Derivaatta ja väliarvolause

Alexandra Zykina

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
syksy 2019

Tiivistelmä: Alexandra Zykina, *Derivaatta ja väliarvolause*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 45 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2019.

Tässä tutkielmassa käsitellään derivaattaa ja derivoituvuutta yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden, usean reaalimuuttujan funktioiden ja yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoisten funktioiden tapauksissa. Lisäksi käydään läpi derivoituvien, differentioituvien ja analyyttisten funktioiden perusominaisuuksia (muun muassa derivointisääntöja kussakin tapauksessa) määritelmien, lauseiden, todistusten ja esimerkkien avulla. Tämä mahdollistaa kyseisten funktioluokkien yhtäläisyyksien ja erojen tarkastelun. Tutkielmassa huomataan esimerkiksi, että kompleksisesta derivoituvuudesta seuraa automaattisesti derivoituvuus äärettömän monta kertaa, mutta reaalisen derivoituvuuden tapauksessa tämä ei tietenkään päde. Kolmannessa luvussa käydään lyhyesti läpi Cauchyn ja Riemannin yhtälöt ja niiden yhteys analyyttisiin funktioihin. Lopuksi tarkastellaan Rollen lausetta ja väliarvolausetta eri tilanteissa. Tutkielmassa esitellään lisäksi esimerkkejä ja sovelluksia aiheeseen liittyen. Lukujen 1, 3 ja 4 alussa käsitellään lyhyesti aiheeseen liittyvää historiaa.

Tutkielman jälkeen lukija on esimerkiksi tietoinen siitä, että Rollen lause ja väliarvolause eivät suoraan sovellu usean reaalimuuttujan funktioille, eivätkä analyyttisille funktioille. Kuitenkin molemmista lauseista voidaan johtaa ja todistaa näille funktioille soveltuvat versiot.

Tutkielman tarkoituksena on antaa lukijalle hyvä ja tiivistetty kokonaiskuva derivaatasta ja derivoituvuudesta eri tilanteissa, tuoda esille eri tilanteiden välisiä eroja niin teorian kuin esimerkkienkin osalta sekä tarkastella, miten Rollen lause ja väliarvolause muuttuvat tilanteesta riippuen.

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään derivaattaa ja derivoituvuutta erilaisissa tilanteissa. Tutkielmassa tarkastellaan derivoituvien, differentioituvien ja analyyttisten funktioiden yhtäläisyyksiä ja eroja. Lisäksi tutkielmassa tärkeässä roolissa ovat Rollen lause ja väliarvolause. Väliarvolauseen paikkaansa pitävyyttä eri tilanteissa on tärkeää tarkastella, koska se on yksi matematiikan merkityksellisimmistä lauseista. Esimerkiksi funktioiden kulun tutkimista koskevien lauseiden todistamisen yhteydessä väliarvolause on tärkeä.

Tämän tutkielman ensimmäisessä luvussa käsitellään lyhyesti derivaatan historiaa ja määritellään derivaatta ja derivoituvuus kolmessa eri tapauksessa. Ensin käydään läpi derivaatta ja derivoituvuus yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa aloittaen derivaatan geometrisesta tulkinnasta. Tämän jälkeen määritellään funktion derivoituvuus ja derivaatta pisteessä x_0 ja käsitellään aiheeseen liittyviä esimerkkejä. Usean reaalimuuttujan funktioiden tapauksessa määritellään muun muassa osittais- ja suuntaisderivaatat sekä differentioituvuus. Luvun kolmannessa osiossa tarkastellaan vielä yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoisten funktioiden differentioituvuutta aloittaen muutamalla esitiedolla liittyen kompleksilukuihin.

Tutkielman toisessa luvussa tarkastellaan derivoituvien, differentioituvien ja analyyttisten funktioiden perusominaisuuksia. Luvussa käydään läpi muun muassa joitakin derivointisääntöjä todituksineen kussakin tapauksessa. Lisäksi differentioituvien funktioiden yhteydessä määritellään funktion gradientti.

Kolmannen luvun aiheena ovat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Nämä ovat ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, jotka antavat riittävän ja välttämättömän ehdon yhden kompleksimuuttujan funktion kompleksiselle derivoituvuudelle. Luvun alussa käydään lyhyesti Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden historiaa ja muutama aiheeseen liittyvä esitieto. Näiden lisäksi luku koostuu kahdesta lauseesta ja muutamasta havainnollistavasta esimerkistä.

Viimeinen luku käsittelee Rollen lausetta ja väliarvolausetta. Aluksi on lyhyt historiaosio molemmista tuloksista. Tämän jälkeen käydään läpi Rollen lause, väliarvolause ja Cauchyn väliarvolause todistuksineen yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa. Usean reaalimuuttujan funktioiden tapauksessa väliarvolauseen todistamista ennen esitellään muutama aputulos. Vastaavasti moniulotteisen Rollen lauseen esittämiseksi tarvitaan muutama aputulos ja apumerkintä. Yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoisten funktioiden tapauksessa todistetaan kompleksinen Rollen lause ja kompleksinen väliarvolause.

Jokaisen kappaleen alussa on mainittu tärkeimmät kappaleessa käytetyt lähteet.

LUKU 1

Derivaatta ja derivoituvuus

Tässä luvussa käydään läpi lyhyesti derivaatan ja derivoituvuuden historiaa, määritellään derivaatta ja derivoituvuus yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden, usean reaalimuuttujan funktioiden sekä yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoisten funktioiden tapauksissa.

1.1. Historia

Derivaatan käsitteen esittivät ensimmäisenä 1600-luvulla englantilainen matematiikko Sir Isaac Newton (1642 - 1726) ja saksalainen matemaatikko Gottfried Leibniz (1646 - 1716). 1700-luvun lopulla sana ”derivaatta” otettiin käyttöön italialais-ranskalaisen matemaatikon Joseph-Louis Lagrangen (1736 - 1813) toimesta.

Aluksi tutkittiin suureen muuttumista muuttujan arvon muuttamisen avulla. Tähän otettiin avuksi käyttöön infinitesimaalin käsite. Derivaatta määriteltiin funktion arvon muutosnopeudeksi muuttujan muuttuessa vain infinitesimaalisen vähän. Infinitesimaalit on 1900-luvulta lähtien korvattu raja-arvon käsitteellä ja muutosnopeuden keskiarvo annetulla välillä on korvattu erotusosamäärällä. Kun annettua väliä pienennetään rajatta, saadaan derivaatan arvo erotusosamäärän raja-arvona. [**10**]

1.2. Yhden reaalimuuttujan reaaliarvoiset funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**1**] ja [**2**].

Tarkastellaan alkuun derivaattaa geometrisesta näkökulmasta. Olkoot $f\colon \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ funktio, $x_0 \in \,]a,b[$ ja $h \neq 0$ siten, että $x_0 + h \in \,]a,b[$. Pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0+h, f(x_0+h))$ kautta kulkevaa suoraa S_h sanotaan funktion f kuvaajan *sekantiksi*, jonka yhtälö on muotoa

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}\right)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)(x - x_0) + f(x_0). \end{aligned}$$

Suoran S_h kulmakerroin (Kuva 1) on

$$k_h = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Jos $h \to 0$ ja tutkitaan sekanttisuorien kulmakertoimien raja-arvoa (oletetaan, että tämä raja-arvo on äärellisenä olemassa) $\lim\limits_{h \to 0} k_h = k \in \mathbb{R}$, niin sekanttisuora lähestyy suoraa S, jonka yhtälö on $y = k(x - x_0) + f(x_0)$. Tällöin kaikki suorat S_h sekä suora S kulkevat pisteen $(x_0, f(x_0))$ kautta ja kulmakerroin $k = \lim_{h\to 0} k_h$ kuvaa funktion f hetkellistä kasvunopeutta pisteessä x_0.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Funktio $f\colon \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ on *derivoituva pisteessä* $x_0 \in \,]a,b[$, jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Merkitään

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

jolloin $f'(x_0)$ on *funktion f derivaatta pisteessä* x_0.

ESIMERKKI 1.2. (a) Lasketaan vakiofunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ derivaatta. Tällöin

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Näin ollen kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$.

(b) Lasketaan funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ derivaatta pisteessä $x_0 = 2$. Määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4 + h \\ &= 4. \end{aligned}$$

Seuraavaksi tarkastellaan funktion toispuoleisia derivaattoja:

MÄÄRITELMÄ 1.3. Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *vasemmanpuoleinen derivaatta* $f'_-(x_0)$ pisteessä $x_0 \in \,]a,b]$ on

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa. Funktion f *oikeanpuoleinen derivaatta* $f'_+(x_0)$ pisteessä $x_0 \in [a,b[$ on

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa. Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on *derivoituva suljetulla välillä* $[a,b]$, jos f on derivoituva avoimella välillä $]a,b[$ sekä funktiolla f on olemassa oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä a ja vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä b.

LAUSE 1.4. *Funktio $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in]a,b[$, jos ja vain jos funktion f toispuoleiset derivaatat pisteessä x_0 ovat olemassa ja*

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Tarkastellaan tilannetta, missä funktion toispuoleiset derivaatat ovat erisuuret:

ESIMERKKI 1.5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Tällöin funktion f toispuoleiset derivaatat pisteessä $x_0 = 0$ ovat

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

ja

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1,$$

jolloin derivaatat ovat erisuuret ja näin ollen funktio f ei ole derivoituva pisteessä $x_0 = 0$.

Seuraava lause kertoo meille jotakin derivoituvuuden ja jatkuvuuden välisestä suhteesta yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksissa:

LAUSE 1.6. *Jos funktio $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in]a,b[$, niin funktio f on jatkuva pisteessä x_0.*

TODISTUS. Osoitetaan, että $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} h \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(x_0) \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

eli $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

□

Edellinen tulos derivoituvan funktion jatkuvuudesta auttaa meitä määrittelemään funktion n:nnen derivaatan:

MÄÄRITELMÄ 1.7. Jos funktio $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $]a,b[$, niin sen derivaatta f' määrittelee funktion $f'\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$. Jos derivaattafunktio on jatkuva, niin funktio f on tällöin jatkuvasti derivoituva. Jos funktio f' on derivoituva pisteessä $x_0 \in\ ]a,b[$, niin sanotaan, että f on *kahdesti derivoituva pisteessä* x_0 ja

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

on *funktion f toinen derivaatta pisteessä* x_0. Rekursiivisesti saadaan, että *funktio f on n kertaa derivoituva pisteessä* x_0, jos raja-arvo

$$f^n(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$

on äärellisenä olemassa.

1.3. Usean reaalimuuttujan funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**3**], [**4**], [**5**] ja [**14**].

Olkoon funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$, missä $D \subset \mathbb{R}^2$ on avoin joukko. Olkoon $x = (x_1, x_2) \in D$, jolloin on olemassa $r > 0$ siten, että $(x_1 + t, x_2) \in D$ aina, kun $|t| < r$. Tällöin sanotaan, että funktion f osittaisderivaatta muuttujan x_1 suhteen pisteessä $x \in D$ on

$$\partial_1 f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1+t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t},$$

jos kyseinen raja-arvo on olemassa. Vastaavasti määritellään funktion f osittaisderivaatta muuttujan x_2 suhteen pisteessä $x \in D$.

Yleisessä tapauksessa, missä f voi olla myös vektoriarvoinen ja muuttujia on n kappaletta, osittaisderivaatta määritellään vastaavalla idealla kuin kahden muuttujan tapauksessa:

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon funktio $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, missä $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$. Funktion f *osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen* pisteessä $x \in D$ on

$$\begin{aligned}\partial_i f(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t},\end{aligned}$$

jos kyseinen raja-arvo on olemassa.

Esimerkki 1.9. (a) Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_2 \sin(x_1) + x_2^4$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1+t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{x_2 \sin(x_1+t) + x_2^4 - x_2\sin(x_1) - x_2^4}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} x_2 \frac{\sin(x_1+t) - \sin(x_1)}{t} \\
&= x_2 \cos(x_1)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, x_2+t) - f(x_1, x_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x_2+t)\sin(x_1) + (x_2+t)^4 - x_2\sin(x_1) - x_2^4}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left[\sin(x_1)\frac{(x_2+t) - x_2}{t} + \frac{(x_2+t)^4 - x_2^4}{t}\right] \\
&= \sin(x_1) + 4x_2^3.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = x_2 \cos(x_1)$$

ja

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = \sin(x_1) + 4x_2^3$$

kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Toisaalta $\partial_1 f(x_1, x_2)$ saadaan myös, jos derivoidaan lauseketta $f(x_1, x_2) = x_2 \sin(x_1) + x_2^4$ muuttujan x_1 suhteen ja vastaavasti $\partial_2 f(x_1, x_2)$ saadaan, jos derivoidaan lauseketta $f(x_1, x_2) = x_2 \sin(x_1) + x_2^4$ muuttujan x_2 suhteen.

(b) Lasketaan osittaisderivaatat $\partial_i f$ funktiolle $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 \log(1 + y^2 + z^2)$. Derivoimalla lauseke oikean muuttujan suhteen, saadaan

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x, y, z) &= 2x \log(1 + y^2 + z^2) \\
\partial_2 f(x, y, z) &= \frac{2x^2 y}{1 + y^2 + z^2} \\
\partial_3 f(x, y, z) &= \frac{2x^2 z}{1 + y^2 + z^2}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 1.10. Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, *suuntaisderivaatta yksikkövektorin* $e \in \mathbb{R}^n$ *suuntaan* on

$$\partial_e f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t},$$

jos kyseinen raja-arvo on olemassa.

Pelkkä osittaisderivaattojen olemassaolo ei riitä takaamaan funktioille samoja ominaisuuksia, mitä derivoituvuus takaa yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisille funktioille. Lisäksi on hyvä huomata, että usean reaalimuuttujan funktioiden kohdalla derivaattaa ei voi määritellä erotusosamäärän avulla (kuten yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa). Jos niin tehtäisiin, niin eteen tulisi laskutoimitus, missä jaettaisiin vektorilla h ja tällaista laskutoimitusta ei ole määritelty. Tarvitaan vahvempi ominaisuus eli differentioituvuus. Määritelläänkin seuraavaksi usean reaalimuuttujan funktion differentioituvuus:

MÄÄRITELMÄ 1.11. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Funktio $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ on *differentioituva* pisteessä $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, jos on olemassa $m \times n$ -matriisi A siten, että

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{||h||} = 0 \in \mathbb{R}^m.$$

Matriisi A on tällöin funktion f *derivaatta pisteessä* x ja merkitään $f'(x) = A$.

LAUSE 1.12. *Jos funktio $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on differentioituva pisteessä $x \in D$, niin sillä on olemassa kaikki osittaisderivaatat $\partial_i f$ pisteessä $x \in D$ ja*

$$mat f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \ldots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \ldots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \partial_2 f_m(x) & \ldots & \partial_n f_m(x) \end{bmatrix}.$$

Erityisesti siis funktion f derivaatta on yksikäsitteinen. Matriisia $mat f'(x)$ kutsutaan Jacobin matriisiksi.

TODISTUS. Olkoon $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikannan j:s kantavektori. Oletuksen nojalla

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{||h||} = 0,$$

missä $A = f'(x)$. Tällöin

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \to 0} \left|\left| \frac{f(x+te_j) - f(x) - A(te_j)}{||te_j||} \right|\right| \\ &= \lim_{t \to 0} \left|\left| \frac{f(x+te_j) - f(x) - tAe_j}{|t|} \right|\right| \\ &= \lim_{t \to 0} \left|\left| \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} - Ae_j \right|\right|. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = Ae_j$$

eli $\partial_j f(x) = Ae_j$. Näin ollen osittaisderivaatta $\partial_j f(x)$ on olemassa ja se on sama kuin matriisin $mat A = mat f'(x)$ j:s sarake.

$\square$

LAUSE 1.13. *Funktio $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on differentioituva pisteessä $x \in D$ ja $f'(x) = A$, jos ja vain jos on olemassa funktio $E(h)$, jolle pätee $\lim_{h\to 0} E(h) = 0 \in \mathbb{R}^m$ siten, että*

$$f(x+h) = f(x) + Ah + ||h||E(h),$$

kun $x + h \in D$.

TODISTUS. $\Longrightarrow$ Oletetaan, että funktio f on differentioituva pisteessä $x \in D$. Määritellään funktio

$$E(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{||h||} = \frac{f(x+h)-f(x)-Ah}{||h||}, & \text{jos } h \neq 0 \\ 0, & \text{jos } h = 0. \end{cases}$$

Koska f on differentioituva pisteessä x, niin $\lim_{h\to 0} E(h) = 0$. Lisäksi, kun $h \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} &f(x) + Ah + ||h||E(h) \\ &= f(x) + Ah + ||h||\frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{||h||} \\ &= f(x) + Ah + f(x+h) - f(x) - Ah \\ &= f(x+h). \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Oletetaan nyt, että on olemassa funktio $E(h)$ siten, että $\lim_{h\to 0} E(h) = 0 \in \mathbb{R}^m$ ja

$$f(x+h) = f(x) + Ah + ||h||E(h),$$

kun $x + h \in D$. Tällöin

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{||h||} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x) + Ah + ||h||E(h)) - f(x) - Ah}{||h||} \\ &= \lim_{h\to 0} E(h) \\ &= 0, \end{aligned}$$

joten f on differentioituva pisteessä $x \in D$ ja $f'(x) = A$.

□

Kuten yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksissa, tarkastellaan seuraavaksi jatkuvuuden yhteyttä differentioituvuuteen:

MÄÄRITELMÄ 1.14. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ sanotaan olevan *jatkuvasti differentioituva*, jos ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat $\partial_i f(x)$ ovat olemassa ja jatkuvia, kun $1 \leqslant i \leqslant n$.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon funktio $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, missä $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja $x \in D$. Oletetaan, että on olemassa $r > 0$ siten, että osittaisderivaatta $\partial_i f(y)$ on olemassa kaikilla $y \in B(x, r)$, missä B on avoin x-keskinen ja r-säteinen pallo $B(x, r) = B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| < r\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Jos funktiolla

$y \mapsto \partial_i f(y)$ on olemassa osittaisderivaatta $\partial_j(\partial_i f)$ pisteessä x, niin sanotaan, että funktiolla f on *toisen kertaluvun osittaisderivaatta* pisteessä x ja

$$\partial_j \partial_i f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \partial_{ij} f(x) = \partial_j(\partial_i f)(x).$$

Vastavasti määritellään *k:nnen kertaluvun osittaisderivaatat*

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x) = \partial_{i_1 \dots i_k} f(x) = \partial_{i_k}(\dots(\partial_{i_1} f)\dots)(x).$$

Seuraavaksi todistetaan lause, joka sanoo, että differentioituva funktio on jatkuva:

LAUSE 1.16. *Jos funktio $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, missä $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, on differentioituva pisteessä $a \in G$, niin funktio f on jatkuva pisteessä a.*

TODISTUS. Aikaisemmin osoitettiin, että koska funktio f on differentioituva pisteessä a, on olemassa vektoriarvoinen funktio E, $\lim_{h \to 0} E(h) = 0 \in \mathbb{R}^m$ siten, että

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + ||h||E(h).$$

Merkitään $a + h = x$, jolloin $h = x - a$ ja

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ||x-a||E(x-a).$$

Siten

$$\begin{aligned}
&||f(x) - f(a)|| \\
&= ||f'(a)(x-a) + ||x-a||E(x-a)|| \\
&\leq ||f'(a)(x-a)|| + ||||x-a||E(x-a)|| \\
&\leq ||f'(a)||_{op}||x-a|| + ||x-a||||E(x-a)|| \\
&= (||f'(a)||_{op} + ||E(x-a)||)||x-a||,
\end{aligned}$$

missä $||f'(a)||_{op}$ on vakio, alaindeksi *op* tarkoittaa matriisin $f'(a)$ operaattorinormia, $||E(x-a)|| \to 0$, kun $x \to a$ ja $||x-a|| \to 0$, kun $x \to a$ eli

$$\lim_{x \to a} ||f(x) - f(a)|| = 0$$

eli

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

□

Näytetään seuraavan esimerkin avulla, että funktion osittaisderivaattojen olemassaolo ei takaa funktion jatkuvuutta:

ESIMERKKI 1.17. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Tällöin osittaisderivaatan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0}{t^2}-0}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}0\\
&=0
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0}{t^2}-0}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}0\\
&=0.
\end{aligned}$$

Tällöin $\partial_1 f(0,0) = 0 = \partial_2 f(0,0)$. Näin ollen osittaisderivaatat ovat olemassa pisteessä $(x_1, x_2) = (0,0)$ ja ne ovat samat. Funktio f ei kuitenkaan ole jatkuva origossa, koska jos origoa lähestytään pitkin suoraa $x_1 = x_2$, niin funktion arvo ei lähesty nollaa.

Pelkkä funktion osittaisderivaattojen olemassaolo ei riitä funktion differentioituvuuteen, mutta seuraavan lauseen pienen lisäoletuksen avulla onnistutaan takaamaan funktion differentioituvuus:

LAUSE 1.18. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ jokaisen komponenttifunktion f_k, $k = 1,\dots,m$, kaikki osittaisderivaatat $\partial_i f_k$ ovat olemassa ja jatkuvia jossakin ympäristössä $B(a,r) \subset D$, $r > 0$. Tällöin funktio f on differentioituva pisteessä $a \in D$. Lisäksi, jos osittaisderivaatat $\partial_i f_k$ ovat jatkuvia koko joukossa D, niin funktio f on differentioituva joukossa D.*

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**5**]: Lauseen 1.4.1 todistus.

□

ESIMERKKI 1.19. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x_1^2 x_2 + x_2^3, x_1^3 + x_1 x_2)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\partial_1 f_1(x) &= 2x_1x_2,\\
\partial_2 f_1(x) &= x_1^2 + 3x_2^2,\\
\partial_1 f_2(x) &= 3x_1^2 + x_2^2
\end{aligned}$$

ja

$$\partial_2 f_2(x) = x_1.$$

Koska jokainen osittaisderivaatta $\partial_i f_j$ on polynomifunktiona jatkuva, niin Lauseen 1.18 nojalla funktio f on differentioituva. Edelleen Lauseen 1.12 nojalla

$$mat f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 + 3x_2^2 \\ 3x_1^2 + x_2^2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

1.4. Yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoiset funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**6**] ja [**7**].

Reaalisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreille $z = (x, y)$ ja $w = (u, v)$ määritellään kertolasku $zw = (xu - yv, yu + xv)$. Kun joukko $\mathbb{R}^2$ varustetaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreiden yhteenlaskulla ja reaalilukukertolaskulla sekä vektoreiden kertolaskulla, joukkoa $\mathbb{R}^2$ merkitään $\mathbb{C}$ ja kutsutaan *kompleksilukujen joukoksi* eli *kompleksitasoksi.* Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on siis reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ laajennus ja siksi derivaatan määritelmässä palataan takaisin ns. ”tavalliseen” derivoituvuuteen. Joukon $\mathbb{C}$ alkiota kutsutaan *kompleksiluvuksi.* Standardikantavektoreita merkitään $1 = (0, 1)$ ja $i = (0, 1)$, missä kompleksiluku i on *imaginaariyksikkö*. Imaginaariyksikölle on voimassa $i^2 = ii = -1$.

Määritelmä 1.20. Olkoon $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Kompleksiluvun $z = x + iy$

- *reaaliosa* on $\Re(z) = x$ ja *imaginaariosa* on $\Im(z) = y$
- *kompleksikonjugaatti* on luku $\overline{z} = x - iy$
- *moduli* eli *itseisarvo* on luku $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Koska kompleksisen derivaatan määritelmässä esiintyy kompleksiluvulla jakaminen, niin tarkastellaan ennen määritelmää helppoa esimerkkiä siitä, miten kompleksilukujen jakolasku suoritetaan:

Esimerkki 1.21. Kompleksilukujen *jakolasku* perustuu jakajan laventamiseen kompleksikonjugaatilla. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+2i} \\
&= \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} \\
&= \frac{1-2i}{5} \\
&= \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan määritellä kompleksinen derivaatta:

Määritelmä 1.22. Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$ ja $f\colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio. Sanotaan, että *funktiolla f on pisteessä z_0 kompleksinen derivaatta* tai *funktio*

f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Merkitään

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ja sanotaan, että $f'(z_0)$ on *funktion f kompleksinen derivaatta pisteessä z_0*. Jos funktiolla f on kompleksinen derivaatta avoimen joukon G jokaisessa pisteessä, niin tällöin *funktio f on analyyttinen joukossa G*.

Lause 1.23. *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$ ja $f \colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio. Funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä $z_0 \iff$ on olemassa luku $c \in \mathbb{C}$ ja funktio E, siten, että*

$$(\mathbb{C}\mathrm{D}) \qquad f(z_0 + h) = f(z_0) + ch + E(h),$$

missä $\frac{E(h)}{|h|} \to 0$, kun $h \to 0$. Lisäksi, jos edellä mainittu ehto $(\mathbb{C}\mathrm{D})$ toteutuu, niin $f'(z_0) = c$.

Todistus. $\Longrightarrow$ Oletetaan, että $f'(z_0)$ on olemassa. Olkoon $r > 0$ siten, että $B(z_0, r) \subset G$. Määritellään

$$E(h) = \begin{cases} f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h, & \text{jos } 0 < |h| < r \\ 0, & \text{jos } h = 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + E(h),$$

kun $|h| < r$ ja

$$\left| \frac{E(h)}{|h|} \right| = \left| \frac{E(h)}{h} \right| = \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| \to 0,$$

kun $h \to 0$. Siispä $(\mathbb{C}\mathrm{D})$ toteutuu, kun $c = f'(z_0)$.

$\Longleftarrow$ Yhtälöstä $(\mathbb{C}\mathrm{D})$ saadaan

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = c + \frac{E(h)}{h} \to c,$$

kun $h \to 0$, jolloin $f'(z_0)$ on olemassa ja $f'(z_0) = c$.

$\square$

Seuraava lause kertoo meille kompleksisen differentioituvuuden ja jatkuvuuden suhteesta:

Lause 1.24. *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$ ja $f \colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio. Jos funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$, niin f on jatkuva pisteessä z_0.*

Todistus. Lauseen tulos seuraa siitä, että jos funktio f on kompleksisesti differentioituva, niin tällöin

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0))\\
&=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\\
&=f'(z_0)\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\\
&=0.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 1.25. (a) Osoitetaan, että funktio $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\overline{z}$ ei ole kompleksisesti differentioituva missään pisteessä. Funktion f erotusosamäärä pisteessä z on

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&=\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h}\\
&=\frac{\overline{h}}{h}\\
&=\begin{cases}1, & \text{jos } h \text{ on reaalinen ja } h>0\\ -1, & \text{jos } h=it, \text{ missä } t>0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Tällöin funktion f erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa, kun $h\to 0$, joten funktio f ei ole kompleksisesti differentioituva pisteessä z.

(b) Osoitetaan, että funktio $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=|z|^2$ on kompleksisesti differentioituva origossa. Nyt

$$f(h)=|h|^2=f(0)+0h+E(h),$$

missä $E(h)=|h|^2$. Koska

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h)}{|h|}=0,$$

niin funktio f on kompleksisesti differentioituva origossa.

Seuraavaksi esitellään tulos, jonka mukaan analyyttiset funktiot ovat äärettömän monta kertaa derivoituvia. Tämä on kenties suurin ero reaalisen derivoituvuuden ja kompleksisen differentioituvuuden välillä.

Lause 1.26. *Olkoot joukko $G\subset\mathbb{C}$ avoin ja funktio $f\colon G\to\mathbb{C}$ analyyttinen. Tällöin myös funktio f' on analyyttinen joukossa G. Erityisesti funktio f' on jatkuva joukossa G.*

Todistus. Idea (yksityiskohdat löytyvät lähteestä [**7**]): Olkoot $z_0\in G$ ja $r>0$ siten, että $B(z_0,r)\subset G$. Olkoot $\varrho\in(0,r)$ ja $\gamma(t)=z_0+\varrho e^{it}$, missä polku γ on umpinainen tie, $t\in[0,2\pi]$ ja $B=B(z_0,\varrho)$. Tällöin tien γ kierrosluku pisteen z

suhteen on $W(\gamma, z) = 1$ kaikille $z \in B$. Seuraavaksi sovelletaan lokaalia Cauchyn integraalikaavaa alueessa $B(z_0, r)$ polkuun γ ja saadaan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

kaikille $z \in B$. Näin ollen lähteen [**7**] Lemman 5.10. ja lauseen oletuksen nojalla funktio f on analyyttinen joukossa G ja edelleen kun sovelletaan lähteen [**7**] Lemmaa 5.10. funktioon $h = f$ ja lukuun $k = 1$, saadaan

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

kaikille $z \in B$. Edelleen, kun samaa lemmaa sovelletaan funktioon $h = f$ ja lukuun $k = 2$, seuraa funktion f' analyyttisyys joukossa B. Väite seuraa tästä.

□

Seuraava tulos seuraa edellisestä lauseesta induktiolla:

SEURAUS 1.27. *Olkoot joukko $G \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f\colon G \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Tällöin funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ joukossa G.*

LUKU 2

Funktioiden perusominaisuudet ja esimerkit

Tässä luvussa tarkastellaan derivoituvien, differentioituvien ja analyyttisten funktioiden perusominaisuuksia teorian ja esimerkkien kautta.

2.1. Derivoituvat funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**1**] ja [**2**].

LAUSE 2.1. *Olkoot funktiot $f, g\colon\ ]a, b[\ \to \mathbb{R}$ derivoituvia pisteessä $x_0 \in\ ]a, b[$. Tällöin*

- *summafunktio $f+g$ on derivoituva pisteessä x_0 ja $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$*
- *tulofunktio fg on derivoituva pisteessä x_0 ja $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$*
- *osamäärä $\frac{1}{g}$ on derivoituva pisteessä x_0, jos $g(x_0) \neq 0$ ja $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$*
- *osamäärä $\frac{f}{g}$ on derivoituva pisteessä x_0, jos $g(x_0) \neq 0$ ja $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.*

TODISTUS. Olkoot funktiot $f, g\colon\ ]a, b[\ \to \mathbb{R}$ derivoituvia pisteessä $x_0 \in\ ]a, b[$. Tällöin derivaatan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - [f(x_0) + g(x_0)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

Olkoot funktiot $f, g\colon\ ]a, b[\ \to \mathbb{R}$ derivoituvia pisteessä $x_0 \in\ ]a, b[$. Tällöin derivaatan määritelmän ja Lauseen 1.6 nojalla

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h} + \frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]g(x_0)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} g(x_0) \\
&= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).
\end{aligned}
$$

Koska g on derivoituva pisteessä x_0, niin Lauseen 1.6 nojalla se on myös jatkuva pisteessä x_0 eli $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \\
&= -g'(x_0)\frac{1}{(g(x_0))^2} \\
&= -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.
\end{aligned}
$$

Olkoot funktiot $f, g\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ derivoituvia pisteessä $x_0 \in\ ]a,b[$. Tällöin koska $\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right)$, niin

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + \frac{f(x_0)(-g'(x_0))}{[g(x_0)]^2} \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.
\end{aligned}
$$

□

Myöhemmin tullaan huomaamaan, että summafunktioiden ja tulofunktioiden derivointi toimii myös sekä usean reaalimuuttujan että analyyttistenkin funktioiden tapauksissa vastaavalla tavalla kuin yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksissa.

LAUSE 2.2. (KETJUSÄÄNTÖ) *Olkoot* $g\colon\ ]a,b[\ \to\ ]c,d[$ *ja* $f\colon\ ]c,d[\ \to \mathbb{R}$ *funktioita siten, että funktio* g *on derivoituva pisteessä* $x_0 \in\ ]a,b[$ *ja funktio* f *on derivoituva pisteessä* $g(x_0) \in\ ]c,d[$. *Tällöin yhdistetty funktio* $f \circ g$ *on derivoituva pisteessä* x_0 *ja*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

TODISTUS. Määritellään funktio $\phi\colon\ ]c,d] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\phi(h) = \begin{cases} \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}, & \text{jos } g(x_0+h)-g(x_0) \neq 0 \\ f'(g(x_0)), & \text{jos } g(x_0+h)-g(x_0) = 0 \end{cases}$$

Tiedetään, että funktio f on derivoituva pisteessä $g(x_0)$ eli

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k} = f'(g(x_0)).$$

Siispä, jos $\epsilon > 0$, niin on olemassa jokin $\delta' > 0$ siten, että kaikilla k, jos $0 < |k| < \delta'$, niin

$$\left|\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k} - f'(g(x_0))\right| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Nyt g on derivoituva pisteessä x_0, siispä g on jatkuva pisteessä x_0, joten on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla h, jos $|h| < \delta$, niin

$$|g(x_0+h)-g(x_0)| < \delta'. \tag{2.2}$$

Oletetaan nyt, että h on mikä tahansa ja $|h| < \delta$. Jos $k = g(x_0+h)-g(x_0) \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} \phi(h) &= \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} \\ &= \frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k}; \end{aligned}$$

Kaavasta (2.2) seuraa, että $|k| < \delta'$ ja siten kaavasta (2.1) seuraa, että $|\phi(h) - f'(g(x_0))| < \epsilon$. Toisaalta, jos $g(x_0+h)-g(x_0) = 0$, niin $\phi(h) = f'(g(x_0))$, jolloin pätee

$$|\phi(h) - f'(g(x_0))| < \epsilon.$$

Näin ollen olemme osoittaneet, että

$$\lim_{h\to 0} \phi(h) = f'(g(x_0))$$

eli ϕ on jatkuva pisteessä 0. Jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h} = \phi(h)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \phi(h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0). \end{aligned}$$

□

ESIMERKKI 2.3. Derivoidaan funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(3x^2+5x-4)$ pisteessä x_0. Funktio f on kaikkialla derivoituva, koska funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2+5x-4$, on polynomina kaikkialla derivoituva ja samoin funktio $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin x$, on kaikkialla derivoituva. Ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (h \circ g)'(x_0) \\ &= h'(g(x_0))g'(x_0) \\ &= (6x_0+5)\cos(3x_0^2+5x_0-4). \end{aligned}$$

2.2. Differentioituvat funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**3**], [**4**] ja [**5**].

LAUSE 2.4. *Jos funktiot $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}^m$ ovat differentioituvia pisteessä $a \in D$, niin tällöin myös funktio $f+g\colon D \to \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $a \in D$ ja*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

TODISTUS. Määritellään funktio $E(h) = \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{||h||}$, jos $h \neq 0$ ja $E(h) = 0$, jos $h = 0$. Olkoon $h \in \mathbb{R}^n$ siten, että $a+h \in D$. Tällöin

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)-(f'(a)+g'(a))h}{||h||} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{||h||} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)-g'(a)h}{||h||} \\ &= 0, \end{aligned}$$

joten $f+g$ on differentioituva pisteessä a ja $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

□

LAUSE 2.5. (TULOSÄÄNTÖ) *Jos funktiot $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ ja $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ovat differentioituvia pisteessä $a \in D$, niin tällöin tulofunktio $\varphi f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $(\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x) = (\varphi(x)f_1(x), \dots, \varphi(x)f_m(x))$ on differentioituva pisteessä a ja*

$$[(\varphi f)'(a)]\, u = (\varphi'(a)u)f(a) + \varphi(a)f'(a)u$$

kaikilla $u \in \mathbb{R}^n$.

TODISTUS. Olkoon $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ siten, että $a + h \in D$. Tällöin

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\varphi f)(a+h) - (\varphi f)(a) - (\varphi'(a)hf(a) + \varphi(a)f'(a)h)}{||h||}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h)f(a+h) - \varphi(a)f(a) - \varphi'(a)hf(a) - \varphi(a)f'(a)h}{||h||}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h)f(a+h) - \varphi(a+h)f(a) + \varphi(a+h)f(a) - \varphi(a)f(a) - \varphi'(a)hf(a) - \varphi(a)f'(a)h}{||h||}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a) - \varphi'(a)h}{||h||} f(a) + \lim_{h\to 0} \varphi(a+h) \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{||h||}$$
$$+ \lim_{h\to 0} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \frac{f'(a)h}{||h||}$$
$$= 0.$$

□

LAUSE 2.6. (KETJUSÄÄNTÖ) *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ ja $D' \subset \mathbb{R}^m$ avoimia joukkoja. Jos funktio $f\colon D \to D'$ on differentioituva pisteessä $a \in D$ ja funktio $g\colon D' \to \mathbb{R}^p$ on differentioituva pisteessä $f(a) \in D'$, niin yhdistetty funktio $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}^p$ on differentioituva pisteessä a ja*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**5**]: Lauseen 1.5.4 todistus.

□

SEURAUS 2.7. (OSITTAISDERIVAATTOJEN KETJUSÄÄNTÖ) *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ ja $D' \subset \mathbb{R}^m$ avoimia joukkoja, kuvaus $f\colon D \to D'$ differentioituva pisteessä $a \in D$ ja kuvaus $g\colon D' \to \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä $f(a) \in D'$. Olkoon lisäksi $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. Tällöin*

$$\partial_i (g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g(f(a)) \partial_i f_k(a),$$

$i = 1, \ldots, n$.

ESIMERKKI 2.8. Olkoon $g\colon [0, \infty[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ napakoordinaattikuvaus ja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio. Merkitään $h = f \circ g$ eli $h(r, \theta) = f(g_1(r, \theta), g_2(r, \theta)) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\partial_r h(r, \theta) &= \partial_1 h(r, \theta) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \partial_k f(g(r, \theta)) \partial_1 g_k(r, \theta) \\
&= \partial_1 f(g(r, \theta)) \partial_1 g_1(r, \theta) + \partial_2 f(g(r, \theta)) \partial_1 g_2(r, \theta) \\
&= \partial_1 f(g(r, \theta)) \cos\theta + \partial_2 f(g(r, \theta)) \sin\theta
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\partial_\theta h(r,\theta) &= \partial_2 h(r,\theta) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \partial_k f(g(r,\theta))\partial_2 g_k(r,\theta) \\
&= \partial_1 f(g(r,\theta))\partial_2 g_1(r,\theta) + \partial_2 f(g(r,\theta))\partial_2 g_2(r,\theta) \\
&= -\partial_1 f(g(r,\theta)) r\sin\theta + \partial_2 f(g(r,\theta)) r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Luvussa 4 tullaan tarvitsemaan funktion gradienttia, joten määritellään se tässä yhteydessä:

MÄÄRITELMÄ 2.9. Olkoon funktiolla $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, olemassa kaikki osittaisderivaatat pisteessä $x \in D$. Funktion f *gradientti* pisteessä x on vektori

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

MÄÄRITELMÄ 2.10. Olkoon $f\colon D \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio ja $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Piste $x_0 \in D$ on funktion f *kriittinen piste*, jos $\nabla f(x_0) = 0$.

ESIMERKKI 2.11. Lasketaan funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$ kriittiset pisteet. Tällöin

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)) \\
&= (e^{-x^2-y^2} - 2x(x+y)e^{-x^2-y^2}, e^{-x^2-y^2} - 2y(x+y)e^{-x^2-y^2}) \\
&= e^{-x^2-y^2}(1-2x(x+y), 1-2y(x+y)).
\end{aligned}$$

On siis oltava $1-2x(x+y) = 0$ ja $1-2y(x+y) = 0$. Kun nämä lasketaan yhteen, saadaan

$$2 - 2(x+y)^2 = 0 \iff x+y = \pm 1.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön $1-2x(x+y) = 0$, saadaan $x = \pm\frac{1}{2}$. Tästä puolestaan saadaan, että $y = \pm\frac{1}{2}$. Näin ollen funktion f kriittiset pisteet ovat $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ja $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

2.3. Analyyttiset funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**6**] ja [**7**].

Seuraavan lauseen derivointisäännöt ovat käytännössä samat kuin yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksissakin:

LAUSE 2.12. *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$, $f\colon G \to \mathbb{C}$ ja $g\colon G \to \mathbb{C}$ kompleksisesti differentioituvia funktioita pisteessä z_0. Tällöin*

- *summafunktio* $f+g$ *on kompleksisesti differentioituva pisteessä* z_0 *ja* $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
- *tulofunktio* fg *on kompleksisesti differentioituva pisteessä* z_0 *ja* $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- *jos lisäksi* $g(z_0) \neq 0$, *niin osamäärä* $\frac{f}{g}$ *on kompleksisesti differentioituva pisteessä* z_0 *ja* $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

Todistus. Todistukset seuraavat kompleksisen derivaatan määritelmästä ja ovat periaatteeltaan samat kuin yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksissakin. Tämän takia yksityiskohtainen todistus sivuutetaan.

□

Toisin kuin derivoituvien ja differentioituvien funktioiden tapauksissa, analyyttisten funktioiden kohdalla ketjusääntö vaatii yhden pienen lisäoletuksen:

Lause 2.13. (Ketjusääntö) *Olkoot* $G \subset \mathbb{C}$ *ja* $G' \subset \mathbb{C}$ *avoimia joukkoja,* $z_0 \in G$, $f\colon G \to \mathbb{C}$ *ja* $g\colon G' \to \mathbb{C}$ *funktioita. Oletetaan, että*

- $f(G) \subset G'$
- f *on kompleksisesti differentioituva pisteessä* z_0
- g *on kompleksisesti differentioituva pisteessä* $w_0 = f(z_0)$.

Tällöin $g \circ f$ *on kompleksisesti differentioituva pisteessä* z_0 *ja*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Todistus. Ehdon ($\mathbb{C}$D) nojalla

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(x_0)h + E_f(h)$$

ja

$$g(w_0 + k) - g(w_0) = g'(w_0)k + E_g(k),$$

missä $\frac{E_f(h)}{h} \to 0$, kun $h \to 0$ ja $\frac{E_g(k)}{k} \to 0$, kun $k \to 0$. Asetetaan $k = f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + E_f(h)$. Tällöin

$$|k| \leq |f'(z_0)||h| + |E_f(h)|$$

ja $w_0 + k = f(z_0 + h)$, joten

$$(g \circ f)(z_0 + h) - (g \circ f)(z_0) = g'(w_0)f'(x_0)h + E_{g\circ f}(h),$$

missä

$$E_{g\circ f}(h) = g'(w_0)E_f(h) + E_g(k)$$

toteuttaa ehdon $\frac{E_{g\circ f}(h)}{h} \to 0$, kun $h \to 0$. Ensimmäinen termi on selvä. Valitaan nyt $\delta_1 > 0$ siten, että $\delta_1 \leq 1$ ja $\left|\frac{E_f(h)}{h}\right| \leq 1$, kun $0 < |h| \leq \delta_1$. Tällöin $\left|\frac{k}{h}\right| \leq$

$|f'(z_0)| + \left|\frac{E_f(h)}{h}\right| \leq |f'(z_0)| + 1$. Koska f on jatkuva pisteessä z_0, niin $k \to 0$, kun $h \to 0$. Siispä

$$\left|\frac{E_g(k)}{h}\right| = \left|\frac{E_g(k)}{k}\right| \left|\frac{k}{h}\right| \leq \left|\frac{E_g(k)}{k}\right| (|f'(z_0)| + 1) \to 0,$$

kun $h \to 0$.

$\square$

Esimerkki 2.14. Lasketaan funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}\right)^{10},$$

kun $z \neq \pm i$, derivaatta. Olkoon nyt

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

ja

$$g(z) = z^{10}.$$

Nyt $h = g \circ f$. Lisäksi

$$f'(z) = \frac{2z(z^2 + 1) - (z^2 - 1)2z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{4z}{(z^2 + 1)^2}$$

osamäärän derivointisäännön nojalla ja

$$g'(z) = 10z^9$$

polynomin derivointisäännön nojalla. Tällöin ketjusäännön nojalla saadaan

$$h'(z) = 10\left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}\right)^9 \frac{4z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{40z(z^2 - 1)^9}{(z^2 + 1)^{11}},$$

kun $z \neq \pm i$.

LUKU 3

Cauchyn ja Riemannin yhtälöt

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**6**] ja [**7**].

Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, jotka karakterisoivat analyyttisten funktioiden reaali- ja imaginaariosat. Ensimmäisen kerran nämä yhtälöt esiintyivät vuonna 1752 ranskalaisen matemaatikon Jean le Rond d'Alembertin (1717 - 1783) hydrodynamiikan teoksessa. Vuonna 1777 sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) liitti yhtälöt analyyttisiin funktioihin. Ranskalainen matemaatikko Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) käytti vuonna 1814 yhtälöitä oman funktioteoriansa yhteydessä. Vuonna 1851 ilmestyi saksalaisen matemaatikon Georg Friedrich Bernhard Riemannin (1826 - 1866) tutkielma funktioteoriasta. Riemannin geometrinen lähestymistapa poikkesi Cauchyn puhtaasti analyyttisestä tavasta. [**11**]

Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$ ja $f\colon G \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, missä $u(x,y) = \Re(f(x+iy))$ ja $v(x,y) = \Im(f(x+iy))$. Usean reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa funktio f on *reaalisesti differentioituva pisteessä* z_0, jos on olemassa lineaarikuvaus $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $B(0,r)$ -ympäristössä, $r > 0$, määritelty funktio E siten, että

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + E(h)$$

ja $\frac{E(h)}{|h|} \to 0$, kun $h \to 0$ ($\mathbb{R}$D). Lisäksi

$$A = f'(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}.$$

Reaalinen differentioituvuus ei ole riittävä, mutta välttämätön ehto kompleksisen derivaatan olemassaololle:

Lause 3.1. ($\mathbb{R}$D$\mathbb{C}$D) *Funktio $f = u + iv$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$, jos ja vain jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja sen reaaliosa ja imaginaariosa toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt* (CR)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

ja

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Pisteessä z_0 kompleksisesti differentioituvalle funktiolle pätee

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Todistus. $\Longrightarrow$ Oletetaan, että funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0. Yhtälön ($\mathbb{C}$D) nojalla on olemassa funktio E, siten, että

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ch + E(h)$$

ja $\frac{E(h)}{|h|} \to 0$, kun $h \to 0$, missä $c = f'(z_0)$. Koska kuvaus $h \mapsto ch$ on lineaarinen, niin f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja $f'(z_0)h = ch$. Valitaan $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Tällöin

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = c + \frac{E(h)}{h} \to c,$$

kun $h \to 0$. Toisaalta

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x}(z_0),$$

kun $h \to 0$, joten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = c.$$

Valitaan sitten $h \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}$ eli $h = it$, missä $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tällöin

$$\frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t} = ic + i\frac{E(it)}{it} \to ic,$$

kun $t \to 0$. Toisaalta

$$\frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t} \to \frac{\partial f}{\partial y}(z_0),$$

kun $t \to 0$, joten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = ic.$$

Nyt saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = c = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Koska

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0),$$

saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0),$$

mistä seuraa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt (CR).

$\Longleftarrow$ Oletetaan, että funktio f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja funktion reaaliosa ja imaginaariosa toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Tällöin on olemassa funktio E, siten, että

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + E(h)$$

ja $\frac{E(h)}{|h|} \to 0$, kun $h \to 0$. Lisäksi

$$A = f'(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \end{bmatrix}.$$

Kun $h = h_1 + ih_2 = (h_1, h_2)$, niin

$$\begin{aligned} Ah &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)h_1 - \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)h_2 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)h_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)h_1 - \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)h_2 + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)h_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)(h_1 + ih_2). \end{aligned}$$

Tästä saadaan siis, että ($\mathbb{R}$D) on muotoa ($\mathbb{C}$D), missä

$$c = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0),$$

mistä seuraa funktion f kompleksinen differentioituvuus.

$\square$

LAUSE 3.2. *Oletetaan, että funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ reaaliosalla ja imaginaariosalla u ja v on osittaisderivaatat $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ joukossa G, ne ovat jatkuvia pisteessä $z_0 \in G$ ja toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt* (CR). *Tällöin funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0.*

TODISTUS. Usean reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa tiedetään, että funktion osittaisderivaattojen jatkuvuudesta seuraa funktion reaalinen differentioituvuus (Lause 1.18). Lauseen ($\mathbb{R}$D$\mathbb{C}$D) nojalla reaalinen differentioituvuus Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden kanssa johtaa kompleksiseen differentioituvuuteen.

$\square$

ESIMERKKI 3.3. (a) Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Kun $f = u + iv$ ja $z = x + iy$, niin

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

ja

$$v(x, y) = e^x \sin y.$$

Tällöin

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y$$

ja

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y.$$

Näin ollen Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat ja koska funktioiden u ja v osittaisderivaatat ovat jatkuvia kaikialla, niin funktio f on analyyttinen.

(b) Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = x$. Tällöin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y},$$

joten funktio f ei ole analyyttinen.

(c) Osoitetaan, että funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$, ei ole analyyttinen missään avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{C}$. Merkitään $u(x,y) = \cos x \cosh y$ ja $v(x,y) = i \sin x \sinh y$. Nyt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\sin x \cosh y \neq \sin x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

kun $\sin x \neq 0$ eli $x \neq n\pi$.

Luvun yhteenvetona voidaan todeta, että funktio $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ on analyyttinen avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{C}$, jos ja vain jos funktiot u ja v ovat reaalisesti differentioituvia ja toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt joukossa G. Nämä ehdot takaavat, että kompleksifunktioita voidaan derivoida samalla tavalla kuin reaalifunktioita.

LUKU 4

Rollen lause ja väliarvolause

Tässä luvussa käydään läpi lyhyesti Rollen lauseen ja väliarvolauseen historiaa, määritellään Rollen lause, väliarvolause ja Cauchyn väliarvolause yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisille funktioille, väliarvolause ja moniulotteinen versio Rollen lauseesta usean reaalimuuttujan funktioille sekä kompleksinen Rollen lause yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoisille funktioille.

4.1. Historia

Intialaista matemaatikkoa Bhaskaraa (1114 - 1185) pidetään Rollen lauseen alkuperäisenä kehittäjänä. Rollen lause on saanut kuitenkin nimensä ranskalaisen matemaatikon Michel Rollen (1652 - 1719) mukaan, vaikka Rollen todistus vuodelta 1691 kattoi ainoastaan polynomifunktiot. Hänen todistuksensa ei sisältänyt differentiaalilaskentaa, sillä hän piti sitä harhaanjohtavana. Cauchy todisti ensimmäisenä Rollen lauseen vuonna 1823. Nimitystä "Rollen lause" käytettiin ensimmäisen kerran Saksassa vuonna 1834 saksalaisen matemaatikon Moritz Wilhelm Drobischin (1802 - 1896) toimesta sekä myöhemmin Italiassa vuonna 1846 italialaisen matemaatikon Giusto Bellavitisin (1803 - 1880) aloitteesta. [**12**]

Intialainen matemaatikko Parameshvara (1380 - 1460) kuvaili väliarvolauseen erikoistapauksen kommentoidessaan intialaisten matemaatikkojen Govindasvamin (800 - 860) ja Bhaskaran töitä. Väliarvolauseen rajoitetun version todisti Rolle vuonna 1691 (tämä tulos tunnetaan Rollen lauseena). Väliarvolauseen nykymuoto on peräisin Cauchylta vuodelta 1823. [**13**]

4.2. Yhden reaalimuuttujan reaaliarvoiset funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**1**], [**2**] ja [**15**].

Lause 4.1. (Rollen lause) *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio, joka on derivoituva avoimella välillä* $]a,b[$ *ja lisäksi* $f(a) = f(b)$*. Tällöin on olemassa* $c \in\,]a,b[$ *siten, että* $f'(c) = 0$.

Todistus. Koska f on jatkuva välillä $[a,b]$, niin sillä on olemassa maksimi ja minimi välillä $[a,b]$. Oletetaan, että maksimipiste on $c \in\,]a,b[$. Tällöin ääriarvojen nojalla $f'(c) = 0$. Oletetaan sitten, että minimipiste on $c \in\,]a,b[$. Tällöin myöskin tässä tapauksessa $f'(c) = 0$. Lopuksi oletetaan, että maksimi- ja minipiste ovat päätepisteet. Koska $f(a) = f(b)$, niin funktio on vakiofunktio ja voidaan valita mikä tahansa $c \in \,]a,b[$.

□

LAUSE 4.2. (VÄLIARVOLAUSE) *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä* $]a,b[$. *Tällöin on olemassa* $c \in \,]a,b[$ *siten, että*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

TODISTUS. Olkoon $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funktio siten, että

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

Funktio h on jatkuva ja derivoituva välillä $]a,b[$ ja

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a), \\ h(b) &= f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) = f(a). \end{aligned}$$

Näin ollen voidaan soveltaa Rollen lausetta (Lause 4.1) funktioon h, jolloin on olemassa $c \in \,]a,b[$ siten, että

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

joten

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Seuraavaksi tarkastellaan väliarvolauseen seurauksia ja sovelluksia:

SEURAUS 4.3. *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä* $]a,b[$. *Tällöin jos* $f'(x) = 0$ *kaikilla* $x \in \,]a,b[$, *niin funktio* f *on vakiofunktio.*

TODISTUS. Olkoon $x, y \in [a,b]$, $x < y$. Väliarvolauseen nojalla

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x),$$

jollekin $c \in \,]x,y[$. Oletuksen nojalla $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in \,]a,b[$, joten erityisesti $f'(c) = 0$. Tällöin $f(y) - f(x) = 0$ eli $f(y) = f(x)$. Koska x ja y ovat mitä tahansa välin $[a,b]$ pisteitä, niin funktio f on vakiofunktio välillä $[a,b]$.

□

SEURAUS 4.4. *Olkoot* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuvia funktioita, jotka ovat derivoituvia välillä* $]a,b[$. *Tällöin jos* $f'(x) = g'(x)$ *kaikilla* $x \in \,]a,b[$, *niin on olemassa vakio* $C \in \mathbb{R}$ *siten, että* $f(x) = g(x) + C$ *kaikilla* $x \in [a,b]$.

TODISTUS. Kaikilla $x \in]a,b[$ pätee

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

joten Seurauksen 4.3 nojalla on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f - g = C.$$

□

Tarkastellaan seuraavaksi Cauchyn versiota väliarvolauseesta:

LAUSE 4.5. (CAUCHYN VÄLIARVOLAUSE) *Olkoot $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita, jotka ovat derivoituvia välillä $]a,b[$. Tällöin on olemassa $c \in]a,b[$ siten, että*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Jos $g(b) \neq g(a)$ ja $g'(c) \neq 0$, niin voidaan Cauchyn väliarvolause kirjoittaa muodossa

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

TODISTUS. Olkoon $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funktio siten, että

$$h(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)\,[f(b) - f(a)]\,.$$

Tällöin h on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$ ja

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Rollen lauseen (Lause 4.1) nojalla $h'(c) = 0$ jollekin $c \in]a,b[$, jolloin

$$0 = f'(c)\,[g(b) - g(a)] - g'(c)\,[f(b) - f(a)]\,.$$

□

SEURAUS 4.6. (L'HOSPITALIN SÄÄNTÖ, ERÄS VERSIO) *Olkoot funktiot $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ derivoituvia. Jos*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0,$$

$g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a,b[$ ja raja-arvo

$$\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on olemassa, niin

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistus. Laajennetaan funktiot f, g välille $]a, b]$ asettamalla $f(b) = g(b) = 0$. Olkoon $x \in\,]a, b[$ mielivaltainen. Nyt funktiot f, g toteuttavat Lauseen 4.5 oletuksen välillä $[x, b]$ ja näin ollen

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

missä $\xi_x \in\,]x, b[$. Väite seuraa, koska $\xi_x \to b-$, kun $x \to b-$.

□

4.3. Usean reaalimuuttujan funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähteitä [**4**] ja [**8**].

Yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa väliarvolause takasi, että on olemassa avoimella välillä piste $c \in\,]a, b[$ siten, että $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Riittää, että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Usean reaalimuuttujan funktioille saadaan johdettua vastaavanlainen tulos.

Lemma 4.7. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon indeksi i siten, että $1 \leq i \leq n$. Oletetaan, että funktiolla $f\colon D \to \mathbb{R}$ on osittaisderivaatta indeksin i suhteen kaikissa välin D piteissä. Olkoon $x \in D$ ja $a \in \mathbb{R}$ siten, että jana $[x, x + ae_i] \subset D$. Tällöin on olemassa θ, $0 < \theta < 1$, siten, että*

$$f(x + ae_i) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta a e_i)a.$$

Todistus. Koska $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, voidaan valita avoin reaalilukuväli I, $0 \in I$ ja $a \in I$, siten, että kaikilla $t \in I$ piste $x + te_i \in D$. Määritellään funktio $\phi\colon I \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(x + te_i)$ kaikilla $t \in I$. Koska funktiolla f on olemassa osittaisderivaatta indeksin i suhteen kaikilla $t \in I$, niin

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + te_i).$$

Tästä seuraa funktion ϕ derivoituvuus. Näin ollen voidaan soveltaa yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion väliarvolausetta funktioon $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ suljetulla välillä $[0, a]$, jolloin on olemassa piste θ, $0 < \theta < 1$, siten, että

$$\phi(a) - \phi(0) = \phi'(\theta a)a,$$

mikä on puolestaan sama asia kuin

$$f(x + ae_i) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta a e_i)a.$$

□

LEMMA 4.8. *Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Oletetaan, että funktiolla $f\colon B(x,r) \to \mathbb{R}$ on ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. Tällöin, jos piste $x+h \in B(x,r)$, niin on olemassa pisteet $z_1, z_2, \dots, z_n \in B(x,r)$ siten, että*

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i)$$

ja $||x - z_i|| < ||h||$ kaikilla i, joille $1 \le i \le n$.

TODISTUS. Todistetaan lemma tapauksessa $n = 3$. Kirjoitetaan erotus $f(x+h) - f(x)$ eri muodossa lisäämällä ja vähentämällä sopivia termejä. Saadaan

$$\begin{aligned} &f(x+h) - f(x) \\ =&f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - f(x_1,x_2,x_3) \\ =&f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3) + f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3) \\ &- f(x_1+h_1, x_2, x_3) + f(x_1+h_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Sovelletaan Lemmaa 4.7 jokaiselle välille ja löydetään $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in]0,1[$ siten, että

$$\begin{aligned} &f(x+h) - f(x) \\ =&\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+\theta_3 h_3)h_3 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2, x_3)h_2 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2, x_3)h_1. \end{aligned}$$

Asettamalla $z_1 = (x_1+\theta_1 h_1, x_2, x_3)$, $z_2 = (x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2, x_3)$ ja $z_3 = (x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+\theta_3 h_3)$ saadaan haluttu tulos.

□

LAUSE 4.9. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Oletetaan, että funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva. Tällöin kaikilla $x \in D$ ja $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}^n$, funktiolla f on suunnattu derivaatta suuntaan p pisteessä x ja*

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

TODISTUS. Koska $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, voidaan valita $r > 0$ siten, että avoin pallo $B(x,r) \subset D$. Tällöin Lemman 4.8 nojalla nähdään, että jos t on mikä tahansa siten, että $|t|||p|| < r$, niin on pisteet $z_1, \dots, z_n$ siten, että

$$f(x+tp) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} tp_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i) \tag{4.1}$$

ja

$$||z_i - x|| \le |t|||p|| \tag{4.2}$$

kaikilla i, $1 \le i \le n$. Kaava (4.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{f(x+tp)-f(x)}{t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i), \tag{4.3}$$

$t \neq 0$. Koska $\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon D \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x kaikilla i, $1 \le i \le n$, niin kaavojen (4.2) ja (4.3) nojalla

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tp)-f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),
\end{aligned}$$

kuten haluttiinkin.

□

Käyttämällä gradienttia, Lauseen 4.9 kaava voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{d}{dt}\left[f(x+tp)\right] = \frac{\partial f}{\partial p}(x) = \langle \nabla f(x), p \rangle,$$

kun $t = 0$. Korvaamalla piste x pisteellä $x + tp$, saadaan

$$\frac{d}{dt}\left[f(x+tp)\right] = \langle \nabla f(x+tp), p \rangle, \tag{4.4}$$

$0 \le t \le 1$.

Lause 4.10. (Väliarvolause) *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja oletetaan, että funktio $f \colon D \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva. Jos jana $[x, x+h] \subset D$, niin on olemassa luku θ, $0 < \theta < 1$, siten, että*

$$f(x+h) - f(x) = \langle \nabla f(x+\theta h), h \rangle.$$

Todistus. Koska $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, voidaan valita reaalilukuväli I, $0 \in I$ ja $1 \in I$, siten, että $x + th \in D$ kaikilla $t \in I$. Määritellään funktio $\phi(t) = f(x+th)$ kaikilla $t \in I$. Lauseen 4.9 ja (4.4) nojalla nähdään, että

$$\phi'(t) = \langle \nabla f(x+th), h \rangle \tag{4.5}$$

kaikille $t \in I$. Siispä voidaan soveltaa väliarvolausetta yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion tapauksessa funktioon $\phi \colon I \to \mathbb{R}$ suljetulla välillä $[0,1]$, jolloin löydetään piste θ, jolle $0 < \theta < 1$ ja

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta).$$

Yhdistämällä kaava (4.5) ja tieto, että $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(x+th)$, todistus on valmis.

□

Seuraava lause ja sen todistus on yksi tärkeimmistä väliarvolauseen sovelluksista ja hyvä esimerkki siitä, että väliarvolausetta tarvitaan. Lause todistetaan tapauksessa $n = 2$, mutta tapaus $n > 2$ menee ihan vastaavalla tavalla.

LAUSE 4.11. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja oletetaan, että funktiolla $f\colon D \to \mathbb{R}$ on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Tällöin kaikille $x \in D$ ja kaikille indekseille i ja j siten, että $1 \leqslant i \leqslant n$ ja $1 \leqslant j \leqslant n$ pätee*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Lauseen todistamiseksi tarvitaan seuraava aputulos:

LEMMA 4.12. *Olkoon U avoin osajoukko tasossa $\mathbb{R}^2$, joka sisältää pisteen (x_0, y_0) ja oletetaan, että funktiolla $f\colon U \to \mathbb{R}$ on toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Tällöin on olemassa pisteet $(x_1, y_1) \in U$ ja $(x_2, y_2) \in U$ siten, että*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_2, y_2).$$

TODISTUS. Koska U on avoin joukko, niin voidaan valita $r > 0$ siten, että jos määritellään reaalilukuvälit I ja J siten, että $I = (x_0 - 2r, x_0 + 2r)$ ja $J = (y_0 - 2r, y_0 + 2r)$, niin $I \times J \subset U$. Todistuksen ideana on esittää

$$f(x_0 + r, y_0 + r) - f(x_0 + r, y_0) - f(x_0, y_0 + r) + f(x_0, y_0)$$

kahtena erotuksena:

$$[f(x_0 + r, y_0 + r) - f(x_0 + r, y_0)] - [f(x_0, y_0 + r) - f(x_0, y_0)] \tag{4.6}$$

ja

$$[f(x_0 + r, y_0 + r) - f(x_0, y_0 + r)] - [f(x_0 + r, y_0) - f(x_0, y_0)]\,. \tag{4.7}$$

Ensin käydään läpi tapaus (4.6). Määritellään apufunktio $\varphi(x)\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x, y_0 + r) - f(x, y_0)$ kaikilla $x \in I$. Koska funktiolla $f\colon U \to \mathbb{R}$ on osittaisderivaatta ensimmäisen komponenttinsa suhteen, niin funktio $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ on derivoituva. Siten voidaan soveltaa väliarvolausetta funktioon $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ suljetulla välillä $[x_0, x_0 + r]$. On olemassa piste $x_1 \in \,]x_0, x_0 + r[$ siten, että

$$\varphi'(x_1) = \frac{\varphi(x_0 + r) - \varphi(x_0)}{r}.$$

Tällöin

$$\frac{\varphi(x_0 + r) - \varphi(x_0)}{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0 + r) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0). \tag{4.8}$$

Kiinnitetään tämä piste x_1 ja määritellään uusi apufunktio $\psi\colon J \to \mathbb{R}$, $\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y)$ kaikilla $y \in J$. Voidaan soveltaa väliarvolausetta funktioon $\psi\colon J \to \mathbb{R}$ suljetulla välillä $[y_0, y_0 + r]$. On olemassa piste $y_1 \in]y_0, y_0 + r[$ siten, että

$$\frac{\psi(y_0 + r) - \psi(y_0)}{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1). \tag{4.9}$$

Kaavojen (4.8) ja (4.9) nojalla

$$\varphi(x_0 + r) - \varphi(x_0) = r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1). \tag{4.10}$$

Toisaalta $\varphi(x_0 + r) - \varphi(x_0)$ on yhtä suuri kaavan (4.6) kanssa ja siten saadaan

$$[f(x_0 + r, y_0 + r) - f(x_0 + r, y_0)] - [f(x_0, y_0 + r) - f(x_0, y_0)] = r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1). \tag{4.11}$$

Tapaus (4.7) tehdään vastaavasti, kun määritellään apufunktio $\phi\colon J \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = f(x_0 + r, y) - f(x_0, y)$ kaikilla $y \in J$. Tällöin voidaan valita piste $(x_2, y_2) \in I \times J$ siten, että

$$[f(x_0 + r, y_0 + r) - f(x_0, y_0 + r)] - [f(x_0 + r, y_0) - f(x_0, y_0)] = r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2). \tag{4.12}$$

Näin ollen kaavojen (4.11) ja (4.12) nojalla lemma on todistettu.

□

Nyt voidaan todistaa Lause 4.11:

TODISTUS. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$. Valitaan $r > 0$ siten, että $B_r(x_0, y_0) \subset D$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Nyt voidaan soveltaa Lemmaa 4.12 joukkoon $U = B_{\frac{r}{k}}(x_0, y_0)$ ja valitaan pisteet $(x_k, y_k) \in B_{\frac{r}{k}}(x_0, y_0)$ ja $(u_k, v_k) \in B_{\frac{r}{k}}(x_0, y_0)$ siten, että

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u_k, v_k). \tag{4.13}$$

Oletuksen nojalla toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Koska jonot $\{(x_k, y_k)\}$ ja $\{(u_k, v_k)\}$ suppenevat kohti pistettä (x_0, y_0), niin tästä seuraa, että

$$\lim_{k \to \infty} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

ja

$$\lim_{k \to \infty} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u_k, v_k) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Tällöin kaavan (4.13) nojalla saadaan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

□

Seuraavaksi käsitellään Rollen lauseen moniulotteista versiota ja sitä varten hieman merkintöjä, terminologiaa ja pari aputulosta:

- $O(m \times n)$ on *nollamatriisi*, jossa on m riviä ja n saraketta
- $x \cdot y$ on muuttujien x ja y välinen *sisätulo*
- $T(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| \leq r\}$
- $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < r\}$
- $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| = r\} = \partial T(x_0, r)$.

LEMMA 4.13. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, joka sisältää pisteen x ja oletetaan, että funktiolla $f\colon D \to \mathbb{R}$ on ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. Jos piste x on funktion f ääriarvopiste, niin tällöin*

$$\nabla f(x) = 0.$$

TODISTUS. Koska x on joukon D sisäpiste, voidaan valita $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset D$. Kiinnitetään indeksi i, $1 \leq i \leq n$, ja määritellään funktio $\phi\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(x + te_i)$, kun $|t| < r$. Tällöin piste 0 on funktion ϕ ääriarvopiste, joten

$$\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Tämä pätee kaikille indekseille i, $1 \leq i \leq n$, joten

$$\nabla f(x) = 0.$$

□

LEMMA 4.14. *Olkoon funktio $f\colon T(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin funktion kuvajoukko on suljettu ja rajoitettu väli $[m, M]$.*

TODISTUS. Idea: Jatkuva funktio f saavuttaa kompaktissa joukossa $T(x_0, r)$ pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M. Joukko $T(x_0, r)$ on määritelmänsä nojalla yhtenäinen, jolloin jatkuvuuden nojalla kuvajoukko $f(T(x_0, r))$ on väli. Näiden kahden ominaisuuden avulla väite voidaan todistaa.

□

”Tavallisen” Rollen lauseen tapauksessa välin $I = [a, b]$ päätepisteitä voidaan ajatella joukon I reunana, jolloin Rollen lauseen oletuksena on, että f saa saman arvon kaikissa joukon I reunapisteissä. Tällöin väliltä I löytyy sellainen piste, missä funktion derivaatta on nolla. Seuraava esimerkki kuitenkin osoittaa, että tämä ei päde usean reaalimuuttujan funktioille:

ESIMERKKI 4.15. Olkoon funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x(x^2+y^2-1), y(x^2+y^2-1))$. Tällöin funktio f on jatkuva joukossa $T(0, 1)$, differentioituva joukossa $B(0, 1)$ ja

$f(x) = 0$ kaikille $x \in S(0,1)$. Lasketaan funktion f osittaisderivaatat

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = (3x^2 + y^2 - 1, 2xy)$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = (2xy, x^2 + 3y^2 - 1).$$

Huomataan, että derivaatta ei ole missään pisteessä nolla, koska $2xy = 0$, jos ja vain jos $x = 0$ tai $y = 0$. Jos $x = 0$, niin $3x^2 + y^2 - 1 = y^2 - 1$, joka ei ole nolla missään joukon $B(0,1)$ pisteessä joukon määritelmän nojalla. Vastaavasti, jos $y = 0$, niin $x^2 + 3y^2 - 1 = x^2 - 1$, joka ei myöskään ole nolla missään joukon $B(0,1)$ pisteessä. Näin ollen joukossa $B(0,1)$ ei ole yhtään pistettä, missä derivaattamatriisin kaikki alkiot olisivat nollia.

Lause 4.16. *Olkoon funktio $f\colon T(x_0,r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ jatkuva joukossa $T(x_0,r)$ ja differentioituva joukossa $B(x_0,r)$. Oletetaan, että on olemassa vektori $v \in \mathbb{R}^p$ siten, että v on kohtisuorassa funktiota $f(x)$ vasten kaikilla $x \in S(x_0,r)$. Tällöin on olemassa vektori $c \in B(x_0,r)$ siten, että*

$$v \cdot f'(c)u = 0$$

kaikilla $u \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Olkoon $k\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $k(x) = v \cdot x$. Asetetaan $g(x) = k(f(x))$. Lemman 4.14 nojalla funktion g kuvajoukko on suljettu ja rajoitettu väli $[m, M]$. Lauseen oletuksen nojalla $g(x) = 0$ joukossa $S(x_0,r)$. Näin ollen voidaan olettaa, että g saavuttaa maksimiarvonsa, M, pisteessä $c \in B(x_0,r)$. Lemman 4.13 nojalla $g'(c) = O(1 \times n)$, toisin sanoen $v \cdot f'(c)u = 0$ kaikilla $u \in \mathbb{R}^n$.

□

Yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion tapauksessa Rollen lauseen oletuksessa funktio f on jatkuva ja derivoituva avoimella välillä. Edellisen lauseen oletusten mukaan funktio f on jatkuva ja differentioituva avoimessa pallossa. Lisäksi "tavallisessa" Rollen lauseessa oletetaan, että funktio f saa saman arvon lähtöjoukon päätepisteissä ja usean reaalimuuttujan funktion tapauksessa oletetaan, että on olemassa vektori, joka on kohtisuorassa funktiota vastaan avoimen pallon reunapisteissä.

Tarkastellaan seuraavaksi edelliseen lauseeseen liittyvää sovellusta:

Esimerkki 4.17. Olkoon $f\colon T(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ jatkuva joukossa $T(0,1)$ ja differentioituva joukossa $B(0,1)$ ja olkoon $G =$ funktion f kuvajoukko. Oletetaan, että on olemassa taso $p\colon ax + by + cz + d = 0$ siten, että $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in p$ kaikilla $(u,v) \in S(0,1)$. Tällöin on olemassa piste $(u_0,v_0) \in B(0,1)$ siten, että tangenttitaso pintaan G pisteessä $f(u_0,v_0)$ on yhdensuuntainen tason p kanssa.
Perustelu: Tason p normaalivektori $w = (a,b,c)$ on oletuksen nojalla kohtisuorassa funktion f arvoa $f(u,v)$ vastaan kaikilla $(u,v) \in S(0,1)$. Lauseen 4.16 perusteella on

siis olemassa $(u_0, v_0) \in B(0,1)$ siten, että $w \cdot f'(u_0, v_0)(u,v) = 0$ kaikille $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Tästä seuraa väite.

LAUSE 4.18. *Olkoon funktio $f\colon T(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ jatkuva joukossa $T(x_0, r)$ ja differentioituva joukossa $B(x_0, r)$. Olkoot $v \in \mathbb{R}^p$ ja $z_0 \in B(x_0, r)$ siten, että $v \cdot (f(x) - f(z_0))$ ei vaihda merkkiä joukossa $S(x_0, r)$. Tällöin on olemassa vektori $c \in B(x_0, r)$ siten, että*

$$v \cdot f'(c)u = 0$$

kaikilla $u \in \mathbb{R}^n$.

TODISTUS. Voidaan olettaa, että $h(x) = v \cdot (f(x) - f(z_0)) \leq 0$ kaikilla $x \in S(x_0, r)$. Funktio h saavuttaa suurimman arvonsa suljetussa pallossa $T(x_0, r)$ jossakin pallon sisäpisteessä ja tässä pisteessä funktion h derivaatta on nollamatriisi. Väite saadaan, kun lasketaan funktion h derivaatta ja asetetaan se nollaksi. On olemassa piste $c \in B(x_0, r)$ siten, että $v \cdot f(c) = M$, missä $M = \max\{v \cdot f(x) : x \in T(x_0, r)\}$. Siispä $v \cdot f'(c)u = 0$ kaikilla $u \in \mathbb{R}^n$.

□

ESIMERKKI 4.19. Olkoon $f\colon T(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ jatkuva joukossa $T(0,1)$ ja differentioituva joukossa $B(0,1)$. Olkoon $G =$ funktion f kuvajoukko ja $G_0 = f(\partial T(0,1))$. Oletetaan, että on olemassa taso $p\colon ax+by+cz+d = 0$ siten, että G_0 on toisella puolella tasoa p ja on olemassa piste joukosta $S(0,1)$ toisella puolella tasoa p. Tällöin tangenttitaso pintaan G jossakin pisteessä $P \in S(0,1)$ on yhdensuuntainen tason p kanssa.
Perustelu: Olkoon $w_i = (u_i, v_i) \in B(0,1)$ siten, että $f(u_i, v_i)$ on toisella puolella tasoa p suhteessa G_0:aan. Tällöin $(a,b,c) \cdot (f(w) - f(w_i))$ ei muuta merkkiä tasossa $\partial T(0,1)$. Loppu seuraa Lauseesta 4.18.

4.4. Yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoiset funktiot

Tässä kappaleessa on käytetty lähdettä [**9**].

”Tavallinen” Rollen lause ei päde analyyttisille funktioille kompleksitasossa, sillä esimerkiksi funktio $f(z) = e^z - 1$ saa arvon nolla, kun $z = 2k\pi i$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, mutta $f'(z) = e^z$ ei saa arvoa nolla millään $z \in \mathbb{C}$. Rollen lausetta ei ole mahdollista osoittaa analyyttisen funktion tapauksessa koskemaan joko reaaliosaa tai imaginaariosaa, vaan tarvitsemme molempia.

Käytetään jatkossa seuraavia merkintöjä:

- $z = x + iy$ kaikille $z \in \mathbb{C}$, missä $x = \Re(z)$ ja $y = \Im(z)$
- jos $a \neq b$ ja $a, b \in \mathbb{C}$, niin $]a, b[= \{a + t(b-a)\colon t \in]0,1[\}$.

Seuraavaksi olisi tarkoituksena yleistää Rollen lause kompleksitason analyyttisille funktioille ja näyttää, miten tästä saadaan väliarvolause kompleksiarvoisille funktioille. Ideana on tarkastella analyyttisen funktion f ja $\Re(f')$ suhdetta nollassa ja analyyttisen funktion f ja $\Im(f')$ suhdetta nollassa tietäen, ettei Rollen lausetta voida osoittaa ainoastaan toisessa tapauksessa.

LAUSE 4.20. (KOMPLEKSINEN ROLLEN LAUSE) *Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin ja konveksi joukko ja olkoon $f\colon G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Olkoot $a, b \in G$ siten, että $f(a) = f(b) = 0$ ja $a \neq b$. Tällöin on olemassa $z_1, z_2 \in \,]a, b[$ siten, että $\Re(f'(z_1)) = 0$ ja $\Im(f'(z_2)) = 0$.*

TODISTUS. Olkoon $a_1 = \Re(a)$, $a_2 = \Im(a)$, $b_1 = \Re(b)$, $b_2 = \Im(b)$, $u(z) = \Re(f(z))$ ja $v(z) = \Im(f(z))$ kaikille $z \in G$. Olkoon

$$\phi(t) = (b_1 - a_1)u(a + t(b-a)) + (b_2 - a_2)v(a + t(b-a))$$

kaikille $t \in [0,1]$. Tällöin $f(a) = f(b) = 0$ tarkoittaa, että $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$ ja siten $\phi(0) = 0$ ja $\phi(1) = 0$. Tällöin Rollen lauseen nojalla on olemassa $t_1 \in \,]0,1[$ siten, että $\phi'(t_1) = 0$. Olkoon $z_1 = a + t_1(b-a)$. Tällöin

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'(t_1) \\ &= (b_1 - a_1)\left[\frac{\partial u}{\partial x}(z_1)(b_1 - a_1) + \frac{\partial u}{\partial y}(z_1)(b_2 - a_2)\right] \\ &+ (b_2 - a_2)\left[\frac{\partial v}{\partial x}(z_1)(b_1 - a_1) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_1)(b_2 - a_2)\right]. \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann yhtälöiden ja Lauseen 3.1 nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'(t_1) \\ &= (b_1 - a_1)^2\frac{\partial u}{\partial x}(z_1) + (b_2 - a_2)^2\frac{\partial v}{\partial y}(z_1) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_1)\left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\right]. \end{aligned}$$

Siispä

$$\Re(f'(z_1)) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_1) = 0.$$

Soveltamalla tämä funktioon $g = -if$, saadaan, että on olemassa $z_2 \in \,]a, b[$ siten, että

$$0 = \Re(g'(z_2)) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_2) = \Im(f'(z_2)).$$

□

LAUSE 4.21. (KOMPLEKSINEN VÄLIARVOLAUSE) *Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja olkoon $f\colon G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Olkoot pisteet a ja b kaksi erillistä pistettä joukossa G. Tällöin on olemassa $z_1, z_2 \in \,]a, b[$ siten, että*

$$\Re(f'(z_1)) = \Re\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

ja

$$\Im(f'(z_2)) = \Im\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right).$$

TODISTUS. Olkoon

$$g(z) = f(z) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(z-a) \tag{4.14}$$

kaikilla $z \in G$. Selvästi $g(a) = g(b) = 0$. Lauseen 4.20 nojalla on olemassa $z_1, z_2 \in]a, b[$ siten, että $\Re(g'(z_1)) = 0$ ja $\Im(g'(z_2)) = 0$. Kuitenkin kaavan (4.14) nojalla

$$g'(z) = f'(z) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

kaikilla $z \in G$. Tällöin

$$0 = \Re(g'(z_1)) = \Re(f'(z_1)) - \Re\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

ja

$$0 = \Im(g'(z_2)) = \Im(f'(z_2)) - \Im\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right).$$

□

SEURAUS 4.22. *Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja olkoon $f\colon G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio siten, että $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in G$. Tällöin f on vakiofunktio.*

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**9**]: Corollaryn 2.3. todistus.

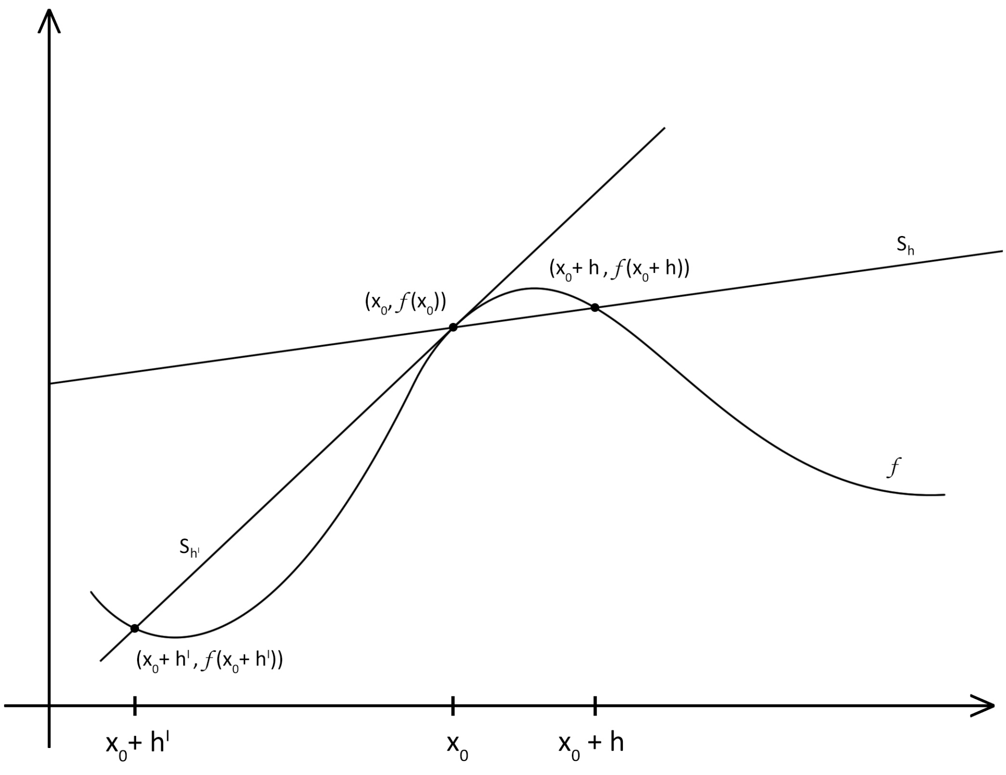
□

ESIMERKKI 4.23. (a) Olkoon $f(z) = e^z - 1$, jolloin $f(z) = 0$, kun $z = 2k\pi i$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Koska $f'(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$, niin $\Re(f'(z)) = 0$, jos $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ja $\Im(f'(z)) = 0$, jos $y = k\pi$. Tällöin funktion f' reaali- ja imaginaariosat saavat arvon nolla suorilla, jotka erottavat funktion f nollakohdat toisistaan.

(b) Jos $f(z) = (z-a)(z-b)$, $a \neq b$, niin $f(z) = 0$, kun $z = a$ tai $z = b$. Koska $f'(z) = 2z - a - b$, niin $\Re(f'(z)) = 0$, jos $x = \frac{\Re(a+b)}{2}$ ja $\Im(f'(z)) = 0$, jos $y = \frac{\Im(a+b)}{2}$ Lopputulos on sama kuin (a)-kohdassa.

Liitteet

Kuva 1



Kirjallisuutta

[1] Michael Spivak: *Calculus.* Third Edition, Cambridge University Press, 1994.
[2] Päivi Lammi ja Juha Lehrbäck *Johdatus matemaattiseen analyysiin 3.* Luentomoniste, 05.01.2018.
[3] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner and Andrew M. Bruckner: *Elementary Real Analysis.* Second Edition, Prentice Hall (Pearson), 2008.
[4] Patrick M. Fitzpatrick: *Advanced Calculus.* Second Edition, Thomson Brooks/Cole, 2006.
[5] Petri Juutinen: *Vektorifunktioiden analyysi 1B.* Luentomoniste, 28.10.2014.
[6] Mark J. Ablowitz and Athanassios S. Fokas: *Complex Variables - Introduction and applications.* Second Edition, Cambridge University Press, 2003.
[7] Ari Lehtonen: *Kompleksianalyysi 1.* Luentomoniste, 26.04.2006.
[8] Massimo Furi and Mario Martelli: *A Multidimensional Version of Rolle's Theorem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 3 (Mar., 1995), pp. 243-249.
[9] J.-Cl. Evard and F. Jafari: *A Complex Rolle's Theorem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 9 (Nov., 1992), pp. 858-861.
[10] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Derivaatta`
[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Riemann_equations`
[12] `https://en.wikipedia.org/wiki/Rolles_theorem`
[13] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem`
[14] `https://math.tkk.fi/opetus/ms-a0207/luennot16/synopexamp-16-1-2on1.pdf`
[15] `https://johtopaatoksia.wordpress.com/2015/05/11/differentiaalilaskennan-valiarvolauseet/`