Geometriaa vektoreilla

Maria Suomela

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2020

Tiivistelmä: Maria Suomela, *Geometriaa vektoreilla*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 37 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2020.

Tutkielman tarkoituksena on perehdyttää lukija vektoreiden pohjalta luotuun geometriaan. Monesti geometriasta puhuttaessa tulee ensimmäisenä mieleen aksiomaattinen geometria kuten Eukleideen tai Hilbertin luomat aksiomaattiset järjestelmät, mutta tässä tutkielmassa näkökulma on erilainen. Geometriaa on alettu kehittämään jo ennen ajanlaskun alkua, mutta vektoreihin perustuva geometria on kehitetty vasta 1800-luvun loppupuolella.

Tutkielma jakautuu kolmeen osaan, jossa ensimmäinen osa käsittelee yhdensuuntaisia suoria ja eri suorilla olevien pisteiden välisiä jakosuhteita. Suorat ovat geometriassa usein lähtökohtana ja siksi niihin on hyvä syventyä ennen geometrian muita osa-alueita. Monissa tämän tutkielman todistuksissa otetaan apuvälineeksi käyttöön jakosuhteet, joten aluksi on hyvä tutustua niiden ominaisuuksiin.

Toisessa osassa keskitytään kolmioihin ja niiden ominaisuuksiin. Kolmen eri suoran leikkauspisteistä saadaan aikaan kolmio, joten suoriin perehtymisen jälkeen kolmio on jatkumoa edelliselle osalle. Kolmioille on olemassa monia tunnettuja lauseita, joita tässäkin tutkielmassa tarkastellaan. Näitä ovat muun muassa Cevan lause sekä kolmioiden yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuussäännöt.

Kolmas osa jatkaa kolmioiden ominaisuuksista, sillä osassa tutustutaan ja perehdytään kolmion merkillisiin pisteisiin. Kolmion merkilliset pisteet syntyvät kolmion sivujen ja/tai kulmien välille muodostuvien janojen tai niiden jatkeiden leikkauspisteistä. Tässä tutkielmassa esitellään neljä kolmion merkillistä pistettä, joista ensimmäinen muodostuu kolmion korkeusjanojen leikkauspisteenä, toinen on kolmion keskijanojen leikkauspiste ja kolmas kolmion merkillinen piste syntyy kolmion keskinormaalien leikkauspisteistä. Näiden kolmen kolmion merkillisen pisteen kautta kulkee Eulerin suoraksi kutsuttu suora. Neljäs kolmion merkillisistä pisteistä, joka ei sisälly Eulerin suoraan, muodostuu kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteeseen.

Sisältö

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on tuoda perinteiseen geometriaan uutta näkökulmaa. Monesti geometriaa lähdetään tekemään aksiomaattisin perustein mutta tässä tutkielmassa tehdään tuttuja aksiomaattisen geometrian tuloksia vektoreiden pohjalta. Aksiomaattisen geometrian tulokset ja todistukset ovat usein vaikeasti luettavia ja sisältävät pitkiä selityksiä. Tämä osittain johtuu siitä, että kyseinen geometria on luotu jo 200-luvulla eaa. Pohjan aksiomaattiselle geometrialle loi Eukleides viidellä aksioomallaan, joita on myöhemmin laajennettu. Nykypäivän aksiomaattinen geometria pohjautuu Hilbertin 20 aksioomaan, jotka hän julkaisi vuonna 1899, eli noin 2000 vuotta alkuperäisiä myöhemmin.

Vaikka aksiomaattista geometriaa on päivitetty paljon, ei pitkien lauseiden monimutkaisuus ole kadonnut. Vektorit ovat paljon uudempi keksintö kuin geometrian aksioomat. 1830-luvulla Hamilton yhdisti kompleksilukuihin vektorimerkinnän, jossa kompleksilukua kuvaa lukupari. Vektorit olivat aluksi fyysikoiden käytössä ja vasta seuraavalla vuosisadalla kehitettiin omat aksioomat vektoreille ja vektoriavaruuksille.

Vektoreiden pohjalta luotu geometria on suoraviivaisempaa, eikä aksiomaattisen geometrian tyyppisiä selityksiä esiinny, jolloin tämän tutkielman geometria on omalta osaltaan helpommin sisäistettävissä. Aksiomaattiset ja vektoreiden pohjalta tehdyt todistukset voivat erotakin suuresti toisistaan niin tyyliltään kuin pituudeltaankin. Aksiomaattiset todistukset tukeutuvat vahvasti geometriaan ja kyseiset todistukset aukeavatkin usein kuvan avulla, jolloin itse todistuksen syntymiseen voi mennä pitkäkin aika. Toisaalta vektoreilla tehdyssä geometriassa itse geometria saattaa hukkua todistuksissa pitkiin laskuihin, eivätkä ne juurikaan selitä geometriaa. Esimerkiksi tässäkin tutkielmassa esiintyvät kolmioiden yhdenmuotoisuuteen liittyvät tulokset sisältävät pitkiä laskuvaiheita, joissa geometria jää taka-alalle. Aksiomaattisessa geometriassa kolmioiden yhdenmuotoisuuden todistukset ovat lyhyempiä ja selkeämpiä. Tosaalta kulmiin liittyävät tulokset ovat aksiomaattisessa järjestelmässä usein pitkien selitysten avulla todistettavissa, kun taas vektorigeometriassa kulmat voidaan laskea lyhyellä laskulla.

Vektorigeometria ja aksiomaattinen geometria ovat vahvasti kytköksissä toisiinsa, sillä jos vektoriavaruuden aksioomiin lisätään sisätulo, pystytään muodostamaan euklidinen tasogeometria. Geometria, jossa käytetään vektoreita, on yleistettävissä monissa tuloksissa useampiulotteisiin tapauksiin toisin kuin aksiomaattinen geometria. Geometrian lisäksi vektoreiden aksioomia voidaan käyttää myös muissa matematiikan aloissa, kun taas esimerkiksi useimmat Hilbertin aksioomat soveltuvat vain geometriaan.

Tutkielmassa päälähteenä on käytetty Agricolan ja Friedrichin kirjoittamaa opetukseen tarkoitettua kirjaa nimeltä Elementary Geometry [**1**]. Suurin osa tutkielman tuloksista pohjautuu kyseiseen kirjaan. Lisäksi tutkielmassa esiintyvä historia on peräisin Carl Boyerin kirjoista Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia osat 1 [**2**] ja 2 [**3**] sekä Ostermannin ja Wannerin kirjaan Geometry by Its History [**4**]. Johdannossa aksiomaattisen geometrian ja vektorigeometrian vertailuun on käytetty apuna Stillwellin kirjaa The Four Pillars of Geometry[**5**].

Ensimmäisessä luvussa esitellään tutkielman kannalta hyödyllisiä määritelmiä. Luvun kaksi kaikki tulokset liittyvät jollain tavalla yhdensuuntaisiin suoriin. Ensimmäisiin tuloksiin liittyy vahvasti jakosuhteet ja luvussa esitellään tutkielman kaksi ensimmäistä päätulosta, jotka ovat Pappoksen lause sekä Desarguesin lause. Lauseet muistuttavat toisiaan, sillä lauseiden johtopäätös on sama ja vain lauseiden oletukset poikkeavat toisistaan.

Kolmas luku perustuu kolmioihin. Luvun alussa on kolme tulosta, jotka ovat hyödyksi tulevissa todistuksissa. Tämän jälkeen käsitellään sitä, mikä tekee kolmioista yhteneviä tai yhdenmuotoisia. Lopuksi esitellään tutkielman seuraavat kaksi päätulosta, Menelauksen sekä Cevan lause. Pappoksen ja Desarguesin lauseiden tapaan, myös nämä lauseet muistuttavat toisiaan, sillä molemmissa tuloksissa on sama jakosuhteiden kertolasku. Neljäs luku on jatkoa kolmannelle luvulle, sillä viimeisessä luvussa esitellään kolmion merkillisiä pisteitä. Näiden lisäksi muotoillaan ja todistetaan tutkielman viimeinen päätulos, joka on Eulerin suora. Kyseinen suora sisältää kolme merkillistä pistettä.

LUKU 1

Määritelmiä ja merkintöjä

Tämän luvun tarkoituksena on johdatella tutkielman aiheeseen avaamalla tutkielmassa käytettäviä määritelmiä ja muita merkintöjä. Määritetään aluksi, mitä tarkoitetaan suoralla, janalla ja vektorilla, joihin tutkielma perustuu. Tämän jälkeen esitellään muutamia tässä tutkielmassa hyödyllisiä apuvälineitä, jotka ovat useasti esiintyvät janan pituus, jakosuhde, vektoreiden ja suorien yhdensuuntaisuus sekä näiden välinen kulma kosinin avulla.

Olkoot $A = (x_1, x_2)$ ja $B = (y_1, y_2)$ tason pisteitä. Tällöin

$$A + B = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2)$$

ja kun $a \in \mathbb{R}$, niin

$$a\,A = a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2).$$

Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on

$$S(A, B) = \{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Lisäksi määritellään pisteiden A ja B välinen jana suoran avulla

$$AB = \{A + t(B - A) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Janan AB pituus on $|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$. Määritellään vektori kahden pisteen erotuksena

$$\overrightarrow{AB} = B - A = -(A - B) = -\overrightarrow{BA}.$$

Voidaan merkitä $\overrightarrow{OA} = A - O = A$, missä $O = (0, 0)$. Lisäksi vektoreiden $A = (x_1, x_2)$ ja $B = (y_1, y_2)$ pistetulo on

$$A \cdot B = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Pistetulolla ja janan pituudella on seuraava yhteys

$$|AB|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Olkoot kolme eri pistettä A, B ja C samalla suoralla. Tällöin vektori $\overrightarrow{AC}$ voidaan ilmaista vektorin $\overrightarrow{BC}$ avulla

$$\overrightarrow{AB} = \frac{AB}{BC}\overrightarrow{BC},$$

missä luku $\dfrac{AB}{BC} \in \mathbb{R}$ on *jakosuhde*. Jakosuhde on positiivinen jos ja vain jos piste C on pisteiden A ja B välissä ja jakosuhde on negatiivinen jos ja vain jos piste C ei ole pisteiden A ja B välissä. Jakosuhteille pätevät seuraavat ominaisuudet

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{BA}{BC} \quad \text{ja} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{BA}{CB}.$$

Lisäksi

$$\left|\frac{AB}{BC}\right| = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Olkoot $S(A,B)$ ja $S(C,D)$ eri suoria, joille pätee

$$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{CD},$$

missä $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Tällöin suorat $S(A,B)$ ja $S(C,D)$ ovat yhdensuuntaiset sekä vektorit $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat yhdensuuntaiset. Lisäksi voidaan sanoa vektoreiden olevan samansuuntaiset, jos $t > 0$ ja vastakkaissuuntaiset, jos $t < 0$. Vastaavasti janat AB ja CD ovat yhdensuuntaisia, jos ne ovat kahden yhdensuuntaisen suoran osia. Lisäksi suoralle $S(A,B)$ voidaan määrittää merkkiä vaille yksikäsitteinen suuntavektori

$$\overrightarrow{d} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}.$$

Vektoreiden $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ välinen kulma $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ saadaan kaavasta

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|AB||CD|}.$$

Vastaavasti suorien $S(A,B)$ ja $S(C,D)$ välinen kulma $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ määräytyy vektorien avulla kaavasta

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|AB||CD|}.$$

Suorat ovat kohtisuorassa, jos $\theta = 90^\circ$ eli kun $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}| = 0$.

LUKU 2

Suorien ominaisuuksista

Luvussa käsitellään suorien ominaisuuksia eivätkä tämän luvun tulokset riipu kulmista. Suorien ominaisuuksilla tarkoitetaan esimerkiksi sitä, mitä suorien yhdensuuntaisuudesta seuraa ja milloin suorat eivät ole yhdensuuntaiset. Tässä luvussa esitellään myös Pappoksen ja Desarguesin lauseet, jotka eivät liity etäisyyksiin vaan ovat projektiivisia tuloksia. Kaikissa luvun lauseissa on mukana yhdensuuntaiset suorat, osassa tuloksista oletetaan suorien yhdensuuntaisuus, osassa taas oletuksista seuraa suorien yhdensuuntaisuus.

2.1. Yhdensuuntaiset suorat ja leikkauspisteiden suhteet

Muotoillaan ja todistetaan aluksi hyödyllisiä tuloksia, joista ensimmäisessä suorien yhdensuuntaisuudesta seuraa leikkaavien suorien leikkauspisteiden välisten pituuksien suhteiden pysyminen samana. Toisessa tuloksessa taas suorien yhdensuuntaisuuden avulla saadaan selville jakosuhteiden kautta, missä järjestyksessä pisteet ovat toisiinsa nähden.

Lause 2.1. *Olkoot P, P_1 ja P_2 pisteitä ja olkoot $S(P, P_1)$ ja $S(P, P_2)$ suoria. Lisäksi olkoot $P_3 \in S(P, P_1)$ ja $P_4 \in S(P, P_2)$ pisteitä siten, että suora $S(P_3, P_4)$ on yhdensuuntainen suoran $S(P_1, P_2)$ kanssa. Tällöin*

$$\frac{|PP_1|}{|PP_3|} = \frac{|P_1P_2|}{|P_3P_4|} = \frac{|PP_2|}{|PP_4|}.$$

Todistus. Koska $P_3 \in S(P, P_1)$ ja $P_4 \in S(P, P_2)$, niin suoran määritelmän nojalla on olemassa luvut $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $P_3 = P + t_1(P_1 - P), P_4 = P + t_2(P_2 - P)$, josta saadaan

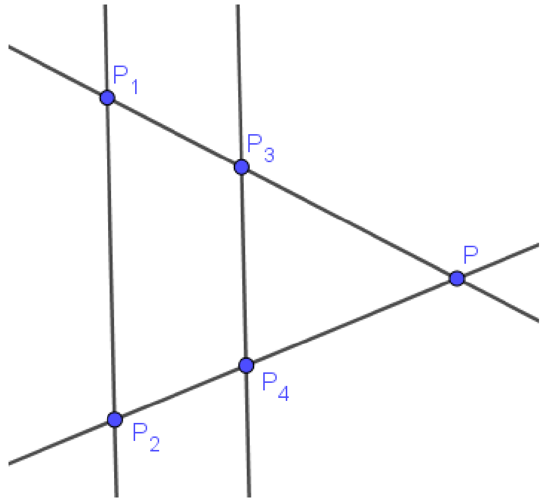
$$P_3 - P_4 = t_1(P_1 - P) - t_2(P_2 - P). \tag{1}$$

Vastaavasti koska suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(P_3, P_4)$ ovat yhdensuuntaiset, on olemassa luku $t_3 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned} P_3 - P_4 &= t_3(P_1 - P_2) \\ &= t_3(P_1 - P_2) + t_3P - t_3P \\ &= t_3(P_1 - P) - t_3(P_2 - P). \end{aligned} \tag{2}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa

$$\begin{aligned} &t_1(P_1 - P) - t_2(P_2 - P) = t_3(P_1 - P) - t_3(P_2 - P) \\ \iff\ &(t_1 - t_3)(P_1 - P) = (t_2 - t_3)(P_2 - P). \end{aligned}$$



KUVA 1. Lause 2.1

Tällöin joko vektorit $P_1 - P$ ja $P_2 - P$ ovat yhdensuuntaisia tai

$$\begin{aligned} t_1 - t_3 = 0 \quad &\text{ja} \quad t_2 - t_3 = 0 \\ \text{eli} \quad t_1 = t_3 \quad &\text{ja} \quad t_2 = t_3. \end{aligned}$$

Suorat $S(P, P_1)$ ja $S(P, P_2)$ leikkaavat pisteessä P, eli ne eivät voi olla yhdensuuntaiset, jonka takia vakioiden on oltava samat, eli $t_1 = t_2 = t_3$. Täten myös $|t_1| = |t_2| = |t_3|$ ja

$$\begin{aligned} P_3 = P + t_1(P_1 - P) \quad &\iff \quad P_3 - P = t_1(P_1 - P) \quad \iff \quad t_1 = \frac{PP_3}{PP_1}, \\ P_4 = P + t_2(P_2 - P) \quad &\iff \quad P_4 - P = t_2(P_2 - P) \quad \iff \quad t_2 = \frac{PP_4}{PP_2} \quad \text{ja} \\ P_3 - P_4 = t_3(P_1 - P_2) \quad &\iff \quad t_3 = \frac{P_1P_2}{P_3P_4}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä tietoon $|t_1| = |t_2| = |t_3|$ yhtälö

$$\frac{|PP_3|}{|PP_1|} = |t_1| = |t_2| = \frac{|PP_4|}{|PP_2|} = |t_3| = \frac{|P_3P_4|}{|P_1P_2|}$$

on voimassa ja lauseen väite saatiin todistettua. □

Lause 2.2. *Olkoot P, P_1 ja P_2 pisteitä ja olkoot $S(P, P_1)$ ja $S(P, P_2)$ suoria. Lisäksi olkoot $P_3 \in S(P, P_1)$ ja $P_4 \in S(P, P_2)$ pisteitä siten, että suora $S(P_3, P_4)$ on yhdensuuntainen suoran $S(P_1, P_2)$ kanssa. Tällöin*

$$\frac{PP_1}{PP_3} = \frac{P_1P_2}{P_3P_4} = \frac{PP_2}{PP_4}.$$

HUOMAUTUS 2.3. Lauseessa 2.1 käytetyt suhteet olivat pituuksille, kun taas lauseessa 2.2 käytetyt suhteet ovat jakosuhteita. Erityisesti on huomioitava, että jakosuhteet voivat olla negatiivisia ja kyseessä on yksi luku.

Todistus. Koska $P_3 \in S(P, P_1)$ ja $P_4 \in S(P, P_2)$, niin on olemassa luvut $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $P_3 = P + t_1(P_1 - P), P_4 = P + t_2(P_2 - P)$, jolloin näiden erotus on

$$P_3 - P_4 = t_1(P_1 - P) - t_2(P_2 - P). \tag{3}$$

Vastaavasti koska suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(P_3, P_4)$ ovat yhdensuuntaiset toisiinsa nähden, on olemassa luku $t_3 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$P_3 - P_4 = t_3(P_1 - P) - t_3(P_2 - P). \tag{4}$$

Yhtälöistä (3) ja (4) saadaan

$$\begin{aligned} &t_1(P_1 - P) - t_2(P_2 - P) = t_3(P_1 - P) - t_3(P_2 - P) \\ \iff &(t_1 - t_3)(P_1 - P) = (t_2 - t_3)(P_2 - P). \end{aligned}$$

Kuten lauseen 2.1 todistuksessa, päädytään tilanteeseen, jossa pätee $t_1 = t_2 = t_3$. Tällöin vastaavalla tavalla saadaan yhtälö

$$\frac{PP_1}{PP_3} = t_1 = t_2 = \frac{P_1P_2}{P_3P_4} = t_3 = \frac{PP_2}{PP_4},$$

josta väite seuraa. □

Verrattuna kahteen edelliseen tulokseen, seuraava tulos on käänteinen. Lauseen lähtötilanne on samankaltainen kuin edellisten tulosten, mutta yhdensuuntaisuutta ei oleteta vaan lauseessa jo aikaisemmin tutuksi tulleesta pituuksien suhteiden yhtälöstä seuraa joko kahden suoran yhdensuuntaisuus tai kohtisuoruus.

Lause 2.4. *Olkoot P, P_1 ja P_2 pisteitä ja olkoot $S(P, P_1)$ ja $S(P, P_2)$ suoria. Lisäksi olkoot $P_3 \in S(P, P_1)$ ja $P_4 \in S(P, P_2)$ pisteitä. Mikäli yhtälö*

$$\frac{|PP_1|}{|PP_3|} = \frac{|P_1P_2|}{|P_3P_4|} = \frac{|PP_2|}{|PP_4|}$$

on voimassa, niin joko suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(P_3, P_4)$ ovat yhdensuuntaiset tai kaikki seuraavista ovat voimassa:
1. *$S(P_1, P_2)$ ja $S(P_3, P_4)$ eivät ole yhdensuuntaiset.*
2. *Suorien $S(P, P_1)$ ja $S(P, P_2)$ välinen kulma on suora kulma.*
3. *Piste P on joko pisteiden P_1 ja P_3 tai pisteiden P_2 ja P_4 välissä.*

Todistus. Suoran määritelmän mukaan on olemassa luvut $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$P_3 = P + t_1(P_1 - P), \quad P_4 = P + t_2(P_2 - P),$$

ja edelleen

$$P_3 - P = t_1(P_1 - P), \quad P_4 - P = t_2(P_2 - P).$$

Täten

$$|t_1| = \frac{|PP_3|}{|PP_1|} = \frac{|PP_4|}{|PP_2|} = |t_2|.$$

Tästä saadaan kaksi eri tapausta. Ensimmäisessä tapauksessa $t_1 = t_2$, jolloin

$$P_3 = P + t_1(P_1 - P), \quad P_4 = P + t_1(P_2 - P)$$

ja

$$\begin{aligned} P_3 - P_4 &= P + t_1(P_1 - P) - (P + t_1(P_2 - P)) \\ &= P + t_1P_1 - t_1P - P - t_1P_2 + t_1P \\ &= t_1P_1 - t_1P_2 = t_1(P_1 - P_2). \end{aligned}$$

Tällöin suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(P_3, P_4)$ ovat yhdensuuntaiset. Jos taas $t_1 = -t_2$, niin

$$P_3 = P + t_1(P_1 - P), \quad P_4 = P + t_1(P - P_2).$$

Täten siis

$$\begin{aligned} (P_3 - P) + (P_4 - P) &= t_1(P_1 - P) + t_1(P - P_2) \\ &= t_1P_1 - t_1P + t_1P - t_1P_2 \\ &= t_1P_1 - t_1P_2 = t_1(P_1 - P_2). \end{aligned}$$

Toisaalta oletuksen nojalla pätee

$$|t_1| = \frac{|PP_3|}{|PP_1|} = \frac{|P_3P_4|}{|P_1P_2|},$$

ja yhdessä edeltävän yhtälön kanssa

$$|(P_3 - P) + (P_4 - P)| = |t_1||P_1 - P_2| = |P_3P_4|$$

eli

$$|(P_3 - P) + (P_4 - P)| = |P_3P_4|.$$

Tästä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & |(P_3 - P) + (P_4 - P)| = |P_3 - P - P_4 + P| \\ \iff & |(P_3 - P) + (P_4 - P)| = |(P_3 - P) - (P_4 - P)|. \end{aligned}$$

Merkitään selkeyden vuoksi $P_3 - P = \overrightarrow{PP_3}$ ja $P_4 - P = \overrightarrow{PP_4}$, jolloin

$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{PP_3} + \overrightarrow{PP_4}|^2 = |\overrightarrow{PP_3} - \overrightarrow{PP_4}|^2 \\ \iff & (\overrightarrow{PP_3} + \overrightarrow{PP_4}) \cdot (\overrightarrow{PP_3} + \overrightarrow{PP_4}) = (\overrightarrow{PP_3} - \overrightarrow{PP_4}) \cdot (\overrightarrow{PP_3} - \overrightarrow{PP_4}) \\ \iff & |\overrightarrow{PP_3}|^2 + 2\overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_4} + |\overrightarrow{PP_4}|^2 = |\overrightarrow{PP_3}|^2 - 2\overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_4} + |\overrightarrow{PP_4}|^2 \\ \iff & 2\overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_4} = -2\overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_4}. \end{aligned}$$

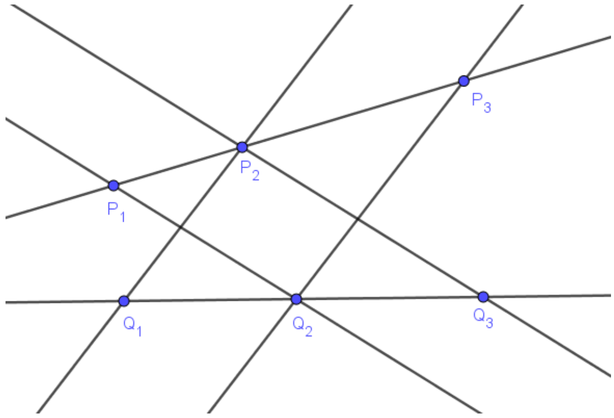
Tällöin

$$\overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_4} = 0,$$

joten vektorit $P_3 - P$ ja $P_4 - P$ ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. Siispä suorien $S(P, P_1)$ ja $S(P, P_2)$ välinen kulma on suora kulma ja

$$P_3 - P = t_1(P_1 - P), \quad P_4 - P = -t_1(P_2 - P).$$

Asetetaan koordinaatit siten, että piste P on origo ja suora $S(P, P_1)$ on y-akseli. Lisäksi olkoot pisteet $P_1 = (0, 1)$ ja $P_3 = (0, t_1)$. Tällöin suora $S(P, P_2)$ on x-akseli, jolloin täytyy olla $P_2 = (a, 0)$ ja $P_4 = (-at_1, 0)$ jollakin reaaliluvulla a, koska pisteet P_2 ja P_4 ovat suoralla $S(P, P_2)$. Lisäksi $\dfrac{PP_1}{PP_3} = \dfrac{1}{t_1}$ ja $\dfrac{PP_2}{PP_4} = \dfrac{1}{-t_1}$. Koska jakosuhteista



Kuva 2. Lause 2.5

vain toinen voi olla negatiivinen, niin pisteen P on oltava pisteiden P_1 ja P_3 välissä tai pisteiden P_2 ja P_4 välissä, mutta vain toinen näistä on mahdollinen. Tällöin myös

$$\frac{|PP_1|}{|PP_3|} = \frac{1}{|t_1|} = \frac{|PP_2|}{|PP_4|}$$

ja

$$\frac{|P_1P_2|}{|P_3P_4|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{t_1^2 + a^2 t_1^2}} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{t_1\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{|t_1|}.$$

□

2.2. Pappoksen lause

Sekä Pappoksen että myöhemmin tulevasta Desarguesin lauseesta seuraa kahden suoran yhdensuuntaisuus muiden yhdensuuntaisten suorien avulla. Pappoksen lauseessa kaksi paria yhdensuuntaisia suoria takaa kolmannen suoraparin yhdensuuntaisuuden tietyssä tilanteessa. Kuvassa 2. on esitetty eräs lauseen tilanne, jossa suorilla $S(P_1, P_2)$ ja $S(Q_1, Q_2)$ olevien pisteiden välille muodostuu yhdensuuntaisia suoria. Lauseen todistus jakautuu kahteen tilanteeseen, jossa ensimmäisessä suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(Q_1, Q_2)$ leikkaavat ja toisessa ne ovat yhdensuuntaisia.

Pappos vaikutti 300-luvun alkupuolella jatkaen Eukleideen, Arkhimedeen ja Apollonioksen luomaa geometriaa. Hän yleisti aikaisempia geometrian tuloksia, keksi vaihtoehtoisia todistuksia jo aiemmin todistetuille tuloksille sekä loi uusia tuloksia yrittäen todistaa niitä. Monien muiden matemaatikkojen tapaan hän yritti ratkaista antiikin kreikan kolmea kuuluisaa ongelmaa, jotka ovat kuution kahdentaminen, kulman kolmiojako ja ympyrän neliöinti. [**2**, s. 268-269]

Lause 2.5. (Pappoksen lause) *Olkoot P_1 ja P_2 sekä Q_1 ja Q_2 eri pisteitä. Lisäksi olkoon P_3 piste siten, että $P_3 \in S(P_1, P_2) \setminus S(Q_1, Q_2)$ ja Q_3 piste siten, että $Q_3 \in S(Q_1, Q_2) \setminus S(P_1, P_2)$. Jos suorat $S(P_2, Q_1)$ ja $S(P_3, Q_2)$ sekä suorat $S(P_1, Q_2)$ ja $S(P_2, Q_3)$ ovat yhdensuuntaisia, niin tällöin suorat $S(P_1, Q_1)$ ja $S(P_3, Q_3)$ ovat yhdensuuntaisia.*

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(Q_1, Q_2)$ leikkaavat pisteessä P. Tällöin suorien määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} P_2 - P &= m_2(P_1 - P), \quad P_3 - P = m_3(P_1 - P) \quad \text{ja} \\ Q_2 - P &= n_2(Q_1 - P), \quad Q_3 - P = n_3(Q_1 - P), \end{aligned}$$

missä $m_2, m_3, n_2, n_3 \in \mathbb{R}$. Koska suorat $S(P_1, Q_2)$ ja $S(P_2, Q_3)$ ovat yhdensuuntaisia, niin on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $P_1 - Q_2 = a(P_2 - Q_3)$. Tästä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} (P_1 - P) - (Q_2 - P) &= P_1 - Q_2 = a(P_2 - Q_3) \\ &= a(P_2 - Q_3 - P + P) \\ &= a((P_2 - P) - (Q_3 - P)) \\ &= a(m_2(P_1 - P) - n_3(Q_1 - P)) \\ &= am_2(P_1 - P) - an_3(Q_1 - P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff (P_1 - P) - n_2(Q_1 - P) &= am_2(P_1 - P) - an_3(Q_1 - P) \\ \iff (1 - am_2)(P_1 - P) &= (n_2 - an_3)(Q_1 - P). \end{aligned}$$

Jos $1 - am_2 \neq 0$, niin

$$P_1 - P = \frac{n_2 - an_3}{1 - am_2}(Q_1 - P),$$

eli pisteet P_1, Q_1 ja P ovat samalla suoralla. Vastaavasti, jos $n_2 - an_3 \neq 0$, niin

$$Q_1 - P = \frac{1 - am_2}{n_2 - an_3}(P_1 - P),$$

eli pisteet P_1, Q_1 ja P olisivat samalla suoralla. Tämä ei voi olla mahdollista, sillä suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(Q_1, Q_2)$ leikkaavat vain yhdessä pisteessä P, jolloin $P_1 \notin S(Q_1, Q_2)$ ja $Q_1 \notin S(P_1, P_2)$. Täytyy siis olla

$$am_2 = 1 \quad \text{ja} \quad an_3 = n_2. \tag{5}$$

Vastaavasti koska oletetaan, että suorat $S(P_2, Q_1)$ ja $S(P_2, Q_3)$ ovat yhdensuuntaisia, niin on olemassa luku $b \in \mathbb{R}$ jolle pätee, että $P_2 - Q_1 = b(P_3 - Q_2)$. Kuten aikaisemmin, tästä saadaan yhtälöksi

$$(1 - bn_2)(Q_1 - P) = (m_2 - bm_3)(P_1 - P)$$

ja päästään tilanteeseen, missä

$$bn_2 = 1 \quad \text{ja} \quad bm_3 = m_2. \tag{6}$$

Kun yhtälöt (5) ja (6) yhdistetään ratkaisemalla m_3 ja n_3, saadaan

$$m_3 = \frac{m_2}{b} = \frac{1}{ab} \quad \text{ja} \quad n_3 = \frac{m_2}{a} = \frac{1}{ab}.$$

On siis oltava $m_3 = n_3$, jolloin

$$\begin{aligned} P_3 - Q_3 &= (P_3 - P) - (Q_3 - P) \\ &= m_3(P_1 - P) - n_3(Q_1 - P) \\ &= m_3(P_1 - Q_1), \end{aligned}$$

toisin sanoen suorat $S(P_1, Q_1)$ ja $S(P_3, Q_3)$ ovat yhdensuuntaisia.

Tapauksessa, jossa suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(Q_1, Q_2)$ eivät leikkaa, suorien on oltava yhdensuuntaisia. Tällöin voidaan pisteet esittää edellä olevaan tapaan käyttäen apuna suorien yhteistä suuntavektoria $\vec{v}$ seuraavasti

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + m_2\vec{v}, \quad P_3 = P_1 + m_3\vec{v} \quad \text{ja} \\ Q_2 &= Q_1 + n_2\vec{v}, \quad Q_3 = Q_1 + n_3\vec{v}, \end{aligned}$$

missä $m_2, m_3, n_2, n_3 \in \mathbb{R}$. Koska suorat $S(P_1, Q_2)$ ja $S(P_2, Q_3)$ ovat yhdensuuntaisia, on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $P_1 - Q_2 = a(P_2 - Q_3)$ ja

$$\begin{aligned} P_1 - Q_1 &= (P_1 - Q_2) - (Q_1 - Q_2) \\ &= a(P_2 - Q_3) + n_2\vec{v} \\ &= a(P_1 + m_2\vec{v} - Q_1 - n_3\vec{v}) + n_2\vec{v}. \end{aligned}$$

Jälleen yhdistelemällä termejä saadaan

$$(1 - a)(P_1 - Q_1) = (n_2 - an_3 + am_3)\vec{v}. \tag{7}$$

Jos $1 - a \neq 0$, niin

$$P_1 - Q_1 = \frac{n_2 - an_3 + am_3}{1 - a}\vec{v}.$$

Tämä on mahdotonta, sillä pisteet P_1 ja Q_1 ovat eri suorilla sekä suorat $S(P_1, P_2)$ ja $S(Q_1, Q_2)$ ovat yhdensuuntaisia, joten suora $S(P_1, Q_1)$ ei voi olla yhdensuuntainen suorien $S(P_1, P_2)$, $S(Q_1, Q_2)$ kanssa. Täytyy siis olla $a = 1$ ja jäljelle jää

$$P_1 - Q_2 = P_2 - Q_3. \tag{8}$$

Vastaavasti kun $P_2 - Q_1 = b(P_3 - Q_2)$ ja

$$\begin{aligned} P_2 - Q_3 &= (P_2 - Q_1) - (Q_3 - Q_1) \\ &= b(P_3 - Q_2) - n_3\vec{v} \\ &= b(P_1 + m_3\vec{v} - Q_1 - n_2\vec{v}) - n_3\vec{v} \\ &= b(P_2 - m_2\vec{v} + m_3\vec{v} - Q_3 + n_3\vec{v} - n_2\vec{v}) - n_3\vec{v}. \end{aligned}$$

Yhdistelemällä termejä saadaan

$$(1 - b)(P_2 - Q_3) = (-m_2 + m_3 + n_3 - n_2 - n_3)\vec{v}.$$

Jos $1 - b \neq 0$, niin

$$P_2 - Q_3 = \frac{m_3 - m_2 - n_2}{1 - b}\vec{v},$$

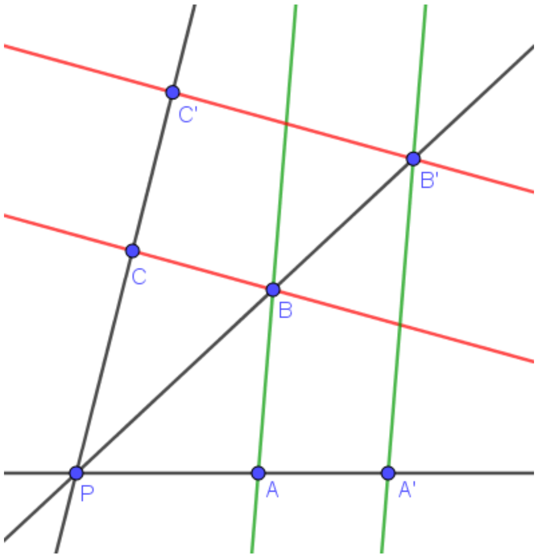
mikä on mahdotonta vastaavalla päättelyllä kuten luvun a tapauksessa. On siis oltava $b = 1$ ja jäljelle jää

$$P_2 - Q_1 = P_3 - Q_2. \tag{9}$$

Vähentämällä yhtälöt (8) ja (9) toisistaan, saadaan $P_1 - P_3 = Q_1 - Q_3$ eli

$$P_1 - Q_1 = P_3 - Q_3,$$

jolloin suorat $S(P_1, Q_1)$ ja $S(P_3, Q_3)$ ovat yhdensuuntaiset. □



KUVA 3. Lause 2.6

2.3. Desarguesin lause

Desarguesin lauseen tulos muistuttaa Pappoksen lausetta, mutta kahden suoran sijaan alussa suoria on kolme, jotka leikkaavat yhdessä pisteessä. Tässäkin tuloksessa yhdensuuntaisista suorapareista seuraa yhdensuuntaisen suoraparin olemassa olo. Desargues vaikutti 1600-luvun alkupuolella kehittäen erityisesti kartioleikkauksia. Hän loi projektiivisen geometrian, joka perustuu muun muassa perspektiiviin, ja pohjasi siihen monet tuloksensa. [**3**, s. 508]

Lause 2.6. (Desarguesin lause) *Olkoot A, A', B, B', C, C', P eri pisteitä siten, että P on piste, jossa suorat $S(A, A')$, $S(B, B')$ ja $S(C, C')$ leikkaavat. Jos suorat $S(A, B)$ ja $S(A', B')$ sekä suorat $S(B, C)$ ja $S(B', C')$ ovat yhdensuuntaisia, niin suorat $S(A, C)$ ja $S(A', C')$ ovat yhdensuuntaisia.*

TODISTUS. Asetetaan piste P koordinaatistossa origoon ja olkoon suora $S(A, A')$ x-akseli. Tällöin pisteiden A ja A' koordinaatit ovat $A = (a, 0)$ ja $A' = (a', 0)$. Kun pisteet P, B ja B' sekä pisteet P, C ja C' ovat samalla suoralla, pisteiden koordinaatit ovat

$$B = (b_1, b_2), \quad B' = \beta(b_1, b_2), \quad C = (c_1, c_2) \quad \text{ja} \quad C' = \gamma(c_1, c_2).$$

Janojen AB ja $A'B'$ yhdensuuntaisuudesta seuraa, että on olemassa luku $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että $(B' - A') = \alpha(B - A)$, jolloin

$$\beta b_1 - a' = \alpha(b_1 - a) \quad \text{ja} \quad \beta b_2 = \alpha b_2.$$

Koska pisteet B ja B' eivät ole suoralla $S(A, A')$, niin $b_2 \neq 0$ ja on oltava $\alpha = \beta$, josta seuraa

$$\beta b_1 - a' = \alpha(b_1 - a) \quad \Longleftrightarrow \quad a' = -\alpha b_1 + \alpha a + \beta b_1 \quad \Longleftrightarrow \quad a' = \alpha a.$$

Vastaavasti koska janat BC ja $B'C'$ ovat yhdensuuntaisia, niin on olemassa luku $\delta \in \mathbb{R}$ siten, että $(C' - B') = \delta(C - B)$. Jälleen kuten edellä

$$(\gamma - \delta)c_1 + (\delta - \beta)b_1 = 0 \quad \text{ja} \quad (\gamma - \delta)c_2 + (\delta - \beta)b_2 = 0.$$

Mikäli $\gamma - \delta \neq 0$ tai $\delta - \beta \neq 0$, niin

$$b_1 = \frac{\delta - \gamma}{\delta - \beta} c_1 \quad \text{ja} \quad b_2 = \frac{\delta - \gamma}{\delta - \beta} c_2$$

tai

$$c_1 = \frac{\beta - \delta}{\gamma - \delta} b_1 \quad \text{ja} \quad c_2 = \frac{\beta - \delta}{\gamma - \delta} b_2.$$

Tällöin myös piste C olisi suoralla $S(B, B')$, jolloin $S(B, B')$ ja $S(C, C')$ olisivat sama suora. Täytyy siis olla, että $\gamma = \beta = \delta = \alpha$. Täten saadaan

$$C' - A' = \gamma(c_1, c_2) - (a', 0) = \alpha(c_1, c_2) - \alpha(a, 0) = \alpha(C - A),$$

joten suorat $S(A, C)$ ja $S(A', C')$ ovat yhdensuuntaiset.

$\square$

LUKU 3

Kolmioiden ominaisuuksia

Tämä luku käsittelee kolmioita, niiden ominaisuuksia ja yhtenevyyksiä. Puhuttaessa kolmion kulmista, kulmalla α tarkoitetaan kärjessä A olevaa kulmaa, kulmalla β tarkoitetaan kärjessä B olevaa kulmaa ja kulmalla γ tarkoitetaan kärjessä C olevaa kulmaa. Tässä luvussa muotoillaan ja todistetaan kolmion yhtenevyyteen ja yhdenmuotoisuuteen liittyviä tuloksia. Lopuksi todistetaan monille tuttu Cevan lause ja hieman vieraampi Menelauksen lause.

3.1. Samankohtaisista kulmista ja kulmasummalause

Todistetaan aluksi lemma, joka on hyödyksi tulevissa todistuksissa, sekä samankohtaisiin kulmiin liittyvä tulos. Kappaleen lopuksi todistetaan kolmion kulmien summan olevan 180°. Lemma kertoo kahden suoran yhdensuuntaisuuden tilanteessa, jossa molemmat suorat ovat kohtisuorassa samaa suoraa vasten. Samankohtaisilla kulmilla puolestaan tarkoitetaan sitä, kun kahta yhdensuuntaista suoraa leikkaa jokin kolmas suora, jolloin muodostuu yhtä suuria kulmia yhdensuuntaisten suorien ympärille.

Lemma 3.1. *Olkoon $S(A, B)$ suora sekä suorat $S(A, C)$ ja $S(B, D)$ siten, että vektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BA}$ sekä vektoreiden $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{BA}$ väliset kulmat ovat suoria kulmia. Tällöin suorat $S(A, C)$ ja $S(B, D)$ ovat yhdensuuntaiset.*

TODISTUS. Koska vektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BA}$ sekä $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{BA}$ väliset kulmat ovat suoria kulmia, on oltava

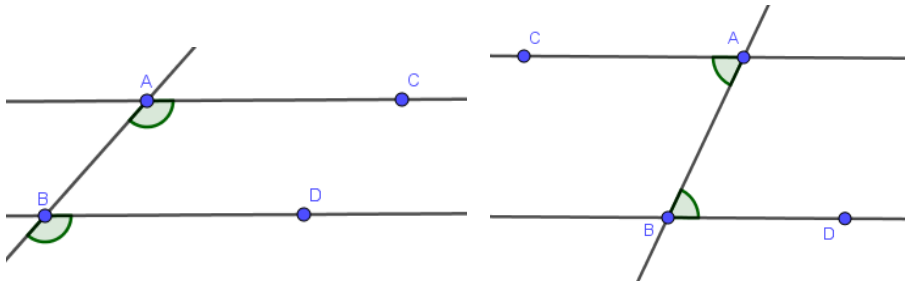
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \quad \text{ja} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0. \end{aligned}$$

Merkitään vektoreita komponenteittain. Olkoon $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2), \overrightarrow{AC} = (y_1, y_2)$ ja $\overrightarrow{BD} = (z_1, z_2)$, missä $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin sisätulot

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \quad \text{ja} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= x_1 z_1 + x_2 z_2 = 0. \end{aligned}$$

Kun $x_1 \neq 0$, yhtälöistä voidaan ratkaista luvut y_1 ja z_1

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{x_2}{x_1} y_2 \quad \text{ja} \\ z_1 &= -\frac{x_2}{x_1} z_2. \end{aligned}$$



(A) Vektoreiden samansuuntaisuus (B) Vektoreiden vastakkaissuuntaisuus

KUVA 1. Lause 3.2

Nyt vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ voidaan ilmaista muodoissa

$$\overrightarrow{AC} = y_2(-\frac{x_2}{x_1}, 1) \quad \text{ja}$$
$$\overrightarrow{BD} = z_2(-\frac{x_2}{x_1}, 1).$$

Jos puolestaan $x_1 = 0$, niin tällöin on oltava $x_2 \neq 0$. Tästä taas seuraa, että $y_2 = 0$ ja $z_2 = 0$. Koska vektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ y-koordinaatit saavat arvoikseen 0, saadaan vektoreiden x-koordinaatit vakiota vaille samoiksi.

Nyt molemmissa tapauksissa vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ ovat vakiota vaille sama vektori, joten vektoreiden on oltava yhdensuuntaiset. Täten myös suorat $S(A, C)$ ja $S(B, D)$ ovat yhdensuuntaiset. □

Lause 3.2. *Olkoot A, B, C ja D eri pisteitä. Jos vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ ovat samansuuntaiset, niin vektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AB}$ sekä $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{AB}$ väliset kulmat ovat yhtä suuret.*

Lisäksi jos vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ ovat vastakkaissuuntaiset, niin vektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AB}$ sekä $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{BA}$ väliset kulmat ovat yhtä suuret.

TODISTUS. Osoitetaan aluksi lauseen ensimmäinen osa, jossa vektorit ovat samansuuntaiset. Koska vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ ovat samansuuntaiset, niin vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BD}$, missä $k \in \mathbb{R}, k > 0$. Täten vektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AB}$ välinen kulma α voidaan kirjoittaa kosinin avulla

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB||AC|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot k\overrightarrow{BD}}{|AB|k|BD|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}}{|AB||BD|} = \cos\beta,$$

missä kulma β on vektoreiden $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{AB}$ välinen kulma. Koska $\alpha, \beta \in [0°, 180°]$, niin $\alpha = \beta$.

Oletetaan seuraavaksi, että vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ ovat vastakkaissuuntaiset. Tästä seuraa, että vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\overrightarrow{AC} = -t\overrightarrow{BD}$, missä $t \in \mathbb{R}, t > 0$. Kuten todistuksen ensimmäisessä osassa, vektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AB}$ välinen kulma α voidaan kirjoittaa kosinin avulla

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB||AC|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot (-t)\overrightarrow{BD}}{|AB|t|BD|} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot t\overrightarrow{BD}}{|AB|t|BD|} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}}{|BA||BD|} = \cos\beta,$$

missä kulma β on vektoreiden $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BD}$ välinen kulma. Koska $\alpha, \beta \in [0°, 180°]$, niin $\alpha = \beta$. □

Lause 3.3. (Kulmasummalause) *Olkoon kolmion ΔABC kulmat α, β ja γ. Tällöin*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Todistus. Olkoon suora S yhdensuuntainen suoran $S(B, C)$ kanssa siten, että piste $A \in S$. Tällöin lauseen 3.2 jälkimmäisen tapauksen nojalla suorien S ja $S(A, C)$ välinen kulma on yhtä suuri kulman γ kanssa. Vastaavasti suorien S ja $S(A, B)$ välinen kulma on yhtä suuri kulman β kanssa, jolloin kulmat α, β ja γ muodostavat yhdessä oikokulman. Kulmien α, β ja γ summa on siis 180°. □

3.2. Yhtenevyys

Tässä kappaleessa tutkitaan, milloin kaksi kolmiota ovat täsmälleen yhtä suuret, eli yhtenevät. Yhtenevissä kolmioissa kolmioiden vastinsivut ovat saman mittaiset ja myös kolmioiden vastinkulmien on oltava yhtä suuret. Tätä varten otetaan avuksi Kosinilause, joka on hyödyksi niin yhteneviin kolmioihin liittyvissä tuloksissa kuin myöhemmin tulevassa yhdenmuotoisuuteen liittyvässä lauseessa. Kosinilause saadaan todistetuksi polarisaatiokaavan ja suunnikassäännön avulla.

Lause 3.4. *Olkoot A ja B vektoreita. Tällöin seuraavat yhtälöt ovat voimassa*

$$A \cdot B = \frac{1}{4}(|A + B|^2 - |A - B|^2) \quad \text{(Polarisaatiokaava)} \tag{10}$$

ja

$$|A + B|^2 + |A - B|^2 = 2|A|^2 + 2|B|^2 \quad \text{(Suunnikassääntö).} \tag{11}$$

Todistus. Osoitetaan aluksi ylempi yhtälö seuraavasti

$$\begin{aligned} |A + B|^2 - |A - B|^2 &= (A + B) \cdot (A + B) - (A - B) \cdot (A - B) \\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B - A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B \\ &= 2A \cdot B + 2B \cdot A = 4A \cdot B \\ \iff A \cdot B &= \frac{1}{4}(|A + B|^2 - |A - B|^2). \end{aligned}$$

Myös toinen yhtälö saadaan osoitetuksi laskun avulla

$$\begin{aligned} |A + B|^2 + |A - B|^2 &= (A + B) \cdot (A + B) + (A - B) \cdot (A - B) \\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B + A \cdot A - A \cdot B - B \cdot A + B \cdot B \\ &= 2A \cdot A + 2B \cdot B = 2|A|^2 + 2|B|^2. \end{aligned}$$

□

Lause 3.5. (Kosinilause) *Olkoon kolmio ΔABC ja sivujen AC ja BC välinen kulma γ. Tällöin*

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC||AC| \cos \gamma. \tag{12}$$

Todistus. Sovelletaan aluksi lauseen 3.4 yhtälöitä (10) ja (11) yhdistämällä ne toisiinsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|^2)\\ &= \frac{1}{4}(2|\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|^2)\\ &= \frac{1}{4}(2|\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{BC}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|^2)\\ &= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|^2).\end{aligned}$$

Vektoreiden välisen kulman määritelmän mukaan

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|AC||BC|}.$$

Sijoitetaan saatu yhtälö kulman määritelmään

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{\frac{1}{2}(|AC|^2 + |BC|^2 - |AC-BC|^2)}{|AC||BC|}\\ &= \frac{|AC|^2 + |BC|^2 - |AC-BC|^2}{2|AC||BC|}.\end{aligned}$$

Kerrotaan yhtälöä vielä luvulla $2|AC||AB|$, jolloin saadaan haluttu kosiniyhtälö

$$2|AC||BC|\cos\gamma = |AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2.$$

□

Muotoillaan ja todistetaan seuraavaksi tulos, jossa kolmion yhtenevyys saadaan siitä, että vastinsivujen pituudet pysyvät samana. Tämän avulla voidaan todistaa tulos, joka antaa kolmioiden yhtenevyyden useammalla tavalla.

Lause 3.6. (Sivu-sivu-sivu) *Olkoot ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ kolmioita. Kolmiot ovat yhtenevät, jos vastinsivut ovat saman mittaiset, eli $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|$ ja $|AC| = |A'C'|$.*

Todistus. Koska sivut ovat saman mittaiset, niin kulma γ voidaan ilmaista kosinilauseen avulla

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC||AC|} = \frac{|B'C'|^2 + |A'C'|^2 - |A'B'|^2}{2|B'C'||A'C'|} = \cos\gamma'.$$

Kulmat γ ja γ' ovat siis yhtä suuret. Vastaavasti kulmalle β on

$$\cos\beta = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2|AB||BC|} = \frac{|A'B'|^2 + |B'C'|^2 - |A'C'|^2}{2|A'B'||B'C'|} = \cos\beta',$$

jolloin $\beta = \beta'$. Käyttämällä kosinilausetta vielä kulmalle α, saadaan

$$\cos\alpha = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|} = \frac{|A'B'|^2 + |A'C'|^2 - |B'C'|^2}{2|A'B'||A'C'|} = \cos\alpha'.$$

Kaikki sivut oletettiin saman mittaisiksi ja nyt kulmat saatiin yhtä suuriksi, joten kolmiot on yhtenevät. □

Lause 3.7. *Kaksi kolmiota ovat yhtenevät, jos jokin seuraavista ehdoista pätee:*

1. Vastinsivut ovat saman mittaiset. (sivu-sivu-sivu)

2. Kaksi vastinsivua ovat saman mittaiset ja näiden sivujen väliset kulmat ovat yhtä suuret. (sivu-kulma-sivu)

3. Kahden vastinsivun pituudet ovat samat ja pidempien sivujen vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. (sivu-sivu-kulma)

4. Kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret ja kulmien väliset sivut ovat saman mittaiset. (kulma-sivu-kulma)

TODISTUS. 1. Todistettu lauseessa 3.6.

2. Olkoot kaksi vastinsivua, $|BC| = |B'C'|$ ja $|AC| = |A'C'|$, sekä niiden väliset vastinkulmat $\gamma = \gamma'$ tunnettuina. Kun kosinilauseen yhtälöstä (12) ratkaistaan sivun AB pituus, saadaan

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC||AC|\cos\gamma} \\ &= \sqrt{|B'C'|^2 + |A'C'|^2 - 2|B'C'||A'C'|\cos\gamma'} = |A'B'|. \end{aligned}$$

Tällöin kolmioiden kolmannet sivut saadaan jo annetuista tiedoista yhtä suuriksi, jolloin ensimmäisen kohdan nojalla väite seuraa.

3. Olkoot kahden sivun pituudet $|AC| = |A'C'|$ ja $|BC| = |B'C'|$ tunnettuja sekä $|AC| < |BC|$, jolloin tunnettuina kulmina on $\alpha = \alpha'$ ja kosinilauseen avulla

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos\alpha.$$

Tästä voidaan ratkaista tuntematon sivu AB toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, jolloin

$$\begin{aligned} |AB| &= \frac{2|AC|\cos\alpha \pm \sqrt{4|AC|^2\cos^2\alpha - 4(|AC|^2 - |BC|^2)}}{2} \\ &= |AC|\cos\alpha \pm \sqrt{|AC|^2\cos^2\alpha - (|AC|^2 - |BC|^2)} \\ &= |AC|\cos\alpha \pm \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2}. \end{aligned}$$

Koska $0 < \cos^2\alpha < 1$ ja $|AC| < |BC|$, niin arvo $\sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2)}$ on olemassa ja se on reaalinen. Ehdosta $|AC| < |BC|$ seuraa

$$\begin{aligned} & |AC|^2 < |BC|^2 \\ \iff\ & 0 < -|AC|^2 + |BC|^2 \\ \iff\ & |AC|^2\cos^2\alpha < |AC|^2\cos^2\alpha - |AC|^2 + |BC|^2 \\ \iff\ & |AC|^2\cos^2\alpha < |AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2 \\ \iff\ & |AC|\cos\alpha < \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2}, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$|AC|\cos\alpha - \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2} < 0.$$

Tällöin pituus $|AB|$ olisi negatiivinen. Voimassa on siis tapaus

$$|AB| = |AC|\cos\alpha + \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2}.$$

Käyttämällä tietoja $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$ ja $\alpha = \alpha'$ janan AB pituutta voidaan muokata

$$\begin{aligned}|AB| &= |AC|\cos\alpha + \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2} \\ &= |A'C'|\cos\alpha' + \sqrt{|A'C'|^2(\cos^2\alpha' - 1) + |B'C'|^2} = |A'B'|.\end{aligned}$$

Nyt $|AB| = |A'B'|$ on saatu ilmaistua tunnettujen lukujen avulla ja lauseen ensimmäisen kohdan nojalla väite seuraa.

4. Olkoon pituus $|BC| = |B'C'|$ ja kulmat $\gamma = \gamma'$ sekä $\beta = \beta'$ annettuina. Muodostetaan lauseen 3.5 avulla kosinit kulmille γ ja β

$$\cos\beta = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2|AB||BC|} \quad \text{ja} \tag{13}$$

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC||AC|}. \tag{14}$$

Osoitetaan aluksi, että luvut

$$x = \frac{|BC|\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} \quad \text{ja} \quad y = \frac{|BC|\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

ratkaisevat muodostetut kosiniyhtälöt, missä x vastaa pituutta $|AC|$ ja y pituutta $|AB|$. Lauseen 3.3 nojalla $\beta + \gamma \in [0°, 180°]$, joten sinin arvot ovat positiivisia. Täten myös luvut x ja y ovat positiivisia, joten luvut ovat mahdolliset sivujen pituudet. Yhdistämällä nämä kaavat yhtälöön (13) saadaan

$$\begin{aligned}\frac{y^2 + |BC|^2 - x^2}{2|BC|y} &= \frac{\left(\frac{|BC|\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\right)^2 + |BC|^2 - \left(\frac{|BC|\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\right)^2}{2|BC|\frac{|BC|\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}} \\ &= \frac{\frac{|BC|^2\sin^2\gamma + |BC|^2\sin^2(\beta+\gamma) - |BC|^2\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma)}}{2|BC|^2\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}} \\ &= \frac{\frac{\sin^2\gamma + \sin^2(\beta+\gamma) - \sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma)}}{2\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}} \\ &= \frac{(\sin^2\gamma + \sin^2(\beta+\gamma) - \sin^2\beta)\sin(\beta+\gamma)}{2\sin\gamma\sin^2(\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\sin^2\gamma + \sin^2(\beta+\gamma) - \sin^2\beta}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)},\end{aligned}$$

joten

$$\frac{y^2 + |BC|^2 - x^2}{2|BC|y} = \frac{\sin^2\gamma + \sin^2(\beta+\gamma) - \sin^2\beta}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)}.$$

Muokataan yhtälöä vielä käyttämällä aluksi sinin summakaavaa

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{\sin^2\gamma + \sin^2(\beta+\gamma) - \sin^2\beta}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\sin^2\gamma + (\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)^2 - \sin^2\beta}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta\cos^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma - \sin^2\beta}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)}.\end{aligned}$$

Otetaan seuraavaksi $\sin^2\beta$ yhteiseksi tekijäksi ja käytetään hyväksi tietoa $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta(\cos^2\gamma - 1) + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\sin^2\gamma - \sin^2\beta\sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)}.\end{aligned}$$

Otetaan $\sin^2\gamma$ yhteiseksi tekijäksi ja käytetään uudelleen kaavaa $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{\sin^2\gamma(1 - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\sin^2\gamma\cos^2\beta + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)}.\end{aligned}$$

Sievennetään yhtälöä ja otetaan yhteiseksi tekijäksi $\cos\beta$

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{2\sin^2\gamma\cos^2\beta + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\sin\gamma\cos^2\beta + \sin\beta\cos\beta\cos\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.\end{aligned}$$

Käytetään vielä uudelleen sinin summakaavaa

$$\begin{aligned}\Lambda &= \cos\beta\frac{\sin\gamma\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} \\ &= \cos\beta\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \cos\beta.\end{aligned}$$

Saatiin siis

$$\cos\beta = \frac{y^2 + |BC|^2 - x^2}{2|BC|y}.$$

Sijoittamalla luvut x ja y yhtälöön (14) ja laskemalla kuten edellä, päädytään yhtälöön

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + x^2 - y^2}{2|BC|x}.$$

Luvut x ja y siis toteuttavat kosiniyhtälöt (13) ja (14).

Osoitetaan seuraavaksi lukujen x ja y yksikäsitteisyys. Muodostetaan yhtälöiden (13) ja (14) avulla toisen asteen yhtälöt muuttujille $|AC|$ ja $|AB|$. Muokataan yhtälöt muotoihin

$$2|BC||AB|\cos\beta = |BC|^2 + |AB|^2 - |AC|^2, \tag{15}$$

$$2|BC||AC|\cos\gamma = |BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2 \tag{16}$$

ja summataan nämä keskenään, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} & 2|BC||AB|\cos\beta + 2|BC||AC|\cos\gamma = 2|BC|^2 \\ \iff \quad & |BC||AB|\cos\beta + |BC||AC|\cos\gamma = |BC|^2.\end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöstä pituudet $|BC|$ ja $|AC|$ eli

$$|BC| = |AB|\cos\beta + |AC|\cos\gamma \quad \text{ja}$$

$$|AC| = \frac{|BC| - |AB|\cos\beta}{\cos\gamma}. \tag{17}$$

Sijoitetaan yhtälöön (15) ratkaistun muuttujan $|AC|$ neliö, saadaan

$$\begin{aligned} 2|BC||AB|\cos\beta &= |BC|^2 + |AB|^2 - \frac{(|BC| - |AB|\cos\beta)^2}{\cos^2\gamma} \\ &= |BC|^2 + |AB|^2 - \frac{|BC|^2 + |AB|^2\cos^2\beta - 2|BC||AB|\cos\beta}{\cos^2\gamma} \\ &= |BC|^2 + |AB|^2 - \frac{|BC|^2}{\cos^2\gamma} - \frac{|AB|^2\cos^2\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{2|BC||AB|\cos\beta}{\cos^2\gamma}. \end{aligned}$$

Kertomalla tätä luvulla $\cos^2\gamma$

$$\begin{aligned} 2|BC||AB|\cos\beta\cos^2\gamma =& |BC|^2\cos^2\gamma + |AB|^2\cos^2\gamma - |BC|^2 \\ & - |AB|^2\cos^2\beta + 2|BC||AB|\cos\beta. \end{aligned}$$

Saatiin toisen asteen yhtälö muuttujalle $|AB|$

$$|AB|^2(\cos^2\gamma - \cos^2\beta) + 2|BC||AB|\cos\beta(1 - \cos^2\gamma) + a^2(\cos^2\gamma - 1) = 0$$

ja käyttämällä tietoa $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$, päädytään yhtälöön

$$|AB|^2(\cos^2\gamma - \cos^2\beta) + 2|BC||AB|\cos\beta\sin^2\gamma - a^2\sin^2\gamma = 0. \tag{18}$$

Jos $\cos^2\gamma - \cos^2\beta > 0$, niin yhtälön (18) vasemman puolen kuvaaja muuttujan $|AB|$ suhteen on ylöspäin aukeava paraabeli ja arvolla $|AB| = 0$ tämän arvo on negatiivinen. Tällöin yhtälöllä on vain yksi positiivinen ratkaisu, jolloin kaavasta (17) saadaan yksikäsitteinen ratkaisu pituudelle $|AC|$.

Vastaavasti summatessa yhtälöitä (15) ja (16) sekä ratkaisemalla pituudet $|BC|$ ja $|AB|$ saadaan

$$|BC| = |AB|\cos\beta + |AC|\cos\gamma \quad \text{ja}$$

$$|AB| = \frac{|BC| - |AC|\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

Sijoittamalla yhtälöön (16) ratkaistun pituuden $|AB|$ neliö, saadaan vastaavien välivaiheiden kautta muodostetuksi toisen asteen yhtälö muuttujalle $|AC|$

$$|AC|^2(\cos^2\beta - \cos^2\gamma) + 2|BC||AC|\cos\gamma\sin^2\beta - a^2\sin^2\beta = 0. \tag{19}$$

Jos taas $\cos^2\gamma - \cos^2\beta < 0$, niin yhtälön (19) vasemman puolen kuvaaja muuttujan $|AC|$ suhteen on ylöspäin aukeava paraabeli ja arvolla $|AC| = 0$ tämän arvo on negatiivinen. Tällöin yhtälöllä on vain yksi positiivinen ratkaisu, jolloin myös pituudelle $|AB|$ on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu.

Tutkitaan vielä tapaus, jossa $\cos^2\gamma - \cos^2\beta = 0$. Tällöin yhtälöt (18) ja (19) ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä, jolloin pituuksille $|AB|$ ja $|AC|$ saadaan yksikäsitteiset ratkaisut.

Käyttämällä tietoja $|BC| = |B'C'|$, $\gamma = \gamma'$ ja $\beta = \beta'$ saadaan myös yksikäsitteiset pituudet $|A'B'|$ ja $|A'C'|$, jolloin lauseen ensimmäisen kohdan nojalla väite seuraa. □

3.3. Yhdenmuotoisuus

Tarkastellaan seuraavaksi yhdenmuotoisia kolmioita, joilla tarkoitetaan kolmioita, joiden vastinkulmat ovat yhtä suuret. Kolmioiden sivujen pituudet voivat olla erisuuret, mutta sivujen pituuksien suhteen on pysyttävä kuitenkin samana vastinsivuja vertaillessa. Tässä tapauksessa kolmiot eivät ole niin vahvasti samankaltaiset kuin yhtenevät kolmiot. Seuraavan tuloksen avulla kolmiot voidaan todeta yhdenmuotoiseksi.

Lause 3.8. *Kaksi kolmiota ovat yhdenmuotoiset, jos jokin seuraavista ehdoista pätee:*

1. Vastinsivujen suhde pysyy samana.

2. Kahden vastinsivun suhde ja niiden välinen kulma ovat samat.

3. Kahden vastinsivun suhde pysyy samana ja pidempien sivujen vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

4. Kaksi kulmaa ovat yhtä suuret.

Todistus. 1. Koska vastinsivujen suhde pysyy samana, niin on olemassa positiivinen luku $k \in \mathbb{R}, k > 0$ siten, että vastinsivujen pituudet ovat $|AB| = k|A'B'|, |BC| = k|B'C'|$ ja $|AC| = k|A'C'|$. Kulma γ voidaan laskea kosinilauseen mukaan

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC||AC|} = \frac{(k|B'C'|)^2 + (k|A'C'|)^2 - (k|A'B'|)^2}{2(k|B'C'|)(k|A'C'|)} \\ &= \frac{k^2|B'C'|^2 + k^2|A'C'|^2 - k^2|A'B'|^2}{2k^2|B'C'||A'C'|} = \frac{|B'C'|^2 + |A'C'|^2 - |A'B'|^2}{2|B'C'||A'C'|} = \cos\gamma'.\end{aligned}$$

Vastaavasti laskemalla kulmille α ja β saadaan vastinkulmat yhtä suuriksi eli $\alpha = \alpha'$ ja $\beta = \beta'$. Tällöin kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivujen pituuksien suhde pysyy samana, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

2. Oletetaan vastinsivut BC ja $B'C'$ sekä AC ja $A'C'$ tunnetuiksi eli on olemassa vakio $k \in \mathbb{R}, k > 0$ siten, että $|BC| = k|B'C'|$ ja $|AC| = k|A'C'|$. Lisäksi olkoot $\gamma = \gamma'$. Tällöin kosinilauseen nojalla

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC||AC|\cos\gamma} \\ &= \sqrt{(k|B'C'|)^2 + (k|A'C'|)^2 - 2(k|B'C'|)(k|A'C'|)\cos\gamma'} \\ &= \sqrt{k^2(|B'C'|^2 + |A'C'|^2 - 2|B'C'||A'C'|\cos\gamma')} \\ &= k\sqrt{|B'C'|^2 + |A'C'|^2 - 2|B'C'||A'C'|\cos\gamma'} = k|A'B'|.\end{aligned}$$

Nyt kaikki vastinsivut ovat samaa vakiota k vaille samat, jolloin ensimmäisen kohdan nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

3. On olemassa $k \in \mathbb{R}, k > 0$ siten, että $|BC| = k|B'C'|$ ja $|AC| = k|A'C'|$. Oletetaan lisäksi, että $|AC| < |BC|$. Tällöin tunnettuina kulmina ovat $\alpha = \alpha'$. Kosinilauseen avulla voidaan ilmaista janan AB pituus

$$|AB| = |AC|\cos\alpha \pm \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2}.$$

Kuten lauseen 3.7 todistuksen kohdassa 3, on valittava muoto $|AB| = |AC|\cos\alpha + \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2}$, sillä muuten pituus $|AB|$ olisi negatiivinen. Nyt janan

$|AB|$ pituutta voidaan muokata lauseen oletuksien nojalla

$$\begin{aligned}|AB| &= |AC|\cos\alpha + \sqrt{|AC|^2(\cos^2\alpha - 1) + |BC|^2}\\ &= k|A'C'|\cos\alpha' + \sqrt{k^2|A'C'|^2(\cos^2\alpha' - 1) + k^2|B'C'|^2}\\ &= k|A'C'|\cos\alpha' + k\sqrt{|A'C'|^2(\cos^2\alpha' - 1) + |B'C'|^2}\\ &= k(|A'C'|\cos\alpha' + \sqrt{|A'C'|^2(\cos^2\alpha' - 1) + |B'C'|^2}) = k|A'B'|.\end{aligned}$$

Janojen pituudet ovat samaa vakiota k vaille samat, joten ensimmäisen kohdan nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

4. Olkoot kolmioiden ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ kulmat $\alpha = \alpha'$ ja $\beta = \beta'$ yhtä suuria. Tällöin lauseen 3.3 nojalla on oltava $\gamma = \gamma'$. Kolmioiden kaikki kulmat ovat nyt yhtä suuret.

Riittää enää näyttää kolmioiden vastinsivujen suhteen pysyvän samana. Tiedetään, että $|BC| = k|B'C'|$, missä $k \in \mathbb{R}, k > 0$. Mukailemalla lauseen 3.7 kohdan 4. todistusta, saadaan yksikäsitteiset ratkaisut

$$|AB| = \frac{|BC|\sin\gamma}{\sin\beta+\gamma} \quad \text{ja} \quad |AC| = \frac{|BC|\sin\beta}{\sin\beta+\gamma},$$

jotka ovat ilmaistu pituuden $|BC|$ ja kahden tunnetun kulman avulla. Vastaavalla tavalla saadaan yksikäsitteiset pituudet

$$|A'B'| = \frac{|B'C'|\sin\gamma}{\sin\beta+\gamma} \quad \text{ja} \quad |A'C'| = \frac{|B'C'|\sin\beta}{\sin\beta+\gamma}.$$

Käyttämällä tietoa $|BC| = k|B'C'|$ voidaan muokata pituudet $|A'B'|$ ja $|A'C'|$ muotoihin

$$\begin{aligned}|A'B'| &= \frac{|B'C'|\sin\gamma}{\sin\beta+\gamma} = \frac{\frac{1}{k}|BC|\sin\gamma}{\sin\beta+\gamma} = \frac{1}{k}|AB|\\ |A'C'| &= \frac{|B'C'|\sin\beta}{\sin\beta+\gamma} = \frac{\frac{1}{k}|BC|\sin\beta}{\sin\beta+\gamma} = \frac{1}{k}|AC|.\end{aligned}$$

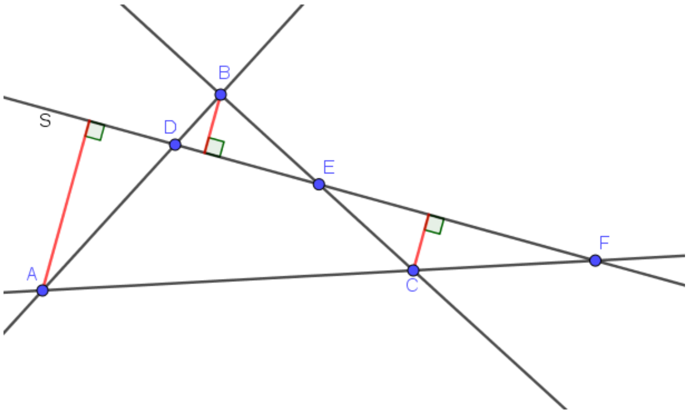
Nyt kolmioiden kaikkien vastinsivujen pituudet ovat samaa vakiota vaille samat, eli kolmiot ovat yhdenmuotoiset. □

3.4. Menelauksen lause

Menelaus Aleksandrialainen oli kreikkalainen matemaatikko, joka eli noin 100 jaa. Hänen eräs teoksensa sisältää Menelauksen lauseen, jossa kolmion sivuilla tai niiden jatkeilla olevat pisteet ovat samalla suoralla mikäli pisteiden välisten jakosuhteiden tulo on -1. Menelaus esitti tuloksen pallotrigonogeometrialle, mutta alla oleva tulos on tarkoitettu tasokolmioille. [**2**, s. 240-242].

Lause 3.9. (Menelauksen lause) *Olkoon ΔABC kolmio ja olkoot pisteet D, E ja F kolmion janoilla AB, BC ja AC tai niiden jatkeilla siten, että $D \in S(A,B)$, $E \in S(B,C)$ ja $F \in S(A,C)$. Pisteet D, E ja F ovat samalla suoralla S, jos ja vain jos*

$$\frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = -1. \tag{20}$$



KUVA 2. Lause 3.9

TODISTUS. Olkoot l, m ja n kohtisuoria etäisyyksiä pisteistä A, B ja C suoralle S. Täten lemman 3.1 nojalla kohtisuoria etäisyyksiä vastaavat janat ovat yhdensuuntaisia. Verrattuna lauseen 2.2 tilanteeseen

$$\frac{AD}{DB} = \pm\frac{l}{m}, \quad \frac{BE}{EC} = \pm\frac{m}{n}, \quad \frac{CF}{FA} = \pm\frac{n}{l}.$$

Kun tutkitaan janojen AD ja DB suhdetta, luku on positiivinen, mikäli piste D sijaitsee pisteiden A ja B välissä, muutoin luku on negatiivinen. Vastaavasti janojen BE ja EC suhde on positiivinen, jos piste E on pisteiden B ja C välissä ja janojen CF ja FA suhde on positiivinen mikäli piste F on pisteiden A ja C välissä. Suora S leikkaa joko yhtä tai kolmea kolmion sivua kolmion ulkopuolella, jolloin ainoat mahdolliset kombinaatiot merkeille ovat $++-$, missä järjestystä voidaan vaihtaa, sekä $---$. Koska molemmissa tapauksissa saadaan suhteiden kertolaskusta negatiivinen arvo ja

$$\left| \frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} \right| = \frac{l}{m}\frac{m}{n}\frac{n}{l} = 1,$$

saadaan lauseen ensimmäinen suunta todistettua.

Todistettaessa toiseen suuntaan oletetaan, että yhtälö (20) pätee. Jos suorat $S(B, C)$ ja $S(D, F)$ ovat yhdensuuntaiset niin lausetta 2.2 voidaan soveltaa tilanteeseen, jossa suora $S(B, C)$ vastaa suoraa $S(P_1, P_2)$ ja suora $S(D, F)$ vastaa suoraa $S(P_3, P_4)$. Tällöin lauseessa 2.2 esiintyvä piste P vastaa nyt pistettä A, jonka seurauksena saadaan, että

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}.$$

Yhtälöä (20) muokkaamalla saadaan jakosuhteiden ominaisuuksien avulla

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = \frac{AF}{FC}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = \frac{FA}{CF}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = \frac{BE}{EC} = -1 \\ \iff \quad -\frac{BE}{EC} = 1 \\ \iff \quad \frac{EB}{EC} = 1. \end{aligned}$$

Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä muuten olisi $B = C$. Tällöin suorien $S(B, C)$ ja $S(D, F)$ on leikattava pisteessä E' sekä on olemassa kohtisuorat etäisyydet l', m' ja

n' pisteistä A, B ja C suoralle, joka kulkee pisteiden D, E' ja F kautta. Nyt pisteelle E' voidaan kirjoittaa seuraava yhtälö

$$\frac{BE'}{E'C} = \pm\frac{m'}{n'} = \pm\frac{m'}{l'}\frac{l'}{n'} = -\frac{DB}{AD}\frac{FA}{CF}.$$

Jotta yhtälö (20) pätee, on oltava $E = E'$, jolloin pisteet D, E ja F ovat samalla suoralla. □

3.5. Cevan lause

Toinen, hyvin samankaltainen tulos kuin edellä oleva Menelauksen lause, on Cevan lause. Ceva oli syntyperältään italialainen ja hän eli vuosina 1648-1734. Parhaiten hänet muistetaan Cevan lauseesta, joka kertoo leikkaavatko kolmion kärjistä piirretyt suorat yhdessä pisteessä. Kyseiset suorat leikkaavat, mikäli Menelauksen lauseessa olevien jakosuhteiden tulo on 1. Vastaavasti jos tiedetään kyseisen pisteen olevan olemassa, niin kyseinen jakosuhteiden tulo on 1. Lisäksi Ceva todisti uudelleen kadotetun Menelauksen lauseen. [**3**, s. 614-615].

Lause 3.10. (Cevan lause) *Olkoon ΔABC kolmio. Olkoon piste D suoralla $S(A, B)$, piste E suoralla $S(B, C)$ ja piste F suoralla $S(A, C)$. Jos*

$$\frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = 1, \tag{21}$$

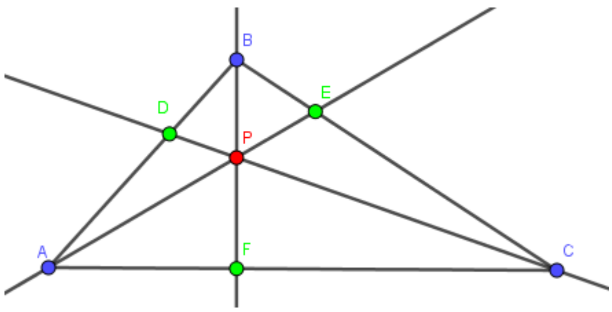
niin suorat $S(A, E)$, $S(B, F)$ ja $S(C, D)$ ovat yhdensuuntaisia tai leikkaavat pisteessä P.

Kääntäen jos on piste P ja suorat $S(A, B)$ ja $S(C, P)$ leikkaavat pisteessä D, suorat $S(B, C)$ ja $S(A, P)$ leikkaavat pisteessä E sekä suorat $S(A, C)$ ja $S(B, P)$ leikkaavat pisteessä F, niin

$$\frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = 1.$$

Todistus. Osoitetaan aluksi lauseen toinen osa. Tarkastellaan kolmiota ΔABE ja suoraa $S(C, D)$. Lauseesta 3.9 seuraa, että

$$\frac{AD}{DB}\frac{BC}{CE}\frac{EP}{PA} = -1.$$



Kuva 3. Lause 3.10

Lisäksi käyttämällä uudelleen lausetta 3.9 kolmioon ΔACE ja suoraan $S(B,F)$ saadaan

$$\frac{AF}{FC}\frac{CB}{BE}\frac{EP}{PA} = -1.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{DB}\frac{BC}{CE}\frac{EP}{PA} &= \frac{AF}{FC}\frac{CB}{BE}\frac{EP}{PA}\\
\iff \frac{AD}{DB}\frac{BC}{CE} &= \frac{AF}{FC}\frac{CB}{BE}\\
\iff \frac{AD}{DB}\frac{BC}{CE}\frac{BE}{CB} &= \frac{AF}{FC}\\
\iff \frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC} &= \frac{AF}{FC}\\
\iff \frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} &= 1.
\end{aligned}$$

Tämä todistaa lauseen toisen osan.

Todistetaan seuraavaksi lauseen ensimmäinen osa eli oletetaan, että

$$\frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = 1.$$

Jakosuhteiden tulon on oltava positiivinen, joten joko kaikki jakosuhteet ovat positiivisia tai yksi jakosuhde on positiivinen ja kaksi negatiivisia. Tarkastellaan suoria $S(B,F)$ ja $S(A,E)$. Jos suorat $S(B,F)$ ja $S(A,E)$ ovat yhdensuuntaisia, jakosuhteista kahden täytyy olla negatiivisia ja yhden positiivinen. Pisteiden A, B ja C järjestystä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $\frac{AD}{DB} > 0$. Eli piste D on pisteiden A ja B välissä, kun taas pisteet E ja F eivät ole pisteiden B ja C sekä pisteiden A ja C välissä.

Koska suorat ovat yhdensuuntaiset, niin verrattuna lauseen 2.1 tilanteeseen suora $S(B,F)$ vastaa suoraa $S(P_1,P_2)$, suora $S(A,E)$ vastaa suoraa $S(P_3,P_4)$ ja piste C pistettä P. Tästä ja tiedoista $|BE| = |BC| + |CE|$ ja $|AF| = |AC| + |CF|$ seuraa

$$\begin{aligned}
\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|CF|}{|AC|} \quad &\iff \quad \frac{|BC|}{|CE|} + 1 = \frac{|CF|}{|AC|} + 1\\
&\iff \quad \frac{|BC| + |EC|}{|EC|} = \frac{|CF| + |AC|}{|AC|}\\
&\iff \quad \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|FA|}{|AC|}.
\end{aligned}$$

Ottamalla itseisarvot yhtälöstä (21) ja sijoittamalla sinne saatu tieto $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|FA|}{|AC|}$ saadaan $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CF|}$. Tästä päästään tilanteeseen, missä

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CF|} \quad \iff \quad \frac{|AD|}{|DB||AC|} = \frac{1}{|CF|} \quad \iff \quad \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|CF|} = k,$$

jollain vakiolla $k \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan seuraavaksi suhdetta $\frac{|AB|}{|AF|}$. Käyttämällä oletusta $\frac{AD}{DB} > 0$ sekä laventamalla osoittajaa pituudella $|AC|$ ja nimittäjää pituudella $|DB|$, saadaan

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|AF|} &= \frac{\frac{|AB||AC|}{|AC|}}{\frac{|AF||DB|}{|DB|}} = \frac{\frac{(|AD|+|DB|)|AC|}{|AC|}}{\frac{(|AC|+|CF|)|DB|}{|DB|}} = \frac{\frac{|AD||AC|}{|AC|} + \frac{|DB||AC|}{|AC|}}{\frac{|AC||DB|}{|DB|} + \frac{|CF||DB|}{|DB|}} \\ &= \frac{k|AC| + |DB|}{|AC| + \frac{1}{k}|DB|} = \frac{k|AC| + |DB|}{\frac{k|AC|+|DB|}{k}} = \frac{k(k|AC| + |DB|)}{k|AC| + |DB|} = k.\end{aligned}$$

Nyt kolmioilla ΔACD ja ΔABF on molemmilla sama kulma kärjessä α ja janojen suhde $\frac{|AC|}{|AF|}$ ja $\frac{|AD|}{|AB|}$ on sama vakio k, joten lauseen 3.8 kohdan 2 nojalla kyseiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Tällöin myös viimeistenkin kolmioiden sivujen suhteen on oltava sama eli $\frac{|DC|}{|BF|} = k$. Saadaan siis yhtälö

$$\frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BF|},$$

jolloin lauseen 2.4 nojalla joko suorat $S(B, F)$ ja $S(C, D)$ ovat yhdensuuntaisia tai lauseen toinen tilanne on voimassa. Jälkimmäinen ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä pisteen C olisi oltava joko pisteiden B ja F välissä tai pisteiden A ja E välissä. Täten suorien $S(B, F)$ ja $S(C, D)$ on siis oltava yhdensuuntaisia, jolloin siis suorat $S(A, E)$, $S(B, F)$ ja $S(C, D)$ ovat yhdensuuntaiset.

Tapauksessa, jossa suorat $S(B, F)$ ja $S(A, E)$ leikkaavat pisteessä P, suora $S(P, C)$ leikkaa suoraa $S(A, B)$ pisteessä D'. Koska suorat $S(A, E), S(B, F)$ ja $S(C, D')$ leikkaavat samassa pisteessä, niin

$$\frac{AD'}{D'B}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA} = 1.$$

Täten saadaan

$$\frac{AD'}{D'B} = \frac{AD}{DB}$$

ja koska

$$\overrightarrow{AB} = \frac{AD}{DB}\overrightarrow{DB} \quad \text{sekä} \quad \overrightarrow{AB} = \frac{AD'}{D'B}\overrightarrow{D'B},$$

niin

$$\begin{aligned} & \frac{AD}{DB}\overrightarrow{DB} = \frac{AD'}{D'B}\overrightarrow{D'B} \\ \iff & \frac{AD'}{D'B}\overrightarrow{DB} = \frac{AD'}{D'B}\overrightarrow{D'B} \\ \iff & \overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

On siis oltava $D = D'$. □

LUKU 4

Kolmion merkilliset pisteet

Tässä luvussa esitellään neljä kolmion merkillisistä pisteistä. Ensimmäinen kolmion merkillisistä pisteistä on korkeusjanojen leikkauspiste. Korkeusjanoilla tarkoitetaan janoja, jotka lähtevät kolmion kärjistä ja ovat kohtisuorassa kärkeä vastakkaisen sivun tai sivun jatkeen suhteen. Toisena kolmion merkillisenä pisteenä esitellään keskijanojen leikkauspiste. Keskijanat ovat kolmion kärjistä vastakkaisen sivun keskipisteeseen kulkevia janoja. Kolmantena kolmion merkillisenä pisteenä on keskinormaalien leikkauspiste, jossa kolmion sivujen keskipisteistä piirretyt kohtisuorat suorat leikkaavat. Viimeisenä kolmion merkillisistä pisteistä esitellään kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Luvun lopuksi esitellään Eulerin suora, joka saadaan aikaan kolmion merkillisten pisteiden avulla.

4.1. Kolmion neljä merkillistä pistettä

Kolmion merkilliset pisteet ovat löydetty ja niiden olemassaolo on todistettu samoihin aikoihin kuin Eukleideen geometria on saanut alkunsa, nimittäin Eukleides on näistä kolmion merkillisistä pisteistä löytänyt ja todistanut kaksi. Kyseiset pisteet ovat keskinormaalien ja kulmanpuolittajien leikkauspisteet. Hieman myöhemmin, samalla vuosisadalla kuin Eukleides, Arkhimedes onnistui todistamaan korkeusjanojen leikkaavan yhdessä pisteessä. Kyseinen todistus kuitenkin katosi ja vasta 1600-luvulla onnistuttiin uudelleen todistamaan leikkauspiste todeksi. Arkhimedes löysi myös mediaanien leikkauspisteen ja onnistui todistamaan tämän olemassaolon kahdella eri tavalla. [**4**]

Todistetaan kappaleen aluksi monille tuttu Pythagoraan lause kosinilauseen avulla. Pythagoraan lausetta sovelletaan heti ensimmäisessä kolmion merkillisen pisteen todistuksessa eli tuloksessa, joka kertoo kolmion korkeusjanojen leikkaavan yhdessä pisteessä. Korkeusjanojen leikkauspisteiden todistus jakautuu kahteen tapaukseen, jossa ensimmäisessä kolmio on teräväkulmainen kolmio ja toisessa tylppäkulmainen.

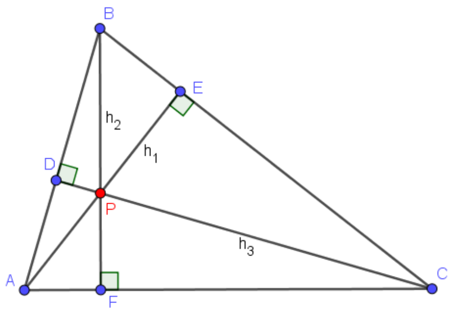
Lause 4.1. (Pythagoraan lause) *Suorakulmaiselle kolmiolle pätee*

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2,$$

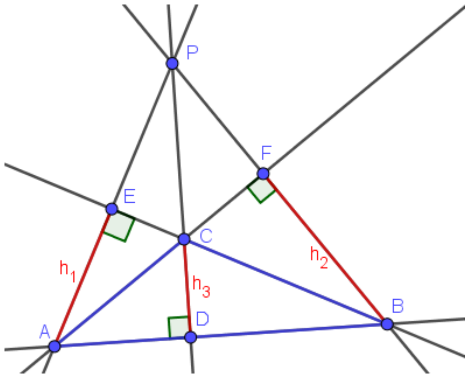
missä $|AB|$ *on suoran kulman vastakkaisen sivun pituus ja* $|BC|$ *sekä* $|AC|$ *suoran kulman viereisten sivujen pituudet.*

TODISTUS. Kun $\gamma = 90°$, niin $\cos(90°) = 0$. Sijoitetaan tämä kosinilauseen kaavaan (12), jolloin jäljelle jää haluttu yhtälö

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC||AC|\cos(90°) \\ &= |BC|^2 + |AC|^2. \end{aligned}$$



(A) Teräväkulmainen kolmio



(B) Tylppäkulmainen kolmio

Kuva 1. Lause 4.2

□

Lause 4.2. *Olkoon ΔABC kolmio ja h_1, h_2 ja h_3 kolmion korkeusjanat. Tällöin korkeusjanat leikkaavat pisteessä P.*

Todistus. Todistetaan lause aluksi tilanteessa, jossa kolmio on teräväkulmainen. Korkeusjanat h_1, h_2 ja h_3 leikkaavat kolmion sivuja siten, että jana h_1 leikkaa janaa BC pisteessä E, jana h_2 leikkaa janaa AC pisteessä F ja jana h_3 leikkaa janaa AB pisteessä D. Lisäksi korkeusjanat muodostavat kuusi suorakulmaista kolmiota, joista saadaan lauseen 4.1 avulla

$$
\begin{aligned}
|AD|^2 + h_3^2 &= |AC|^2 = h_1^2 + |EC|^2 \\
|DB|^2 + h_3^2 &= |BC|^2 = |FC|^2 + h_2^2 \\
h_1^2 + |BE|^2 &= |AB|^2 = |AF|^2 + h_2^2.
\end{aligned}
$$

Vähentämällä yhtälöstä $|AC|^2 = h_1^2 + |EC|^2$ yhtälö $|AB|^2 = h_1^2 + |BE|^2$ päästään muotoon

$$
\begin{aligned}
|AC|^2 - |AB|^2 &= h_1^2 + |EC|^2 - (h_1^2 + |BE|^2) \\
|AC|^2 - |AB|^2 &= h_1^2 + |EC|^2 - h_1^2 - |BE|^2 \\
|AB|^2 + |EC|^2 &= |AC|^2 + |BE|^2. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Vastaavalla tavalla saadaan yhtälöt

$$|BC|^2 + |AF|^2 = |AB|^2 + |FC|^2 \quad \text{ja} \qquad (23)$$

$$|BC|^2 + |AD|^2 = |AC|^2 + |DB|^2. \qquad (24)$$

Vähennetään yhtälöstä (22) yhtälö (23) ja käytetään tietoja $|AC| = |AF| + |FC|$ ja $|BC| = |BE| + |EC|$, jolloin yhtälö sieventyy muotoon

$$\begin{aligned}
&|AB|^2 + |EC|^2 - (|AB|^2 + |FC|^2) = |AC|^2 + |BE|^2 - (|BC|^2 + |AF|^2) \\
\iff\ &|EC|^2 - |FC|^2 = (|AF| + |FC|)^2 + |BE|^2 - (|BE| + |EC|)^2 - |AF|^2 \\
\iff\ &|EC|^2 - |FC|^2 = |AF|^2 + 2|AF|\,|FC| + |FC|^2 + |BE|^2 - |BE|^2 \\
&\qquad - 2|BE|\,|EC| - |EC|^2 - |AF|^2 \\
\iff\ &2|EC|^2 + 2|BE|\,|EC| = 2|FC|^2 + 2|AF|\,|FC| \\
\iff\ &|EC|^2 + |BE|\,|EC| = |FC|^2 + |AF|\,|FC| \\
\iff\ &|EC|(|BE| + |EC|) = |FC|(|AF| + |FC|) \\
\iff\ &|EC|\,|BC| = |FC|\,|AC|.
\end{aligned}$$

Vastaavasti vähentämällä yhtälöstä (22) yhtälö (24), saadaan

$$|DB|\,|AB| = |BE|\,|BC|,$$

ja vähentämällä yhtälöstä (23) yhtälö (24), saadaan

$$|AF|\,|AC| = |AD|\,|AB|.$$

Nyt kertomalla saatujen yhtälöiden oikeat puolet ja vasemmat puolet yhteen

$$|EC|\,|BC|\,|DB|\,|AB|\,|AF|\,|AC| = |FC|\,|AC|\,|BE|\,|BC|\,|AD|\,|AB|,$$

jolloin sieventämällä päädytään yhtälöön

$$\begin{aligned}
&|EC|\,|DB|\,|AF| = |FC|\,|BE|\,|AD| \\
\iff\ &\frac{|AD|\,|BE|\,|FC|}{|DB|\,|EC|\,|AF|} = 1.
\end{aligned}$$

Koska vastaavat jakosuhteet ovat positiivisia, niin

$$\frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{FC}{AF} = 1.$$

Täten lauseen 3.10 nojalla pätee, että korkeusjanat leikkaavat pisteessä P.

Todistetaan seuraavaksi tapaus, jossa kolmio on tylppäkulmainen. Olkoon E se piste, missä kärjestä A piirretty korkeusjana h_1 leikkaa suoran $S(B, C)$. Vastaavasti olkoon F piste, missä kärjestä B piirretty korkeusjana h_2 leikkaa suoran $S(A, C)$ ja D piste, missä kärjestä C piirretty korkeusjana h_3 leikkaa suoran $S(A, B)$. Oletetaan, että piste D on tylppää kärkeä C vastaavalla sivulla, eli $D \in AB$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(|AD| + |DB|)^2 &= h_1^2 + |BE|^2 = h_2^2 + |FA|^2 \\
(|BE| - |EC|)^2 &= h_3^2 + |DB|^2 = h_2^2 + |CF|^2 \\
(|FA| - |CF|)^2 &= h_3^2 + |AD|^2 = h_1^2 + |EC|^2.
\end{aligned}$$

Ratkaisemalla yhtälöistä korkeusjanat h_1, h_2, h_3 ja sijoittamalla korkeusjanoja toisiinsa, yhtälöt muokkautuvat seuraavanlaisiksi

$$(|AD| + |DB|)^2 + |EC|^2 = (|FA| - |CF|)^2 + |BE|^2 \tag{25}$$

$$(|AD| + |DB|)^2 + |CF|^2 = (|BE| - |EC|)^2 + |FA|^2 \tag{26}$$

$$(|BE| - |EC|)^2 + |AD|^2 = (|FA| - |CF|)^2 + |DB|^2. \tag{27}$$

Vähentämällä yhtälöstä (25) yhtälö (26)

$$\begin{aligned}
&(|AD| + |DB|)^2 + |EC|^2 - (|AD| + |DB|)^2 - |CF|^2 \\
&= (|FA| - |CF|)^2 + |BE|^2 - (|BE| - |EC|)^2 - |FA|^2 \\
&\iff |EC|^2 - |CF|^2 = |CF|^2 - 2|CF|\,|FA| + |FA|^2 + |BE|^2 \\
&\qquad\qquad - |EC|^2 + 2|EC|\,|BE| - |BE|^2 - |FA|^2 \\
&\iff 2|EC|^2 - 2|EC|\,|BE| = 2|CF|^2 - 2|CF|\,|FA| \\
&\iff |EC|(|EC| - |BE|) = |CF|(|CF| - |FA|).
\end{aligned}$$

Vastaavasti vähentämällä yhtälöstä (25) yhtälö (27)

$$\begin{aligned}
&(|AD| + |DB|)^2 + |EC|^2 - (|BE| - |EC|)^2 - |AD|^2 \\
&= (|FA| - |CF|)^2 + |BE|^2 - (|FA| - |CF|)^2 - |DB|^2 \\
&\iff |BE|^2 - |DB|^2 = |AD|^2 + 2|AD|\,|DB| + |DB|^2 + |EC|^2 \\
&\qquad\qquad - |EC|^2 + 2|EC|\,|BE| - |BE|^2 - |AD|^2 \\
&\iff 2|AD|\,|DB| + 2|DB|^2 = 2|BE|^2 - 2|EC|\,|BE| \\
&\iff |DB|(|AD| + |DB|) = |BE|(|BE| - |EC|).
\end{aligned}$$

Vähennetään vielä yhtälöstä (26) yhtälö (27)

$$\begin{aligned}
&(|AD| + |DB|)^2 + |CF|^2 - (|FA| - |CF|)^2 - |DB|^2 \\
&= (|BE| - |EC|)^2 + |FA|^2 - (|BE| - |EC|)^2 - |AD|^2 \\
\iff &(|AD| + |DB|)^2 - |DB|^2 + |AD|^2 = (|FA| - |CF|)^2 + |FA|^2 - |CF|^2 \\
&\iff 2|AD|^2 + 2|AD|\,|DB| = 2|FA|^2 - 2|FA|\,|CF| \\
&\iff |AD|(|AD| + |DB|) = |FA|(|FA| - |CF|).
\end{aligned}$$

Nyt kertomalla nämä saadut kolme yhtälöä keskenään, saadaan

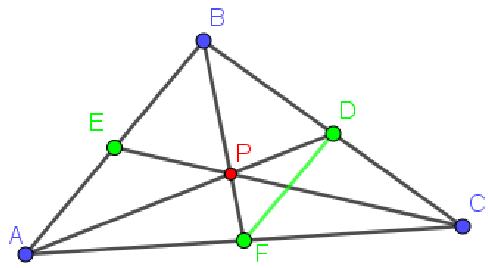
$$\begin{aligned}
&|EC|(|EC| - |BE|)|DB|(|AD| + |DB|)|FA|(|FA| - |CF|) \\
&= |CF|(|CF| - |FA|)|BE|(|BE| - |EC|)|AD|(|AD| + |DB|),
\end{aligned}$$

jota voidaan sieventää muotoon

$$|EC|\,|DB|\,|FA| = |CF|\,|BE|\,|AD|.$$

Jaetaan koko yhtälö yhtälön vasemmalla puolella, jolloin

$$\frac{|AD|\,|BE|\,|CF|}{|DB|\,|EC|\,|FA|} = 1.$$



KUVA 2. Lause 4.3

Nyt jakosuhteet $\frac{CF}{FA}$ ja $\frac{BE}{EC}$ ovat negatiivisia ja $\frac{AD}{DB}$ positiivinen. Tällöin luku on positiivinen, eli

$$\frac{AD}{DB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{AF} = 1$$

ja lauseen 3.10 nojalla korkeusjanat leikkaavat yhdessä pisteessä. □

Lause 4.3. *Olkoon ΔABC kolmio. Kolmion keskijanat leikkaavat pisteessä P. Lisäksi piste P jakaa jokaisen keskijanan suhteessa $2:1$.*

TODISTUS. Olkoon piste E janan AB keskipiste, piste F janan AC keskipiste ja D janan BC keskipiste. Koska

$$\frac{AE}{EB} = 1, \quad \frac{BD}{DC} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{AF}{FC} = 1,$$

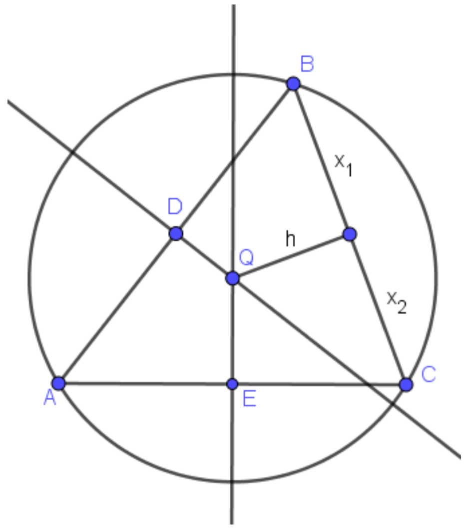
niin lauseen 3.10 nojalla keskijanat leikkaavat yhdessä pisteessä, eli piste P on olemassa. Lauseen 3.8 kohdasta 2 seuraa, että kolmiot ΔFDC ja ΔABC ovat yhdenmuotoiset, sillä molemmissa on kärkeä C vastaava kulma ja $\dfrac{|BC|}{|DC|} = \dfrac{|AC|}{|FC|} = 2$. Tällöin janan DF pituus on $\dfrac{|AB|}{2}$ eli $\dfrac{|AB|}{|DF|} = 2$, jolloin saadaan yhtälö

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|FC|} = \frac{|AB|}{|DF|}.$$

Kun verrataan tilannetta lauseen 2.4 tilanteeseen, huomataan, että lauseen 2.4 piste P vastaa nyt pistettä C, piste P_1 pistettä A, piste P_2 pistettä B, piste P_3 pistettä F, piste P_4 pistettä D sekä suora $S(P, P_1)$ suoraa $S(A, C)$ ja suora $S(P, P_2)$ suoraa $S(B, C)$. Tällöin lauseen 2.4 nojalla joko suorat $S(A, B)$ ja $S(D, F)$ ovat yhdensuuntaiset tai lauseen 2.4 kohdat 1.-3. ovat voimassa. Kohdat 1.-3. eivät ole voimassa, sillä jos piste C olisi pisteiden A ja F tai pisteiden B ja D välissä, niin $|AF| > |AC|$ tai $|BD| > |BC|$. Suorien $S(A, B)$ ja $S(D, F)$ on siis oltava yhdensuuntaisia.

Kun sovelletaan lausetta 2.1 suoriin $S(B, F)$ ja $S(A, D)$ sekä yhdensuuntaisiin suoriin $S(A, B)$ ja $S(D, F)$, huomataan jälleen, että lauseen 2.1 piste P vastaa nyt pistettä P, piste P_1 pistettä A, piste P_2 pistettä B, piste P_3 pistettä D, piste P_4 pistettä F sekä suora $S(P, P_1)$ suoraa $S(A, D)$ ja suora $S(P, P_2)$ suoraa $S(B, F)$. Tällöin saadaan yhtälö

$$\frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|AB|}{|DF|} = 2,$$



KUVA 3. Lause 4.4

mikä todistaa väitteen. □

Todistetaan seuraavaksi keskinormaalien leikkauspisteen P olemassaolo. Etäisyys pisteestä P kolmion kaikkiin kärkiin on sama eli kyseinen kolmion merkillinen piste toimii sellaisen ympyrän keskipisteenä, jonka kehällä kolmion kärjet ovat. Kolmio jääympyrän sisälle.

Lause 4.4. *Olkoon ΔABC kolmio. Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat pisteessä P. Lisäksi pisteen P etäisyys kaikkiin kolmion kärkiin on sama.*

TODISTUS. Koska janat AB ja AC eivät ole yhdensuuntaisia, niin näiden janojen keskinormaalit leikkaavat pisteessä Q. Olkoon piste D janan AB keskipiste. Kolmiot ΔAQD ja ΔDQB ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on kaksi yhtenevää sivua, janat DQ ja $|AD| = |DB|$. Tällöin Pythagoraan lauseen nojalla

$$|AQ| = |BQ|. \tag{28}$$

Olkoon piste E janan AB keskipiste. Vastaavasti kolmiot ΔAQE ja ΔQEC ovat yhtenevät, jolloin

$$|AQ| = |CQ|. \tag{29}$$

Yhdistämällä yhtälöt (28) ja (29) yhdeksi yhtälöksi, saadaan

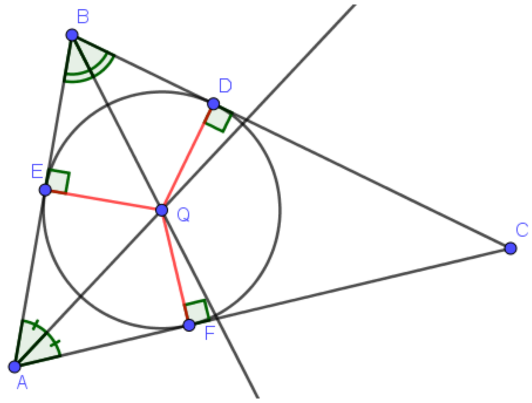
$$|BQ| = |AQ| = |CQ|,$$

eli piste Q on yhtä kaukana kärjistä A, B ja C.

Kun piirretään pisteestä Q kohtisuora jana h suoralle $S(B, C)$, jakaa leikkauspiste janan BC kahteen osaan, x_1 ja x_2. Täten Pythagoraan lauseen nojalla

$$x_1^2 + h^2 = |BQ|^2 \quad \text{ja}$$
$$x_2^2 + h^2 = |CQ|^2,$$

eli on oltava $x_1 = x_2$. Koska jana h jakaa janan BC kahteen yhtäsuureen osaan ja on kohtisuorassa suoraa $S(B, C)$ nähden, niin myös janan BC keskinormaalin on kuljettava pisteen Q kautta. Siispä on oltava $Q = P$. □



KUVA 4. Lause 4.5

Viimeisenä kolmion merkillisenä pisteenä esitellään ja todistetaan kulmanpuolittajien leikkauspiste. Keskinormaalien leikkauspisteiden tapaan myös kulmanpuolittajien leikkauspiste toimii ympyrän keskipisteenä. Kyseinen ympyrä muodostuu nyt kolmion sisälle ja sivuaa kaikkia kolmion sivuja. Tämä on esitellyistä kolmion merkillisistä pisteistä se, joka ei sisälly myöhemmin todistettavaan Eulerin suoraan.

Lause 4.5. *Olkoon ΔABC kolmio. Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat pisteessä P.*

TODISTUS. Tiedetään, että kolmion kaksi kulmanpuolittajaa leikkaavat pisteessä Q. Piirretään pisteestä Q kohtisuorat janat kolmion jokaiselle sivulle, jolloin leikkauspiste D leikkaa janaa BC, leikkauspiste E leikkaa janaa AB ja leikkauspiste F leikkaa janaa AC. Koska jana AQ jakaa kärjessä A olevan kulman kahteen yhtä suureen osaan ja koska kulmat $\measuredangle QFA$ ja $\measuredangle AEQ$ ovat suoria kulmia, on kolmioilla ΔAFQ ja ΔAEQ kaksi yhtä suurta kulmaa. Lauseen 3.3 nojalla myös kolmansien kulmien on oltava yhtä suuret. Koska kolmioilla on sama jana AQ sekä janan AQ viereiset kulmat yhtä suuret molemmissa kolmioissa, ovat kolmiot lauseen 3.7 kohdan 4 nojalla yhtenevät. Täten siis

$$|FQ| = |EQ|. \tag{30}$$

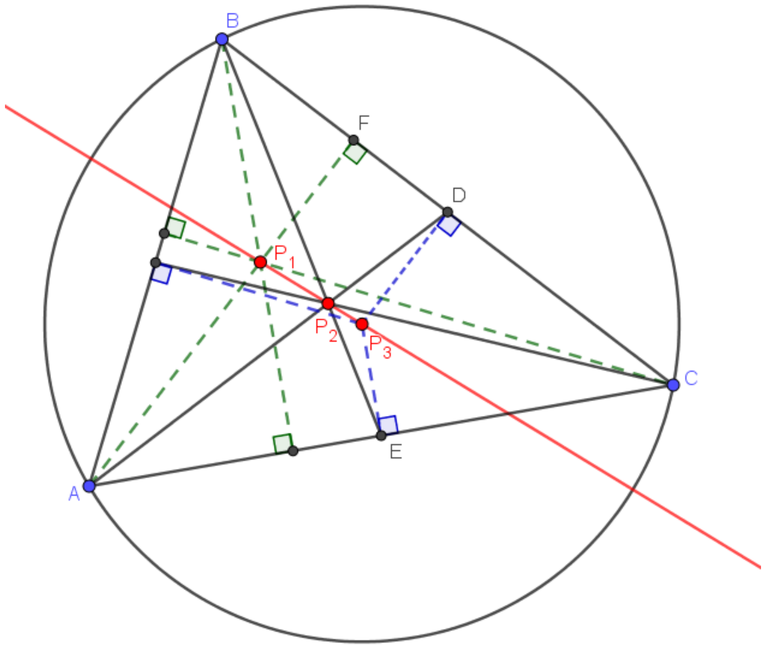
Vastaavasti kolmiot ΔBDQ ja ΔBEQ ovat yhtenevät, jolloin

$$|DQ| = |EQ|. \tag{31}$$

Yhdistämällä yhtäsuuruudet (30) ja (31), saadaan

$$|DQ| = |FQ|.$$

Nyt kolmioilla ΔQFC ja ΔQDC on kaksi samanmittaista sivua eli sivut $|DQ| = |FQ|$ ja $|QC|$ sekä yhtä suuret kulmat, jotka ovat suoria kulmia. Lauseen 3.7 kohdan 3 nojalla kolmiot ΔQFC ja ΔQEC ovat yhtenevät, joten $\measuredangle DCQ = \measuredangle QCF$. Jana QC puolittaa kulman C, eli on oltava $Q = P$. □



KUVA 5. Lause 4.6

4.2. Eulerin suora

Kolme edellä esitetyistä kolmion merkillisistä pisteistä ovat aina samalla suoralla ja tätä suoraa kutsutaan Eulerin suoraksi. Kyseiset pisteet ovat korkeusjanojen leikkaupiste, keskijanojen leikkauspiste sekä keskinormaalien leikkauspiste. Lisäksi näistä pisteistä keskijanojen leikkauspiste sijaitsee aina kahden muun pisteen välissä.

Euler eli 1700-luvulla tehden merkittävää työtä monella matematiikan alalla. Hän teki geometriaa analyyttisesti ja löysi Eulerin suoran analyyttisten laskujen avulla. Vasta Gauss seuraavalla vuosisadalla onnistui todistamaan Eulerin suoran olemassaolon geometrian apukeinoin. [**4**, s. 91, 214].

Lause 4.6. (Eulerin suora) *Olkoot pisteet P_1, P_2 ja P_3 siten, että piste P_1 on kolmion korkeusjanojen leikkauspiste, piste P_2 on kolmion keskijanojen leikkauspiste ja piste P_3 kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Jos $P_1 \neq P_3$, niin pisteet P_1, P_2 ja P_3 ovat samalla suoralla ja ne jakavat janan P_1P_3 suhteessa*

$$|P_2P_1| : |P_1P_3| = 2 : 1.$$

HUOMAUTUS 4.7. Jos lauseen 4.6 oletus $P_1 \neq P_3$ ei ole voimassa, niin kyseessä on tasasivuinen kolmio ja $P_1 = P_2 = P_3$.

TODISTUS. Olkoon piste D janan BC keskipiste, piste E janan AC keskipiste sekä piste F sivun BC korkeusjanan leikkauspiste. Lemmasta 3.1 seuraa, että seuraavat suorat ovat yhdensuuntaisia:

1. $S(A, P_1)||S(D, P_3)$, sillä molemmat ovat kohtisuorassa janaan BC nähden ja
2. $S(B, P_1)||S(E, P_3)$, sillä molemmat ovat kohtisuorassa janaan AC nähden.

Lisäksi kuten lauseen 4.3 todistuksessa jana DE on kolmion ΔABC kahden sivun keskipisteiden välinen jana, jolloin

3. $S(A,B)||S(D,E)$ ja suhde $|AB|:|DE|=2:1$

Lauseen 3.2 ensimmäisen kohdan nojalla sekä tiedosta $S(B,P_1)||S(E,P_3)$ seuraa, että kulma $\measuredangle DEP_3$ on samankohtainen sellaisen kulman kanssa, joka muodostuu suorien $S(B,P_1)$ ja $S(D,E)$ välille. Tämä kulma on puolestaan samankohtainen kulman $\measuredangle ABP_1$ kanssa lauseen 3.2 toisen kohdan nojalla, sillä $S(A,B)||S(D,E)$.

Vastaavalla päättelyllä kulmat $\measuredangle P_1AB$ ja $\measuredangle P_3DE$ ovat yhtä suuret. Nyt kolmioilla ΔABP_1 ja ΔDEP_3 on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten lauseen 3.8 kohdan 4. nojalla kyseiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Koska janojen AB ja DE suhde on $2:1$, niin myös muiden vastinsivujen suhde on oltava $2:1$. Tästä seuraa, että

$$|AP_1|:|DP_3|=2:1.$$

Kulma $\measuredangle FDA$ on pienempi kuin $\frac{\pi}{2}$, koska kolmion ΔADF kulma $\measuredangle AFD$ on suora kulma. Toisaalta kulma $\measuredangle FDP_3$ on suora kulma, jolloin pisteet P_1 ja P_3 eivät ole janalla AD. Olkoon P' janojen AD ja P_1P_3 leikkauspiste. Tällöin

(i) $\measuredangle P_1P'A=\measuredangle DP'P_3$, sillä kulmat ovat ristikulmat suoriin $S(A,D)$ ja $S(P_1,P_3)$ nähden.

(ii) $\measuredangle P_1AP'=\measuredangle P_3DP'$, sillä suorat $S(A,P_1)$ ja $S(D,P_3)$ ovat yhdensuuntaiset, jolloin lauseen 3.2 toisen kohdan nojalla kulmista tulee samankohtaiset.

Siispä kolmiot $\Delta AP_1P'$ ja $\Delta DP_3P'$ ovat yhdenmuotoiset ja $|AP_1|:|DP_3|=2:1$. Tästä seuraa myös, että

$$|AP'|:|DP'|=2:1 \quad \text{ja} \quad |P'P_1|:|P'P_3|=2:1.$$

Siispä piste P' jakaa janan AD suhteessa $2:1$. Lisäksi piste P_2 jakaa sivun samassa suhteessa, jolloin pisteiden P' ja P_2 on oltava sama piste, eli $P'=P_2$. Täten piste P_2 on samalla suoralla pisteiden P_1 ja P_3 kanssa ja väite seuraa yhtälöistä

$$|P_2P_1|:|P_2P_3|=|P'P_1|:|P'P_3|=2:1.$$

$\square$

Kirjallisuutta

[1] Ilka Agricola ja Thomas Friedrich: *Elementary Geometry.* Ensimmäinen painos, American Mathematical Society, 2008.

[2] Carl B. Boyer, suom. Kimmo Pietiläinen: *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia I.* Kolmas painos, Art House Oy, 1991.

[3] Carl B. Boyer, suom. Kimmo Pietiläinen: *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia II.* Kolmas painos, Art House Oy, 1991.

[4] Alexander Ostermann ja Gerhard Wanner: *Geometry by Its History.* Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[5] John Stillwell: *The Four Pillars of Geometry*, Springer Science+Business Media Inc, 2005.