Poistuvuus kvasikonformi- ja Sobolev-kuvauksille

Jyrki Takanen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2019

Tiivistelmä: Jyrki Takanen, *Poistuvuus kvasikonformi- ja Sobolev-kuvauksille* (engl. *Removability for quasiconformal maps and Sobolev functions*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 29 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutkia kompaktien joukkojen poistuvuutta jatkuville Sobolev-funktioille sekä kvasikonformikuvauksille. Työssä esitetään tunnettuja tuloksia poistuvista joukoista sekä esimerkkejä joukoista, jotka eivät ole poistuvia ja jotka kertovat poistuvien joukkojen luonteesta.

Osoitetaan, että valituilla oletuksilla $W^{1,n}$ Sobolev-avaruuden poistuvat joukot ovat kvasikonformisesti poistuvia ja tutkielman päätuloksena todistetaan, että rajoitettujen John-alueiden reunat ovat poistuvia molempien funktioluokkien tapauksessa. Tarkastelemme myös joitain tämän tuloksen yleistäviä tuloksia.

Käänteinen kysymys; ovatko kvasikonformisesti poistuvat joukot poistuvia Sobolev-avaruudessa on edelleen avoin ja eikä myöskään kummankaan luokan poistuville joukoille tunneta täydellistä geometrista karakterisaatiota.

Lopuksi tarkastellaan tuloksia, jotka antavat ehtoja joukon kvasikonformiselle poistuvuudelle.

Avainsanat: Poistuvuus, John-alueet, kvasihyperbolinen metriikka, Whitney-hajotelma.

Sisältö

Johdanto

Tutkielman aiheena ovat poistuvuus jatkuville Sobolev-funktioille ja kvasikonformikuvauksille. Joukkoa E sanotaan poistuvaksi ehdon P mielessä jos jokainen joukossa Ω määritelty halutut ehdot toteuttava kuvaus, joka toteuttaa ehdon P joukossa $\Omega \setminus E$ toteuttaa ehdon P koko määrittelyjoukossa Ω. Poistuvuus-ongelman tarkoituksena on siis löytää suurin joukko, joka ei tarkasteltavan funktioluokan näkökulmasta eroa tyhjästä joukosta.

Klassisesti ensimmäinen tulos tähän suuntaan on Riemannin nimeä kantava laajennuslause rajoitetuille analyyttisille funktioille, jonka mukaan yksittäiset pisteet ovat poistuvia kyseisille funktioille. Yleisesti samaista ongelmaa tutki ensimmäisenä Painlevé vuonna 1888, hän osoitti, että riittävä ehto poistuvuudelle on nollamittaisuus 1-ulotteisen Hausdorff-mitan mielessä.

Myöhemmin Ahlfors ja Beurling tutkivat niin kutsuttuja NED-joukkoja, jotka eivät vaikuta joukon ekstremaaliseen pituuteen ja todistivat, että NED-joukot ovat poistuvia analyyttisille funktioille, joiden Dirichletin integraali on äärellistä sekä univalenteille funktioille. Osoittautuu, että NED-joukot yhtyvät joukkoihin, jotka ovat poistuvia Sobolev-avaruudelle $W^{1,2}$ tasossa (ilman jatkuvuus oletusta). Yleisesti avaruuden $W^{1,n}$ poistuvat joukot ovat kvasikonformikuvausten poistuvia singulaaripisteitä.

Työssä tarkastelemme kompaktin joukon E poistuvuutta jatkuville funktioille $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jotka kuuluvut Sobolev-avaruuteen $W^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus E)$, $n \geq 2$, sekä kuvauksille jotka ovat homeomorfisia alueiden U ja U' välillä ja kvasikonformisia joukossa $U \setminus E$.

Osoittautuu, että näiden kuvausluokkien poistuvat joukot liittyvät vahvasti toisiinsa. Tarkkaan ottaen poistuvuus Sobolev-funktioille on vahvempi ominaisuus kuin poistuvuus kvasikonformikuvauksille, eli Sobolev-funktioille poistuva joukko on poistuva myös kvasikonformikuvauksille. Käänteiseen kysymykseen vastausta ei tunneta. Myöskään geometrista karakterisaatiota kummallekkaan joukkoluokalle ei tunneta.

Perusominaisuuksien lisäksi osoitamme, että John-alueiden reunat ovat poistuvia molempien luokkien kuvauksille. Tämän tuloksen osoitti ensimmäisen kerran tason tapauksessa P. Jones artikkelissa [**6**]. Työssä seuraamme kuitenkin artikkelia [**7**], jossa tulos yleistetään koskemaan myös korkeampia ulottuvuuksia.

Luvussa 1 käydään läpi tulosten kannalta olennaisia esitietoja ja aputuloksia sekä selvyyden vuoksi joitain merkintöjä. Luvussa 2 esitellään työn kannalta olennaiset määritelmät ja tulokset kvasikonformi- ja konformikuvauksen teoriasta. Luvussa 3 esitellään työn päätuloksessa keskeisessä osassa olevat työkalut Whitney-hajotelma sekä kvasihyperbolinen metriikka. Luvussa 4 käsitellään poistuvuutta Sobolev-funktioille sekä muotoillaan ja todistetaan tutkielman päätulos, John-alueiden reunan poistuvuus. Lopuksi luvussa 5 käsitellään poistuvuutta kvasikonformikuvauksille ja osoitetaan mm. että Sobolev avaruuden $W^{1,n}$ poistuvat joukot ovat kvasikonformisesti poistuvia.

LUKU 1

Merkintöjä ja esitietoja

1.1. Merkinnät

Merkintä	*Selitys*
$\mathcal{W}(D)$	Alueen D Whitney-hajotelma
x_Q	Whitney-kuution keskipiste
$l(Q)$	Kuution sivun pituus
$f(Q)$	$\fint_Q f = \frac{1}{m_n(Q)} \int_Q f$
$\lvert Q \rvert$	kuution Q tilavuus $= m_n(Q)$
$\mathcal{SH}(Q)$	Whitney-kuution varjo
$s(Q)$	varjon $\mathcal{SH}(Q)$ halkaisija

1.2. Reaalianalyysiä ja Sobolev-avaruuksia

Työssä oletetaan tunnetuiksi perusasiat mittateoriasta sekä Sobolev-avaruuksista sillä tasolla kuin ne käsitellään syventävien opintojen kurssilla. Tässä kappaleessa kerrataan työssä tarvittavia reaalianalyysin ja Sobolev-avaruuksien perustuloksia ilman todistuksia.

Lause 1.1 (Hölder). *Olkoon (x_k) ja (y_k) jonoja avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q},$$

kun $p, q \in (1, \infty)$ joille $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lause 1.2 (Lebesguen tiheyspistelause). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Tällöin*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_n(A \cap \bar{B}(x, r))}{m_n(\bar{B}(x, r))} = 1$$

melkein kaikilla $x \in A$,

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_n(A \cap \bar{B}(x, r))}{m_n(\bar{B}(x, r))} = 0$$

melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

1.2.1. Sobolev-avaruudet.

Määritelmä 1.3. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funktio $g_j \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq j \leq n$ on funktion f j. heikko osittaisderivaatta (joukossa Ω), jos

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Omega g_i \varphi \, dx$$

kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Merkitsemme $D_j f := g_j$.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Funktio f kuuluu Sobolev avaruuteen $W^{1,p}(\Omega)$ jos $f \in L^p(\Omega)$ ja heikko osittaisderivaatta $D_j f$ on olemassa ja kuuluu avaruuteen $L^p(\Omega)$ kaikilla $1 \leq j \leq n$ ja sanotaan, että f kuuluu avaruuteen $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, jos $f \in W^{1,p}(V)$ jokaiselle avoimelle $V \subset\subset \Omega$. Merkinnällä $V \subset\subset \Omega$ tarkoitamme, että $V \subset \Omega$ ja $\overline{V} \subset \Omega$. Edelleen jos $f = (f_1, \ldots, f_n)$ on kuvaus joukolta $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ joukolle $\mathbb{R}^n$ ja $f_i \in W^{1,p}(\Omega)$ jokaisella $1 \leq i \leq n$ merkitsemme $f \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ on absoluuttisesti jatkuva suorilla (ACL) (joukossa Ω), jos m_{n-1}-melkein kaikilla koordinaattiakselien suuntaisilla suorilla l pätee $u|_{\Omega \cap l}$ on absoluuttisesti jatkuva jokaisella suljetulla välillä $[a, b] \subset \Omega \cap l$.

LAUSE 1.6 (ACL). *Olkoot* $1 \leq p < \infty$ *ja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Jos* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *niin on olemassa* $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *siten, että* g *on ACL joukossa* Ω, $g = u$ *melkein kaikilla* Ω *ja* $D_j u = D_j g$ *melkein kaikilla joukossa* Ω *kaikilla* $j = 1, \ldots, n$. *Kääntäen jos funktio* g *on ACL joukossa* Ω *ja* $g, D_j g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq j \leq n$, *niin* $g \in W^{1,p}(\Omega)$.

1.3. John-alueet

John-alueiden käsitteen esitteli F. John vuonna 1961 elastisuuden tutkimukseen liittyvissä töissä. Nimen näille aluille antoivat O. Martio ja J. Sarvas. [**12**, s.1]

Karkeasti sanottuna alue on John jos alueen sisällä voidaan liikkua pisteestä toiseen ilman, että joudutaan kulkemaan liian läheltä alueen reunaa.

John-alue voidaan määritellä avaruuden $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ avoimena osajoukkona, mutta tässä työssä tarvitsemme määritelmän ainoastaan tapauksessa, jossa alue on rajoitettu avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Määritelmiä on useita erilaisia, jotka ovat kuitenkin rajoitetussa tapauksessa John-vakiota vaille ekvivalentteja ks. [**12**].

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue. Sanotaan, että Ω on *John* jos on olemassa vakiot a, b, joille $0 < b \leq a < \infty$ ja piste $x_0 \in \Omega$ jotka kutsutaan *kantapisteeksi* siten, että jokainen $x \in \Omega$ voidaan yhdistää suoristuvalla käyrällä $\gamma \subset G$ jolle pätee

$$(\gamma) \leq a,$$
$$b\frac{s}{l(\gamma)} \leq d(\gamma(s), \partial\Omega)$$

kaikilla $0 \leq s \leq l(\gamma)$. Merkintä $l(\gamma)$ tarkoittaa käyrän pituutta ja $\gamma(s)$ on käyrän esitys parametrisoituna kaarenpituudella siten, että $\gamma(0) = x$.

LAUSE 1.8. *Rajoitettu alue* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *on* John, *jos ja vain jos on olemassa* $\epsilon > 0$ *siten, että kaikilla* $x, y \in \Omega$ *löytyy suoristuva* $\gamma_{x,y} : [0, l(\gamma_{x,y})] \to \Omega$ *parametrisoituna käyrän pituudella siten, että*

$$\gamma_{x,y}(0) = x, \quad \gamma_{x,y}(l(\gamma_{x,y})) = y$$

ja

$$d(\gamma_{x,y}(t), \partial\Omega) \geq \epsilon \min(t, l(\gamma_{x,y}) - t).$$

HUOMAUTUS 1.9. (1) John-ehto on yleistys perinteisestä kartioehdosta sillä erotuksella, että kartion keskuksen sallitaan olla käyrä pelkän janan sijasta.

(2) Sileät- ja Lipschitz-alueet ovat John-alueita, sekä jotkin fraktaalimaiset alueet, kuten esimerkiksi Kochin lumihiutaleen rajaama alue K. Myöhemmän kannalta on hyvä myös huomata, että jokaisen lumihiutaleen käyrän yhdistetyn osajoukon pituus on ääretön, tarkemmin $\mathcal{H}^1(A) = \infty$ jos $A \subset \partial K$.
(3) Toisin kuin Lipschitz-alueet ja niin kutsutut uniformit alueet, jotka voidaan myös rajoitetussa tapauksessa osoittaa olevan John-alueita. John-alue voi sisältää sisäänpäin kääntyneitä kärkiä jotka kutistuvat nopeasti. Ehto ei kuitenkaan mahdollista ulospäin suuntautuneita kärkiä.

LUKU 2

Konformi- ja kvasikonformikuvaukset

Tässä luvussa annetaan työssä tarvittavat määritelmät ja tulokset kvasikonformikuvausten teoriasta. Toisin kuin konformikuvaukset joiden luokka kutistuu Möbius-kuvausten rajoittumiksi kun $n > 2$, on kvasikonfomikuvausten luokka paljon laajempi ja voidaan kvasikonformikuvaukset määritellä luonnollisesti avaruuteen $\mathbb{R}^n$ kaikilla $n \geq 2$. Kuitenkin suurin osa poistuvuustuloksista on osoitettu tason kvasikonformikuvauksille ja vastaavasti monet sovellukset sijoittuvat tason tapaukseen, joten keskitymme tässä työssä tarkastelemaan kvasikonformista poistuvuutta tasossa.

2.1. Konformikuvaukset

MÄÄRITELMÄ 2.1. Kuvaus $f : D \to \mathbb{C}$ on konformikuvaus, jos f on holomorfinen (kompleksisesti derivoituva) ja injektiivinen.

LAUSE 2.2. (1) *Jos $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ on holomorfinen (meromorfinen, jolla ei ole napoja), niin f on vakio.*
(2) *Konformikuvaukset $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ovat muotoa $f(z) = az + b$, missä $a \neq 0$.*
(3) *Konformikuvaukset $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ovat Möbius-kuvauksia.*

2.2. Kvasikonformikuvaukset

Kvasikonformikuvaukset voidaan määritellä usealla eri tavalla ja määritelmien yhtäpitävyys on syvällinen tulos. Luvun tulokset todistuksineen löytyvät teoksista [**1**] ja [**10**].

Työssä tarvitsemme analyyttisen määritelmän, joka voidaan muotoilla seuraavasti

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoot $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ alue ja $f : G \to f(G)$ suunnan säilyttävä homeomorfismi. Kuvaus f on K-kvasikonforminen jos

(1) f on absoluuttisesti jatkuva melkein kaikilla suorilla ja
(2) f toteuttaa dilataatio ehdon

$$\max_{\alpha} |\partial_\alpha f(z)| \leq K \min_{\alpha} |\partial_\alpha f(z)|$$

melkein kaikilla $z \in G$.

Listataan joitain myöhemmin tarvittavia perusominaisuuksia ilman todistuksia

LAUSE 2.4. (1) *K-Kvasikonformikvauksen käänteiskuvaus on kvasikonforminen.*
(2) *Kvasikonformikuvaus kuvaa nollamittaiset joukot nollamittaisiksi sekä*

$$|A| = \int_A J_f(z)dz$$

mitallisilla joukoilla A.

(3) *Kuvaus f on konforminen jos ja vain jos se on* 1*-kvasikonforminen*
(4) *(Weylin lemma) Jos f on kvasikonforminen ja $f_{\bar{z}} = 0$ melkein kaikilla z, niiin f on konforminen.*

LUKU 3

Whitney-hajotelma ja kvasihyperbolinen metriikka

3.1. Whitney-hajotelma

Whitney-hajotelma on standardityökalu monilla matematiikan aloilla. Myöhemmin tarvitsemme seuraavan version rajoitetuille alueille, jossa vierekkäisten kuutioiden sivujen suhde on korkeintaan kaksi. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi voimme skaalaamalla olettaa, että $\operatorname{diam}(\Omega) \leq 1$, jolloin hajotelmassa ei ole kuutioita, jotka ovat suurempia kuin määritelmässä käytetyt.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ rajoitettu alue. Olkoon $\mathcal{Q}_n$ kaikkien suljettujen dyadisten kuutioiden kokoelma, joiden sivun pituus on 2^{-n}. Määritellään Whitney-hajotelma kokoelmana $\mathcal{F} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, missä joukot $\mathcal{F}_n$ määritellään rekursiivisesti asettamalla

$$\mathcal{F}_1 = \Big\{ Q \in \mathcal{Q}_1 : \bigcup_{\substack{Q'\in\mathcal{Q}_1 \\ Q'\cap Q\neq\emptyset}} Q' \subset \Omega \Big\}$$

ja

$$\mathcal{F}_n = \Big\{ Q \in \mathcal{Q}_{n+1} : Q \not\subset F_n \text{ ja } \bigcup_{\substack{Q'\in\mathcal{Q}_{n+1} \\ Q'\cap Q\neq\emptyset}} Q' \subset \Omega \Big\},$$

missä $F_n = \bigcup_{j\leq n} \bigcup_{Q\in\mathcal{F}_j} Q$.

Määritelmän 3.1 hajotelmalla on seuraavat ominaisuudet:

LEMMA 3.2. (1) $\Omega = \bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q$
(2) $l(Q) < \operatorname{dist}(Q, \Omega^c) \leq 3\sqrt{N}\, l(Q) = 3\operatorname{diam}(Q)$ *kaikilla* $Q \in \mathcal{F}$
(3) $\operatorname{int} Q \cap \operatorname{int} Q' = \emptyset$ *kaikilla* $Q, Q' \in F$, $Q \neq Q'$
(4) *Jos* $Q, Q' \in \mathcal{F}$ *ja* $Q \cap Q' \neq \emptyset$, *niin* $\frac{l(Q)}{l(Q')} \leq 2$.

TODISTUS. Todistetaan tapauksessa $N = 2$. Yleinen tapaus menee vastaavasti kun korvataan $\sqrt{2}$ luvulla $\sqrt{N}$. Ehdon (1) todistamiseksi olkoon $x \in \Omega$ ja valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in Q \in \mathcal{Q}_n$, missä $2^{-n+2}\sqrt{2} < \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq 2^{-n+3}\sqrt{2}$. Tällöin kaikille $Q' \in \mathcal{Q}_n$, joille $Q' \cap Q \neq \emptyset$ pätee $Q' \subset \Omega$. Siten määritelmän mukaan joko $Q \in F_n$ tai $x \in Q \subset Q'' \in \mathcal{F}_i$, jollain $i < n$. Ehtoa (2) varten kiinnitetään $Q \in \mathcal{F}_n$. Tällöin $Q' \subset \Omega$ kaikilla $Q' \in \mathcal{Q}_n$, joilla $Q' \cap Q \neq \emptyset$. Näin ollen $\operatorname{dist}(Q, \Omega^c) > 2^{-n} = l(Q)$. Ylärajan todistamiseksi oletetaan, että $\operatorname{dist}(Q, \Omega^c) > 3\sqrt{2}\, 2^{-n}$. Olkoon $Q_2 \in \mathcal{Q}_{n-1}$ siten, että $Q \subset Q_2$. Tällöin $\operatorname{dist}(Q_2, \Omega^c) > \sqrt{2}\, 2^{-n+1}$ ja siten $Q_3 \subset \Omega$ kaikilla $Q_3 \in \mathcal{Q}_{n-1}$, joilla $Q_2 \cap Q_3 \neq \emptyset$. Siten $Q_2 \in F_{n-1}$ tai $Q_2 \subset Q_4 \in \mathcal{F}_i$ jollain $i < n - 1$. Molemmissa tapauksissa $Q \notin \mathcal{F}_n$, mikä on ristiriita. Ehto (3) seuraa määritelmän rekursiivisuudesta ja siitä, että dyadiset kuutiot ovat sisäkkäisiä. Oletetaan, että (4) ei ole totta. Tällöin on olemassa $Q_1 \in \mathcal{F}_n$ ja $Q_2 \in \mathcal{F}_m$ siten, että $n < m-1$ ja $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$. Olkoon $Q_3 \in \mathcal{Q}_{n+1}$ siten, että $Q_2 \subset Q_3$. Tällöin

$$\bigcup_{\substack{Q' \in \mathcal{Q}_{n+1} \\ Q' \cap Q_3 \neq \emptyset}} Q' \subset \bigcup_{\substack{Q' \in \mathcal{Q}_{n} \\ Q' \cap Q_1 \neq \emptyset}} Q' \subset \Omega$$

ja siten joko $Q_3 \in \mathcal{F}_{n+1}$ tai $Q \subset F_n$. Kummassakin tapauksessa $Q_2 \subset F_{n+1}$ ja siten $Q_2 \notin \mathcal{F}_m$. □

HUOMAUTUS 3.3. Vaihtoehtoisesti, jos lievennetään vaatimusta vierekkäisten kuutioiden sivujen suhteelle ja sallitaan vierekkäisille kuutioille $l(Q)/l(Q) \leq 4$, ehto (2) voidaan kirjoittaa muodossa (ks. [**13**, s. 167])

(2') $\operatorname{diam}(Q) \leq \operatorname{dist}(Q, \Omega^c) \leq 4 \operatorname{diam}(Q)$.

3.2. Kvasihyperbolinen metriikka

Kvasihyperbolinen metriikka yleistää klassisen hyperbolisen metriikan yhdesti yhtenäisiltä kompleksitason alueilta yleisille $\mathbb{R}^n$:n alueille.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Olkoon $D \subsetneq \mathbb{R}^n$ alue. Joukon D kvasihyperbolinen metriikka $k_D(x,y)$ määritellään asettamalla kaikilla $x, y \in D$

$$k_D(x,y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{ds}{d(x, \partial D)},$$

missä γ on pisteitä x ja y yhdistävä suoristuva käyrä.

MÄÄRITELMÄ 3.5. Suoristuva käyrä $\gamma \subset D$ on *kvasihyperbolinen geodeesi* jos

$$k_D(x_1, x_2) = \int_{\gamma|_{[x_1,x_2]}} \frac{ds}{d(x, \partial D)}$$

kaikilla pistepareilla $x_1, x_2 \in \gamma$, missä merkintä $\gamma|_{[x_1,x_2]}$ tarkoittaa pisteitä $x_1, x_2 \in D$ yhdistävää osakäyrää.

LAUSE 3.6. *Olkoon $D \subsetneq \mathbb{R}^n$ alue. Tällöin jokaisella pisteparilla $x_1, x_2 \in D$ on olemassa kvasihyperbolinen geodeesi.*

TODISTUS. ks. [**5**]. □

Suoraan määritelmistä (ja huomautuksesta 3.3) saadaan seuraava arvio, jota tarvitaan myöhemmin

LEMMA 3.7. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue ja $\mathcal{W}(D)$ sen Whitney-hajotelma. Tällöin kaikilla $x_1, x_2 \in Q$ ja $Q \in \mathcal{W}(D)$ pätee*

$$k_D(x_1, x_2) \leq 1.$$

TODISTUS.

$$k_D(x_1,x_2) \leq \inf_\gamma \int_\gamma \frac{ds}{d(x,\partial D)} \leq \inf_\gamma \int_\gamma \frac{ds}{\operatorname{diam}(Q)} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{\operatorname{diam}(Q)} \leq \frac{\operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(Q)} = 1.$$

□

LAUSE 3.8. *Olkoon* $D \subsetneq \mathbb{R}^n$ *ja* $\mathcal{W}(D)$ *alueen Whitney-hajotelma. Olkoon* $x_1, x_2 \in D$*, joille* $|x_1 - x_2| \geq d(x_1, \partial D)/2$*. Tällöin*

$$N(x_1, x_2)/C \leq k_D(x_1, x_2) \leq CN(x_1, x_2),$$

missä $N(x_1, x_2)$ *on pisteitä* x_1 *ja* x_2 *yhdistävän kvasihyperbolisen geodeesin leikkaamien Whitney kuutioiden määrä ja* C *on vakio joka riippuu ainoastaan luvusta* n*.*

TODISTUS. Jälkimmäinen epäyhtälö seuraa suoraan Lemmasta 3.7. Ensimmäinen epäyhtälö seuraa, koska pisteiden välinen etäisyys on verrannollinen kuutioiden kokoon ja annettua kuutiota Q koskettaa korkeintaan $d = d(n)$ kuutiota, sillä jos Q leikkaa geodeesia täytyy sen kulkea pituus, joka on verrannollinen lukuun $\mathrm{diam}(Q)$ lävistäessään Q:ta ympäröivät kuutiot. Näin ollen löytyy luvusta d riippuva vakio C, jolle $N(x_1, x_2)/C \leq k_D(x_1, x_2)$. $\square$

LUKU 4

Poistuvuus Sobolev-funktioille

Tässä luvussa tarkastellaan poistuvuutta jatkuville Sobolev-funktioille. Osoitamme, että kun $1 \leq p < \infty$ poistuva joukko on nollamittainen, sekä, että poistuvuus on lokaali ominaisuus. Luvun ja itse tutkielman päätuloksena osoitamme, että John-alueiden reunat ovat poistuvia. Luvun lopuksi listaamme tämän tuloksen yleistyksiä, sekä joitakin avoimia kysymyksiä.

4.1. Määritelmät ja perustuloksia

MÄÄRITELMÄ 4.1. Kompaktia joukkoa $K \subset U$ sanotaan $W^{1,p}$-poistuvaksi avoimessa joukossa U jos jokainen jatkuva avaruuteen $W^{1,p}(U \setminus K)$ kuuluva kuvaus kuuluu avaruuteen $W^{1,p}(U)$.

MÄÄRITELMÄ 4.2. Kompaktia joukkoa $K \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan $W^{1,p}$-poistuvaksi jos jokainen jatkuva avaruuteen $W^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ kuuluva kuvaus kuuluu avaruuteen $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

HUOMAUTUS 4.3. Välittömästi nähdään, että poistuvalla joukolla K ei voi olla sisäpisteitä. Muodostetaan funktio, joka on jatkuva ja jonka kantaja kuuluu joukkoon $\mathrm{int}(K)$, mutta joka ei ole Sobolev-funktio. Tällainen saadaan esimerkiksi jatkamalla jatkuvaksi skaalatun Cantorin funktion ja $\mathrm{int}(K)$:n sisältämän kuution karakteristisen funktion tulo. Funktio ei ole Sobolev, koska se ei ole absoluuttisesti jatkuva melkein kaikilla suorilla.

Osoitetaan seuraavaksi, että määritelmät 4.2 ja 4.1 ovat yhtäpitäviä eli että poistuvuus avaruudessa $W^{1,p}$ on lokaali ominaisuus. Näin ollen voimme jatkossa rajoittua tarkastelemaan poistuvuutta avaruudessa $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

LEMMA 4.4. *Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. K on $W^{1,p}$-poistuva alueessa U jos ja vain jos K on $W^{1,p}$-poistuva.*

TODISTUS. Oletetaan, että K on $W^{1,p}$-poistuva joukossa U. Olkoon $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä. Tällöin $g|_U \in W^{1,p}(U \setminus K)$ ja oletuksen nojalla $g|_U \in W^{1,p}(U)$.

Urisonin lemman nojalla on olemassa $f_1 \in C_0^\infty(U)$, $0 \leq f_1 \leq 1$, jolle $f_1 \equiv 1$ joukossa $K_\epsilon = \{x \in U : d(x, K) \leq \epsilon\}$, missä $\epsilon = d(K, \partial U)/2 > 0$. Tällöin $f_2 = 1 - f_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus K)$, $\mathrm{spt}(f_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ ja

$$-\int D^\alpha g\, \varphi(f_1 + f_2) = -\int D^\alpha g\, \varphi f_1 - \int D^\alpha g\, \varphi f_2 = \int g D^\alpha(\varphi f_1) + \int g D^\alpha(\varphi f_2)$$
$$= \int g D^\alpha(\varphi(f_1 + f_2))$$

kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Kääntäen oletetaan, että K on $W^{1,p}$-poistuva. Olkoon $g \in W^{1,p}(U \setminus K)$ jatkuva alueessa U. Tällöin edellä käytetylle funktiolle f_1 pätee $f_1 g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ ja oletuksen nojalla $f_1 g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Näin ollen on olemassa avoin Ω, $K \subset \Omega \subset K_\epsilon$, jolle $g \in W^{1,p}(\Omega)$ ja vastaavalla argumentilla kuin edellä $g \in W^{1,p}(U)$.

□

LEMMA 4.5. *Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin $W^{1,p}$-poistuva kompakti joukko on nollamittainen.*

TODISTUS. Oletetaan, että kompakti $K \subset \mathbb{R}^n$ on poistuva ja $m_n(K) > 0$. Huomautuksessa 4.3 todettiin, että joukolla K ei ole sisäpisteitä. Koska $m_n(K) > 0$ on Lebesguen tiheyspistelauseen nojalla olemassa $x_0 \in K$ siten, että

$$\frac{m_n(B(x_0, r) \cap K^c)}{m_n(B(x_0, r))} \to 0$$

kun $r \to 0$. Näin ollen jokaisella $i \in \mathbb{N}$ on olemassa mielivaltaisen pieni $r_i > 0$ siten, että

$$m_n(B(x_0, r_i) \cap K^c) \leq 2^{-ip} r_i^n. \tag{4.1}$$

Voidaan olettaa, että $x_0 = 0$ ja merkitään $B_i = B(x_0, r_i)$. Oletetaan lisäksi, että jono $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ toteuttaa

$$r_{i+1} < r_i/2 < 1/2$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Määritellään $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkamalla $|t|\chi_{[-1/2,1/2]}(t)$ jatkuvaksi funktioksi, jonka jaksopituus on 1. Edelleen määritellään kaikilla $i \in \mathbb{N}$

$$\phi_i(x) = c_i \phi(m_i(\frac{2|x|}{r_i} - 1)) \cdot \chi_{[r_i/2, r_i]}(|x|),$$

missä c_i on jono positiivisia reaalilukuja ja m_i positiivisia kokonaislukuja. Funktio ϕ_i on radiaalisymmetrinen, joka heilahtelee m_i jaksoa amplitudilla c_i annuluksessa $A(0; r_i/2, r_i)$. Nyt melkein kaikilla $x \in A(0; r_i/2, r_i)$

$$|\nabla \phi_i(x)| = \frac{2c_i m_i}{r_i} \simeq \frac{c_i m_i}{r_i}.$$

Siten

$$\|\nabla \phi_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 2|B(0,1)|^{1/p} c_i m_i (1 - 2^{-n})^{1/p} r_i^{\frac{n}{p} - 1} = C(n,p) c_i m_i r_i^{\frac{n}{p} - 1}$$

ja (4.1) nojalla

$$\|\nabla \phi_i\|_{L^p(K^c)} = \frac{2c_i m_i}{r_i} \left(\int_{A \cap K^c} 1 \, dx \right)^{1/p} \leq \frac{2c_i m_i}{r_i} (2^{-ip} r_i^n)^{1/p} = 2^{1-i} c_i m_i r^{\frac{n}{p} - 1}. \tag{4.2}$$

Määritellään $f = \sum_{i=1}^\infty \phi_i$. Funktioiden ϕ_i kantajat ovat erilliset, joten f suppenee ja

$$\lim_{n \to \infty} \sup_x |\sum_{i=n+1}^\infty \phi_i(x)| = \lim_{n \to \infty} \sup_{i \geq n+1} c_i/2,$$

joten jos $c_i \to 0$, sarja $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i$ suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota ja edelleen osasummien $f_j = \sum_{i=1}^{j} \phi_i$ jono suppenee kohti funktiota f L^p-normissa. Funktioiden ϕ_i kantajat ovat erillisiä, joten on $j_x \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\nabla f(x) = \nabla \phi_{j_x}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \nabla \phi_i(x)$$

melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen (4.2):stä seuraa

$$\|\nabla f\|_{L^p(K^c)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\nabla \phi_i\|_{L^p(K^c)} \lesssim \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} c_i m_i r^{\frac{n}{p}-1}. \tag{4.3}$$

Nyt jos epäyhtälön (4.3) viimeinen sarja suppenee on osasummien $f_j = \sum_{i=1}^{j} \phi_i$ jono Cauchy-jono $W^{1,p}(K^c)$:ssa, jolloin Sobolev-avaruuden täydellisyyden nojalla $f \in W^{1,p}(K^c)$. Toisaalta jos $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\|\nabla f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int \left| \sum_{i=1}^{\infty} \nabla \phi_i \right|^p = \sum_{i=1}^{\infty} \|\nabla \phi_i\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^{\infty} C(n,p) c_i^p m_i^p r_i^{n-p},$$

koska funktioiden ϕ_i kantajat ovat erillisiä. Haluamme, että viimeinen sarja hajaantuu, jolloin $f \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Näin ollen todistus on valmis kunhan löydämme jonot c_i, m_i siten, että $c_i \to 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} c_i m_i r^{\frac{n}{p}-1} < \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^p m_i^p r_i^{n-p} = \infty.$$

Jos $p \geq n$ voimme valita $c_i = r_i^{1-\frac{n}{p}} \cdot i^{-1/p}$ ja $m_i = 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jos $1 \leq p < n$ tällöin voimme valita $c_i = i^{-1/p}$ ja m_i pienimmäksi kokonaisluvuksi, jolla $m_i r_i^{\frac{n}{p}-1} \geq 1$. Tällöin $(m_i - 1) r_i^{\frac{n}{p}-1} < 1$, joten $m_i r_i^{\frac{n}{p}-1} \leq 2$.

□

SEURAUS 4.6. *Jos K on $W^{1,p}$-poistuva, niin K on $W^{1,q}$-poistuva, kun $q > p$.*

TODISTUS. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja B avoin pallo, joka sisältää joukon K. Olkoon $f \in W^{1,q}(B \setminus K)$ jatkuva B:ssä. Hölderin epäyhtälön nojalla $f \in W^{1,p}(B \setminus K)$, joten oletuksen nojalla $f \in W^{1,p}(B)$.

Näin ollen funktiolla f on heikot derivaatat joukossa B ja poistuvan joukon nollamittaisuuden (Lemma 4.5) nojalla $f, D^\alpha f \in L^q(B)$.

□

4.2. John-alueiden reunan poistuvuus

Nyt olemme valmiita todistamaan tutkielman päätuloksen. Todistukset perustuvat artikkeleihin [**7**], [**4**] ja [**11**]. Aluksi tarvitsemme seuraavat määritelmät.

MÄÄRITELMÄ 4.7. Olkoon $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Sanotaan, että joukon Ω käyrä $\gamma : I \to \Omega$ *kasautuu joukkoon* $\partial\Omega$, jos on olemassa jono $t_j \in I$ siten, että $\lim_{j\to\infty} d(\gamma(t_j), \partial\Omega) = 0$. Sanotaan, että x on käyrän γ *päätepiste*, jos $\lim_{t \to \sup I^-} \gamma(t) = x$.

MÄÄRITELMÄ 4.8. Olkoon $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Kiinnitetään kokoelma Γ joukon Ω reunalle kasaantuvia käyriä, jotka alkavat kiinnitetystä pisteestä $z_0 \in \Omega$ ja joiden kasaantumisjoukot peittävät reunan $\partial\Omega$. Määritellään kuution $Q \subset \Omega$ *varjoksi* pisteestä z_0 joukko $\mathcal{SH}(Q)$ asettamalla

$$\mathcal{SH}(Q) := \mathrm{cl}\big(\bigcup_{\gamma \cap Q \neq \emptyset} \gamma(I)\big) \cap \partial\Omega$$

Merkitään varjon halkaisijaa $s(Q) := \mathrm{diam}(\mathcal{SH}(Q))$.

Tarkastelemme alueita joiden Whitney-hajotelmalle pätee geometrinen ehto

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}} s(Q)^n < \infty. \tag{4.4}$$

Tulemme osoittamaan, että ehdon (4.4) toteuttavat joukot ovat poistuvia avaruudessa $W^{1,n}$ ja että muista oletuksista alueelle seuraa ehto (4.4). Ensin todistamme kuitenkin seuraavat lemmat, joita tarvitaan Lauseen 4.11 todistuksessa.

LEMMA 4.9. *Jos rajoitettu alue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ toteuttaa ehdon* (4.4), *niin $\partial\Omega$ on nollamittainen Lebesguen n-ulotteisen mitan mielessä.*

TODISTUS. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Kokoa $l(Q_j) = 2^{-k}$ olevia kuutioita on äärellinen määrä, joten kuutiot voidaan järjestää koon mukaan laskevaan järjestykseen. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin löytyy $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{j=m}^{\infty} s(Q_j)^n < \epsilon$ ja edelleen $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että kokoa $l(Q) = 2^{-k_0}$ olevien kuutioiden varjot $\mathcal{SH}(Q)$ peittävät reunan $\partial\Omega$ ja

$$\sum_{Q : l(Q) = 2^{-k_0}} s(Q)^n < \epsilon.$$

Näin ollen kuutiot joiden sivun pituus on $s(Q)$ peittävät reunan $\partial\Omega$ ja kun annetaan $\epsilon \to 0$ nähdään, että $m_n(\partial\Omega) = 0$.

□

LEMMA 4.10. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Tällöin vierekkäisille Whitney-kuutioille $Q, Q' \in \mathcal{W}(\Omega)$ pätee*

$$\left| \fint_Q f - \fint_{Q'} f \right| \leq 2^n \left(l(Q) \fint_Q |\nabla f| + l(Q') \fint_{Q'} |\nabla f| \right).$$

TODISTUS. Tiheyden perusteella riittää olettaa, että $f \in C^1(\Omega)$. Jos kuutiot Q ja Q' ovat samankokoisia oletamme, että $Q = [0, h]^n$ ja $Q' = [h, 2h] \times [0, h]^{n-1}$. Tällöin

$$|f(z) - f(z + he_1)| \leq \int_0^h |\nabla f(z + te_1)|\, dt,$$

kun $z \in Q$ ja $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Huomataan, että $z + he_1 \in Q'$ ja merkitään $z = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q f - \int_{Q'} f \right| &= \left| \int_Q (f(z) - f(z + e_1))\, dm_n(z) \right| \\
&\le \int_{y \in [0,h]^{n-1}} \int_0^h |f(x, y) - f((x, y) + he_1)|\, dm_1(x) dm_{n-1}(y) \\
&\le \int_{y \in [0,h]^{n-1}} \int_0^h \int_0^h |\nabla f((x, y) + te_1)|\, dt dm_1(x) dm_{n-1}(y) \\
&\le \int_{y \in [0,h]^{n-1}} \int_0^{2h} \int_0^h |\nabla f(x, y)|\, dt dm_1(x) dm_{n-1}(y) \\
&= h \int_{Q \cup Q'} |\nabla f| = l(Q) \int_Q |\nabla f| + l(Q') \int_{Q'} |\nabla f|,
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa jakamalla puolittain luvulla $m(Q)(= m(Q'))$. Jos $l(Q') = 2l(Q)$, niin jaetaan Q' 2^n dyadiseen kuutioon $\{\tilde{Q}_i\}_{i=1}^{2^n}$, joiden sivun pituus on $l(Q)$. Jokaiselle $\tilde{Q}_i$ on olemassa jono $\Delta_0, \ldots, \Delta_m$ kuutioita siten, että jokaisella $j \ge 1$ Δ_j on jokin kuutio $\tilde{Q}_k$, $\Delta_0 = Q$, $\Delta_m = \tilde{Q}_i$ ja peräkkäiset Δ_j, Δ_{j+1} ovat vierekkäisiä. Käyttämällä edeltävää arviota vierekkäisille samankokoisille kuutioille m kertaa saadaan

$$\begin{aligned}
\left| ⨍_Q f - ⨍_{\tilde{Q}_i} f \right| &\le l(Q) ⨍_Q |\nabla f| + 2 \sum_{j=1}^{m} l(\Delta_j) ⨍_{\Delta_j} |\nabla f| \\
&\le l(Q) ⨍_Q |\nabla f| + 2^n l(Q') ⨍_{Q'} |\nabla f|.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\left| ⨍_Q f - ⨍_{Q'} f \right| &\le \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \left| ⨍_Q f - ⨍_{\tilde{Q}_i} f \right| \\
&\le l(Q) ⨍_Q |\nabla f| + 2^n l(Q') ⨍_{Q'} |\nabla f|.
\end{aligned}$$

□

LAUSE 4.11. *Jos Ω toteuttaa ehdon*

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}} (s(Q)/l(Q))^{p'(n-1)} |Q| < \infty, \tag{4.5}$$

niin jokainen jatkuva $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, joka kuuluu avaruuteen $W^{1,p}$ joukon $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ rajoitetuissa osajoukoissa on $ACL(\mathbb{R}^n)$.

TODISTUS. Kiinnitetään rajoitettu alue U, joka sisältää reunan $K := \partial\Omega$ ja osoitetaan, että jokaiseen suuntaan $\lambda \in S^{n-1}$ pätee

$$\iint_U |\partial_\lambda f| = \iint_{U \setminus K} |\partial_\lambda f| \tag{4.6}$$

missä $\partial_\lambda f$ on funktion f heikko suuntaisderivaatta $\partial_\lambda f := \nabla f \cdot \lambda$. Integraalilla $\iint_U$ tarkoitetaan sitä, että ensin integroidaan λ:n suuntaista suoraa pitkin ja tämän jälkeen integroidaan kaikkien λ:n suuntaisten suorien yli, jotka leikkaavat joukkoa U. Siten identiteetti (4.6) tarkoittaa, että melkein jokaisella λ:n suuntaisella suoralla l funktion f kokonaisheilahtelu on $\int_{l\cap U\setminus K}|\partial_\lambda f|$. Koska $f\in W^{1,p}(U\setminus K)\subset W^{1,1}(U\setminus K)$, seuraa tästä Fubinin nojalla, että $\partial_\lambda f$ rajoitettuna melkein kaikille λ:n suuntaisille suorille on integroituva funktio. Ottamalla kaikki suunnat λ ja alueet U saadaan $f\in ACL(\mathbb{R}^n)$, mikä todistaa väitteen.

Todistetaan yhtäsuuruus (4.6). Kiinnitetään suunta λ ja suora l, joka on λ:n suuntainen. Merkitään f:n kokonaisheilatelua joukossa $l\cap U$ kaavalla $\int_{l\cap U}|\partial_\lambda f|:=\mathrm{Var}_{l\cap U}f$.

Kokonaisheilahtelua $\int_{l\cap U}|\partial_\lambda f|$ voidaan approksimoida halutulla tarkkuudella lausekkeella

$$\sum_j |f(x_j)-f(y_j)|+\int_{l\cap U\setminus\cup_j[x_j,y_j]}|\partial_\lambda f|, \tag{4.7}$$

missä pareittain pistevieraat välit $[x_j,y_j]$ peittävät joukon $l\cap K$ siten, että $x_j,y_j\in l\cap K$.

Ehdon (4.5) nojalla kun Whitney-kuutiot pienenevät niiden varjojen halkaisijat lähestyvät nollaa. Näin ollen voimme valita kuutioiden maksimikooksi Δ niin pienen luvun, että Δ:n tai sitä pienemmän kuution varjo ei leikkaa kuin korkeintaan yhtä väleistä $[x_j,y_j]$, kuutiot kuuluvat joukkoon U ja kokoa Δ olevien kuutioiden varjot peittävät reunan K.

Kiinnitetään seuraavaksi väli $[x_j,y_j]$. Koska kokoa Δ olevia kuutioita on vain äärellinen määrä ja niiden varjot (jotka ovat kompakteja joukkoja) peittävät joukon $[x_j,y_j]\cap K$, voidaan $[x_j,y_j]$ jakaa äärelliseen määrään välejä $[u_i,u_{i+1}]$ siten, että $u_0=x_j$ ja $u_n=y_j$. Kompaktisuusargumentilla tämä voidaan tehdä siten, että jokaisella i joko $(u_i,u_{i+1})\in K^c$ tai u_i ja u_{i+1} kuuluvat samaan varjoon $\mathcal{SH}(Q_i)$ ja on olemassa Γ:n käyrät, jotka yhdistävät u_i:n ja u_{i+1}:n Q_i:hin siten, että käyrät eivät leikkaa muita samankokoisia tai suurempia kuutioita.

Tapauksessa $(u_i,u_{i+1})\in K^c$ voidaan arvioida suoraan

$$|f(u_i)-f(u_{i+1})|\le\int_{[u_i,u_{i+1}]}|\partial_\lambda f|.$$

Siinä tapauksessa, että u_i ja u_{i+1} kuuluvat samaan varjoon $\mathcal{SH}(Q_i)$ voidaan u_i ja u_{i+1} yhdistää käyrällä γ_i, joka seuraa yhtä Γ:n käyrää u_i:stä Q_i:hin ja jatkaa toista Γ:n käyrää Q_i:stä u_{i+1}:seen.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi merkitään integroituvalle funktiolle ϕ, $\phi(Q)=\frac{1}{|Q|}\int_Q\phi$.

Vierekkäisille Whitney-kuutioille Q ja Q' (jolloin joko kuutioiden sivun pituudet ovat samat ja niillä on yhteinen tahko tai toisen kuution sivun pituus on puolet toisesta ja ne jakavat pienemmän tahkon) pätee (Lemma 4.10)

$$|f(Q)-f(Q')|\le 2^{n-1}(|\nabla f|(Q)l(Q)+|\nabla f|(Q')l(Q')). \tag{4.8}$$

Ottamalla Whitney-kuutiot, jotka leikkaavat käyrää γ_i ja poistamalla tarvittaessa ylimääräiset voidaan valita jono $(Q_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ kuutioita siten, että sen hännät suppenevat pisteisiin u_i ja u_{i+1} ja peräkkäiset kuutiot ovat vierekkäisiä, eli ne jakavat tahkon.

Käyttämällä epäyhtälöä (4.8) tähän jonoon saadaan

$$\begin{aligned}
|f(u_i) - f(u_{i+1})| &= |\lim_{j\to\infty}(f(Q_j) - f(Q_0)) - \lim_{j\to-\infty}(f(Q_j) - f(Q_0))| \\
&\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f(Q_j) - f(Q_{j-1})| \\
&\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{n-1}(|\nabla f|(Q_j)l(Q_j) + |\nabla f|(Q_{j-1})l(Q_{j-1})) \\
&\le 2^n \sum_{Q\cap\gamma_i\neq\emptyset} |\nabla f|(Q)l(Q)
\end{aligned}$$

missä summaus on yli kaikkien kuutioiden jotka leikkaavat γ_i:tä. Konstruktion perusteella kaikki kuutiot ovat korkeintaan kokoa Δ ja kuuluvat joukkoon U. Nyt summaamalla arviot yli i:n saadaan

$$\begin{aligned}
|f(x_j) - f(y_j)| &\le \sum_i |f(u_i) - f(u_{i+1})| \\
&\le \sum_{[u_i,u_{i+1}]\subset K^c} \int_{[u_i,u_{i+1}]} |\partial_\lambda f| + 2^n \sum_{[u_i,u_{i+1}]\not\subset K^c} \sum_{Q\cap\gamma_i\neq\emptyset} |\nabla f|(Q)l(Q).
\end{aligned}$$

Ensimmäistä termiä voidaan arvioida ylöspäin variaatiolla $\int_{[x_j,y_j]\setminus K} |\partial_\lambda f|$. Toisessa termissä kaikkien kuutioiden varjoissa on jokin pisteistä u_i ja kuutiot ovat korkeintaan kokoa Δ. Kuten seuraavasta päättelystä nähdään voidaan lauseketta $|f(x_j) - f(y_j)|$ arvioidessa olettaa, että kukin kuutio Q esiintyy edeltävässä summassa vain kerran.

Jos Whitney-kuution Q kautta kulkee kaksi eri käyrää γ_k ja γ_l, $k < l$, niin näistä voidaan muodostaa uusi käyrä joka yhdistää u_k:n suoraan pisteeseen u_{l+1}, ja voimme parantaa edellistä arviota muotoon

$$|f(x_j) - f(y_j)| \le \sum_{i<k} |f(u_i) - f(u_{i+1})| + |f(u_k) - f(u_{l+1})| + \sum_{i>l} |f(u_i) - f(u_{i+1})|,$$

jolloin summassa on vähemmän kuutioita. Toistamalla tätä tarvittaessa voidaan olettaa, että jokaista Whitney-kuutiota leikkaa korkeintaan yksi käyrä.

Näin ollen arvio voidaan kirjoittaa muotoon

$$|f(x_j) - f(y_j)| \le \int_{[x_j,y_j]\setminus K} |\partial_\lambda f| + 2^n \sum_{\mathcal{SH}(Q)\cap[x_j,y_j]\neq\emptyset} |\nabla f|(Q)l(Q). \tag{4.9}$$

Koska Δ:n valinnan nojalla mikään korkeintaan Δ:n kokoinen kuutio ei leikkaa kuin korkeintaan yhtä väliä $[x_j, y_j]$ päättelemme, että jokainen kuutio esiityy arviossa (4.9) korkeintaan yhdelle j ja lisäksi kuution varjo leikkaa suoraa l. Summaamalla

(4.9) yli j:n saadaan lausekkeelle (4.7) arvio

$$\begin{aligned}
&\sum_j |f(x_j) - f(y_j)| + \int_{l\cap U\setminus \cup_j [x_j,y_j]} |\partial_\lambda f| \\
&\qquad \le \sum_j \left(\int_{[x_j,y_j]\setminus K} |\partial_\lambda f| + 2^n \sum_{\mathcal{SH}(Q)\cap [x_j,y_j]\neq\emptyset} |\nabla f|(Q) l(Q) \right) + \int_{l\cap U\setminus \cup_j [x_j,y_j]} |\partial_\lambda f| \\
&\qquad \le 2^n \sum_{\mathcal{SH}(Q)\cap l\neq\emptyset} |\nabla f|(Q) l(Q) + \int_{l\cap U\setminus K} |\partial_\lambda f|.
\end{aligned}$$

Koska kokonaisheilahtelua $\int_{l\cap U} |\partial_\lambda f|$ voidaan arvioida lausekkeella (4.7) saadaan arvio

$$\int_{l\cap U} |\partial_\lambda f| \le 2^n \sum_{\mathcal{SH}(Q)\cap l\neq\emptyset} |\nabla f|(Q) l(Q) + \int_{l\cap U\setminus K} |\partial_\lambda f|. \tag{4.10}$$

Lisäksi vain Whitney-kuutiot joiden koko on korkeintaan Δ ovat mukana edeltävässä arviossa (ja Δ voidaan valita niin pieneksi kuin halutaan).

Kun huomataan, että Whitney-kuutio Q on mukana arviossa ainoastaan, jos sen varjo leikkaa suoraa l ja tällaisten suorien mitta on korkeintaan $s(Q)^{n-1}$. Integroimalla arviota (4.10) kaikkien λ:n suuntaisten suorien l yli ja käyttämällä Fubinia saadaan

$$\begin{aligned}
\iint_U |\partial_\lambda f| &:= \int \left(\int_{l\cap U} |\partial_\lambda f| \right) d\mu(l) \\
&\le \int \left(2^n \sum_{\mathcal{SH}(Q)\cap l\neq\emptyset} |\nabla f|(Q) l(Q) + \int_{l\cap U\setminus K} |\partial_\lambda f| \right) d\mu(l) \\
&\le 2^n \sum_{\mathcal{SH}(Q)\cap l\neq\emptyset} |\nabla f|(Q) l(Q) s(Q)^{n-1} + \iint_{U\setminus K} |\partial_\lambda f|.
\end{aligned}$$

Ensimmäinen sarja suppenee, koska Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\sum |\nabla f|(Q) l(Q) s(Q)^{n-1} \le \left(\sum |\nabla f|(Q)^p |Q| \right)^{1/p} \left(\sum (s(Q)/l(Q))^{p'(n-1)} |Q| \right)^{1/p'} < \infty, \tag{4.11}$$

missä oikean puolen ensimmäinen sarja on (Hölderöimällä integraalia) korkeintaan $\sum |\nabla f|^p(Q)|Q|$ ja siten funktion f $W^{1,p}(U \setminus K)$ Sobolev-normin rajoittama. Jälkimmäinen sarja on äärellinen ehdon (4.5) nojalla. Koska edelleen voimme olettaa, että vain lukua Δ pienemmät kuutiot osallistuvat sarjaan ja Δ voidaan valita niin pieneksi kuin halutaan, joten kun $\Delta \to 0$, sarja lähestyy nollaa ja se voidaan pudottaa arviosta ja päädymme arvioon

$$\iint_U |\partial_\lambda f| \le \iint_{U\setminus K} |\partial_\lambda f|.$$

Selvästi kyseessä on yhtäsuuruus. Tämä todistaa halutun ehdon (4.6) ja väitteen. $\square$

LAUSE 4.12. *Olkoon $p \ge 1$. Jos alue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ toteuttaa ehdon* (4.5) *kun* $1/p + 1/p' = 1$, *niin $K = \partial\Omega$ on $W^{1,p}$-poistuva.*

Todistus. Joukko K on nollamittainen, joten funktio $f \in W^{1,p}(K^c)$ ja sen osittaisderivaatat ovat integroituvia joukossa $\mathbb{R}^n$ ja Lauseen 4.11 nojalla f on ACL ja siten $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

Seuraavaksi näytetään, että John-alue toteuttaa ehdon (4.4), tätä varten tulee näyttää, että kvasihyperbolisten geodeesien joukko toteuttaa Määritelmän 4.8 ehdon John-alueessa eli että kvasihyperbolisten geodeesien päätepisteet peittävät alueen reunan. Tätä varten osoitamme, että John-alueet toteuttavat seuraavan kvasihyperbolisen reunaehdon.

Määritelmä 4.13. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ alue. Sanotaan, että D on *Hölder-alue* tai että se toteuttaa *kvasihyperbolisen reunaehdon*, jos on olemassa kantapiste $x_0 \in D$ ja vakiot $0 < \alpha \leq 1$ ja $c > 0$ joille pätee

$$k_D(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{d(x_0, \partial D)}{d(x, \partial D)} \right) + c \tag{4.12}$$

kaikilla $x \in D$.

Lemma 4.14. *John-alue on Hölder-alue.*

Todistus. Olkoon $D \in \mathbb{R}^n$ John-alue vakioilla a ja b ja olkoon $x_0 \in D$ sen kantapiste. Olkoon annetulle $x_1 \in D$ γ pisteitä x_1 ja x_0 yhdistävä käyrä, joka toteuttaa John-alueen ehdot. Tarkastellaan kahta tapausta.

Oletetaan aluksi, että

$$d(x_1, \partial D) \geq \frac{a+b}{a} l(\gamma). \tag{4.13}$$

Nyt (4.13) nojalla

$$d(x, \partial D) \geq d(x_1, \partial D) - |x_1 - x| \geq \frac{b}{a} l(\gamma) \tag{4.14}$$

kaikilla $x \in \gamma$ ja siten

$$k_D(x_1, x_0) \leq \int_\gamma \frac{ds}{d(x, \partial D)} \leq \frac{a}{b}.$$

Toisaalta määritelmän mukaan $d(x, \partial D) \leq a$ kaikilla $x \in D$, joten

$$k_D(x_1, x_0) \leq \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \log \frac{a}{d(x_1, \partial D)} \leq \frac{a}{b} \log \frac{1}{d(x_1, \partial D)} + \frac{a}{b}(\log a + 1).$$

Oletetaan sitten, että (4.13) ei päde. Tällöin voidaan valita käyrän γ aito osakäyrä γ_1 pisteestä x_1 pisteeseen x_2 siten, että

$$d(x_1, \partial D) = \frac{a+b}{a} l(\gamma_1).$$

Nyt $k_D(x_1, x_2) \leq \frac{a}{b}$ aiemmin todistetun mukaan. Jos $x \in \gamma \setminus \gamma_1 =: \gamma_2$, tällöin määritelmän mukaan

$$d(x, \partial D) \geq b \frac{s}{l(\gamma)} \geq \frac{b}{a} s,$$

missä $x = \gamma(s)$. Siten

$$\begin{aligned} k_D(x_2, x_0) &\le \int_{\gamma_2} \frac{ds}{d(x, \partial D)} \le \frac{a}{b} \int_{l(\gamma_1}^{\gamma} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{a}{b} \log \left(\frac{l(\gamma)}{d(x_1, \partial D)} \frac{a+b}{a} \right) \le \frac{a}{b} \log \frac{a}{d(x_1, \partial D)} + 1. \end{aligned}$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} k_D(x_1, x_0) &\le k_D(x_1, x_2) + k_D(x_2, x_0) \\ &\le \frac{a}{b} \log \frac{a}{d(x_1, \partial D)} + 1 + \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä tarkastellut tapaukset saadaan

$$k_D(x_1, x_0) \le a' \log \frac{1}{d(x_1, \partial D)} + b_0',$$

missä

$$a' = \frac{a}{b} \quad \text{ja} \quad b_0' = \frac{a}{b}(\log a + 1) + 1.$$

□

Osoitetaan seuraavaksi, että kvasihyperbolisten geodeesien pituus on tasaisesti rajoitettu John-alueille.

LEMMA 4.15. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ John-alue, jonka kantapiste on x_0. Tällöin jokaiselle pisteestä x_0 alkavalle kvasihyperboliselle geodeesille $\gamma \subset D$ pätee*

$$\mathcal{H}^1(\gamma) \le C(n, D) d(x_0, \partial D),$$

missä vakio $C = C(n, D)$ ei riipu polusta γ.

TODISTUS. Olkoot $\gamma \subset D$ pisteestä x_0 alkava kvasihyperbolinen geodeesi ja $Q \in \mathcal{W}(D)$ Whitney-kuutio sekä $x_1, x_2 \in Q$. Lemman 3.7 nojalla $k_D(x_1, x_2) \le 1$, joten

$$\frac{\mathcal{H}^1(Q \cap \gamma)}{l(Q)} \le C(n) \int_{Q \cap \gamma} \frac{ds}{d(x, \partial D)} \le C(n)$$

ja edelleen

$$\mathcal{H}^1(\gamma) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{W}(D) \\ Q \cap \gamma \neq \emptyset}} \mathcal{H}^1(Q \cap \gamma) \le C(n) \sum_{\substack{Q \in \mathcal{W}(D) \\ Q \cap \gamma \neq \emptyset}} l(Q). \tag{4.15}$$

Määritellään kaikilla $j \in \mathbb{N}$

$$D_j = \{Q \in \mathcal{W}(D) : k_D(x_0, Q) \le 3j\}$$

ja $D_0 = \emptyset$. Nyt jokainen kuutio kuuluu joukkoon $D_j \setminus D_{j-1}$ jollakin $j \in \mathbb{N}$.

Koska D toteuttaa kvasihyperbolisen reunaehdon (4.12) joillain vakioilla α ja c (Lemma 4.14) on voimassa

$$d(x, \partial D) \le d(x_0, \partial D)\, e^{\alpha c} \exp(-\alpha k(x, x_0)).$$

Jos $Q \in D_j \setminus D_{j-1}$, niin $k_D(x, x_0) \ge j - 1$ kaikilla $x \in Q$, joten

$$d(x, \partial D) \le e^{\alpha c} d(x_0, \partial D) \exp(-\alpha j).$$

Koska γ on pisteestä x_0 alkava kvasihyperbolinen geodeesi on Lauseen 3.8 nojalla olemassa vakio $N \in \mathbb{N}$, joka ei riipu luvusta $j \in \mathbb{N}$ siten, että joukossa $D_j \setminus D_{j-1}$ on korkeintaan N Whitney-kuutiota Q, jotka leikkaavat käyrää γ. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{W}(D)\\ Q\cap\gamma\neq\emptyset}} l(Q) \leq c(n) \sum_{\substack{Q\in\mathcal{W}(D)\\ Q\cap\gamma\neq\emptyset}} d(x_Q,\partial D) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{Q\in D_j\setminus D_{j-1}\\ Q\cap\gamma\neq\emptyset}} d(x_Q,\partial D)\\ &\leq Nc(n,\alpha,c)d(x_0,\partial D)\sum_{j=1}^{\infty}\exp(-\alpha j) \leq Nc(n,\alpha,c)d(x_0,\partial D),\end{aligned}$$

josta yhdessä (4.15) kanssa seuraa väite. □

LEMMA 4.16. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ John-alue, jonka kantapiste on $x_0 \in \Omega$. Tällöin jokainen $x \in \partial\Omega$ on jonkin pisteen x_0 kautta kulkevan kvasihyperbolisen geodeesin päätepiste.*

TODISTUS. Olkoon $x \in \partial\Omega$ ja tarkastellaan jonoa $x_k \in \Omega$, jolle $x_k \to x$. Olkoon γ_k kvasihyperbolinen geodeesi pisteessä x_k pisteeseen x_0. Lemman 4.15 nojalla $\mathcal{H}^1(\gamma_k)$ on tasaisesti rajoitettu riippumatta indeksistä k. Tällöin Arzelàn-Ascolin lauseen nojalla on olemassa osajono γ_k, joka suppenee tasaisesti kohti suoristuvaa polkua γ, joka yhdistää pisteet x ja x_0 ja jolle

$$\mathcal{H}^1(\gamma) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{H}^1(\gamma_k) < \infty.$$

Osoitetaan, että γ on kvasihyperbolinen geodeesi. Olkoot $y, z \in \gamma\cap\Omega$ mielivaltaiset pisteet ja $y_k, z_k \in \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$, jonot pisteitä siten, että $y_k \to y$ ja $z_k \to z$. Tällöin Fatoun Lemman nojalla

$$\int_{\gamma|_{[y,z]}} \frac{ds}{d(w,\partial\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\gamma_k|_{[y_k,z_k]}} \frac{ds}{d(w,\partial\Omega)} = \liminf_{k\to\infty} k_D(y_k,z_k) = k_D(y,z),$$

koska γ_k on geodeesi jokaisella k. Toisaalta kvasihyperbolisen metriikan määritelmän nojalla

$$k_D(y,z) \leq \int_{\gamma|_{[y,z]}} \frac{ds}{d(w,\partial\Omega)}.$$

□

SEURAUS 4.17. *John-alueiden reunat ovat $W^{1,n}$-poistuvia.*

TODISTUS. Lemman 4.16 nojalla kvasihyperbolisilla geodeeseilla pääsee reunalle eli varjot peittävät joukon reunan ja John-alueille pätee $s(Q) \leq Cl(Q)$, näin ollen

$$\sum_{Q\in\mathcal{W}(\Omega)} s(Q)^n \leq C \sum_{Q\in\mathcal{W}(\Omega)} l(Q)^n = C|\Omega| < \infty.$$

□

4.3. Yleistyksiä ja avoimia kysymyksiä

Artikkelissa [**7**] todistetaan vielä Seurausta 4.17 yleisemmät tulokset

Lause 4.18 ([**7**] Lause 2). *Jos kiinteälle pisteelle $z_0 \in \Omega$ alue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ toteuttaa*

$$k_d(\cdot, z_0) \in L^n(\Omega_K) \tag{4.16}$$

tällöin $K = \partial\Omega$ on $W^{1,n}$-poistuva (ja kvasikonformisesti poistuva). Merkinnällä Ω_K tarkoitetaan joukkoon Ω sisältyvää reunan K ympäristöä.

Lause 4.18 todistetaan valikoimalla sopivasti Whitney-kuutioiden keskipisteitä yhdistävät murtoviivat ja käyttämällä näitä Määritelmän 4.8 käyrinä, jonka jälkeen osoitetaan, että ehdon (4.16) toteuttava alue toteuttaa ehdon (4.4). Edelleen Lauseen 4.18 avulla todistetaan

Lause 4.19 ([**7**] Lause 3). *Jos alue Ω toteuttaa reunaehdon*

$$d(x, \partial\Omega) < \exp(-(k_D(x, z_0))^{n-1} \log k_D(x, z_0))^{1/n}/o(1))$$

kun $x \in \Omega$ lähestyy reunaa $\partial\Omega$ kiinnitetyllä $z_0 \in \Omega$, niin $K = \partial\Omega$ on $W^{1,n}$-poistuva (ja kvasikonformisesti poistuva).

josta erikoistapauksena saadaan, että myös aiemmin määritellyt Hölder-alueet ovat poistuvia ja seurauksena yhdesti yhtenäisille tason alueille saadaan

Seuraus 4.20 ([**7**] Seuraus 4). *Jos tason alue Ω on yhdesti yhtenäinen ja Riemannin kuvaus lauseen kuvauksen $\phi : B(0,1) \to \Omega$ jatkuvuusmodulille pätee*

$$\omega_\phi(t) < \exp\left(-\sqrt{\log\frac{1}{t}\log\log\frac{1}{t}}/o(1)\right)$$

kun $t \to 0$, niin $K = \partial\Omega$ on $W^{1,2}$-poistuva (ja konformisesti poistuva).

Edelleen artikkelissa [**9**] Seurausta 4.20 parannetaan osoittamalla, että arvio pätee ilman toisen kertaluvun termiä $\log\log\frac{1}{t}$.

Kuten jo johdannossa todettiin ei kysymykseen seuraako kvasikonformisesta poistuvuudesta $W^{1,n}$-poistuvuus tunneta vastausta edes tason tapauksessa. Lisää avoimia kysymyksiä löytyy artikkeleista [**3**] sekä [**14**]. Viimeaikaisia tuloksia Sobolev-funktioille on käsitelty artikkelissa [**11**].

LUKU 5

Kvasikonforminen poistuvuus

Tarkastellaan lopuksi kvasikonformista poistuvuutta homeomorfismeille.

MÄÄRITELMÄ 5.1. Kompaktia joukkoa $K \subset U$ sanotaan kvasikonformisesti poistuvaksi alueessa U, jos jokainen homeomorfismi $f : U \to f(U)$, joka on kvasikonforminen joukossa $U \setminus K$ on kvasikonforminen joukossa U.

Seuraavasta lauseesta seuraa kvasikonformisesti poistuvien joukkojen nollamittaisuus

LAUSE 5.2 ([**8**] Lause 3). *Olkoon $E \subset \mathbb{C}$ positiivimitallinen. Tällöin on olemassa homeomorfismi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, joka on konforminen joukossa $\mathbb{C} \setminus E$ ja positiivimitallinen joukko $F \subset E$ siten, että $f(F)$ on nollamittainen.*

SEURAUS 5.3. *Kvasikonformisesti poistuva kompakti joukko on nollamittainen.*

TODISTUS. Lauseen 5.2 funktio ei voi olla kvasikonforminen kaikkialla, koska kvasikonformikuvaukset säilyttävät nollamittaiset joukot (Lause 2.4). □

Seuraava lemma osoittaa, että Sobolev-poistuvuus on vahvempi ominaisuus kuin kvasikonforminen poistuvuus.

LEMMA 5.4. *$W^{1,2}$-poistuva kompakti joukko on kvasikonformisesti poistuva.*

TODISTUS. [**6**, s. 2] Olkoon K kompakti $W^{1,2}$-poistuva joukko. Lemman 4.5 nojalla K on nollamittainen. Olkoon F homeomorfismi, joka on analyyttinen K^c:ssä ja jolle $F'(\infty) = 1$. (ks. [**3**, s. 325])

Tällöin $f(z) = F(z) - z \in W^{1,2}(K^c)$, koska $|F'|^2$:n integrointi antaa kuvan pinta-alan (Lause 2.4 (2)). Nyt $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ ja $\bar{\partial} f = 0$ kaikkialla paitsi nollamittaisessa joukossa, joten Weylin lemman (Lause 2.4 (4)) nojalla f on holomorfinen. Näin ollen Lauseen 2.2 (1) nojalla $F(z) = z + a$. □

LAUSE 5.5. *Jos Ω toteuttaa ehdon* (4.4)*, niin $K = \partial\Omega$ on kvasikonformisesti poistuva.*

TODISTUS. Olkoon Ω alue, joka toteuttaa ehdon (4.4) ja olkoon $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ homeomorfismi, joka on kvasikonforminen joukossa $\mathbb{R}^n \setminus K$. Kun $n = p$

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}} (s(Q)/l(Q))^{p'(n-1)}|Q| = \sum_{Q \in \mathcal{W}} (s(Q)/l(Q))^n l(Q)^n = \sum_{Q \in \mathcal{W}} s(Q)^n < \infty.$$

Näin ollen Lauseen 4.11 nojalla f on ACL ja Lemman 4.9 nojalla K on nollamittainen, joten f on kvasikonforminen. □

SEURAUS 5.6. *John-alueiden reunat ovat kvasikonformisesti poistuvia.*

Voidaan näyttää ([**10**, IV.§5]), että K-kvasikonformikuvaus toteuttaa niin kutsutun Beltramin differentiaaliyhtälön

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z$$

melkein kaikkialla, missä μ on mitallinen funktio, jolle $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$. Seuraava keskeinen tulos kertoo, että myös käänteinen väite on totta.

Lause 5.7 (Mitallinen Riemannin kuvauslause). *Olkoon $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ alue ja $\mu : U \to \mathbb{C}$ mitallinen funktio jolle $\|\mu\|_\infty < 1$. Tällöin on olemassa joukon U kvasikonformikuvaus f jolle $\mu = \mu_f$ eli toisin sanoen*

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z$$

melkein kaikialla joukossa U. Lisäksi joukon U kvasikonforminen kuvaus g toteuttaa $\mu_g = \mu = \mu_f$ jos ja vain jos $f \circ g^{-1} : g(U) \to f(U)$ on konformikuvaus.

Todistus. Ks. [**2**, luku 5]. □

Osoitetaan, että seuraava analoginen poistuvuusmääritelmä konformikuvauksille on ekvivalentti kvasikonformisen poistuvuuden kanssa

Määritelmä 5.8. Kompaktia joukkoa $K \subset U$ sanotaan konformisesti poistuvaksi alueessa U, jos jokainen homeomorfismi $f : U \to f(U)$, joka on konforminen joukossa $U \setminus K$ on konforminen joukossa U.

Lause 5.9. *Joukko on kvasikonformisesti poistuva jos ja vain jos se on konformisesti poistuva.*

Todistus. Oletetaan, että E on kvasikonformisesti poistuva. Lemman 5.3 nojalla joukko E on nollamittainen. Nyt jos $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ on homeomorfismi, joka on konforminen joukossa $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$, niin erityisesti se on kvasikonforminen joukon E ulkopuolella ja koska E on kvasikonformisesti poistuva on f kvasikonforminen avaruudessa $\hat{\mathbb{C}}$. Siten Weylin lemman 2.4 nojalla f on konforminen.

Kääntäen, olkoot E konformisesti poistuva ja $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ homeomorfismi, joka on kvasikonforminen joukossa $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$. Tällöin mitallisen Riemannin kuvauslauseen nojalla on olemassa kvasikonforminen kuvaus $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ siten, että $f \circ g$ on konforminen joukossa $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ ja E:n konformisen poistuvuuden nojalla konforminen koko Riemannin pallolla $\hat{\mathbb{C}}$. Näin ollen, koska $f^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ on kvasikonforminen on $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ kvasikonforminen Riemannin pallolla. Koska g oli mielivaltainen on E kvasikonformisesti poistuva.

□

Edellisen tuloksen perusteella saadaan käyttöön paljon tuloksia kvasikonformikuvausten poistuvista joukoista. Artikkelissa [**14**] on tarkasteltu poistuvia joukkoja seuraaville kuvausluokille

$$\begin{aligned} H^\infty(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ rajoitettu ja holomorfinen}\}, \\ A(\Omega) &= \{f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \text{ jatkuva ja holomorfinen joukossa } \Omega\}, \\ S(\Omega) &= \{\text{konformikuvaukset } f : \Omega \to \hat{C}\}, \\ CH(\Omega) &= \{\text{homeomorfismit } f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{ jotka ovat konformisia joukossa } \Omega\}, \end{aligned}$$

missä, $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ ja E on kompakti poistuva joukko. Luvun 2 tulosten perusteella luokkien H^∞, A, S ja CH poistuvuudet voidaan karakterisoida seuraavasti

- Jokainen rajoitettu joukon Ω holomorfinen funktio on vakio,
- jokainen joukon $\hat{\mathbb{C}}$ funktio, joka on holomorfinen joukossa Ω on vakio,
- jokainen joukon Ω konformikuvaus on Möbius-kuvaus,
- jokainen homeomorfismi joukolta $\hat{\mathbb{C}}$ itselle, joka on konforminen joukossa Ω on Möbius-kuvaus.

Luokka CH on sama kuin Lauseessa 5.9 ja voidaan näyttää (ks. [**14**]), että luokkien H^∞, A ja S poistuvat joukot ovat poistuvia myös luokassa CH ja siten Lauseen 5.9 nojalla myös kvasikonformikuvauksille.

Kirjallisuutta

[1] L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings,* Second edition, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[2] K. Astala, T. Iwaniec, G. Marten *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane,* Princeton University Press, 2009.

[3] C.J. Bishop, *Some homeomorphisms of the sphere conformal off a curve,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 19 (1994), 323–338.

[4] F. W. Gehring, O. Martio, *Lipschitz classes and quasiconformal mappings,* Ann. Acad. Sci. Fenn. 10 (1985), 203–219.

[5] F. W. Gehring, B. Osgood, *Uniform domains and the quasihyperbolic metric,* J. Analyse Math. 36 (1979), 50-74

[6] P. Jones, *On removable sets for Sobolev spaces in the plane,* Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein (Fefferman, C., Fefferman, R. and Wainger, S., eds.), Princeton Math. Ser. 42, pp. 250-267, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1995.

[7] P. Jones, S. Smirnov, *Removability theorems for Sobolev functions and quasiconformal maps,* Ark. Mat. 38 (2000), no. 2, 263-279

[8] R. Kaufman, J.-M., Wu, *On removable sets for quasiconformal mappings,* Ark. Mat. 34 (1996), 141-158.

[9] P. Koskela and T. Nieminen, *Quasiconformal removability and the quasihyperbolic metric,* Indiana Univ. Math. J., 54 (2005), 143–151.

[10] O. Lehto, K.I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[11] D. Ntalampekos, *A removability theorem for Sobolev functions and detour sets,* preprint

[12] R. Näkki, J. Väisälä, *John Disks,* Expositiones Math. 9 (1991), 3–43

[13] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton Unib. Press, 1970.

[14] M. Younsi, *On removable sets for holomorphic functions,* EMS Surv. Math. Sci. 2 (2015), no. 2, 219-254.