Matematiikkaa yhdessä – ikäsidonnaisuuden ylittävä opetuskokeilu perusopetuksessa

Riikka Koukka

Pro Gradu -tutkielma
Matematiikan laitos
Jyväskylän yliopisto
2019

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

KOUKKA, RIIKKA: Matematiikkaa yhdessä – ikäsidonnaisuuden ylittävä opetuskokeilu perusopetuksessa, pro gradu -tutkielma

Ohjaajat: Juha Lehrbäck, Sinikka Kaartinen

Matematiikka

2019

Tiivistelmä

Opetuskokeilun idea lähti liikkeelle halusta irrottautua perinteisestä ikäsidonnaisesta koulusysteemistä ja löytää uusia näkökulmia opetukseen eri ikäisten oppilaiden välisestä vuorovaikutuksesta. Tutkimustehtävänä oli selvittää, kuinka eri ikäiset oppilaat voivat tukea toistensa matematiikan oppimista. Tutkimukseen osallistui kahdeksan luokkien 4–9 oppilasta, joista muodostettiin kaksi mahdollisimman ikäsekoitteista ryhmää. Pienryhmät tekivät tehtäviä kahdessa työskentelysessiossa, jotka äänitettiin, ja äänitteistä valittiin tutkimustehtävän kannalta mielenkiintoisimmat katkelmat analysoitaviksi.

Keskusteluissa nousi vahvasti esiin oppilaiden keskuudessa vallitseva käsitys siitä, että matematiikan osaaminen on tiukasti sidoksissa oppilaan ikään. Tämän ikähierarkian seurauksena ryhmissä muodostui melko selkeä jako, jossa vanhin oppilas ohjasi muuta ryhmää. Toisaalta toisessa tutkimusryhmässä esiintyi myös hyvin selkeä poikkeama tästä ikäjaottelusta. Ryhmän toiseksi nuorin jäsen toimi yhdenvertaisena ohjaajana ryhmän vanhimman jäsenen kanssa, ja hänen osaamiseensa luotettiin. Oppilaiden välinen keskustelu ryhmätyöskentelyn aikana oli vuorovaikutteista, ja oppilaat vaativat kohtalaisen rohkeasti lisäperusteluja toistensa vastauksiin. Oppilaat kokivat erityisesti arkipäivän esimerkit toimivana keinona asioiden selittämisessä. Uusia käsitteitä lähestyttiin usein visuaalisesta näkökulmasta, joka on konkreettinen reitti lähestyä uutta asiaa. Haastavammissa tehtävissä oppilaiden vuorovaikutusta ja ymmärrystä heikensi se, ettei omia päätelmiä perusteltu riittävästi. Näissä tilanteissa opettajan ohjaus johdattelevien kysymysten kautta osoittautui tärkeäksi.

Opetuskokeilun yhdeksi pääaiheeksi valikoitui yhtälöiden ratkaiseminen, joka on matematiikan opetussuunnitelman tärkeimpiä osa-alueista. Yhtälöiden ratkomiseen syvennytään

tässä pro gradussa historiakatsauksen kautta. Yhtälöiden ja käyrien välinen yhteys ymmärrettiin vasta uuden matematiikan aikana 1600-luvulla. Havainto siitä, että kukin yhtälö määrittelee käyrän toi matemaatikot uusien kysymysten äärelle. Yleistä konstruktiota n. asteen yhtälöille etsittiin aktiivisesti 1750-luvulle saakka. Yritykset eivät tuottaneet toivottua lopputulosta, mutta etsintöjen aikana onnistuttiin ennustamaan, että kaksi käyrää, jotka ovat m. ja n. astetta, leikkaavat nm pisteessä. Nykyään tämä periaate tunnetaan Bézout´n lauseena. Jotta lause pätee, täytyy huomioon ottaa myös yhtälöparin kompleksiarvoiset ratkaisut sekä äärettömyyden pisteet. Äärettömyyden pisteiden tarkastelussa avuksi tulivat homogeeniset koordinaatit: Projektiotason $\mathbb{R}P^2$ pisteet voidaan esittää kolmiulotteisen avaruuden suorina, jotka kulkevat origon kautta. Kun valitaan mikä tahansa tavallinen taso T, joka ei kulje origon kautta, tason T suhteen äärettömyydessä sijaitsevat pisteet voidaan tulkita homogeenisesti tason T kanssa yhdensuuntaisina origon kautta kulkevina suorina.

Avainsanat:

Bézout'n lause, homogeeniset koordinaatit, ryhmätyöskentely, kielentäminen, matematiikkakuva, matematisointi, yhteistoiminnallinen oppiminen, yhtälön ratkaiseminen

Sisällys

1. Johdanto

Oppilaiden matemaattisen ajattelun kehityksen kannalta on tärkeää, että he oppivat ymmärtämään vastauksiensa perustelemisen merkityksen sekä argumentoimaan matemaattisesti pätevästi ja yksiselitteisesti. Tässä tarkoituksessa oppilaiden välinen *ryhmätyöskentely* ja keskustelu ovat avainasemassa. Yhden oppilaan kielentäessä valitsemaansa ratkaisustrategiaa muut ryhmän jäsenet voivat vertailla esittäjän ratkaisua omiin päätelmiinsä. Jos esittäjän ja muiden ryhmäläisten ratkaisustrategiat ja päätelmät eroavat merkittävästi toisistaan, saavat toisen ratkaisustrategian valinneet uusia lähestymistapoja tehtävän ratkaisemiseen. Toisaalta saman aikaisesti muu ryhmä saa mahdollisuuden arvioida esittäjän ratkaisun oikeellisuutta ja esittää tarkentavia kysymyksiä, jotka parhaassa tapauksessa aikaansaavat kriittistä pohdintaa ja syventävät tehtävän ymmärtämistä. Joutsenlahden, Silfverbergin ja Räsäsen (2018) mukaan kuvatunlainen ryhmän toiminta synnyttää keskusteluun osallistujissa tarpeen entistä täsmällisempään ja perusteellisempaan argumentointiin.

Ryhmässä työskentely palvelee tehtävien ratkaisemista myös siinä mielessä, että ryhmässä työskenneltäessä oppilaiden tulee luontevasti kerrottua ajatuksiaan ääneen. Ääneen ajatteleminen on tunnetusti toimiva keino edistää käsittelyssä olevan ongelman ratkaisemista (Joutsenlahti ym., 2018). Kielentäessään tehtävän ratkaisuun vaadittavaa matematiikkaa oppilas joutuu jäsentämään ongelman itselleen ja oivaltaa näin mahdollisesti jäsennysprosessin kautta tehtävän ratkaisun (Joutsenlahti ym., 2018).

Pienryhmätyöskentely oli luonteva valinta tutkimuksen työskentelymuodoksi, sillä se noudattaa vuoden 2014 opetussuunnitelman suuntausta hyödyntää opetuksessa monipuolisesti eri opiskelumuotoja. Opetussuunnitelman matematiikan opetuksen tehtävistä koostetussa kuvauksessa todetaan matematiikan opetuksen kehittävän viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja, mitä tutkimuksessa käytetty oppilaslähtöinen pienryhmätyöskentely tukee hyvin. Lisäksi opetussuunnitelmassa kannustetaan hyödyntämään tieto- ja viestintäteknologiaa osana yhdessä tekemistä tarkoituksena edistää ryhmäläisten välistä vuorovaikutusta sekä työskentelyn moniaistisuutta ja monikanavaisuutta. (Opetushallitus, 2014) Myöskin tämä opetussuunnitelman kohta toteutui tutkimussessioissa, joissa pääasiallisena opiskeluvälineenä toimi *Geogebra*-ohjelma.

Opetuskokeilussa oppilaat perehtyivät koordinaatiston käyttöön, suoriin ja niitä vastaavien ensimmäisen asteen yhtälöiden ratkaisemiseen ikäsekoitteisissa pienryhmissä työskennellen. Pienryhmien toimintaa ja vuorovaikutusta tutkitaan oppilaiden välisen dialogin analyysin kautta, minkä lisäksi tehdään pieni katsaus oppilaiden täyttämiin alku- ja loppukyselyihin. Tutkimukseen liittyvän osuuden jälkeen perehdytään vielä syvemmin opetuskokeilun takana olevaan matematiikkaan. Viimeisessä luvussa tehdään historiakatsaus yhtälöiden ratkomisen kehitysvaiheisiin muinaisesta Egyptistä matematiikan uuteen aikaan saakka. Erityisesti pysähdytään tutkimaan käyrien leikkauspisteistä kertovaa *Bézout'n lausetta* sekä siihen läheisesti liittyvää homogeenista koordinaattijärjestelmää.

2. Matematiikka yhdessä tekemisenä

Tutkimussessioiden ryhmätyöskentelyssä tavoitteena oli päästä mahdollisimman lähelle *yhteistoiminnallisen oppimisen* (Saloviita, 2014) periaatteita, jotka edistävät perinteistä ryhmätyöskentelyä paremmin oppilaiden kehittymistä itsenäisinä oppijoina ja ajattelijoina. Yhteistoiminnallisessa oppimisessa oppilaat työskentelevät ryhmässä, jolla on yhteinen tavoite. Tavoitteen saavuttamisessa hyödynnetään kaikkien ryhmän jäsenten tietämystä. Yhteistoiminnallinen ryhmässä työskentely eroaa perinteisestä ryhmätyöskentelystä siinä, että jokaisen panos on välttämätön työn onnistumisen kannalta, jolloin kukaan ei voi toimia vapaamatkustajana. Kysymys kuuluu, mitkä ovat edellytykset yhteistoiminnalliselle oppimiselle. Timo Saloviidan (2014) mukaan yhteistoiminnallisella oppimisella on neljä tuntomerkkiä. Ensimmäinen niistä on kasvokkain tapahtuva *suora vuorovaikutus* oppilaiden välillä, joka erottaa yhteistoiminnallisen oppimisen perinteisestä tuntityöskentelystä siinä, että kullakin oppilaalla on mahdollisuus aktiiviseen osallistumiseen. Toinen yhteistoiminnallisen oppimisen kriteeri on ryhmän jäsenten välinen *positiivinen keskinäisriippuvuus*. Tällainen riippuvuussuhde saa oppilaan huomaamaan, että hänen työpanoksensa on arvokas ryhmälle ja ryhmän työpanos hänelle. Myös ansiot koetaan yhteisiksi, mikä lisää ryhmän koherenttisuutta. Kolmas kriteeri on *yksilöllinen vastuu*. Perinteisen ryhmätyöskentelyn ongelmana on mahdollisuus vapaamatkustajuuteen. Hyvä oppilas saattaa ottaa vastuun koko projektista, koska hän kokee muut ryhmän jäsenet itseään heikompina. Heikompi oppilas taas luovuttaa vastuun ryhmän taitavimmalle, koska tällä saavutetaan kaikkien kannalta paras lopputulos ja arvosana. Yhteistoiminnallisessa oppimisessa opettaja arvioi kunkin oppilaan suorituksen erikseen, eli kullakin oppilaalla on yksilöllinen vastuu omasta arvosanastaan. Näin ollen vapaamatkustaminen ei yhteistoiminnallisessa ryhmätyössä ole mahdollista. Neljäs ja viimeinen yhteistoiminnallisen oppimisen tuntomerkki on *yhtäläinen osallistuminen*. Kaikkien ryhmäläisten yhtäläinen osallistuminen työskentelyyn voidaan taata esimerkiksi etukäteen tehdyn työnjaon avulla. Kuitenkaan tämän opetuskokeilun kaltaisessa tutkivassa ryhmätyössä ei valmista työnjakoa voi tehdä, sillä työn lopputuloksen kannalta on tärkeää, että oppilaat voivat vaihtaa ajatuksia ja mielipiteitä vapaasti ilman sitoutumista tiettyyn rooliin tai työnkuvaan. (Saloviita, 2014)

Tärkeä osa yhteistoiminnallista matematiikan opiskelua on oppilaiden oman matemaattisen ajattelun *kielentäminen*. Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista luonnollisen kielen, kuviokielen sekä matematiikan symbolikielen keinoin pääasiassa puhuen tai kirjoittaen. Matematiikan kielentäminen on tärkeä osa matematiikan opiskelua, sillä se antaa opettajalle mahdollisuuden seurata oppilaan ajattelun rakentumista sekä korjata ja kehittää sitä. Oppilaalle taas kielentäminen on keino osallistua ryhmän yhteiseen pohdintaan, selittää omia ratkaisujaan, argumentoida sekä rakentaa matemaattisille käsitteille merkityksiä etsimällä yhteyksiä arkielämän ilmiöihin ja tilanteisiin. Kaikki nämä toiminnot kasvattavat oppilaan omaa ymmärrystä matematiikasta. Valmistautuessaan omaan puheenvuoroonsa, on kyseessä sitten yhteinen pohdinta, oman ratkaisun esittäminen tai argumentointitilanne, oppilas joutuu jäsentämään ensin omaa ajatteluaan ja tämän jälkeen muotoilemaan ajatuksensa kuulijoille ymmärrettävään muotoon. (Joutsenlahti ym., 2018) Näin oppilas joutuu käymään läpi omaa ymmärrystään syventävän ajatteluprosessin ennen kuin on valmis kielentämään ajatuksensa muulle ryhmälle.

Matematisointi on toinen oppilaan matemaattisen ajattelun kehityksen kannalta merkittävä käsite. Kaartisen ja Kumpulaisen (2012) määritelmän mukaan matematisoinnin käsite pitää sisällään neljä matemaattista toimintoa, jotka ovat oletuksien asettaminen, kokeileminen, mallintaminen ja analysointi. Kaartisen ja Kumpulaisen tutkimuksessa perehdytään päiväkoti-ikäisten lasten asenteisiin matematisointia kohtaan. Tutkimuksessa todetaan, että jo näin varhaisessa vaiheessa tapahtuva matemaattinen toiminta näyttelee merkittävää roolia oppilaan matemaattisen ajattelun kehityksessä ja rakentaa lapselle työkaluja löytää yhteyksiä arkipäivän toimintojen ja matemaattisten menetelmien välillä. Oppilaiden asenteet matematisointia kohtaan kehittyvät koko peruskoulun ajan, minkä takia käsite on keskeinen osa myös tätä eri ikäisille oppilaille teetettyä tutkimusta.

Kielentämisen ja matematisoinnin ohella kolmas tärkeä käsite, jota tutkimuksen tuloksissa tullaan pohtimaan, on oppilaiden *matematiikkakuva*. Joutsenlahti, Silfverberg ja Räsänen (2018) määrittelevät matematiikkakuvan käsittävän kolme osatekijää: tunnesuhtautuminen, motivaatio ja uskomukset. Nämä kolme osa-aluetta muodostavat oppilaan matematiikkakuvan tiiviissä keskinäisessä vuorovaikutuksessa. Matematiikan loogisesta luonteesta huolimatta oppilaan suhde matematiikkaan ja matematiikan oppimiseen on hyvin tunnepohjainen (Joutsenlahti ym., 2018). Oppilaiden matematiikan oppitunneilla ja kotiläksyjen parissa kokema tunteiden kirjo on laaja. Eritasoiset tehtävät, avun pyytäminen ja antaminen sekä omien ratkaisujen esittäminen voivat aiheuttaa ahdistuksen, ilon, vihan ja tylsistymisen tunteita sekä kaikkea mahdollista näiden väliltä. Nämä erilaiset tunnetilat ovat kiinteässä yhteydessä oppilaan motivaatioon. Positiiviset tunteet, kuten hyvän arvosanan aikaansaama ylpeyden tunne tai oivaltamisen ilo, lisäävät oppilaan kiinnostusta ja opiskelumotivaatiota. Negatiiviset tuntemukset, kuten jännitys oppitunneilla tai turhautuminen vaikeaan tehtävään, taas vähentävät kiinnostusta matematiikkaa kohtaan. Motivaatio on merkittävä osa oppilaan matematiikkakuvaa, sillä siihen sisältyy mitä oppilas haluaa, mitä hän pitää tärkeänä ja millaisia valintoja hän tekee (Joutsenlahti ym., 2018). Myös uskomukset ovat tunteille läheinen osa-alue. Nämä kaksi eroavat toisistaan kuitenkin siinä, että uskomukset voivat olla epätosia, joten niitä voidaan kyseenalaistaa ja niistä voidaan kiistellä toisin kuin tunteista, jotka ovat subjektiivisia kokemuksia (Joutsenlahti ym., 2018).

Opetuskokeilussa ryhmien työskentelyvälineenä toimi Geogebra-ohjelma. Opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2014) asetetaan, että ”konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua”. Tätä tavoitetta ajatellen Geogebra palveli tehtävientekovälineenä erinomaisesti. Geogebraa käytetään suomalaisissa kouluissa kaiken ikäisten oppilaiden matematiikan opetuksessa koko ajan enenevässä määrin. Enimmäkseen Geogebraa hyödynnetään yläkoulun ja lukion opetuksessa, mutta sillä on monia potentiaalisia käyttösovelluksia myös alakoulussa. Tietotekniset apuvälineet koetaan peruskoululaisten keskuudessa useimmiten mielekkäinä ja innostavina työskentelyvälineinä. Odotuksena oli, että ohjelman käytön harjoittelu ja toimivimpien piirtotyökalujen etsiminen työllistävät ja innostavat kaikkia ryhmäläisiä iästä riippumatta.

Yläkoulussa kaikilla luokka-asteilla opetussuunnitelman mukaisena oppimistavoitteena on, että ”oppilas osaa soveltaa tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opetuksessa” (Opetushallitus, 2014). Erilaisten ohjelmien monipuolisen ja soveltavan käytön oppimisen kannalta on hyödyllistä, että esimerkiksi Geogebran kaltaisten kaiken ikäisille soveltuvien ohjelmien käytön jatkumo aloitetaan jo alakoulussa. Lisäksi koodaaminen ja ohjelmointi ovat uudessa opetussuunnitelmassa mukana kaikilla vuosiluokilla 1–9. Tämä merkitsee tietotekniikan käytön huomattavaa lisääntymistä ja tietoteknisten taitojen osaamisvaatimusten kohoamista koko peruskoulussa. Atk-tunneilla tapahtuvan opetuksen lisäksi on tärkeää, että oppilaat saavat varmuutta tietotekniikan käyttöön myös muilla oppitunneilla. Matematiikassa tämä onnistuu luontevasti ja oppimista tukien Geogebran ja muiden laskenta- ja piirto-ohjelmien avulla.

3. Tutkimus

3.1 Tutkimustehtävä

Tutkimustehtävänä oli selvittää, kuinka eri ikäiset oppilaat voivat tukea toistensa matematiikan oppimista. Tutkimustehtävää lähestyttiin ikäsekoitteisissa pienryhmissä tapahtuvan itsenäisen opiskelun kautta. Toiveena ja tavoitteena oli päästä mahdollisimman lähelle yhteistoiminnallisen oppimisen periaatteita.

Oppilaiden välinen yhteistyö on tutkimisen ja erityisesti hyödyntämisen arvoinen asia matematiikan oppitunneilla. Ryhmätyöskentelyä on tutkittu paljon, ja perinteisen ryhmätyöskentelyn rinnalle kehittynyt yhteistoiminnallinen oppiminen hyödyntää entistä paremmin kaikkien ryhmäläisten vahvuuksia. Yhteistoiminnallisen oppimisen periaatteet toteutuvat sitä paremmin, mitä erilaisemmista oppilaista ryhmä muodostuu (Saloviita, 2014). Niinpä oli mielenkiintoista lähteä tutkimaan laajan ikäskaalan omaavia ryhmiä, joissa heterogeenisuus toteutuu väistämättä, kun ryhmäläisillä on eri määrä opiskeluvuosia takanaan ja he ovat erilaisissa kehitysvaiheissa yleisesti elämän eri osa-alueilla.

3.2 Tutkimuskysymykset

Edellä asetetun tutkimustehtävän sekä oppilaille annettujen tehtävien, jotka esitellään hieman tuonnempana, puitteissa pääasiallisina kiinnostuksen kohteina tutkimuksessa olivat seuraavat kysymykset:

1. Miten oppilaiden matemaattinen osaaminen näyttäytyi yhteistoiminnassa?
2. Miten oppilaiden välinen vuorovaikutus toimi ja rakentui?
3. Millaisia merkitysneuvotteluja koordinaatiston käytöstä, suorista ja yhtälönratkaisusta käytiin?

Tutkimuskysymyksiin tullaan etsimään vastauksia analysoimalla oppilaiden välistä dialogia ryhmätyöskentelyn aikana.

3.3 Aineiston keruu

Tutkimus suoritettiin suomalaisessa peruskoulussa huhtikuussa 2019. Tutkimukseen osallistui kahdeksan luokka-asteiden 4–9 oppilasta, jotka jaettiin kahteen mahdollisimman ikäsekoitteiseen ryhmään. Ensimmäisessä ryhmässä piti suunnitelman mukaan olla mukana yhdeksäs-, seitsemäs-, kuudes- ja viidesluokkalainen, mutta ryhmän kuudesluokkalainen oli pois koulusta ensimmäisenä tutkimuspäivänä ja viidesluokkalainen jälkimmäisenä päivänä, joten ryhmä työskenteli kolmihenkisenä molempina päivinä. Toisessa ryhmässä oli yhdeksäs-, kuudes-, viides- ja neljäsluokkalainen. Kumpikin ryhmä osallistui kahteen työskentelysessioon, jotka järjestettiin peräkkäisinä aamupäivinä. Ryhmät työskentelivät samanaikaisesti eri luokkatiloissa. Molempien päivien työskentelysessiot äänitettiin.

Ensimmäisen tutkimussession aluksi oppilaat täyttivät ennakkokyselylomakkeen (liite 1), jonka avulla kartoitettiin oppilaiden osaamista ja asenteita tutkimuksen käsitteisiin ja työskentelytapoihin liittyen. Lisäksi ennen tehtävien teon aloittamista oppilaat tutustuivat opettajajohtoisesti Geogebraan, jota käytettiin tutkimuksessa pääasiallisena työskentely-ympäristönä. Noin kymmenen minuutin mittaisessa opetustuokiossa käytiin läpi, kuinka ohjelmalla saadaan piirrettyä piste, jana ja suora sekä selvitettyä kahden suoran leikkauspisteen koordinaatit. Lisäksi tuokiossa harjoiteltiin, kuinka suoralla olevan pisteen y-koordinaatti luetaan, kun x-koordinaatti tunnetaan, ja päinvastoin. Oppilaat harjoittelivat edellä lueteltuja toimintoja pareittain tietokoneilla opettajan ohjeen mukaisesti. Opetustuokion jälkeen tutkimusryhmät siirtyivät erillisiin luokkiin tekemään tehtäviä. Tämän ensimmäisen työskentelysession aiheina olivat koordinaatistoon, suoriin ja (suorien) yhtälöihin liittyvät käsitteet sekä koordinaatiston käyttö. Tehtävämoniste (liite 3) oli koottu tavoitteena tutustuttaa oppilaat kyseisiin käsitteisiin sekä muistutella oppilaiden mieliin, kuinka koordinaatistoa käytetään. Ryhmillä oli aikaa tehtävien tekemiseen noin tunti.

Toisessa tutkimussessiossa jatkettiin ryhmätyöskentelyä uuden tehtävämonisteen (liite 4) parissa. Toisena työskentelypäivänä ryhmät pääsivät soveltamaan ensimmäisenä päivänä opittuja käsitteitä ja perusasioita käytännönläheisten matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen. Tehtävien aiheina olivat yhtälö, yhtälöpari ja graafinen ratkaisu. Työskentelyaikaa oli noin tunti ja neljäkymmentä minuuttia mukaan lukien kymmenen minuutin tauko. Ryhmätyöskentelyosuuden päätteeksi oppilaat täyttivät kukin itsenäisesti loppukyselylomakkeen (liite 2), jolla selvitettiin oppilaiden mielipiteitä tutkimuksen työskentelymuodoista sekä siitä, mitä he olivat oppineet ja mitä heille oli jäänyt mieleen.

Oppilaat tekivät tehtäviä ryhmissä keskenään ilman varsinaista opettajajohtoista opetusta. Oletuksena oli, että aiheet olivat vanhemmille oppilaille entuudestaan tuttuja, joten he voivat neuvoa ja opettaa nuorempia oppilaita, joille osa asioista oli uusia. Opettaja kierteli jatkuvasti luokissa tarkkailemassa ryhmien työskentelyä ja neuvoi tarvittaessa.

3.4 Aineiston analyysi

Tutkimusaineistoksi nauhoiteut äänitteet litteroitiin, ja litteraateista valittiin tutkimuskysymysten kannalta mielenkiintoisimmat katkelmat analysoitaviksi. Valitut dialogipätkät sijoitettiin taulukkoon siten, että vasemmanpuolimmaisessa sarakkeessa on puheenvuorossa olevan oppilaan nimi (nimet muutettu) ja viereisessä sarakkeessa oppilaan tuottama puhesiirtymä. Seuraavaan sarakkeeseen *Kielentäminen* on merkitty puhesiirtymän merkitys keskustelun kehittymiselle. *Matematisointi*-sarakkeessa on kuvailtu puhesiirtymän merkitys tehtävän ratkaisun rakentumiselle ja oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kasvulle. Viimeisessä sarakkeessa *Huomioita* on kirjattu oppilaiden puhesiirtymiin liittyviä toimintoja. Keskusteluissa esiintyneet kielentämisen ja matematisoinnin keinot on koottu taulukkoon 1. Edellä kuvattu analyysimenetelmä ja sen kategorisointi on luotu mukaillen tutkimusta Kaartinen ja Latomaa (2012).

Kutakin keskustelua vastaavan taulukon esittämisen jälkeen seuraa keskustelun analyysin tulkinta. Analyysin ensimmäisen otsikon *Miten ryhmän vuorovaikutus rakentuu?* alla avataan keskustelua ja puhesiirtymien sisältöä sekä pohditaan, kuinka erilaiset puhesiirtymät vaikuttavat keskustelun jatkumiseen ja kehittymiseen. Seuraavan otsikon *Mitä rooleja vuorovaikutuksessa esiintyy?* alla eritellään rooleja, joita oppilaat keskustelun edetessä omaksuvat. Viimeisenä on kappale *Millaisia merkityksiä matematiikasta neuvotellaan?*, joka jakautuu alakappaleiksi *Matematiikkakuva* ja *Matematisointi*. Näistä ensimmäisessä analysoidaan oppilaiden suhtautumista ja asenteita omaa ja toistensa osaamista, kyseistä tehtävää ja yleisesti matematiikkaa kohtaan. Jälkimmäisessä tutkitaan, millaista matemaattista sisältöä oppilaiden yksittäisissä puheenvuoroissa ja vuorovaikutuksessa kokonaisuutena on ja miten he matemaattisen pohdinnan kautta rakentavat tehtävän ratkaisua.

Kielentäminen	**Matematisointi**
Ongelman ratkaisu	Ongelman ratkaisu
arviointi	hypoteesi
kysyminen	hypoteesin toteaminen oikeaksi
perusteleminen	johtopäätös
tehtävän ratkaiseminen	käsitteen määrittely
täydentäminen	matematisointi
vastaaminen	ongelman havaitseminen
vasta-argumentti	ongelman ratkaisu
	pohdinta
Ratkaisun ohjaaminen	strategian valinta
hyväksyminen	tehtävän ratkaiseminen
lisäohjeistuksen antaminen	tehtävän saattaminen loppuun
ohjaaminen	tehtävän tiivistäminen
termistön tarkentaminen	uuden strategian valinta
tiivistäminen	vastauksen antaminen
vastauksen hylkääminen	vastauksen hylkääminen
ääneen lukeminen	
	Ratkaisun ohjaaminen
Vuorovaikutus	esimerkki
huomion kiinnittäminen	tarkentaminen
kehuminen	vastaaminen
kuuntelemisen osoittaminen	vastaaminen kysymyksen kautta
osallistuminen	vastauksen hyväksyminen
puheenvuoron siirtäminen	vastauksen täydentäminen
toistaminen	
vastuun siirtäminen	Vuorovaikutus
vetäytyminen	aktivointi
	eteneminen
	johdattelu
	kertaaminen
	korjaaminen
	kysyminen
	ohjaaminen
	vahvistaminen
	varmistaminen
	Matematiikkakuva

Taulukko 1: Dialogeissa esiin nousseet kielentämisen ja matematisoinnin keinot.

3.5 Yhteistoiminnallisten aktiviteettien pedagogiset periaatteet

Opetussuunnitelmassa ohjeistetaan seuraavaa: ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua.” (Opetushallitus, 2014) Tähän tavoitteeseen työskentelysessioissa pyrittiin keskustelevan, kiireettömän ilmapiirin luomisen kautta, johon oppilaita ohjeistettiin näin:

1. Tehkää tehtävät huolella ja rauhassa. Kaikkia tehtäviä ei tarvitse ehtiä tehdä!
2. Kysykää rohkeasti apua toisiltanne.
3. Pitäkää huoli, että kaikki ymmärtävät, mitä kysytään ja mitä ollaan tekemässä.
4. Työskennelkää siten, että kaikki ryhmäläiset osallistuvat tehtävien ratkaisemiseen.
5. Jos osaat, koeta saada muutkin ymmärtämään!

Keskustelujen tavoitteena oli antaa oppilaille uusia näkökulmia tehtäviin sekä kehittää oppilaiden kriittistä ajattelua heidän vertaillessaan omia ja muiden ryhmäläisten ratkaisuideoita keskenään. Odotuksena oli, että oppilaista löytyisi kriittisyyttä muiden ryhmäläisten esittämiä ratkaisuideoita kohtaan, mikä herättäisi tarkentavia kysymyksiä ja saisi näin aikaan entistä täsmällisempiä perusteluja tehtäviin. Erityisesti ensimmäisen tutkimussession tehtäväpaketti oli koottu tavoitteena herättää ryhmissä keskustelua. Ensimmäisessä sessiossa perehdyttiin muun muassa keskustelutehtävien ja erilaisten pelien kautta tutkimuksen toisessa, laskennallisemmassa työskentelysessiossa tarvittaviin käsitteisiin, joita olivat koordinaatisto, x-koordinaatti ja y-koordinaatti, piste, suora, suorien leikkauspiste, yhtälö ja yhtälön ratkaisu.

Lisäksi opetussuunnitelmassa matematiikan opetukselta ja opiskelulta edellytetään konkretiaa ja toiminnallisuutta (Opetushallitus, 2014). Konkretiaa tehtävissä haettiin yhdistelemällä tehtävien aiheita arkielämän tilanteisiin. Tehtävissä muun muassa pohdittiin, kuinka paljon Ville voi ostaa kaupasta päärynöitä ja appelsiineja, jos yhteensä hedelmiä on kuusi kappaletta, ja kuinka paljon Samilla ja Riitalla voi olla rahaa, kun tiedetään, että Samilla on rahaa kaksinkertaisesti Riittaan verrattuna. Tehtävien matematiikka oli yhdistetty tilanteisiin, jotka ovat oppilaiden elämästä tuttuja, jotta tehtävät tuntuisivat helposti lähestyttäviltä. Toiminnallisuutta tehtäviin puolestaan toi Geogebra-ohjelman käyttö.

Työskentelysessioiden aiheina olivat kolmannen tutkimuskysymyksen mukaisesti koordinaatisto, ensimmäisen asteen yhtälöt ja yhtälöparit sekä niihin liittyvät suorat. Koordinaatiston käyttöön tutustuttiin sijoittamalla koordinaatistoon pisteitä erilaisissa tehtäväkonteksteissa: Ensin oppilaiden tehtävänä oli sijoittaa koordinaatistoon valmiiksi koordinaattimuodossa annettuja pisteitä. Tämän jälkeen he pääsivät soveltamaan oppimaansa laivanupotuspelin kautta, jossa täytyi osata sekä sijoittaa annettu piste koordinaatistoon että itse ilmoittaa koordinaatistossa olevan pisteen koordinaatit. Koordinaattipisteharjoitteiden yhteydessä päästiin luontevasti aloittamaan myös suoriin ja niiden leikkauspisteisiin tutustuminen. Oppilaat harjoittelivat piirtämään kahden pisteen määrittämiä suoria, joiden leikkauspisteet katsottiin ensin silmämääräisesti kuvasta ja varmistettiin Geogebran avulla.

Kun pisteet ja suorat olivat tulleet visuaalisesti tutuiksi, siirryttiin yhtälötehtäviin. Toisessa työskentelysessiossa oli runsaasti tehtäviä, joissa piirrettiin suora laskemalla suoran pisteitä sanallisesti määritellyn suoran yhtälön kautta. Oppilaiden piti piirtää esimerkiksi suora yhtälöstä $x = 2y$, joka oli sanallisesti esitettynä ”Samilla on kukkarossaan rahaa kaksi kertaa niin paljon kuin Riitalla.” Tämän jälkeen tehtävänä oli lukea kuvaajasta Riitan rahamäärä, kun Samin rahamäärä tiedettiin, ja päinvastoin. Tehtävissä ohjeistus oli annettu vaiheittain ja selitetty selkeästi. Myös taulukot, joihin pisteet laskettiin, oli annettu valmiina. Vaiheittaisesta ohjeistuksesta huolimatta tehtävätyyppi on alakoululaisille hyvin soveltava. Tehtävänantojen sanallisuus on toisaalta eduksi alakoululaisille, joille pelkillä nimeämättömillä muuttujilla laskeminen jäisi kovin abstraktiksi. Toisaalta tehtävien sanallisuus on haaste yläkoululaisille, sillä sanallisen tehtävänannon ja suoran yhtälön välisen yhteyden hahmottaminen on mekaanista yhtälön avulla suoran piirtämistä haastavampi tehtävä. Yhtälöpareihin tutustuttiin tällaista mekaanisempaa reittiä, puhtaasti matemaattisin merkinnöin kirjoitettujen yhtälöiden kautta. Oppilaat ratkoivat yhtälöparit, joiden ratkaisut olivat pieniä kokonaislukuja, ensin kokeilemalla, minkä jälkeen kukin ratkaisu todettiin graafisesti suorien leikkauspisteestä.

Yhtälöihin ja yhtälöpareihin liitettyjen erilaisten tehtävätyyppien ajatuksena oli kertauttaa vanhempia oppilaita ja antaa nuorimmille oppilaille ensikosketus yhtälöiden, yhtälöparien ja niiden ratkaisujen sekä graafisten elementtien eli koordinaatiston, suorien ja suorien leikkauspisteiden väliseen yhteyteen. Kuitenkin ajan rajallisuudesta johtuen sekä yhtälöihin että yhtälöpareihin tutustuminen jäi pintaraapaisuksi, mutta jätti varmastikin nuoremmillekin oppilaille jonkinlaisia muistijälkiä, joista on apua tulevilla matematiikan kursseilla.

Tutkimuksen matemaattiset sisällöt ovat hyvin keskeisiä peruskoulumatematiikassa. Kuudennen luokan keskeisissä oppimistavoitteissa opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2014) ohjeistetaan, että luokka-asteella tutustutaan tuntemattoman käsitteeseen sekä yhtälöihin ja etsitään yhtälön ratkaisua päättelemällä ja kokeilemalla. Seitsemännellä luokalla perehdytään tuntemattoman käsitteeseen tarkemmin sekä harjoitellaan lausekkeen arvon laskemista muuttujan eri arvoilla. Yhdeksännellä luokalla kerrataan yhtälöitä ja yhtälönratkaisua sekä opetellaan ratkaisemaan yhtälöpareja sekä graafisesti että algebrallisesti.

Vaikka yhtälöpari esiintyy opetussuunnitelmassa vasta yhdeksännen luokan keskeisissä tavoitteissa, ovat ne tulleet esille jo alakoulun matematiikassa, joskin ilman nimeä yhtälöpari. Jo viidennen luokan Tuhattaituri-oppikirjan soveltavissa tehtävissä on toisen tutkimussession kuudetta tehtävää vastaavia yhtälöpariharjoitteita. Neljännellä luokalla taas on harjoiteltu yhden muuttujan ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisun päättelemistä, mistä on eriyttävänä harjoituksena mahdollista vanhempien oppilaiden avustuksella siirtyä yhtälöparipäättelyihin.

Työskentelysessioiden pääaiheiden valinnan perusteena oli, että kaikki aiheet ja niihin liittyvät pääkäsitteet olisivat ainakin jollakin tasolla kaikille ryhmäläisille entuudestaan tuttuja. Tehtävätyypit olivat osittain oppilaille tuttuja, osittain uusia. Näin syntyi asetelma, jossa jokainen oppilas sai kokea osaavansa ja olla halutessaan asiantuntijana, mutta kohtasi myös uusia haasteita, joiden edessä ryhmän yhteistyö oli välttämätöntä. Tehtävien laadinnan pohjana käytettiin tutkimuskoulussa käytössä olevia oppikirjoja Tuhattaituri-kirjat 4–6 sekä Laskutaito-kirjat 7 ja 9.

4. Tulokset

Seuraavassa esitellään tutkimuksen tulokset. Ensimmäiseksi esitellään ryhmän 1 molempien päivien tulokset ja tämän jälkeen ryhmän 2 tulokset. Kummankin ryhmän tulokset esitellään tehtävä kerrallaan. Ryhmältä 1 analysoitaviksi valikoituivat ensimmäisen työskentelysession tehtävä 1 ja toisen session tehtävä 1b. Ryhmältä kaksi valikoituivat toisen työskentelysession tehtävät 2a, 6d ja 8d. Kunkin tehtävän alla on ensin annettu kyseinen tehtävänanto, ja tämän jälkeen esitellään tehtävän tekoon liittyvä keskustelu sekä keskustelun analyysi edellisessä luvussa kuvatulla tavalla.

Ryhmässä yksi olivat ensimmäisenä päivänä paikalla Verneri (9. luokka), Mira (7. luokka) ja Jenna (5. luokka). Toisena tutkimuspäivänä Jenna oli poissa, ja ryhmän kolmantena jäsenenä oli mukana Riina (6. luokka). Ryhmän 2 kaikki jäsenet olivat paikalla molempina päivinä. Ryhmässä 2 olivat mukana Lauri (9. luokka), Roosa (6. luokka), Samu (5. luokka) ja Elli (4. luokka).

4.1 Ryhmä 1 – päivä 1

Tehtävä 1

Selittäkää sanat. Jokainen ryhmäläinen selittää jokaisen sanan sen tiedon perusteella, mitä hän on matematiikan tunneilla tähän mennessä oppinut. Jos et keksi lisättävää edellisiin selityksiin, voit vaikkapa kertoa, mihin kyseistä asiaa matematiikassa käytetään. Aloittakaa ryhmän nuorimmasta jäsenestä ja edetkää ikäjärjestyksessä. Keskustelkaa lopuksi, mitä uutta opitte, kun kuuntelitte muiden ryhmäläisten selityksiä.

a) koordinaatisto

Oppilas	Puhesiirtymä	Kielentäminen	Matematisointi	Huomioita
Verneri	okei..mitä käsität sanalla koordinaatisto.. Jenna	ohjaaminen	tehtävän tiivistäminen, kysyminen	
Jenna	en mä tiedä	vastaaminen		vastaus tulee hyvin ujosti
Opettaja	sitten jos toinen ei ymmärrä tai tiedä, niin keskustelkaa yhdessä ja auttakaa toisianne	lisäohjeistuksen antaminen		
Verneri	mitäs sä Mira luulet, mitä koordinaatisto	ohjaaminen, puheenvuoron siirtäminen	kysyminen	

	tarkoittaa tai mikä se on			
Mira	tarkottaisko se jotain missä on kaksi viivaa ja siinä on niitä numeroita		matematisointi, vastaaminen kysymyksen kautta	
Verneri	joo'o		vastauksen hyväksyminen	
Mira	missä on ne y- ja x-akselit		matematisointi, vastauksen täydentäminen	
Verneri	koordinaatisto on vähän niin kuin… sanottaisiinko… koordinaatit… ööö… esimerkiksi kartassa on koordinaatit.. pohjoinen 63 astetta ja etelä 20 astetta..se kertoo paikan.. koordinaatisto on niin kuin koordinaatit mutta matematiikassa		matematisointi, matematiikkakuva, vastauksen antaminen, esimerkki, käsitteen määrittely	
Mira	okei, eli se kertoo niiden numeroiden paikat	tiivistäminen	matematisointi, vastauksen hyväksyminen	
Verneri	no, suunnilleen.. se kertoo x:n ja y:n koordinaatit		matematisointi, tarkentaminen	

Miten ryhmän vuorovaikutus rakentuu?

Verneri asettuu luontevasti ohjaajan rooliin huolehtien puheenvuorojen jakamisesta ja tehtävän etenemisestä. Tehtävän ohjeistuksen mukaisesti hän antaa ensimmäisen puheenvuoron ryhmän nuorimmaiselle eli Jennalle: ”okei..mitä käsität sanalla koordinaatisto..Jenna”. Ryhmätyöskentelytilanne selvästi jännittää Jennaa, ja hän vastaa Vernerin kysymykseen lyhyesti ”en tiedä”. Näin hän pääsee nopeasti ja helposti eroon omasta vuorostaan.

Jennan vastauksen jälkeen ohjaaja neuvoo ryhmäläisiä keskustelemaan yhteisesti ja auttamaan toisiaan. Verneri siirtää puheenvuoron toiseksi vanhimmalle ryhmäläiselle Miralle: ”mitäs sä Mira luulet, mitä koordinaatisto tarkoittaa tai mikä se on”. Verneri huomaa, ettei ensimmäinen suora kysymys tuottanut tulosta, joten tällä kertaa hän kysyy, minkä Mira luulee oikean vastauksen olevan. Tällä tavalla Verneri osoittaa, ettei vastauksen tarvitse olla oikein, mutta kaikki ajatukset kannattaa sanoa ääneen, jotta syntyy keskustelua. Mira esittää vastauksensa kysymyksen muodossa: ”tarkottaisko se jotain missä on kaksi viivaa ja siinä on niitä numeroita”. Tällä tavalla hän tarttuu Vernerin tarjoamaan mahdollisuuteen vastata kysymykseen, vaikkei olekaan varma, että vastaus on oikein. Verneri hyväksyy Miran vastauksen, jolloin Mira uskaltautuu vielä täydentämään vastauksensa loppuun: ”missä on ne y- ja x-akselit”.

Lopuksi on Vernerin vuoro kertoa oma näkemyksensä, mitä koordinaatisto tarkoittaa. Hän selittää koordinaatiston käsitteen karttakoordinaattien avulla. Vernerin selitys on melko pitkä, joten Mira pyrkii tiivistämään sen ja samalla selvittämään, onko ymmärtänyt Vernerin selityksen oikein: ”okei, eli se kertoo niiden numeroiden paikat”. Vernerin mielestä Miralla on jo oikean suuntainen ajatus mielessään, mutta hän täsmentää Miran käsitystä tarkentaen, että ”se kertoo x:n ja y:n koordinaatit”.

Vernerin vastauksen jälkeen siirrytään seuraavaan tehtävään ilman loppukeskustelua tai -tiivistelmää. Vernerin selitys ei varmasti ole Jennalle ja Miralle täysin selvä, koska Verneri ei itsekään ole täysin sisäistänyt karttakoordinaattien toimintaperiaatetta, mikä näkyy jokseenkin epämääräisessä selityksessä ”-- esimerkiksi kartassa on koordinaatit..pohjoinen 63 astetta ja etelä 20 astetta --”. Kukaan ei kuitenkaan näe lisäpohdintaa tarpeelliseksi tai esitä tarkentavia kysymyksiä, vaan ryhmä tyytyy siihen, että kukin ryhmäläinen on ilmaissut oman käsityksensä.

Mitä rooleja vuorovaikutuksessa esiintyy?

Verneri asettuu välittömästi ja luontevasti ohjaajan ja johtajan rooliin. Hänellä on puheenjohtajan oikeus jakaa puheenvuoroja tehtävän teon edetessä ja hänen vastaukseensa luotetaan. Asetelman taustalla on paitsi Vernerin tyttöjä korkeampi ikä, myös oppilaiden toistensa tunteminen koulupäivien aikana tapahtuvan vuorovaikutuksen kautta. Verneri on koulussa näkyvä persoona, minkä johdosta myös nuoremmilla oppilailla on melko hyvä käsitys hänen luonteestaan ja persoonastaan. Verneri tunnetaan koululla sanavalmiina ja itsevarmana oppilaana, joten on luontevaa luovuttaa johtajan rooli hänelle. Jenna ja Mira toimivat ikään kuin Vernerin oppilaina. Jenna on hiljainen sivustaseuraaja, joka pyrkii välttämään äänessä oloa. Mira taas vastailee Vernerille rohkeammin. Hän ei pelkää väärien vastauksien ääneen sanomista, vaan haluaa edistää keskustelua tuomalla omia ajatuksiaan esiin, vaikkeivät ne täysin oikeita olisikaan.

Millaisia merkityksiä matematiikasta neuvotellaan?

Matematiikkakuva

Verneri toteaa koordinaatistoa selittäessään, että ”koordinaatisto on niin kuin koordinaatit mutta matematiikassa”. Selityksessään hän yhdistää karttakoordinaatiston ja xy-koordinaatiston toisiinsa, mutta ei kuitenkaan miellä näitä yhteneviksi koordinaattijärjestelmiksi. Hän ajattelee koordinaatiston olevan yksin matematiikkaan ja matematiikan kieleen kuuluva käsite, kun taas koordinaatit ovat osa arkikieltä ja arkielämää, sillä sanaa koordinaatti käytetään arkisessa yhteydessä, navigoimisessa. Monien oppilaiden silmin matematiikka on uusi, vieras kieli (Meiers, 2005). Ajattelutapa on varsin luonteva seuraus käsitteiden tulvasta, jonka oppilaat matematiikan tunneilla kohtaavat. Kyseisestä ajattelumallista seuraa, että toisinaan oppilaat kokevat, ettei matematiikan ongelmilla ole suoraa yhteyttä arkielämään.

Jennan käyttäytymismalli kuitata oma vastausvuoronsa toteamalla lyhyesti ”en tiedä” ilman suurempaa pohdintaa on tuttu tavallisilta oppitunneilta. Ollessaan epävarmoja omasta osaamisestaan oppilaat vastaavat kysymyksiin usein ”en tiedä” sen sijaan, että pohtisivat ääneen, mikä tehtävässä on ongelmallista ja mitkä ovat mahdolliset ratkaisureitit. Rohkeus vastata tehtäviin on tiiviissä yhteydessä oppilaan käsitykseen omasta minäpystyvyydestä. Minäpystyvyydellä tarkoitetaan oppilaan tehtäväkohtaisia odotuksia omasta suoriutumiskyvystään ja se on tiiviissä yhteydessä oppilaan oppimismotivaatioon, sitkeyteen, oman toiminnan seurantaan, tehtäväorientaatioon ja tavoitteenasetteluun (Aro & Aro, 2013). Oppilaat, joilla on korkea minäpystyvyyden tunne, vastaavat tehtäviin mielellään, eikä tällöin pohdintaankaan kulu paljon aikaa (Bandura & Schunk, 1981). Jenna on luonteeltaan ujo ja epävarma oppilas, mikä heijastelee heikkoa minäpystyvyyden tunnetta. Tämä selittää hänen vetäytymistään tehtävän ratkaisemisesta.

Ryhmä jättää tehtävän lopulta hieman keskeneräiseksi. Kukin oppilas saa oman puheenvuoron, kuten tehtävänannossa vaaditaan, mutta ohjeistuksessa annettu vaatimus, että kaikki ymmärtäisivät tehtävän hyvin, ei toteudu. Oppilaat ovat tyytyväisiä, kun kukin on tehnyt oman osuutensa, mutta varsinaista tehtävän ymmärtämistä ei nähdä tärkeänä. Tämä kertoo ulkoisen motivaation ohjailevan ryhmän työskentelyä. Oppilaan toimintaa ohjailee sisäinen motivaatio, kun hän kokee tehtävän kiinnostavaksi, ja ulkoinen motivaatio, kun hän tekee tehtävän palkkion toivossa tai rangaistuksen pelossa (Joutsenlahti ym., 2018). Tässä tapauksessa toivottu palkkio on varhainen ruokailuun pääsy.

Matematisointi

Käsitteen koordinaatisto selittäminen lähtee ryhmässä liikkeelle pohtimalla, miltä koordinaatisto näyttää. Miran mukaan koordinaatisto on ”jotain missä on kaksi viivaa ja siinä on niitä numeroita”. Hän vielä tarkentaa kyseisten kahden viivan olevan x- ja y-akselit. Tämän jälkeen Verneri etenee kuvailemaan, mihin koordinaatistoa käytännössä tarvitaan. Hän käyttää hyvin opettajamaisesti hyödyksi arkipäivän esimerkkiä, karttakoordinaatistoa. Esimerkki on hyvä, mutta sitä täytyisi selittää ja avata huomattavasti tarkemmin ryhmän nuoremmille jäsenille, jotta se edistäisi heidän ymmärtämistään ja oppimistaan.

Vernerin selitys jää nuoremmille oppilaille kontekstistaan melko irralliseksi, mikä näkyy Miran yrityksessä tiivistää Vernerin selitys. Miran tiivistelmä Vernerin selityksestä on, että koordinaatisto ”kertoo niiden numeroiden paikat”. ”Niillä numeroilla” Mira viittaa Vernerin leveys- ja pituuspiiriesimerkin astelukuihin. Mira näkee siis numerot (tässä tilanteessa asteluvut) tarkastelun kohteina, eikä välineinä, mitä ne todellisuudessa ovat ilmoittaessaan halutun sijainnin. Verneri korjaa tätä harhakäsitystä korjaamalla, että ”se (koordinaatisto) kertoo x:n ja y:n koordinaatit”. Tämä tarkennus on lähempänä koordinaatiston periaatetta. Kuitenkaan Vernerille itselleenkään ei vaikuta olevan aivan selvää, mitä muuttujat x ja y tarkalleen kertovat. Aiemmassa selityksessään hän antaa koordinaatistolle täysin osuvan määritelmän, ”se kertoo paikan”, puhuessaan karttakoordinaatistosta. Koska hän näkee xy-koordinaatiston matemaattisena, karttakoordinaateista erillisenä käsitteenä, hän pyrkii muotoilemaan määritelmän matemaattisemmaksi.

4.2 Ryhmä 1 – päivä 2

<u>Tehtävä 1b</u>

> Ville ostaa kaupasta päärynöitä ja appelsiineja. Hän ostaa yhteensä kuusi hedelmää. Villen ostamien hedelmien määrät voidaan esittää pisteinä koordinaatistossa. Valitaan, että
> päärynöiden määrä = x-koordinaatti ja
> appelsiinien määrä = y-koordinaatti.
> (Esimerkki: jos Villellä on 3 päärynää ja 5 appelsiinia, saadaan piste (3, 5).)
> Täydentäkää seuraavalla sivulla oleva taulukko ja piirtäkää lopuksi pisteet Geogebra-koordinaatistoon.

Verneri alkaa tehdä tehtävää itsenäisesti. Hän ei muista huomioida, että hedelmiä tulee olla yhteensä kuusi, joten hän alkaa kirjoittaa taulukkoon sattumanvaraisia lukuja Miran liittyessä mukaan luettelemaan lukuja. Äkkiä Verneri hoksaa, että tehtävän saa tehtyä yksinkertaisemminkin. Ei ole varmaa, vaihtaako hän ratkaisustrategiaa, koska huomaa, että tehtävä on menossa väärin, vai siksi, että toinen tapa on helpompi. Seuraavassa on esitetty uuden ratkaisustrategian myötä käyty keskustelu.

Oppilas	Puhesiirtymä	Kielentäminen	Matematisointi	Huomioita
Verneri	ei ku kumi..tää tehtiin vähän tyhmästi..tehään näin..tässä on 0, niin mennään vaan 1, 2, 3, 4, 5 ja 6	ohjaaminen	uuden strategian valinta, pohdinta	
Mira	entä sit	kysyminen		
Verneri	sit 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0..tadaa, siis nää on nyt ne pisteet..(1, 5)…	ohjaaminen	tehtävän ratkaiseminen	
Mira	minkä pisteet		kysyminen	
Verneri	koordinaatiston pisteet..muistatko sä, kun me pelattiin sitä laivanupotusta	ohjaaminen, kysyminen	vastaaminen	tehtävän yhdistäminen aiemmin opittuun
Mira	joo'o	vastaaminen		
Verneri	(4,2), (5,1), (6,0)…		tehtävän ratkaiseminen	
Mira	aa..mitä nää sit on	kysyminen		
Verneri	ne on just ne koordinaatistot..se, mihin me piirretään tää..okei, kattokaa.	ohjaaminen	matematisointi, vastaaminen	
Verneri	ei sun tartte piirtää mitään..kato nyt..tossa on nolla..se on se x, täällä on x..x on nolla, siihen piste..sit y on 6.	ohjaaminen	matematisointi	
Verneri	sitten x on viis…	ohjaaminen		
Mira	ja sit Riina aina on eka se… onkse x	ohjaaminen	matematisointi, kysyminen	
Verneri	joo	vastaaminen		
Mira	ja sit on se y	ohjaaminen		

Riina	tiesin			oman osaamisen ilmaiseminen
Verneri	2, 4… sit on 3, 3…		tehtävän ratkaiseminen	
Mira	eiks sun pidä tehä ne viivat	ohjaaminen kysymyksen kautta		
Verneri	mä teen ne kohta..4, 2..5…	vastaaminen	tehtävän ratkaiseminen	
Mira	ja yks		vastauksen antaminen	
Verneri	ja yks	toistaminen		
Mira	kuus ja nolla		vastauksen antaminen	
Verneri	kuus ja nolla..noin, sit voidaan piirtää	toistaminen, ohjaaminen		
Mira	ai kahden pisteen välinen jana	kysyminen		
Verneri	okei..2, 4; 1, 5…			jättää huomiotta Miran kysymyksen, piirtää kahden pisteen välisen janan
Mira	(luettelee loput parit)			
Mira	sulla oli ekaks 0, 6..niin nyt sun pitää tehä vielä 6, 0	ohjaaminen		
Verneri	no, tee 6, 0	hyväksyminen, vastuun siirtäminen		
Verneri	tosta tuli hieno muuten	arviointi	matematiikkakuva	
Mira	niin tuli..tommonen seittiasia	arviointi	matematiikkakuva	

Miten ryhmän vuorovaikutus rakentuu?

Verneri on oivaltanut uuden strategian tehtävän ratkaisemiseksi, ja alkaa tehdä tehtävää ripeästi uudestaan. Hän selittää hyvin lyhyesti idean muulle ryhmälle: ”tehään näin..tässä on 0, niin mennään vaan 1, 2, 3, 4, 5 ja 6”. Taulukossa on valmiiksi annettuna vaihtoehto 0 päärynää, 6 appelsiinia, mistä

Verneri keksii, että mahdolliset päärynämäärät on helpoin luetella kokonaislukuina nollasta eteenpäin ja appelsiinien määrät kuudesta alaspäin.

Mira ei ole ymmärtänyt Vernerin uutta ratkaisustrategiaa, joka vaihtui hyvin nopeasti ja vähäisin perustein. Ääneen sanomatta jäävät kysymykset *miksi strategia vaihdettiin* ja *miksi uusi strategia toimii.* Mira yrittää päästä selville Vernerin ratkaisuideasta. Kun Verneri on luetellut taulukkoon päärynöiden määrät, Mira kysyy, mitä seuraavaksi pitää tehdä. Vernerin selitys on jälleen hyvin lyhyt: "sit 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0..tadaa, siis nää on nyt ne pisteet..(1, 5)…" Mira jarruttaa Vernerin tahtia ja esittää lisäkysymyksen "minkä pisteet". Verneri ottaa edellispäivän laivanupotuspelin avuksi selitykseen. Hän näyttää, kuinka kultakin riviltä saadaan luettua samanlainen piste kuin laivanupotuksessa: "(4, 2), (5, 1), (6, 0),…" Mira haluaa edelleen tarkennusta ja esittää lisäkysymyksen "mitä nää sit on". Kysymys on jokseenkin hankala tulkita – mitkä nämä? Vernerin vastauskaan, "ne on just ne koordinaatistot..se, mihin me piirretään tää", ei ole aivan yksiselitteinen johtuen käsitteen koordinaatisto virheellisestä ja huolimattomasta käytöstä. Todeten "okei, kattokaa" Verneri tekee ratkaisun, että tehtävä selviää parhaiten konkreettisesti näyttämällä.

Tässä vaiheessa Vernerille tapahtuu ajatuskatkos hänen alkaessaan sijoittaa pisteitä koordinaatistoon. Hän piirtää kunkin pisteen x-koordinaattia vastaavan arvon x-akselille ja y-koordinaattia vastaavan arvon y-akselille. Pisteen (x, y) sijaan hän piirtää siis kaksi pistettä (x, 0) ja (0, y). Nyt Mirakin uskoo ymmärtävänsä, mitä tehtävässä tapahtuu ja haluaa auttaa Riinaa, joka on ensimmäistä päivää mukana. Mira neuvoo – Verneriltä varmuuden vuoksi tarkistaen – että ensimmäinen luku on x ja jälkimmäinen y. Riinaa toteaa lyhyesti, että asia on hänelle tuttu.

Verneri jatkaa pisteiden piirtämistä. Mira puuttuu tehtävän tekemiseen kysymällä, eikö kukin pistepari pitäisi yhdistää viivalla (janalla). Verneri kuittaa Miran ohjeen lupaamalla tehdä tämän myöhemmin. Mira siirtyy auttamaan Verneriä luettelemalla piirtämättä olevia pisteitä. Kun pisteet on sijoitettu koordinaatistoon, Verneri toteaa, että "sit voidaan piirtää". Vernerille, kuten myös muille ryhmäläisille, vaikuttaa olevan itsestään selvää, että Vernerillä on oikeus päättää, mitä ja milloin tehdään. Riina seuraa hiljaisena vierestä, mutta Mira pyrkii kasvattamaan omaa ymmärrystään ja olemaan aktiivisesti tehtävän teossa mukana. Hänkin antaa johtajan roolin luontevasti Vernerille, mutta kokee samalla itselläänkin olevan annettavaa ryhmälle. "Ai kahden pisteen välinen jana", Mira tarkistaa, mitä Verneri piirtämisellä tarkoittaa. Verneri ei näe tarpeelliseksi vastata Miran kysymykseen, vaan alkaa tehdä tehtävää juuri kuten Mira ehdotti. Samalla Miran toimintastrategia osoittautuu oikeaksi, joten hän luettelee Vernerille pisteparit, jotka pitää yhdistää. Miran kysymykset ja yritykset ohjata tehtävän tekemistä vaikuttavat ärsyttävän Verneriä, sillä Verneri kokee Miran uhkaavan hänen asemaansa ryhmän johtajana. Lopussa Mira ohjeistaa Verneriä muistuttaen, että "sulla oli ekaks 0, 6..niin nyt sun pitää tehä vielä 6, 0". Verneri tietää Miran olevan oikeassa ja työntää ärtyneenä tehtävän loppuun tekemisen Miran vastuulle. Lievä turhautuminen laantuu kuitenkin nopeasti, kun tehtävä tulee valmiiksi, ja Verneri ja Mira toteavat yhdessä, että lopputulos on hieno.

Mitä rooleja vuorovaikutuksessa esiintyy?

Verneri on hyvinkin yksinvaltaisen johtajan roolissa. Hän tekee tehtävän väärin kenenkään ryhmäläisen kyseenalaistamatta hänen ratkaisumalliaan. Verneri toimii myös ohjaajana, mutta pyrkii hoitamaan roolin edellyttämän muiden opettamisen mahdollisimman vähäsanaisesti ja tehokkaasti. Vernerille tärkeintä on tehtävän nopea eteneminen, minkä vuoksi hän mieluiten toimii itsenäisesti. Tässä on nähtävissä perinteisen ryhmätyöskentelyn ongelma verrattuna toivottuun yhteistoiminnalliseen työskentelyyn (Saloviita, 2014). Ryhmän taitavin ottaa ohjat ja muut ryhmäläiset jäävät osittain tai kokonaan vapaamatkustajan rooliin. Esiin nousee jälleen myös ulkoinen motivaatio, joka ohjailee tehtävän etenemistä. Nopea eteneminen on ymmärtämistä tärkeämpää. Vernerin dominoivasta vuorovaikutuksesta huolimatta Mira pyrkii aktiivisesti osallistumaan tehtävän ratkaisemiseen. Häntä voi luonnehtia aktiiviseksi oppijaksi, sillä hän esittää ahkerasti tarkentavia kysymyksiä ja tarjoaa omia ratkaisuideoitaan, sekä paikoin myös ohjaajaksi. Riina jää täysin hiljaisen sivustaseuraajan rooliin. Osasyynä tähän on varmastikin se, että tämä on ensimmäinen tehtävä, jonka teossa Riina on mukana. Ryhmään ja sen toimintaan sisälle pääseminen ottaa oman aikansa.

Millaisia merkityksiä matematiikasta neuvotellaan?

Matematiikkakuva

Ryhmän vuorovaikutuksessa on vahvasti näkyvissä käsitys siitä, että ryhmän vanhin on automaattisesti taitavin. Hänen ratkaisujaan ei kyseenalaisteta. Vernerin ja Riinan välillä tämä jako on hyvin selkeä, mutta Mira pyrkii rikkomaan ikähierarkiaa. Vernerin ja Miran välisestä vuorovaikutuksesta on luettavissa, ettei Verneri näe Miran työskentelyn hyödyttävän tehtävän etenemistä, minkä hän osoittaa jättämällä osan Miran kommenteista huomiotta.

Matematiikkaan liittyy myös visuaalista kauneutta, minkä Mira ja Verneri huomaavat tehtävän valmistuessa. ”Tosta tuli hieno muuten”, Verneri toteaa ja Mira yhtyy hänen mielipiteeseensä. Vernerin ja Miran välinen pieni kitka häviää ja he ovat tyytyväisiä tehtävän lopputulokseen. Visuaalisesti miellyttävä lopputulos palkitsee tehtävän eteen nähdyn vaivan.

Matematisointi

Tehtävän ratkaisussa tapahtuu odottamaton käänne, kun Verneri alkaa sijoittaa saatuja pisteitä koordinaatistoon. Hän neuvoo Miralle aivan oikein, että pisteet sijoitetaan koordinaatistoon samalla tavalla kuin edellisenä päivänä laivanupotuspelissä. Laivanupotuksessa pisteiden sijoittaminen onnistui ryhmältä sujuvasti. Kuitenkin kontekstin muutos aiheuttaa sekaannuksen ja saa opitun idean katoamaan uuden tehtävän tilanteessa. Verneri sijoittaa kunkin pisteen x-koordinaattia vastaavan arvon x-akselille ja y-koordinaattia vastaavan arvon y-akselille. Kenties x- ja y-koordinaattien taulukoiminen erillisiin sarakkeisiin saa aikaan ajattelun, että x- ja y-koordinaatit ilmaisisivat kahta erillistä pistettä.

Mira ja Verneri ymmärtävät toistensa ajattelua, vaikka tehtävä ei menekään oikein. Mira osaa ehdottaa pisteiden yhdistämistä janoilla ennen kuin Verneri on sanonut ideaa ääneen. Tämä ajatus on molemmilla selkeänä mielessä, vaikkei tehtävänannossa pyydetä piirtämään mitään suoraa tai janaa, ainoastaan sijoittamaan pisteet koordinaatistoon. Janojen käytön taustalla saattaa olla ajatus yhdistää kukin pistepari (x, 0) ja (0, y) yhdeksi kokonaisuudeksi, koska kukin pistepari vastaa yhtä taulukon riviä.

4.3 Ryhmä 2 – päivä 2

<u>Tehtävä 2a</u>

Samilla on kukkarossaan rahaa kaksi kertaa niin paljon kuin Riitalla. Luetelkaa seuraavaan taulukkoon viisi eri vaihtoehtoa, kuinka paljon rahaa Samilla ja Riitalla voi olla.

Oppilas	Puhesiirtymä	Kielentäminen	Matematisointi	Huomioita
Samu	eikö tässä pidä periaatteessa vaan kertoo kahdella se, minkä pistää vaikka…	kysyminen	strategian valinta, ongelman ratkaisu,	
Roosa	Samille	täydentäminen		kahdella pitäisi kertoa Riitan rahamäärä, ei Samin

Lauri	joo, eli mitä Samille..ei mitään isoo.. sanokaa joku	ohjaaminen		
Roosa	2		vastauksen antaminen	
Elli	3		vastauksen antaminen	
Samu	kolme ei pysty		vastauksen hylkääminen	
Lauri	ei ku oho			
Samu	2 ja 1		vastauksen antaminen	
Elli	paljonko pitää olla yhteensä..5	kysyminen	matematisointi	ajattelee, että kyseessä on samanlainen pluslasku kuin aikaisemmissa tehtävissä
Elli	paljonko pitää olla yhteensä	kysyminen		ei saa edelleenkään vastausta, jää ilman huomiota
Lauri	2 euroo..sit sanokaa joku isompi	ohjaaminen	vastauksen antaminen	
Roosa	3		vastauksen antaminen	
Elli	7		vastauksen antaminen	
Lauri	ei 3..sit se olis 1,5 tyhmä..sano 4 vaikka.	ohjaaminen	matematiikkakuva, vastauksen hylkääminen	ivaaminen
Elli ja Roosa	4			
Roosa	miks sä sanot meille, että sanokaa neljä (nauraa)	kysyminen		
(Roosa ja Elli luettelevat parillisia lukuja, Lauri täyttää taulukon loppuun)				
Roosa	no niin, hyvä Lauri sä teit sen..Elli tajusitsä..hyvä	kehuminen, kysyminen		
Elli	ei ku, mitä piti tehdä..piti jotakin tehä, että saa jaettua kahdella		matematisointi, varmistaminen, kertaaminen	oman ymmärryksen epäileminen
Roosa	niin	vastaaminen	vahvistus, että Elli ymmärsi oikein	

Miten ryhmän vuorovaikutus rakentuu?

Samu suorittaa aluksi tehtävän ratkaisustrategian valinnan kysymyksen kautta: ”eikö tässä pidä vaan kertoo kahdella se, minkä pistää vaikka…” Vastauksen asettaminen kysymyksen muotoon antaa Samulle mahdollisuuden vetäytyä ja hylätä vastauksensa, jos se osoittautuu vääräksi. Roosa jatkaa Samun kesken jäävää virkettä päättämällä, että ensin valitaan Samin rahamäärät ja vaihtaa samalla vahingossa Samun ratkaisustrategian päinvastaiseksi: Riitan mahdolliset rahamäärät saadaan jakamalla, ei kertomalla, Samille asetetut rahamäärät kahdella. Lauri hyväksyy Roosan strategiavaihdoksen sanomalla ”joo, eli mitä Samille”. Lisäksi hän ohjeistaa, että arvojen täytyy olla pieniä, jotta ne on helppo sijoittaa koordinaatistoon, josta on näkyvissä vain lyhyet koordinaattiakselit.

Roosa ja Elli alkavat ehdotella satunnaisia arvoja taulukoitaviksi Samin sarakkeeseen. Samu hylkää Ellin ehdottaman luvun 3, sillä hänen mielestään kahdella jaottomat luvut eivät ole mahdollisia. Lauri hyväksyy Samun valitsemat parilliset luvut pyyhkimällä luvun 3 taulukosta ja todeten ”ei ku oho”. Samu esittää hylätyn vastauksen tilalle ratkaisuparin 2 ja 1, mikä johtaa Ellin kysymykseen ”paljonko pitää olla yhteensä..5”. Elli peilaa työn alla olevaa tehtävää aikaisempiin tehtäviin, joissa x:n ja y:n summa oli jokin vakio. Hänen ehdottamansa luku viisi kertoo, ettei hän ole seurannut tehtävän etenemistä tai hänelle tapahtuu päässälaskuvirhe, sillä Samun antamien lukujen summa on 3.

Elli toistaa kysymyksensä muiden reagoimatta siihen mitenkään. Hänet jätetään hyvinkin systemaattisesti tehtävän ratkaisemiseen liittyvän vuorovaikutuksen ulkopuolelle. Lauri jatkaa eteenpäin pyytäen muita luettelemaan kakkosta suurempia arvoja. Roosa ja Elli alkavat jälleen luetella lukuja, jotka ovat edelleen parittomia huolimatta siitä, ettei Samu hetki sitten kelpuuttanut lukua 3. Esiin nousee omien ajatusten sanoittamisen tärkeys. Lauri ja Samu tekivät mielessään päätelmän, että parittomat luvut eivät kelpaa, koska jako ei mene tasan. He eivät kuitenkaan selittäneet Ellille ja Roosalle, miksi luku 3 ei ollut heidän mielestään kelvollinen. Roosa ei ilmeisesti ole kuunnellut keskustelua muutenkaan, sillä hän ehdottaa vielä uudestaan lukua kolme. Elli taas ehdottaa lukua seitsemän. Hän ei ymmärrä, mikä luvun kolme ominaisuus johti sen kelpaamattomuuteen, joten hän osaa sulkea ainoastaan kyseisen luvun pois ratkaisujen listalta, mutta ei muita parittomia lukuja.

Lauri kuitenkin olettaa tyttöjen ymmärtäneen, että parittomat luvut eivät kelpaa, joten kun Roosa ehdottaa lukua 3, hän hylkää vastauksen turhautuneena: ”ei 3..sit se olis 1,5 tyhmä..sano vaikka 4”. Kommentissaan Lauri perustelee, miksi luku 3 ei kelpaa, ja Roosa ja Elli ymmärtävät, että heidän tulee luetella parillisia lukuja. Roosa ja Elli innostuvat kilvan luettelemaan parillisia lukuja.

Molempien tyttöjen aikaisemmat keskittymisvaikeudet katoavat, kun he ymmärtävät, mitä pitää tehdä ja pystyvät osallistumaan tehtävän tekemiseen. Tämä osoittaa, että ryhmän vuorovaikutuksen, kaikkien osallistumisen sekä työrauhan säilymisen kannalta on tärkeää, että kaikki ymmärtävät, mitä tehdään.

On tarpeellista kiinnittää huomiota siihen, että Lauri kohdistaa turhautuneen kommenttinsa ainoastaan Roosalle, vaikka myös Elli tarjoaa paritonta lukua. Esiin nousee vanhempien oppilaiden alitajuntainen vietti suojella nuorimpia oppilaita sekä alhaisemmat odotukset heitä kohtaan.

Taulukko tulee valmiiksi, ja Roosa varmistaa Elliltä, onko tämä ymmärtänyt tehtävän: ”Elli tajusitsä”. Kysymys vaikuttaa kumpuavan ryhmälle annetusta ohjeesta pitää huolta muiden ymmärtämisestä, ei niinkään oikeasta halusta huolehtia koko ryhmän oppimisesta. Ellin vastaus Roosan kysymykseen on kovin epävarma. Tästä huolimatta Roosa ei näe tarpeelliseksi palata tehtävään, koska Elli nyökkäsi myöntävästi hänen kysymykseensä.

Mitä rooleja vuorovaikutuksessa esiintyy?

Lauri toimii tehtävän ratkaisemisessa kirjurina ja antaa muille ohjeita, millaisia lukuja heidän tulee luetella. Hän ei kuitenkaan asetu varsinaisesti ohjaajan rooliin. Laurin Roosalle osoittamassa kommentissa ”ei 3..sit se olis 1,5 tyhmä..sano 4 vaikka” korostuu, että hän ei oma-aloitteisesti halua toimia ohjaajana, mutta ajautuu tähän rooliin, kun Roosa ja Elli luettelevat hänen mielestään kelpaamattomia lukuja. Samu toimii asiantuntijana. Hän laittaa alulle ratkaisustrategian valinnan sekä tekee ratkaisun parittomien lukujen kelpaamattomuudesta. Tehtävä on hänellä täysin hallinnassa ja hän ohjailee sen etenemistä, muttei millään tavalla ohjaa ja neuvo muita. Roosa ja Elli ovat melko passiivisessa roolissa tehtävän varsinaisessa ratkaisemisessa. Tehtävänanto jää heille epäselväksi, ja he luettelevat hyvin mekaanisesti ratkaisuja Laurin ohjeiden mukaisesti.

Millaisia merkityksiä matematiikasta keskustellaan?

Matematiikkakuva

Roosa ja Elli luettelevat ratkaisuja innokkaasti, mutta hyvin mekaanisesti. Heillä on intoa osallistua tehtävän tekemiseen ja ymmärtää taulukon täyttämisen laskennallinen periaate. He eivät kuitenkaan vaikuta olevan kiinnostuneita tehtävän syvällisemmästä ymmärtämisestä. Ilmiö on hyvin tyypillinen.

Tavallisillakin oppitunneilla oppilaat laskevat usein innokkaasti kirjan aukeaman mekaaniset laskut, mutta sanallisten tehtävien lukeminen ja ymmärtäminen koetaan työläänä. Oppitunneilla ratkaistavat tehtävät ovat enimmäkseen nopeita peruslaskuja, jotka oppilaat ratkovat rutiininomaisesti aiemmin opituilla menetelmillä. Näin heille syntyy käsitys, että kaikki matematiikan tehtävät voi ratkaista nopeasti ilman hidasteita, minkä johdosta sanallisten tehtävien vaatima ajatustyö ja laskemisen keskeytyminen aiheuttavat oppilaissa turhautumista (Pongsakdi, 2017, s. 23). Ilmiö on mielenkiintoinen, sillä sanallisissa tehtävissä pyritään yleisesti ottaen saavuttamaan oppilaiden arkimaailma ja tätä kautta motivoimaan heitä tehtävän ratkaisemiseen. Kuitenkin mekaaniset laskut koetaan usein mieluisampina.

Lauri nimittää Roosaa tyhmäksi, kun tämä tarjoaa Samin rahamääräksi paritonta lukua 3. Tämä kertoo siitä, että pienillä luvuilla tapahtuvat mekaaniset laskut, kuten tehtävässä esiintyvä kahdella jakaminen, koetaan helpoiksi ja niiden osaamista pidetään itsestään selvyytenä. Toisaalta tässä tilanteessa kyse ei ole Roosan laskutaidottomuudesta, vaan hän ei ole vielä sisäistänyt periaatetta, jolla luvut taulukkoon valitaan. Laurin kommentti viittaa myös turhautumiseen siitä, ettei Roosa ole kuunnellut tai ymmärtänyt ratkaisustrategiaa, jonka Lauri ja Samu ovat valinneet.

Matematisointi

Samu lähtee ensimmäisessä puheenvuorossaan rakentamaan tehtävän ratkaisustrategiaa. Hän yrittää ehdottaa, että Riitan rahamäärille valitaan jotkin arvot ja ne kerrotaan kahdella, jolloin saadaan Samin mahdolliset rahamäärät. Hän ei kuitenkaan muista oliko Samilla rahaa kaksi kertaa niin paljon kuin Riitalla vai toisin päin. Hän jää selvittämään tätä, jolloin Roosa ehtii sanoa väliin Samin nimen. Niinpä ryhmä lähtee valitsemaan ensin Samin rahamääriä eikä Riitan, kuten Samun strategiavalinta olisi edellyttänyt.

Roosan väliin tulosta aiheutuva strategian vaihdos sujuu yllättävän helposti, eikä sekaannusta tapahdu. Roosa ja Elli alkavat luetella taulukkoon Samin rahamääriä ja Samu on heti tilanteen tasalla ymmärtäen, että Riitan rahamäärät saadaan jakamalla nämä luvut kahdella. Samu ei hyväksy Ellin ehdottamaa kolmen euron rahasummaa, jolle jako kahdella ei mene tasan. Oppilaat eivät huomioi puolikkaita euroja ehkä siksi, että koordinaattiakseleilla ovat näkyvissä vain kokonaisluvut. Syynä voi olla myös se, että peruskoululaiset mieltävät usein desimaalilukuratkaisun jollakin tavalla kokonaislukuratkaisua huonommaksi. Mahdollisesti tämä johtuu siitä, että kokonaisluvut ovat nuorimmillekin oppilaille tuttuja useiden kouluvuosien ajalta, kun taas desimaaliluvut ovat huomattavasti uudempi asia. Lisäksi alakoulun oppikirjoissa vastaukset ovat suurelta osin kokonaislukuja niissä kappaleissa, joissa ei erityisesti harjoitella desimaaliluvuilla laskemista. Tämä antaa oppilaille hieman harhaanjohtavan käsityksen, että suurin osa tehtävien vastauksista olisi kokonaislukuja.

Ellille on jäänyt aikaisemmista tehtävätyypeistä mieleen, että taulukossa samalla rivillä olevista luvuista pitää tulla aina sama summa. Hänelle on syntynyt hyvä rutiini muotoa $x + y = c$ olevien tehtävien ratkaisemiseen. Toisaalta syntynyt rutiini voi olla myös uusien yhtälötyyppien oppimisen kannalta hidastava tekijä, jos se ohjaa Elliä ajattelemaan, että kaikki kahden muuttujan yhtälöt olisivat kyseistä muotoa. Esimerkiksi tässä tehtävässä yhtälönä on $x = 2y$, mutta Elli olettaa, että x:n ja y:n summa on tässäkin tilanteessa aina jokin vakio. Tämä kertoo siitä, ettei Elli osaa yhdistää taulukkoon lueteltavia arvoja tehtävänannossa sanallisesti muotoiltuun yhtälöön, vaan hän luettelee arvoja muun ryhmän mallin mukaisesti. Hänen osallistumisensa on siis hyvin mekaanista, eikä vaadi varsinaista tehtävän ymmärtämistä.

Tehtävä 6d

Mitä ovat luvut x ja y?

$x + y = 2$

$x + y = 5$

Oppilas	Puhesiirtymä	Kielentäminen	Matematisointi	Huomioita
Lauri	häh..nää on molemmat plus	kysyminen	ongelman havaitseminen, matematisointi	
Lauri	ei mutta siihen voi pistää miinuksen..ei mut sit se…		matematisointi, ongelman ratkaisu, pohdinta	
Samu	eiks toi x voi olla ihan mikä vaan	kysyminen	matematisointi	
Elli	no niin, laitetaan 1 ja 1	vastauksen antaminen		
Roosa	mutta sitten tässä ei voi olla 1 + 1	vasta-argumentti		
Lauri	voiks ne molemmat olla samaa..x ja y	kysyminen	ongelman ratkaisu	
Opettaja	x:n pitää olla molemmissa sama ja y:n pitää olla molemmissa sama, mutta x:n ja y:n ei tarvii olla sama luku	vastaaminen	ohjaaminen	
Lauri	mit..mut miten me sit..molemmat on plus	kysyminen	ongelman havaitseminen, matematisointi	

Opettaja	nii'in	vastaaminen		
Roosa	2 + 0		vastauksen antaminen	
Samu	ei		vastauksen hylkääminen	
Opettaja	voiko sillä olla ratkaisua	kysyminen	johdattelu	
Samu ja Lauri	ei	vastaaminen		
Lauri	ei voi ratkaista	vastaaminen		

Miten ryhmän vuorovaikutus rakentuu?

Dialogin aluksi Lauri nostaa esiin yhtälöparin ongelmakohdan: ”häh..nää on molemmat plus”. Muutkin ovat saattaneet jo huomata, että tehtävässä on jokin sudenkuoppa, mutta Lauri on ensimmäinen, joka tunnistaa sen. Lauri ehdottaa, että yhtälö ratkeaisi sijoittamalla x:n tai y:n paikalle negatiivinen luku, ja Samu ehdottaa, että x voisi olla mikä tahansa luku. Molemmat ratkaisustrategiat ovat monimutkaisia osoittaa vääriksi, joten suoraa vasta-argumenttia ei tule. Sen sijaan Ellin ehdotus, että x ja y olisivat molemmat ykkösiä, on helppo todeta vääräksi suoralla sijoituksella alempaan yhtälöön. Roosa tekee tämän välittömästi.

Tällainen ääneen ajatusten ilmaan heittely on hyödyllistä. Vaikka osa ideoista lausutaan epävarmasti ja äänestä kuuluu, ettei lausuja itsekään oikein usko ideaansa, on niiden ääneen kertominen merkittävää yhteisen pohdinnan ja vuorovaikutuksen kannalta. Idea voi olla lennokaskin, mutta antaa silti jollekin toiselle virikkeen jalostaa ajatusta kohti tehtävän ratkaisua.

Seuraavaksi Lauri ehdottaa, että x ja y olisivat sama luku. Opettaja ymmärtää Laurin kysymyksen hieman väärin ja vastaa, että x:n ja y:n ei tarvitse olla sama luku. Lauri hämmentyy vastauksesta ja päätyy jälleen ihmettelemään, miten yhtälöparin voi ratkaista, kun molemmissa yhtälöissä on pluslasku.

Roosa ehdottaa vielä ratkaisua x = 0 ja y = 2. Samu suorittaa päässään nopean sijoituksen alempaan yhtälöön ja hylkää Roosan vastauksen ilman ääneen lausuttuja perusteluja. Tämä on Samulle tyypillistä. Hän ratkoo suuren osan tehtävistä päässään ja kertoo ääneen pelkän vastauksen. Näin yksinkertaisessa tilanteessa menettelystä ei ole haittaa, mutta monimutkaisemmissa tapauksissa se aiheuttaa sekaannuksia tehtävän ratkaisemiseen. Muut luottavat Samun laskutaitoon, mutta ilman perusteluja he saattavat tulkita tämän tuottaman vastauksen tai välivaiheen väärin. Esimerkiksi tehtävässä kolme tapahtui tällainen sekaannus, kun Samu ei perustellut luvun kolme kelpaamattomuutta sen parittomuudella. Lisäksi toisaalta Samu saattaa päässä laskiessaan tehdä virheen, joka ei tule ilmi, jos muut eivät tarkista vastausta.

Lopulta oppilailta loppuvat ideat, ja ohjaaja esittää johdattelevan kysymyksen ”voiko sillä olla ratkaisua”. Samu ja Lauri vastaavat varmoina, ettei voi.

Mitä rooleja vuorovaikutuksessa esiintyy?

Kaikki oppilaat ovat tässä dialogissa niin yhdenvartaisessa asemassa kuin heidän yhteisen taustansa ja toistensa tuntemuksen sekä ryhmän ikärakenteen puitteissa on mahdollista. Lauri on pohdinnassa selkeä johtohahmo, mutta myös muilla on yhtäläinen vapaus esittää ideansa, ja kaikkia kuunnellaan. Elli on jälleen melko hiljaisena tarkkailijana, mutta myös hän uskaltautuu tekemään yhden ratkaisuehdotuksen.

Tehtävän loppuun saattamisessa ohjaajalla on merkittävä rooli. Oikea vastaus on käynyt ainakin Laurin ja Samun mielessä, mutta vasta ohjaajan johdattelu antaa heille varmuuden, että vastaus on oikein.

Millaisia merkityksiä matematiikasta keskustellaan?

Matematiikkakuva

Tämän dialogin merkittävin huomio oppilaiden matemaatiikkaan liittyvissä käsityksissä on, että *ei ratkaisua* vaikuttaa olevan oppilaiden mielestä riittämätön vastaus. Toisin sanoen tyhjää joukkoa ei nähdä pätevänä vastauksena tehtävään. Jopa yhdeksäsluokkalainen Lauri hylkää tämän vastausvaihtoehdon. Identtisesti todet ja epätodet yhtälöt ovat kevään viimeisen jakson yhdeksäsluokkalaiselle jo vanha asia (Laskutaito 9), ja sitä kautta Laurin tulisi tietää, että *ei ratkaisua* on yhtälölle yhtä hyvä vastaus kuin mikä tahansa reaalilukukin. Hän ei kuitenkaan yhdistä oppimaansa tähän yhtälöparitilanteeseen tai opittu asia on päässyt unohtumaan.

Tässä tehtävässä kaikki oppilaat ovat samalla viivalla, sillä ratkaisutekniikka on edellisissä tehtävissä tullut kaikille tutuksi, mutta kukaan ei kuitenkaan osaa ratkaista tehtävää. Niinpä kukin voi nostaa esiin ideoita, vaikkeivät ne olisi edes kovin hyvin perusteltuja, eikä kukaan vähättele toisen ehdotusta. Kun käsillä on tehtävä, joka on kaikille haastava, ei ketään leimata tyhmäksi, kuten esimerkiksi tehtävässä kolme, jonka ratkaisu oli yksinkertaisempi. Vanhemmille oppilaille saattaa jopa muodostua paineita siitä, etteivät he keksi ratkaisua, sillä tehtävä vaikuttaa ulkonäöllisesti yhtä yksinkertaiselta ja nopealta ratkaista kuin kohtien a–c yhtälöparitkin.

Matematisointi

Lauri havaitsee ensimmäisenä, mikä ongelma yhtälöparin $x + y = 2$ ja $x + y = 5$ ratkaisemisessa on: ”häh..nää on molemmat plus”. Laurin kommentista näkyy suuri hämmennys. Hän ei luota intuitioonsa, että yhtälöpari on mahdoton ratkaista, koska hän ei koe tyhjää joukkoa kelvolliseksi vastaukseksi. Sen sijaan hän yrittää ongelmakohdasta huolimatta löytää ratkaisun: ”ei mutta siihen voi pistää miinuksen..ei mut sit se…”

Oppilaat ymmärtävät, että tehtävässä on jokin kompa, joten he alkavat pohtia poikkeuksellisia ratkaisureittejä ja -mahdollisuuksia. Samu ehdottaa, että x:n paikalle kelpaisi mikä tahansa luku, mikä on hyvin epätyypillinen vastaus näin nuorille oppilaille. Ratkaisuidea karkaa hakuammunnan puolelle, ja Samu hylkää sen nopeasti. Kuitenkin tämä ilmaan heitetty idea osoittaa, että Samu pyrkii irti tutuista ja kaavamaisista ratkaisumalleista ja olemaan avoin uudenlaiselle matemaattiselle ajattelulle. Samaan tapaan kuin Samu, myös Lauri ja Roosa pyrkivät irrottautumaan tutuista ratkaisustrategioista. Vaikka a–c-kohtien ratkaisuina on ollut ainoastaan positiivisia lukuja, Lauri keksii ehdottaa negatiivisten lukujen hyödyntämistä ja Roosa nollan sijoittamista.

Lopulta ohjaaja esittää johdattelevan kysymyksen ”voiko sillä olla ratkaisua”, jolla hän osoittaa, että myös vastaus, ettei ratkaisua ole, on kelvollinen. Lauri ja Samu tarttuvat johdattelukysymykseen välittömästi todeten varmoina, ettei ratkaisua ole, sillä kyseinen vastausvaihtoehto on ollut molemmilla mielessä.

<u>Tehtävä 8d</u>

Mitä havaitsette, kun piirrätte tehtävän 6d yhtälöitä vastaavat suorat?

Oppilas	Puhesiirtymä	Kielentäminen	Matematsiointi	Huomioita
Lauri	(lukee tehtävänannon ääneen)	ääneen lukeminen		
Samu	sitä ei pystyny tehä		ongelman havaitseminen	
Roosa	sitä ei voi tehä		johtopäätös	
Opettaja	mitä luulette, että tapahtuu, kun te piirrätte sen	kysyminen	johdattelu	
Samu	kokeillaan		aktivointi	
Lauri	se ei leikkaa	vastaaminen	hypoteesi	
Roosa	nää oli helpompia kuin eilen	arviointi	matematiikkakuva	piirtää suorat

Roosa	ei nää voi..kato		ratkaisun antaminen	
Lauri	ei leikkaa		hypoteesin toteaminen oikeaksi, ratkaisun antaminen, tehtävän saattaminen päätökseen	

Miten ryhmän vuorovaikutus rakentuu?

Tehtävässä palataan tarkastelemaan aikaisemman tehtävän 6d yhtälöparia. Samu toteaa, että tehtävää 6d ei pystynyt tekemään, eli tehtävällä ei ollut ratkaisua. Roosa jatkaa Samun kommentista johtopäätökseen, että myöskään tätä tehtävää ei voi tehdä. Ohjaaja kuitenkin johdattelee ryhmää jatkamaan tehtävän tekemistä pyytämällä ryhmää muodostamaan hypoteesin, mitä tapahtuu, kun suorien yhtälöt syöttää Geogebraan. Samun vastaus on innokas ”kokeillaan”. Lauri taas vastaa kysymykseen hypoteesilla, että suorat eivät leikkaa. Lauri ei anna hypoteesilleen mitään lisäperusteluja, mutta hän oletettavasti mielessään pohjaa sen edellisten tehtävien ratkaisuihin.

Roosa syöttää yhtälöt Geogebraan. Roosa ja Lauri toteavat yhteistuumin Laurin hypoteesin oikeaksi. Tehtävän ratkaisu on a–c-kohtien perusteella kolmelle vanhimmalle oppilaalle selvä, minkä takia keskustelua ei juuri synny. Elli ei pitkän laskusession jälkeen enää varsinaisesti keskity tehtävien tekoon, vaan jättäytyy keskustelun ulkopuolelle. Lisäksi viimeinen tehtävä tehdään hieman kiireessä, eikä kukaan ehdi selittää hänelle tehtävän ideaa.

Mitä rooleja vuorovaikutuksessa esiintyy?

Ryhmän kolme vanhinta jäsentä osallistuvat hyvin tasavertaisesti tehtävän ratkaisemiseen. Samu ja Roosa arvioivat, kuinka tehtävä voidaan tehdä, ja Lauri muodostaa hypoteesin lopputuloksesta. Elli on hiljaisena sivustaseuraajana. Lauri säilyttää edelleen lievän johtajuuden toistamalla lopuksi Roosan tekemän havainnon, että suorat eivät leikkaa keskenään. Johtajan rooli säilyy Laurilla luontevasti, kun Roosa pyytää jotakuta toista katsomaan ja varmistamaan hänen johtopäätöksensä oikeaksi ja luovuttaa näin samalla vastuun tehtävän ratkaisemisesta eteenpäin.

Millaisia merkityksiä matematiikasta keskustellaan?

Matematiikkakuva

Oppilaiden välinen keskustelu on melko vähäsanaista ja koostuu lähinnä faktoina esitetyistä toteamuksista, joita ei juurikaan perustella, ei niinkään yhteisestä pohdinnasta. Esimerkiksi Lauri toteaa hyvin itsevarmasti, mutta ilman minkäänlaisia perusteluja hypoteesinsa ”se ei leikkaa”. Oppilaiden on toisinaan vaikea ymmärtää, miksi välivaiheita täytyy tehdä ja ratkaisua perustella, eikä pelkkä oikea vastaus riitä. Tätä selittää ainakin se, että peruskoulussa ja jopa lukion oppikirjoissa todistusajattelua opetetaan kovin vähän. Oppilaat oppivat mekaanisia laskuja rutiinien kautta, mutta tehtävien perustelemiseen ei useinkaan ole olemassa tiettyä kaavaa ja rutiinia, vaan kunkin tehtävän perustelu on hyvin tilannekohtainen.

Täysin algoritmisien ongelmanratkaisutilanteiden osuus koulumatematiikassa on vähäinen. Tehtävien ratkaiseminen tapahtuu pääosassa heuristiselta pohjalta, ja ongelmanratkaisutilanteisiin sisältyy ennustamattomia vaiheita, joiden vuoksi ongelmanratkaisua ei ole mahdollista suorittaa minkään tietyn suunnitelman tai kaavan mukaisesti. Matemaattisten ongelmien täsmällisen ratkaisemisen ohella todistamisajattelun kehittämisen kautta oppilaita voidaan kasvattaa itsenäiseen ja kriittiseen ajatteluun sekä tiedon käyttökelpoisuuden arviointiin, jotka ovat tärkeitä päämääriä kaiken opiskelun ja yleisesti elämän taitojen kehittymisen kannalta. (Räsänen, Kupari, Ahonen & Malinen, 1997)

Roosa toteaa tehtävien teon lopuksi koko laskusession kokoavana mielipiteenä, että ”nää oli helpompia kuin eilen”. Mielipide on yllättävä, kun vertaa ensimmäisen ja toisen päivän aiheita ja tehtävätyyppejä. Ensimmäisen päivän tehtävissä oli muun muassa keskustelutehtävä sekä erilaisia pelejä. Toisena päivänä taas keskityttiin tutkimaan yhtälöitä, yhtälöpareja ja niihin liittyviä suoria, jotka ovat alakoululaisille vielä melko uusia aiheita (Tuhattaiturit 4–6). Toisaalta toisen päivän tehtävissä, erityisesti taulukkojen täyttämisessä, oli myös paljon puhtaita laskuja, jotka usein koetaan helppoina ja mieluisina.

Matematisointi

Samun tehtävään 6d viittaavasta kommentista ”sitä ei pystyny tehä” näkyy jälleen oppilaiden käsitys siitä, että tehtävää, jolla ei ole ratkaisua ei nähdä ratkaistuksi. Tehtävää ei siis voi tehdä. Tästä tulkinnasta seuraava Roosan johtopäätös, ettei myöskään tehtävää 8d voi näin ollen ratkaista, on peruskoululaiselle varsin luonteva ja intuition mukainen.

Tehtävän ratkaisemisessa yhdistyvät sekä tutkiva että teoreettinen matematiikka. Samu on sitä mieltä, että leikkauspiste selvitetään Geogebralla piirtäen. Lauri taas muodostaa edellisten tehtävien pohjalta hypoteesin, että suorat eivät leikkaa.

4.4 Otteita alku- ja loppukyselyistä

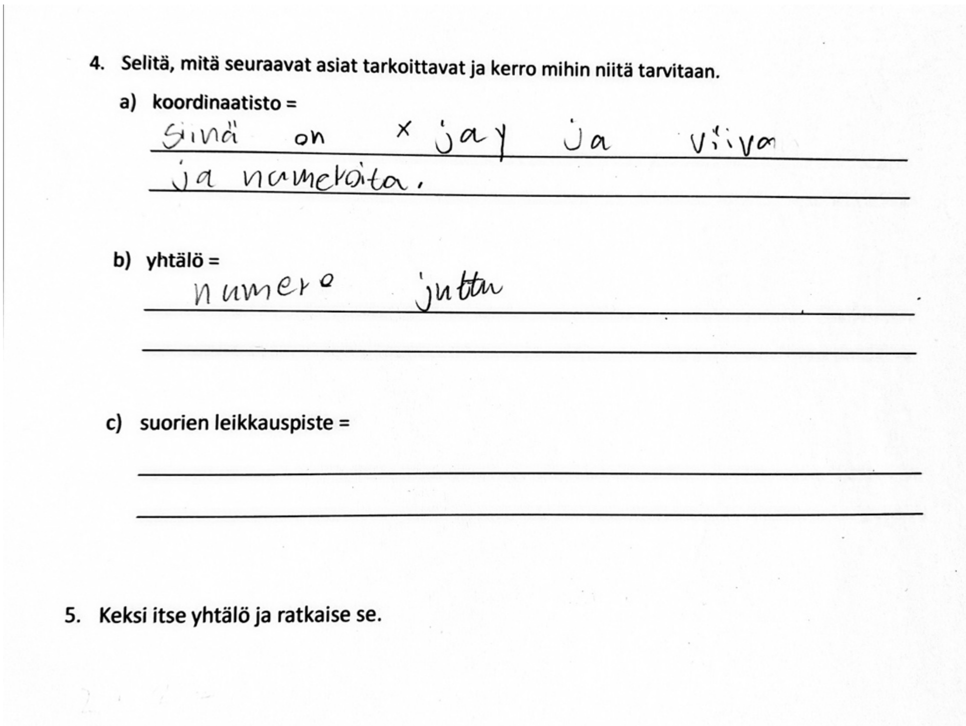
Seuraavilla sivuilla on esitettynä Roosan (6. luokka), Samun (5. luokka) ja Riinan (6. luokka) alkukyselyn tehtävien 4 ja 5 sekä loppukyselyn tehtävien 5 ja 6 vastaukset (kuvat 1–6). Alku- ja loppukyselyn tehtävät 4 ja 5 olivat samat. Kyseisissä tehtävissä oppilaita pyydettiin selittämään termit koordinaatisto, yhtälö ja suorien leikkauspiste sekä kertomaan, mihin niitä käytetään. Vastaavasti alku- ja loppukyselyn tehtävät 5 ja 6 olivat samat, ja niissä oppilaita pyydettiin keksimään itse yhtälö ja ratkaisemaan se. Kaikilla oppilailla vastauksissa oli havaittavissa saman suuntaisia muutoksia ja kehitystä kuin näillä kolmella tarkastelussa olevalla oppilaalla. Kahdella vanhimmalla oppilaalla, eli yhdeksäsluokkalaisilla Vernerillä ja Laurilla, kehitys oli toki pienempää, koska termit olivat heille jo lähtötilanteessa tutumpia kuin nuoremmille oppilaille. Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka kolmen esimerkkioppilaan ennen tutkimussessioita ja -sessioiden jälkeen kirjoittamat tehtävien ratkaisut eroavat toisistaan.

Roosa on selittänyt käsitteen koordinaatisto molemmissa kyselyissä samalla tavalla. Samu ei ole vastannut alkukyselyssä tähän kysymykseen ollenkaan, ja loppukyselyssä hän on osannut antaa kartanluvun esimerkkinä koordinaatiston käytöstä. Riina on alkukyselyssä kuvaillut koordinaatistoa puhtaasti visuaalisesti, ja loppukyselyssä hän osoittaa, mitä on oppinut kertomalla osaavansa käyttää koordinaatistoa tietokoneella. Kyseisten kolmen oppilaan vastauksia yhdistää, että he ovat kaikki kuvailleet koordinaatistoa jollakin tavalla myös visuaalisesti käyttäen muun muassa sanoja ruudukko, kaksi viivaa ja numerot.

Käsitteen yhtälö selityksissä suurin kehitys on tapahtunut Roosalla. Alkukyselyssä hän kuvailee yhtälöä ”numerojutuksi”, mutta loppukyselyssä hän osaa antaa esimerkkinä yhden muuttujan ensimmäisen asteen yhtälön, jonka hän myös ratkaisee. Samu kuvailee yhtälöä molemmissa kyselyissä laskuksi. Riina muistaa jo alkukyselyssä, että kirjaimet liittyvät jotenkin yhtälöihin. Loppukyselyssä hän antaa esimerkkinä yhtälöstä kahden muuttuja ensimmäisen asteen yhtälön. Hän on myös merkinnyt näkyviin eräät muuttujien x ja y arvot, jotka toteuttavat kyseisen yhtälön.

Viimeinen selitettävä termi oli suorien leikkauspiste. Roosa ei ole vastannut tähän kohtaan alkukyselyssä lainkaan. Loppukyselyssä hän osaa kertoa, että suorien leikkauspisteessä suora leikkaa – mitä? Kyseessä saattaa olla pelkkä äidinkielellinen huolimattomuus, ja oppilas kuitenkin ymmärtää, että suorien leikkauspisteellä tarkoitetaan kahden suoran leikkauskohtaa. Vastaus antaa kuitenkin myös mahdollisuuden tulkita, että oppilas on ymmärtänyt suorien leikkauspisteen tarkoittavan suoran leikkauskohtaa minkä tahansa elementin, kuten jonkin korkeamman asteen käyrän, kanssa. Myöskään Samu ei anna alkukyselyssä mitään selitystä suorien leikkauspisteelle. Loppukyselyssä hän osaa kertoa, että suorien leikkauspisteessä suorat leikkaavat toisensa. Riinan vastaus on molemmissa kyselyissä hieman hankalasti tulkittava. Hän pyrkii antamaan vastauksen kuvailemalla suorien leikkauspistettä visuaalisesti. Hän kutsuu suoria viivoiksi, mikä jo aikaisemmin on todettu oppilaille tyypilliseksi tavaksi nimittää suoria arkikielen termein. Suorat ovat toki viivoja, mutta hankaluus tulee vastaan siinä, että sana viiva käsittää myös epälineaariset käyrät. Ei voida siis olla täysin varmoja ymmärtääkö oppilas suoran käsitteen ja kyseessä on vain tietämättömyys termien tarkoista määritelmistä, vai mieltääkö hän myös epälineaariset käyrät suoriksi.

Viimeisenä tehtävänä oppilailla oli keksiä itse yhtälö ja ratkaista se. Roosa ja Riina eivät ole kumpikaan vastanneet tähän tehtävään alkukyselyssä. Samu on antanut vastaukseksi esimerkkilaskutoimituksen $5 \cdot 5 + 6 = 31$, eli ikään kuin yhtälön, johon muuttujan oikea arvo on sijoitettu paikalleen. Loppukyselyssä Roosa on antanut vastaukseksi sekä yhden muuttujan yhtälön että kahden muuttujan yhtälöparin ja myös ratkaissut nämä oikein. Samu on antanut vastaukseksi kahden muuttujan yhtälön, mutta hän ei ole antanut yhtälölle yhtään ratkaisua. Myös Riina on kirjoittanut kahden muuttuja yhtälön – saman, jonka hän antoi esimerkiksi myös loppukyselyn tehtävän 5 b-kohtaan – sekä antanut tälle yhden mahdollisen ratkaisuparin x = 5, y = 4.



4. **Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.**

a) **koordinaatisto =**

Siinä on x ja y ja viiva ja numeroita.

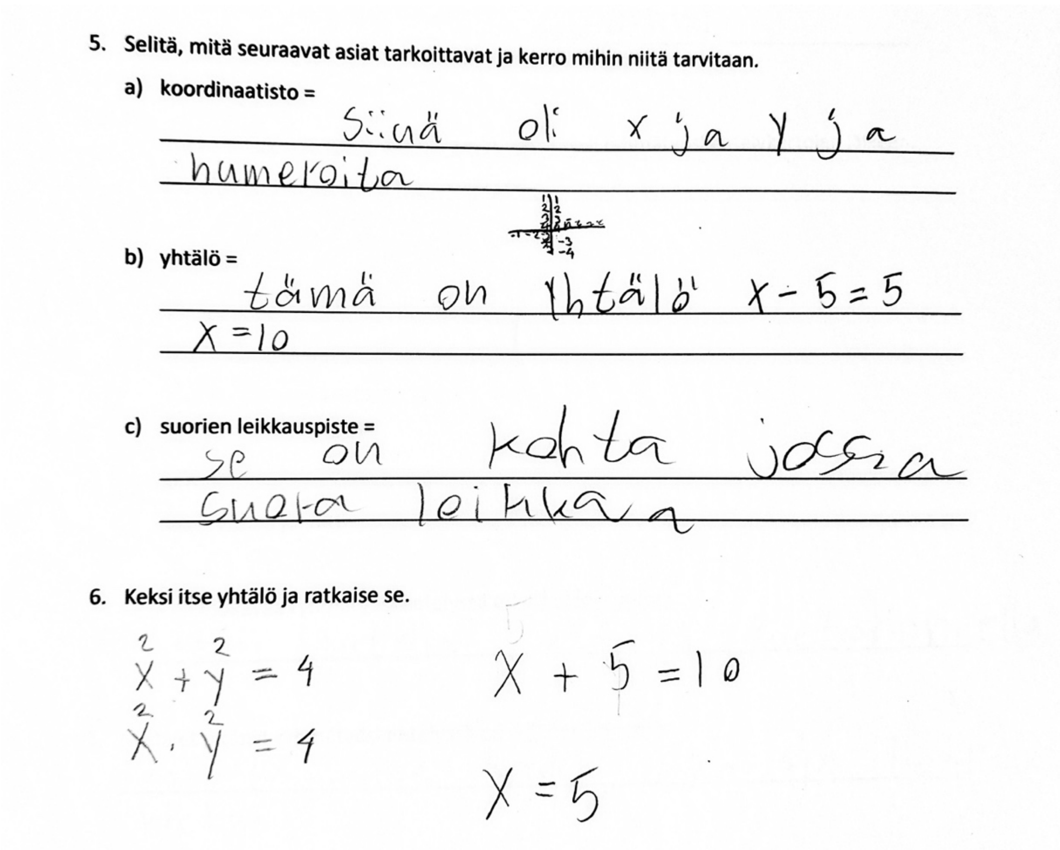
b) **yhtälö =**

numero juttu

c) **suorien leikkauspiste =**

5. **Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.**

Kuva 1: Roosan alkukyselyn tehtävät 4 ja 5.



5. **Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.**

a) **koordinaatisto =**

Siinä oli x ja y ja numeroita

b) **yhtälö =**

tämä on yhtälö $x - 5 = 5$

$x = 10$

c) **suorien leikkauspiste =**

se on kohta jossa suora leikkaa

6. **Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.**

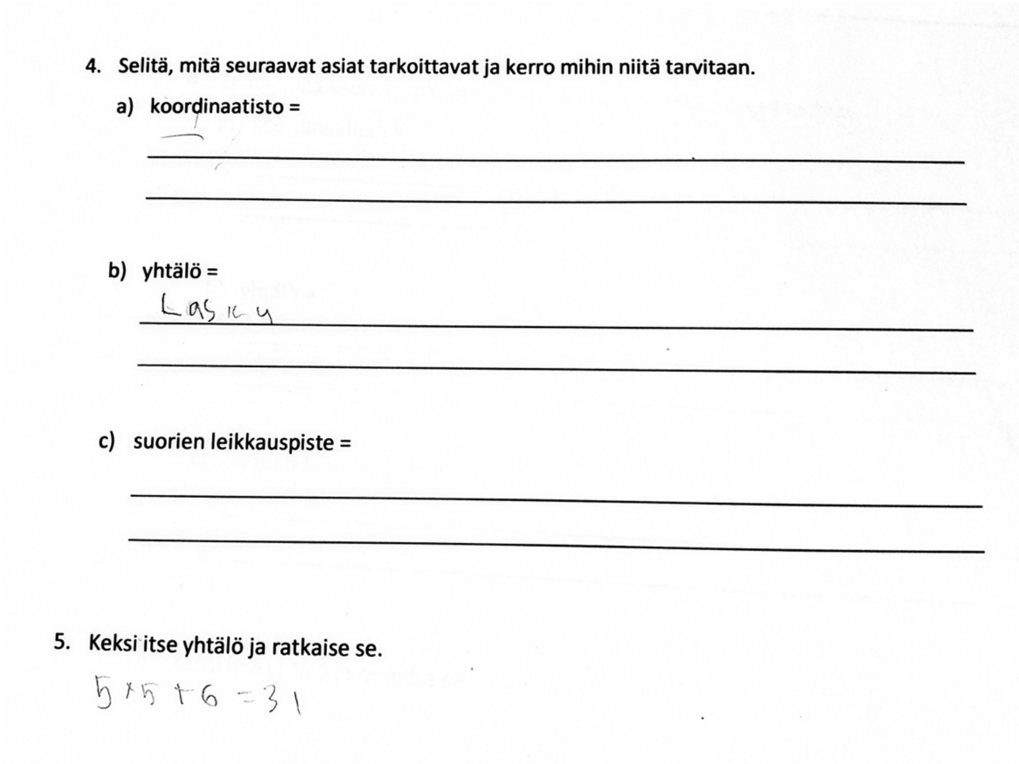
$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 \cdot y^2 = 4$

$x + 5 = 10$

$x = 5$

Kuva 2: Roosan loppukyselyn tehtävät 5 ja 6.



4. **Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.**

a) **koordinaatisto =**

b) **yhtälö =**

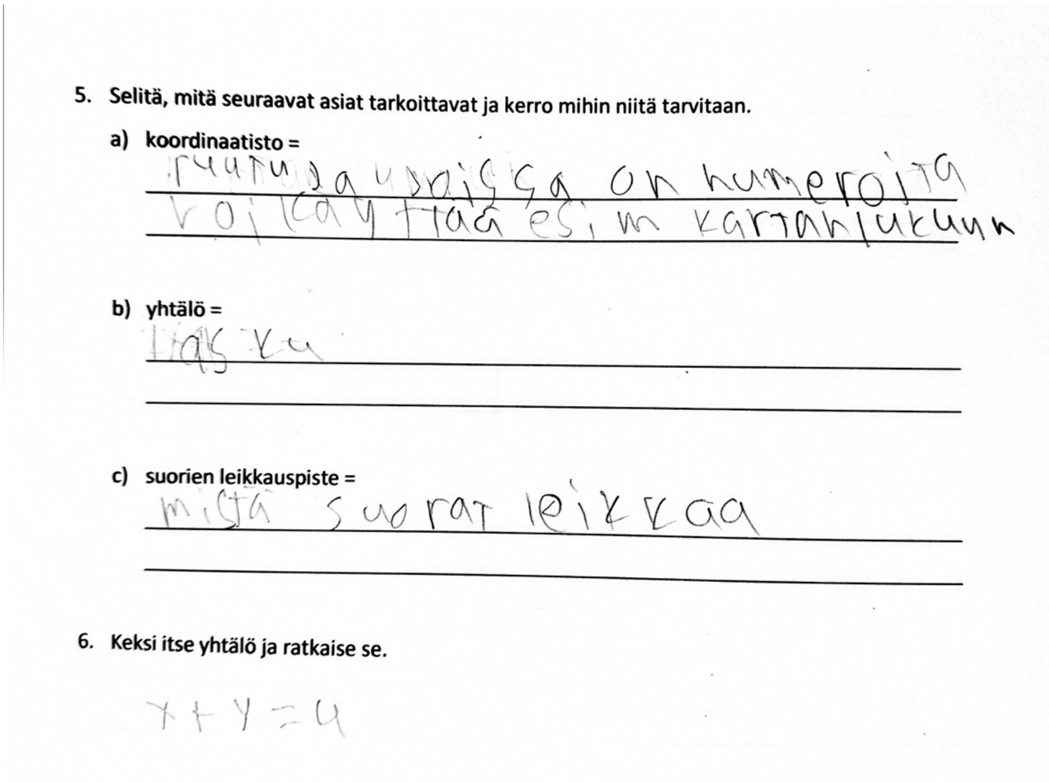
Lasku

c) **suorien leikkauspiste =**

5. **Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.**

$5 \times 5 + 6 = 31$

Kuva 3: Samun alkukyselyn tehtävät 4 ja 5.



5. **Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.**

a) **koordinaatisto =**

ruutupaperissa on numeroita
voi käyttää esim kartanlukuun

b) **yhtälö =**

lasku

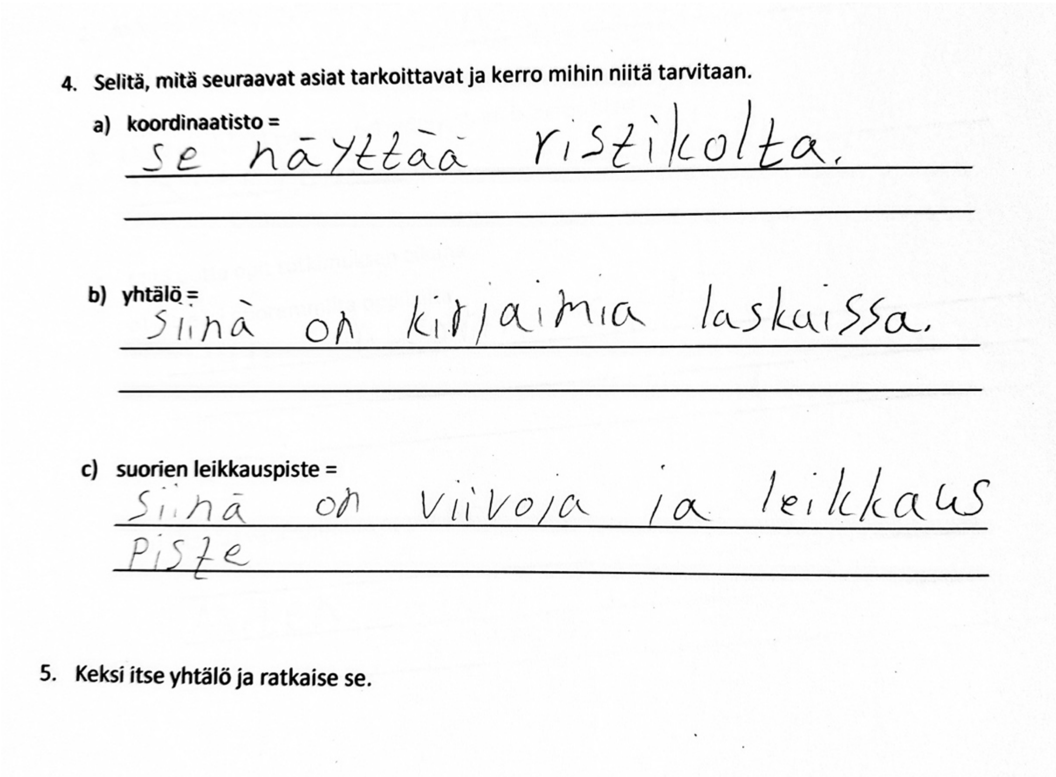
c) **suorien leikkauspiste =**

mistä suorat leikkaa

6. **Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.**

$x + y = 4$

Kuva 4: Samun loppukyselyn tehtävät 5 ja 6


4. Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.

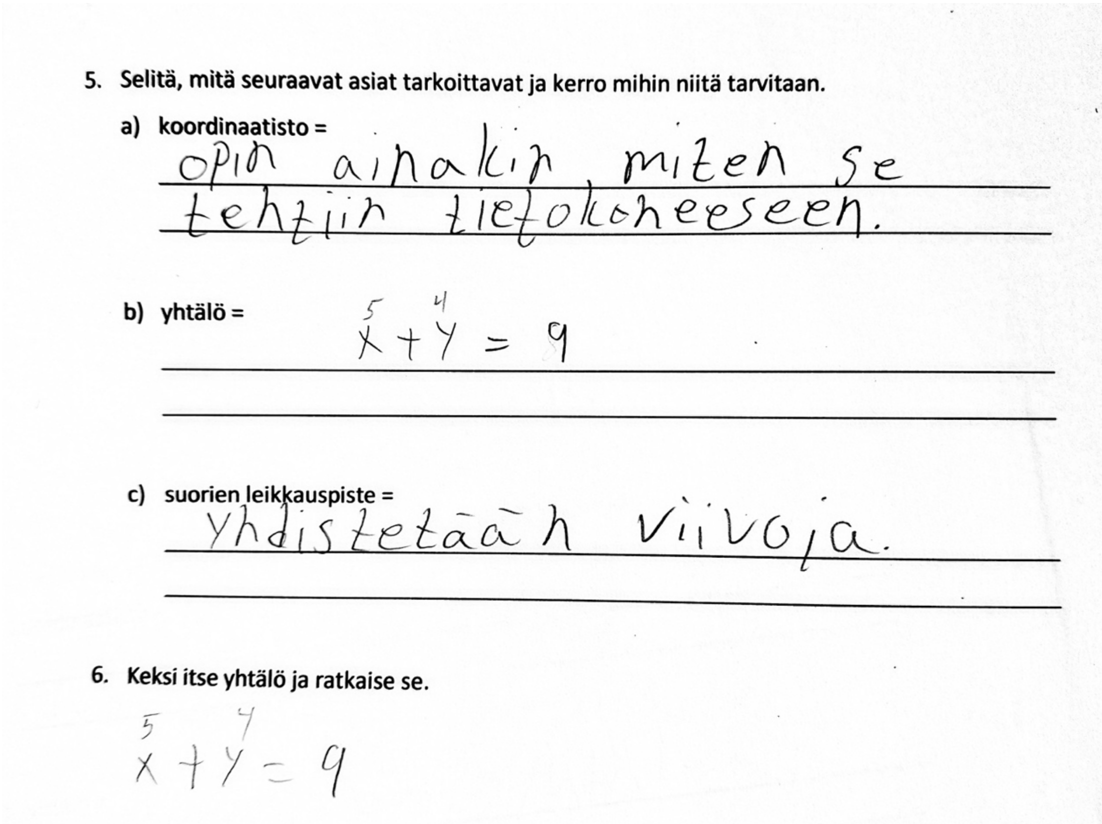
a) koordinaatisto = se näyttää ristikolta.

b) yhtälö = siinä on kirjaimia laskuissa.

c) suorien leikkauspiste = siinä on viivoja ja leikkaus piste

5. Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.

Kuva 5: Riinan alkukyselyn tehtävät 4 ja 5.


5. Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.

a) koordinaatisto = opin ainakin, miten se tehtiin tietokoneeseen.

b) yhtälö = $\overset{5}{x} + \overset{4}{y} = 9$

c) suorien leikkauspiste = yhdistetään viivoja.

6. Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.

$\overset{5}{x} + \overset{4}{y} = 9$

Kuva 6: Riinan loppukyselyn tehtävät 5 ja 6.

5. Johtopäätökset

5.1 Miten oppilaiden matemaattinen osaaminen näyttäytyi yhteistoiminnassa?

Edellisessä kappaleessa esitetyissä kolmen oppilaan alku- ja loppukyselyvastauksissa näkyy selkeää kehitystä, kun vertaillaan oppilaiden vastauksia samoihin kysymyksiin ennen ja jälkeen työskentelysessioiden. Käsitteiden hallinta on vahvistunut. Esimerkiksi koordinaatiston käsitteeseen ja sen käyttöön liittyen oppilailla syntyi työskentelysessioiden aikana soveltaviakin ajatuksia. Alkukyselyssä Samu ei selittänyt käsitettä koordinaatisto ollenkaan, kun taas loppukyselyssä hän antoi esimerkiksi koordinaatiston käyttökohteista kartan. Sama esimerkki nousi esiin myös toisen ryhmän keskusteluissa Vernerin esittämänä. Riina taas ilmoittaa osaavansa käyttää nyt tietokoneella (Geogebralla) koordinaatistoa toisin kuin ennen työskentelysessioita, sillä kukaan oppilaista ei ollut kokeillut Geogebraa aikaisemmin. Myös yhtälön käsite selkeytyi kaikilla kolmella oppilaalla huomattavasti työskentelysessioiden aikana. Kukaan heistä ei osannut alkukyselyssä muodostaa itse yhtälöä, mutta loppukyselyssä jokainen osasi kirjoittaa jonkin yhden tai kahden muuttujan yhtälön tai yhtälöparin virheettömästi. Myös suorien leikkauspisteen käsitteen ymmärryksessä tapahtui positiivista kehitystä.

Kehitystä termien käytössä näkyi myös suoraan oppilaiden välisessä dialogissa. Geogebran nimettyjen työkalujen kautta oppilaat omaksuivat omaan puheeseensa useita käsitteitä, kuten kahden pisteen välinen jana ja leikkauspiste, jotka eivät kaikille oppilaille olleet ennestään tuttuja termejä. Ryhmätyöskentelyn edetessä oppilaiden puheessa myös sanan suora käyttö lisääntyi verrattuna siihen, että ryhmätyöskentelyn alussa oppilaat käyttivät poikkeuksetta suoran paikalla sanaa viiva.

Työskentelysessioiden aikana käytiin paljon hyvää keskustelua, jolle ei voi osoittaa tiettyjä matemaattisia aiheita, joiden osalta oppilaiden osaaminen olisi kehittynyt. Sen sijaan voidaan todeta, että oppilaat joutuivat kielentämään omia ideoitaan ja toisaalta myös asioita, jotka herättivät heissä kysymyksiä, mikä edisti oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehitystä (Joutsenlahti ym., 2018). Edellytyksenä tälle oli, että molemmissa ryhmissä joku oppilaista asettui vuoron perään kysyjän rooliin vaatimaan lisäperusteluja muiden ryhmäläisten esittämiin ratkaisuihin. Tämä havainto nousi esiin tarkasteltaessa laajemmin koko kahden työskentelysession aikana käytyjä keskusteluja, ei ainoastaan Tulokset-osiossa esitettyjä lyhyitä katkelmia. Ensimmäisessä ryhmässä Mira kyseli kaikkein eniten. Toisessa ryhmässä kysymyksiä esittivät tasaisemmin kaikki ryhmän jäsenet tilanteesta riippuen.

5.2 Miten oppilaiden välinen vuorovaikutus toimi ja rakentui?

Tutkimuksessa nousi esiin ristiriitaisia havaintoja siitä, kuinka oppilaat arvottavat toistensa osaamista ja työpanosta riippuen henkilön iästä. Ryhmässä 2 nuorin oppilas, neljäsluokkalainen Elli, jätettiin lähes järjestelmällisesti yhteisen pohdinnan ulkopuolelle, ja hänen esittämänsä kysymykset sivuutettiin osittain. Toisaalta ryhmän toiseksi nuorimmaisen oppilaan, viidesluokkalaisen Samun, osaamiseen muut ryhmäläiset luottivat täysin, ja hän asettui ja hänet myös sanattomasti asetettiin usein asiantuntijan rooliin. Molemmissa ryhmissä vanhimmat oppilaat, yhdeksäsluokkalaiset Verneri ja Lauri, olivat usein johtajan ja ohjaajan roolissa. Erityisesti ensimmäisessä ryhmässä vanhimman oppilaan osaamiseen luotettiin täysin, eikä hänen ratkaisujaan kyseenalaistettu lainkaan. Ensimmäisessä ryhmässä iän määrittämä hierarkia oli hyvinkin selkeä, kun taas toisessa ryhmässä keskustelu oli tasa-arvoisempaa. Erityisesti tehtävässä 6d, jossa piti ratkaista yhtälöpari, jolla ei ole ratkaisua, kaikki ryhmän jäsenet olivat yhdenvertaisessa asemassa yhteisessä pohdinnassa.

Vanhempien oppilaiden suhtautumisessa nuorempiin oppilaisiin oli havaittavissa kaksi eri puolta. Toisaalta nuorempien oppilaiden ymmärtämättömyys ja kysymykset turhauttivat vanhempia oppilaita. Esimerkiksi Verneri oli välillä hyvinkin turhautunut Miran kysymyksiin, ja Roosa tarkisti Elliltä, onko tämä ymmärtänyt tehtävän, lähinnä siksi, että tehtävien teon alussa ohjeeksi annettiin huolehtia kaikkien ryhmäläisten ymmärtämisestä. Toisaalta nuorempiin oppilaisiin kohdistui myös suojelun halua ja aitoa välittämistä siitä, että hekin pysyvät mukana. Mira huolehti ystävällisesti, että ensimmäisenä päivänä poissa ollut Riina pääsi mukaan tehtävientekorutiiniin, ja Lauri ei huomautellut Ellille tämän tekemistä virheistä – toisin kuin Roosaa hän kutsui saman virheen takia tyhmäksi.

Ensimmäisen ryhmän keskustelutaulukoita tarkasteltaessa näkee selkeästi, että keskustelu on pääasiassa Vernerin ja Miran välistä kaksinpuhelua. Toisen ryhmän taulukoissa kaikkien oppilaiden nimet esiintyvät tasaisemmin. On luonnollista, että oppilaat asettuvat keskustelussa erilaisiin rooleihin ja toiset osallistuvat keskusteluun enemmän, toiset vähemmän. Sitä, että joku oppilas näkyy taulukossa muita vähemmän, ei voi pitää ainoastaan negatiivisena havaintona. Kaikille oppilaille ei yksinkertaisesti ole luontevaa osallistua aktiivisesti ratkaisustrategian valintaan ja kehittämiseen, mutta he voivat osallistua ryhmän toimintaan kuunnellen ja suorittaen esimerkiksi mekaanisia laskuja. Molemmissa ryhmissä keskustelu eteni luontevasti, ja opettajan apua tarvittiin kohtalaisen vähän. Kumpikaan ryhmä ei joutunut tuhlaamaan aikaa opettajan avun odottamiseen, vaan eteenpäin päästiin ryhmän omin voimin tai opettaja ehti auttamaan heti tarvittaessa, koska kysymyksiä nousi esiin hyvin harvoin.

Keskusteluissa esiintyi toivotunlaista spontaania ideoiden ilmaan heittelemistä, joka vei keskustelua luontevasti eteenpäin. Ensimmäisen työskentelysession tehtävässä 1 Mira ja Verneri keskustelivat hyvin vuorovaikutteisesti, mitä käsite koordinaatisto tarkoittaa. Mira toimi oppilaana ja Verneri opettajana, ja kumpikin toi oman roolinsa näkökulmasta lisää ideoita keskusteluun. Ryhmällä kaksi erityisen innovatiivista keskustelua käytiin toisen työskentelysession tehtävässä 6d, jossa oppilaat selvästi pyrkivät irrottautumaan tutuista ratkaisumalleista.

5.3 Millaisia merkitysneuvotteluja koordinaatiston käytöstä, suorista ja yhtälönratkaisusta käytiin?

Arkipäivän esimerkkien merkitys matematiikan oppimisessa vaikuttaa painuneen oppilaiden mieliin hyvin. Verneri neuvoi muille ryhmäläisille koordinaatiston käyttöä ottaen esimerkiksi kartan. Myös Samu nosti karttaesimerkin esiin omissa loppukyselyvastauksissaan. Toisessa työskentelysessiossa Verneri hyödynsi ensimmäisenä päivänä pelattua laivanupotuspeliä selittäessään ryhmälleen, kuinka pisteitä sijoitetaan koordinaatistoon.

Oppilaat lähestyivät uusia käsitteitä usein visuaalisesta näkökulmasta. Koordinaatistoa kuvailtiin kahden viivan, ruutujen ja numeroiden avulla, ja suoraa kutsuttiin viivaksi. Visuaalinen lähestymisreitti on hyvä ratkaisu, kun mukana on eri ikäisiä ja tasoisia oppilaita. Visuaalinen lähestymistapa on yksinkertainen reitti lähestyä ongelmaa, sillä kukin ryhmäläinen voi omin silmin todeta, että koordinaatisto tosiaan käsittää kaksi viivaa, ruutuja ja numeroita, ja suora näyttää viivalta. Kun tehtäviin tartutaan kiinni riittävän konkreetista näkökulmasta, jokainen oppilas saa lisää luottamusta omaan ymmärrykseensä ja osaamiseensa. Syntyy turvallinen tunne siitä, että ääneen voi sanoa myös yksinkertaisia ideoita, ei ainoastaan pitkälle mietittyjä ratkaisustrategioita. Tämän jälkeen pohdintaa voidaan vähitellen viedä abstraktimpaan suuntaan.

Haastavammissa päätelmissä oppilaiden välistä vuorovaikutusta heikensi monin paikoin se, että idean keksijä ei perustellut ajatustaan riittävästi. Esimerkiksi toisen työskentelysession tehtävässä 2a Samu ja Lauri olivat yhtä mieltä siitä, että Samin rahamääriksi voidaan luetella ainoastaan parillisia arvoja, jotta myös Riitan rahamäärät olisivat kokonaislukuja. He eivät kuitenkaan selittäneet ajatustaan ääneen, minkä vuoksi Roosalla ja Ellillä meni pitkään ymmärtää, millaisia lukuja heidän odotettiin taulukkoon luettelevan. Lopulta he yrityksen ja erehdyksen kautta keksivät, että lukujen täytyy olla parillisia – ymmärtämättä kuitenkaan miksi.

Mielenkiintoisimmat havainnot oppilaiden matemaattisiin käsityksiin liittyen nousivat esiin loppuosan tehtävissä 6d ja 8d, joissa käsiteltiin yhtälöparia, jolla ei ole ratkaisua. Laurin, Samun ja Roosan pohdinnoissa nousi esiin käsitys, että *ei ratkaisua* ei olisi pätevä vastaus matemaattiseen tehtävään.

Ryhmätyöskentelyyn toi monipuolisuutta se, että oppilaat kannattivat erilaisia ratkaisustrategioita. Esimerkiksi tehtävässä 8d Samu halusi selvittää ratkaisun Geogebralla kokeilemalla, ja Lauri puolestaan päätyi muodostamaan oman hypoteesinsa nojaten edellisten tehtävien ratkaisuihin sekä omaan intuitioonsa.

6. Pohdinta

Kaartinen ja Latomaa (2012) toteavat tutkimuksensa johtopäätöksissä, että opettajan ohjaus ryhmätyöskentelyn aikana on hyvin tärkeää, jottei oppilaiden innokas osallistuminen johda konfliktitilanteisiin. Kyseisessä tutkimuksessa opettajalla oli myös aktiivinen rooli ohjaamassa oppilaita tehtävänratkaisua eteenpäin vievään keskusteluun. Tässä pro gradu -tutkimuksessa nousi esiin samankaltaisia havaintoja. Oppilaiden välisten keskustelujen litteraateissa esiintyi vuorovaikutustilanteita, joissa opettajan läsnäolo olisi ollut tarpeellista. Muutamaan otteeseen vanhemmat oppilaat kommentoivat ilkeään sävyyn nuorempien oppilaiden kysymyksiä ja osaamista, mihin opettajan pitäisi aina puuttua. Lisäksi joissakin tehtävissä opettaja olisi voinut olla mukana ohjaamassa keskustelua syvempään pohdintaan. Täysin oppilaiden keskinäisessä työskentelyssä monin paikoin ripeä eteneminen nähtiin tehtävien syvällistä ymmärtämistä tärkeämpänä asiana, ja perustelut jäivät puutteellisiksi. Tällaisissa tilanteissa opettaja olisi voinut auttaa keskustelun kehittymistä esittämällä sopivasti ohjailevia kysymyksiä. Esimerkiksi tehtävässä 8d opettaja puuttui tällä tavalla keskustelun kulkuun. Kysymyksellään ”mitä luulette, että tapahtuu, kun te piirrätte sen (yhtälöparia vastaavat suorat)” hän sai paitsi Samun innostumaan kokeilemaan, mitä tapahtuu, myös Laurin luottamaan intuitioonsa, että suorat eivät leikkaa.

Monissa tehtävissä oppilaat kuitenkin ottivat myös itse vastuuta omasta ymmärtämisestään ja esittivät tarkentavia kysymyksiä asioista, joita eivät ymmärtäneet. Ilmapiiri oli ryhmätyöskentelylle ominaiseen tapaan keskusteleva, jolloin oppilaiden oli helppo kysyä, jos jotakin jäi epäselväksi. Ryhmätyöskentelyn keskusteleva ilmapiiri on suuri etu verrattuna koko luokan yhteiseen tuntityöskentelyyn, jossa lähinnä opettaja yksin on äänessä jakaen oppilaille yksittäisiä puheenvuoroja.

Hieman runsaampi opettajan ohjaus olisi voinut olla edistävä tekijä myös yhteistoiminnallisen oppimisen periaatteiden (Saloviita, 2014) toteutumisen kannalta. Ensimmäinen kriteeri, oppilaiden välinen *suora vuorovaikutus*, toteutui luontevasti. *Yhtäläisen osallistumisen* ja *yksilöllisen vastuun* toteutumista haittasi se, ettei oppilailla ollut etukäteen määrättyä työnjakoa, mikä oli kuitenkin ryhmätyöskentelyn luonteen kannalta välttämätöntä. Toisaalta keskustelussa oli havaittavissa yksilöllistä vastuuta osoittavia piirteitä, sillä kukin oppilas pyrki seuraamaan keskustelua, esitti tarkentavia kysymyksiä ja toi keskusteluun omia ajatuksiaan ainakin joitakin kertoja. *Positiivista keskinäisriippuvuutta* oli havaittavissa tehtävissä, joissa nuoremmatkin pääsivät osallistumaan mekaaniseen taulukkoarvojen luettelemiseen ja saivat näin kokea olevansa osa tehtävän ratkaisemista. Sen sijaan vanhempien ja nuorempien oppilaiden välille helposti syntyvä opettaja-oppilasasetelma ei palvellut tätä tavoitetta. Vaikkei opettaja-oppilasasetelma edistänyt yhteistoiminnalliselle oppimiselle asetettuja kriteerejä, sen avulla saavutettiin muita reittejä matemaattisen ajattelun kehitystä. Opettajana toimiva ryhmäläinen joutui kielentämään ajatuksiaan nuoremmalle ja näin prosessoimaan aihetta. Oppilaan roolissa oleva taas sai uusia näkökulmia aiheeseen ja joutui harjoittelemaan matematiikan kielentämistä ongelmakohtia pohtivien kysymysten kautta.

Edellä johtopäätöksissä tarkasteltiin oppilaiden luottamusta toistensa osaamiseen. Havainto oli, että vanhimpien oppilaiden vastauksiin luotettiin molemmissa ryhmissä vahvasti. Iästä riippuvaista hierarkiaa rikkoi viidesluokkalainen Samu. On tärkeää huomioida, että tutkimukseen osallistujat olivat toisilleen ennestään tuttuja, joten heidän arvioonsa toistensa osaamisesta vaikutti moni muukin tekijä kuin pelkkä ikä. He ovat työskennelleet eri oppiaineisiin liittyvien aiheiden parissa ikäsekoitteisissa ryhmissä aikaisemminkin ja näin oppineet tuntemaan toistensa heikkouksia ja vahvuuksia. Jos sama tutkimus toteutettaisiin ryhmissä, joissa oppilaat ovat toisilleen entuudestaan tuntemattomia, olisi asetelma aivan erilainen. Oppilaiden täytyisi muodostaa käsitys muista ryhmäläisistä ainoastaan niiden oletusten varaan, millaisia tietoja ja taitoja he uskovat minkäkin ikäisillä oppilailla olevan.

Johtopäätöksissä pohdittiin myös oppilaiden erilaista osallistumista yhteiseen keskusteluun. Itsensä esiin tuominen ja äänessä oleminen on joillekin oppilaille hyvin luonteen vastaista. Onko oikeudenmukaista vaatia näiltä oppilailta sellaista osallistumista, joka saa heidät tuntemaan olonsa hyvin epämukavaksi ja ehkä jopa pelottaa? Kaikkia oppilaita toki pitää kannustaa sosiaaliseen vuorovaikutukseen ja omien ajatuksien esiin tuomiseen. On kuitenkin vaikea kysymys, voiko sillä, ettei oppilas halua esittää ajatuksiaan suullisesti, olla alentava vaikutus hänen arvosanaansa. Tämän takia on tärkeää, että arvioinnissa oppilaan suullinen esiintyminen on vain yksi vaikuttava tekijä monien muiden joukossa, ja hänelle annetaan muita mahdollisuuksia näyttää omaa osaamistaan.

7. Yhtälöiden ratkomisen historiaa

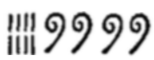
Tutkielman pedagoginen osuus on nyt saatettu päätökseen, ja on aika siirtyä tutkimaan matemaattisia sisältöjä hieman syvemmin. Tutkimussessioissa yhtenä pääaiheena oli yhtälöiden ratkaiseminen, joka valikoitui tämän matematiikkaosuuden punaiseksi langaksi. Yhtälöiden ratkaisemiseen tutustutaan historiakatsauksena, joka painottuu yhtälönratkaisun kehityksen alkuvaiheisiin muinaisessa Egyptissä ja Mesopotamiassa sekä kehityksen erääseen huipennukseen uuden matematiikan aikana, 1600–1800-luvuilla, jolloin keksittiin ja todistettiin käyrien leikkauspisteistä kertova Bézout’n lause.

Suurista muinaiskulttuureista Egyptistä, Mesopotamiasta, Intiasta ja Kiinasta puhuttaessa voidaan sanaa matematiikka käyttää ensimmäistä kertaa ainakin jossakin määrin sanan nykyisessä merkityksessä. Nämä kulttuurit puhkesivat kukoistukseensa noin 2000–3000 eKr. Kyseisissä kulttuureissa kehittyneet maanviljelys, keinokastelu sekä eriytynyt yhteiskunta ja keskitetty hallinto edellyttivät luonnollisesti laskutaitoa monissa eri muodoissaan ja loivat näin hyvän ponnistuslaudan matematiikan kehitykselle. Historian tutkimuksissa on saatu luotua melko selkeä kuva Egyptin ja Mesopotamian kulttuurien matematiikasta, joista jälkimmäisen vaikutus länsimaiseen matematiikkaan on muinaiskulttuureista kaikkein merkittävin. (Lehtinen, 2014)

7.1 Egypti

Egyptin vanhin numerojärjestelmä muodostuu hieroglyfinumeroista, jotka ovat peräisin vähintään ajalta 3000 eKr. Järjestelmässä on omat merkkinsä luvuille 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 ja 1000 000, joita toistetaan muodostettaessa muita lukuja. Hieroglyfit voitiin kirjoittaa sekä oikealta vasemmalle että vasemmalta oikealle, joista ensimmäistä käytettiin yleisimmin. Toinen merkittävä ero omaan lukujärjestelmäämme nähden on, ettei lukua nolla tarvittu. (Flegg, 1989) Esimerkiksi lukuja 48 ja 408 merkittiin

ja



ilman mitään sekaantumisen riskiä.

Noin 2000 eKr. hieroglyfien rinnalle kehittyi hieraattinen lukujärjestelmä, jossa oli omat merkkinsä luvuille 1, 2, 3,…, 9, 10, 20, 30,…, 90, 100, 200, 300,… ja 1000. Uusi järjestelmä vähensi toistoa, mutta samalla ulkoa opeteltavien merkkien määrä lisääntyi. Esimerkiksi eräs historian tutkimuksen kannalta merkittävimmistä säilyneistä papyruksista, Rhindin eli Ahmeksen papyrus, on kirjoitettu hieraattisin merkinnöin (Flegg, 1989). Rhindin papyrus on 30 senttimetriä korkea ja 540 senttimetriä pitkä käärö, joka on alun perin kirjoitettu hieman vuoden 1800 eKr. jälkeen (Flegg, 1989). Nykypäivänä tietomme egyptiläisten yhtälönratkaisuperiaatteista pohjautuvat suurelta osin Rhindin papyrukseen. Käärö sisältää 85 enimmäkseen aritmeettista tehtävää vastauksineen sekä laskemista helpottavia taulukoita. (Lehtinen, 2014)

Egyptiläiset ilmaisivat kaikki murtoluvut yksikkömurtolukujen $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, summana – poikkeuksena luku $\frac{2}{3}$, jolle oli oma merkkinsä. Rhindin papyruksen alussa esitetään muotoa $\frac{2}{n}$ olevien murtolukujen yksikkömurtolukuesitykset. (Lehtinen, 2014) Kyseinen taulukko oli hyödyllinen muun muassa kerto- ja jakolaskuissa, jotka muinaiset egyptiläiset laskivat niin kutsutulla peräkkäisten kahdentamisten menetelmällä (Flegg, 1989). Lasketaan esimerkkinä menetelmän käytöstä kertolasku $37 \cdot 58$ mukaillen esimerkkiä verkkoteoksesta *MacTutor History of Mathematics archive* (O´Connor & Robertson, 2019). Listataan aluksi lukuja siten, että lähdetään liikkeelle luvusta 58. Kerrotaan tämä kahdella, jolloin saadaan 116, kerrotaan tämä jälleen kahdella, jolloin saadaan 232 ja niin edelleen. Kukin tulos siis kerrotaan aina kahdella eli ”kahdennetaan”. Saadaan seuraava lista kertolaskuja:

1	58
2	116
4	232
8	464
16	928
32	1856

Seuraava kertoja 64 on suurempi kuin alkuperäinen kertoja 37, joten lista voidaan lopettaa tähän. Seuraavaksi todetaan, että erotuksien 37 – 32 = 5, 5 – 4 = 1 ja 1 – 1 = 0 vähennettävien summaksi saadaan 32 + 4 + 1 = 37. Lopuksi summataan lukuja 32, 4 ja 1 vastaavat arvot taulukon oikeasta sarakkeesta, jolloin vastaukseksi saadaan

$$37 \cdot 58 = 1856 + 232 + 58 = 2146.$$

Nyt kun muinaisten egyptiläisten lukumerkinnät ja laskutoimitukset ovat tulleet jonkin verran tutuiksi, on oikea hetki siirtyä tarkastelemaan, millaista yhtälönratkaisua Egyptissä harrastettiin. Käytetään kuitenkin tässä vaiheessa moderneja merkintöjä lukemisen helpottamiseksi. Egyptiläiset ratkoivat ensimmäisen asteen yhtälöitä niin kutsutulla väärän sijoituksen menetelmällä (Lehtinen, 2014). Yhtälön muuttujaa kutsuttiin nimellä aha eli kasa (Lehtinen, 2014). Otetaan esimerkiksi Rhindin papyruksen tehtävä numero 26: Kasa ja neljännes kasasta on 15 (O´Connor & Robertson, 2019). Kun muuttujaa kasa merkitään kirjaimella x, ongelma voidaan modernein merkinnöin kirjoittaa yhtälöksi

$$x + \frac{1}{4}x = 15.$$

Lehtisen esimerkkiä mukaillen ensimmäiseksi tehdään arvaus, että kasa on 4, jotta päästään eroon murtoluvuista. Yhtälön vasemmalle puolelle saadaan $4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$, joka on väärä vastaus. Saatu väärä vastaus 5 täytyy kertoa luvulla 3, jotta saadaan haluttu vastaus 15. Nyt voidaan päätellä, että väärä arvaus 4 tulee kertoa luvulla 3, jolloin vastaukseksi saadaan $x = 3 \cdot 4 = 12$. Rhindin papyruksen mukaisesti ratkaisu voidaan vielä tarkistaa sijoittamalla: $12 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 15$. (Lehtinen, 2014)

Erilaiset yhtälönratkaisumenetelmät ovat yrityksen ja erehdyksen kautta kehittyneet vuosisatojen kuluessa eri aikakausina ja eri kansojen toimesta. Muinaiset yhtälönratkaisut perustuivat varmasti paljon kokeilulle, kuten edellä esitellyssä väärän sijoituksen menetelmässä. Vähitellen lukuisten kokeilujen kautta löydettiin tiettyjä periaatteita, joiden voitiin todeta pätevän yleisemminkin. Yleisten periaatteiden löytyminen ei kuitenkaan ole vähentänyt kokeilevan ja tutkivan matematiikan merkitystä. Tässä pro gradu -tutkimuksessa useampi tuhat vuotta muinaisen Egyptin kukoistuskauden jälkeen eri ikäiset peruskoululaiset pureutuivat yhtälötehtäviin ennakkoluulottoman kokeilemisen kautta. Tehtävässä, jossa Villellä oli päärynöitä ja appelsiineja yhteensä kuusi kappaletta, oppilaat lähtivät ensin sattumanvaraisesti kokeilemaan, minkä lukujen summasta tulee vastaukseksi kuusi. Pian he kuitenkin huomasivat, että tehtävä ratkeaa helpoimmin, kun asettaa päärynöiden määrät juoksemaan nollasta kuuteen ja appelsiinien määrät vastaavasti kuudesta nollaan. He kehittivät kokeilun kautta oman toimivan menetelmänsä tehtävän helpottamiseksi.

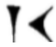
7.2 Mesopotamia

Mesopotamian, joka sijaitsi aikanaan nykyisen Irakin alueella, matemaattista kulttuuria kutsutaan yleisesti babylonialaiseksi huolimatta siitä, että aluetta hallitsivat monet muutkin kansat. Babylonialaiset käyttivät nuolenpää- eli kiilakirjoitusta, jossa kiilamaiset merkit saatiin aikaan painelemalla poikkileikkaukseltaan kolmiomaista kirjoituspuikkoa savitauluihin. Tauluja on löytynyt tuhansia, joista sisällöltään matemaattisia on noin kolmesataa. Nämä taulut asettuvat kolmeen ajanjaksoon, vuosiin 1800–1600 eKr., vuoden 1200 eKr. ympäristöön sekä vuosiin 600 eKr.–300 jKr. (Lehtinen, 2014)

Babylonialaisilla oli käytössä seksagesimaalinen eli 60-kantainen paikkajärjestelmä. Kullekin luvulle 1–59 oli oma symbolinsa, jotka muodostettiin toistamalla ykkösen merkkiä 𒁹 ja kymmenen merkkiä  . Lukuja 60, $60^2 = 3600$, $60^3 = 216\,000, \ldots$ merkittiin jälleen samalla merkillä kuin lukua yksi. (Lehtinen, 2014) Toisin kuin hieroglyfikirjoituksessa, babylonialaiset kirjoittivat luvuissa numeromerkit merkitsevyysjärjestyksessä siten, että vähiten merkitsevä oli vasemmalla kuten nykyäänkin (Flegg, 1989). Näillä ohjeilla esimerkiksi laittamalla peräkkäin merkit

12 5 51

saadaan luku $12 \cdot 60^2 + 5 \cdot 60 + 51 = 43\,551$.

Herää kysymys, miten babylonialaiset tiesivät, onko kyseessä luku 1 vai 60. Ero kävi selville kiilan paikasta tai asiayhteydestä. Esimerkiksi, jos kirjoitettuna on luku  , eli 70, lukija ymmärtää ilman sekaannuksen riskiä, että ensimmäinen kiila esittää lukua 60, koska suuremmat yksiköt kirjoitetaan aina ennen pienempiä. (Flegg, 1989) Toinen erikoisuus nykyiseen lukujärjestelmään verrattuna oli, ettei nollalle ollut omaa merkkiä. Siispä esimerkiksi luvut $61 = 1 \cdot 60 + 1 \cdot 1$ ja $3601 = 1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 1 \cdot 1$ kirjoitettiin samalla tavalla. (Lehtinen, 2014)

Samoja kokonaislukujen merkintöjä käytettiin myös murtoluvuille. Niinpä jälleen ykkösen symboli  tarkoittaa myös murtolukuja $\frac{1}{60}, \frac{1}{3600}, \ldots$ (Flegg, 1989) Nykyajan teksteissä 60:n eri potenssien kertoimet erotetaan toisistaan pilkuilla, samoin 60:n eri potensseilla muodostetut murtoluvut. Lisäksi ykkösten ja kuudeskymmenesosien väliin merkitään puolipiste. (Lehtinen, 2014) Siispä esimerkiksi

$$4,56,13;12,72 = 2 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 13 + \frac{12}{60} + \frac{72}{3600} = 10\,573{,}22.$$

Babylonialaiset laskivat yhteen-, kerto- ja jakolaskuja sujuvasti omassa seksagesimaalijärjestelmässään samoin periaattein kuin me nykypäivänä kymmenkantaisessa lukujärjestelmässä (Lehtinen, 2014). Laskemisen avuksi babylonialaisilla oli erilaisia taulukoita: kertotauluja, käänteislukuja, neliöitä, neliöjuuria ja niin edelleen. Sujuvan laskutekniikan myötä ensimmäisen asteen yhtälöt eivät tuottaneet babylonialaisille ongelmia. Esimerkiksi Egypti-kappaleessa esitelty yhtälö $x + \frac{1}{4}x = 15$ (Rhindin papyruksen tehtävä 26) olisi babylonialaisittain ratkennut suoraviivaisesti yhdistäen ensin yhtälön vasemman puolen termit ja kertomalla yhtälö tämän jälkeen puolittain luvun $1 + \frac{1}{4} = 1;15$ käänteisluvulla 0;48, joka katsottiin esimerkiksi käänteislukutaulukosta. (Flegg, 1989)

Babylonialaiset ratkoivat myös paljon mutkikkaampia tehtäviä kuin yksinkertaisia ensimmäisen asteen yhtälöitä. Kahden tai kolmen muuttujan ensimmäisen asteen yhtälöryhmät ratkesivat tavallisesti ratkaisemalla ensin yksi muuttuja yhdestä yhtälöstä ja sijoittamalla tämä muihin yhtälöihin, ja niin edes päin – kuin konsanaan nykylukion matematiikan tunnilla. Tämä ei kuitenkaan ollut ainoa menetelmä, jolla babylonialaiset ratkaisivat ensimmäisen asteen yhtälöryhmiä. Tapauksissa, joissa kahden muuttujan summa on annettu, hyödynnettiin monesti niin sanottua plus ja miinus -menetelmää. (Flegg, 1989) Tutustutaan menetelmään esimerkin kautta. Käytetään lukemisen helpottamiseksi kymmenkantaisia lukuja ja valitaan yhtälöpari

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 7$$
$$x + y = 40.$$

Babylonialaiset päättelivät ensimmäiseksi alemman yhtälön perusteella, että muuttujien x ja y täytyy olla x = 20 + s ja y = 20 – s jollakin luvulla s. Sijoitetaan nämä ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$$\frac{3}{4} \cdot (20 + s) - \frac{1}{2}(20 - s) = 7$$

ja edelleen

$$s = \frac{8}{5}.$$

Näin yhtälöparin ratkaisu on

$$x = 20 + \frac{8}{5} = 21{,}6$$
$$y = 20 - \frac{8}{5} = 18{,}4.$$

Muistetaan, että vastaus on annettu kymmenjärjestelmän desimaalilukuina. Esimerkki on kirjoitettu Fleggin teoksessa (1989) esitettyyn esimerkkiin perustuen. On hyvä huomata, että babylonialaiset kirjoittivat tehtävänannot ja ratkaisut sanallisesti, eivät matemaattisena tekstinä, kuten edellä on esitetty.

Babylonialaiset tunsivat myös toisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmän – eivät tosin nykyisenlaisena yleisenä ratkaisukaavana, vaan numeerisina esimerkkeinä eri tilanteista (Lehtinen, 2014). Flegg (1989) esittelee erään toisen asteen yhtälöä hyödyntävän tehtävän, joka savitauluista on tulkittu: *Olen vähentänyt neliön sivun sen pinta-alasta, ja tulos on 14,30* (= 870). Ratkaistaan tehtävä kymmenkantaisen järjestelmän avulla, mutta babylonialaisin keinoin. Ratkaisu menee näin: Otetaan lineaarisen termin kerroin 1. Otetaan puolet yhdestä, joka on 0,5. Kerrotaan tämä itsellään, jolloin saadaan 0,25. Lisätään tämä lukuun 870, ja saadaan 870,25. Tämän neliöjuuri on 29,5. Otetaan 0,5, joka on kerrottu itsellään, ja lisätään siihen 29,5. Tulokseksi saadaan 30, joka on haluttu neliön sivu.

Kyseessä on selvästi toisen asteen yhtälö $x^2 - x = 14{,}30$ tai kymmenkantaisesti ilmaistuna $x^2 - x = 870$. Tarkastellaan edellistä tehtävänratkaisua ottaen avuksi modernit matemaattiset merkinnät. Merkitään lisäksi yhtälön kertoimia toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta tutuilla symboleilla a, b ja c, eli a = 1, b = 1 ja c = 870, joskin huomioimatta b:n ja c:n negatiivista etumerkkiä. Nyt yhtälö on muotoa $ax^2 - bx - c = 0$. Ratkaisussa ensimmäisenä puolitetaan kerroin b ja tämän jälkeen korotetaan se toiseen, jolloin saadaan termi $\frac{1}{4}b^2$. Tämä lisätään vakiotermiin c, eli saadaan $\frac{1}{4}b^2 + c$. Tästä otetaan neliöjuuri ja neliöjuureen lisätään $\frac{1}{2}b$, jolloin saadaan $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + c}$. Tämä muistuttaa jo hyvin läheisesti tuttua ratkaisukaavaa. Muokataan lauseketta vielä hieman. Otetaan ensin neliöjuuren sisällä yhteiseksi tekijäksi $\frac{1}{4}$ ja tuodaan se ulos juuresta, jolloin lauseke saa muodon

$$\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Toisen asteen termin kerroin on a = 1, joten a voidaan sijoittaa kaavaan ”omille paikoilleen”:

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$$

Alussa b ja c valittiin siten, että kummankin etumerkki valittiin positiiviseksi. Tämän huomioiden yllä oleva kaava on samaa muotoa kuin nykyinen toisen asteen yhtälön ratkaisukaava. Babylonialaiset siis tekivät omassa toisen asteen yhtälöiden ratkaisussaan tismalleen samat operaatiot kuin me nykypäivänä, mutta ratkaisu tehtiin useammassa vaiheessa ja sanallisesti selittäen. Lisäksi on hyvä muistaa, että babylonialaiset hyväksyivät ainoastaan positiiviset neliöjuuret, joten heillä toisen asteen yhtälöt tuottivat ainoastaan yhden vastauksen (Flegg, 1989).

Babylonialaiset ratkaisivat myös yhtälöryhmiä, joissa oli sekä ensimmäisen että toisen asteen yhtälöitä. Esimerkiksi yhtälöpareja muotoa

$$x + y = a$$
$$xy = b$$

ja

$$x + y = a$$
$$x^2 + y^2 = b$$

esiintyy savitauluissa usein. Näissä molemmissa tapauksissa on annettuna tuntemattomien x ja y summa, joten kummankin yhtälöparin ratkaisu lähtee liikkeelle aikaisemmin esitetyllä plus ja miinus -menetelmällä. Kummassakin tapauksessa, kun alempaan yhtälöön sijoitetaan $x = \frac{a}{2} + s$ ja $y = \frac{a}{2} - s$, päädytään muotoa $cs^2 = d$ olevaan yhtälöön,

$$xy = b \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} + s\right)\left(\frac{a}{2} - s\right) = b \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - s^2 = b \Leftrightarrow s^2 = -b + \frac{a^2}{4} \quad \left(c = 1, d = -b + \frac{a^2}{4}\right)$$

ja

$$x^2 + y^2 = b \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} + s\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - s\right)^2 = b \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + 2s^2 = b \Leftrightarrow 2s^2 = b - \frac{a^2}{2} \left(c = 2, d = b - \frac{a^2}{2}\right),$$

joista s saadaan ratkaistua neliöjuurena. (Flegg, 1989) Esimerkiksi opetuskokeilun toisen tutkimussession tehtävän 6b yhtälöparille

$$x + y = 8$$

$$x \cdot y = 15$$

saadaan $s^2 = -15 + \frac{8^2}{4} = 1$. Tästä babylonialaisittain ratkaisuksi saadaan s = 1, koska ainoastaan positiiviset neliöjuuret kelpaavat. Näin yhtälöparille saadaan yksi ratkaisu

$$x = \frac{8}{2} + 1 = 5 \text{ ja } y = \frac{8}{2} - 1 = 3,$$

mutta me kelpuutamme myös vastauksen x = 3 ja y = 5. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat eivät kuitenkaan ratkaisseet yhtälöparia näin monimutkaisesti. Koska nuorimmilla oppilailla ei ole vielä varsinaisia työkaluja yhtälönratkaisuun, he selvittivät ratkaisun nopeasti kokeilemalla eri sijoituksia. Heidän ratkaisutapansa oli lähempänä egyptiläistä väärää sijoitusta. Kuten egyptiläiset, he joutuivat jokaisen arvauksen kohdalla pohtimaan, miten arvausta pitää korjata, jotta päädytään oikeaan ratkaisuun.

Babylonialaiset osasivat ratkaista myös toisen asteen yhtälöiden ryhmiä. Savitauluissa on esitetty esimerkiksi yhtälöpari

$$0\,;20(x + y) - 0\,;1(x - y)^2 = 15$$

$$xy = 10{,}0,$$

mutta ei ole varmaa tietoa, miten babylonialaiset ratkaisivat tämän tehtävän. (Flegg, 1989)

Kolmannen asteen yhtälöistä savitauluissa esiintyy yhtälötyyppejä

$$x^3 = a,$$

$$x^2(x + 1) = a \text{ ja}$$

$$x(10 - x)(x + 1) = a.$$

Ensimmäisen kaltaiset yhtälöt ratkottiin kuutiojuuritaulukon avulla. Myös keskimmäisen tyyppiset yhtälöt ratkaistiin taulukoiden avulla. Kolmannesta yhtälötyypistä meillä ei ole tietoa, miten babylonialaiset sen ratkaisivat, mutta ainakin tapauksessa a = 2,48 he löysivät oikean ratkaisun x = 6. (Flegg, 1989)

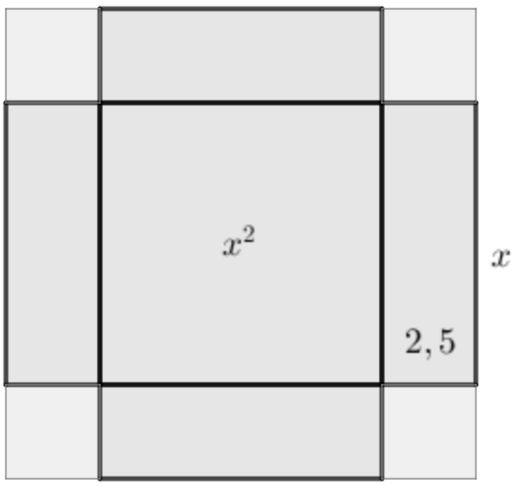
Edellä esitetyt esimerkit osoittavat, kuinka pitkälle kehittynyttä polynomiyhtälöiden ratkaiseminen oli muinaisessa Mesopotamiassa. On mielenkiintoista, kuinka eri tavoilla kahdessa likimain samana ajanjaksona vaikuttaneessa kulttuurissa, Egyptissä ja Mesopotamiassa, lukuja kirjoitettiin ja käsiteltiin ja yhtälöitä ratkaistiin, sekä kuinka paljon pidemmälle yhtälönratkaisu Mesopotamiassa kehittyi verrattuna Egyptiin.

7.3 Muinaiskulttuureista kohti uutta aikaa

Matematiikan voidaan katsoa kehittyneen omaksi tieteenalakseen antiikin Kreikassa noin 500 eKr. Kreikkalaisen matematiikan kehitys oli kiivasta. Ero esikreikkalaisesta antiikista kreikkalaiseen matematiikkaan oli hämmentävän suuri, eikä tätä matematiikan kehityksen jättiläisen askelta osata nykypäivänä täysin uskottavasti selittää. (Lehtinen, 2014)

Matematiikka koki ensimmäisen ”suuren kriisin” ilmeisesti vuoden 430 eKr. tienoilla, kun huomattiin, ettei kaikkia geometrisia suhteita voida ilmaista kokonaislukujen avulla. Esimerkiksi neliön sivulle ja lävistäjälle ei löydy kokonaislukuja a ja b siten, että sivun ja lävistäjän suhde olisi a:b. Neliön sivu ja lävistäjä ovat siis *yhteismitattomat*. Kokonaislukuihin perustuvan matemaattisen järjestelmän seurauksena geometriassa oltiin tähän asti toteutettu yhteismitallisuuteen perustuvaa suhdeoppia. Yhteismitattomuuden havaitsemisen myötä kaikkia tehtäviä ei voinutkaan enää ratkaista laskemalla, minkä seurauksena tehtävien ratkaisumenetelmät siirtyivät geometrian suuntaan. Esimerkiksi toisen asteen yhtälöitä ei voitu ratkaista laskualgoritmeilla, kuten babylonialaiset aikanaan, vaan laskualgoritmeille kehitettiin vastaavat geometriset konstruktiot. Tätä kutsutaan *pinta-alan sovittamiseksi*. (Lehtinen, 2014)

Kreikkalainen matematiikka alkoi taantua ajanlaskun ensimmäisillä vuosisadoilla. 600-luvun lopulla ja 700-luvun alussa elettiin matematiikan kehityksen suvantokautta, ja ilmassa oli vaara, että suuri osa antiikin ajan kehittyneestä matematiikasta olisi kadonnut täysin. Avuksi tulivat arabit, jotka sotaisien vuosien jälkeen ryhtyivät tallettamaan antiikin Kreikan matematiikkaa. Merkittävin arabien matemaatikoista oli Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi tärkeimpänä teoksenaan *Al-jabr wa’l muqabalah*. Kyseinen oppikirja sisältää kaikkien tuona aikana hyväksyttyjen toisen asteen



Kuva 7: Yhtälön $x^2 + 10x = 39$ geometrinen ratkaisu.

yhtälöiden ratkaisut. Yhtälöt ratkaistiin edelleen sanallisesti, eli yleisiä ratkaisukaavoja ei kirjassa esitetä. Kaikille yhtälötyypeille annetaan esimerkkien kautta ”ratkaisureseptit” samaan tapaan kuin jo babylonialaiset ratkaisivat toisen asteen yhtälöitä. Lisäksi kaikille ratkaisuille esitetään myös geometriset tulkinnat kreikkalaisten geometrisen algebran tyyliin. Esimerkiksi yhtälö

$$x^2 + 10x = 39$$

ratkaistiin seuraavalla tavalla: Piirretään neliö, jonka sivu on x, ja jokaiselle neliön sivulle suorakaide, jonka toisen sivun pituus on 2,5 (kuva 7). Täydennetään syntynyt ristikuvio neliöksi. Nyt ison neliön pinta-ala on

$$39 + 4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 64.$$

Ison neliön sivu on siis 8, jolloin saadaan

$$x = 8 - 2 \cdot 2{,}5 = 3.$$

(Lehtinen, 2014)

Muutama sata vuotta myöhemmin renessanssin aikana yhtälönratkaisun kehityksessä tapahtui suurin kehitysaskel sitten antiikin aikojen. Geronimo Cardano julkaisi vuonna 1545 algebralliset ratkaisukaavat kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille kirjassaan *Ars Magna*. Cardano ei kuitenkaan kehittänyt ratkaisukaavoja itse, eikä näin väittänytkään, vaan kolmannen asteen yhtälön hän oppi Nicolo Fontanalta ja neljännen asteen yhtälön entiseltä oppilaaltaan Lodovico Ferrarilta. Kaikki kolmannen asteen yhtälöt on mahdollista muuntaa muotoon

$$x^3 + px + q = 0,$$

jonka ratkaisu Cardanon kaavoin on

$$x = u + v,$$

missä

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right)^3}} \quad \text{ja} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right)^3}}.$$

Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavoilla ei ollut juurikaan käytännön merkitystä, sillä yhtälöiden likiarvoiset ratkaisut löydetään mutkikkaita kaavoja helpommin approksimaatioiden avulla. Ratkaisukaavojen löytymisen tärkein merkitys matematiikan kehitykselle oli antaa aikansa matemaatikoille luottamusta siihen, että löydettävää on vielä jäljellä. Kaavat veivät matematiikan kehitystä eteenpäin myös siinä mielessä, että se toi matemaatikot uusien ratkaistavien ongelmien äärelle. Kaavojen myötä törmättiin nimittäin kompleksilukuihin – tai oikeammin niiden puutteeseen. Esimerkiksi yhtälön $x^3 = 15x + 4$ ratkaisuksi saadaan Cardanon kaavoilla $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Toisaalta yhtälön ainoaksi positiiviseksi ratkaisuksi saadaan suoralla sijoituksella $x = 4$. Cardano ei osannut selittää tätä ilmiötä. Kirjassaan hän ratkaisi ongelman käsittelemällä esimerkeissään ainoastaan tilanteita, joissa tämä *casus irreducibilis* ei esiinny. (Lehtinen, 2014)

7.4 Uuden matematiikan aika

Seuraavaksi siirrytään uuden matematiikan aikaan 1600–1800-luvuille. Tässä kappaleessa tutkitaan algebran, tarkemmin sanottuna yhtälöratkaisun, analyyttisen geometrian sekä projektiivisen geometrian kehitystä ja vähittäistä linkittymistä toisiinsa. Liikkeelle lähdetään kahdesta ensimmäisestä, ja projektiiviseen geometriaan päädytään hieman myöhemmin. Kaikki tämän luvun tietopohja on peräisin John Stillwellin kirjasta *Mathematics and its history* (2010). Samoin esimerkit on tehty kirjan esimerkkejä mukaillen.

Analyyttisen geometrian perusidea on esittää käyrät yhtälöiden avulla. Tämä määritelmä ei kuitenkaan riitä analyyttisen geometrian koko sisällön kuvaamiseen, sillä muutoin kunnia analyyttisen geometrian kehittämisestä voitaisiin luovuttaa jo antiikin kreikkalaisille. Esimerkiksi Menaikhmos esitti tuolloin pituuden $\sqrt[3]{2}$ paraabelin ja hyperbelin leikkauspisteen avulla, mikä algebrallisesti ilmaistuna tarkoittaa, että kolmannen asteen yhtälö $x^3 = 2$ ratkaistaan toisen asteen yhtälöitä vastaavien käyrien avulla. Kuitenkin analyyttisen geometrian tärkeistä työkaluista kreikkalaisilta puuttuivat kaltevuuskulman käsite sekä tekniikka manipuloida yhtälöitä sopivaan muotoon lisäinformaation hankkimiseksi. Enimmäkseen kreikkalaiset tutkivat käyriä oppiakseen algebraa, eivät niinkään päinvastoin hyödyntäneet algebraa käyrien esittämisessä.

Lähes kaksi vuosituhatta antiikin Kreikan kukoistuskauden jälkeen, vuoden 1630 aikoihin, René Descartes ja Pierre de Fermat tekivät saman havainnon, johon tämänkin opetuskokeilun työskentelysessioissa keskityttiin: yhtälöt ja käyrät (opetuskokeilussa suorat) vastaavat toisiaan. Descartes ja Fermat keksivät, että geometrisia ongelmia on mahdollista muuntaa algebrallisiksi koordinaattien avulla ja että useat ongelmat ratkeavat rutiininomaisesti algebrallisen manipulaation avulla. Descartes'n ja Fermat'n aikana ymmärrettiin, että kukin yhtälö määrittelee käyrän ja että polynomiyhtälön käsite oli edellytys algebrallisen käyrän käsitteen luomiselle. Descartes julkaisi vuonna 1637 kirjan *La Géométrie*, joka käsittelee suurelta osin 1500-luvun yhtälöteoriaa sekä ”yhtälöiden konstruktiota”, joka on nykyisin jo lähes unohduksiin painunut matematiikan osa-alue. Kirja ei siis nykyiseen muotoonsa kehittyneen analyyttisen geometrian näkökulmasta sisällä kovinkaan tärkeitä tuloksia, mutta sen sisällöt ovat tärkeä välivaihe analyyttisen geometrian kehityksessä.

Tyypillinen esimerkki yhtälön konstruoimisesta on jo edellä mainittu Menaikhmoksen konstruktio pituudelle $\sqrt[3]{2}$ paraabelin ja hyperbelin leikkauspisteen avulla. 1620-luvulla Descartes teki Menaikhmoksen konstruktiota yleisemmän havainnon: mikä tahansa kolmannen tai neljännen asteen yhtälö ratkeaa toisen asteen käyrien, paraabelin ja ympyrän, leikkauspisteiden avulla. Descartes piti löydöstään mullistavana ja siihen asti suurimpana saavutuksenaan. Hän ei kuitenkaan ollut kyseisen havainnon tekijänä ainoa laatuaan, sillä myös Fermat teki saman löydöksen Descartes'sta tietämättä eräässä julkaisemattomassa työssään 1629.

Descartes päättää La Géométrien seuraavalla tavalla (vapaasti käännettynä): ”On välttämätöntä seurata samaa menetelmää (kuin kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden tapauksissa) kaikkien ongelmien konstruktioissa, aina vain monimutkaisemmissa tapauksissa. Kuten matemaattisen sarjan tapauksessa, kun ensimmäiset kaksi tai kolme termiä on annettu, on helppo löytää loput.” Todellisuudessa yleisen konstruktion löytäminen n. asteen yhtälöille ei ollut lainkaan näin helppoa kuin Descartes kevyessä loppukaneetissaan antaa ymmärtää. Yritykset löytää tyydyttävä, yleinen konstruktio n. asteen yhtälöille sammuivat 1750-luvulla. Kuitenkin, vaikka etsinnät eivät haluttua lopputulosta tuottaneetkaan, matemaatikot onnistuivat etsintöjen aikana ennustamaan, että kaksi käyrää, jotka ovat m. ja n. astetta, leikkaavat nm pisteessä. Ensimmäisen kerran tämän periaatteen muotoili ilmeisesti Isaac Newton vuonna 1665. Nimekseen periaate sai myöhemmin Bézout´n lause ranskalaisen matemaatikon Étienne Bézout´n mukaan. Ennen kuin Bézout'n lause voidaan esittää ja perustella täsmällisesti, on kuitenkin tarpeellista tutustua sen takana olevaan teoriapohjaan.

7.4.1 Gaussin eliminointimenetelmä

Bézout'n lauseen mukaan kaksi käyrää, jotka ovat m. ja n. astetta, leikkaavat nm pisteessä. Tämä johtaa käänteiseen päätelmään, että yhtälön r(x) = 0, joka on astetta $k = m \cdot n$, ratkaisut olisivat löydettävissä sopivien m. ja n. asteen käyrien leikkauspisteistä. Polynomiyhtälöin ilmaistuna etsitään siis yhtälöitä

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0 \tag{1}$$

ja

$$\mathrm{q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \tag{2}$$

jotka ovat m. ja n. astetta ja joista eliminoimalla muuttuja y saadaan annettu yhtälö

$$\mathrm{r}(\mathrm{x}) = 0. \tag{3}$$

Tällä tavalla länsimaiset matematiikot kohtasivat ensimmäistä kertaa eliminoinnin ongelman, eli kuinka muuttuja y saadaan ”kadotettua” yhtälöistä. Kiinalaiset olivat ratkaisseet ongelman jo muutama vuosisata aikaisemmin, ja nykyisin menetelmää kutsutaan Gaussin eliminointimenetelmäksi Carl Friedrich Gaussin mukaan. Katsotaan lyhyesti läpi, kuinka kyseinen menetelmä toimii. Valitaan polynomiyhtälöt

$$a_0(x)y^m + a_1(x)y^{m-1} + \cdots + a_m(x) = 0, \tag{4}$$

$$b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + \cdots + b_n(x) = 0, \tag{5}$$

joissa $a_i(x)$ ja $b_j(x)$ ovat muuttujasta x riippuvia polynomeja, ja oletetaan, että $m \geq n$. Korkeimman asteen termi $a_0(x)y^m$ saadaan hävitettyä, kun ylempi yhtälö kerrotaan polynomilla $b_0(x)$ ja alempi yhtälö polynomilla $a_0(x)y^{m-n}$, ja yhtälöt vähennetään allekkain. Saadaan yhtälö

$$c_0(x)y^{m-1} + c_1(x)y^{m-2} + \cdots + c_{m-1}(x) = 0. \tag{6}$$

Kerrotaan yhtälö (6) polynomilla $a_0(x)y$ ja yhtälö (4) polynomilla $c_0(x)$, ja vähennetään yhtälöt jälleen allekkain, jolloin päädytään yhtälöön

$$d_0(x)y^{m-1} + d_1(x)y^{m-2} + \cdots + d_{m-1}(x) = 0. \tag{7}$$

Nyt on päädytty yhtälöpariin (6) ja (7), jossa molemmat yhtälöt ovat astetta m – 1, eli alempaa astetta kuin alkuperäinen yhtälö (4). Yhtälöparista (6) ja (7) eliminoidaan korkeimman asteen termi, kuten tehtiin yhtälöparille (4) ja (5). Näin jatketaan, kunnes jäljellä on etsitty, pelkkää muuttujaa x sisältävä yhtälö

$$r(x) = 0.$$

Eliminaatiomenetelmää käytettäessä on tärkeää huomata kaksi asiaa: ensiksi eliminaatio m. ja n. asteen yhtälöiden välillä antaa yleensä tulokseksi mn. asteen yhtälön, ja toiseksi mn. asteen yhtälöllä on mn juurta. Jälkimmäinen väite pätee ainoastaan, kun kompleksiluvut otetaan mukaan. Entä mitä ensimmäinen väite vaatii toteutuakseen? Jos esimerkiksi edellä esitetyt yhtälöt (1) ja (2) esittävät yhdensuuntaisia suoria, yhtälö (3) on 0. astetta, eikä sillä ole ratkaisuja. Ratkaisu tähän ongelmaan löytyy projektiivisesta geometriasta, jonka periaatteiden mukaisesti yhdensuuntaisten suorien voidaan ajatella leikkaavan äärettömyydessä.

Projektiviinen ja analyyttinen geometria alkoivat kehittyä suurin piirtein samanaikaisesti 1600-luvulla, mutta valitettavasti vasta 1800-luvulla ymmärrettiin, että kyseiset matematiikan osa-alueet ovat toisilleen tarpeellisia. Tähän asti projektiivinen geometria kehittyi ilman koordinaatteja, ja kaikki yritykset todistaa Bézout’n lause kaatuivat tarpeeseen löytää toimiva menetelmä äärettömyyden pisteillä laskemiseen. Tämän tuloksena Bézout’n lause, joka lopulta osoittautui yhtälöiden konstruktioteorian päätulokseksi, todistettiin pitävästi vasta kauan sen jälkeen, kun matemaatikoiden kiinnostus kyseistä teoriaa kohtaan oli jo pitkälti hiipunut.

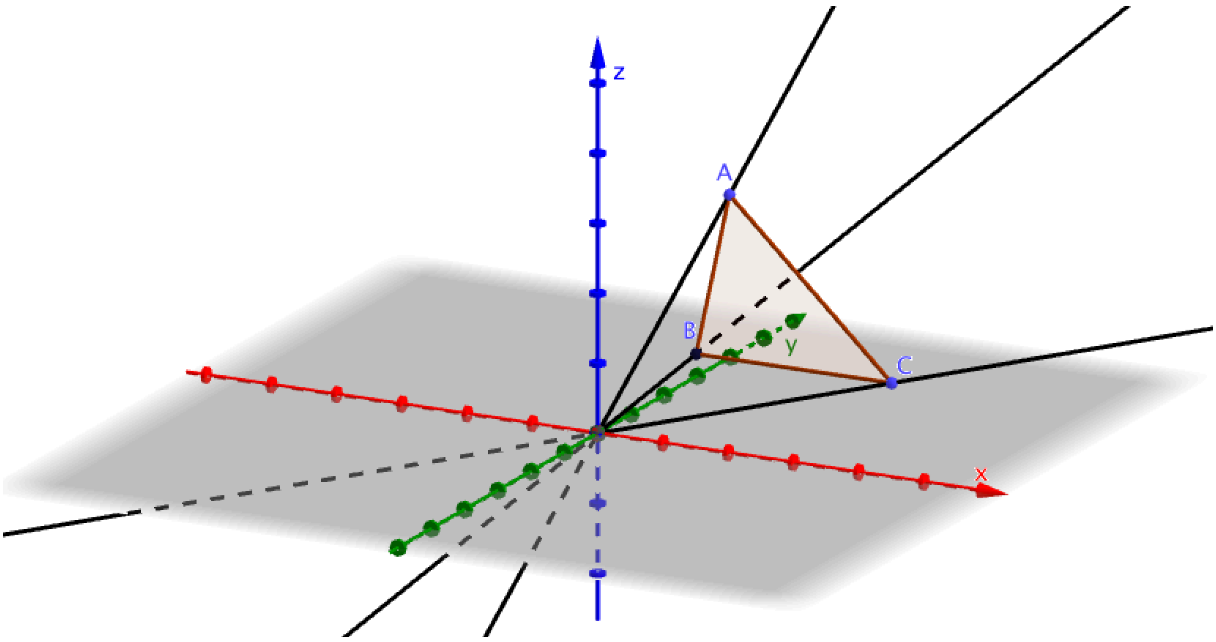
7.4.2 Homogeeniset koordinaatit

Esittämällä reaalisen projektiotason, jota merkitään $\mathbb{R}P^2$, pisteet origon O kautta kulkevien suorien avulla saadaan kyseisten pisteiden koordinaatit kolmiulotteisen avaruuden koordinaateilla (x, y, z) lausuttuna. Kuvassa 8 on esitetty kolmiulotteisen avaruuden pisteet A = (1, 2, 3), B = (1, 1, 1) ja C = (4, 1, 1), jotka $\mathbb{R}P^2$:n alkioina esitettyinä vastaavat suoria u(1, 2, 3), v(1, 1, 1) ja w(4, 1, 1), joissa u, v, w $\in \mathbb{R}$. Projektiotaso $\mathbb{R}P^2$ siis muodostuu origon kautta kulkevista suorista. Tämän koordinaattisysteemin keksivät August Ferdinand Möbius (1827) ja Julius Plücker (1830), ja nimekseen systeemi sai homogeeniset koordinaatit, koska jokainen algebrallinen käyrä tasossa $\mathbb{R}P^2$ voidaan esittää homogeenisena polynomiyhtälönä p(x, y, z) = 0. Yksinkertaisin tapaus on projektiosuora, joka voidaan esittää origon kautta kulkevana tasona. Näin ollen suoran yhtälö on muotoa

$$ax + by + cz = 0$$

joillakin reaaliluvuilla $a, b, c \neq 0$. Yhtälöä kutsutaan ensimmäistä astetta homogeeniseksi, koska yhtälön kaikki nollasta eroavat termit ovat ensimmäistä astetta.

Tason $\mathbb{R}P^2$ pisteen P homogeeniset koordinaatit eivät siis ole yksikäsitteiset, vaan pisteen P antavat kaikki karteesiset pisteet $(x, y, z) \neq (0,0,0)$, jotka ovat suoralla OP. Tästä seuraa, että jos karteesinen piste (a, b, c) antaa projektiotason $\mathbb{R}P^2$ pisteen P, eli piste sijaitsee suoralla OP, myös karteesinen piste (ta, tb, tc), t $\neq$ 0, antaa saman pisteen P, sillä (ta, tb, tc) sijaitsee suoralla OP millä tahansa reaaliluvulla t. Tutkitaan tämän ajatuksen pohjalta, kuinka tavallista tasoa voidaan tarkastella homogeenisten koordinaattien avulla. Otetaan mikä tahansa avaruuden taso T, joka ei kulje



Kuva 8: Keskusprojektio

origon kautta, ja valitaan tasosta T satunnainen piste. Olkoon valittu piste nimeltään a ja pisteen homogeenista esitystä vastaava origon kautta kulkeva suora nimeltään l. Pistettä a vastaava $\mathbb{RP}^2$:n alkio, eli karteesinen suora l, on yksikäsitteinen, mutta homogeeninen koordinaattiesitys ei, sillä kaikki suoran l pisteet vastaavat homogeenisesti pistettä a. Lisäksi $\mathbb{RP}^2$:ssa on alkioita, jotka vastaavat tason T kanssa yhdensuuntaisia suoria. Nämä alkiot voidaan tulkita tason T suhteen äärettömyydessä sijaitsevina pisteinä.

Siirrytään seuraavaksi yksittäisistä pisteistä tarkastelemaan käyriä tasossa $\mathbb{RP}^2$. Jos yhtälö p(x, y, z) = 0 esittää käyrää tasossa $\mathbb{RP}^2$, täytyy polynomin p toteuttaa yhtälö

$$\mathrm{p(tx, ty, tz)} = 0$$

kaikilla reaaliluvuilla t. Tästä edelleen seuraa, että

$$\mathrm{p(tx, ty, tz)} = \mathrm{t^n p(x, y, z)}$$

jollakin n, jota kutsutaan polynomin p asteeksi. Tällöin sanotaan, että p on homogeeninen astetta n. Tyypillinen esimerkki on yhtälö

$$x^2 - yz = 0,$$

joka on homogeeninen toista astetta. Valitaan z = 1, jotta käyrää voidaan tarkastella tavallisessa tasossa. Saadaan $y = x^2$, joka esittää paraabelia tasossa z = 1. Näin ollen $x^2 - yz = 0$ on paraabelin projektiivinen täydentymä äärettömyyden pisteellä, joka xy-tason suuntaisen projektiotason tapauksessa on y-akseli. Lisäksi $x^2 - yz = 0$ on myös hyperbelin projektiivinen täydentymä, kun projektiotasoksi valitaan yz-tason suuntainen taso. Esimerkiksi, kun valitaan x = 1, saadaan hyperbeli yz = 1.

Nostetaan toisena esimerkkinä esiin tutkimuksen tehtävä 6d, jossa oppilaiden piti ratkaista yhtälöpari

$$x + y = 2 \tag{8}$$

$$x + y = 5. \tag{9}$$

Oppilaat ratkaisivat tehtävän piirtämällä suorat Geogebra-koordinaatistoon. Huomatessaan, että suorat ovat yhdensuuntaiset, eli suorat eivät leikkaa, he tekivät aivan oikean johtopäätöksen, ettei yhtälöparilla ole ratkaisua. Tämä pätee reaalilukujen muodostamassa tasossa. Projektiivisesti voidaan kuitenkin ajatella suorien leikkaavan äärettömyydessä, eli yhtälöparilla on yksi ratkaisu. Osoitetaan tämä täydentämällä yhtälöt ensin projektiiviseen muotoon. Lisätään muuttuja z siten, että kukin yhtälöiden termi on ensimmäistä astetta. Saadaan

$$x + y = 2z \tag{10}$$

$$x + y = 5z. \tag{11}$$

Alkuperäisissä yhtälöissä, joissa z = 1, yhtälöt esittävät suoria tasossa z = 1. Yhtälöt (10) ja (11) esittävät suorien projektiivisia täydentymiä äärettömyyden pisteillä. Tapauksessa z = 1 suorat täydentyvät äärettömyyden pisteellä, jonka määrää suora $y = -x$, mikä nähdään, kun asetetaan z = 0 yhtälöissä (10) ja (11). Tämä on suorille yhteinen piste, eli yhtälöparin (8) ja (9) projektiivinen ratkaisu on piste t(1, -1, 0), $t \in \mathbb{R}$.

Bézout'n lauseen väite, että m. ja n. asteen käyrät leikkaavat toisensa nm pisteessä, vaatii täsmällisen määrän äärettömyyden pisteitä. Homogeeniset koordinaatit yksinkertaistavat tätä ongelmaa muuttaen tarkastelun homogeenisiin polynomeihin. Olkoot C_m käyrä, jota vastaa m. asteen homogeeninen yhtälö

$$p_m(x, y, z) = 0,$$

ja C_n käyrä, jota vastaa n. asteen homogeeninen yhtälö

$$p_n(x, y, z) = 0.$$

Tällöin yhtälö

$$r_{mn}(x, y) = 0,$$

joka saadaan eliminoimalla muuttuja z ylemmistä yhtälöistä, on homogeeninen astetta mn. Ilmeisesti Bézout'n lauseen homogeeninen muotoilu kera täsmällisen todistuksen esitettiin vasta 1800-luvun lopulla – vaikkeivat lauseen muotoilu ja todistus ole mitenkään monimutkaisia.

Bézout'n lauseeseen täytyy lisätä ilmeinen oletus, että käyrillä C_m ja C_n ei saa olla yhteisiä osia. Algebrallisesti ilmaistuna tämä tarkoittaa, että polynomeilla p_m ja p_n ei ole yhteisiä, vakiosta poikkeavia tekijöitä. Näin Bézout'n lause, joka voidaan todistaa homogeenisten koordinaattien avulla, saa seuraavan muodon:

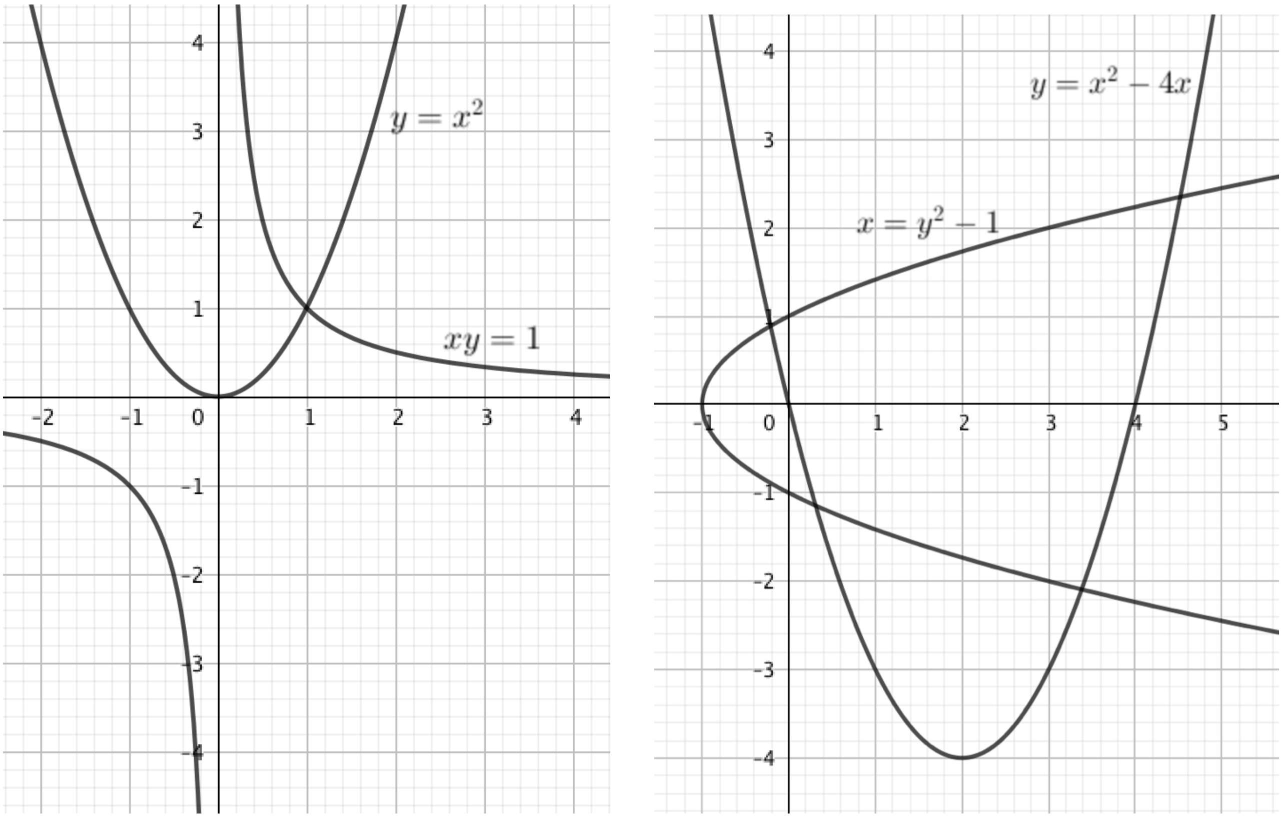
Olkoot C_m ja C_n käyriä, joilla ei ole yhteisiä osia, ja joita vastaavat m. ja n. asteen homogeeniyhtälöt $p_m(x, y, z) = 0$ ja $p_n(x, y, z) = 0$. Tällöin käyrien C_m ja C_n leikkauspisteet saadaan yhtälöstä $r_{mn}(x, y) = 0$, joka on astetta mn.

Tarkastellaan homogeenisia koordinaatteja hyödyntäen esimerkkiä, joka havainnollistaa kaikkia kolmea käyrien leikkauspisteiden tyyppiä: reaalinen, kompleksinen ja äärettömyyden piste. Otetaan tarkasteluun yhtälöpari

$$y = x^2 \tag{12}$$

$$xy = 1. \tag{13}$$

Bézout'n lauseen mukaisesti yhtälöparin mukaisilla käyrillä on kaikkiaan neljä leikkauspistettä. Muokataan yhtälö projektiiviseen muotoon lisäämällä muuttuja z. Yhtälöpari saa muodon



Kuva 9: Käyrillä $y = x^2$ ja $xy = 1$ on yksi reaalinen leikkauspiste, kaksi kompleksista leikkauspistettä sekä yksi leikkauspiste äärettömyydessä. Käyrillä $y = x^2 - 4x$ ja $x = y^2 - 1$ on neljä reaalista leikkauspistettä.

$$yz = x^2 \tag{14}$$

$$xy = z^2. \tag{15}$$

Valinnalla z = 1 (alkuperäinen yhtälöpari) ylempi yhtälö esittää paraabelia ja alempi yhtälö hyperbeliä tasossa z = 1. Siispä yhtälöt (14) ja (15) esittävät paraabelin ja hyperbelin projektiivisia täydentymiä äärettömyyden pisteillä, jotka xy-suuntaisen tason tapauksessa ovat y-akseli yhtälölle (14) sekä x- ja y-akselit yhtälölle (15). Tämä nähdään asettamalla z nollaksi yhtälöissä (14) ja (15). Yhtälöillä on siis yhteinen äärettömyyden piste, y-akseli. Projektiivisesti yhtälöparin yksi ratkaisu on siis suora t(0, 1, 0), t∈ℝ.

Sijoittamalla ylempi yhtälö (12) alempaan (13) saadaan

$$x^3 = 1, \tag{16}$$

jonka reaalinen ratkaisu on x = 1. Sijoittamalla tämä kumpaan tahansa yhtälöön saadaan leikkauspisteen toiseksi koordinaatiksi y = 1. Esimerkiksi jakokulman sekä löydetyn juuren avulla yhtälö (16) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

Selvitetään jälkimmäisen tekijän juuret:

$$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Nämä ovat kompleksisten leikkauspisteiden x-koordinaatit. Selvitetään vastaavat y-koordinaatit sijoittamalla x:n arvot yhtälöön (12). Saadaan

$$y=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

ja

$$y=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Nyt käyrille on löydetty neljä leikkauspistettä, eli yhtälöparilla on neljä ratkaisua:

(1, 1), $(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3},-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}i\sqrt{3})$ sekä äärettömyyden piste t(0, 1, 0), t∈ℝ.

Kuvassa 9 on esitetty vertailun vuoksi toisen asteen käyrät $y=x^2-4x$ ja $x=y^2-1$. Molemmat käyrät ovat toista astetta, joten Bézout'n lauseen mukaisesti leikkauspisteitä on neljä, kuten edellisen esimerkin tilanteessakin. Kaikki neljä leikkauspistettä ovat tässä tapauksessa reaalisia.

7.4.3 Algebran peruslause – kohti Bézout'n lauseen täsmällistä todistusta

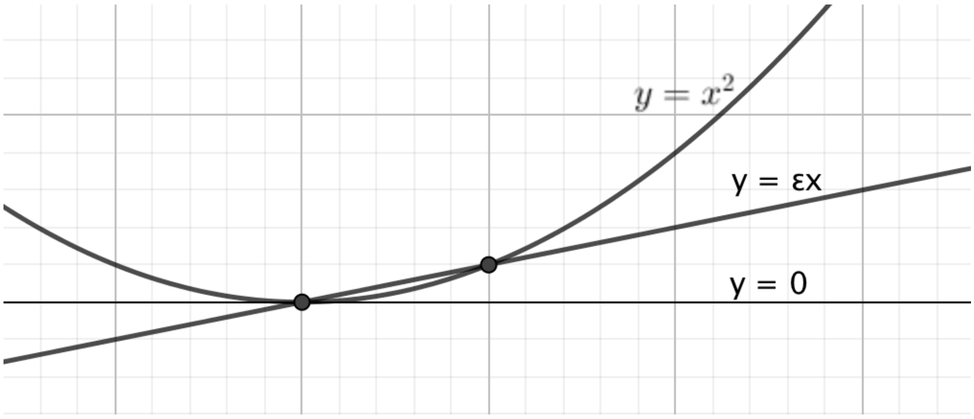
Algebrallisten käyrien leikkauspisteiden ja polynomiyhtälöiden ratkaisujen välillä on läheinen yhteys, mikä huomattiin jo Menaikhmoksen $\sqrt[3]{2}$-konstruktion yhteydessä, jossa paraabeli ja hyperbeli leikkaavat, eli määritettäessä yhtälön $x^3=2$ juurta. Suorin yhteys näkyy polynomikäyrän

$$y=p(x) \tag{17}$$

tapauksessa, jonka leikkauspisteet x-akselin kanssa ovat täsmälleen samat kuin yhtälön

$$p(x)=0 \tag{18}$$

reaalijuuret. Jos yhtälöllä (18) on k reaalijuurta, käyrällä (17) on k leikkauspistettä x-akselin kanssa. Leikkauspisteet täytyy laskea samalla tavalla kuin juuret, eli monikerrat huomioiden. Yhtälön (18) juuri on μ-kertainen, jos tekijä (x – r) esiintyy μ kertaa polynomissa p(x), ja juuri r lasketaan tällöin μ kertaa.

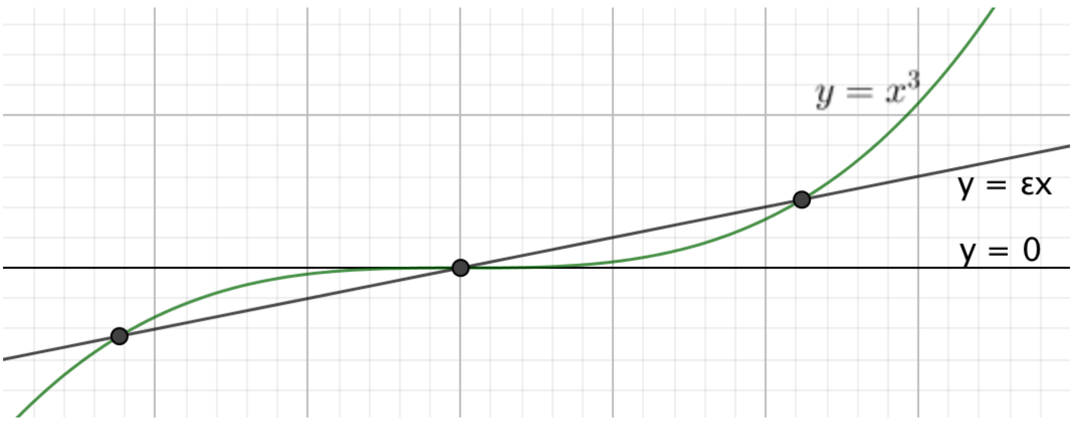


Kuva 10: Kaksinkertainen leikkauspiste.

Tämä tapa laskea juuria on myös geometrisesti luonteva, sillä jos esimerkiksi käyrä y = p(x) koskettaa x-akselia kaksinkertaisesti nollassa, suora y = εx, joka on lähellä akselia y = 0, koskettaa käyrää kahdesti – kerran lähellä akselin leikkauspistettä ja kerran täsmälleen leikkauspisteessä. Paraabelin $y = x^2$ ja akselin y = 0 leikkauspiste (kuva 10) voidaan näin ollen tulkita kahtena päällekkäisenä pisteenä, johon myös leikkauspisteet suoran y = εx kanssa päätyvät, kun epsilonin annetaan mennä nollaan. Vastaavalla tavalla kolmas moninkerta voidaan hahmottaa kolmen erillisen leikkauspisteen raja-arvona, esimerkiksi suoran y = εx ja käyrän $y = x^3$ leikkauspisteiden avulla (kuva 11).

Idea näyttää kuitenkin rikkoutuvan neljännen kertaluvun tapauksessa, sillä y = εx ja $y = x^4$ leikkaavat ainoastaan kahdessa pisteessä, x = 0 ja $x = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Selitys on se, että tässä tilanteessa reaalijuurien lisäksi löytyy myös kaksi kompleksijuurta, joita ei voi jättää huomiotta, jos juuria halutaan saada geometrisesti ”oikea” määrä. Kun polynomia $x^4 - \varepsilon x$ lähdetään jakamaan tekijöihin nollakohtien x = 0 ja $x = \sqrt[3]{\varepsilon}$ avulla, saadaan

$$x^4 - \varepsilon x = (x - 0)\left(x - \sqrt[3]{\varepsilon}\right)\left(x^2 + x\sqrt[3]{\varepsilon} - \sqrt[3]{\varepsilon^2}\right).$$



Kuva 11: Kolminkertainen leikkauspiste.

Ratkaistaan viimeisen tulon tekijän nollakohdat:

$$x^2 + x\sqrt[3]{\varepsilon} - \sqrt[3]{\varepsilon^2} = 0,$$

josta

$$x = \frac{-\sqrt[3]{\varepsilon} \pm \sqrt{\sqrt[3]{\varepsilon^2} - 4 \cdot \sqrt[3]{\varepsilon^2}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{\varepsilon} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\varepsilon} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\varepsilon} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}\sqrt[3]{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\varepsilon}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right).$$

Etsityt kompleksijuuret ovat siis

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\varepsilon}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right).$$

Nyt juuria on asteluvun mukainen määrä, neljä kappaletta, kuten haluttiinkin.

Algebran peruslauseen mukaan n. asteen positiiviasteisella kompleksilukukertoimisella polynomilla on kertaluvut huomioiden n juurta, ja siksi polynomikäyrä leikkaa x-akselin n kohdassa. Jotta juuria olisi n kappaletta, täytyy tarkasteluun ottaa mukaan myös käyrät, joille x ja y ovat kompleksisia. Bézout'n lause, joka kertoo, että m. ja n. asteen käyrät C_m ja C_n leikkaavat toisensa mn pisteessä, on yksi algebran peruslauseen seurauksista, jotka houkuttelivat 1700-luvun matemaatikkoja ottamaan kompleksiluvut mukaan käyrien teoriaan ennen kuin kompleksilukuja oikeastaan edes ymmärrettiin – ja jopa ennen kuin algebran peruslause edes oli todistettu. Algebran peruslauseelle ensimmäisen kunnollisen todistusyrityksen esitti ranskalainen Jean Le Rond d'Alembert, jonka nimellä lause tunnetaan ranskalaisella kielialueella. Menestyksellisemmin lauseen todisti Carl Friedrich Gauss. Hän esitti ensimmäisen hyväksyttävän todistuksen lauseelle väitöskirjassaan vuonna 1799 sekä palasi myöhemmin aiheeseen esittäen lauseelle vielä kolme muuta todistusta.

Kuten aikaisemmin todettiin, jos avuksi otetaan homogeeniset koordinaatit äärettömyyden pisteiden huomioimiseen, käyrien C_m ja C_n leikkauspisteet vastaavat kyseisistä yhtälöistä eliminaatiomenetelmällä saadun yhtälön $r_{mn}(x,y) = 0$ ratkaisuja, joka on homogeeninen astetta mn. Nyt algebran peruslausetta voidaan käyttää osoittamaan, että $r_{mn}(x,y) = 0$ on mn lineaarisen tekijän tulo.

Kahden muuttujan polynomin $r_{mn}(x,y)$ homogeenisuudesta seuraa, että $r_{mn}(x,y) = y^{mn} r_{mn}\left(\frac{x}{y}, 1\right)$. Polynomi $r_{mn}\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ on yhden muuttujan $w \coloneqq \frac{x}{y}$ polynomi, joten algebran peruslauseen mukaan yhtäsuuruus

$$y^{mn} r_{mn}\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y^{mn} \prod_{i=1}^{p} (b_i \frac{x}{y} - a_i)$$

pätee, sillä polynomin $r_{mn}\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ aste $p \leq mn$ muuttujalle $\frac{x}{y}$. Toisaalta

$$r_{mn}(x, y) = y^{mn-p} \prod_{i=1}^{p} (b_i\, x - a_i y) = \prod_{i=1}^{mn} (b_i\, x - a_i y),$$

koska jokainen tekijä y on muotoa $b_i x - a_i y$, missä $b_i = 0$ ja $a_i = 1$. Näin ollen yhtälöllä $r_{mn}(x, y) = 0$ on *mn* ratkaisua, ja käyrillä C_m ja C_n on *mn* leikkauspistettä mukaan lukien mahdolliset moninkerrat. Näin olemme pääpiirteissään käyneet läpi Bézout'n lauseen todistuksen.

Lähteet

Aro, M. & Aro, T. 2013. Minäpystyvyys ja oppimisvaikeusinterventiot. Kasvatustieteiden laitos/Erityispedagogiikka, Jyväskylän yliopisto & Niilo Mäki Instituutti. Verkossa saatavilla: https://www.aka.fi/globalassets/awanhat/documents/tiedostot/lapset/seminaari-22.05.2013/8_sa_aro_minapystyvyys-ja-oppimisvaikeusinterventiot.pdf. Luettu 12.7.2019.

Bandura, A., & Schunk, D. H. 1981. Cultivating competence, self-efficacy, and intrinsic interest through proximal self-motivation. Journal of Personality and Social Psychology, 41, 586–598. Verkossa saatavilla: https://pdfs.semanticscholar.org/b1e4/d476c857333b9a0afdb1428eda27f6d26940.pdf. Luettu 12.7.2019.

Flegg, G. (toim.) 1989. Karttunen, H. (suom.) 2002. Lukujen historia – Sormilla laskemisesta tietokoneisiin. Art House.

Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. 2018. Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä.

Kaartinen, S. & Kumpulainen, K. 2012. The emergence of mathematizing as a culture of participation in the early childhood classroom. European Early Childhood Education Research Journal.

Kaartinen, S. & Latomaa, T. 2012. Children as Mathematicians: The Interplay between Discourse Structure, Mathematicising, and the Participatory Approach.

Lehrbäck, J. 2019. Matematiikan historian luentoja. Jyväskylän yliopisto.

Lehtinen, M. 2014. Matematiikan historian luentoja 2014, luentomoniste.

Meiers, M. 2005. Language in the mathematics classroom. ResearchGate. Verkossa saatavilla: https://www.researchgate.net/publication/44296277_Managing_student_behaviour_in_the_classroom. Luettu 21.7.2019.

O´Connor, J. J. & Robertson, E. F. 2019. MacTutor History of Mathematics archive. School of Mathematics and Statistics & University of St Andrews, Scotland. Verkossa saatavilla: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html. Luettu 6.8.2019.

Opetushallitus. 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet.

Pongsakdi, N. 2017. Bridging mathematics with word problems. Turun yliopiston julkaisuja, sarja B, osa 435. Verkossa saatavilla: https://www.utupub.fi/handle/10024/134581. Luettu 21.7.2019.

Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen P. (toim.) 1997. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylä.

Saloviita, T. 2014. Yhteistoiminnallinen oppiminen ja osallistava kasvatus. PS-kustannus.

Stillwell, J. 2010. Mathematics and its history. 3. painos, Springer. New York.

Tehtävien laatimisessa käytetyt oppikirjat

Asikainen, K., Fälden, H., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. 2008. Tuhattaituri 5b. 1.–4. painos, Otava.

Asikainen, K., Fälden, H., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. 2008. Tuhattaituri 6b. 1.–3. painos, Otava.

Karppinen, J., Kiviluoma, P., Tammi, M. & Urpiola, T. 2009. Tuhattaituri 4a. Otava.

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Sankilampi, T., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. 2011. Laskutaito 7. 6.–8. painos, WSOY.

Laurinolli, T., Luoma-aho, E., Sankilampi, T., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. 2010. Laskutaito 9. 1.–4. painos, WSOY.

Liitteet

1. Alkukyselylomake
2. Loppukyselylomake
3. Ensimmäisen työskentelysession tehtävämoniste
4. Toisen työskentelysession tehtävämoniste
5. Huoltajan suostumuslomake

ALKUKYSELY

Nimi: ______________________________

1. Millä luokalla olet?

   a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

2. Oletko käyttänyt aikaisemmin Geogebraa?

   a) Kyllä. b) En.

3. Pidätkö ryhmätöistä?

   a) Pidän. b) En pidä.

   Perustelu:

   ____

   ____

4. Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.

   a) koordinaatisto =

   ____

   ____

   b) yhtälö =

   ____

   ____

   c) suorien leikkauspiste =

   ____

   ____

5. Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.

LOPPUKYSELY Nimi: ___________________________

1. Valitse kaikki vaihtoehdot, jotka kuvaavat ajatuksiasi ryhmätyöskentelykertojen jälkeen.

   Eri ikäisten oppilaiden kanssa työskentely oli

   a) helppoa
   b) haastavaa
   c) opettavaista
   d) minulle uusi juttu
   e) minulle ennestään tuttua
   f) tylsää
   g) kivaa
   h) minua vähän jännitti

2. Mikä oli mukavaa ryhmätyöskentelyssä eri ikäisten kanssa?

   ____

3. Mistä et pitänyt ryhmätyöskentelyssä eri ikäisten kanssa?

   ____

4. Mitä uutta opit tutkimuksen aikana

   a) itseäsi nuoremmilta oppilailta?

      ____

      ____

      ____

   b) itseäsi vanhemmilta oppilailta?

      ____

      ____

      ____

5. Selitä, mitä seuraavat asiat tarkoittavat ja kerro mihin niitä tarvitaan.
   a) koordinaatisto =

   b) yhtälö =

   c) suorien leikkauspiste =

6. Keksi itse yhtälö ja ratkaise se.

Tutkimussessio 1 Ryhmäläisten nimet: ___________________________________

Tehtävä 1

Selittäkää sanat. Jokainen ryhmäläinen selittää jokaisen sanan sen tiedon perusteella, mitä hän on matematiikan tunneilla tähän mennessä oppinut. Jos et keksi lisättävää edellisiin selityksiin, voit vaikkapa kertoa, mihin kyseistä asiaa matematiikassa käytetään. Aloittakaa ryhmän nuorimmasta jäsenestä ja edetkää ikäjärjestyksessä. Keskustelkaa lopuksi, mitä uutta opitte, kun kuuntelitte muiden ryhmäläisten selityksiä.

a) koordinaatisto
b) x-koordinaatti ja y-koordinaatti
c) suora
d) suorien leikkauspiste
e) yhtälö
f) yhtälön ratkaisu

Tehtävä 2

Piirtäkää pisteet Geogebra-koordinaatistoon:

(1, 0) (-2, 4) (1, 3) (3, 1) (0, 0) (-5, -3) (4, -4)

Tehtävä 3

Piirtäkää Geogebralla suora, joka kulkee pisteiden (-5, 4) ja (3, -2) kautta.

Piirtäkää Geogebralla suora, joka kulkee pisteiden (-4, -2) ja (0, 2) kautta.

Missä pisteessä suorat leikkaavat?

Tehtävä 4

Peli: laivanupotus

Ohjeet:

Muodostakaa kaksi paria siten, että ryhmän vanhin ja nuorin jäsen muodostavat yhden joukkueen ja keskimmäiset jäsenet toisen. Kummallekin joukkueelle jaetaan yksi paperinen laivanupotuskoordinaatisto. Toisena koordinaatistona käytetään Geogebra-koordinaatistoa. Kumpikin joukkue asettaa Geogebra- koordinaatistoon omat laivansa (omien laivojen sijaintia ei saa näyttää vastustajille!). Paperikoordinaatistoon merkitään ammutut ammukset (merkitkää osumia rasteilla ja ohi menneitä ympyröillä).

Laivat asetetaan [-4,4] x [-4,4] -koordinaatiston pisteisiin, ei ruutuihin. Yhdistäkää laivan pisteet janoilla, jolloin laivan hahmottaminen on helpompaa. Laivat eivät saa koskettaa toisiaan. Laivat voivat olla vinottain, pystysuunnassa tai vaakasuunnassa.

Asettakaa koordinaatistoon seuraavat laivat:

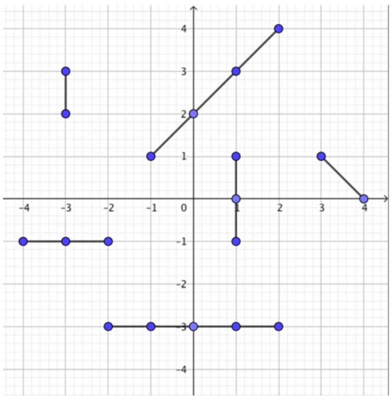
1 kpl 5 pisteen mittainen

1 kpl 4 pisteen mittainen

2 kpl 3 pisteen mittainen

2 kpl 2 pisteen mittainen

Esimerkki:



Peli alkaa, kun molemmat joukkueet ovat asettaneet laivansa koordinaatistoon. Kumpikin joukkue ilmoittaa vuorotellen koordinaatin, esimerkiksi (1, -4), johon haluaa ampua. Vastustajajoukkue kertoo, osuiko ammus. Jos ammus osuu vastustajan laivaan, osuman ampunut joukkue saa lisävuoron.

Kun jokaiseen laivan pisteeseen on osunut ammus, laiva uppoaa. Silloin laivan menettänyt joukkue ilmoittaa laivan uponneen. Pelin voittaja on se joukkue, joka on ensimmäisenä saanut upotettua vastustajan koko laivaston.

<u>Tehtävä 5</u>

Viivin koti sijaitsee koordinaatiston pisteessä (-2, -2). Konstan koti sijaitsee koordinaatiston pisteessä (4, 2). Viivi kävelee Konstan luo kyläilemään suorinta mahdollista reittiä. Puolivälissä matkaa hän ohittaa Siirin talon. Missä Siiri asuu? Käyttäkää Geogebran koordinaatistoa apuna tehtävän ratkaisemisessa. Ratkaisu:

Tehtävä 6

Muodostakaa kaksi paria siten, että ryhmän vanhin ja nuorin jäsen muodostavat parin 1 ja keskimmäiset jäsenet parin 2.

Pari 1 piirtää Geogebran koordinaatistoon haluamansa kuvion (esimerkiksi tähti, ympyrä, mökki, ...). Kuvaa ei saa näyttää parille 2. Pari 1 selittää piirtämänsä kuvan parille 2, joka piirtää ohjeiden mukaisesti kuvan omaan Geogebra-koordinaatistoonsa. Tarkistakaa lopuksi tuliko kuvioista samanlaiset.

Tehkää tehtävä myös toisin päin, eli pari 2 keksii kuvion, ja pari 1 piirtää sen ohjeiden mukaan.

Tutkimussessio 2

Ryhmäläisten nimet: ___________________________________

Tehtävä 1

Ville ostaa kaupasta päärynöitä ja appelsiineja. Hän ostaa yhteensä kuusi hedelmää.

a) Kuinka monta päärynää ja appelsiinia Ville voi ostaa? Luetelkaa kaikki vaihtoehdot taulukkoon.

päärynöiden määrä	appelsiinien määrä

b) Villen ostamien hedelmien määrät voidaan esittää pisteinä koordinaatistossa. Valitaan, että
päärynöiden määrä = x-koordinaatti ja
appelsiinien määrä = y-koordinaatti.
(Esimerkki: jos Villellä on 3 päärynää ja 5 appelsiinia, saadaan piste (3, 5).)

Täydentäkää alla oleva taulukko ja piirtäkää lopuksi pisteet Geogebra-koordinaatistoon.

x = päärynöiden määrä	y = appelsiinien määrä	(x, y)
0	6	(0, 6)

Tehtävä 2

Samilla on kukkarossaan rahaa kaksi kertaa niin paljon kuin Riitalla.

a) Luetelkaa seuraavaan taulukkoon viisi eri vaihtoehtoa, kuinka paljon rahaa Samilla ja Riitalla voi olla.

Sami	Riitta

b) Valitaan, että

Samin rahamäärä = x-koordinaatti ja

Riitan rahamäärä = y-koordinaatti.

Täydentäkää taulukko ja piirtäkää lopuksi pisteet Geogebra-koordinaatistoon.

x = Samin rahamäärä	y = Riitan rahamäärä	(x, y)

c) Piirtäkää suora pisteiden kautta.

d) Samilla on 24,60 euroa rahaa. Kuinka paljon rahaa Riitalla on? Lukekaa vastaus koordinaatistoon piirtämältänne suoralta. Tarkistakaa laskemalla.

Vastaus:

e) Riitalla on rahaa 5,40 euroa. Kuinka paljon rahaa Samilla on? Lukekaa vastaus koordinaatistoon piirtämältänne suoralta. Tarkistakaa laskemalla.

Vastaus:

Tehtävä 3

Kirsi tekee limonadisekoitusta, johon tulee Coca-Colaa ja Jaffaa. Hän tekee juomaa yhteensä 3 litraa.

a) Luetelkaa seuraavaan taulukkoon viisi eri vaihtoehtoa, kuinka paljon Coca-Colaa ja Jaffaa limonadisekoitukseen voi tulla.

Coca-Cola	Jaffa
1,75 litraa	1,25 litraa

b) Valitaan, että

Coca-Colan määrä = x-koordinaatti ja

Jaffan määrä = y-koordinaatti.

Täydentäkää taulukko ja piirtäkää lopuksi pisteet Geogebra-koordinaatistoon.

x = Coca-Colan määrä	y = Jaffan määrä	(x, y)

c) Piirtäkää suora pisteiden kautta.

d) Jos Kirsi laittaa Coca-Colaa 0,35 litraa, kuinka paljon Jaffaa tarvitaan? Lukekaa vastaus piirtämältänne suoralta.

Vastaus:

e) Jos Kirsi laittaa Jaffaa 1,15 litraa, kuinka paljon Coca-Colaa tarvitaan? Lukekaa vastaus piirtämältänne suoralta.

Vastaus:

Tehtävä 4

Yhtälöpalapeli

Tehtävä 5

a) Lukujen summa on 12 ja osamäärä 2. Mitkä luvut ovat?

Vastaus:

b) Lukujen erotus on 2 ja tulo 15. Mitkä luvut ovat?

Vastaus:

Tehtävä 6

Mitä ovat luvut x ja y?

a) $x + y = 7$

$x - y = 1$

b) $x + y = 8$

$x \cdot y = 15$

c) $x - y = 5$

$x : y = 2$

d) $x + y = 2$

$x + y = 5$

Tehtävä 7

a) Tarkastellaan tehtävän 6a yhtälöä $x + y = 7$. Täydentäkää taulukko. Valitkaa ensin haluamanne arvot tuntemattomalle x, ja laskekaa tämän jälkeen tuntemattoman y arvot.

x	y	(x, y)
2	5	(2, 5)

Piirtäkää Geogebra-koordinaatistoon taulukkoon luettelemanne pisteet (x, y). Piirtäkää suora pisteiden kautta.

b) Tarkastellaan tehtävän 6a yhtälöä $x - y = 1$. Täydentäkää taulukko. Valitkaa ensin haluamanne arvot tuntemattomalle x, ja laskekaa tämän jälkeen tuntemattoman y arvot.

x	y	(x, y)

Piirtäkää Geogebra-koordinaatistoon taulukkoon luettelemanne pisteet (x, y). Piirtäkää suora pisteiden kautta.

c) Lukekaa a- ja b-kohdassa piirtämienne suorien leikkauspisteen koordinaatit. Mitä huomaatte, kun vertaatte leikkauspisteen koordinaatteja tehtävän 6a ratkaisuun?

Vastaus:

Tehtävä 8

a) Tehtävässä 7 piirsitte koordinaatistoon yhtälöitä $x + y = 7$ ja $x - y = 1$ vastaavat suorat piirtämällä pisteitä koordinaatistoon. Suoran saa piirrettyä myös syöttämällä suoran yhtälön suoraan Geogebran alalaidan tekstikenttään. Kokeilkaa piirtää samat suorat $x + y = 7$ ja $x - y = 1$ myös tällä tavalla.

b) Piirtäkää tehtävän 6b yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon. Lukekaa suorien leikkauspisteen koordinaatit. Saitteko saman vastauksen kuin tehtävässä 6b?

Vastaus:

c) Piirtäkää tehtävän 6c yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon. Lukekaa suorien leikkauspisteen koordinaatit. Saitteko saman vastauksen kuin tehtävässä 6c?

Vastaus:

d) Mitä havaitsette, kun piirrätte tehtävän 6d yhtälöitä vastaavat suorat?

Vastaus:

Osallistumislupa pro gradu -tutkimukseen

Hei!

Olen neljännen vuoden matematiikan, fysiikan ja kemian aineenopettajaopiskelija Jyväskylän yliopistosta. Suoritan tutkintoni lopputyötä (pro gradu) varten tutkimuksen 4.–9. luokkalaisille. Tutkimuksessani pyrin selvittämään, kuinka eri ikäiset oppilaat voivat tukea toistensa matematiikan oppimista. Tutkimus koostuu alku- ja loppukyselyistä, joihin kukin oppilas vastaa itsenäisesti, sekä kahdesta ryhmätyöskentelysessiosta. Alku- ja loppukyselylomakkeissa kysytään myös oppilaan nimi. Nimeä kysytään ainoastaan tulosten analysoinnin helpottamiseksi, eikä sitä julkaista missään vaiheessa. Lopputyössäni en siis mainitse oppilaiden nimiä, enkä kirjoita heistä mitään sellaisia tietoja, joista heidät on mahdollista tunnistaa. Ryhmätyöskentelysessiot äänitetään, mutta äänitteitä kuuntelen ainoastaan minä sekä mahdollisesti ohjaajani yliopistolta. Hävitän äänitteet työni valmistuttua.

Toivon, että palautatte paperin alareunassa olevan lupakyselyn maanantaihin 1.4.2019 mennessä. Jos teillä on mitä tahansa kysyttävää tutkimukseen liittyen, vastaan enemmän kuin mielelläni.

Ystävällisin terveisin
Riikka Koukka
p. +358 440 165 267
riikka.koukka@hotmail.com

………………………………………………………………………………………………………

Huoltajan suostumus

Oppilaan nimi: ______________________________

Oppilas saa osallistua pro gradu -tutkimukseen (ympyröi): kyllä ei

Huoltajan allekirjoitus:

____