Sähköisen impedanssitomografian inversio-ongelma

Janne Nurminen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2020

Tiivistelmä: Janne Nurminen, *Sähköisen impedanssitomografian inversio-ongelma* (engl. *The inverse problem of electrical impedance tomography*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 56 s.,Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2020.

Tässä tutkielmassa esitellään sähköisen impedanssitomografian matemaattista mallia sekä johtavuusyhtälöön liittyvää inversio-ongelmaa. Tutkielman päätuloksena osoitetaan, että kappaleen reunalla tehtävien mittauksien avulla voidaan määrittää kappaleen sisällä oleva johtavuus. Sähköinen impedanssitomografia on siis kuvantamismenetelmä, jonka avulla jonkin kappaleen pinnalla tehtävistä sähköisistä mittauksista pyritään selvittämään kappaleen sisäistä rakennetta.

Kyseisen inversio-ongelman muotoilemiseen tarvitaan esitiedoiksi teoriaa Sobolev-avaruuksista sekä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden heikoista ratkaisuista. Heikkojen ratkaisujen teoria pohjautuu nimenomaan Sobolev-avaruuksien teoriaan. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden heikkojen ratkaisujen teorian avulla voidaan antaa määritelmä niin sanotulle Dirichlet-to-Neumann -kuvaukselle, jonka voidaan ajatella sisältävän tiedot kappaleen reunalla tehtävistä mittauksista.

Kun tiedetään, mitä Dirichlet-to-Neumann -kuvaukset ovat, voidaan muotoilla sähköiseen kuvantamismenetelmään liittyvä inversio-ongelma johtavuusyhtälön tapauksessa: Olkoon γ positiivinen oleellisesti rajoitettu funktio avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimessa ja rajoitetussa joukossa. Määritä Dirichlet-to-Neumann -kuvauksesta johtavuus kyseisessä joukossa. Tutkielman päätulos liittyy tähän inversio-ongelmaan, jossa osoitetaan, että reunalla tehtävät sähköiset mittaukset, eli Dirichlet-to-Neumann -kuvaus, määräävät tuntemattoman johtavuuden arvon reunalla.

Tämän lisäksi tutkielmassa esitellään hieman Schrödingerin yhtälöä. Schrödingerin yhtälölle muotoillaan siihen liittyvä inversio-ongelma ja vastaava Dirichlet-to-Neumann -kuvaus. Lisäksi todistetaan samankaltainen tulos kuin johtavuusyhtälölle, eli reunalla tehtävät mittaukset määräävät tuntemattoman potentiaalin arvon reunalla.

Sisältö

Johdanto

Voidaanko materiaalin sisäisestä rakenteesta saada tietoa jännitteen ja virran mittauksista kappaleen reunalta? Tämä kysymys motivoi argentiinalaista Alberto Calderónia, joka oli kiinnostunut siitä öljyn etsimisen näkökulmasta. Myöhemmin heräsi kysymys, että voitaisiinko sitä hyödyntää pienempienkin kappaleiden tutkimiseen. Vuonna 1980 Calderón julkaisi ajatuksensa tästä kysymyksestä [**1**]. Tämä on ollut uraa uurtava julkaisu ja on motivoinut myöhempiä inversio-ongelmiin liittyviä tutkimuksia.

Sähköinen impedanssitomografia on kuvantamismenetelmä, jonka avulla jonkin kappaleen pinnalla tehtävistä sähköisistä mittauksista pyritään selvittämään kappaleen sisäistä rakennetta. Tälle sähköiselle kuvantamismenetelmälle on ajateltu olevan lukuisia soveltamiskohteita, joista yhtenä tärkeimpänä ovat lääketieteelliset sovellukset. Näitä ovat esimerkiksi keuhkoveritulpan havaitseminen [**8**] ja rintasyövän aikainen havaitseminen [**4**], joissa molemmissa hyödynnetään havaittavien aineiden hyvinkin erilaista sähkönjohtavuutta verrattuna ihmisen muuhun kudokseen tutkittavissa alueissa. Myös teollisuudessa on omat sovelluksensa tälle kuvantamismenetelmälle [**4**].

Tämän tutkielman pääaiheena on sähköisen impedanssitomografian matemaattisen mallin esittely sekä niin sanottuun johtavuusyhtälöön $\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0$ liittyvä inversio-ongelma:

> Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko. Olkoon lisäksi $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, jolle pätee $\gamma(x) \geq c > 0$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Määritä Dirichlet-to-Neumann -kuvauksesta Λ_γ johtavuus γ joukossa Ω.

Dirichlet-to-Neumann -kuvaukset ovat kuvauksia, jotka liittävät Dirichlet'n reuna-arvot Neumannin reuna-arvoiksi. Dirichlet'n reuna-arvojen voidaan ajatella vastaavan kappaleen pinnalle asetettuja jännitteitä ja Neumannin reuna-arvot ovat näistä jännitteistä aiheutuneita virtoja kappaleen pinnalla. Ideana on, että näiden avulla voidaan määrittää kappaleen johtavuus.

Tässä tutkielmassa esitellään, miten Dirichlet-to-Neumann -kuvaus määritellään sekä, miten voidaan määrittää johtavuus, kun tiedetään Dirichlet-to-Neumann -kuvaus kappaleen reunalla. Teoria liittyy siis vahvasti osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja nimenomaan osittaisdifferentiaaliyhtälöiden heikkoon teoriaan, joka pohjautuu Sobolev-avaruuksien teoriaan.

Tutkielma seuraa suurilta osin Joel Feldmanin, Mikko Salon ja Gunther Uhlmannin tekeillä olevaa kirjaa *The Calderón Problem - An Introduction to Inverse Problems.* Tutkielman rakenne on seuraava. Ensimmäisessä luvussa käsitellään tarvittavia esitietoja koskien Sobolev-avaruuksia sekä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden heikkojen ratkaisujen teoriaa. Lisäksi käsitellään teoriaa siitä, mitä tarkoitetaan joukon reunan sileydellä. Toisessa luvussa keskitytään johtavuusyhtälöön ja siihen liittyvään inversio-ongelmaan. Luvussa johdetaan johtavuusyhtälö erityisesti tilanteessa, missä $n \geq 2$. Lisäksi määritellään Dirichlet-to-Neumann -kuvaus johtavuusyhtälön tapauksessa sekä esitetään tähän liittyvä inversio-ongelma.

Kolmannessa luvussa muotoillaan ja todistetaan tutkielman päätulos, joka on johtavuuden määrittäminen reunalla Dirichlet-to-Neumann -kuvauksen antaman tiedon avulla. Luvussa neljä esitellään hieman toista differentiaalioperaattoria, Schrödingerin operaattoria, ja tähän operaattoriin liittyvää Schrödingerin yhtälöä. Schrödingerin yhtälölle määritellään myös Dirichlet-to-Neumann -kuvaus ja Schrödingerin yhtälöön liitytvä inversio-ongelma. Lisäksi esitellään vastaava tulos Schrödingerin yhtälölle kuin tutkielman päätulos ja todistetaan se. Tässä todistuksessa toistuvat suurilta osin samat ideat kuin johtavuusyhtälön tapauksessa, mutta siinä tarvitaan myös negatiivisten eksponenttien Sobolev-avaruuksien teoriaa, jota ei tässä tutkielmassa käydä läpi. Tätä todistusta ei ole tiedettävästi julkaistu artikkeleissa tai kirjoissa.

LUKU 1

Määritelmiä, merkintöjä, esitietoja

Tässä luvussa käydään läpi tarvittavia esitietoja Sobolev-avaruuksista sekä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden heikosta teoriasta. On osoittautunut, että oikeat funktioavaruudet osittaisidifferentiaaliyhtälöiden teoriaan ovat juuri Sobolev-avaruudet. Niiden avulla saatua teoriaa osittaisdifferentiaaliyhtälöille kutsutaan heikoksi teoriaksi. Suurin osa tuloksista ja merkinnöistä ovat lähteestä [**3**], mutta jotkin merkinnöistä seuraavat lähdettä [**5**]. Lisäksi tässä luvussa käsitellään, mitä tarkoitetaan joukon reunan sileydellä.

1.1. Sobolev-avaruuksista

Aloitetaan määrittelemällä funktion heikko derivaatta sekä Sobolev-avaruudet, joiden jälkeen annetaan Sobolev-avaruuksille ja niiden alkioille ominaisuuksia. Osa näistä ominaisuuksista vain todetaan ja osalle annetaan todistus.

Merkitään $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Määritelmä 1.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi ja $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funktio v on funktion u α:s *heikko derivaatta*, merkitään $v = \partial^\alpha u$, jos

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx \text{ kaikilla } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}_0$. Asetetaan

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \colon \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ aina kun } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ ja } |\alpha| \leq k\}.$$

Avaruutta $H^k(\Omega)$ kutsutaan *Sobolev-avaruudeksi.*

Asetetaan tälle avaruudelle sisätuloksi

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

ja normiksi

$$||u||_{H^k(\Omega)} = (u, u)^{1/2}_{H^k(\Omega)}.$$

Kompaktikantajaisia funktioita $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ sanotaan yleensä *testifunktioiksi.*

Sobolev-avaruudet $H^k(\Omega)$ ovat Hilbertin avaruuksia, mistä merkintäkin tulee.

Lause 1.2. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Tällöin $H^k(\Omega)$ on Hilbertin avaruus kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$.*

Lisäksi määritellään kompaktikantajaisten funktioiden sulkeuma sekä sen duaali. Tämän duaaliavaruuden normi on luonnollista määrittää duaalisuuden avulla.

Määritelmä 1.3. Merkitään $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$ avaruudessa $H^1(\Omega)$. Tämän duaali on

$$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^* = \{F\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ rajoitettu lineaarinen funktionaali}\}$$

ja asetetaan avaruuden $H^{-1}(\Omega)$ normiksi

$$||u||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||\phi||_{H_0^1(\Omega)}=1} |(u,\phi)_{L^2(\Omega)}|.$$

Avaruuden $H_0^1(\Omega)$ alkioiden voidaan ajatella olevan kaikki ne $u \in H_0^1(\Omega)$, joiden arvot joukon Ω reunalla ovat 0 eli $u|_{\partial\Omega} = 0$. [**2**]

Tarvitaan joitain tuloksia Sobolev-avaruuksista, jotta saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälöiden heikolle teorialle tarpeeksi ominaisuuksia tämän tutkielman päätuloksen kannalta.

Ensimmäiseksi todistetaan, että jokaisella avaruuden $H_0^1(\Omega)$ rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono avaruudessa $L^2(\Omega)$. Tätä varten muotoillaan Minkowskin epäyhtälön integraalimuoto ja kompaktin operaattorin määritelmä.

Lause 1.4. *Olkoon (X,μ) ja (Y,ν) $\sigma-$äärellisiä mitta-avaruuksia, $F\colon X\times Y \to \mathbb{C}$ mitallinen ja $1 \le p < \infty$. Tällöin*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |F(x,y)|\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \le \int_Y \left(\int_X |F(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y).$$

Määritelmä 1.5. Olkoon X ja Y Banachin avaruuksia. Rajoitettu lineaarinen funktionaali $K\colon X \to Y$ on *kompakti*, jos jokaisella rajoitetulla jonolla $(u_j)_{j=1}^\infty \subset X$ on olemassa osajono $(u_{j_k})_{k=1}^\infty$ siten, että $(Ku_{j_k})_{k=1}^\infty$ suppenee avaruudessa Y.

Lause 1.6. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko. Tällöin inkluusiokuvaus*

$$i\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad i(v) = v$$

on kompakti lineaarinen funktionaali.

Todistus. Todistus perustuu Arzelà-Ascolin lauseeseen. Olkoon $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$, $j = 1,2,\dots$, rajoitettu jono siten, että

$$||u_j||_{H^1(\Omega)} \le C, \tag{1.1}$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Voidaan olettaa, että $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt}(u_j) \subset \Omega$: Koska $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ on tiheä aliavaruus, niin on olemassa $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ siten, että

$$||u_j - \phi_j||_{H^1(\Omega)} < \frac{1}{j}.$$

Tällöin myös jono (ϕ_j) on rajoitettu avaruudessa $H_0^1(\Omega)$. Jos löytyy suppeneva osajono (ϕ_{j_k}) avaruudessa $L^2(\Omega)$, niin myös jono (u_{j_k}) suppenee kohti samaa raja-arvoa avaruudessa $L^2(\Omega)$. Tämä oikeuttaa oletuksen $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Jos saataisiin tasainen rajoitus jonolle (u_j), eli tapauksessa $p = \infty$, rajoituksen (1.1) sijaan:

$$||u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||\nabla u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C.$$

Tällöin jono $(u_j|_{\overline{\Omega}})$ olisi pisteittäin rajoitettu. Lisäksi

$$\begin{aligned}|u_j(y) - u_j(x)| &= \int_0^1 \nabla u(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\,dt \\ &\le ||\nabla u_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|y-x| \le C|y-x|,\end{aligned}$$

joten jono $(u_j|_{\overline{\Omega}})$ olisi myös yhtäjatkuva. Tällöin Arzelà-Ascolin lauseen perusteella olisi olemassa tasaisesti suppeneva osajono $(u_{j_k}) \subset L^2(\overline{\Omega})$.

Siirtymä tapauksesta $p = 2$ tapaukseen $p = \infty$ hoidetaan konvoluutioilla. Määritellään

$$u_j^\varepsilon = u_j * \eta_\varepsilon,$$

missä η_ε on silottajaydin. Tällöin

$$\begin{aligned}
u_j^\varepsilon - u_j(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) u_j(x-y)\, dy - u_j(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) u_j(x-y)\, dy - u_j(x) \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) \left(u_j(x-y) - u_j \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) \left(\int_0^1 \nabla u_j(x-ty) \cdot (-y)\, dt \right) dy \\
&= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 \eta(y) \nabla u_j(x - \varepsilon t y) \cdot y \; dt\, dy,
\end{aligned}$$

missä toiseksi viimeisessä vaiheessa käytettiin analyysin peruslausetta.

Minkowskin epäyhtälön integraalimuotoa (lause 1.4) kaksi kertaa soveltamalla, sekä käyttämällä rajoitusta (1.1) saadaan

$$\begin{aligned}
||u_j^\varepsilon - u_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \varepsilon \int_{B(0,1)} \left(\int_0^1 \eta(y) \nabla u_j(x - \varepsilon t y) \cdot y \; dt \right) dy \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\le \varepsilon \int_{B(0,1)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \eta(y) \nabla u_j(x - \varepsilon t y) \cdot y \; dt \right|^2 dx \right)^{1/2} dy \\
&\le \varepsilon \int_{B(0,1)} \left(\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \eta(y) \nabla u_j(x - \varepsilon t y) \right|^2 \cdot |y|^2 \; dx \right)^{1/2} dt \right) dy \\
&= \varepsilon \int_{B(0,1)} \left(\int_0^1 \eta(y) ||\nabla u_j(\cdot - \varepsilon t y)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} |y| \; dt \right) dy \\
&= \varepsilon ||\nabla u_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,1)} \left(\int_0^1 \eta(y) |y| \; dt \right) dy \le \varepsilon C_1.
\end{aligned}$$

Huomattavaa on se, että vakio $C_1 > 0$ ei riipu luvusta $j \in \mathbb{N}$, vaan se on kaikille sama.

Näytetään seuraavaksi, että jonolla (u_j) on osajono, joka on Cauchy avaruudessa $L^2(\Omega)$. Olkoon $\varepsilon_1 > 0$ ja valitaan $\varepsilon > 0$ niin pieneksi, että

$$||u_j^\varepsilon - u_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\varepsilon_1}{3}, \tag{1.2}$$

jolloin yllä olevan päättelyn nojalla luvulle ε_1 jono (u_j^ε) on rajoitettu ja yhtäjatkuva, sillä

$$|u_j^\varepsilon(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) u_j(y)\, dy \right| \le ||\eta_\varepsilon||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||u_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C_\varepsilon$$

ja

$$|\nabla u_j^\varepsilon(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\eta_\varepsilon(x-y)u_j(y)\,dy \right| \leq ||\nabla\eta_\varepsilon||_{L^2(\mathbb{R}^n)}||u_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_\varepsilon.$$

Molemmissa arvioissa ensimmäinen saadaan Cauchy-Schwartzin epäyhtälöstä ja toinen rajoituksesta (1.1). Kumpikaan arvioista ei riipu pisteestä $x \in \mathbb{R}^n$ eikä jonon (u_j) alkiosta. Nyt Arzelà-Ascolin lause sanoo, että on olemassa osajono $(u_{j_k}^\varepsilon)$, joka suppenee tasaisesti avaruudessa $L^2(\Omega)$. Nyt joukon Ω rajoittuneisuutta, epäyhtälöä (1.2) ja kolmioepäyhtälöä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
||u_{j_k} - u_{j_i}||_{L^2(\Omega)} &\leq ||u_{j_k} - u_{j_k}^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} + ||u_{j_k}^\varepsilon - u_{j_i}^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} + ||u_{j_i} - u_{j_i}^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{2\varepsilon_1}{3} + \left(\int_\Omega (u_{j_k}^\varepsilon - u_{j_i}^\varepsilon)(x)^2\,dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{2\varepsilon_1}{3} + C(\Omega)||u_{j_k}^\varepsilon - u_{j_i}^\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ottamalla tästä epäyhtälöstä lim sup puolittain, seuraa, että kaikille $\varepsilon_1 > 0$ on olemassa osajono (u_{j_k}), jolle

$$\limsup_{k,i\to\infty} ||u_{j_k} - u_{j_i}||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_1.$$

Valitaan $\varepsilon_1 = 1$ ja sovelletaan edellistä argumenttia tälle luvulle. Tällöin saadaan osajono $(u_j^{(1)})$, jolle

$$\limsup_{k,j\to\infty} ||u_k^{(1)} - u_j^{(1)}||_{L^2(\Omega)} \leq 1.$$

Seuraavaksi valitaan $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ ja jälleen saadaan osajono $(u_j^{(2)})$, jolle

$$\limsup_{k,j\to\infty} ||u_k^{(2)} - u_j^{(2)}||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}.$$

Jatkamalla tätä, eli valitsemalla $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}, \varepsilon_4 = \frac{1}{4}, \ldots$, saadaan jokaiselle $\varepsilon_N = \frac{1}{N}$ osajono $(u_j^{(N)})$. Nyt diagonaaliargumentilla valitaan jono $(v_N), v_N = u_N^{(N)}$. Tämä jono on osajono jonolle (u_j) ja lisäksi sille pätee

$$\limsup_{k,i\to\infty} ||v_k - u_i||_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Nyt saatiin jonolle (u_j) suppeneva osajono, koska jonolle (v_N) Cauchyn ehto toteutuu. Tällöin inkluusiokuvaus

$$i\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

on kompakti lineaarinen operaattori määritelmän 1.5 nojalla. □

Toisena tuloksena Sobolev-avaruuksille, on niiden alkioille voimassa oleva erittäin hyödyllinen epäyhtälö, jota kutsutaan Poincarén epäyhtälöksi.

Lause 1.7. *(Poincarén epäyhtälö) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko ja $u \in H_0^1(\Omega)$. Tällöin on vakio $C(n) > 0$ siten, että*

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

Määritellään vielä tekijäavaruus $H^{1/2}(\partial\Omega)$, jonka alkioita tulevat olemaan reuna-arvo-ongelmien reuna-arvot ja sen duaaliavaruus $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Määritelmä 1.8. Määritellään $H^{1/2}(\partial\Omega)$ tekijäavaruudeksi

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega).$$

Tällöin avaruuden $H^{1/2}(\partial\Omega)$ alkiot ovat ekvivalenssiluokkia $[u] = \{u+\phi\colon \phi \in H_0^1(\Omega)\}$, missä $u \in H^1(\Omega)$. Määritellään lisäksi *jälkioperaattori*

$$R\colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega), \quad Ru = [u].$$

Merkitään vielä $u|_{\partial\Omega} = Ru$.

Avaruuden $H^{1/2}(\partial\Omega)$ duaali on

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) = \big(H^{1/2}(\partial\Omega)\big)^* = \{T\colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to \mathbb{C} \text{ rajoitettu lineaarinen funktionaali}\}.$$

Jälkioperaattoria varten muistutetaan ortogonaalikomplementista ja ortogonaalisesta suorasta summasta avaruudelle $H^1(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)^\perp.$$

Tässä on järkeä, koska $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ on suljettu aliavaruus.

Seuraavaksi annetaan Hilbertin avaruuden rakenne avaruudelle $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ja sen jälkeen hyödyllinen aputulos myöhemmin käytettäväksi.

Lause 1.9. *Ortogonaaliprojektio $P\colon H^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)^\perp$ indusoi bijektiivisen lineaarisen kuvauksen*

$$T\colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H_0^1(\Omega)^\perp, \quad T([u]) = P(u).$$

Kun asetetaan avaruuteen $H^{1/2}(\partial\Omega)$ sisätuloksi

$$([u],[v])_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = (T([u]),T([v]))_{H^1(\Omega)}, \quad u,v \in H^1(\Omega)$$

ja normiksi

$$||[u]||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = ||T([u])||_{H^1(\Omega)} = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} ||u+v||_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega),$$

niin avaruudesta $H^{1/2}(\partial\Omega)$ saadaan Hilbertin avaruus.

Todistus. Kuvaus T on hyvin määritelty, eli sen arvo ei riipu alkion $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ekvivalenssiluokan $[u]$ edustajasta; jokaiselle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$P(u+v) = P(u).$$

Jos $0 = T([u]) = P(u)$, niin ortogonaaliprojektion määritelmän mukaan $u \in H_0^1(\Omega)$ ja siten $[u] = 0$. Kuvaus T on täten injektio. Surjektiivisuus seuraa myös ortogonaaliprojektion määritelmästä, sillä kaikille $w \in H_0^1(\Omega)^\perp$ on

$$w = P(w) = T([w]).$$

Kuvaus T on siis bijektio ja lineaarinen koska ortogonaaliprojektio on lineaarinen.

Näytetään seuraavaksi, että $([u],[v])_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = (T([u]),T([v]))_{H^1(\Omega)}$ on todella sisätulo. Tämä on selvää siitä, miten se määriteltiin, eli se perii sisätulon ominaisuudet sisätulolta $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{H^1(\Omega)}$.

Olkoon $([u_j]) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$, $j = 1,2,\dots$, Cauchyn jono. Tällöin $(T([u_j])) = (P(u_j))$ on Cauchyn jono avaruudessa $H^1(\Omega)$ ja koska $H^1(\Omega)$ on Hilbertin avaruus, niin jono $(P(u_j))$ suppenee avaruudessa $H^1(\Omega)$. Lisäksi $P(u_j) \to P(u) \in H^1(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$, koska $H_0^1(\Omega)^\perp$ on suljettu avaruus. Täten kuvauksen T ja avaruuden $H^{1/2}(\partial\Omega)$ normin ominaisuuksien perusteella

$$[u_j] \to [u] \in H^{1/2}(\partial\Omega) \quad \text{avaruudessa } H^{1/2}(\partial\Omega).$$

□

Lause 1.10. *On olemassa rajoitettu lineaarinen kuvaus*

$$E_{\partial\Omega} \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$$

siten, että

$$RE_{\partial\Omega} f = f, \;\; \textit{missä} \;\; f \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Lisäksi mille tahansa alkiolle $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ löytyy $v_f \in H^1(\Omega)$ siten, että

$$||v_f||_{H^1(\Omega)} \le C||f||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \;\; C > 0, \;\; ja \;\; v_f|_{\partial\Omega} = f.$$

Todistus. Valitaan $E_{\partial\Omega} \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$, $\quad E_{\partial\Omega}([u]) = P(u)$, missä $u \in H^1(\Omega)$. Tällöin

$$RE_{\partial\Omega}([u]) = [P(u)] = [u],$$

johtuen avaruuden $H^{1/2}(\partial\Omega)$ alkioiden määrittelystä. Lisäksi

$$||E_{\partial\Omega}([u])||_{H^1(\Omega)} = ||P(u)||_{H^1(\Omega)} = ||[u]||_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

joten lauseen toinenkin osa on todistettu. □

1.2. Osittaisdifferentiaaliyhtälöistä

Käsitellään toisen asteen differentiaalioperaattoria L. Tässä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu avoin joukko. Olkoon $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Tällöin

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + qu, \tag{1.3}$$

missä derivoinnilla tarkoitetaan heikkoa derivaattaa.

Kertoimille on voimassa seuraavat ehdot:

$$\begin{gathered} a^{jk}, q \in L^\infty(\Omega) \quad \text{ovat reaaliarvoisia,} \\ a^{jk} = a^{kj} \;\; \text{kaikilla} \;\; j,k = 1,\dots,n \quad \text{sekä} \\ C|\xi|^2 \ge \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)\xi_j\xi_k \ge c|\xi|^2 \end{gathered} \tag{1.4}$$

melkein kaikille $x \in \Omega$ ja kaikille $\xi \in \mathbb{R}^n$, missä $0 \le c \le C < \infty$. Viimeisintä ehtoa kutsutaan *elliptisyysehdoksi.*

Huomautus 1.11. Vastaavanlainen elliptisyysehto on olemassa myös kompleksisille vektoreille. Merkitään $A = \left(a^{jk}(x)\right)_{j,k=1}^{n}$, ja oletetaan, että alkiot toteuttavat yllä kuvatun elliptisyysehdon. Olkoon $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Tällöin, jos merkitään $\zeta = \xi + i\eta$, missä $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, ja hyödyntämällä matriisin A symmetrisyyttä, saadaan

$$A\zeta \cdot \overline{\zeta} = A(\xi + i\eta) \cdot (\xi - i\eta) = A\xi \cdot \xi + A\eta \cdot \eta.$$

Nyt, koska matriisin A alkiot toteuttavat elliptisyysehdon, saadaan

$$C|\zeta|^2 \geq \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)\zeta_j\overline{\zeta}_k \geq c|\zeta|^2 \text{ melkein kaikilla } x \in \Omega \text{ ja kaikilla } \zeta \in \mathbb{C}^n \tag{1.5}$$

Seuraavaa *reuna-arvo-ongelmaa* kutsutaan *Dirichlet'n ongelmaksi*:

$$\begin{cases} Lu = F, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

missä $F \in H^{-1}(\Omega)$ ja $f \in H^{1/2}\partial\Omega$.

Määritellään, mitä tarkoittaa, että jokin funktio $u \in H^1(\Omega)$ on ratkaisu Dirichlet'n ongelmalle. Tämä tehdään Sobolev-avaruuksien heikon teorian hengessä. Tätä määritelmää varten muistutetaan mitä tarkoitetaan kuvauksen sesquilineaarisuudella.

Määritelmä 1.12. Olkoot V, W ja Z vektoriavaruuksia. Kuvaus $S\colon V \times W \to Z$ on *sesquilineaarinen*, jos kuvaus $v \mapsto S(v, w_0)$ on lineaarinen kaikille $w_0 \in W$ ja kuvaus $w \mapsto S(v_0, w)$ on antilineaarinen kaikille $v_0 \in V$.

Määritelmä 1.13. Olkoon operaattori L kuten kohdissa (1.3), (1.4). Tällöin operaattorin L *sesquilineaarinen muoto* on

$$B[u,v] = \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}\partial_j u \overline{\partial_k v} + qu\overline{v} \right) dx, \quad u, v \in H^1(\Omega). \tag{1.6}$$

Olkoon $F \in H^{-1}(\Omega)$ ja $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Tällöin sanotaan, että funktio $u \in H^1(\Omega)$ on *heikko ratkaisu* Dirichlet'n ongelmalle

$$\begin{cases} Lu = F, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

jos

$$B[u,v] = F(\overline{v}) \text{ kaikille } v \in H_0^1(\Omega)$$

ja $Ru = f$, missä R on määritelmän 1.8 jälkioperaattori.

1.3. Ratkaisun olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä

Halutaan, että Dirichlet'n ongelmalla on olemassa ratkaisu ja lisäksi halutaan, että tämä ratkaisu on yksikäsitteinen. Molemmat näistä saadaan voimaan, mutta joitain oletuksia täytyy tehdä operaattorin L kertoimille.

Näytetään seuraavaksi, että yllä olevalla reuna-arvo-ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu, kun oletetaan kertoimen q ei-negatiivisuus.

Lause 1.14. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko, operaattori L kuten kohdissa (1.3) ja (1.4) sekä*

$$q(x) \geq 0 \quad \textit{melkein kaikilla } x \in \Omega.$$

Olkoon $F \in H^{-1}(\Omega)$ ja $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Tällöin on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in H^1(\Omega)$ Dirichlet'n ongelmalle

$$\begin{cases} Lu = F, & kun\ x \in \Omega \\ u = f, & kun\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Lisäksi löytyy vakio C, joka ei riipu funktioista F ja f, siten, että

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C\left(||F||_{H^{-1}(\Omega)} + ||f||_{H^{1/2}(\Omega)}\right). \tag{1.7}$$

Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys saadaan seuraavan tuloksen avulla. Tässä tutkielmassa esitettävä todistus on yksi klassisista tavoista todistaa yksikäsitteisyys; aluksi määritellään sisätulo, jonka avulla saadaan Hilbertin avaruus ja sen jälkeen käytetään Frechet'n ja Rieszin esityslausetta.

Lause 1.15. *Jos $s \in \mathbb{R}$ on vakio siten, että $(q+s)(x) \geq 0$ melkein kaikilla $x \in \Omega$, niin sesquilineaarinen muoto*

$$B_s[u,v] = B[u,v] + s(u,v)_{L^2(\Omega)}$$

on sisätulo avaruudessa $H_0^1(\Omega)$ ja lisäksi se virittää ekvivalentin normin:

$$\frac{1}{C}||u||^2_{H^1(\Omega)} \leq B_s[u,u] \leq C||u||^2_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Todistus. Kuvaus $(u,v) \mapsto B_s[u,v]$ on sesquilineaarinen integraalin lineaarisuuden ja konjugoinnin ominaisuuksien nojalla. Sisätulon toinen ehto $B_s[u,v] = \overline{B_s[v,u]}$ seuraa integraalin lineaarisuudesta, kertoimien a^{jk} symmetrisyydestä, kertoimien a^{jk}, q, s reaalisuudesta sekä siitä, että avaruuden $L^2(\Omega)$ sisätulolla on ominaisuus

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \overline{(v,u)}_{L^2(\Omega)}.$$

Elliptisyysehdosta (1.5) ja tiedosta $q + s \geq 0$ seuraa, että

$$\begin{aligned} B_s[u,u] &= \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk}\partial_j u\overline{\partial_k u} + qu\overline{u}\right) dx + s\int_\Omega |u|^2\,dx \\ &= \int_\Omega \underbrace{\left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk}\partial_j u\overline{\partial_k u}\right)}_{\geq c|\nabla u|^2} dx + \int_\Omega \underbrace{(q+s)|u|^2}_{\geq 0}\,dx \geq c\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \end{aligned}$$

Täten $B_s[u,u] \geq 0$, joten enää täytyy näyttää, että ehdosta $B_s[u,u] = 0$, $u \in H_0^1(\Omega)$, seuraa, että $u = 0$ melkein kaikkialla:

$$0 = B_s[u,u] \geq c\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \geq 0,$$

joten $\nabla u = 0$ m.k. Tällöin Poincarén epäyhtälön nojalla

$$0 = ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C}||u||_{L^2(\Omega)} \geq 0,$$

joten $u = 0$ melkein kaikkialla. Nyt ollaan saatu, että $B_s[\,\cdot\,,\cdot\,]$ on todella sisätulo avaruudessa $H_0^1(\Omega)$.

Näytetään, että sisätulo $B_s[\,\cdot\,,\cdot\,]$ antaa ekvivalentin normin. Poincarén epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
B_s[u,u] &\geq c\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = c||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}\\
&\geq c\left(\frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\geq c\left(\frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}C||u||^2_{L^2(\Omega)}\right) \geq C||u||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Lisäksi käyttämällä kolmioepäyhtälöä sekä tietoa kertoimien a^{jk}, q ja s rajoittuneisuudesta, saadaan

$$\begin{aligned}
B_s[u,u] &= \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk}\partial_j u\overline{\partial_k u} + qu\overline{u}\right)dx + s\int_\Omega |u|^2\,dx\\
&= \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk}\partial_j u\overline{\partial_k u} + (q+s)|u|^2\right)dx\\
&\leq C(a^{jk},s,q)\int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n |\partial_j u||\overline{\partial_k u}| + |u|^2\right)dx\\
&\leq C(a^{jk},s,q)\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)dx = C(a^{jk},s,q)||u||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Täten ollaan näytetty, että $B_s[\,\cdot\,,\cdot\,]$ indusoi ekvivalentin normin avaruuteen $H_0^1(\Omega)$. □

Lauseen 1.14 todistus. Käsitellään aluksi tilannetta, missä reuna-arvona on 0 eli

$$\begin{cases} Lu = F, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Koska $q \geq 0$, niin lauseen 1.15 oletukset täyttyvät. Nyt $B[\,\cdot\,,\cdot\,] = B_0[\,\cdot\,,\cdot\,]$ virittää ekvivalentin normin avaruuteen $H_0^1(\Omega)$. Tällöin sisätuloavaruus $(H_0^1(\Omega)), B_0[\,\cdot\,,\cdot\,])$ on myös Hilbertin avaruus, koska sillä on samat Cauchyn jonot kuin alkuperäisellä avaruudella $H_0^1(\Omega)$. Oletuksen nojalla, $F\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ on rajoitettu lineaarinen funktionaali, joten normien $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ ja $B_0[\,\cdot\,,\cdot\,]$ ekvivalenttisuuden nojalla jokaiselle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$|F(v)| \leq ||F||_{H^{-1}(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \leq C||F||_{H^{-1}(\Omega)}B[v,v]^{1/2}.$$

Nyt Fréchet'n ja Rieszin esityslauseesta saadaan, että on olemassa yksikäsitteinen $u \in H_0^1(\Omega)$ siten, että

$$B[u,v] = F(\overline{v}), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Lisäksi tämä funktio toteuttaa ehdon $Ru = 0$, joten se on yksikäsitteinen ratkaisu annetulle ongelmalle. Fréchet'n ja Rieszin esityslauseesta saadaan myös, että löydetyllä ratkaisulla u on sama normi kuin funktionaalilla F. Täten

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C||F||_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Saatiin siis osoitettua, että annettu ongelma ratkeaa, kun reuna-arvoina on nolla. Tutkitaan seuraavaksi tapausta

$$\begin{cases} Lu = F, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Määritelmän 1.13 mukaan halutaan löytää funktio $u \in H^1(\Omega)$ siten, että

$$B[u,v] = F(\overline{v}) \text{ kaikille } v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{ja} \quad Ru = f.$$

Lauseen 1.10 nojalla voidaan valita $e_f \in H^1(\Omega)$, jolle

$$Re_f = f \quad \text{ja} \quad ||e_f||_{H^1(\Omega)} \le C||f||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \;\; C \ge 0.$$

Kirjoittamalla $u = e_f + \hat{u}$, ongelma yksinkertaistuu reuna-arvoilla nolla olevaan tapaukseen, mutta operaattori L muuttuu hieman. Koska $B[\,\cdot\,,\cdot\,]$ on sesquilineaarinen, niin

$$B[u,v] = B[e_f,v] + B[\hat{u},v] = F(\overline{v}).$$

Tulee siis löytää $\hat{u}$ siten, että

$$B[\hat{u},v] = F(\overline{v}) - B[e_f,v], \;\; v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{ja} \quad R\hat{u} = 0.$$

Näytetään kuvauksen $\hat{F}\colon w \mapsto F(\overline{w}) - B[e_f,w]$ rajoittuneisuus. Koska $F \in H^{-1}(\Omega)$, niin F on rajoitettu ja lisäksi

$$\begin{aligned}
|B[e_f,w]| &\le \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n |a^{jk}\partial_j e_f \overline{\partial_k w}| + |qe_f\overline{w}| \right) dx \\
&\le C(a^{jk},q) \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n |\partial_j e_f||\partial_k w| + |e_f||\overline{w}| \right) dx \\
&\le C(a^{jk},q) \int_\Omega \left(|\nabla e_f||\nabla w| + |e_f||w| \right) dx \\
&\le C(a^{jk},q) \left(||\nabla e_f||_{L^2(\Omega)}||\nabla w||_{L^2(\Omega)} + ||e_f||_{L^2(\Omega)}||w||_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\le 2C(a^{jk},q)||e_f||_{H^1(\Omega)}||w||_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Tällöin kuvaus $\hat{F}$ on rajoitettu lineaarinen funktionaali avaruudessa $H_0^1(\Omega)$ ja pätee

$$||\hat{F}||_{H^{-1}(\Omega)} \le C\left(||F||_{H^{-1}(\Omega)} + ||f||_{H^{1/2}(\Omega)} \right).$$

Nyt voidaan käyttää edellä todistettua reuna-arvoille 0 olevaa päättelyä ja todeta, olemassaolo funktiolle $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ siten, että

$$||\hat{u}||_{H^1(\Omega)} \le ||\hat{F}||_{H^{-1}(\Omega)} \le C\left(||F||_{H^{-1}(\Omega)} + ||f||_{H^{1/2}(\Omega)} \right).$$

Halutulle ongelmalle löydettiin siis yksikäsitteinen ratkaisu ja lisäksi

$$||u||_{H^1(\Omega)} \le ||e_f||_{H^1(\Omega)} + ||\hat{u}||_{H^1(\Omega)} \le C\left(||F||_{H^{-1}(\Omega)} + ||f||_{H^{1/2}(\Omega)} \right).$$

□

Seuraava esimerkki näyttää, että lauseessa 1.14 oleva oletus $q(x) \ge 0$ melkein kaikilla $x \in \Omega$ on tarpeellinen, jos halutaan yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle.

Esimerkki 1.16. Tässä tutkielmassa tullaan tarkastelemaan Schrödingerin operaattoria $-\Delta + q$, missä $q \in L^\infty(\Omega)$. Erityisesti, Schrödingerin yhtälössä $(-\Delta + q)u = 0$ voi käydä niin, että yksikäsitteistä ratkaisua ei ole.

Tarkastellaan tällaista esimerkkiä. Olkoon $\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R}$ ja $q = c$, missä $c < 0$ on vakio. Tutkitaan reuna-arvo-ongelmaa

$$\begin{cases} -u''(x) + cu(x) = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Tämän tavallisen toisen asteen differentiaaliyhtälön karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 - c = 0.$$

Tämän ratkaisut ovat $\lambda = \pm i\sqrt{|c|}$, joten yleinen ratkaisu saa muodon

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 e^{0x} \cos\left(\sqrt{|c|}x\right) + C_2 e^{0x} \sin\left(\sqrt{|c|}x\right) \\ &= C_1 \cos\left(\sqrt{|c|}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{|c|}x\right). \end{aligned}$$

Haetaan ei-triviaaleja ratkaisuja, eli joko $C_1 \neq 0$ tai $C_2 \neq 0$. Koska $\cos(0) = 1$, täytyy olla $C_1 = 0$. Tällöin $C_2 \neq 0$, joten

$$\sin\left(\sqrt{|c|}\pi\right) = 0 \iff \sqrt{|c|}\pi = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}_+ \iff |c| = k^2, \;\; k \in \mathbb{Z}_+.$$

Yksikäsitteistä ratkaisua ei siis ole, kun $c = -k^2$.

Ilman ei-negatiivisuusoletusta kertoimelle q saadaan myös yksikäsitteisyys voimaan, mutta se on voimassa operaattorin L ominaisarvojen ulkopuolella. Osoittautuu, että näitä ominaisarvoja on korkeintaan numeroituva määrä.

Lause 1.17. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu joukko ja operaattori L toteuttaa ehdot* (1.3), (1.4)*. Tällöin* *(i) On olemassa luvut* $\lambda_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}, \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty$,

$$\operatorname{spec}(L) = \{\lambda_j : j \in \mathbb{N}_0\}$$

siten, että kun $\lambda \notin \operatorname{spec}(L)$, *niin ongelmalla*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + F, & \textit{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \textit{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

missä $F \in H^{-1}(\Omega)$ *ja* $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, *on yksikäsitteinen ratkaisu* $u \in H^1(\Omega)$.

(ii) Jos $\lambda \notin \operatorname{spec}(L)$, *niin kuvaus*

$$H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \oplus H^{1/2}(\partial\Omega)$$

$$u \mapsto (Lu - \lambda u\,,\, Ru)$$

on isomorfismi. Lisäksi on olemassa vakio $C = C(\lambda) > 0$ *siten, että*

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C\left(||F||_{H^{-1}(\Omega)} + ||f||_{H^{1/2}(\Omega)}\right).$$

(iii) Jos $\lambda \in \operatorname{spec}(L)$, *niin on olemassa ei-triviaali ratkaisu* $u \in H_0^1(\Omega)$ *Dirichlet'n ongelmalle*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \textit{kun } x \in \Omega \\ u = 0, & \textit{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Lisäksi näiden ratkaisujen virittämä avaruus on äärellisulotteinen.

(iv) Jos on vakio $a \in \mathbb{R}$ *siten, että*

$$q(x) \geq a \ \textit{m.k.} \ x \in \Omega,$$

niin $\operatorname{spec}(L) \subset (a, \infty)$.

Määritelmä 1.18. Joukkoa $\operatorname{spec}(L)$ kutsutaan operaattorin L *spektriksi* Dirichlet'n reuna-arvoilla. Joukon $\operatorname{spec}(L)$ alkioita kutsutaan *Dirichlet'n ominaisarvoiksi.*

Todistus. (i) Käsitellään aluksi tilannetta, missä reuna-arvoina on 0, kuten lauseen 1.14 todistuksessa. Koska $q \in L^\infty(\Omega)$, niin on olemassa $s \in \mathbb{R}$ siten, että

$$q(x) + s \geq 0 \text{ m.k. } x \in \Omega.$$

Nyt voidaan käyttää lausetta 1.15 operaattorille L_s, joka saadaan, kun operaattorissa L korvataan q termillä $q + s$. Tällöin $B_s[\,\cdot\,,\cdot\,]$ antaa ekvivalentin normin avaruuteen $H_0^1(\Omega)$.

Lauseen 1.14 nojalla Dirichlet'n ongelmalla

$$\begin{cases} L_s u = F, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, joten kuvaus L_s on bijektiivinen. Kuvaus L_s on siten avoimen kuvauksen lauseen ([**9**, Lause 6.7.]) nojalla homeomorfismi. Tällöin operaattorilla $L_s \colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ on rajoitettu käänteiskuvaus. Olkoon tämä käänteiskuvaus

$$L_s^{-1} \colon H^{-1}(\Omega) \oplus H^{1/2}(\partial\Omega) \to H_0^1(\Omega).$$

Tämä kuvaus siis kuvaa funktion $F \in H^{-1}(\Omega)$ Dirichlet'n ongelman $Lu = F,\ x \in \Omega$, $Ru = 0$ ratkaisuksi $u \in H_0^1(\Omega)$. Olkoon $u \in H_0^1(\Omega)$ ja lisäksi olkoon $i\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ja $j\colon L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ inkluusiokuvauksia. Tällöin

$$\begin{aligned} & Lu = \lambda\left(j\left(i(u)\right)\right) + F \\ \iff\ & L_s u = (\lambda + s)\left(j\left(i(u)\right)\right) + F \\ \iff\ & u = (\lambda + s)L_s^{-1}\left(j\left(i(u)\right)\right) + L_s^{-1}F \\ \iff\ & u - (\lambda + s)L_s^{-1}\left(j\left(i(u)\right)\right) = L_s^{-1}F. \end{aligned}$$

Oletetaan, että $\lambda + s \neq 0$. Merkitään $\mu = \frac{1}{\lambda+s}$ ja jaetaan yhtälö termillä $\lambda + s$, jolloin se saa yhtäpitävän muodon

$$\begin{aligned} & \mu u - L_s^{-1}\left(j\left(i(u)\right)\right) = \mu L_s^{-1}F \\ \iff\ & \mu\, i(u) - i\left(L_s^{-1}\left(j\left(i(u)\right)\right)\right) = \mu\, i\left(L_s^{-1}F\right) \\ \iff\ & \mu\, i(u) - \left(i \circ L_s^{-1} \circ j\right)\left(i(u)\right) = \mu\, i\left(L_s^{-1}F\right) \\ \iff\ & (\mu I - K)\left(i(u)\right) = \hat{F}, \end{aligned}$$

missä operaattori $K\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),\ \ K = i \circ L_s^{-1} \circ j$ ja $\hat{F} = \mu\, i\left(L_s^{-1}F\right)$.

Tutkitaan operaattoria K tarkemmin. Jos on kahden operaattorin yhdistetty kuvaus ja toinen operaattoreista on kompakti, niin tällöin yhdistetty kuvaus on kompakti. Täten lauseen 1.6 nojalla K on kompakti operaattori.

Olkoon $F, G \in L^2(\Omega)$ ja merkitään $v = L_s^{-1}F$ ja $w = L_s^{-1}G$. Tällöin

$$v = L_s^{-1}F \quad \iff \quad L_s v = F,\ \ x \in \Omega,\ \ Rv = 0,$$

joka heikon ratkaisun määritelmän (määritelmä 1.13) mukaan tarkoittaa

$$B_s[v,u] = \int_\Omega F\overline{u} = (F,u)_{L^2(\Omega)} \quad \iff \quad \overline{B_s[v,u]} = \overline{(F,u)}_{L^2(\Omega)},$$

kaikilla $u \in H_0^1(\Omega)$. Erityisesti

$$\overline{B_s[v,w]} = \overline{(F,w)}_{L^2(\Omega)} = (w,F)_{L^2(\Omega)} = (L_s^{-1}G, F)_{L^2(\Omega)} = (KG,F)_{L^2(\Omega)}$$

ja vastaavasti saadaan

$$\overline{B_s[w,v]} = (KF,G)_{L^2(\Omega)}.$$

Koska $B_s[\,\cdot\,,\cdot\,]$ on sisätulo, niin

$$\overline{B_s[w,v]} = B_s[v,w] = (F,w)_{L^2(\Omega)} = (F, L_s^{-1}G)_{L^2(\Omega)} = (F,KG)_{L^2(\Omega)}.$$

Operaattori K on siis itseadjungoitu. Lisäksi, jos $v \not\equiv 0$, niin

$$0 < B_s[v,v] = (v,F)_{L^2(\Omega)} = (L_s^{-1}F,F)_{L^2(\Omega)} = (KF,F)_{L^2(\Omega)},$$

joten K on positiivisesti definiitti operaattori.

Kompaktien operaattorien spektraalilauseen ([**2**, Theorem 6, s. 727]) mukaan $0 \in \operatorname{spec}(K)$ ja $0 \neq \mu \in \operatorname{spec}(K)$ on ominaisarvo, jonka virittämä avaruus on äärellisulotteinen ([**9**, Seuraus 12.15.]). Lisäksi ominaisarvoja on enintään numeroituvasti ääretön määrä. Jos ominaisarvoja olisi äärellinen määrä, niin kaikkien ominaisavaruuksien summa olisi äärellisulotteinen. Tällöin tämän summan ortogonaalikomplementti U olisi ei-triviaali. Operaattorin K rajoittuma avaruuteen U on edelleen kompakti, itseadjungoitu ja positiivisesti definiitti, koska U on suljettu. Tällöin operaattorilla $K|_U$ ei olisi ominaisarvoja. Tämä on ristiriita, koska $K|_U \neq 0$, niin $\operatorname{spec}(K|_U)$ sisältää muutakin kuin alkion 0. Ominaisarvoja on siis ääretön määrä ja spektraalilauseen nojalla

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots > 0 \text{ sekä } \mu_j \to 0, \text{ kun } j \to \infty.$$

Määritellään jokaiselle $j \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda_j = \frac{1}{\mu_j} - s,$$

missä $\mu_j \in \operatorname{spec}(K)$.

Operaattori $\mu I - K$ on siis kääntyvä kaikilla $\mu \notin \operatorname{spec}(K)$ määritelmän mukaan. Jos $F \in H^{-1}(\Omega)$ ja $\lambda + s \neq 0$, niin yhtälölle $Lu = \lambda u + F$ saatiin yhtäpitävä muoto

$$(\mu I - K)\,(i(u)) = \mu\, i\left(L_s^{-1}F\right),$$

missä $u \in H_0^1(\Omega)$ ja $\mu \notin \operatorname{spec}(K)$. Jos siis oletetaan, että $\lambda \neq \lambda_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, niin $\mu \notin \operatorname{spec}(K)$. Tällöin jokaisella $F \in H^{-1}(\Omega)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\hat{u} \in L^2(\Omega)$ siten, että

$$(\mu I - K)\,(\hat{u}) = \mu\, i\left(L_s^{-1}F\right).$$

Koska $\mu I - K$ ja L_s^{-1} ovat kääntyviä, niin funktiolle

$$\hat{u} = \frac{1}{\mu}K\hat{u} + i\left(L_s^{-1}F\right),$$

joten $\hat{u} = i(u)$ jollekin $u \in H_0^1(\Omega)$. Tarkemmin

$$\begin{aligned}\hat{u} =& i\left(\frac{1}{\mu}L_s^{-1}\left(j\left(\hat{u}\right)\right)\right) + i\left(L_s^{-1}F\right)\\ =& i\left(\frac{1}{\mu}L_s^{-1}\left(j\left(\hat{u}\right)\right) + L_s^{-1}F\right)\\ =& i\left(L_s^{-1}\left(\frac{1}{\mu}j\left(\hat{u}\right) + F\right)\right),\end{aligned}$$

missä $u := L_s^{-1}\left(\frac{1}{\mu}j\left(\hat{u}\right) + F\right) \in H_0^1(\Omega)$. Täten saadaan

$$\begin{aligned}||u||_{H^1(\Omega)} =& ||L_s^{-1}\left(\frac{1}{\mu}j\left(\hat{u}\right) + F\right)||_{H^1(\Omega)}\\ \leq& ||L_s^{-1}||\,||\frac{1}{\mu}j\left(\hat{u}\right) + F||_{H^{-1}(\Omega)}\\ \leq& C\left(||\frac{1}{\mu}j\left(\hat{u}\right)||_{H^{-1}(\Omega)} + ||F||_{H^{-1}(\Omega)}\right)\\ \leq& C\left(||\hat{u}||_{L^2(\Omega)} + ||F||_{H^{-1}(\Omega)}\right) \leq C||F||_{H^{-1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Löydettiin siis yksikäsitteinen ratkaisu kun $\lambda + s \neq 0$. Jäljelle jäävä tapaus $\lambda + s = 0$ on sama kuin lauseessa 1.14, joten yksikäsitteisyys saadaan siitä.

Vielä tulee käsitellä tapaus reuna-arvoilla $u = f$, missä $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Vastaavalla tavalla kuin lauseen 1.14 todistuksessa, voidaan kirjoittaa $u = e_f + \hat{u}$, missä $e_f \in H^1(\Omega)$ on valittu lauseen 1.10 nojalla siten, että

$$Re_f = f \quad \text{ja} \quad ||e_f||_{H^1(\Omega)} \leq C||f||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \;\; C \geq 0.$$

Tällöin tulee enää löytää $\hat{u}$, joka ratkaisee yhtälön nollareuna-arvoilla ja yllä olevan mukaan tällainen funktio on olemassa. Vastaavalla tavalla, kuin lauseen 1.14 todistuksessa, nähdään, että muuttuneessa tilanteessa kuvaus $\hat{F}\colon w \mapsto \lambda u + F(\overline{w}) - B_s[e_f, w]$ on myös rajoitettu ja siten voidaan päätellä vastaavasti, että yksikäsitteinen ratkaisu löytyy.

(ii) Kuvaus

$$u \mapsto (Lu - \lambda u\,,\, Ru)$$

näytettiin yllä jo kääntyväksi, bijektioksi ja lisäksi sillä on rajoitettu käänteiskuvaus. Tulee enää näyttää kuvauksen rajoittuneisuus.

$$\begin{aligned}
&||Lu + \lambda j\,(i(u))\,||_{H^{-1}(\Omega)} + ||Ru||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\
\leq &||u||_{H^1(\Omega)} \left(||L||_{H^{-1}(\Omega)} + \lambda||j \circ i||_{H^{-1}(\Omega)} + ||R||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right) \\
\leq &C||u||_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

missä $C \geq 0$. Kuvaus on siten rajoitettu.

(iii) Kohdan (i) todistuksen nojalla yhtälön $Lu = \lambda u, \;\; Ru = 0$, ratkaiseminen on yhtäpitävää yhtälön

$$(\mu I - K)\,(i(u)) = 0$$

ratkaisemiselle reuna-arvoilla 0. Jos $\lambda = \lambda_j \in \operatorname{spec}(L)$, niin $\mu = \mu_j = \frac{1}{\lambda_j + s} \in \operatorname{spec}(K)$. Koska K on kompakti, niin on olemassa ei-triviaali äärellisulotteinen avaruus ([**9**, Seuraus 12.15.]), jonka alkioille $\hat{u}$ pätee, että

$$\hat{u} \in L^2(\Omega) \;\text{ ja }\; (\mu I - K)\,(\hat{u}) = 0.$$

Lisäksi jokaiselle $\hat{u} = \frac{1}{\mu} L_s^{-1}\hat{u}$, joten $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$. Täten näiden reuna-arvo-ongelmalle $Lu = \lambda u, \;\; Ru = 0$, olevien ratkaisujen virittämä avaruus on äärellisulotteinen.

(iv) Jos $q(x) \geq a$ m.k. $x \in \Omega$, niin valitaan kohdan (i) todistuksessa $s = -a$. Tällöin jokaiselle $\lambda_j \in \operatorname{spec}(L)$ pätee

$$\lambda_j = \frac{1}{\mu_j} + a \in (a, \infty),$$

koska $\mu_j > 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots > 0$. $\square$

1.4. Joukon reunasta

Tutkielman päätulosta varten selitetään hieman mitä tarkoitetaan joukon reunan sileydellä.

Määritelmä 1.19. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko ja $k \in \mathbb{N}_0$. Tällöin merkitään $\partial\Omega \in C^k$, jos jokaiselle $p \in \partial\Omega$ on olemassa avoin $U_p \ni p$ ja k kertaa jatkuvasti differentioituva diffeomorfismi $\Phi_p \colon U_p \to \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $\Phi_p(p) = 0$ ja

$$\Phi_p(U_p \cap \Omega) = \left\{x \in \hat{U} : x_n > 0\right\}$$
$$\Phi_p(U_p \cap \partial\Omega) = \left\{x \in \hat{U} : x_n = 0\right\}$$

Lisäksi järjestelmää $(U_p, \Phi_p)_{p \in \partial\Omega}$ sanotaan *koordinaattijärjestelmäksi* joukolle $\partial\Omega$.

Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on kuten yllä ja $\partial\Omega \in C^1$, niin pisteelle $p \in \partial\Omega$ on olemassa tangenttiavaruus $T_p(\partial\Omega)$ jokaiselle $p \in \partial\Omega$. Toisin sanoen, jos $(U_p, \Phi_p)_{p \in \partial\Omega}$ on koordinaattijärjestelmä, niin tangenttiavaruuden kanta on

$$\left\{\frac{d}{dt}\gamma_1(0), \dots, \frac{d}{dt}\gamma_{n-1}(0)\right\},$$

missä

$$\gamma_j \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial\Omega, \ \ \gamma_j(t) = \Phi_p^{-1}(te_j), \tag{1.8}$$

$\varepsilon > 0$, $\gamma_j \in C^1$ kaikilla $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ja e_j on j:s koordinaattivektori.

Määritelmälle 1.19 esitellään nyt kaksi yhtäpitävää määritelmää, joita tullaan tarvitsemaan tutkielman päätuloksen todistamisessa.

Lause 1.20. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko. Tällöin $\partial\Omega \in C^k$, jos ja vain jos jokaiselle $p \in \partial\Omega$ on olemassa $r > 0$, ortonormaali koordinaattijärjestelmä $x = (x', x_n)$, jonka origo on pisteessä p sekä $h \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $h \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$, siten, että*

$$\Omega \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) : x_n > h(x')\}$$
$$\partial\Omega \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) : x_n = h(x')\}.$$

Todistus. Oletetaan aluksi, että on olemassa koordinaattijärjestelmä $(U_p, \Phi_p)_{p \in \partial\Omega}$ ja kiinnitetään piste $p \in \partial\Omega$ ja olkoon tälle pisteelle vastaava diffeomorfismi Φ_p. Sopivalla koordinaattijärjestelmän siirrolla ja kierrolla voidaan olettaa, että $\Phi_p(0) = 0$ ja että tangenttiavaruuden $T_p(\partial\Omega)$ kantana ovat normaalit koordinaattivektorit eli $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Kuvauksen Φ_p määritelmän nojalla, jos $q \in \partial\Omega \cap U_p$, niin $\Phi_p^n(q) = 0$. Toisin sanoen funktion Φ_p n:s komponentti on nolla joukossa $\partial\Omega \cap U_p$. Tällöin myös kohdassa (1.8) määritellyille funktioille pätee

$$\Phi_p^n(\gamma_j(t)) = 0 \ \text{ kaikilla } \ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \ \text{ ja kaikilla } \ j = 1, \dots, n-1.$$

Derivoidaan komponenttia $\Phi_p^n(\gamma_j(t))$: Koska $\Phi_p^n(\gamma_j(t)) \equiv 0$, niin

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\Phi_p^n(\gamma_j(t))\Big|_{t=0} &= \left(D\Phi_p^n\right)(\gamma_j(0))\,\frac{d}{dt}\gamma_j(t)\Big|_{t=0} \\ &= \left(D\Phi_p^n\right)(0) \cdot e_j. \end{aligned}$$

Siten

$$\partial_j \Phi_p^n(0) = 0 \text{ kaikilla } j = 1, \dots, n-1.$$

Saatiin siis, että funktion Φ_p Jacobin matriisin $D\Phi_p(0)$ n:nen rivin $n-1$ ensimmäistä alkiota ovat nollia. Funktio Φ_p on kuitenkin k kertaa differentioituva diffeomorfismi, joten sen Jacobin matriisi $D\Phi_p(0)$ on kääntyvä. Täten täytyy olla $\partial_n \Phi_p^n(0) \neq 0$, muuten matriisi $D\Phi_p(0)$ ei olisi kääntyvä. Voidaan lisäksi olettaa, että $\partial_n \Phi_p^n(0) > 0$ vaihtamalla tarvittaessa x_n vastakkaismerkkiseksi.

Nyt implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa origon avoin ympäristö $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ja k kertaa jatkuvasti differentioituva funktio $h \colon V \to \mathbb{R}$ siten, että origon lähellä

$$\Phi_p^n(x', x_n) = 0 \iff h(x') = x_n.$$

Muodostetaan Taylorin kehitelmä funktiolle $\Phi_p^n(x', \cdot)$ pisteessä $x_n = h(x')$:

$$\Phi_p^n(x', x_n) = \underbrace{\Phi_p^n(x', h(x'))}_{=0} + \underbrace{\partial_n \Phi_p^n(x', h(x'))}_{>0}(x_n - h(x')) + o(x_n - h(x')),$$

kun $x_n \to h(x')$. Jos x' on tarpeeksi lähellä nollaa, niin jatkuvuuden perusteella $\Phi_p^n(x', h(x')) = 0$ ja $\partial_n \Phi_p^n(x', h(x')) > 0$. Lisäksi $x \in U_p \cap \Omega \iff \Phi_p^n(x) > 0$. Tällöin Taylorin kehitelmästä saadaan, että

$$\Phi_p^n(x', x_n) \iff x_n > h(x').$$

Saatiin siis $\Omega \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) : x_n > h(x')\}$.

Käänteisen suunnan todistamiseksi olkoon $p \in \partial\Omega$. Kierretään pistettä p vastaavaa koordinaattijärjestelmää (x', x_n) siten, että se vastaa normaalia koordinaatistoa $(x_1, \dots, x_n)$ ja valitaan

$$\Phi(x', x_n) = (x', x_n - h(x')) .$$

Kuvaus Φ on k kertaa jatkuvasti differentioituva. Funktion Φ Jacobin matriisi on

$$(D\Phi)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\partial_1 h(x') & -\partial_2 h(x') & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ja $\det((D\Phi)(x)) \neq 0$. Jacobin matriisi on siis kääntyvä pisteessä x. Erityisesti se on kääntyvä kaikilla $q \in \partial\Omega \cap B(p, r)$. Tällöin käänteiskuvauslauseen nojalla on avoimet joukot $U_p, V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $p \in U_p$, $\Phi(p) \in V$, $\Phi(U_p) = V$ ja $\Phi|_{U_p}$ on bijektio joukossa V. Lisäksi samasta lauseesta seuraa, että funktion Φ käänteiskuvaus on k kertaa jatkuvasti differentioituva joukossa V. Funktio Φ on siten diffeomorfismi. Nyt jos $x \in U_p \cap \partial\Omega$, niin

$$\Phi(x) = (x', x_n - x_n) = (x', 0)$$

ja jos $x \in U_p \cap \Omega$, niin

$$\Phi(x) = (x', \underbrace{x_n - h(x')}_{>0}).$$

Tällöin määritelmän 1.19 ehdot täyttyvät ja saadaan, että $\partial\Omega \in C^k$. $\square$

Edellinen tulos siis sanoo, että jos joukon reuna on C^k, niin se voidaan lokaalisti esittää k kertaa jatkuvasti differentioituvan funktion graafina. Tämän tuloksen avulla saadaan myös globaali esitys joukon reunalle.

Lause 1.21. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko. Tällöin $\partial\Omega \in C^k$, jos ja vain jos on olemassa $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho \in C^k$ siten, että*

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > 0\}, \\ \partial\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}, \\ \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\} \end{aligned}$$

ja $\nabla\rho(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \partial\Omega$.

Todistus. Oletetaan, että $\partial\Omega \in C^k$. Lauseen 1.20 nojalla jokaiselle pisteelle $p \in \partial\Omega$ on olemassa $r > 0$ ja funktio $h_p\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $h_p \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$, siten, että

$$\begin{aligned} \Omega \cap B(p,r) &= \{x \in B(p,r) : x_n > h_p(x')\} \\ \partial\Omega \cap B(p,r) &= \{x \in B(p,r) : x_n = h_p(x')\}. \end{aligned}$$

Määritellään $\rho_p(x', x_n) = x_n - h_p(x')$ ja tällöin funktio ρ_p on myös k kertaa differentioituva.

Nyt $\partial\Omega \subset \bigcup_{p\in\partial\Omega} B(p,r)$ ja koska $\partial\Omega$ on kompakti, niin on olemassa $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ siten, että

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} B(p_j, r) = \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j.$$

Lisäksi merkitään $B_k = \Omega \setminus \partial\Omega$. Peitteelle $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ on olemassa ykkösen ositus eli on olemassa funktiot $f_j \in C_0^\infty(B_j)$, joille pätee

$$0 \leq f_j \leq 1 \text{ sekä } \sum_{j=1}^{k} f_j(x) = 1 \text{ kaikilla } x \in \overline{\Omega}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} (f_j \rho_{p_j})(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathcal{B} \cap \Omega, \\ &\sum_{j=1}^{k} (f_j \rho_{p_j})(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in \partial\Omega \text{ ja} \\ &\sum_{j=1}^{k} (f_j \rho_{p_j})(x) < 0 \text{ kaikilla } x \in \mathcal{B} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Olkoon $U \supset \overline{\Omega}$ avoin joukko ja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ siten, että $0 \leq \eta \leq 1$ joukossa U ja $\eta(x) = 1$ joukossa $\overline{\Omega}$ ([**7**, Lemma 2.15.]). Määritellään funktio $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\rho(x) = \eta(x) \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \rho_{p_j}(x) - 1 + \eta(x),$$

jolloin $\rho(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathcal{B}$, $\rho(x) = 0$ kaikilla $x \in \partial\Omega$ ja $\rho(x) < 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Olkoon $x \in \partial\Omega$. Tällöin

$$\begin{aligned}\nabla\rho(x) &= \nabla\eta(x)\sum_{j=1}^{k} f_j(x)\rho_{p_j}(x) + \eta(x)\sum_{j=1}^{k}\big(\nabla f_j(x)\rho_{p_j}(x) + f_j(x)\nabla\rho_{p_j}(x)\big) + \nabla\eta(x)\\ &= \eta(x)\sum_{j=1}^{k} f_j(x)\nabla\rho_{p_j}(x) + \nabla\eta(x) \neq 0,\end{aligned}$$

joten $\nabla\rho(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \partial\Omega$.

Käänteisen suunnan todistamiseen käytetään käänteiskuvauslausetta. Olkoon $p \in \partial\Omega$. Koska $\nabla\rho(p) \neq 0$, niin voidaan olettaa, että $\partial_n\rho(p) \neq 0$. Määritellään $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(x', x_n) = (x', \rho(x', x_n)),$$

jolloin Φ on k kertaa jatkuvasti differentioituva. Lisäksi

$$(D\Phi)(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1\rho(p) & \partial_2\rho(p) & \dots & \partial_n\rho(p)\end{pmatrix}$$

on kääntyvä. Tällöin käänteiskuvauslauseen nojalla on avoimet joukot $U_p, V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $p \in U_p, \Phi(p) \in V, \Phi(U_p) = V$ ja $\Phi|_{U_p}$ on bijektio sekä sen käänteiskuvaus on k kertaa jatkuvasti differentioituva. Siis funktio Φ on diffeomorfismi. Lisäksi, jos $x \in U_p \cap \partial\Omega$, niin

$$\Phi(x) = (x', \rho(x', x_n)) = (x', 0)$$

ja jos $x \in U_p \cap \Omega$, niin

$$\Phi(x) = (x', \underbrace{\rho(x', x_n)}_{>0}).$$

Täten määritelmän 1.19 nojalla $\partial\Omega \in C^k$. $\square$

LUKU 2

Sähköisen impedanssitomografian inversio-ongelma

Tässä luvussa johdetaan johtavuusyhtälö tapauksessa $n \geq 2$ ja mietitään, miksi ei ole järkevää käsitellä yksiulotteista tilannetta. Tämän lisäksi muotoillaan sähköisen impedanssitomografian inversio-ongelma ja annetaan matemaattinen määritelmä tälle ongelmalle.

2.1. Johtavuusyhtälön johtaminen

Muotoillaan sähköiseen impedanssitomografiaan liittyvä inversio-ongelma, jota kutsutaan yleisesti Calderónin ongelmaksi. Tätä varten on syytä tarkastella ulottuvuuksia, missä on yleensäkään järkevää muotoilla kyseinen ongelma.

Tutkitaan yksiulotteista tilannetta. Kuvitellaan, että on suora johdin, jonka päihin on kytketty jännite. Voidaan ajatella, että johdin on reaaliakselin suljettu väli $[0, a]$, $a > 0$. Lisäksi $u(x)$ on jännite pisteessä $x \in [0, a]$. Olkoon johtimessa kulkeva virta $I(x)$ ja oletetaan, että johtimen resistiivisyys $\sigma(x)$ pisteessä $x \in [0, a]$ on jatkuva. Lisäksi johtimeen ei tule virtaa mistään ulkopuolelta, eikä sitä katoa mihinkään, joten virta on vakio. Tällöin Ohmin laista ja väliarvolauseesta saadaan

$$u(x) - u(x+h) = I\sigma(x) - I\sigma(x+h) = I\sigma(x')(x - x - h) = -hI\sigma(x'),$$

jollekin $x' \in [x, x+h]$. Jakamalla luvulla h ja ottamalla raja-arvo kun $h \to 0$, saadaan

$$u'(x) = -I\sigma(x).$$

Koska johtavuus γ on resistiivisyyden käänteisluku, niin

$$I = -\gamma(x)u'(x).$$

Derivoimalla edellistä lauseketta saadaan johtavuusyhtälö

$$(\gamma(x)u'(x))' = 0.$$

Sähköisessä impedanssitomografiassa on tarkoituksena määrittää kappaleen johtavuus tekemällä mittauksia kappaleen pinnalla. Oletetaan siis, että johtavuus γ on tuntematon ja että voidaan mitata virta ja jännite johtimen päistä. Tiedetään siis arvot $-I(0) = \gamma(0)u'(0)$, $I(a) = \gamma(a)u'(a)$. Lisäksi koska I on vakio, niin

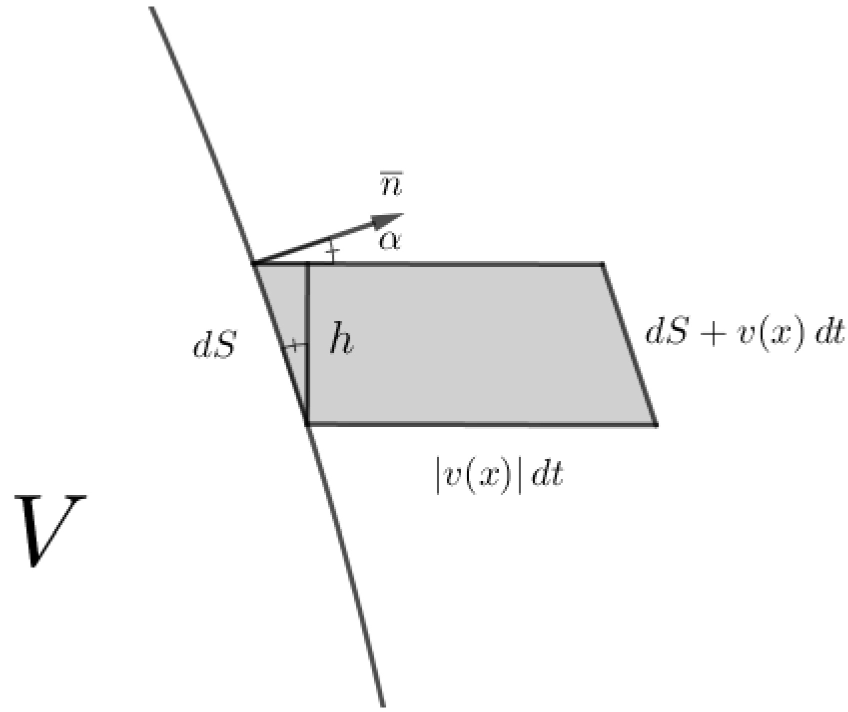
$$-I(x) = \gamma(x)u'(x) = \gamma(0)u'(0), \text{ kaikilla } x \in [0, a].$$

Tästä seuraa, että

$$u'(x) = \gamma(0)u'(0)\frac{1}{\gamma(x)}.$$

Integroidaan tämä puolittain yli välin $[0, a]$, jolloin

$$\int_0^a u'(x)\,dx = u(a) - u(0) = \gamma(0)u'(0)\int_0^a \frac{1}{\gamma(x)}\,dx.$$



Kuva 1. Kaksiulotteinen kuva johtavuusyhtälön johtamisesta.

Saadaan siis reunamittauksien avulla tietää vain johtimen kokonaisresistanssi.

Jos oletetaan, että ulottuvuus $n \geq 2$, niin tilanne on erilainen. Nyt virta $I(x)$ on vektori ja jännitettä Ohmin laissa vastaa sen negatiivinen gradientti, jolloin

$$I(x) = -\gamma(x)\nabla u(x).$$

Oletetaan jälleen, että kappaleen sisälle ei voi tulla varausta, eikä sitä katoa kappaleen sisältä. Olkoon $V \subset \Omega$. Tarkastellaan alueen V pinnalla olevaa varausta, joka ajanhetkellä t on infinitesimaalisessa palassa pintaa $dS \subset \partial V$. Oletetaan, että tällä varauksella on jokin nopeus v, jolla se on poistumassa kappaleesta. Tällöin infinitesimaalisen ajanhetken dt jälkeen varaus on liikkunut matkan

$$v(x)\,dt$$

ulos kappaleesta. Nyt varaus täyttää alueen, jonka "sivut"ovat dS ja $|v(x)|\,dt$. Lisäksi alueen korkeus on (ks. Kuva 1)

$$h = dS\cos\alpha,$$

joten alueen tilavuudeksi saadaan

$$dS\cos\alpha\,|v(x)|\,dt = v(x)\cdot\nu(x)dS\,dt,$$

missä $\nu(x)$ on pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori pisteessä $x \in \partial V$. Olkoon $\kappa(x)$ varaustiheys pisteessä x. Tällöin tämän alueen sisältämä varaus on

$$\kappa(x)v(x)\cdot\nu(x)dS\,dt = I(x)\cdot\nu(x)dS\,dt.$$

Ajassa dt alueesta poistuva varaus on siis

$$dt\int_{\partial V} I(x)\cdot\nu(x)\,dS.$$

Tämän täytyy olla nolla, koska varausta ei synny minnekään kappaleessa. Joten divergenssilauseen nojalla

$$0 = \int_{\partial V} I(x) \cdot \nu(x)\, dS = \int_V \operatorname{div}(I(x))\, dx \text{ kaikille } V \subset \Omega.$$

Jos oletetaan, että I on jatkuva, niin saadaan

$$\operatorname{div}(I(x)) = 0 \text{ eli } \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0,$$

jota kutsutaan johtavuusyhtälöksi.

2.2. Inversio-ongelma johtavuusyhtälölle

Olkoon Ω kappale, jonka johtavuus on γ. Asetetaan kappaleen Ω pinnalle $\partial\Omega$ jännite f. Halutaan mitata tästä jännitteestä aiheutuva virta reunalla. Mitataan siis suuretta

$$-I(x) \cdot \nu(x) = \gamma(x)\nabla u(x) \cdot \nu(x) = \gamma(x)\partial_\nu u(x),$$

missä $\partial_\nu u(x)$ on funktion u pinnan normaalin suuntainen derivaatta pisteessä $x \in \partial\Omega$. Lauseen 1.14 nojalla reuna-arvo-ongelmalla

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma\nabla u) = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, koska oletetaan, että $\gamma(x) \geq c > 0$ melkein kaikilla $x \in \overline{\Omega}$. Voidaan siis määrittää jokaiselle annetulle f ja γ funktio $\gamma\partial_\nu u$. Merkitään tätä

$$\Lambda_\gamma(f) = \gamma\partial_\nu u.$$

Kuvausta

$$f \mapsto \Lambda_\gamma(f)$$

kutsutaan Dirichlet-to-Neumann -kuvaukseksi (DN), eli se kuvaa Dirichlet'n reuna-arvot Neumannin reuna-arvoiksi. Sähköisen impedanssitomografian inversio-ongelma on, että voidaanko johtavuus γ määrittää, jos tunnetaan kuvaukset $\Lambda_\gamma(f)$ kaikilla f.

Inversio-ongelman tarkka muotoilu vaatii vielä muutaman tuloksen. Määritellään Dirichlet-to-Neumann -kuvaus yleisemmälle operaattorille kuin pelkästään johtavuusyhtälölle, koska määritelmää tarvitaan myöhemmin myös Schrödingerin yhtälön tapauksessa. Sitä varten sovitaan merkinnöistä. Avaruus $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ on avaruuden $H^{1/2}(\partial\Omega)$ duaali ja kun $f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, niin merkitään duaalisuutta

$$\langle f, g \rangle = f(g),$$

missä $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Jos $\partial\Omega \in C^1$ (katso määritelmä 1.19) ja $f \in L^2(\partial\Omega)$, niin saadaan integraali

$$\langle f, g \rangle = \int_{\partial\Omega} fg\, dS.$$

Olkoon nyt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko ja operaattori L kuten kohdissa (1.3) ja (1.4) ja lisäksi oletetaan, että $\partial\Omega \in C^\infty$, $a^{jk}, q \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Tätä tilannetta vastaava DN-kuvaus olisi

$$\Lambda_L \colon f \mapsto \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(\partial_j u)\nu_k|_{\partial\Omega}.$$

Olkoon $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ ja u_f ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

jolloin myös $u_f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ([**2**, Theorem 6, s. 343]). Olkoon $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ ja $e_g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ siten, että $e_g|_{\partial\Omega} = g$. Tällöin käyttämällä Gaussin-Greenin-kaavaa, saadaan

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_L(f), g\rangle &= \int_{\partial\Omega} (\Lambda_L(f))\, g\, dS = \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k=1}^n a^{jk}(\partial_j u_f)\nu_k e_g\, dS \\
&= \int_\Omega \sum_{j,k=1}^n \partial_k \left(a^{jk}(\partial_j u_f) e_g\right) dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j,k=1}^n \left(\partial_k \left(a^{jk}\partial_j u_f\right) e_g + a^{jk}\partial_j u_f \partial_k e_g\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\underbrace{\sum_{j,k=1}^n \partial_k \left(a^{jk}\partial_j u_f\right) e_g - q u_f e_g}_{=-e_g L u_f = 0} + \sum_{j,k=1}^n a^{jk}\partial_j u_f \partial_k e_g + q u_f e_g \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk}\partial_j u_f \partial_k e_g + q u_f e_g \right) dx = B[u_f, \overline{e}_g].
\end{aligned}$$

Viimeinen rivi on hyvin määritelty vaikka oletetaan, että $a^{jk}, q \in L^\infty(\Omega)$ ja $u_f, e_g \in H^1(\Omega)$. Tämä johtaa DN-kuvauksen määrittelemiseen seuraavan tuloksen antamalla tavalla.

Lause 2.1. *(DN-kuvaus operaattorille L) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu joukko, L toteuttaa ehdot* (1.3), (1.4) *ja oletetaan että* $0 \notin \operatorname{spec}(L|_\Omega)$. *Tällöin on olemassa yksikäsitteinen rajoitettu lineaarinen kuvaus*

$$\Lambda_L \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

joka toteuttaa

$$\langle \Lambda_L f, g\rangle_{\partial\Omega} = B[u_f, \overline{e}_g] = \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk}\partial_j u_f \partial_k e_g + q u e_g \right) dx, \tag{2.1}$$

missä $u_f \in H^1(\Omega)$ on Dirichlet'n ongelman

$$\begin{cases} Lu = 0, & \textit{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \textit{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

yksikäsitteinen ratkaisu ja $e_g \in H^1(\Omega)$ siten, että $e_g|_{\partial\Omega} = g$.

Todistus. Näytetään aluksi, että kuvaus Λ_L on hyvin määritelty eli ei riipu funktion e_g valinnasta. Olkoon $e_g, \hat{e}_g \in H^1(\Omega)$ siten, että

$$e_g|_{\partial\Omega} = g = \hat{e}_g|_{\partial\Omega}.$$

Tällöin on olemassa funktio $\phi \in H_0^1(\Omega)$ siten, että $\hat{e}_g = e_g + \phi$. Nyt heikkojen ratkaisujen määritelmän avulla saadaan

$$B[u_f, \overline{\hat{e}_g}] = B[u_f, \overline{e}_g] + \underbrace{B[u_f, \overline{\phi}]}_{=0} = B[u_f, \overline{e}_g].$$

Kuvaus Λ_L on siten hyvin määritelty.

Näytetään, että on olemassa yksikäsitteinen rajoitettu lineaarinen funktionaali, joka toteuttaa ehdon (2.1). Kiinnitetään $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ja määritellään

$$T_f \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to \mathbb{C}, \ \ T_f(g) = B[u_f, \overline{e}_g],$$

missä $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ja $e_g \in H^1(\Omega)$ saadaan lauseesta 1.10. Tällöin T_f on lineaarinen funktionaali, joten tulee näyttää, että se on rajoitettu:

$$\begin{aligned}
|T_f(g)| &\leq \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n |a^{jk}||\partial_j u_f||\partial_k e_g| + |q||u_f||e_g| \right) dx \\
&\leq C \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n |\partial_j u_f||\partial_k e_g| + |u_f||e_g| \right) dx \\
&\leq C \int_\Omega \left(|\nabla u_f||\nabla e_g| + |u_f||e_g| \right) dx \\
&\leq C||u_f||_{H^1(\Omega)}||e_g||_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

missä käytettiin samaa päättelyä kuin lauseen 1.14 todistuksessa. Lisäksi lauseista 1.10 ja 1.17 saadaan

$$|T_f(g)| \leq C||u_f||_{H^1(\Omega)}||e_g||_{H^1(\Omega)} \leq C||f||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}||g||_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

joten T_f on rajoitettu ja sen operaattorinormille pätee

$$||T_f|| \leq C||f||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Määritellään

$$\Lambda_L \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega), \ \ f \mapsto T_f,$$

jolloin kuvaus Λ_L toteuttaa ehdon (2.1) ja se on yksikäsitteinen, koska u_f on yksikäsitteinen ratkaisu annetulle Dirichlet'n ongelmalle. □

Lauseen 2.1 erikoistapauksena saadaan DN kuvaus johtavuusyhtälölle.

Lause 2.2. *(DN-kuvaus johtavuusyhtälölle) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu joukko ja $c > 0$. Oletetaan lisäksi, että $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ ja $\gamma(x) \geq c$ m.k. $x \in \Omega$.*

Tällöin on olemassa rajoitettu lineaarinen kuvaus

$$\Lambda_\gamma \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

jolle kaikilla $f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ pätee

$$\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega \gamma \nabla u_f \cdot \nabla e_g \, dx,$$

missä $u_f \in H^1(\Omega)$ on yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ja $e_g \in H^1(\Omega)$*, jolle* $e_g|_{\partial\Omega} = g$*.*

Todistus. Johtavuusyhtälön operaattori $\operatorname{div}(\gamma\nabla\cdot)$ toteuttaa ehdot (1.3) ja (1.4). Lisäksi, koska tämä operaattori ei sisällä nollannen asteen termiä, lauseesta 1.17 saadaan, että 0 ei ole Dirichlet'n ominaisarvo. Lauseen 2.1 ehdot toteutuvat, joten tulos seuraa. □

Nyt voidaan matemaattisesti muotoilla tarkasti sähköisen impedanssitomografian inversio-ongelma. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu joukko, jonka sähkönjohtavuus saadaan funktiosta $\gamma \in L^\infty(\Omega)$. Lisäksi $\gamma(x) \geq c > 0$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin lauseen 2.2 mukaan on olemassa rajoitettu lineaarinen kuvaus

$$\Lambda_\gamma \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

joka muodollisesti kytkee reunalla olevan jännitteen mitattuun virtaan $\gamma\partial_\nu u$ reunalla. Voidaan siis ajatella, että jokaiselle reunalle laitettavalle jännitteelle $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ pystytään mittaamaan vastaava virta $\Lambda_\gamma(f) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Tällöin inversio-ongelma voidaan muotoilla seuraavaksi:

Inversio-ongelma. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko. Olkoon lisäksi $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, jolle pätee $\gamma(x) \geq c > 0$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Määritä Dirichlet-to-Neumann-kuvauksesta Λ_γ johtavuus γ joukossa Ω.

LUKU 3

Johtavuus reunamittausten avulla

Tässä luvussa muotoillaan ja todistetaan tutkielman päätulos, jonka mukaan voidaan joukon reunalla tehtävistä mittauksista määrittää tuntematon johtavuus reunalla.

3.1. Johtavuuden konstruointi reunamittauksien avulla

Tutkielman päätulos sanoo, että tuntematon johtavuus voidaan konstruoida joukon reunalla tehtävien mittauksien avulla, eli DN-kuvauksen avulla.

Lause 3.1. *Olkoon Ω avoin rajoitettu joukko, $\partial\Omega \in C^1$ ja olkoon $\gamma \in C^0(\overline{\Omega})$ positiivinen. Olkoon $x_0 \in \partial\Omega$. Tällöin on olemassa jono funktioita $(f_M) \subset C^1(\partial\Omega)$ siten, että*

$$\lim_{M\to\infty} \langle \Lambda_\gamma f_M, \bar{f}_M \rangle_{\partial\Omega} = \gamma(x_0).$$

Funktiot f_M eivät riipu funktiosta γ ja $\operatorname{spt}(f_M) \subset B(x_0, 1/M) \cap \partial\Omega$.

Tämä todistetaan lyhyesti seuraavan tuloksen avulla:

Lause 3.2. *Olkoon Ω avoin rajoitettu joukko, $\partial\Omega \in C^1$ ja olkoon $\gamma \in C^0(\overline{\Omega})$ positiivinen. Kun on annettuna piste $x_0 \in \partial\Omega$, niin on olemassa jono ratkaisuja $(u_M) \subset H^1(\Omega)$ johtavuusyhtälölle*

$$\operatorname{div}(\gamma\nabla u) = 0, \quad \text{kun } x \in \Omega,$$

siten, että

$$\lim_{M\to\infty} \int_\Omega \gamma|\nabla u_M|^2\, dx = \gamma(x_0).$$

Lisäksi funktiot $f_M = u_M|_{\partial\Omega} \in C^1(\partial\Omega)$, ne eivät riipu funktiosta γ ja $\operatorname{spt}(f_M) \subset B\,(x_0, 1/M) \cap \partial\Omega$, sekä

$$||f_M||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = O(1), \quad \text{kun } M \to \infty$$

tasaisesti yli $x_0 \in \Omega$.

Lauseen 3.2 todistusta varten valitaan koordinaatisto ja funktio $h\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $h \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ siten, että $x_0 = 0$ ja jollekin $r > 0$

$$\Omega \cap B(0,r) = \{x \in B(0,r) : x_n > h(x')\}$$
$$\partial\Omega \cap B(0,r) = \{x \in B(0,r) : x_n = h(x')\},$$

ja lisäksi $h(0) = 0$ ja $\nabla_{x'} h(0) = 0$. Tämä on mahdollista, koska koordinaatiston kierron jälkeen tangenttitaso $T_0(\partial\Omega) = \mathbb{R}^{n-1}$ ja $\nabla_{x'} h(0) \in T_0(\partial\Omega)$. Koska taso $T_0(\partial\Omega)$

sivuaa funktion h graafia pisteessä 0 ja on horisontaalinen, niin tällöin $\nabla_{x'} h(0) = 0$. Määritellään lokaali reunan määrittävä funktio

$$\rho\colon B(0,r) \to \mathbb{R}, \quad \rho(x) = x_n - h(x').$$

Täten funktiolle ρ pätee $\rho(0) = 0 + h(0) = 0$ ja

$$\nabla\rho(0) = (\partial_1(x_n - h(x'))|_{x=0}, \ldots, \partial_n(x_n - h(x'))|_{x=0}) = (0, \ldots, 0, 1) = e_n.$$

Valitaan seuraavaksi jokin yksikkötangenttivektori pisteeseen $0 \in \partial\Omega$. Olkoon tämä vektori $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Halutaan käyttää oskilloivaa reunadataa $e^{iN\alpha\cdot x}$, $x \in \partial\Omega$, missä $N > 0$ on suuri, johtavuuden määrittämiseksi reunalla. Lisäksi halutaan keskittyä funktion γ arvoon origossa, joten myös cutoff-funktiolla tulee kertoa.

Tämä johtaa lopulta reunadatan valintaan

$$f_M = c(M,N)\eta(Mx)e^{iN\alpha\cdot x}, \quad x \in \partial\Omega,$$

missä funktio η on cutoff-funktio siten, että $\operatorname{spt}(\eta) \subset B(0,1)$, luvut $N, M > 0$ isoja ja vakio $c(M,N)$ tulee skaalauksesta. Lisäksi halutaan reunadatan f_M oskilloivan paljon pallossa $B(0,1/M)$. Reunadata f_M oskilloi jaksolla $2\pi/N$, joten valitaan

$$\frac{M}{N(M)} = o(1), \quad \text{kun } M \to \infty. \tag{3.1}$$

Todistuksen lopussa valitaan $N(M) = M^3$, joka toteuttaa edellisen ehdon.

Lisäksi osoitetaan seuraava aputulos.

Lemma 3.3. *Olkoon $\eta \in C_0\left(B(0,1)\right)$. Tällöin*

$$\lim_{M\to\infty} M^{n-1}N \int_\Omega \eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta(x',0)\,dx',$$

ja kun M on iso, niin

$$\left|\int_\Omega \eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\,dx\right| \le C(\eta)\frac{M^{1-n}}{N},$$

jollekin $C(\eta) \ge 0$.

Todistus. Koska $\Omega = \{x \in B(0,r) : x_n > h(x')\}$ ja $\rho(x) = x_n - h(x')$, niin

$$\int_\Omega \eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{h(x')}^\infty \eta(Mx', Mx_n)e^{-2N(x_n - h(x'))}\,dx_n\,dx'.$$

Tehdään muuttujanvaihto $x_n = t + h(x')$, jolloin

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{h(x')}^\infty \eta(Mx', Mx_n)e^{-2N(x_n - h(x'))}\,dx_n\,dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \eta\left(Mx', M(t + h(x'))\right)e^{-2Nt}\,dt\,dx'.\end{aligned}$$

Tehdään toinen muuttujienvaihto, jossa skaalataan muuttujat x' ja t, jolloin

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \eta\left(Mx', M(t + h(x'))\right)e^{-2Nt}\,dt\,dx' \\ =&\frac{1}{M^{n-1}N}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \eta\left(x', \frac{M}{N}t + Mh\left(\frac{x'}{M}\right)\right)e^{-2t}\,dt\,dx'.\end{aligned}$$

Nyt

$$M^{n-1}N\int_\Omega \eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \eta\left(x',\frac{M}{N}t+Mh\left(\frac{x'}{M}\right)\right)e^{-2t}\,dt\,dx'.$$

Tähän voidaan käyttää dominoitua konvergenssia, koska ulompi integraali on yli yksikköpallon ($\mathrm{spt}(\eta)\subset B(0,1)$) ja lisäksi

$$\eta\left(x',\frac{M}{N}t+Mh\left(\frac{x'}{M}\right)\right)e^{-2t}\to\eta(x',0)e^{-2t},\ \text{ kun }\ M\to\infty.$$

Tässä rajankäynnissä (3.1) nojalla $M/N\to 0$, kun $M\to\infty$ ja jos merkitään $s=\frac{1}{M}$, niin

$$\lim_{M\to\infty}Mh\left(\frac{x'}{M}\right)=\lim_{M\to\infty}\frac{h\left(\frac{x'}{M}\right)-h(0)}{\frac{1}{M}}=\lim_{s\to 0}\frac{h\left(0+x's\right)-h(0)}{s}=\nabla_{x'}h(0)\cdot x'=0.$$

Täten edelliset päättelyt yhdistämällä

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty}M^{n-1}N\int_\Omega\eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\,dx\\ =&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty\lim_{M\to\infty}\eta\left(x',\frac{M}{N}t+Mh\left(\frac{x'}{M}\right)\right)e^{-2t}\,dt\,dx'.\\ =&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty\eta\left(x',0\right)e^{-2t}\,dt\,dx'\\ =&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta\left(x',0\right)\int_0^\infty e^{-2t}\,dt\,dx'\\ =&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta\left(x',0\right)\,dx'.\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}&\left|M^{n-1}N\int_\Omega\eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\,dx\right|\le M^{n-1}N\int_\Omega\left|\eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\right|\,dx\\ &\to\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\eta\left(x',0\right)\right|\,dx'=C(\eta),\end{aligned}$$

jolloin

$$\left|\int_\Omega\eta(Mx)e^{-2N\rho(x)}\,dx\right|\le C(\eta)\frac{M^{1-n}}{N}.$$

□

Lauseen 3.2 todistus. Jaetaan todistus viiteen osaan, joista viimeisessä yhdistetään osissa 1 – 4 tehtävät päättelyt.

1 Olkoon luvut N ja M kuten kohdassa (3.1) ja määritellään funktiot

$$h_N(x)=e^{N(i\alpha\cdot x-\rho(x))},\quad \eta_M(x)=\eta\left(Mx\right),$$

missä $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0\le\eta\le 1$, $\eta(x)=1$ kun $x\in B(0,1/2)$ ja $\eta(x)=0$ kaikille $x\in\mathbb{R}^n\setminus B(0,1)$.

Olkoon

$$v_0\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C},\quad v_0(x)=\eta_M(x)h_N(x).$$

Tällöin $v_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\operatorname{spt}(v_0) \subset B(0,1/M)$, koska $\operatorname{spt}(\eta_M) \subset B(0,1/M)$. Funktio v_0 on approksimoiva ratkaisu johtavuusyhtälölle origon läheisyydessä eli yhtälölle $\operatorname{div}(\gamma(0)\nabla v) = 0$. Tämä yhtälö taas approksimoi johtavuusyhtälöä $\operatorname{div}(\gamma \nabla v) = 0$ origon ympäristössä.

2 Näytetään funktiolle v_0 kaksi ominaisuutta, jotka ovat voimassa, kun $M \to \infty$:

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 \, dx = O(M^{1-n}N), \tag{3.2}$$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{M^{n-1}}{N} \int_\Omega \gamma \, |\nabla v_0|^2 \, dx = \gamma(0) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta\left(x',0\right)^2 \, dx' = \gamma(0) C(\eta). \tag{3.3}$$

Myöhempien merkintöjen lyhentämiseksi merkitään

$$\nabla v_0 = h_N \nabla(\eta_M) + \eta_M \nabla(h_N) = \underbrace{h_N M(\nabla\eta)(M\,\cdot)}_{F_1} + \underbrace{\eta_M N(i\alpha - \nabla\rho)h_N}_{F_2}. \tag{3.4}$$

Näytetään ensin ominaisuus (3.2).

$$\begin{aligned} ||F_1||_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega \left| e^{N(i\alpha\cdot x - \rho(x))} \nabla\eta(Mx)M \right|^2 \, dx \\ &= M^2 \int_\Omega \underbrace{\left|e^{Ni\alpha\cdot x}\right|^2}_{=1} \left| e^{-N\rho(x)} \nabla\eta(Mx) \right|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Nyt voidaan käyttää lemmaa 3.3, koska $|\nabla\eta|^2 \in C_0\left(B(0,1)\right)$, jolloin

$$\begin{aligned} &M^2 \int_\Omega \left| e^{-N\rho(x)} \nabla\eta(Mx) \right|^2 \, dx \le C(\eta) \frac{M^{3-n}}{N} \\ &= C M^{1-n} N \frac{M^2}{N^2}. \end{aligned}$$

Eli kun M on iso ja $\frac{M}{N} = o(1)$, niin

$$||F_1||_{L^2(\Omega)}^2 = O\left(M^{1-n} N \frac{M^2}{N^2} \right) = o(M^{1-n}N). \tag{3.5}$$

Tutkitaan termiä F_2:

$$\begin{aligned} ||F_2||_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega |\eta_M N(i\alpha - \nabla\rho)h_N|^2 \, dx \\ &= N^2 \int_\Omega \left| e^{Ni\alpha\cdot x} \right|^2 \left| \eta_M (i\alpha - \nabla\rho) e^{-N\rho(x)} \right|^2 \, dx. \\ &= N^2 \int_\Omega \left| \eta_M (i\alpha - \nabla\rho) e^{-N\rho(x)} \right|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Soveltamalla lemmaa 3.3, saadaan

$$N^2 \int_\Omega \left| \eta_M (i\alpha - \nabla\rho) e^{-N\rho(x)} \right|^2 \, dx \le N^2 C(\eta,\rho) \frac{M^{1-n}}{N} = C M^{1-n} N,$$

eli, kun M on iso, niin

$$||F_2||_{L^2(\Omega)}^2 = O(M^{1-n}N). \tag{3.6}$$

Tällöin, ominaisuus (3.2) on todistettu, koska

$$||\nabla v_0||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||F_1||^2_{L^2(\Omega)} + ||F_2||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Näytetään seuraavaksi ominaisuus (3.3). Aloitetaan seuraavasta integraalista:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma \left|\nabla v_0\right|^2 \, dx &= \int_\Omega (\gamma - \gamma(0) + \gamma(0)) \left|\nabla v_0\right|^2 \, dx \\ &= \gamma(0) \int_\Omega \left|\nabla v_0\right|^2 \, dx + \int_\Omega (\gamma - \gamma(0)) \left|\nabla v_0\right|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Koska $\gamma \in C^0(\overline{\Omega})$, niin

$$\sup_{x \in B(0,1/M)} |\gamma(x) - \gamma(0)| = o(1), \text{ kun } M \to \infty, \tag{3.7}$$

joten yhdessä ominaisuuden (3.2) kanssa saadaan, kun M on iso,

$$\int_\Omega (\gamma - \gamma(0)) \left|\nabla v_0\right|^2 \, dx = o(M^{1-n}N).$$

Tutkitaan vielä ensimmäistä integraalia:

$$\begin{aligned}\gamma(0) \int_\Omega \left|\nabla v_0\right|^2 \, dx &= \gamma(0) \int_\Omega \nabla v_0 \cdot \overline{\nabla v_0} \, dx \\ &= \gamma(0) \int_\Omega \left(F_1 + F_2\right) \cdot \left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right) \, dx \\ &= \gamma(0) \int_\Omega \left(|F_1|^2 + F_1 \cdot \overline{F_2} + F_2 \cdot \overline{F_1} + |F_2|^2\right) \, dx \\ &= \gamma(0) \int_\Omega |F_2|^2 \, dx + \gamma(0) \int_\Omega \left(F_1 \cdot \overline{F_2} + F_2 \cdot \overline{F_1} + |F_1|^2\right) \, dx.\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzin sekä kohtien (3.5) ja (3.6) nojalla toinen integraali saadaan muotoon

$$\begin{aligned}&\gamma(0) \int_\Omega \left(F_1 \cdot \overline{F_2} + F_2 \cdot \overline{F_1} + |F_1|^2\right) \, dx \\ &= \gamma(0) \Big((F_1, F_2)_{L^2(\Omega)} + (F_2, F_1)_{L^2(\Omega)} + ||F_1||^2_{L^2(\Omega)} \Big) \\ &\leq \gamma(0) \Big(2||F_1||_{L^2(\Omega)} ||F_2||_{L^2(\Omega)} + ||F_1||^2_{L^2(\Omega)} \Big) = o(M^{1-n}N).\end{aligned}$$

Pitää vielä tutkia termiä $\gamma(0) \, ||F_2||^2_{L^2(\Omega)}$:

$$\begin{aligned}|F_2|^2 &= \Big(\eta_M N (i\alpha - \nabla\rho) h_N\Big) \cdot \Big(\overline{\eta_M N (i\alpha - \nabla\rho) h_N}\Big) \\ &= \left(\eta_M N i\alpha h_N - \eta_M N \nabla\rho h_N\right) \cdot \left(-\eta_M N i\alpha \overline{h_N} - \eta_M N \nabla\rho \overline{h_N}\right) \\ &= \eta_M^2 N^2 |h_N|^2 - \eta_M^2 N^2 |h_N|^2 i\alpha \cdot \nabla\rho + \eta_M^2 N^2 |h_N|^2 i\alpha \cdot \nabla\rho + \eta_M^2 N^2 |h_N|^2 |\nabla\rho|^2 \\ &= \eta_M^2 N^2 |h_N|^2 \left(1 + |\nabla\rho|^2\right) = \eta_M^2 N^2 e^{-2N\rho} \left(1 + |\nabla\rho|^2\right),\end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\gamma(0)\,||F_2||^2_{L^2(\Omega)} &= \gamma(0)\int_\Omega \eta_M^2 N^2 e^{-2N\rho(x)}\left(1+|\nabla\rho(x)|^2\right)\,dx \\
&= \gamma(0)\int_\Omega \eta_M^2 N^2 e^{-2N\rho(x)}\big(1+|\nabla\rho(x)|^2-|\nabla\rho(0)|^2+|\underbrace{\nabla\rho(0)}_{e_n}|^2\big)\,dx \\
&= \gamma(0)\left(\int_\Omega \left(2\eta_M^2 N^2 e^{-2N\rho(x)}+\eta_M^2 N^2 e^{-2N\rho(x)}\left(|\nabla\rho(x)|^2-|\nabla\rho(0)|^2\right)\right)\,dx\right).
\end{aligned}$$

Nyt lemman 3.3 nojalla

$$\begin{aligned}
&\frac{M^{n-1}}{N}\gamma(0)\int_\Omega 2\eta_M^2 N^2 e^{-2N\rho(x)}\,dx = M^{n-1}N\gamma(0)\int_\Omega 2\eta_M^2 e^{-2N\rho(x)}\,dx \\
&\to \gamma(0)C(\eta),\ \text{ kun } M\to\infty.
\end{aligned}$$

Toinen termi on muotoa $o(1)$, kun $M\to\infty$, koska kuvaus $x\mapsto|\nabla\rho(x)|^2$ on jatkuva pisteen 0 ympäristössä. Saatiin siten todistettua ominaisuus (3.3).

3 Approksimoivan ratkaisun v_0 lisäksi hyödynnetään johtavuusyhtälön ratkaisua v, joka saadaan ratkaisemalla Dirichlet'n ongelma

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma\nabla v)=0, & \text{kun } x\in\Omega \\ v=f_0, & \text{kun } x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

missä $f_0 = v_0|_{\partial\Omega}$. Nyt $f_0\in H^{1/2}(\partial\Omega)$, koska $v_0\in H^1(\Omega)$, joten lauseen 1.14 nojalla on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu v. Merkitään

$$v = v_1 + v_0, \tag{3.8}$$

missä $v_1 = v - v_0$. Tällöin funktio v_1 ratkaisee Dirichlet'n ongelman

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma\nabla v_1) = -\operatorname{div}(\gamma\nabla v_0), & \text{kun } x\in\Omega \\ v_1 = 0 & \text{kun } x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Perustellaan tämä: Määritelmän 1.13 mukaan $\operatorname{div}(\gamma\nabla v)=0$ tarkoittaa, että

$$\int_\Omega \gamma\nabla v\cdot\nabla\phi\,dx = 0 \text{ kaikilla } \phi\in H_0^1(\Omega).$$

Sijoitetaan tähän $v = v_1 + v_0$;

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \gamma\nabla(v_1+v_0)\cdot\nabla\overline{\phi}\,dx \\
&= \int_\Omega \gamma\nabla v_1\cdot\nabla\overline{\phi}\,dx + \int_\Omega \gamma\nabla v_0\cdot\nabla\overline{\phi}\,dx \\
\iff \int_\Omega \gamma\nabla v_1\cdot\nabla\overline{\phi}\,dx &= -\int_\Omega \gamma\nabla v_0\cdot\nabla\overline{\phi}\,dx.
\end{aligned}$$

Operaattori $-\operatorname{div}(\gamma\nabla v_0)\in H^{-1}(\Omega)$ ottaa siis funktion $\phi\in H_0^1(\Omega)$ ja kuvaa sen integraaliksi:

$$\langle -\operatorname{div}(\gamma\nabla v_0),\phi\rangle = -\int_\Omega \gamma\nabla v_0\cdot\nabla\phi\,dx.$$

Lisäksi funktio v toteuttaa reunaehdon $v|_{\partial\Omega} = v_0|_{\partial\Omega}$, joten

$$v_1|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} - v_0|_{\partial\Omega} = 0.$$

Funktio v_1 siis todella on yksikäsitteinen ratkaisu kohdan (3.9) Dirichlet'n ongelmaan.

4 Tarkastellaan funktiota v_1 tarkemmin. Osoitetaan, että kun $M \to \infty$, niin

$$\int_\Omega |\nabla v_1|^2 \, dx = o(M^{1-n}N). \tag{3.10}$$

Tämä oikeuttaa funktion v_0 kutsumisen approksimoivaksi ratkaisuksi. Oikean ratkaisun v ja approksimoivan ratkaisun v_0 erotus v_1 on asymptoottisesti pienempi kuin approksimoiva ratkaisu. Tämä huomataan vertailemalla ominaisuuksia (3.2) ja (3.10).

Koska v_1 on lauseen 1.14 antama yksikäsitteinen ratkaisu, niin kohdan (3.10) osoittamiseen tulee näyttää, että

$$|| - \operatorname{div}(\gamma \nabla v_0)||^2_{H^{-1}(\Omega)} = o(M^{1-n}N).$$

Tämä riittää, koska

$$\begin{aligned} ||\nabla v_1||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||v_1||^2_{H^1(\Omega)} &\leq C^2 \left(|| - \operatorname{div}(\gamma \nabla v_0)||_{H^{-1}(\Omega)} + ||0||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right)^2 \\ &= C^2 || - \operatorname{div}(\gamma \nabla v_0)||^2_{H^{-1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

missä käytettiin epäyhtälöä (1.7). Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $||\phi||_{H^1(\Omega)} = 1$. Tällöin

$$|\langle - \operatorname{div}(\gamma \nabla v_0), \phi \rangle|^2 = \left| \int_\Omega \gamma \nabla v_0 \cdot \nabla \phi \, dx \right|^2,$$

joten avaruuden $H^{-1}(\Omega)$ normin määritelmän perusteella on yhtäpitävää osoittaa

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \gamma \nabla v_0 \cdot \nabla \phi \, dx \right|^2 = o\left(M^{1-n}N\right) ||\phi||^2_{H^1(\Omega)} \\ \iff &\left| \int_\Omega \gamma \nabla v_0 \cdot \nabla \phi \, dx \right| = o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right) ||\phi||_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aloitetaan kohdan (3.11) integraalista, eli olkoon $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tällöin

$$\int_\Omega \gamma \nabla v_0 \cdot \nabla \phi \, dx = \gamma(0) \int_\Omega \nabla v_0 \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega (\gamma - \gamma(0)) \nabla v_0 \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Tutkitaan jälkimmäistä integraali

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\gamma - \gamma(0)) \nabla v_0 \cdot \nabla \phi \, dx &\leq \int_\Omega |(\gamma - \gamma(0)) \nabla v_0| \, |\nabla \phi| \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |(\gamma - \gamma(0)) \nabla v_0|^2 \, dx \right)^{1/2} ||\nabla \phi||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\int_\Omega |(\gamma - \gamma(0)) \nabla v_0|^2 \, dx \right)^{1/2} ||\phi||_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

missä toiseksi viimeisessä vaiheessa käytettiin Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä. Nyt ominaisuuden (3.2) ja funktion γ jatkuvuuden nojalla

$$\left(\int_\Omega |(\gamma - \gamma(0)) \nabla v_0|^2 \, dx \right)^{1/2} ||\phi||_{H^1(\Omega)} = o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right) ||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Näytetään, että

$$\gamma(0)\int_\Omega \nabla v_0\cdot\nabla\phi\,dx = o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}, \tag{3.12}$$

mikä riittää kohdan (3.11) osoittamiseen. Jaetaan ∇v_0 osiin, kuten kohdassa (3.4), jolloin

$$\gamma(0)\int_\Omega \nabla v_0\cdot\nabla\phi\,dx = \gamma(0)\int_\Omega F_1\cdot\nabla\phi\,dx + \gamma(0)\int_\Omega F_2\cdot\nabla\phi\,dx.$$

Jälleen ensimmäinen termi on $o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}$, sillä Cauchy-Schwarzin epäyhtälön ja kohdan (3.5) nojalla

$$\gamma(0)\int_\Omega F_1\cdot\nabla\phi\,dx \le \gamma(0)||F_1||_{L^2(\Omega)}||\phi||_{H^1(\Omega)} = o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Tutkitaan jälkimmäistä integraalia

$$\begin{aligned}
&\gamma(0)\int_\Omega \eta_M N(i\alpha-\nabla\rho)h_N\cdot\nabla\phi\,dx\\
&=\gamma(0)\int_\Omega \eta_M N\left(i\alpha-(\nabla\rho(0)-(\nabla\rho-\nabla\rho(0)))\right)h_N\cdot\nabla\phi\,dx\\
&=\gamma(0)\left(\int_\Omega \eta_M N(i\alpha-e_n)h_N\cdot\nabla\phi\,dx+\int_\Omega \eta_M N\left(\nabla\rho-\nabla\rho(0)\right)h_N\cdot\nabla\phi\,dx\right).
\end{aligned}$$

Yllä olevan rivin jälkimmäinen integraali on yli pallon $B(0,1/M)$, joten kun $M\to\infty$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta_M N\left(\nabla\rho-\nabla\rho(0)\right)h_N\cdot\nabla\phi\,dx &\le \left(\int_\Omega\left|\eta_M N\left(\nabla\rho-\nabla\rho(0)\right)h_N\right|^2\,dx\right)^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)}\\
&= o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

missä käytetiin funktion $\nabla\rho$ jatkuvuutta nollassa (vastaavasti kuten kohdassa (3.7)), Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä sekä lemmaa 3.3. Nyt saatiin, että

$$\gamma(0)\int_\Omega \nabla v_0\cdot\nabla\phi\,dx = \gamma(0)\int_\Omega \eta_M N(i\alpha-e_n)h_N\cdot\nabla\phi\,dx + o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Tutkitaan oikean puolen ensimmäistä termiä:

$$\begin{aligned}
&\gamma(0)\int_\Omega \eta_M N(i\alpha-e_n)h_N\cdot\nabla\phi\,dx\\
&=\gamma(0)\int_\Omega\left(\eta_M N(i\alpha-e_n)_1h_N\partial_1\phi(x)+\cdots+\eta_M N(i\alpha-e_n)_nh_N\partial_n\phi(x)\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Osittaisintegroimalla jokainen termi erikseen saadaan

$$
\begin{aligned}
&\gamma(0)\int_\Omega (\eta_M N(i\alpha - e_n)_1 h_N \partial_1\phi(x) + \cdots + \eta_M N(i\alpha - e_n)_n h_N \partial_n\phi(x))\, dx. \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega N\left((i\alpha - e_n)_1 \phi\partial_1(\eta_M h_N) + \cdots + (i\alpha - e_n)_n \phi\partial_n(\eta_M h_N)\right) dx \\
&+ \gamma(0)\sum_{j=1}^n \underbrace{\int_{\partial\Omega} N(i\alpha - e_n)\eta_M h_N \phi\, \nu_j\, dS}_{=0,\text{ koska } \phi\in C_0^\infty(\Omega)} \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega N\phi\sum_{j=1}^n \left((i\alpha - e_n)_j h_N \partial_j \eta_M + (i\alpha - e_n)_j \eta_M \partial_j h_N\right) dx \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega MN(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\eta)(M\,\cdot)h_N\phi\, dx \\
&- \gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(i\alpha - \nabla\rho)\eta_M h_N \phi\, dx.
\end{aligned}
$$

Lisäämällä ja vähentämällä termi $\nabla\rho(0)$, edellisen jälkimmäinen integraali saadaan muotoon

$$
\begin{aligned}
&- \gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(i\alpha - \nabla\rho)\eta_M h_N \phi\, dx \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(i\alpha - (\nabla\rho(0) + (\nabla\rho - \nabla\rho(0))))\eta_M h_N \phi\, dx \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(i\alpha - e_n)\eta_M h_N \phi\, dx \\
&+ \gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M h_N \phi\, dx \\
&= \gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M h_N \phi\, dx,
\end{aligned}
$$

koska

$$(i\alpha - e_n)\cdot(i\alpha - e_n) = -|\alpha|^2 + 2i\alpha\cdot e_n + |e_n|^2 = -1 + 0 + 1 = 0,$$

missä käytettiin hyödyksi vektorin α valintaa tangenttivektoriksi, eli $\alpha\cdot e_n = 0$. Tähän mennessä ollaan saatu

$$
\begin{aligned}
\gamma(0)\int_\Omega \nabla v_0\cdot\nabla\phi\, dx &= -\gamma(0)\int_\Omega MN(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\eta)(M\,\cdot)h_N\phi\, dx \\
&\quad + \gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M h_N\phi\, dx \\
&\quad + o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Huomataan, että koska

$$\partial_n h_N = Nh_N(\underbrace{\partial_n(i\alpha\cdot x)}_{=0} - \underbrace{\partial_n\rho}_{=1}) = -Nh_N,$$

niin

$$h_N = -\frac{1}{N}\partial_n h_N. \tag{3.14}$$

Käytetään tätä kohdan (3.13) ensimmäiseen integraaliin ja osittaisintegroidaan, jolloin

$$\begin{aligned}
&-\gamma(0)\int_\Omega MN(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\eta)(M\cdot)h_N\phi\,dx \\
&= \gamma(0)\int_\Omega M(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\eta)(M\cdot)\partial_n h_N\phi\,dx \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega M(i\alpha - e_n)\cdot h_N\partial_n((\nabla\eta)(M\cdot)\phi)\,dx \\
&+ \underbrace{\gamma(0)\int_{\partial\Omega} M(i\alpha - e_n)\cdot h_N(\nabla\eta)(M\cdot)\phi\nu_n\,dS}_{=0} \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega M^2(i\alpha - e_n)\cdot h_N\phi(\nabla\partial_n\eta)(M\cdot)\,dx \\
&- \gamma(0)\int_\Omega M(i\alpha - e_n)\cdot h_N(\nabla\eta)(M\cdot)\partial_n\phi\,dx \\
&= -\gamma(0)\int_\Omega M^2(i\alpha - e_n)\cdot h_N\phi(\nabla\partial_n\eta)(M\cdot)\,dx \\
&- \gamma(0)\int_\Omega F_1\cdot(i\alpha - e_n)\partial_n\phi\,dx.
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzin ja kohdan (3.5) nojalla

$$\begin{aligned}
-\gamma(0)\int_\Omega F_1\cdot(i\alpha - e_n)\partial_n\phi\,dx &\leq |\gamma(0)|\,||F_1||_{L^2(\Omega)}|(i\alpha - e_n)|\left(\int_\Omega |\partial_n\phi|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq |\gamma(0)|\,||F_1||_{L^2(\Omega)}|(i\alpha - e_n)|\,||\phi||_{H^1(\Omega)} \\
&= o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
&-\gamma(0)\int_\Omega M^2(i\alpha - e_n)\cdot h_N\phi(\nabla\partial_n\eta)(M\cdot)\,dx \\
&\leq |\gamma(0)|M^2\left(\int_\Omega |(i\alpha - e_n)\cdot h_N(\nabla\partial_n\eta)(M\cdot)|^2\,dx\right)^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)} \qquad (3.15) \\
&= |\gamma(0)|M^2\left(\int_\Omega |(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\partial_n\eta)(M\cdot)|^2 e^{2N\rho}\,dx\right)^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)} \\
&\leq |\gamma(0)|M^2 C\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}||\phi||_{H^1(\Omega)} = |\gamma(0)|\frac{M^2}{N}M^{(1-n)/2}N^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)}, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

missä kohdassa (3.15) käytettiin Cauchy-Schwarzia ja kohdassa (3.16) lemmaa 3.3. Tällöin

$$-\gamma(0)\int_\Omega M^2(i\alpha - e_n)\cdot h_N\phi(\nabla\partial_n\eta)(M\cdot)\,dx = O\left(\frac{M^2}{N}M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}$$

ja valitsemalla

$$N(M) = M^3$$

saadaan

$$-\gamma(0)\int_\Omega M^2(i\alpha - e_n)\cdot h_N\phi(\nabla\partial_n\eta)(M\,\cdot\,)\,dx = o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Nyt ollaan todistettu, että

$$\begin{aligned}\gamma(0)\int_\Omega \nabla v_0\cdot\nabla\phi\,dx = \gamma(0)&\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M h_N\phi\,dx\\ &+ o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Käytetään jälleen funktion h_N ominaisuutta (3.14) yllä olevaan oikean puolen integraaliin, jolloin

$$\begin{aligned}&\gamma(0)\int_\Omega N^2(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M h_N\phi\,dx\\ &= -\gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M\partial_n h_N\phi\,dx.\end{aligned}$$

Koska $\nabla\rho(x) = (-\nabla h(x'), 1)$, niin $\nabla\rho$ ei riipu koordinaatista x_n eli se on vakio koordinaatin x_n suhteen. Tällöin voidaan osittaisintegroida edellistä

$$\begin{aligned}&-\gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M\partial_n h_N\phi\,dx\\ &= \gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))h_N\partial_n(\eta_M\phi)\,dx\\ &-\gamma(0)\underbrace{\int_{\partial\Omega} N(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M h_N\phi\nu_n\,dS}_{=0}\\ &= \gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))Mh_N\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\,dx\\ &+\gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))h_N\eta_M\partial_n\phi\,dx.\end{aligned}$$

Käsitellään saadut integraalit erikseen. Aloitetaan jälkimmäisestä integraalista

$$\begin{aligned}&\gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))h_N\eta_M\partial_n\phi\,dx\\ &\le \gamma(0)N\left(\int_\Omega |(i\alpha - e_n)\cdot(\nabla\rho - \nabla\rho(0))\eta_M|^2 e^{-2N\rho}\,dx\right)^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)}\\ &\le \gamma(0)CNM^{(1-n)/2}N^{-1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)}\sup_{x\in B(0,1/M)}|\nabla\rho - \nabla\rho(0)|\\ &= o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)},\end{aligned}$$

missä käytettiin Cauchy-Schwarzia, lemmaa 3.3 sekä funktion $\nabla\rho$ jatkuvuutta. Ensimmäiselle integraalille käytetään aluksi ominaisuutta (3.14), jonka jälkeen osittaisintegroidaan. Tämä on jälleen mahdollista, koska $\nabla\rho$ ei riipu koordinaatista x_n.

Tällöin siis

$$\begin{aligned}
&\gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha-e_n)\cdot(\nabla\rho-\nabla\rho(0))Mh_N\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\,dx\\
&=-\gamma(0)\int_\Omega (i\alpha-e_n)\cdot(\nabla\rho-\nabla\rho(0))M\partial_n h_N\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\,dx\\
&=\gamma(0)\int_\Omega M^2(i\alpha-e_n)\cdot(\nabla\rho-\nabla\rho(0))h_N\phi\partial_n^2\eta(M\,\cdot\,)\,dx\\
&+\gamma(0)\int_\Omega M(i\alpha-e_n)\cdot(\nabla\rho-\nabla\rho(0))h_N\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\partial_n\phi\,dx.
\end{aligned}$$

Käytetään näihin kahteen Cauchy-Schwarzia, lemmaa 3.3 sekä valintaa $N(M)=M^3$, jolloin

$$\begin{aligned}
&\gamma(0)\int_\Omega N(i\alpha-e_n)\cdot(\nabla\rho-\nabla\rho(0))Mh_N\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\,dx\\
&\le\gamma(0)M^2\left(\int_\Omega|(i\alpha-e_n)\cdot(\nabla\rho-\nabla\rho(0))\partial_n^2\eta(M\,\cdot\,)|^2e^{2N\rho}\,dx\right)^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)}\\
&+\gamma(0)M\left(\int_\Omega|(i\alpha-e_n)\cdot(\nabla\rho-\nabla\rho(0))\partial_n\eta(M\,\cdot\,)|^2e^{2N\rho}\,dx\right)^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)}\\
&\le\gamma(0)\,||\phi||_{H^1(\Omega)}\left(C_1M^2M^{(1-n)/2}N^{-1/2}+C_2MM^{(1-n)/2}N^{-1/2}\right)\\
&=\gamma(0)\,||\phi||_{H^1(\Omega)}\left(C_1\frac{M^2}{N}M^{(1-n)/2}N^{1/2}+C_2\frac{M}{N}M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)\\
&=o\left(M^{(1-n)/2}N^{1/2}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa kohdan (3.12) ja siten ollaan saatu näytettyä (3.11), joka oli yhtäpitävää sille, että

$$\int_\Omega|\nabla v_1|^2\,dx=o(M^{1-n}N).$$

5 Nyt voidaan todistaa lause loppuun. Määritellään

$$c_{M,N}=\sqrt{\frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}},\quad u_M=c_{M,N}v,\quad f_M=c_{M,N}f_0,$$

missä

$$C(\eta)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta\left(x',0\right)^2\,dx',$$

$v=v_1+v_0$ on kuten kohdassa (3.8) ja $f_0=v_0|_{\partial\Omega}$. Nyt $u_M\in H^1(\Omega)$ kaikilla M ja u_M on ratkaisu johtavuusyhtälölle

$$\operatorname{div}(\gamma\nabla u)=0\ \text{ kun }\ x\in\Omega.$$

Lisäksi koska $v_0\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\operatorname{spt}(v_0)\subset B(0,1/M)$, niin $f_M\in C^1(\partial\Omega)$ ja $\operatorname{spt}(f_M)\subset B(0,1/M)\cap\partial\Omega$. Vielä tulee näyttää, että

$$||f_M||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}=O(1),\ \text{ kun }\ M\to\infty.$$

Tämä pätee, koska

$$||f_M||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} ||c_{M,N}v_0|_{\partial\Omega}+u||_{H^1(\Omega)} \leq ||c_{M,N}v_0|_{\partial\Omega}+0||_{H^1(\Omega)} \leq c_{M,N}||v_0||_{H^1(\Omega)}$$

ja kohdan (3.2) nojalla

$$c_{M,N}||\nabla v_0||_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}}M^{(1-n)/2}N^{1/2} = \frac{C}{\sqrt{C(\eta)}},$$

missä jäljelle jäävä vakio riippuu vain funktioista η ja ρ. Lisäksi lemman 3.3 nojalla

$$c_{M,N}||v_0||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{C(\eta)}},$$

missä jälleen vakio riippuu vain funktioista η ja ρ. Voidaan siis valita vakio siten, että $||f_M||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ on rajoitettu tasaisesti yli luvun M ja pisteen $x_0 \in \partial\Omega$. Vielä pitää näyttää, että

$$\lim_{M\to\infty}\int_\Omega \gamma|\nabla u_M|^2\,dx = \gamma(0):$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \gamma|\nabla u_M|^2\,dx &= \int_\Omega \gamma\nabla u_M\cdot\overline{\nabla u_M}\,dx \\
&= c_{M,N}^2\int_\Omega \gamma\nabla(v_1+v_0)\cdot\overline{\nabla(v_1+v_0)}\,dx \\
&= \frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}\int_\Omega \gamma\left(|\nabla v_1|^2+\nabla v_1\cdot\overline{\nabla v_0}+\nabla v_0\cdot\overline{\nabla v_1}+|\nabla v_0|^2\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Aloitetaan kolmesta ensimmäisestä termistä, eli

$$\begin{aligned}
&\frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}\int_\Omega \gamma\left(|\nabla v_1|^2+\nabla v_1\cdot\overline{\nabla v_0}+\nabla v_0\cdot\overline{\nabla v_1}\right)\,dx \\
&\leq \frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}\sup_{x\in\Omega}\gamma(x)\Big((\nabla v_1,\nabla v_0)_{L^2(\Omega)}+(\nabla v_0,\nabla v_1)_{L^2(\Omega)}+||\nabla v_1||_{L^2(\Omega)}^2\Big) \\
&\leq \frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}\sup_{x\in\Omega}\gamma(x)\Big(2||\nabla v_1||_{L^2(\Omega)}||\nabla v_0||_{L^2(\Omega)}+||\nabla v_1||_{L^2(\Omega)}^2\Big) \\
&= \frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}\sup_{x\in\Omega}\gamma(x)\,||\nabla v_1||_{L^2(\Omega)}\left(2||\nabla v_0||_{L^2(\Omega)}+||\nabla v_1||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= \frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}o(M^{(1-n)}N),
\end{aligned}$$

missä käytettiin ominaisuutta (3.10). Saadaan, että kun $M\to\infty$ niin

$$\frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}\int_\Omega \gamma\left(|\nabla v_1|^2+\nabla v_1\cdot\overline{\nabla v_0}+\nabla v_0\cdot\overline{\nabla v_1}\right)\,dx \to 0.$$

Viimeinen termi antaa halutun lopputuloksen, sillä kohdan (3.3) nojalla

$$\lim_{M\to\infty}\frac{M^{n-1}N^{-1}}{C(\eta)}\int_\Omega \gamma|\nabla v_0|^2\,dx = \frac{1}{C(\eta)}C(\eta)\gamma(0) = \gamma(0).$$

□

Lauseen 3.1 todistus. Olkoon u_M kuten lauseessa 3.2. Tällöin funktio u_M on ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla v) = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ v = f_M, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

jokaisella M, missä funktiot f_M ovat kuten lauseessa 3.2. Tällöin lauseen 2.2 nojalla

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_\gamma f_M, \bar{f}_M \rangle_{\partial\Omega} &= \int_\Omega \gamma \nabla u_M \cdot \nabla \overline{u}_M \, dx \\ &= \int_\Omega \gamma |\nabla u_M|^2 \, dx \to \gamma(x_0), \end{aligned}$$

kun $M \to \infty$. Lisäksi lauseesta 3.2 saadaan, että funktiot f_M eivät riipu funktiosta γ sekä $\operatorname{spt}(f_M) \subset B(x_0, 1/M) \cap \partial\Omega$. $\square$

LUKU 4

Schrödingerin yhtälöstä

Käydään läpi vielä toista differentiaalioperaattoria, jota kutsutaan *Schrödingerin operaattoriksi*. Operaattori on

$$L_q u = (-\Delta + q)\, u, \tag{4.1}$$

missä $q \in L^\infty(\Omega)$. *Schrödingerin yhtälöksi* kutsutaan yhtälöä

$$(-\Delta + q)\, u = 0. \tag{4.2}$$

Schrödingerin yhtälölle muotoillaan inversio-ongelma reuna-arvo-ongelmaan

$$\begin{cases} (-\Delta + q)\, u = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

liittyen ja muotoillaan ja todistetaan samankaltainen potentiaalin q konstruointi kuin edellisessä luvussa todistettiin johtavuudelle γ.

Schrödingerin yhtälö esiintyy esimerkiksi fysiikassa ei-suhteellisessa kvanttimekaniikassa sekä matematiikassa spektraali- ja sirontateoriassa. Fysiikassa Schrödingerin yhtälö on yksi keskeisimmistä yhtälöistä ei-suhteellisessa kvanttimekaniikassa [**10**].

4.1. Dirichlet-to-Neumann -kuvaus Schrödingerin yhtälölle

Luvussa 2 esitellyt tulokset DN-kuvaukselle pätevät myös Schrödingerin yhtälön tapauksessa, kunhan oletetaan, että 0 ei ole Dirichlet'n ominaisarvo. Esimerkiksi, kun $q \geq 0$, niin 0 ei ole Dirichlet'n ominaisarvo. Erityisesti lause 2.2 voidaan muotoilla Schrödingerin yhtälölle.

Lause 4.1. *(DN-kuvaus Schrödingerin yhtälölle) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu joukko ja $q \in L^\infty(\Omega)$. Oletetaan lisäksi, että* 0 *ei ole operaattorin* (4.1) *Dirichlet'n ominaisarvo joukossa Ω.*

Tällöin on olemassa rajoitettu lineaarinen kuvaus

$$\Lambda_q \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

jolle kaikilla $f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ pätee

$$\langle \Lambda_q f, g \rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega (\nabla u_f \cdot \nabla e_g + q u_f e_g)\, dx,$$

missä $u_f \in H^1(\Omega)$ on yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} (-\Delta + q)\, u = 0, & \textit{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \textit{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ja $e_g \in H^1(\Omega)$, jolle $e_g|_{\partial\Omega} = g$.

Todistus. Schrödingerin operaattori (4.1) toteuttaa ehdot (1.3) ja (1.4). Lisäksi oletetaan, että 0 ei ole Dirichlet'n ominaisarvo joukossa Ω. Tällöin lauseen 2.1 ehdot toteutuvat ja tulos seuraa. $\square$

Jotta voidaan muotoilla Schrödingerin yhtälölle vastaava tulos kuin lauseessa 3.1, tulee osoittaa DN-kuvaukselle kaksi ominaisuutta. Nämä ovat DN-kuvauksen symmetrisyys sekä kahden DN-kuvauksen erotuksen integraali-identiteetti.

Lause 4.2. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko, operaattori L kuten kohdissa* (1.3) *ja* (1.4)*. Oletetaan lisäksi, että $0 \notin \operatorname{spec}(L|_\Omega)$. Tällöin*

$$\langle \Lambda_L f, g\rangle_{\partial\Omega} = \langle g, \Lambda_L f\rangle_{\partial\Omega}, \quad \textit{kaikilla } f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Todistus. Olkoon $f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Lauseen 2.1 mukaan

$$\langle \Lambda_L f, g\rangle_{\partial\Omega} = B[u_f, \overline{e}_g],$$

missä $u_f \in H^1(\Omega)$ on yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f, & \text{kun } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ja $e_g \in H^1(\Omega)$ funktio, jolle $e_g|_{\partial\Omega} = g$. Valitaan $e_g = u_g$, missä u_g on yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = g, & \text{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Tällöin

$$\langle \Lambda_L f, g\rangle_{\partial\Omega} = B[u_f, \overline{u}_g] = \overline{B[\overline{u}_g, u_f]} = B[u_g, \overline{u}_f] = \langle \Lambda_L g, f\rangle_{\partial\Omega} = \langle g, \Lambda_L f\rangle_{\partial\Omega},$$

missä käytettiin sisätulon $B[\,\cdot\,,\cdot\,]$ konjugaattisymmetrisyyttä. $\square$

Lause 4.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko ja L_1, L_2 operaattoreita kuten kohdissa* (1.3) *ja* (1.4)*, missä vastaavia kertoimia merkitään a_m^{jk}, q_m, $m = 1, 2$. Oletetaan lisäksi, että $0 \notin \operatorname{spec}(L_m|_\Omega)$. Tällöin kaikille $f_1, f_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$*

$$\langle (\Lambda_{L_1} - \Lambda_{L_2})\, f_1, f_2\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n (a_1^{jk} - a_2^{jk})\partial_j u_1 \partial_k u_2 + (q_1 - q_2) u_1 u_2 \right) dx, \tag{4.4}$$

missä $u_m \in H^1(\Omega)$ on yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} L_m u = 0, & \textit{kun } x \in \Omega \\ u = f_m, & \textit{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Todistus. Olkoon $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ ratkaisuja reuna-arvo-ongelmille

$$\begin{cases} L_m u = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f_m, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$m = 1, 2$. Tällöin

$$\langle \Lambda_{L_1} f_1, f_2\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a_1^{jk} \partial_j u_1 \partial_k v_2 + q_1 u_1 v_2 \right) dx,$$

missä $v_2 \in H^1(\Omega)$, $v_2|_{\partial\Omega} = f_2$. Lisäksi lauseen 4.2 nojalla

$$\langle \Lambda_{L_2} f_1, f_2\rangle_{\partial\Omega} = \langle \Lambda_{L_2} f_2, f_1\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a_2^{jk} \partial_j u_2 \partial_k v_1 + q_2 u_2 v_1 \right) dx,$$

missä $v_1 \in H^1(\Omega)$, $v_1|_{\partial\Omega} = f_1$. Valitaan nyt $v_1 = u_1$ ja $v_2 = u_2$, jolloin

$$\begin{aligned}\langle (\Lambda_{L_1} - \Lambda_{L_2}) f_1, f_2\rangle_{\partial\Omega} &= \langle \Lambda_{L_1} f_1, f_2\rangle_{\partial\Omega} - \langle \Lambda_{L_2} f_1, f_2\rangle_{\partial\Omega} \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n a_1^{jk} \partial_j u_1 \partial_k u_2 - a_2^{jk} \partial_j u_2 \partial_k u_1 + q_1 u_1 u_2 - q_2 u_2 u_1 \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^n (a_1^{jk} - a_2^{jk}) \partial_j u_1 \partial_k u_2 + (q_1 - q_2) u_1 u_2 \right) dx.\end{aligned}$$

□

Erityisesti edellä olevat kaksi tulosta pätevät Schrödingerin operaattorille ja yhtälölle. Olkoon $L_0 u = -\Delta u$. Tällöin yhtälö (4.4) saa muodon

$$\langle (\Lambda_{L_q} - \Lambda_{L_0}) f_1, f_2\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega q u_1 u_2 \, dx.$$

4.2. Konstruktio reunamittausten avulla

Muotoillaan seuraavaksi vastaavanlainen tulos potentiaalin q konstruoinnille kuin johtavuusyhtälölle. Johtavuusyhtälön tapauksesta poiketen tehdään oletus, että joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ reuna $\partial\Omega \in C^3$. Tämä oletus tehdään, koska todistuksessa tarvitaan säännöllisyystuloksia osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisuille.

Lause 4.4. *Olkoon Ω avoin rajoitettu joukko, $\partial\Omega \in C^3$ ja olkoon $q \in C^0(\overline{\Omega})$. Olkoon $x_0 \in \partial\Omega$. Tällöin on olemassa jono funktioita $(f_M) \subset C^1(\partial\Omega)$ siten, että*

$$\lim_{M\to\infty} \langle (\Lambda_q - \Lambda_0) f_M, \bar{f}_M\rangle_{\partial\Omega} = q(x_0)$$

ja funktiot f_M eivät riipu funktiosta q ja $\mathrm{spt}(f_M) \subset B(x_0, 1/M) \cap \partial\Omega$.

Kuten johtavuusyhtälönkin tapauksessa, tämä tulos saadaan seuraavan lauseen avulla lyhyesti.

Lause 4.5. *Olkoon Ω avoin rajoitettu joukko, $\partial\Omega \in C^3$ ja olkoon $q \in C^0(\overline{\Omega})$. Lisäksi oletetaan, että $0 \notin \mathrm{spec}(L_q|_{\partial\Omega})$. Kun on annettuna piste $x_0 \in \partial\Omega$, niin on olemassa jono ratkaisuja $(u_M) \subset H^1(\Omega)$ Schrödingerin yhtälölle*

$$(-\Delta + q)u = 0, \quad kun \ x \in \Omega,$$

siten, että

$$\lim_{M\to\infty} \int_\Omega q|u_M|^2 \, dx = q(x_0).$$

Lisäksi funktiot $f_M = u_M|_{\partial\Omega} \in C^1(\partial\Omega)$ ja ne eivät riipu funktiosta q ja $\mathrm{spt}(f_M) \subset B(x_0, 1/M) \cap \partial\Omega$.

Lauseen 4.5 todistus on monin tavoin samanlainen kuin lauseen 3.2 tapauksessa. Samat ideat toistuvat ja alkutilannekin järjestetään samankaltaiseksi, mutta tietyissä kohdissa joudutaan turvautumaan negatiivisten Sobolev-avaruuksien ominaisuuksiin, joita ei tässä tutkielmassa todisteta.

Valitaan siis koordinaatisto siten, että $x_0 = 0$. Todistuksen teknisyyden helpottamiseksi tehdään oletus, että reuna on litteä origon ympäristössä, jolloin lokaaliksi reunaa määrittäväksi funktioksi saadaan $\rho(x) = x_n$.

Lisäksi valitaan tangenttivektori $\alpha \in \mathbb{R}^n$ pisteeseen $0 \in \Omega$, jolle

$$|\alpha|^2 = 1 + \frac{q(0)}{N^2}. \tag{4.5}$$

Tämä saadaan siitä, että todistuksessa valittavan approksimoivan ratkaisun tulee approksimoida Schrödingerin yhtälöä origon lähellä. Tällöin funktio $e^{N(i\alpha - e_n)\cdot x}$ toteuttaa Schrödingerin yhtälön, joka on jäädytetty origoon

$$\begin{aligned}
&(\Delta + q(0))e^{N(i\alpha-e_n)\cdot x} = \Delta e^{N(i\alpha-e_n)\cdot x} + q(0)e^{N(i\alpha x-e_n)\cdot x} \\
&= e^{N(i\alpha-e_n)\cdot x}\big(N^2(i\alpha - e_n)\cdot(i\alpha - e_n) + q(0)\big) \\
&= e^{N(i\alpha-e_n)\cdot x}\big(N^2(-|\alpha|^2 + 2i\alpha\cdot e_n + 1) + q(0)\big) \\
&= e^{N(i\alpha-e_n)\cdot x}\big(N^2(-|\alpha|^2 + 1) + q(0)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Myös tässä todistuksessa valitaan oskilloiva funktio reunadataksi ja kerrotaan tätä cutoff-funktiolla, jonka avulla keskitytään funktion q arvoon origossa.

Määritellään Sobolev-avaruudet positiiviselle s käyttäen Fourier-muunnoksia [**6**]. Funktion u *Fourier-muunnos* on

$$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot x} u(x)\, dx.$$

Fourier muunnoksen lisäksi määritellään *Schwartz avaruus*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\colon \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty \,\text{kaikilla multi-indekseillä}\, \alpha \,\text{ja}\, \beta\right\},$$

hillittyjen distribuutioiden avaruus

$$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) = \{\text{jatkuvat lineaariset kuvaukset joukossa } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$$

sekä kuvaus $J^s\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$J^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |y|^2\right)^{s/2} \hat{u}(y) e^{2\pi i y\cdot x}\, dy.$$

Kuvaus J^s voidaan jatkaa kuvaukseksi $J^s\colon \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ [**6**].

Määritelmä 4.6. Olkoon $s > 0$. Tällöin

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)\colon J^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Varustetaan tämä avaruus sisätulolla

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (J^s u, J^s v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ja normilla

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (u, u)^{1/2}_{H^s(\mathbb{R}^n)} = ||J^s u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Avaruus $H^s(\mathbb{R}^n)$ on Hilbertin avaruus ja sen sisätulolle pätee

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|y|^2\right)^s \hat{u}(y)\hat{v}(y)\, dy.$$

Jos $s \in \mathbb{N}$, niin määritelmä antaa saman avaruuden ekvivalentilla normilla kuin määritelmä 1.1 [**6**].

Määritellään mitä tarkoitetaan Sobolev-avaruudella joukossa $\partial\Omega$ positiivisella eksponentilla s. Negatiivinen eksponentti s määritellään tämän duaaliavaruutena. Sitä varten, olkoon $\partial\Omega \in C^k, p \in \partial\Omega, k \in \mathbb{N}_0$ ja h reunan määrittävä funktio (lause 1.20), jolloin merkitään

$$dS = (1+|\nabla h(x')|^2)^{1/2}\, dx'.$$

Lisäksi hyödynnetään reunan $\partial\Omega$ kompaktiutta, ykkösen ositusta sekä lauseen 1.20 antamaa reunan määrittävää funktiota.

Määritelmä 4.7. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu joukko, $\partial\Omega \in C^k$ ja $0 < s \leq k$. Koska $\partial\Omega$ on kompakti, on olemassa $p_i \in \partial\Omega$ ja $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$ siten, että

$$\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^k B(p_i, r_i).$$

Olkoot $h_i \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ lauseen 1.20 antamat reunan määrittävät funktiot sekä

$$f_i \in C_0^\infty(B(p_i,r_i)), 0 \leq f \leq 1 \text{ ja } \sum_{i=1}^k f_i(x) = 1.$$

Lisäksi funktiolle $u \in L^2(\partial\Omega) = L^2(\partial\Omega, dS)$ määritellään

$$u_{h_i}(x') = u(x', h_i(x')), x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Tällöin

$$H^s(\partial\Omega) = \{u \in L^2(\partial\Omega) \colon (f_i u)_{h_i} \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ kaikilla}\, i\}.$$

Varustetaan tämä avaruus sisätulolla

$$(u,v)_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{i=1}^k ((f_i u)_{h_i}, (f_i v)_{h_i})_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

ja normilla

$$||u||_{H^s(\partial\Omega)} = (u,u)^{1/2}_{H^s(\partial\Omega)}.$$

Olkoon $H^{-s}(\partial\Omega) = (H^s(\partial\Omega))^*$ ja varustetaan tämä avaruus normilla

$$||u||_{H^{-s}(\partial\Omega)} = \sup_{||\phi||_{H^s(\partial\Omega)}=1} u(\phi).$$

Todistetaan seuraavaksi muutama aputulos. Kyseisissä lemmoissa sovitaan, että

$$v_0 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad v_0(x) = \eta_M(x) h_N(x),$$

missä $h_N(x) = e^{N(i\alpha - e_n)\cdot x}$ ja $\eta_M(x) = \eta\,(Mx)$, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 1$, kun $x \in B(0,1/2)$ ja $\eta(x) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$. Oletetaan lisäksi, että joukon $\Omega \in \mathbb{R}^n$ reuna on litteä origon lähellä ja $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ on yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} (-\Delta + q)\, v_1 = -\,(-\Delta + q)\, v_0, & \text{kun } x \in \Omega \\ v_1 = 0, & \text{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Lemma 4.8. *Olkoon* Ω, v_0 *ja* v_1 *kuten yllä. Tällöin*

$$||v_1||_{H^1(\Omega)} = O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}M^2\right).$$

Todistus. Riittää näyttää, että $||-(-\Delta+q)v_0||_{H^{-1}(\Omega)} = O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}M^2\right)$, sillä

$$||v_1||_{H^1(\Omega)} \le C||-(-\Delta+q)v_0||_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Edelleen on yhtäpitävää osoittaa

$$\left|\int_\Omega (\nabla v_0\cdot\nabla\phi + qv_0\phi)\,dx\right| = O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}M^2\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}. \tag{4.6}$$

Paloitellaan edellinen integraali kahteen osaan

$$\int_\Omega (\nabla v_0\cdot\nabla\phi + qv_0\phi)\,dx = \int_\Omega (\nabla v_0\cdot\nabla\phi + q(0)v_0\phi)\,dx + \int_\Omega (q-q(0))v_0\phi\,dx. \tag{4.7}$$

Tutkitaan ensimmäistä integraalia

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\nabla v_0\cdot\nabla\phi + q(0)v_0\phi)\,dx \\
&= \int_\Omega h_N M(\nabla\eta)(M\,\cdot\,)\cdot\nabla\phi\,dx + \int_\Omega (\eta_M\nabla h_N\cdot\nabla\phi + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzin ja lemman 3.3 nojalla ensimmäinen integraali saadaan muotoon

$$M\left(\int_\Omega |h_N(\nabla\eta)(M\,\cdot\,)|^2\,dx\right)^{1/2}||\phi||_{H^1(\Omega)} \le C(\eta)M\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Tarkastelemalla puolestaan jälkimmäistä integraalia

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\eta_M\nabla h_N\cdot\nabla\phi + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx \\
&= \int_\Omega (\eta_M N(i\alpha-e_n)h_N\cdot\nabla\phi + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx \\
&= \int_\Omega (N((i\alpha-e_n)_1\eta_M h_N\partial_1\phi + \cdots + (i\alpha-e_n)_n\eta_M h_N\partial_n\phi) + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx.
\end{aligned}$$

Osittaisintegroidaan viimeistä riviä

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (N((i\alpha-e_n)_1\eta_M h_N\partial_1\phi + \cdots + (i\alpha-e_n)_n\eta_M h_N\partial_n\phi) + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx \\
&= -\int_\Omega (N\phi\sum_{j=1}^n((i\alpha-e_n)_j h_N\partial_j\eta_M + (i\alpha-e_n)_j\eta_M\partial_j h_N) + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx \\
&= -\int_\Omega (NM(i\alpha-e_n)\phi\cdot(\nabla\eta)(M\,\cdot\,)h_N + N^2(i\alpha-e_n)\cdot(i\alpha-e_n)\phi\eta_M h_N + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx \\
&= -\int_\Omega (NM(i\alpha-e_n)\phi\cdot(\nabla\eta)(M\,\cdot\,)h_N + \phi\eta_M h_N(N^2(i\alpha-e_n)\cdot(i\alpha-e_n) + q(0)))\,dx.
\end{aligned}$$

Käyttämällä tangenttivektorin α valintaa (4.5), päädytään yhtälöön

$$-\int_\Omega (NM(i\alpha - e_n)\phi \cdot (\nabla\eta)(M\,\cdot)h_N + \phi\eta_M h_N (\underbrace{N^2(i\alpha - e_n)\cdot(i\alpha - e_n) + q(0)}_{=0}))\,dx$$
$$= -\int_\Omega NM(i\alpha - e_n)\phi \cdot (\nabla\eta)(M\,\cdot)h_N\,dx.$$

Funktiolla h_N on ominaisuus $h_N = \frac{-1}{N}\partial_n h_N$. Sovelletaan tätä edelliseen, osittaisintegroidaan ja käytetään Cauchy-Schwarzia sekä lemmaa (3.3)

$$-\int_\Omega NM(i\alpha - e_n)\phi \cdot (\nabla\eta)(M\,\cdot)h_N\,dx$$
$$= \int_\Omega M(i\alpha - e_n)\phi \cdot (\nabla\eta)(M\,\cdot)\partial_n h_N\,dx$$
$$= -\int_\Omega M^2(i\alpha - e_n)h_N\phi \cdot (\nabla\partial_n\eta)(M\,\cdot)\,dx - \int_\Omega M(i\alpha - e_n)h_N \cdot (\nabla\eta)(M\,\cdot)\partial_n\phi\,dx$$
$$\leq MC\frac{M^{(3-n)/2}}{N^{1/2}}||\phi||_{H^1(\Omega)} + C\frac{M^{(3-n)/2}}{N^{1/2}}||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Saatiin siis

$$\int_\Omega (\eta_M \nabla h_N \cdot \nabla\phi + q(0)h_N\eta_M\phi)\,dx \leq MC\frac{M^{(3-n)/2}}{N^{1/2}}||\phi||_{H^1(\Omega)} + C\frac{M^{(3-n)/2}}{N^{1/2}}||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Käyttämällä lemmaa 3.3 kohdan (4.7) jälkimmäiseen integraaliin

$$\int_\Omega (q - q(0))v_0\phi\,dx \leq \sup_{x\in B(0,\frac{1}{M})} |q - q(0)| \left(\int_\Omega |v_0|^2\,dx\right)^{1/2} ||\phi||_{H^1(\Omega)}$$
$$\leq \sup_{x\in B(0,\frac{1}{M})} |q - q(0)|C(\eta)\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Lopulta

$$\int_\Omega (\nabla v_0 \cdot \nabla\phi + qv_0\phi)\,dx$$
$$\leq \left(CM\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}} + MC\frac{M^{(3-n)/2}}{N^{1/2}} + C\frac{M^{(3-n)/2}}{N^{1/2}} + C\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}$$
$$= C\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}\left(M^2 + 2M + 1\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}$$
$$= O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}M^2\right)||\phi||_{H^1(\Omega)}.$$

Nyt näytettiin (4.6), joka oli riittävä lemman todistukseen. □

Lemma 4.9. *Olkoon Ω ja v_0 kuten edellä. Tällöin*

$$||v_0||_{H^{-1}(\Omega)} = O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{3/2}}\frac{M^2}{N}\right).$$

Todistus. Käytetään normin $||\cdot||_{H^{-1}(\Omega)}$ määritelmää sen laskemiseen

$$||v_0||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||\phi||_{H_0^1(\Omega)}=1} \int_\Omega v_0\phi\, dx.$$

Olkoon $\phi \in H_0^1(\Omega)$ siten, että $||\phi||_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Nyt

$$\int_\Omega v_0\phi\, dx = \int_\Omega \eta_M h_N \phi\, dx = \frac{-1}{N}\int_\Omega \eta_M \partial_n h_N \phi\, dx,$$

koska

$$h_N = \frac{-1}{N}\partial_n h_N. \tag{4.8}$$

Osittaisintegroidaan viimeistä integraalia

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{N}\int_\Omega \eta_M\partial_n h_N\phi\, dx &= \frac{1}{N}\int_\Omega h_N\partial_n(\eta_M\phi)\, dx - \frac{1}{N}\underbrace{\int_{\partial\Omega} v_0\phi\nu_j\, dS}_{=0} \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega h_N\phi\partial_n\eta_M\, dx + \frac{1}{N}\int_\Omega h_N\eta_M\partial_n\phi\, dx. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Tutkitaan ensimmäistä integraalia. Käytetään ominaisuutta (4.8) ja osittaisintegroidaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\int_\Omega h_N\phi\partial_n\eta_M\, dx &= \frac{M}{N}\int_\Omega h_N\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\, dx \\
&= \frac{-M}{N^2}\int_\Omega \partial_n h_N\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\, dx \\
&= \frac{M}{N^2}\int_\Omega h_N\partial_n(\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,))\, dx \\
&= \frac{M}{N^2}\int_\Omega h_N\partial_n\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\, dx + \frac{M^2}{N^2}\int_\Omega h_N\phi\partial_n^2\eta(M\,\cdot\,))\, dx.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä kohtaan (4.9) ja käytetään Cauchy-Schwartzia

$$\begin{aligned}
&\frac{M}{N^2}\int_\Omega h_N\partial_n\phi\partial_n\eta(M\,\cdot\,)\, dx + \frac{M^2}{N^2}\int_\Omega h_N\phi\partial_n^2\eta(M\,\cdot\,))\, dx + \frac{1}{N}\int_\Omega h_N\eta_M\partial_n\phi\, dx \\
&\le ||\phi||_{H^1(\Omega)}\Bigg(\frac{M}{N^2}\left(\int_\Omega |h_N\partial_n\eta(M\,\cdot\,)|^2\, dx\right)^{1/2} + \frac{M^2}{N^2}\left(\int_\Omega |h_N\partial_n^2\eta(M\,\cdot\,))|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&+ \frac{1}{N}\left(\int_\Omega |h_N\eta_M|^2\, dx\right)^{1/2}\Bigg).
\end{aligned}$$

Lemman (3.3) nojalla

$$
\begin{aligned}
&||\phi||_{H^1(\Omega)}\Bigg(\frac{M}{N^2}\left(\int_\Omega |h_N\partial_n\eta(M\,\cdot)|^2\,dx\right)^{1/2}+\frac{M^2}{N^2}\left(\int_\Omega |h_N\partial_n^2\eta(M\,\cdot))|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&+\frac{1}{N}\left(\int_\Omega |h_N\eta_M|^2\,dx\right)^{1/2}\Bigg)\\
&\le ||\phi||_{H^1(\Omega)}\left(\frac{M}{N^2}C(\eta)\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}+\frac{M^2}{N^2}C(\eta)\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}+\frac{1}{N}C(\eta)\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}\right)\\
&=\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{3/2}}\left(\frac{M}{N}+\frac{M^2}{N}+1\right)C(\eta)||\phi||_{H^1(\Omega)}\\
&=O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{3/2}}\frac{M^2}{N}\right)||\phi||_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

jolloin ottamalla supremum, saadaan $||v_0||_{H^{-1}(\Omega)} = O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{3/2}}\frac{M^2}{N}\right)$. □

Lemma 4.10. *Olkoon Ω ja v_0 kuten edellä. Tällöin*

$$||v_0||_{L^2(\partial\Omega)} = O(M^{(1-n)/2}).$$

Todistus. Koska funktio v_0 on keskittynyt origon ympäristöön ja oletetaan joukon Ω reunan olevan litteä origon ympäristössä, saadaan

$$
\begin{aligned}
||v_0||^2_{L^2(\partial\Omega)} &= \int_{\partial\Omega}|v_0|^2\,dS = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}|v_0(x',0)|^2\,dx'\\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\eta_M(x',0)e^{iN\alpha\cdot x}|^2\,dx'\\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\eta_M(x',0)|^2\,dx'.
\end{aligned}
$$

Tehdään muuttujanvaihto, jossa skaalataan muuttuja x', jolloin

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\eta_M(x',0)|^2\,dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}M^{1-n}|\eta(x',0)|^2\,dx' = M^{1-n}C(\eta).$$

Täten $||v_0||_{L^2(\partial\Omega)} = M^{(1-n)/2}C(\eta)$. □

Lemma 4.11. *Olkoon Ω ja v_0 kuten edellä. Tällöin*

$$||v_0||_{H^{-2}(\partial\Omega)} = O\left(\frac{M^{(n-1)/2}}{N^2}\frac{M^4}{N^2}\right).$$

Todistus. Käytetään normin $||\cdot||_{H^{-2}(\partial\Omega)}$ määritelmää sen laskemiseen. Lisäksi koska funktio v_0 on keskittynyt origon ympäristöön ja oletetaan joukon Ω reunan olevan litteä origon ympäristössä, saadaan

$$||v_0||_{H^{-2}(\partial\Omega)} = \sup_{||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}=1}\int_\Omega v_0\phi\,dS = \sup_{||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}=1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_0\phi\,dx'.$$

Aloitetaan laskemaan viimeistä integraalia. Sitä varten valitaan $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, jolle $\alpha_j \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_0 \phi \, dx' &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_M(x',0) e^{iN\alpha\cdot x} \phi \, dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_M(x',0) \frac{1}{iN\alpha_j} \partial_j e^{iN\alpha\cdot x} \phi \, dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_M(x',0) \frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \partial_j^2 e^{iN\alpha\cdot x} \phi \, dx',\end{aligned}$$

missä käytettiin funktion $e^{iN\alpha\cdot x}$ ominaisuutta

$$e^{iN\alpha\cdot x} = \frac{1}{iN\alpha_j} \partial_j e^{iN\alpha\cdot x}. \tag{4.10}$$

Osittaisintegroidaan kahdesti saatua integraalia

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_M(x',0) \frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \partial_j^2 e^{iN\alpha\cdot x} \phi \, dx' \\ &= -\frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j(\eta_M(x',0)\phi) \partial_j e^{iN\alpha\cdot x} \, dx' + \underbrace{\int_{\partial B(0,\frac{1}{M})} \eta_M(x',0) \partial_j e^{iN\alpha\cdot x} \phi \nu_j \, dS}_{=0} \right) \\ &= \frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j^2(\eta_M(x',0)\phi) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx' - \underbrace{\int_{\partial B(0,\frac{1}{M})} \partial_j(\eta_M(x',0)\phi) e^{iN\alpha\cdot x} \nu_j \, dS}_{=0} \right) \\ &= \frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j^2(\eta_M(x',0)\phi) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx'.\end{aligned}$$

Suoritetaan osittaisderivointi

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j^2(\eta_M(x',0)\phi) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx' \\ &= \frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j(\phi\partial_j\eta_M(x',0) + \eta_M(x',0)\partial_j\phi) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx' \\ &= \frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\phi\partial_j^2\eta_M(x',0) + 2\partial_j\eta_M(x',0)\partial_j\phi + \eta_M(x',0)\partial_j^2\phi) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx'. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Käsitellään saadut termit yksi kerrallaan. Aloitetaan ensimmäisestä käyttämällä ominaisuutta (4.10) kaksi kertaa, jolloin

$$\frac{-1}{N^2\alpha_j^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi\partial_j^2\eta_M(x',0) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx' = \frac{M^2}{N^4\alpha_j^4} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi\partial_j^2\eta(M\,\cdot,0) \partial_j^2 e^{iN\alpha\cdot x} \, dx'.$$

Osittaisintegroimalla edellistä kahdesti

$$\begin{aligned}&\frac{M^2}{N^4\alpha_j^4} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi\partial_j^2\eta(M\,\cdot,0) \partial_j^2 e^{iN\alpha\cdot x} \, dx' = \frac{M^2}{N^4\alpha_j^4} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j^2(\phi\partial_j^2\eta(M\,\cdot,0)) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx' \\ &= \frac{M^2}{N^4\alpha_j^4} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (M^2\phi\partial_j^4\eta(M\,\cdot,0) + 2M\partial_j^3\eta(M\,\cdot,0)\partial_j\phi + \partial_j^2\eta(M\,\cdot,0)\partial_j^2\phi) e^{iN\alpha\cdot x} \, dx'.\end{aligned}$$

Käytetään Cauchy-Schwartzia edelliseen ja arvioidaan jäljelle jääviä integraaleja kuten lemman 4.10 todistuksessa

$$\frac{M^2}{N^4\alpha_j^4}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(M^2\phi\partial_j^4\eta(M\cdot,0)+2M\partial_j^3\eta(M\cdot,0)\partial_j\phi+\partial_j^2\eta(M\cdot,0)\partial_j^2\phi)e^{iN\alpha\cdot x}\,dx'$$
$$\leq \frac{M^2}{N^4\alpha_j^4}||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}\left(M^2\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\partial_j^4\eta(M\cdot,0)|^2\,dx'\right)^{1/2}+2M\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\partial_j^3\eta(M\cdot,0)|^2\,dx'\right)^{1/2}\right.$$
$$\left.+\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\partial_j^2\eta(M\cdot,0)|^2\,dx'\right)^{1/2}\right)$$
$$\leq \frac{M^2}{N^4\alpha_j^4}||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}M^{(1-n)/2}C(\eta)\left(M^2+2M+1\right).$$

Tutkitaan seuraavaksi kohdan (4.11) toista termiä. Käytetään aluksi ominaisuutta (4.10) ja osittaisintegroidaan

$$\frac{-1}{N^2\alpha_j^2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}2\partial_j\eta_M(x',0)\partial_j\phi e^{iN\alpha\cdot x}\,dx'=\frac{M}{N^3i\alpha_j^3}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}2\partial_j\eta(M\cdot,0)\partial_j\phi\partial_j e^{iN\alpha\cdot x}\,dx'$$
$$=\frac{-2M}{N^3i\alpha_j^3}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(M\partial_j^2\eta(M\cdot,0)\partial_j\phi+\partial_j\eta(M\cdot,0)\partial_j^2\phi)e^{iN\alpha\cdot x}\,dx'.$$

Kuten edellä, Cauchy-Schwartzin ja lemman 4.10 nojalla

$$\frac{-2M}{N^3i\alpha_j^3}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(M\partial_j^2\eta(M\cdot,0)\partial_j\phi+\partial_j\eta(M\cdot,0)\partial_j^2\phi)e^{iN\alpha\cdot x}\,dx'$$
$$\leq \frac{-2M}{N^3i\alpha_j^3}||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}\left(M\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\partial_j^2\eta(M\cdot,0)|^2\,dx'\right)^{1/2}+\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\partial_j\eta(M\cdot,0)|^2\,dx'\right)^{1/2}\right)$$
$$\leq \frac{-2M}{N^3i\alpha_j^3}||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}M^{(n-1)/2}C(\eta)(M+1).$$

Kohdan (4.11) viimeinen termi saadaan Cauchy-Schwartzin ja lemman 4.10 avulla muotoon

$$\frac{-1}{N^2\alpha_j^2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta_M(x',0)\partial_j^2\phi e^{iN\alpha\cdot x}\,dx'\leq\frac{-1}{N^2\alpha_j^2}||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\eta_M(x',0)|^2\,dx'\right)^{1/2}$$
$$\leq\frac{-1}{N^2\alpha_j^2}||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}C(\eta)M^{(n-1)/2}$$

Yhdistämällä edellä tehdyt päättelyt, saadaan

$$\frac{-1}{N^2\alpha_j^2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_j^2(\eta_M(x',0)\phi)e^{iN\alpha\cdot x}\,dx'$$
$$\leq C\frac{1}{N^2}||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}M^{(n-1)/2}\left(1+\frac{M(M+1)}{N}+\frac{M^2(M^2+2M+1)}{N^2}\right)$$
$$=O\left(\frac{M^{(n-1)/2}}{N^2}\frac{M^4}{N^2}\right)||\phi||_{H^2(\partial\Omega)}$$

Ottamalla supremum, saadaan $||v_0||_{H^{-2}(\partial\Omega)}=O\left(\frac{M^{(n-1)/2}}{N^2}\frac{M^4}{N^2}\right)$. □

Edellä olevien lemmojen avulla voidaan todistaa lause 4.5 ja sen seurauksena tämän luvun päätulos, eli potentiaalin q konstruointi reunamittausten avulla (lause 4.4).

Lauseen 4.5 todistus. Määritellään funktiot

$$h_N(x) = e^{N(i\alpha\cdot x - \rho(x))}, \quad \eta_M(x) = \eta\left(Mx\right),$$

missä $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta(x) = 1$ kun $x \in B(0,1/2)$ ja $\eta(x) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$.

Olkoon

$$v_0 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad v_0(x) = \eta_M(x) h_N(x).$$

Tällöin $v_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\operatorname{spt}(v_0) \subset B(0,1/M)$, koska $\operatorname{spt}(\eta_M) \subset B(0,1/M)$. Funktio v_0 on approksimoiva ratkaisu Schrödingerin yhtälölle $\left(-\Delta + q(0)\right) u = 0$, joka approksimoi yhtälöä $(-\Delta + q)u = 0$ origon ympäristössä.

Tämän approksimoivan ratkaisun lisäksi hyödynnetään yksikäsitteistä ratkaisua reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} \left(-\Delta + q\right) u = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ u = f_0, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

missä $f_0 = v_0|_{\partial\Omega}$. Tällöin $f_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, koska $v_0 \in H^1(\Omega)$. Lauseesta 1.17 seuraa yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo, sillä oletetaan, että 0 ei ole Dirichlet'n ominaisarvo Schrödingerin operaattorille joukossa Ω.

Olkoon tämä ratkaisu $v \in H^1(\Omega)$ ja merkitään $v = v_0 + v_1$, jolloin $v_1 = v - v_0$. Koska v on ratkaisu edelliselle reuna-arvo-ongelmalle, niin

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \left(\nabla(v_0+v_1)\cdot\nabla\overline{u} + q(v_0+v_1)\overline{u}\right)\,dx \\ &= \int_\Omega \left(\nabla v_0\cdot\nabla\overline{u} + qv_0\overline{u}\right)\,dx + \int_\Omega \left(\nabla v_1\cdot\nabla\overline{u} + qv_1\overline{u}\right)\,dx \\ \iff \int_\Omega \left(\nabla v_1\cdot\nabla\overline{u} + qv_1\overline{u}\right)\,dx &= -\int_\Omega \left(\nabla v_0\cdot\nabla\overline{u} + qv_0\overline{u}\right)\,dx \end{aligned}$$

ja

$$v_1|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} - v_0|_{\partial\Omega} = v_0|_{\partial\Omega} - v_0|_{\partial\Omega} = 0.$$

Funktio $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ on siis yksikäsitteinen ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} \left(-\Delta + q\right) v_1 = -\left(-\Delta + q\right) v_0, & \text{kun } x \in \Omega \\ v_1 = 0, & \text{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Olkoon

$$u_M = C_{M,N} v, \text{ missä } C_{M,N} = \sqrt{\frac{NM^{n-1}}{C(\eta)}}.$$

Tällöin jonon $(u_M) \subset H^1(\Omega)$ alkiot ovat ratkaisuja Schrödingerin yhtälölle ja

$$\lim_{M\to\infty} \int_\Omega q|u_M|^2\,dx = q(x_0). \tag{4.12}$$

Lisäksi kun valitaan $f_M = u_M|_{\partial\Omega}$, niin $f_M \in C^1(\partial\Omega)$ jokaisella M ja $\operatorname{spt}(f_M) \subset B\left(x_0, 1/M\right) \cap \partial\Omega$.

Näytetään, että ehto (4.12) todella pätee. Nyt

$$\begin{aligned}\int_\Omega q|u_M|^2\,dx &= C_{M,N}^2\int_\Omega q|v_0+v_1|^2\,dx\\ &= C_{M,N}^2\int_\Omega q\left(|v_0|^2+v_0\overline{v_1}+v_1\overline{v_0}+|v_1|^2\right)\,dx\\ &= C_{M,N}^2\int_\Omega q|v_0|^2\,dx + C_{M,N}^2\int_\Omega q\left(v_0\overline{v_1}+v_1\overline{v_0}+|v_1|^2\right)\,dx.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Tutkitaan näistä ensimmäistä integraalia

$$C_{M,N}^2\int_\Omega q|v_0|^2\,dx = C_{M,N}^2\int_\Omega q(0)|v_0|^2\,dx + C_{M,N}^2\int_\Omega (q-q(0))|v_0|^2\,dx.\tag{4.14}$$

Näistä jälkimmäinen on muotoa $o(1)$, sillä

$$\begin{aligned}C_{M,N}^2\int_\Omega (q-q(0))|v_0|^2\,dx &\le C_{M,N}^2\sup_{x\in B(0,1/M)}|q(x)-q(0)|\int_\Omega |v_0|^2\,dx\\ &= C_{M,N}^2\sup_{x\in B(0,1/M)}|q(x)-q(0)|\int_\Omega \eta_M^2 e^{-2N\rho(x)}\,dx\\ &\le C_{M,N}^2 C(\eta)M^{1-n}N^{-1}\sup_{x\in B(0,1/M)}|q(x)-q(0)|\\ &= \sup_{x\in B(0,1/M)}|q(x)-q(0)| = o(1),\end{aligned}$$

kun $M\to\infty$, koska funktio q on jatkuva.

Tarkastellaan kohdan (4.14) ensimmäistä integraalia. Lemman 3.3 nojalla

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} C_{M,N}^2\int_\Omega q(0)|v_0|^2\,dx &= \lim_{M\to\infty}\frac{q(0)}{C(\eta)}NM^{n-1}\int_\Omega \eta_M^2 e^{-2N\rho(x)}\,dx\\ &= \frac{q(0)}{C(\eta)}C(\eta) = q(0).\end{aligned}$$

Vielä tulee näyttää, että kohdan (4.13) jälkimmäinen integraali on muotoa $o(1)$. Muokataan integraalia hieman;

$$\begin{aligned}&C_{M,N}^2\int_\Omega q\left(v_0\overline{v_1}+v_1\overline{v_0}+|v_1|^2\right)\,dx\\ &\le C_{M,N}^2\sup_{x\in\Omega}q(x)\left((v_0,v_1)_{L^2(\Omega)}+(v_1,v_0)_{L^2(\Omega)}+||v_1||_{L^2(\Omega)}^2\right)\\ &\le C_{M,N}^2\sup_{x\in\Omega}q(x)\left(2||v_0||_{L^2(\Omega)}||v_1||_{L^2(\Omega)}+||v_1||_{L^2(\Omega)}^2\right)\\ &= C_{M,N}^2\sup_{x\in\Omega}q(x)\left(2||v_0||_{L^2(\Omega)}+||v_1||_{L^2(\Omega)}\right)||v_1||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Riittää siis osoittaa $C_{M,N}^2||v_1||_{L^2(\Omega)} = o(1)$.

Arvioidaan funktion v_1 normia $||v_1||_{L^2(\Omega)}$ useammassa palassa. Erityisesti halutaan funktion v_1 normin olevan pienempää kuin funktion v_0 normi.

Interpolaatiolauseen [**3**, Lemma C.3.2] nojalla

$$||v_1||_{L^2(\Omega)} \le ||v_1||_{H^1(\Omega)}^{1/2}||v_1||_{H^{-1}(\Omega)}^{1/2} = ||v_1||_{H^1(\Omega)}^{1/2}||v_1+v_0-v_0||_{H^{-1}(\Omega)}^{1/2}$$

Ensimmäistä normia on arvioitu lemmassa 4.8. Jälkimmäinen normi saadaan muotoon

$$||v_1 + v_0 - v_0||_{H^{-1}(\Omega)} \leq ||v||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v_0||_{H^{-1}(\Omega)},$$

asettamalla $v = v_0 + v_1$. Tällöin funktio v on ratkaisu yhtälölle $(-\Delta + q)v = 0$. Normia $||v_0||_{H^{-1}(\Omega)}$ on arvioitu lemmassa 4.9. Lisäksi

$$||v||_{H^{-1}(\Omega)} \leq C||v||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} = C||v_0||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}. \tag{4.15}$$

Todistetaan tämä. Aloitetaan normin $|| \cdot ||_{H^{-1}(\Omega)}$ määritelmästä

$$||v||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||w||_{H_0^1(\Omega)}=1} \int_\Omega vw\,dx.$$

Olkoon $w \in H_0^1(\Omega)$, $||w||_{H^1(\Omega)} = 1$ ja ratkaistaan yhtälö

$$\begin{cases} (-\Delta + q)\,\phi = w, & \text{kun } x \in \Omega \\ \phi = 0, & \text{kun } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Tällöin $\phi \in H^3(\Omega)$ ([**2**, Theorem 5. s. 340]) ja

$$||\phi||_{H^3(\Omega)} \leq C||w||_{H^1(\Omega)} = C.$$

Nyt

$$\int_\Omega vw\,dx = \int_\Omega v(-\Delta + q)\phi\,dx = \int_\Omega -v\Delta\phi\,dx + \int_\Omega qv\phi\,dx$$

ja osittaisintegroimalla tätä, saadaan

$$\begin{aligned} \int_\Omega vw\,dx &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\phi\,dx - \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu\phi\,dS + \int_\Omega qv\phi\,dx \\ &= \underbrace{\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla\phi + qv\phi)\,dx}_{=0} - \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu\phi\,dS, \end{aligned}$$

jolloin Trace-lauseen [**3**, Theorem C.2.2] nojalla

$$\begin{aligned} \int_\Omega vw\,dx &\leq ||v||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}||\partial_\nu\phi||_{H^{3/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq ||v||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}||\nabla\phi|_{\partial\Omega}||_{H^{3/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq ||v||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}C||\nabla\phi||_{H^2(\Omega)} \\ &\leq ||v||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}C||\phi||_{H^3(\Omega)} \\ &\leq C||v||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Koska $v = v_0$ joukon Ω reunalla, niin

$$||v||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} = ||v_0||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)},$$

joten ollaan näytetty arvio (4.15).

Ollaan saatu

$$||v_1||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||v_1||_{H^1(\Omega)} \left(||v_0||_{H^{-1}(\Omega)} + C||v_0||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}\right)$$

eli pitää arvioida vielä normia $||v_0||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}$. Normin $||\cdot||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}$ logaritmisen konveksiuden [**3**, C.1.44] nojalla

$$||v_0||_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} \leq C||v_0||^{1/4}_{L^2(\partial\Omega)}||v_0||^{3/4}_{H^{-2}(\partial\Omega)}$$

ja näille on laskettu arviot lemmoissa 4.10 ja 4.11.

Yhdistämällä edellä olevat päättelyt ollaan saatu arvio normille $||v_1||^2_{L^2(\Omega)}$, jolloin

$$\begin{aligned}
||v_1||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||v_1||_{H^1(\Omega)}\left(||v_0||_{H^{-1}(\Omega)} + C\left(||v_0||^{1/4}_{L^2(\partial\Omega)}||v_0||^{3/4}_{H^{-2}(\partial\Omega)}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{M^{(1-n)/2}}{N^{1/2}}M^2\left(\frac{M^{(1-n)/2M^2}}{N^{3/2}N} + \left(M^{(1-n)/8}M^{(3(1-n)/8}\frac{M^3}{N^3}\right)\right)\right) \\
&= O\left(\frac{M^{1-n}(M^4N^{1/2}+M^5)}{N^{7/2}}\right).
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
C^2_{M,N}||v_1||_{L^2(\Omega)} &= \frac{NM^{n-1}}{C(\eta)}O\left(\frac{M^{(1-n)/2}(M^4N^{1/2}+M^5)^{1/2}}{N^{7/4}}\right) \\
&= O\left(\frac{M^{(n+1)/2}(M^4N^{1/2}+M^5)^{1/2}}{N^{3/4}}\right) = o(1),
\end{aligned}$$

valitsemalla $N = M^\beta, \beta > 1$, siten, että $\frac{M^{(n+1)/2}(M^4N^{1/2}+M^5)^{1/2}}{N^{3/4}} = o(1)$. Väite saatiin näin todistettua. □

Lauseen 4.4 todistus. Olkoon u_M kuten lauseessa 4.5, jolloin funktiolle $f_M := u_M|_{\partial\Omega}$ pätee $f_M \in C^1(\partial\Omega)$, $\mathrm{spt}(f_M) \subset B(x_0, 1/M) \cap \Omega$ ja se ei riipu funktiosta q. Koska u_M on yksikäsitteinen ratkaisu Dirichlet'n reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} (-\Delta + q)\, v = 0, & \text{kun } x \in \Omega \\ v = f_M, & \text{kun } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

niin lauseen 4.3 nojalla

$$\lim_{M\to\infty}\langle(\Lambda_q - \Lambda_0)\,u_M, \bar{u}_M\rangle_{\partial\Omega} = \lim_{M\to\infty}\int_\Omega q|u_M|^2\,dx = q(x_0).$$

□

Kirjallisuutta

[1] Alberto P. Calderón: *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matemática, Río de Janeiro, 1980.

[2] Lawrence C. Evans: *Partial Differential Equations*, Second edition, American Mathematical Society, 2010.

[3] Joel Feldman, Mikko Salo ja Gunther Uhlmann: *The Calderón Problem - An Introduction to Inverse Problems*, julkaisematon.

[4] David S. Holder: *Electrical Impedance Tomography; Methods, History and Applications*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2005.

[5] Pekka Koskela, *Sobolev-avaruudet*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2018.

[6] William McLean *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, 2000

[7] John M. Lee *Introduction to Smooth Manifolds*, Department of Mathematics, University of Washington, 2003.

[8] Jonathan Newell, Davis Isaacson ja Jennifer Mueller: *Electrical Impedance Tomography*, IEEE Trans. Med. Imaging. 21. 553-554, 2002.

[9] Jouni Parkkonen *Funktionaalianalyysi*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2018

[10] Terence Tao *The Schrödinger equation*, Princeton Companion to Mathematics article `https://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/schrodinger.pdf`, 2007