkevan ratakäyrän segmentin ja reunakäyrän normaalin välinen heijastuskulma  $\varphi$  on nolla jos ja vain jos ratakäyrän segmentti kulkee isoakselia pitkin. Niinpä riittää näyttää, että joukon  $W_1$  heijastuskulmien jono  $\{\varphi_{n_1}\}$  suppenee kohti nollaa. Näytetään aluksi, että jono  $\{\varphi_{n_1}\}$  on vähenävä:

Olkoon  $a_k$ ,  $a_{k+1}$  ja  $a_{k+2}$  kolme peräkkäistä jonon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alkioita ja olkoon  $a_k \in \partial Q_1$ . Nyt segmentti  $a_k a_{k+1}$  kulkee polttopisteen  $F_2$  kautta ja leikkaa segmenttiä vastaan kohtisuoran, pisteen  $F_1$  kautta kulkevan, suoran pisteessä  $B$  (katso kuva 1). Merkitään janojen pituuksia seuraavasti:

$$x = |a_k F_1|, \quad y = |a_{k+1} F_1|, \quad z = |F_1 B|$$



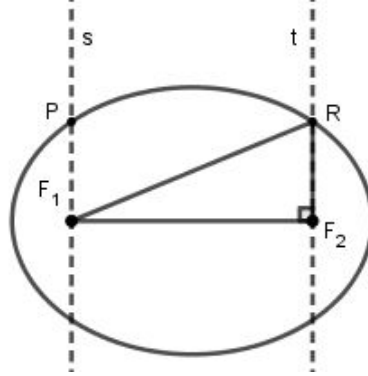
KUVA 1. Ellipsin polttopisteiden kautta kulkeva ratakäyrä suppenee kohti isoakselia.

Näytetään, että  $x < y$ . Olkoon piste  $P \in \partial Q_1$  suoran  $s$  ja ellipsin leikkauspiste ja vastaavasti piste  $R \in \partial Q_3$  suoran  $t$  ja ellipsin leikkauspiste kuten kuvassa 1. Tällöin ellipsin Määritelmästä 4.1 johtuen jana  $PF_1$  on pisin kaikista janoista  $SF_1$ , joille  $S \in \partial Q_1$  ja vastaavasti jana  $RF_1$  on lyhin kaikista janoista  $TF_1$ , joille  $T \in \partial Q_3$ .



Olkoon isoakselin pituus  $2a$  ja pikkuakselin pituus  $2b$  ja merkitään lisäksi

$$u = |PF_1|, v = |RF_1|, 2f = |F_1F_2|.$$



Tällöin, koska  $|PF_1| = |RF_2|$  ja kolmio  $\Delta F_1F_2R$  on suorakulmainen, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} u + v = 2a \\ v^2 - u^2 = 4f^2 = 4(a^2 - b^2), \end{cases}$$

jonka ratkaisuna saadaan

$$\begin{cases} u = \frac{b^2}{a} \\ v = 2a - \frac{b^2}{a}. \end{cases}$$

Näin ollen

$$v - u = 2a - 2\frac{b^2}{a} = \frac{2}{a}(a^2 - b^2) = \frac{2(a+b)}{a}(a-b) > 0,$$

sillä ellipsille aina  $b < a$ . Niinpä mille tahansa pisteille  $S \in \partial Q_1$  ja  $T \in \partial Q_3$  pätee

$$x = |SF_1| \leq |PF_1| < |RF_1| \leq |TF_1| = y,$$

joten todella  $x < y$ . Tästä seuraa, että (katso kuva 1)

$$\sin(2\varphi_k) = \frac{z}{x} > \frac{z}{y} = \sin(2\varphi_{k+1}).$$

Sinifunktion tiedetään olevan aidosti kasvava välillä  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Koska nyt piste  $a_k \in \partial Q_1$ , kulma  $2\varphi_k$  kuuluu välille  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ja siten  $\varphi_k > \varphi_{k+1}$  kaikilla  $k$ . Näin ollen joukon  $W_1$  heijastuspisteiden jono  $\{\varphi_{n_1}\}$  on vähenevä.

Toisaalta vähenevä ja alhaalta rajoitettu jono on suppeneva, joten jono  $\{\varphi_{n_1}\}$  suppenee. Niinpä joukon  $W_1$  ratakäyrien segmentit lähestyvät jotakin ellipsin segmenttiä. Vielä täytyy näyttää, että segmentti, jota kohti ratakäyrä suppenee on juurikin isoakseli.

Antiteesi: Jono  $\{\varphi_{n_1}\}$  suppenee nolasta poikkeavaan arvoon  $\varphi_0$ . Tällöin siis on olemassa

$$0 < \varphi_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n_1}.$$

Koska jono  $\{\varphi_{n_1}\}$  on vähenevä, niin  $\varphi_{n_1} > \varphi_0 > 0$  kaikilla  $n$ .

Olkoon  $a_{k-1}$ ,  $a_k$  ja  $a_{k+1}$  taas kolme peräkkäistä jonon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alkioita ja olkoon  $a_k \in \partial Q_1$  kuten edellä. Merkitään lisäksi kulmia  $\angle a_{k-1}F_1F_2 = \beta_{k-1}$  ja  $\angle a_kF_2F_1 = \beta_k$ . Tällöin kolmiolle  $\Delta F_1a_kF_2$  pätee

$$2\varphi_k + (\pi - \beta_{k-1}) + \beta_k = \pi,$$

mistä edelleen saadaan  $2\varphi_k = \beta_{k-1} - \beta_k$ .

Niinpä erityisesti

$$\beta_{k-1} - \beta_k = 2\varphi_k > 2\varphi_0 > 0,$$

josta kulmalle  $\beta_k$  saadaan arvio

$$\beta_k < \beta_{k-1} - 2\varphi_0.$$

Sijoittamalla  $k$ :n paikalle luvut  $2, 3, \dots$  huomataan, että kulmat  $\beta_k$  voidaan ilmaista aina  $\beta_1$ :n avulla seuraavasti:

$$\beta_2 < \beta_1 - 2\varphi_0, \beta_3 < \beta_2 - 2\varphi_0 = \beta_1 - 4\varphi_0, \dots$$

Induktiolla saadaan kaikille  $k$

$$\beta_k < \beta_1 - 2k\varphi_0.$$

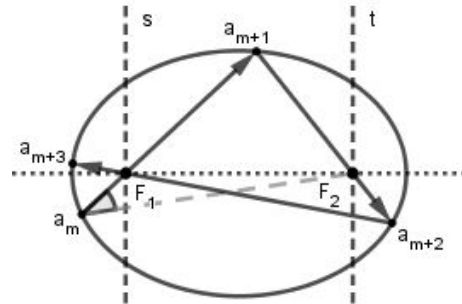
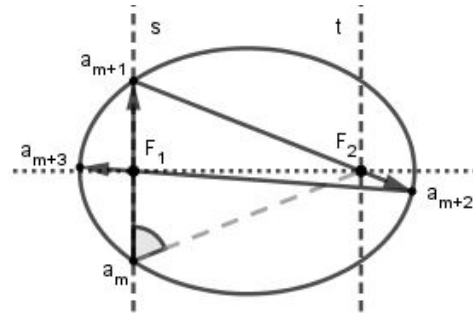
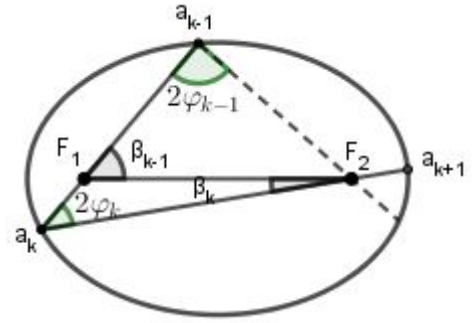
Näin ollen on olemassa  $\hat{k} \in \mathbb{N}$  siten, että kaikille  $k > \hat{k}$  pätee  $\beta_k < 0$ . Tämä on mahdotonta, joten täytyy olla  $\varphi_0 = 0$ . Näin ollen joukon  $W_1$  biljardiratakäyrät suppenevat kohti ellipsin isoakselia.

Tutkitaan seuraavaksi sellaisten ratakäyrien joukkoa  $W_2$ , jossa ratakäyrä alkaa reunalta  $\partial Q_1$  ja kulkee polttopisteen  $F_1$  kautta:

Nyt ratakäyrien tarkastelu jakautuu erilaisiin tapauksiin. Olkoon  $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$  jonon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peräkkäisiä alkioita ja olkoon  $a_m \in \partial Q_1$ .

Jos piste  $a_m$  on suoran  $s$  ja ellipsin leikkauspisteessä, niin piste  $a_{m+1}$  tulee olemaan suoran  $s$  ja ellipsin toisessa leikkauspisteessä. Tällöin myös  $a_{m+1} \in \partial Q_1$  ja ratakäyrän segmentti  $a_{m+1}a_{m+2}$  kulkee polttopisteen  $F_2$  kautta. Näin ollaan päädytty takaisin joukon  $W_1$  tilanteeseen, joten aiemmasta tiedetään, että ratakäyrä tulee tästä eteenpäin suppenemaan kohti isoakselia.

Jos  $a_m \in \partial Q_1$  on sellainen, että  $a_{m+1} \in \partial Q_2$ , niin tällöin  $a_{m+2} \in \partial Q_3$  ja segmentti  $a_{m+2}a_{m+3}$  kulkee polttopisteen  $F_1$  kautta. Tämä vastaa täysin joukon  $W_1$  tilannetta, joten tässäkin tapauksessa ratakäyrä tulee suppenemaan kohti ellipsin isoakselia.



Jos taas  $a_m \in \partial Q_1$  on sellainen, että  $a_{m+1}$  on suoran  $t$  ja ellipsin leikkauspisteessä, niin piste  $a_{m+2}$  tulee olemaan suoran  $t$  ja ellipsin toisessa leikkauspisteessä. Niinpä  $a_{m+2} \in \partial Q_3$  ja segmentti  $a_{m+2}a_{m+3}$  kulkee polttopisteen  $F_1$  kautta. Taas ollaan päädytty joukon  $W_1$  tapausta vastaavaan tilanteeseen, joten ratakäyrä tulee suppenemaan kohti isoakselia.

Jos  $a_m \in \partial Q_1$  on sellainen, että  $a_{m+1} \in \partial Q_3$  ja  $a_{m+2} \in \partial Q_2$ , niin piste  $a_{m+3} \in \partial Q_1$  ja segmentti  $a_{m+3}a_{m+4}$  kulkee polttopisteen  $F_2$  kautta. Niinpä ollaan jälleen päädytty joukon  $W_1$  tilanteeseen ja siten ratakäyrä suppenee isoakselia kohti.

Jos taas  $a_m \in \partial Q_1$  on sellainen, että  $a_{m+1} \in \partial Q_3$  ja  $a_{m+2} \in \partial Q_1$ , niin piste  $a_{m+4} \in \partial Q_3$  ja ratakäyrän segmentti  $a_{m+4}a_{m+5}$  kulkee polttopisteen  $F_1$  kautta. Niinpä myös nyt päädytään joukon  $W_1$  tilanteeseen, joten ratakäyrä suppenee kohti ellipsin isoakselia.

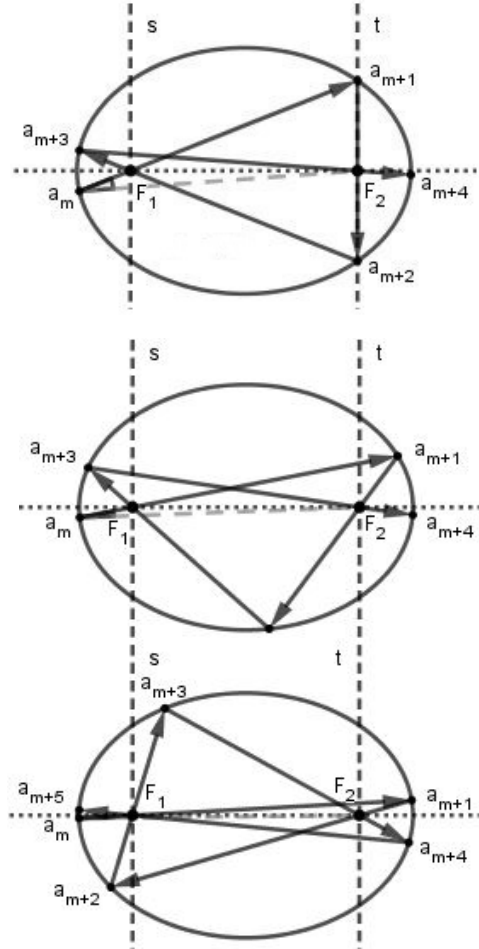
Näin ollen myös kaikki joukon  $W_2$  ratakäyrät suppenevat kohti ellipsin isoakselia. Koska joukkojen  $W_1$  ja  $W_2$  ratakäyrät tai niiden osakäyrät kattavat kaikki mahdolliset ellipsin polttopisteiden kautta kulkevat ratakäyrät, on lause todistettu.  $\square$

Koska polttopisteiden kautta kulkevat radat suppenevat kohti isoakselia, on selvää, että näistä mikään muu kuin isoakselia pitkin kulkeva biljardirata ei voi olla jaksollinen. Isoakselia pitkin kulkeva ratakäyrä on 2-jaksollinen, sillä molempien polttopisteiden kautta kulkeva segmentti on kohtisuorassa elliptistä reunakäyrää vastaan molemmissa päätepisteissään.

Nyt on tarkasteltu ellipsin polttopisteen kautta kulkevia ratakäyriä, mutta entä jos ratakäyrän segmentti ei kuljekaane polttopisteen kautta? Lauseen 4.5 nojalla tiedetään ainakin se, että jos yksi ratakäyrän segmentti ei kulje polttopisteen kautta, niin mikään muukaan ratakäyrän segmentti ei kulje polttopisteen kautta. Tutkitaan seuraavaksi tällaisia ratakäyriä.

## 2. Polttopisteiden välistä kulkevat biljardiratakäyrät

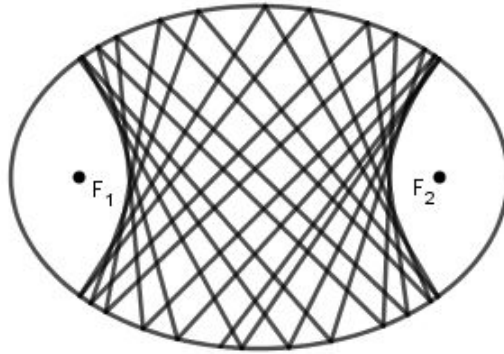
Olkoon biljardipallo elliptisellä biljardipöydällä aluksi pisteessä  $P_1$  ja lyödään se tällä kertaa polttopisteiden välistä. Pallo törmää pöydän reunaan pisteessä  $P_2$  ja kimpoaa reunasta heijastuslain mukaisella tavalla. Lauseen 4.5 nojalla polttosäteet  $F_1P_2$  ja



$F_2P_2$  muodostavat yhtä suuret kulmat pisteeseen  $P_2$  piirretyn tangentin kanssa. Koska nyt ratakäyrän segmentti kulkee polttopisteiden välistä, tangentin ja reunaa kohti tulevan segmentin välinen kulma on suurempi kuin polttosäteen ja tangentin välinen kulma. Tällöin myös tangentin ja reunasta heijastuvan segmentin välinen kulma on suurempi kuin tangentin ja polttosäteen välinen kulma, Niinpä pisteestä  $P_2$  heijastuva ratakäyrän segmentti kulkee polttopisteiden välistä. Näin jatkamalla huomataan seuraavaa:

**LEMMA 4.8.** *Jos biljardiratakäyrän yksi segmentti kulkee ellipsin polttopisteiden välistä, niin sen jokainen segmentti kulkee polttopisteiden välistä.*

Tästä voidaan päätellä, että polttopisteiden välistä kulkeva ratakäyrä ei tule olemaan kaikkialla tiheä ellipsin sisällä. Itse asiassa näyttää siltä, että polttopisteiden välistä kulkevat ratakäyrän segmentit (tai niiden jatkeet) sivuavat hyperbelin muotoista käyrää (katso kuva 2).



KUVA 2. Polttopisteiden välistä kulkeva ratakäyrä ellipsillä.

**MÄÄRITELMÄ 4.9.** Olkoon  $F_1$  ja  $F_2$  tason kaksi eri pistettä. Hyperbeli  $\mathcal{H}$  on joukko tason pisteitä  $P$ , joille pisteistä  $F_1$  ja  $F_2$  mitattujen etäisyyksien erotus on vakio,  $2a < |F_1F_2|$ . Toisin sanoen

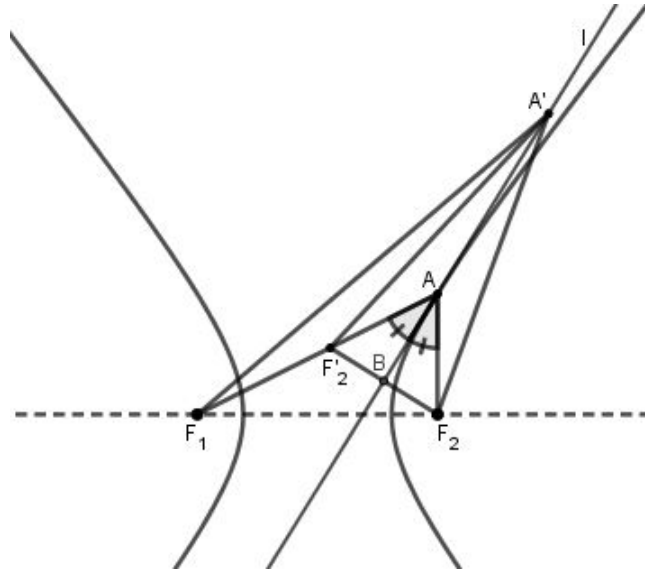
$$\mathcal{H} = \{P : ||PF_1| - |PF_2|| = 2a\}.$$

Pisteitä  $F_1$  ja  $F_2$  kutsutaan hyperbelin polttopisteiksi ja janoja  $PF_1$  ja  $PF_2$  pisteen  $P$  määräämiksi polttosäteiksi.

**MÄÄRITELMÄ 4.10.** Piste  $X \in \mathbb{R}^2$  on hyperbelin  $\mathcal{H}$  ulkopuolella, jos  $||PF_1| - |PF_2|| < 2a$ , ja vastaavasti piste  $X$  on hyperbelin  $\mathcal{H}$  sisäpuolella, jos  $||PF_1| - |PF_2|| > 2a$ .

**LAUSE 4.11.** *Polttosäteet  $F_1A$  ja  $F_2A$  muodostavat yhtä suuret kulmat hyperbelin pisteeseen  $A$  piirretyn tangentin kanssa.*

**TODISTUS.** Piirretään janalle  $F_1A$  piste  $F'_2$  siten, että  $|AF'_2| = |AF_2|$ . Tällöin hyperbelin määritelmän nojalla  $|F_1F'_2| = 2a$ . Olkoon lisäksi piste  $B$  janan  $F_2F'_2$  keskipiste. Nyt suora  $\overleftrightarrow{AB}$  on kulman  $\angle F_2AF_1$  kulmanpuolittaja, sillä SSS-kauseen nojalla kolmiot  $\triangle ABF_2$  ja  $\triangle ABF'_2$  ovat yhtenevät (katso kuva 3). Lisäksi kolmioiden yhtenevyyden nojalla kulmat  $\angle F'_2BA$  ja  $\angle ABF_2$  ovat yhtä suuret.



KUVA 3. Hyperbelin pisteeseen  $A$  piirretty tangentti puolittaa pisteen  $A$  polttosäteiden välisen kulman.

Näytetään, että näin muodostettu suora  $\overleftrightarrow{AB}$  on hyperbelin pisteeseen  $A$  piirretty tangentti: Olkoon piste  $A' \neq A$  suoran  $\overleftrightarrow{AB}$  mikä tahansa piste. Tällöin SKS-lauseen nojalla kolmiot  $\triangle A'BF_2$  ja  $\triangle A'BF_2'$  ovat yhtenevät ja siten erityisesti  $|A'F_2| = |A'F_2'|$ . Niinpä

$$\begin{aligned} |F_1F_2'| + |F_2'A'| &> |F_1A'| \implies |F_1F_2'| + |F_2A'| > |F_1A'| \\ \implies |F_1F_2'| &> |F_1A'| - |F_2A'| \implies 2a > |F_1A'| - |F_2A'|, \end{aligned}$$

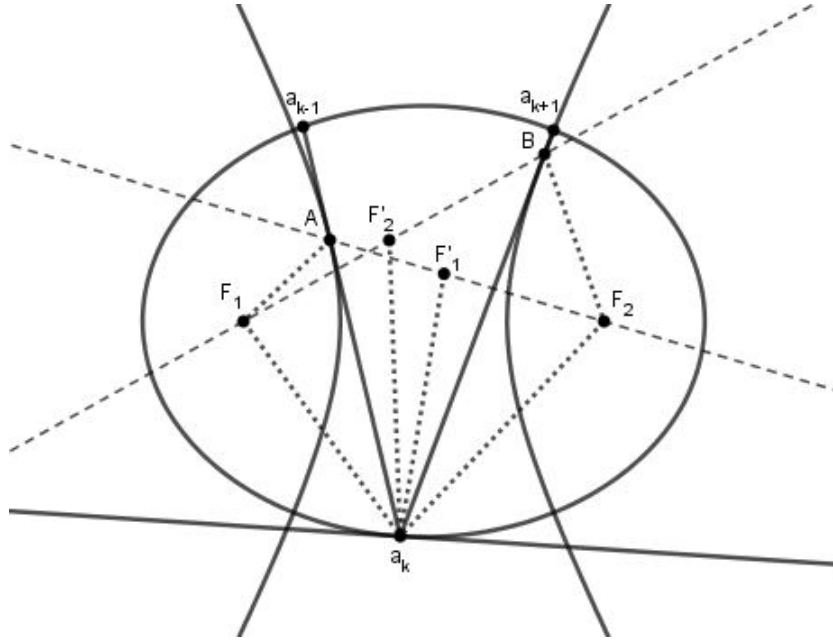
joten piste  $A'$  on aina hyperbelin ulkopuolella. Näin ollen piste  $A$  on ainut suoran  $\overleftrightarrow{AB}$  piste, joka sivuaa hyperbeliä, joten suora  $\overleftrightarrow{AB}$  on hyperbelin pisteeseen  $A$  piirretty tangentti.  $\square$

Nyt ellipsin polttopisteiden välistä kulkevalle ratakäyrälle ja hyperbelille saadaan seuraavanlainen yhteys:

LAUSE 4.12. *Olkoon biljardipöytä  $Q$  elliptinen ja olkoon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pöydän reunakäyrällä  $\partial Q$  olevien törmäyspisteiden muodostama jono. Olkoon lisäksi jokaiselle ei-negatiiviselle kokonaisluvulle  $n$  segmentti  $a_n a_{n+1}$  sellainen, että se kulkee ellipsin polttopisteiden välistä. Tällöin ratakäyrän segmentit ovat tangentteja eräälle hyperbelille  $\mathcal{H}$ , jonka polttopisteet ovat samat kuin ellipsillä  $\partial Q$ .*

TODISTUS. Otetaan reunakäyrän törmäyspisteiden jonolta kolme peräkkäistä alkiota  $a_{k-1}$ ,  $a_k$  ja  $a_{k+1}$  ja piirretään näiden avulla kaksi peräkkäistä biljardiratasädettä  $a_{k-1}a_k$  ja  $a_k a_{k+1}$  (katso kuva 4). Peilataan polttopiste  $F_1$  segmentin  $a_{k-1}a_k$  suhteen ja olkoon peilattu piste  $F_1'$ . Peilataan samaan tapaan polttopiste  $F_2$  segmentin  $a_k a_{k+1}$  suhteen ja olkoon peilattu piste  $F_2'$ . Koska peilaus on isometria, pätee

$$|a_k F_1| = |a_k F_1'| \text{ ja } |a_k F_2| = |a_k F_2'|.$$



KUVA 4. Ellipsin polttopisteiden välistä kulkevan rataikäyrän segmentit ovat tangentteja samapolttopisteiselle hyperbelille.

Piirretään suora  $\overleftrightarrow{F'_1F'_2}$  ja merkitään sen ja segmentin  $a_{k-1}a_k$  leikkauspistettä pisteellä  $A$ . Muodostetaan samaan tapaan suora  $\overleftrightarrow{F_1F_2}$  ja merkitään sen ja segmentin  $a_k a_{k+1}$  leikkauspistettä pisteellä  $B$ . Tällöin polttopisteiden peilauksesta johtuen  $|F_1A| = |F'_1A|$  ja  $|F_2B| = |F'_2B|$ . Lisäksi kulmille pätee  $\angle F_1Aa_k \cong \angle F'_1Aa_k = \angle F_2Aa_k$  ja vastaavasti  $\angle F_2Ba_k \cong \angle F'_2Ba_k = \angle F_1Ba_k$ . Tällöin segmentti  $a_{k-1}a_k$  puolittaa kulman  $\angle F_1AF_2$  ja segmentti  $a_k a_{k+1}$  puolittaa kulman  $\angle F_1BF_2$ . Niinpä Lauseen 4.11 nojalla segmentti  $a_{k-1}a_k$  on tangentti pisteen  $A$  kautta kulkevalle hyperbelille  $\mathcal{H}_1$ , missä hyperbelin  $\mathcal{H}_1$  polttopisteinä ovat pisteet  $F_1$  ja  $F_2$ . Vastaavasti segmentti  $a_k a_{k+1}$  on tangentti pisteen  $B$  kautta kulkevalle hyperbelille  $\mathcal{H}_2$ , missä  $F_1$  ja  $F_2$  ovat hyperbelin  $\mathcal{H}_2$  polttopisteet.

Nyt ollaan osoitettu, että polttopisteiden välistä kulkevan rataikäyrän segmentit ovat tangentteja joillekin hyperbeleille, joiden polttopisteinä ovat pisteet  $F_1$  ja  $F_2$ . Näytetään nyt, että nämä hyperbelit ovat yksi ja sama hyperbeli, eli että  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ .

Jotta hyperbelit olisivat samat, täytyy päteä

$$||F_1A| - |F_2A|| = ||F_1B| - |F_2B||.$$

Koska tiedetään että  $|F_1A| = |F'_1A|$  ja  $|F_2B| = |F'_2B|$ , tarvittava yhtälö saadaan supistettua muotoon

$$|F'_1F_2| = |F_1F'_2|.$$

Polttopisteiden peilauksesta johtuen tiedetään, että kulmat  $\angle F_1a_kA$  ja  $\angle F'_1a_kA$  ovat yhtä suuret ja vastaavasti  $\angle F_2a_kB$  ja  $\angle F'_2a_kB$  ovat yhtä suuret. Lisäksi Lauseen 4.5 nojalla ellipsin pisteeseen  $a_k$  piirretyn tangentin ja polttosäteiden  $F_1a_k$  ja  $F_2a_k$  väliset kulmat ovat yhtä suuret. Toisaalta heijastuslain mukaan rataikäyrän segmenttien

$a_{k-1}a_k$  ja  $a_k a_{k+1}$  sekä pisteeseen  $a_k$  piirretyn tangentin väliset kulmat ovat myöskin yhtä suuret. Niinpä pätee ( $\angle F'_1 a_k A \cong$ )  $\angle F_1 a_k A \cong \angle F_2 a_k B$  ( $\cong \angle F'_2 a_k B$ ). Tällöin varmasti myös  $\angle F_1 a_k F'_2 \cong \angle F_2 a_k F'_1$ .

Nyt huomataan, että SKS-lauseen nojalla kolmiot  $\Delta F_1 a_k F'_2$  ja  $\Delta F'_1 a_k F_2$  ovat yhtenevät. Erityisesti siis  $|F'_1 F_2| = |F_1 F'_2|$ . Näin ollen hyperbelit  $\mathcal{H}_1$  ja  $\mathcal{H}_2$  ovat sama hyperbeli ja väite pätee.  $\square$

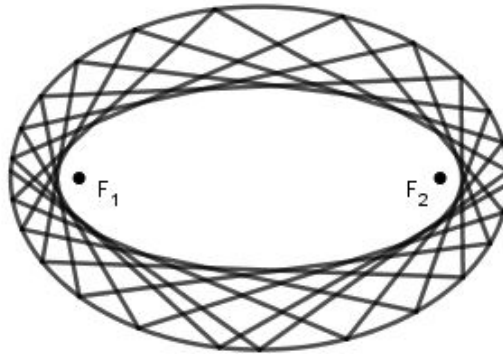
Voidaan siis sanoa, että biljardiratakäyrällä, joka kulkee ellipsin polttopisteiden välistä, on hyperbelin muotoinen *kaustinen käyrä*, jonka polttopisteet ovat samat kuin biljardipöydän reunakäyrän ellipsillä. Polttopisteiden välistä kulkevien ratakäyrien joukosta löydetään lisäksi helposti ainakin yksi jaksollinen biljardirata, pikkuakselia pitkin kulkeva 2-jaksollinen ratakäyrä.

Elliptisen biljardin osalta on vielä tutkimatta sellaiset ratakäyrät, jotka eivät kulje ellipsin polttopisteiden kautta eivätkä niiden välistä. Siirrytään seuraavaksi tutkimaan tällaisia käyriä.

### 3. Polttovälin ulkopuolelta kulkevat biljardiratakäyrät

Olkoon biljardipallo jälleen elliptisellä biljardipöydällä aluksi pisteessä  $P_1$ . Lyödään tällä kertaa pallo siten, että se ei osu polttopisteiden väliselle janalle. Kuljettuaan suoraan, pallo törmää pöydän reunaan pisteessä  $P_2$  ja kimpoaa siitä heijastuslain mukaisesti. Edelleen Lauseen 4.5 nojalla ellipsin polttosäteet  $F_1 P_2$  ja  $F_2 P_2$  muodostavat yhtä suuret kulmat pisteeseen  $P_2$  piirretyn tangentin kanssa. Koska ratakäyrän segmentti kulkee nyt ellipsin polttovälin ulkopuolelta, on tangentin ja reunaan kohti tulevan segmentin välinen kulma pienempi kuin polttosäteen ja tangentin välinen kulma. Toisaalta tällöin myös reunalta lähtevän segmentin ja tangentin välinen kulma on pienempi kuin polttosäteen ja tangentin välinen kulma. Niinpä myöskään pisteestä  $P_2$  heijastuva ratakäyrän segmentti ei kulje ellipsin polttovälin kautta. Jatkamalla ratakäyrää eteenpäin huomataan seuraavaa:

LEMMA 4.13. *Jos biljardiratakäyrän yksi segmentti ei kulje ellipsin polttovälin kautta, niin mikään sen segmenteistä ei kulje polttovälin kautta.*



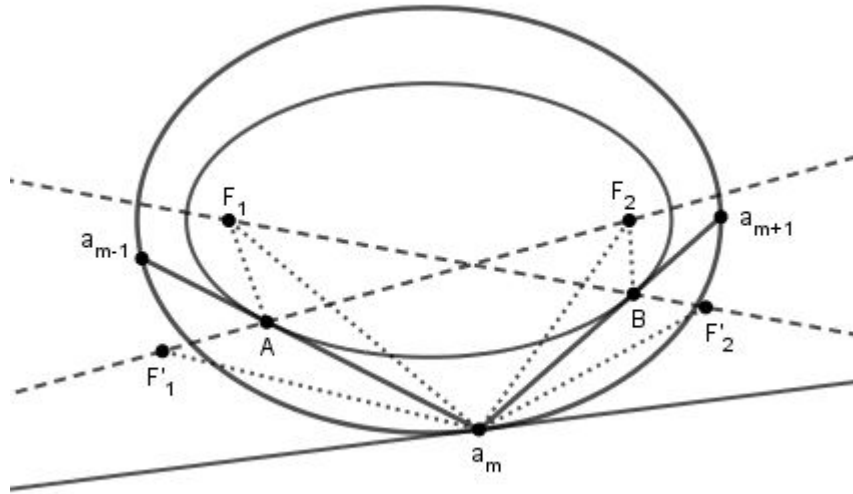
KUVA 5. Polttovälin ulkopuolelta kulkeva ratakäyrä.

Mikään ellipsin polttovälin ulkopuolelta kulkeva ratakäyrä ei selvästikään ole kaikkialla tiheä ellipsin sisällä. Itse asiassa näyttäisi siltä, kuten kuvasta 5 voidaan havaita, että ellipsin sisäpuolelle jää samakeskinen ellipsin muotoinen alue, josta ratakäyrä ei kulje ollenkaan. Seuraavaksi näytetään, että tällainen ratakäyrä todella sivuaa toista ellipsiä, jonka polttopisteet ovat vieläpä samat kuin biljardipöydän reunakäyrän ellipsillä.

LAUSE 4.14. *Olkoon biljardipöytä  $Q$  elliptinen ja olkoon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pöydän reunakäyrällä  $\partial Q$  olevien törmäyspisteiden muodostama jono. Olkoon lisäksi jokaiselle ei-negatiiviselle kokonaisluvulle  $n$  segmentti  $a_n a_{n+1}$  sellainen, että se ei kulje polttovälin kautta. Tällöin ratakäyrän segmentit ovat tangentteja eräälle pienemmälle ellipsille  $\mathcal{E}$ , jonka polttopisteet ovat samat kuin ellipsillä  $\partial Q$ .*

TODISTUS. Lauseen todistus on hyvin saman tyylinen kuin Lauseen 4.12. Otetaan aluksi reunakäyrän törmäyspisteiden jonolta kolme peräkkäistä törmäyspistettä  $a_{m-1}$ ,  $a_m$  ja  $a_{m+1}$  ja piirretään niiden avulla segmentit  $a_{m-1}a_m$  ja  $a_m a_{m+1}$ . Peilataan ellipsin polttopiste  $F_1$  segmentin  $a_{m-1}a_m$  suhteen ja merkitään peilattua pistettä  $F'_1$  (katso kuva 6). Peilataan polttopiste  $F_2$  segmentin  $a_m a_{m+1}$  suhteen ja olkoon peilattu piste  $F'_2$ . Tällöin saadaan

$$|a_m F_1| = |a_m F'_1| \text{ ja } |a_m F_2| = |a_m F'_2|.$$



KUVA 6. Ellipsin polttovälin ulkopuolelta kulkevan ratakäyrän segmentit ovat tangentteja samapolttopisteiselle ellipsille.

Olkoon lisäksi suoran  $\overleftrightarrow{F'_1 F'_2}$  ja segmentin  $a_{m-1}a_m$  leikkauspiste piste  $A$  ja vastaavasti suoran  $\overleftrightarrow{F_1 F_2}$  ja segmentin  $a_m a_{m+1}$  leikkauspiste piste  $B$ . Tällöin pisteen  $F_1$  peilauksesta johtuen tiedetään, että  $|F_1 A| = |F'_1 A|$ . Lisäksi nähdään, että kulmat  $\angle F_1 A a_{m-1}$  ja  $\angle F'_1 A a_{m-1}$  ovat yhtä suuret. Toisaalta kulma  $\angle F_2 A a_m$  on ristikulma kulmalle  $\angle F'_1 A a_{m-1}$ , joten varmasti pätee  $\angle F_1 A a_{m-1} \cong \angle F_2 A a_m$ . Vastaavalla tavalla nähdään, että  $|F_2 B| = |F'_2 B|$  ja  $\angle F_2 B a_{m+1} \cong \angle F_1 B a_m$ .



Niinpä Lauseen 4.5 nojalla segmentti  $a_{m-1}a_m$  on tangentti pisteen  $A$  kautta kulkevalle ellipsille  $\mathcal{E}_1$ , missä ellipsin  $\mathcal{E}_1$  polttopisteet ovat  $F_1$  ja  $F_2$ . Samoin segmentti  $a_m a_{m+1}$  on tangentti pisteen  $B$  kautta kulkevalle ellipsille  $\mathcal{E}_2$ , missä  $F_1$  ja  $F_2$  ovat ellipsin  $\mathcal{E}_2$  polttopisteet.

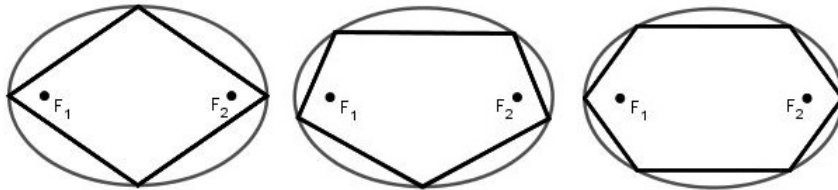
Näytetään vielä, että ellipsit  $\mathcal{E}_1$  ja  $\mathcal{E}_2$  ovat sama ellipsi. Jotta pisteet  $A$  ja  $B$  sijaitisivat samalla ellipsillä, täytyy polttopisteiden ja pisteen  $A$  välisten etäisyyksien summa olla yhtä suuri kuin polttopisteiden ja pisteen  $B$  välisten etäisyyksien summa. Toisin sanoen

$$|F_1A| + |F_2A| = |F_1B| + |F_2B|.$$

Nyt kuitenkin tiedetään, että  $|F_1A| = |F'_1A|$  ja  $|F_2B| = |F'_2B|$ , joten yhtälö voidaan esittää kahden janan avulla muodossa  $|F'_1F_2| = |F_1F'_2|$ .

Heijastuslain avulla tiedetään, että segmentin  $a_{m-1}a_m$  ja pisteeseen  $a_m$  piirretyn tangentin välinen kulma on yhtä suuri kuin segmentin  $a_m a_{m+1}$  ja tangentin välinen kulma. Lisäksi Lauseen 4.5 nojalla pisteeseen  $a_m$  piirretyn tangentin ja polttosäteiden  $F_1a_m$  ja  $F_2a_m$  väliset kulmat ovat yhtä suuret. Niinpä myös kulmat  $\angle F_1a_mA$  ja  $\angle F_2a_mB$  ovat samansuuruiset. Tällöin polttopisteiden peilauksesta johtuen pätee myös, että  $\angle F_1a_mF'_1 \cong \angle F_2a_mF'_2$ . Näin ollen saadaan pätemään, että  $\angle F'_1a_mF_2 \cong \angle F_1a_mF'_2$ . Siten SKS-lauseen nojalla kolmiot  $\triangle F'_1a_mF_2$  ja  $\triangle F_1a_mF'_2$  ovat yhtenevät ja erityisesti  $|F'_1F_2| = |F_1F'_2|$ . Siispä väite pätee.  $\square$

Nyt siis tiedetään, että elliptisen biljardipöydän polttovälin ulkopuolelta kulkevilla ratakäyryiltä löytyy aina ellipsin muotoinen *kaustinen käyrä*, jonka polttopisteet ovat samat kuin biljardipöydän reunakäyrän ellipsillä. Ratakäyrän segmenttien sisäpuolelle jäävä alue ei silti aina ole ellipsin muotoinen. Tämä johtuu siitä, että osa jaksollisista ratakäyristä muodostavat monikulmion muotoisia ratoja ellipsille. Polttovälin ulkopuolelta kulkevista radoista löytyy esimerkiksi 4-, 5- ja 6-jaksolliset monikulmion muotoiset ratakäyrät, jotka on esitetty kuvassa 7.

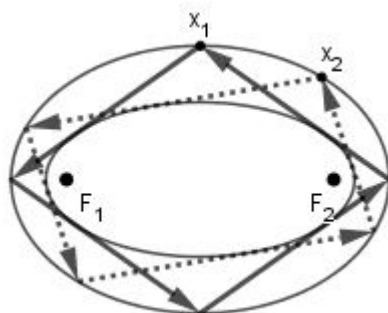


KUVA 7. Ellipsin polttovälin ulkopuolelta kulkevia jaksollisia ratakäyriä.

Kuvassa 7 jaksolliset ratakäyrät ovat symmetrisiä joko ellipsin isoakselin tai pikkuakselin suhteen, mutta ellipsiltä löytyy paljon muunkinlaisia jaksollisia ratakäyriä. Tämä nähdään *Ponceletin lauseen* avulla, joka jätetään tässä yhteydessä todistamatta [3]:

LAUSE 4.15. *Jos on olemassa  $n$ -kulmio,  $n > 2$ , jota kartioleikkaus  $\Gamma$  ympäröi ja jonka kaikki sivut sivuavat toista kartioleikkausta  $\gamma$ , niin tällöin löytyy ääretön määrä muita  $n$ -kulmioita, jotka myös ovat  $\Gamma$ :n ympäröimiä ja joiden kaikki sivut sivuavat  $\gamma$ :aa.*

Koska ellipsin kaustiset käyrät ovat kartioleikkauksia, Ponceletin lause pätee ellipsibiljardin tapauksessa. Niinpä jos löydetään ellipsiltä jaksollinen  $n$ -kulmion muotoinen biljardirata, jonka segmentit sivuavat kaustista käyrää, niin Lauseen 4.15 nojalla mistä tahansa muusta ellipsin pisteestä lähtevä ratakäyrä, jonka segmentit sivuavat samaa kaustista käyrää, tulee olemaan  $n$ -jaksollinen [7]. (Katso kuva 8.) Tämän perusteella kuvan 7 ratakäyrät eivät ole ainoita ellipsin 4-, 5- ja 6-jaksollisia ratakäyriä, itse asiassa ellipsin jokainen piste on tällaisella jaksollisella radalla.



KUVA 8. Ponceletin lauseen mukaisia 4-jaksollisia biljardiratakäyriä, jotka lähtevät ellipsin reunakäyrän pisteistä  $x_1$  ja  $x_2$ .

Jos ellipsin polttopisteitä siirretään lähemmäksi toisiaan ja lopulta niin, että polttopisteet ovat päällekkäin, ellipsi muuttuu ympyräksi. Ympyrä onkin ellipsin erikoistapaus ja vaikka sitä ei sallittu tämän luvun ellipsitarkasteluissa, kaikki ellipsin polttovälin ulkopuolelta kulkeviin ratakäyriin liittyvät säännöt pätevät myös ympyrälle. Esimerkiksi ympyrän ratakäyrän sivuaminen sisempää samakeskistä ympyrää on Lauseen 4.14 erikoistapaus. Vastaavasti Ponceletin lause toimii myös ympyröille. Ympyrän tapauksessa ratakäyrän jaksollisuuden tutkimiseen on kuitenkin kiertosymmetrisyydestä johtuen huomattavasti helpompia keinoja kuin ellipsillä ja siksi ympyrä käsiteltiin tässä tutkielmassa erillisenä kokonaisuutena.

Tässä luvussa ollaan opittu, että elliptisellä biljardipöydällä ratakäyrän muotoon vaikuttaa oleellisesti se, kulkeeko biljardirata ellipsin polttopisteen kautta, polttopisteiden välistä vai polttovälin ulkopuolelta. Yhdessä näistä tapauksista ratakäyrä alkaa supeta kohti ellipsin isoakselia ja kahdessa muussa tapauksessa biljardipöydälle muodostuu joko hyperbelin tai ellipsin muotoinen kaustinen käyrä, jota ratakäyrän kaikki segmentit tai niiden jatkeet sivuavat. Toisin kuin ympyräbiljardin ja neliöbiljardin tapauksessa, elliptisellä biljardipöydällä ratakäyrän jaksollisuuden tutkimiseen ei löydy yhtä yksinkertaista toimintatapaa. Kuitenkin ellipsin muodosta johtuen helppointa on yrittää löytää sellaisia jaksollisia biljardikäyriä, jotka tulevat olemaan symmetrisiä joko ellipsin iso- tai pikkuakselin suhteen. Tällaisen radan löydyttyä muiden samajaksoisten ratojen löytäminen helpottuu.

Tämänhetkisillä biljarditaidoilla pitäisi pystyä vakuuttamaan viimeisetkin epäilijät siitä, ettetkö ottaisi biljardin peluuta tosissaan. Pienenä varoituksen sanana pyydetään kuitenkin harkitsemaan tarkasti, kuinka paljon omia taitojaan pelikavereilleen esittelee, sillä lopputulos voi olla, että saat vastaisuudessa pelata biljardia vain yksinäsi. Jos kuitenkin vahinko on jo ehtinyt tapahtua, voit ajankuluksesi ratkoa seuraavaksi esitettäviä biljardigeometriaan liittyviä tehtäviä.

## LUKU 5

### Tehtäviä biljardigeometriasta

Seuraava biljardigeometriaan liittyvä tehtäväpaketti on suunnattu ensisijaisesti lukiokäisille, mutta soveltuu muillekin. Tehtävät sisältävät laskemista, väitteiden todeksi osoittamista ja asioiden tutkimista GeoGebran avulla. Tehtäviin on annettu myös malliratkaisut.

Tehtävissä tarvittavat laskennalliset menetelmät ovat tuttuja yläkoulun geometrian tunneilta (esimerkiksi suorakulmaisen kolmion trigonometria ja ympyrän laskukaavat), joten lukiolaisille tehtävien ratkaiseminen ei pitäisi jäädä kiinni laskukaavojen vaativuudesta. Tehtävien haasteena on kyky soveltaa opittuja asioita ja käyttää loogista päättelykykyä tehtävien ratkaisemiseksi. Lisäksi tehtävät vaativat geometristen kuvioiden ominaisuuksien havainnointia ja niistä saatavien päätelmien tekemistä. Tehtävien avulla opiskelijat pääsevät harjoittamaan myös GeoGebran käytön taitojaan.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 [13] lyhyen matematiikan geometrian kurssin tavoitteina on harjaannuttaa kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista tehtävää havainnointia ja päättelyä, vahvistaa tasokuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden piirtotaitoja, soveltaa geometriaa käytännön tilanteisiin ja oppia käyttämään ohjelmistoja kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa. Nämä tavoitteet ovat varsin hyvin linjassa biljardigeometriassa tehtäväpaketin tarjoaman sisällön kanssa. Lisäksi kyseisen kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu muun muassa suorakulmaisen kolmion trigonometria ja kuvioiden yhdenmuotoisuus, jotka ovat melko keskeisessä roolissa myös tehtäväpaketin tehtävien parissa.

Pitkän matematiikan geometrian kurssin tavoitteet ovat varsin samansuuntaiset kuin lyhyessä matematiikassa. Tavoitteina [13] on harjaannuttaa kuvaamaan ja hahmotamaan tilaa ja muotoa koskevaa tietoa, oppia käyttämään ohjelmistoja kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja soveltaa yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suorakulmaisten ja vinojen kolmioiden trigonometriaa. Lisäksi oppimistavoitteisiin kuuluu muun muassa ympyrän ja sen osien geometria ja ympyriin liittyvien suorien geometria, joita tehtäväpaketissa pääsee käyttämään umpyräbiljarditehtävien parissa.

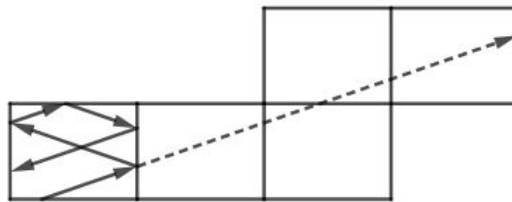
Tehtäväpaketti on hyvin linjassa opetussuunnitelmassa asetettujen tavoitteiden kanssa, joten mielestäni se soveltuu hyvin käytettäväksi sekä lukion lyhyen matematiikan, että pitkän matematiikan geometrian kursseille, varsinkin kurssien loppupuolelle, jolloin opittuja asioita päästään soveltamaan tehtäväpaketin avulla.

## 1. Apuvälineitä tehtävien ratkaisemiseen

### Biljardiradan aukitaittelumetodi

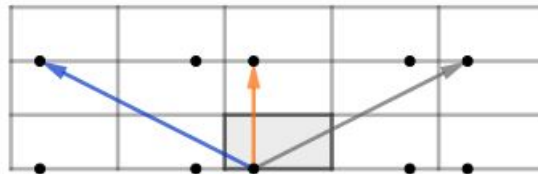
Biljardiradan tutkimiseen monikulmionmuotoisella biljardipöydällä käytetään usein aukitaittelumetodia. Tällöin biljardirata ikään kuin taitellaan auki suoraksi linjaksi peilaamalla biljardipöytää aina sen sivun suhteen, johon pallo törmää ja jatkamalla biljardirataa suoraan pöydän reunan läpi uudelle biljardipöydälle. Alla on kuva biljardiradan taittelemisesta auki. Kuvassa alkuperäinen biljardipöytä on vasemmanpuolimmainen suorakulmio.

Aukitaiteltu biljardirata voidaan vastaavasti palauttaa takaisin alkuperäiselle biljardipöydälle taittelemalla peilatut monikulmiot takaisin päällekkäin.



### Jaksollisen biljardiradan löytäminen suorakulmiolla

Peilaa biljardipöytää oikealle, ylös ja vasemmalle, jolloin suorakulmioista muodostuu ikään kuin ruudukko. Merkitse radan alkupistettä vastaavat pisteet näkyviin peilattuihin suorakulmioihin. Biljardirata on jaksollinen, jos aukitaiteltu rata kulkee alkupistettä vastaavan pisteen kautta, eikä se törmää matkalla mihinkään kulmaan. Esimerkiksi alla olevassa kuvassa on kolme jaksollista biljardirataa (sininen, oranssi ja harmaa). Kuvassa muut radat eivät ole mahdollisia, sillä ne törmäisivät matkalla biljardipöydän johonkin kulmaan.



## 2. Tehtävät

### 2.1. Monikulmiobiljardia.

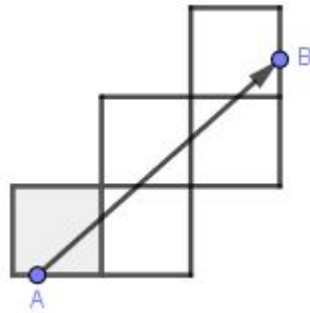
- (1) Biljardipöytä on suorakulmion muotoinen ja sen jokaisessa kulmassa on pussi. Jos pallo lyödään vasemmasta alakulmasta (juuri pussin edestä)  $45^\circ$  kulmassa pöydän reunaan nähden, mihin pussiin pallo lopulta putoaa, kun suorakulmion koko on
- a)  $2 \times 6$  (2 ruutua korkea ja 6 ruutua leveä)
  - b)  $2 \times 7$
  - c)  $3 \times 4$
  - d)  $3 \times 5$
  - e)  $3 \times 6$
  - f)  $3 \times 7$
  - g)  $4 \times 6$
  - h)  $4 \times 7$
  - i)  $4 \times 10$
- Apuna voit käyttää esim. ruutupaperia tai GeoGebraa.

- (2) Tutki tehtävän (1) vastauksia: Mikä yhdistää sellaisia suorakulmioita, joissa biljardirata päättyy samaan kulmaan? (*Vinkki:* pariton ja parillinen)  
Nyt osaat kertoa, mihin kulmaan biljardirata päättyy seuraavilla biljardipöydillä?:
- a)  $26 \times 47$
  - b)  $35 \times 99$
  - c)  $600 \times 10000$

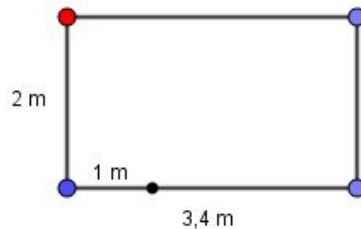
- (3) Selitä miksi biljardipallon reitin päätepiste tehtävissä (1) ja (2) riippuu ainoastaan suorakulmion sivujen parittomuudesta ja parillisuudesta.

(*Vinkki:* Väritä suorakulmion sisään jäävät ruudukon kärkipisteet siten, että joka toinen kärkipiste on sininen ja joka toinen punainen. Tutki tämän jälkeen biljardipallon reittiä. Mitä huomaat? Miten se liittyy suorakulmion sivujen parillisuuteen/parittomuuteen?)

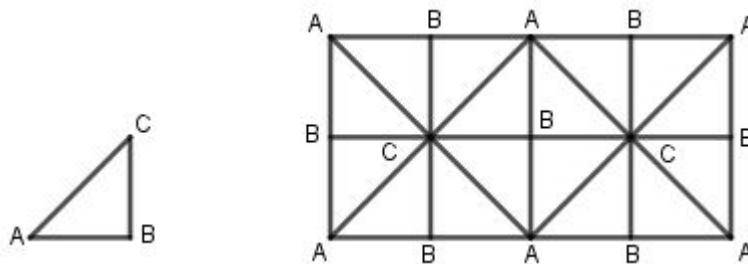
- (4) Biljardiradan aukitaittelumetodi (katso Apuvälineitä tehtävien ratkaisemiseen -osio) on hyödyllinen työkalu jaksollisia, eli lähtöpisteeseensä palaavia biljardiratoja etsittäessä. Opetellaan sen käyttöä:
- a) Alla olevassa kuvassa biljardipöydän (tummennettu neliö) biljardirata on taiteltu auki. Rata alkaa pisteestä A ja päättyy pisteeseen B. Millä neliön sivulla piste B sijaitsee?
  - b) Kuinka monta kertaa biljardipallo törmää biljardipöydän reunaan matkalla pisteestä A pisteeseen B, kun loppupistekin ajatellaan törmäyspisteeksi?



- c) Merkitse kuvan jokaiseen peilattuun neliöön radan alkupistettä A vastaava piste. Löydätkö pisteestä A lähtevää jaksollista biljardirataa? (Löydät apua Apuvälineitä tehtävien ratkaisemiseen -osiosta.)
- d) Monenko törmäyspisteen kautta c)-kohdassa löytämäsi jaksollinen rata kulkee? (Eli moniko-periodinen biljardirata on?)
- (5) Suorakulmion muotoisen biljardipöydän lyhyemmän sivun pituus on 2 m ja pidemmän sivun pituus 3,4 m. Biljardipöydän jokaisessa neljässä kulmassa on pussi. Biljardipallo on alla olevan kuvan mukaisesti pöydän pidemmällä sivulla metrin päässä pöydän vasemmasta alakulmasta. Millä lähtökulman arvolla (pöydän alareunaan nähden) pallo saadaan lyötyä **kolmen** kimmokkeen kautta pöydän vasemmassa yläkulmassa olevaan pussiin? (Alku- ja loppupisteitä ei lasketa kimmokkeisiin.) Piirrä lisäksi pallon kulkureitti pöydällä.  
(Vinkki: GeoGebra, aukitaittelumetodi ja trigonometria)



- (6) Osoita aukitaittelumetodin avulla, että suorakulmaisella tasakylkisellä kolmiolla ABC ei ole kärjestä A lähtevää jaksollista ratakäyriä.

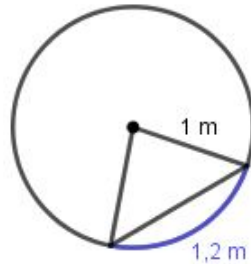


## 2.2. Ympyräbiljardia ja ellipsibiljardia.

- (1) Tutki ympyränmuotoisen biljardipöydän biljardirataa alla olevan linkin avulla ja vastaa tutkimustesi perusteella seuraaviin kysymyksiin:  
Mitä voit sanoa peräkkäisten törmäyspisteiden välisistä etäisyyksistä ympyrän kehällä? Entä heijastuskulmien suuruudesta? Kulkeeko biljardirata kaikkialla ympyrän sisällä vai jääkö ympyrän sisälle alue/alueita josta biljardirata ei näyttäisi kulkevan? Jos jää, niin minne ja minkä muotoisia?

Linkki tehtävään: <https://www.geogebra.org/classic/r9ee6hqz>

- (2) Ympyräbiljardissa ratakäyrän segmentit sivuavat sisempää samakeskistä ympyrää. Laske sisemmän ympyrän säde, kun biljardipöydän säde on 1 m ja biljardiradan kahden peräkkäisen törmäyspisteen välisen ympyräkaaren pituus on 1,2 m. Kuva alla.



- (3) Etsi jaksollisia biljardiratoja ympyrällä alla olevan linkin avulla. Pohdi sen jälkeen, onko ympyrällä olemassa muita erilaisia yhdeksänperiodisia ratoja löytämäsi kolmen lisäksi? Perustelee.  
(Vinkki: Miten luvut  $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$  liittyvät 9-periodisuuteen)

Linkki tehtävään: <https://www.geogebra.org/classic/g3uht6dk>

- (4) Tutki ellipsinmuotoisen biljardipöydän biljardirataa alla olevan linkin avulla. Vastaa tutkimustesi perusteella seuraaviin kysymyksiin:  
Miten seuraavat ratakäyrän segmentit käyttäytyvät, jos ensimmäinen segmentti kulkee ellipsin polttopisteiden ulkopuolelta? Entä jos ensimmäinen segmentti kulkee polttopisteen  $F_1$  kautta? Entä jos ensimmäinen segmentti kulkee ellipsin polttopisteiden välistä? Jääkö ellipsin sisälle alue/alueita, joiden kautta biljardirata ei kulje? Mitä muita huomioita teit?

Linkki tehtävään: <https://www.geogebra.org/classic/hcaa8dvk>

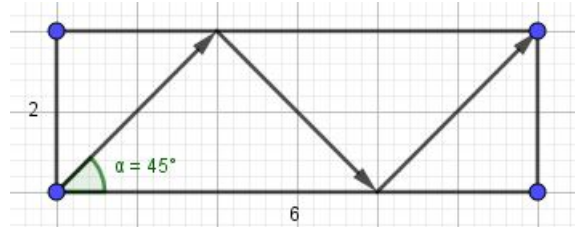
- (5) Tutki alla olevan linkin avulla, mitä ellipsinmuotoisella biljardipöydällä polttopisteen kautta kulkevalle biljardiradalle tulee tapahtumaan ajan kuluessa?

Linkki tehtävään: <https://www.geogebra.org/classic/ptp87x7t>

### 3. Malliratkaisut

**3.1. Monikulmiobiljardia.** Tehtävät (1), (2) ja (3) ovat lähteestä [14] ja tehtävän (6) sisältämän lauseen todistus noudattaa lähdettä [9]

(1) a) ylä oikea (kuva alla)



b) ylä vasen, c) ala oikea, d) ylä oikea, e) ala oikea, f) ylä oikea, g) ylä vasen, h) ylä vasen, i) ylä vasen

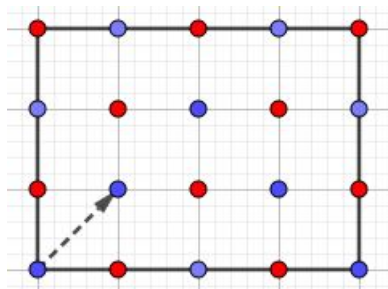
(2) Tehtävän (1) ratkaisuiista saadaan muodostettua seuraavanlainen taulukko:

pariton x pariton	ylä oikea
pariton x parillinen	ala oikea
parillinen x pariton	ylä vasen
parillinen x parillinen	vaihtelee

Jos biljardipöydän molemmat sivut ovat parillisia, ei voida suoraan sanoa, mihin kulmaan pallo tulee päätymään. Toisaalta esimerkiksi  $2 \times 6$  pöydällä pallo käyttäytyy samalla tavalla kuin  $1 \times 3$  pöydällä. Niinpä (parillinen  $\times$  parillinen) -pöydän sivun pituuksia voidaan jakaa kahdella niin monta kertaa, että lopulta päädytään tilanteeseen, jossa ainakin toinen pöydän sivun pituuksista on pariton. Tällaisesta pöydästä osataan sanoa, mihin kulmaan pallo päättyy.

Niinpä tehtävässä annetuilla biljardipöydillä pallo päättyy seuraaviin pusseihin: a) ylä vasen, b) ylä oikea, c) ala oikea ( $600 \times 10000$  voidaan supistaa muotoon  $3 \times 50$ )

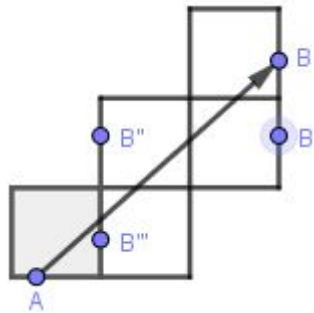
(3) Värittämällä joka toinen biljardipöydän ruudukon kärkipiste sinisellä ja joka toinen punaisella, esimerkiksi  $3 \times 4$  -kokoinen biljardipöytä näyttää seuraavanlaiselta:



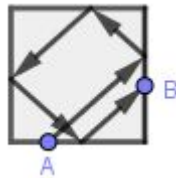


Nyt huomataan, että kun pallo lyödään liikkeelle  $45^\circ$ :en lähtökulmassa vasemmasta alakulmasta, se voi kulkea vain sinisten pisteiden kautta. Niinpä pallon täytyy päätyä oikeaan alakulmaan, joka on lähtöpisteen lisäksi ainoa sininen kulma. Toisaalta kulmien väri riippuu ainoastaan sivujen parillisuudesta/parittomuudesta. Siten suorakulmion sivujen pituuden parillisuus/parittomuus määrää pallon päätepisteen.

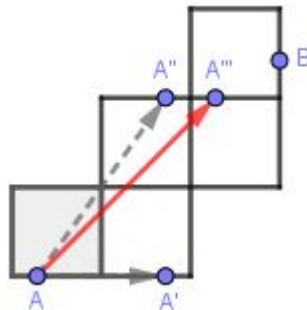
- (4) a) Taittelemalla neliöt takaisin päällekkäin, huomataan, että piste B sijaitsee neliön oikealla pystysivulla (kuva alla).



- b) Aukitaittelumetodissa jokainen neliön sivun läpi kulkeminen tarkoittaa alkuperäisellä biljardipöydällä pallon törmäämistä neliön johonkin reunaan. Niinpä pallo törmää biljardipöydän reunaan viisi kertaa (loppupiste mukaan luettuna). Alla kuva pallon reitistä.

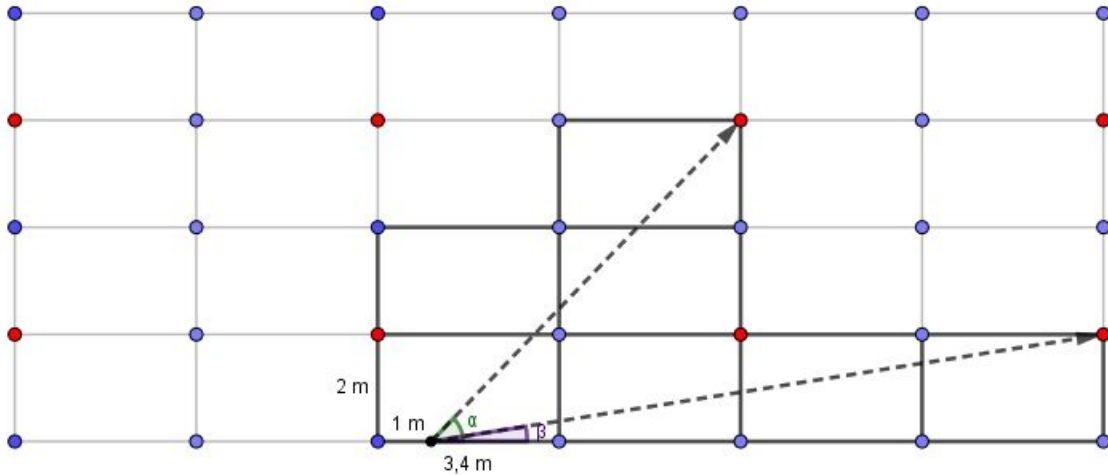


- c) Alla olevassa kuvassa on merkitty jokaiseen neliöön pistettä A vastaavat pisteet. Punaisella nuolella on merkitty jaksollinen rata, harmailla katkoviivanuolilla olevat radat  $AA'$  ja  $AA''$  eivät ole jaksollisia, sillä ne kulkevat neliön jonkin kulman kautta.



- d) c)-kohdassa löydetty punaisella nuolella merkitty rata kulkee neljän törmäyspisteen kautta, eli se on neliperiodinen biljardirata.

- (5) Peilaamalla biljardipöytää oikealle, ylös ja vasemmalle ja merkitsemällä peilattuihin biljardipöytiin pallon haluttu loppupaikka punaisella nähdään, että kolmen kimmokkeen kautta haluttuun pussiin pääsee kahta eri reittiä pitkin. Nämä reitit on esitetty alla olevassa kuvassa.

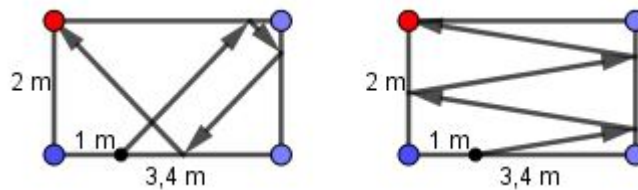


Pallon mahdolliset lähtökulmat saadaan laskettua trigonometriasta:

$$\tan \alpha = \frac{6m}{2,4m + 3,4m} = \frac{6}{5,8} \implies \alpha \approx 46^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{2m}{2,4m + 3 \cdot 3,4m} = \frac{2}{12,6} \implies \beta \approx 9,0^\circ$$

Niinpä pallo tulee lyödä joko  $46^\circ$  tai  $9,0^\circ$  kulmassa, jotta se menee oikeassa yläkulmassa olevaan pussiin kolmen kimmokkeen kautta. Tällöin biljardiradat ovat seuraavanlaiset:



- (6) Aukitaittelumetodia käyttämällä saadaan tehtävässä annetun kuvan mukainen peilattujen kolmioiden verkko. Olkoon alkuperäisessä kolmiossa kärkipisteen A koordinaatit  $(0, 0)$ . Tällöin peilattujen kolmioiden muodostamassa verkossa jokaisen kärkeä A vastaavan pisteen molemmat koordinaatit ovat parillisia lukuja. Sitä vastoin kolmion kärkipisteitä B ja C vastaavien pisteiden koordinaateissa ainakin toinen koordinaatti on aina pariton luku.

Biljardirata pisteestä A takaisin pisteeseen A tarkoittaisi aukitaittelumetodia käyttämällä siis janaa pisteestä  $(0, 0)$  johonkin pisteeseen  $(2m, 2n)$ , missä  $m$  ja  $n$  ovat luonnollisia lukuja. Tällöin jana tulee kulkemaan myös pisteen  $(m, n)$  kautta (janan keskipiste).

Jos jompi kumpi tai molemmat luvuista  $m$  ja  $n$  ovat parittomia, niin piste  $(m, n)$  on kärkeä B tai C vastaava piste. Tällöin biljardirata ei olisi jaksollinen, sillä se törmäisi joko kolmion kulmaan B tai C.

Jos taas pisteen  $(m, n)$  molemmat koordinaatit ovat edelleen parillisia, niin piste  $(m, n)$  olisi pistettä A vastaava piste. Tällöin jana kulkisi myös pisteen  $(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$  kautta. Näin voidaan jatkaa kunnes lopulta janalta löytyy piste, jonka koordinaateista ainakin jompi kumpi on pariton (eli pistettä B tai C vastaava piste). Niinpä biljardirata kärkestä A takaisin kärkeen A osuu matkalla aina joko kolmion kärkeen B tai C, eikä siten ole jaksollinen.

### 3.2. Ympyräbiljardia ja ellipsibiljardia.

- (1) Ympyräbiljardia tutkimalla huomataan, että peräkkäisten törmäyspisteiden väliset etäisyydet ympyrän kehällä pysyvät samoina jokaisen törmäyksen jälkeen. Myös heijastuskulmat pysyvät yhtä suurina jokaisessa heijastuksessa (Ympyrän keskipisteen ja kahden peräkkäisen kehällä olevan törmäyspisteen muodostamat kolmiot ovat yhtenevät). Biljardirata ei kulje kaikkialla ympyrän sisällä, vaan jaksottomilla biljardiradoilla biljardipöydän keskelle jää ympyränmuotoinen alue jossa biljardirata ei kulje. Itse asiassa jokainen ratakäyrän segmentti on tangentti tälle pienemmälle ympyrälle.

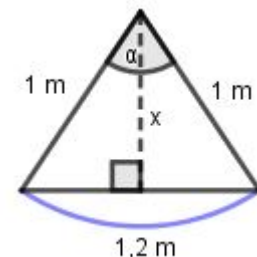
- (2) Sektorin kaari  $b = 1,2$  m, säde  $r = 1$  m, sisemmän ympyrän säde  $= x$ .

Sektorin kaaren pituudelle on kaava

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

joten sektorin kulmalle pätee

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot b}{2\pi r} = \frac{360^\circ \cdot 1,2\text{m}}{2\pi \cdot 1\text{m}} = 68,75 \dots^\circ$$



Koska ratakäyrän segmentti sivuaa sisempää ympyrää, sisemmän ympyrän säde on yhtä suuri kuin ratakäyrän segmentin lyhin etäisyys ympyrän keskipisteestä. Siten suorakulmaisesta kolmiosta saadaan sisemmän ympyrän säde (katso kuva):

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{1\text{m}} \implies x = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 1\text{m} = 0,8253 \dots \text{m} \approx 0,8\text{m}.$$

- (3) Kolme erilaista yhdeksänperiodista rataa on esitetty alla olevassa kuvassa.



Mahdolliset yhdeksänperiodiset radat ympyrällä voidaan löytää jakamalla ympyrän kehän yhdeksään yhtä pitkään osaan. Jos kahden peräkkäisen törmäyspisteen välinen etäisyys ympyrän kehällä on  $\frac{1}{9}$  kehän pituudesta, biljardirata on selvästi yhdeksänperiodinen. Vastaavasti jos pisteiden välinen etäisyys on  $\frac{2}{9}$  rata on periodinen. Sen sijaan jos törmäyspisteiden välinen etäisyys on  $\frac{3}{9}$  kehän pituudesta, biljardirata on kolmi-periodinen, sillä luku  $\frac{3}{9}$  voidaan sieventää muotoon  $\frac{1}{3}$ .

Siispä biljardirata ympyrällä on yhdeksänperiodinen, jos kahden peräkkäisen törmäyspisteen välinen etäisyys kehällä on  $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}$  tai  $\frac{8}{9}$  kehän pituudesta. **Mutta** erimuotoisia yhdeksänperiodisia ratoja on vain kolme, sillä kiertämällä ympyrän kehää esimerkiksi  $\frac{1}{9}$  välein muodostuu sama kuvio kuin kiertämällä kehää  $\frac{8}{9}$  välein. Radan muodostumissuunta on kuitenkin eri.

- (4) Jos ensimmäinen ellipsin biljardiratasäde kulkee polttopisteiden ulkopuolelta, kaikki seuraavatkin ratasäteet kulkevat polttopisteiden ulkopuolelta. Lisäksi tällaiset ratasäteet sivuavat sisempää ellipsiä, jolla itse asiassa on samat polttopisteet kuin reunaellipsillä. Ellipsin sisälle jää siis ellipsin muotoinen alue jossa biljardirata ei kulje.

Jos taas ensimmäinen ratasäde kulkee ellipsin polttopisteen kautta, jokainen kyseisen biljardiradan ratasäde kulkee ellipsin polttopisteen kautta siten, että joka toinen ratasäde kulkee polttopisteen  $F_1$  kautta ja joka toinen pisteen  $F_2$  kautta.

Jos ensimmäinen ratasäde kulkee polttopisteiden välistä, jokainen ratasäde tulee kulkemaan polttopisteiden välistä. Lisäksi tällaiset ratasäteet (tai niiden jatkeet) sivuavat hyperbeliä, jolla myöskin on samat polttopisteet kuin reunaellipsillä. Tällöin ellipsin molempiin päihin jää hyperbelin rajoittamat aluet, joissa biljardirata ei kulje.

Lisäksi huomataan esimerkiksi se, että ellipsin polttopisteiden ulkopuolelta kulkevista radoista on symmetrian avulla melko helppo löytää monikulmion muotoisia jaksollisia ratoja kuten kolmi-, neli- ja viisi-periodiset radat.

- (5) Ellipsin polttopisteen kautta kulkevan biljardiradan ratasäteet alkavat lähestyä isoakselia ja muuttuvat lopulta lähes isoakselin suuntaisiksi. Biljardirata alkaa siis suppenemaan kohti isoakselia.

Linkin ellipsistä nähdään, että biljardirata ei välttämättä heti lähde suppenemaan kohti isoakselia riippuen siitä, miten biljardiradan ensimmäinen ratasäde suunnataan. Kuitenkin viimeistään muutaman törmäyksen jälkeen rata alkaa lähestyä isoakselia.

## Lähteet

- [1] M. ABATE, F. TOVENA: *Curves and surfaces*, Springer Milan, 2012.
- [2] D. W. DETEMPLE, J. M. ROBERTSON: *A billiard path characterization of regular polygons*, *Mathematics Magazine* , **54**(2), 1981, pp.73-75.
- [3] L. FLATTO: *Poncelet's theorem*, American Mathematical Society, 2009.
- [4] B. HASSELBLATT, A. KATOK: *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.
- [5] V-M. HOKKANEN, L. KAHANPÄÄ, L. KURITTU: *Geometria*. luentomoniste.
- [6] N. J. LENNES: *On the motion of a ball on a billiard table*, *The American Mathematical Monthly*, **12**(8/9), 1905, pp.152-155.
- [7] M. LEVI, S. TABACHNIKOV: *The Poncelet grid and billiards in ellipses*, *The American Mathematical Monthly*, **114**(10), 2007. pp.895-908.
- [8] S. W. PARK: *An introduction to dynamical billiards*.  
<https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Park.pdf>
- [9] U. A. ROZIKOV: *An introduction to mathematical billiards*, World Scientific, 2019.
- [10] R. E. SCHWARTZ: *Obtuse triangular billiards II: 100 degrees Worth of periodic trajectories*, *Experimental Mathematics*, **18**(2), 2009. pp.137-171.
- [11] R. E. SCHWARTZ: *Billiards obtuse and irrational*, <http://www.math.brown.edu/~res/Papers/intel.pdf>
- [12] S. TABACHNIKOV: *Geometry and billiards*, American Mathematical Society, 2005.
- [13] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019, Opetushallitus, viitattu 3.2.2020  
[https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2019.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf)
- [14] The billiard ball problem, *The Hindu*, viitattu 7.1.2020  
<https://www.thehindu.com/children/the-billiard-ball-problem/article20314985.ece>