# Pellin yhtälöistä

Antti Paavola

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2019

# Tiivistelmä

A. Paavola, *Pellin yhtälöistä*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 46 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, elokuu 2019.

Tutkielmassa etsitään ratkaisuja Pellin yhtälölle eli muotoa $x^2 - Dy^2 = 1$ olevalle yhtälölle, jossa luku $D$ ei saa olla minkään luvun neliö. Aluksi tutustutaan kolmiolukuihin ja neliölukuihin. Näistä käydään läpi tärkeimpiä laskukaavoja. Kolmioneliölukuja ovat luvut, jotka ovat sekä kolmio-, että neliölukuja. Kolmioneliölukujen tutkiminen liittyy olennaisesti Pellin yhtälön erikoistapaukseen, jossa $D = 2$. Tutkielmassa joitain lauseita todistetaan ensin tässä erikoistapauksessa ja yleistetään myöhemmin kaikkiin Pellin yhtälöihin. Lisäksi osoitetaan, että Pellin yhtälön ratkaisut saadaan helposti ratkaistua luvun $D$ ollessa jonkin luvun neliö ja siksi kyseinen tilanne ei ole kiinnostava. Samoin Pellin yhtälön reaalilukuratkaisut löydetään helposti, joten tutkielmassa keskitytään pääasiassa Pellin yhtälön kokonaislukuratkaisujen löytämiseen.

Erikoistapausten jälkeen tutkielmassa aletaan keskittyä Pellin yhtälön yleisen ratkaisun löytämiseen. Kullakin Pellin yhtälöllä on ääretön määrä ratkaisuja ja tutkielman alkupuolella käydään läpi apulauseita näiden selvittämistä silmällä pitäen. Tutkielman alkupuolen merkittävin tulos on se, että löytämällä Pellin yhtälölle yhden ratkaisun, saadaan loput kyseisen yhtälön ratkaisut ensimmäisestä ratkaisusta potenssiin korottamisen avulla.

Tutkielman jälkipuoliskolla keskitytään ketjumurtolukuihin, koska Pellin yhtälön pienin ratkaisu löydetään niiden avulla. Tuon ratkaisun löytämistä varten tarvitaan konvergentin ja jaksollisen ketjumurtoluvun käsitteet. Lähes jokainen luku voidaan esittää ketjumurtolukuna ja pienimmän ratkaisun löytämistä varten täytyy luvun $D$ neliöjuuri esittää ketjumurtolukuna, jossa alkaa toistua tietty jakso. Tutkielman lopulla käydään läpi tärkeät kaavat, joiden avulla saadaan laskettua jaksoa ja konvergentteja hyödyntäen Pellin yhtälön pienin ratkaisu. Ratkaisu lasketaan eri kaavoilla riippuen siitä onko luku $D$ parillinen vai pariton. Tämän ratkaisun avulla sitten saadaan laskettua kaikki loput Pellin yhtälön ratkaisut.

# Sisältö

# 1 Johdanto

Tässä pro gradu-tutkielmassa etsitään Pellin yhtälön ratkaisuja. Pellin yhtälö on muotoa $x^2 - Dy^2 = 1$, missä $D \in \mathbb{N}$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Yhtälölle löydetään helposti reaalilukuratkaisut, joissa muuttuja $y$ ilmoitetaan muuttujan $x$ avulla. Tässä tutkielmassa keskitytäänkin suurelta osin Pellin yhtälön kokonaislukuratkaisujen löytämiseen.

Yhtälölle $x^2 - Dy^2 = 1$ voidaan helposti löytää ratkaisu, jossa $x = 1$ ja $y = 0$. Vastaavasti luvut $x = -1$ ja $y = 0$ toteuttavat Pellin yhtälön. Näistä ratkaisuista puhutaan tässä tutkielmassa Pellin yhtälön triviaaleina ratkaisuina. Näitä ratkaisuja ei huomioida silloin, kun tässä tutkielmassa puhutaan Pellin yhtälön pienimmästä ratkaisusta, vaan tällä tarkoitetaan pienintä mahdollista positiivista kokonaislukua $x > 1$, jolla löydetään kokonaisluku $y$ siten, että yhtälö $x^2 - Dy^2 = 1$ toteutuu. Luonnolliset luvut $\mathbb{N}$ ovat tässä tutkielmassa luvut $1, 2, 3, 4, \ldots$. Luonnollisten lukujen lukualuetta laajennettuna nollalla merkitään $\mathbb{N}_0$.

Tutkielma jakaantuu käytännössä kahteen osaan. Ensimmäisessä osassa tähdätään koko ajan siihen, että saadaan todistettua tärkeä tulos, jonka mukaan selvittämällä yhden yhtälön $x^2 - Dy^2 = 1$ ratkaisun $(x, y)$, saadaan kaikki loput yhtälön kokonaislukuratkaisut tämän ratkaisun avulla potenssiin korottamalla. Se on merkittävimpiä huomioita Pellin yhtälön ratkaisujen selvittämisessä ja tätä varten käytetään aputuloksia. Tutkielman jälkipuoliskossa taas käydään läpi lukujen ketjumurtolukuesityksiä. Pellin yhtälön $x^2 - Dy^2 = 1$ luvun $D$ ketjumurtolukuesityksen avulla saadaan selville Pellin yhtälön pienin ratkaisu. Pellin yhtälöllä on ääretön määrä ratkaisuja ja kaikki ratkaisut saadaan pienimmästä ratkaisusta potenssiin korottamalla. Pellin yhtälön pienimmätkin ratkaisut ovat usein suuria lukuja, joten esimerkeissäkään ei kovin montaa ratkaisua yhdelle Pellin yhtälölle ole mielekästä lähteä etsimään.

Ensimmäisenä tutkielmassa etsitään ratkaisuja Pellin yhtälön erikoistapaukselle, jossa $D = 2$. Kaikissa muissa tapauksissa ratkaisut saadaan käytännössä samalla tavalla, mutta tässä erikoistapauksessa todistukset ovat hieman yksinkertaisempia ja yhtälön ratkaisut pysyvät pienempinä. Onkin hyvä tutustua laskutapoihin ja todistusten periaatteisiin ensin hieman yksinkertaistetussa muodossa. Tämän jälkeen todistukset on helppo laajentaa yleiseen tapaukseen. Erikoistapauksen $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisuihin saadaan liitettyä myös kolmioluvut ja neliöluvut. Nämä ovat saaneet nimensä tasoon aseteltujen pisteiden lukumäärän mukaan. Tutkielmassa selvitetään mitä nämä luvut ovat ja käydään läpi joitakin kolmio- ja neliölukujen yleisiä laskusääntöjä.

Jotkin luvut ovat sekä kolmiolukuja, että neliölukuja. Tällaiset kolmioneliöluvut saadaan selville Pellin yhtälöstä $x^2 - 2y^2 = 1$ eli erikoistapaus $D = 2$ liittyy tiiviisti näihin lukuihin. Luvun lopuksi todistetaan, että selvittämällä yhden yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisun $(x, y)$, saadaan kaikki loput yhtälön kokonaislukuratkaisut tämän ratkaisun avulla potenssiin korottamalla. Todistuksessa käytään Fermat'n äärellisen laskeutumisen menetelmää.

Luvussa 3 käsitellään Pellin yhtälön historiaa antiikin ajoista viime vuosituhannen jälkipuoliskolle asti. Tuolloin nykyinen Pellin yhtälön ratkaisutapa sai lopullisen muotonsa. Selvitämme myös miksi yhtälön luku $D$ ei saa olla minkään luvun neliö. Tällaisessa tilanteessa huomataan helposti, että Pellin yhtälön ainoat kokonaislukuratkaisut ovat sen triviaaliratkaisut. Tutkielman merkittävimpiä tuloksia on Pellin yhtälön yleisen ratkaisun olemassaolon todistaminen lauseessa 3.6. Tätä varten tutustumme kyyhkyslakkaperiaatteen toimintaan ja tärkeänä apulauseena todistuksessa toimii Diofantoksen approksimaatio. Lopulta saamme selville, että kaikki Pellin yhtälön $x^2 - Dy^2 = 1$ kokonaislukuratkaisut saadaan yhden ratkaisun $(x, y)$ avulla korottamalla lukua $x + y\sqrt{D}$ eri potensseihin. Tämä merkittävä tieto, kun Pellin yhtälölle etsitään useampia ratkaisuja.

Selvittääksemme Pellin yhtälön $x^2 - Dy^2 = 1$ pienimmän ratkaisun, tarvitsemme avuksemme ketjumurtolukuja. Tutustumme ensin johdantona äärellisiin ketjumurtolukuihin, jollaisena jokainen rationaaliluku voidaan esittää. Ketjumurtolukuesitys löydetään Eukleideen algoritmin avulla. Irrationaaliluvut voidaan esittää äärettömänä ketjumurtolukuna ja oikean esityksen löytämiseen voidaan käyttää samankaltaista tapaa kuin äärellisessä tapauksessa. Jossain ketjumurtolukuesityksissä alkavat samat luvut toistua kerta toisensa jälkeen. Tällaiset ketjumurtoluvut ovat jaksollisia. Jaksollisia ovat erityisesti luonnollisten lukujen neliöjuuret ja juuri luvun $D$ neliöjuuren ketjumurtolukuesitystä tarvitsemmekin. Luku $D$ ei saa olla minkään luvun neliö, joten sen neliöjuuri on irrationaaliluku.

Ääretön ketjumurtoluku voidaan katkaista jostain kohdasta. Katkaistua osaa kutsutaan ketjumurtoluvun konvergentiksi. Pidentämällä luvun konvergenttia, saadaan koko ajan tarkempia tuloksia ja luvun ketjumurtolukuesityksen konvergentit lähestyvät kyseistä lukua. Konvergentit saadaan laskettua selvittämällä ratkaistavan Pellin yhtälön jakson pituus ja jaksossa olevat luvut. Lopulta tutkielman loppupuolella huomataan, että konvergenttien avulla saadaan Pellin yhtälön pienin ratkaisu eli lukupari $(x, y)$. Siten Pellin yhtälön kaikki ratkaisut osataan selvittää, kun tähän tietoon yhdistetään tieto, että loput ratkaisut saadaan korottamalla kaavaa $x + y\sqrt{D}$ eri potensseihin.

Kaavan voi korottaa aina vain suurempaan ja suurempaan potenssiin, joten ratkaisuja on äärettömästi.

Tutkielman keskeinen lähde on Joseph Hillel Silvermanin teos *A Friendly Introduction to Number Theory*, jota on hyödynnetty tutkielmassa alusta loppuun. Tätä täydentävät useat muut lukuteorian teokset ja muutamat muut lähteet.

# 2 Erikoistapaus D=2

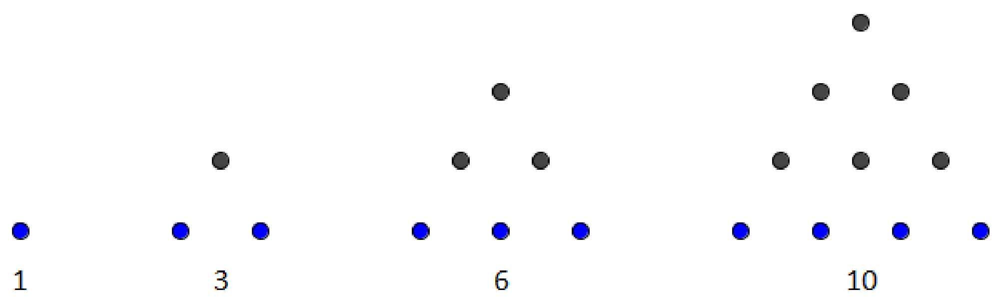
Tutkitaan ensin Pellin yhtälön erikoistapausta, jossa $D = 2$ eli yhtälö on muotoa $x^2 - 2y^2 = 1$. Näiden ratkaisujen etsimistä varten tutustutaan seuraavaksi kolmioneliölukuihin, joiden määrittelyä varten tarvitsemme tiedon kolmio- ja neliöluvuista.

## 2.1 Kolmio- ja neliöluvut

**Määritelmä 2.1.** Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin luku $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ on järjestyksessään $n$. *kolmioluku.*

Kolmioluku on luonnollinen luku, jota voidaan kuvata tasaisin välein tasoon aseteltuna pistemääränä. Tällöin pisteet muodostavat tasasivuisen kolmion, kuten kuvassa 1. Lisäämällä edelliseen kolmioon seuraavan luonnollisen luvun verran pisteitä, saadaan niistä kolmioon uusi rivi. Jokaiselle kolmion sivulle tulee yksi piste enemmän kuin edellisessä kolmioluvussa.

**Esimerkki 2.2.** Ensimmäinen kolmioluku on luku 1. Seuraavat kolmioluvut saadaan lisäämällä edelliseen kolmiolukuun seuraava luonnollinen luku, joten toinen kolmioluku on $1+2=3$, kolmas kolmioluku on $1+2+3=6$ ja neljäs $1+2+3+4=10$. Kuva 1 havainnollistaa, miten seuraavan luonnollisen luvun lisääminen edelliseen kolmiolukuun täydentää edellisen tasasivuisen kolmion uudeksi tasasivuiseksi kolmioksi.




Kuva 1: Neljä ensimmäistä kolmiolukua.

Luku $n$ kertoo monesko kolmioluku on kyseessä ja tasasivuisen kolmion kannan pisteiden lukumäärän, kuten esimerkistä 2.2 huomataan. Kannan pisteiden lukumäärä on edelliseen kolmiolukuun lisättyjen pisteiden lukumäärä. Kolmioluvut ovat siis muotoa

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

joten jokainen kolmioluku saadaan summaamalla aritmeettisen jonon termejä.

**Määritelmä 2.3.** *Täydellinen luku* $m = \sum_{\substack{d|m \\ 1 \leq d < m}} d$ *on luku, joka saadaan kaikkien luvun itseään pienempien tekijöiden summana.*

**Esimerkki 2.4.** Luvun 28 positiiviset tekijät ovat 1, 2, 4, 7, 14 ja 28. Näistä kaikki ovat lukua 28 lukuunottamatta pienempiä kuin luku itse. Summaamalla $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ saadaan luku itse, joten 28 on täydellinen luku.[1, s. 136]

**Lause 2.5.** *Olkoon $j \in \mathbb{N}$ parillinen ja täydellinen luku. Tällöin $j$ on kolmioluku.*

*Todistus.* Euler todisti, että jokainen positiivinen parillinen ja täydellinen luku on muotoa $j = 2^{p-1}(2^p - 1)$, missä $p > 1$ ja $2^p - 1$ ovat alkulukuja. Tällöin

$$2^{p-1}(2^p - 1) = \left(\frac{1}{2}\right) 2^p(2^p - 1),$$

mikä on järjestyksessään $2^p - 1$. kolmioluku, kun $n = 2^p - 1$. $\square$

Katso [2, Thm 6.94].

**Lause 2.6.** *Olkoon $T_n$ järjestyksessään $n$. kolmioluku ja $T_{n-1}$ tätä edeltävä kolmioluku. Tällöin kolmiolukujen neliöille pätee laskusäännöt*

*a)* $T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$

*b)* $T_n^2 + T_{n-1}^2 = T_n^2$.

*Todistus.* Kirjoitetaan kolmioluvut aritmeettisen summan avulla, jolloin $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ja $T_{n-1} = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

a) Sijoitetaan aritmeettiset summat kaavaan ja sievennetään lauseketta, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} T_n^2 - T_{n-1}^2 &= \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)\,n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} - \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} = \frac{2n^3 + 2n^3}{4} \\ &= \frac{4n^3}{4} = n^3. \end{aligned}$$

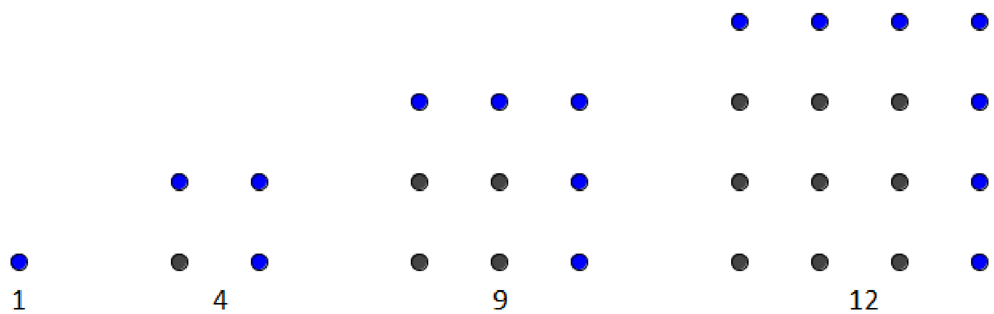
b) Tehdään samoin kuin a-kohdassa, jolloin sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}
T_n^2 + T_{n-1}^2 &= \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(n-1)\,n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} + \frac{n^4-2n^3+n^2}{4} = \frac{2n^4+2n^2}{4} \\
&= \frac{n^4+n^2}{2} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} = T_{n^2}.
\end{aligned}$$

□

**Määritelmä 2.7.** Luku $S_m = m^2$, missä $m \in \mathbb{N}$ on järjestyksessään $m$. *neliöluku.*

Neliöluku on luonnollista lukua vastaava pistemäärä, joka tasaisin välein tasoon aseteltuna muodostaa neliön. Luonnollinen luku $m$ kertoo monesko neliöluku on kyseessä. Samalla se kertoo neliön yhden sivun pisteiden lukumäärän, kuten kuvasta 2 huomataan.




Kuva 2: Neljä ensimmäistä neliölukua.

**Lause 2.8.** *Kolmioluvuille pätee* $T_{n-1} + T_n = n^2 = (T_n - T_{n-1})^2$, *missä* $n^2$ *on järjestyksessään* $n$. *neliöluku.*

*Todistus.*

$$\begin{aligned}
T_{n-1} + T_n &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n^2+n+n^2-n}{2} \\
&= \frac{2n^2}{2} = n^2.
\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}(T_n - T_{n-1})^2 &= \left(\frac{(n-1)\,n}{2} - \frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n^2+n-n^2+n}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2n^2}{2}\right)^2 = (n)^2 \\ &= n^2.\end{aligned}$$

Näin molemmat lauseen yhtäsuuruudet on osoitettu todeksi, joten $T_{n-1} + T_n = n^2 = (T_n - T_{n-1})^2$.

Lisäksi $T_n - T_{n-1} = n$. Ottamalla näistä kolmioluvuista järjestyksessä vuorollaan neliöt, saadaan myös neliöluvut järjestyksessä. Siispä jokaisessa tilanteessa pätee $S_m = n^2$. □

**Esimerkki 2.9.** Kuudes kolmioluku on 21 ja seitsemäs kolmioluku on 28. Näiden lukujen summa on $21 + 28 = 49$. Vastaavasti kyseisten kolmiolukujen erotusten neliö on $(28 - 21)^2 = 49$. Lisäksi $7^2 = 49$, joten 49 on järjestyksessään seitsemäs neliöluku.

## 2.2 Kolmioneliöluvut

Tutkitaan seuraavaksi lukuja, jotka ovat sekä kolmio-, että neliölukuja. Tällöin lukujen tulee olla sekä muotoa $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, että muotoa $S_m = m^2$. Siispä tällöin $\dfrac{n(n+1)}{2} = m^2$. Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla kahdeksan, jolloin $4n^2 + 4n = 8m^2$. Ottamalla yhteinen tekijä, saadaan yhtälö muotoon $(2n+1)^2 - 1 = 8m^2$. Tehdään sitten muuttujan vaihto siten, että $x = 2n+1$ ja $y = 2m$. Tällöin yhtälö saadaan muotoon $x^2 - 1 = 2y^2$ eli $x^2 - 2y^2 = 1$. Tämä on erikoistapaus Pellin yhtälöstä tilanteessa, jossa $D = 2$.

**Määritelmä 2.10.** *Kolmioneliöluku* on luonnollinen luku, joka on sekä kolmioluku, että neliöluku. Kolmioneliölukujen järjestyslukuja merkitään $(n, m)$, missä $n$ on kolmiluvun järjestysluku ja $m$ on neliöluvun järjestysluku.

Kuten yllä todettiin, kolmioneliöluvut saadaan muotoa $x^2 - 1 = 2y^2$ olevan yhtälön kokonaislukuratkaisuista. Aiemman muuttujan vaihdon nojalla kyseisessä yhtälössä $x = 2n+1$ ja $y = 2m$. Siispä $n = \dfrac{x-1}{2}$ ja $m = \dfrac{y}{2}$, missä $n$ kertoo kolmioluvun järjestysluvun ja $m$ kertoo neliöluvun järjestysluvun.

**Esimerkki 2.11.** Luku 1 on sekä kolmio-, että neliöluku. Se on siis kolmioneliöluku ja sitä merkitään $(n, m) = (1, 1)$, koska se on ensimmäinen kolmioluku ja samalla ensimmäinen neliöluku. Huomataan, että luvut $x = 3$ ja $y = 2$ toteuttavat yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$. Juuri tämä lukupari tuottaa ensimmäisen kolmioneliöluvun, sillä $n = \frac{x-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ ja $m = \frac{y}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Toinen kolmioneliöluku on 36. Tätä vastaavat lukuparit ovat $(n, m) = (8, 6)$ ja $(x, y) = (17, 12)$, sillä $n = \frac{17-1}{2} = 8$ ja $3 = \frac{12}{2} = 6$.

Kolmioneliöluvut saadaan siis selville ratkaisemalla Pellin yhtälö erikoistapauksessa $x^2 - 2y^2 = 1$. Lähdetään tätä varten tutkimaan miten yhtälön ratkaisut saataisiin selvitettyä. Kirjoitetaan yhtälö muodossa

$$1 = x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}).$$

Esimerkissä 2.11 mainittu yhtälön ratkaisu $x = 3$ ja $y = 2$ voidaan sijoittaa yhtälöön, jolloin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$1 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}).$$

Koitetaan korottaa kyseinen yhtälö puolittain toiseen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 1 = 1^2 &= ((3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}))^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2(3 - 2\sqrt{2})^2 \\ &= (9 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 2)(9 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 2) \\ &= (17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 17^2 - 2 \cdot 12^2. \end{aligned}$$

Siispä yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ensimmäisen ratkaisun sijoitus ja neliöön korotus antoi yhtälön seuraavan ratkaisun. Sijoitetaan jälleen ratkaisu $x = 3$ ja $y = 2$ yhtälöön $1 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})$, mutta korotetaan yhtälö tällä kertaa puolittain potenssiin kolme. Tällöin ratkaisuksi saadaan $99^2 - 2 \cdot 70^2 = 1$ eli yhtälölle saatiin jälleen uusi ratkaisu, jonka avulla saadaan selville kolmas kolmioneliöluku. Siis kolmas kolmioneliöluku on 35. neliöluku, koska $\frac{70}{2} = 35$. Niinpä vastaava kolmioneliöluku on $35^2 = 1225$.

Edellisestä huomataan, että esimerkiksi laskusta

$$(3 + 2\sqrt{2})^2(3 - 2\sqrt{2})^2 = (17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 17^2 - 2 \cdot 12^2$$

selviävän lukuparin $(x, y) = (17, 12)$ selvittämiseen riittää jo luvun $(3+2\sqrt{2})$ korottaminen potenssiin. Tämä pätee tietenkin jokaisessa tilanteessa, jossa kyseistä lukua korotetaan potenssiin, sillä muotoa $x^2 - 2y^2 = 1$ olevassa yhtälössä $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})$ ja siten muuttujat $x$ ja $y$ saadaan selville jo tulon ensimmäisestä tekijästä. Näyttäisi siis siltä, että vastaavan kaltaisilla luvun $3+2\sqrt{2}$ potenssiin korotuksilla saadaan selville kaikki yhtälön $x^2-2y^2=1$ positiiviset ratkaisut. Seuraavassa lauseessa 2.12 osoitetaan näin todella olevan.

Lauseen todistuksessa tarvitsemme Fermat'n äärellisen laskeutumisen menetelmää. Pierre de Fermat todisti ettei yhtälöllä $x^4+y^4=z^4$ ole ratkaisuja. Hän oletti, että on ratkaisu $x=X_1, y=Y_1$ ja $z=Z_1$. Fermat kuitenkin osoitti, että tällöin on olemassa myös edellistä pienempi ratkaisu $x=X_2, y=Y_2, z=Z_2$. Tämän jälkeen löytyy jälleen tätä pienempi ratkaisu ja koko ajan pieneneviä ratkaisuja löytyy teoriassa äärettömästi. Kuitenkin $x,y,z\in\mathbb{N}$, joten on oltava pienin mahdollinen ratkaisu, jolloin kyseessä on ristiriita.[9, s. 109]

**Lause 2.12.** *Kaikki yhtälön* $x^2-2y^2=1$ *positiiviset kokonaislukuratkaisut saadaan korottamalla lukua* $3+2\sqrt{2}$ *potenssiin siten, että* $x_k+y_k\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^k$, $k\in\mathbb{N}$.

*Todistus.* Kaikki yhtälön $x^2-2y^2=1$ positiiviset ratkaisut $(x,y)$, missä $x$ ja $y$ saadaan lausekkeen $x+y\sqrt{2}$ kertoimista, sillä

$$1=x^2-2y^2=(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2}).$$

Jotta kaikki yhtälön $x^2-2y^2=1$ ratkaisut saataisiin selville korottamalla lukua $3+2\sqrt{2}$ eri luonnollisten lukujen potensseihin, täytyy jokaisella eksponentilla $k\in\mathbb{N}$ muodostua yhtälön ratkaisu $(x_k,y_k)$ eli täytyy päteä $(3+2\sqrt{2})^k=x_k+y_k\sqrt{2}$. Lisäksi yhtälöllä ei saa lukuparien $(x_k,y_k)$ lisäksi olla muita ratkaisuja.

**i)** Todistetaan ensin induktiolla, että jokaisella $k\in\mathbb{N}$ muodostuu yhtälön ratkaisu $(x_k,y_k)$. Kun $k=1$, niin $(3+2\sqrt{2})^1=3+2\sqrt{2}$. Siispä muodostuu ratkaisu $(x_1,y_1)=(3,2)$, joten yhtälö pätee ainakin tilanteessa $k=1$. Oletetaan sitten, että yhtälö on totta myös tilanteessa $k=s$. Siispä Pellin yhtälön $x^2-2y^2=1$ ratkaisu on $(3+2\sqrt{2})^s=x_s+y_s\sqrt{2}$. Osoitetaan, että vastaava tulos pätee myös tilanteessa $k=s+1$. Nyt

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{s+1}&=(3+2\sqrt{2})^{s+1}\\&=(3+2\sqrt{2})^s(3+2\sqrt{2})\\&=(x_s+y_s\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\\&=3x_s+2x_s\sqrt{2}+3y_s\sqrt{2}+4y_s\\&=3x_s+4y_s+(2x_s+3y_s)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$(3-2\sqrt{2})^{s+1} = 3x_s + 4y_s - (2x_s + 3y_s)\sqrt{2}.$$

Siispä

$$\begin{aligned}
&3x_s + 4y_s^2 - 2(2x_s + 3y_s)^2 \\
&= (3x_s + 4y_s + (2x_s + 3y_s)\sqrt{2})(3x_s + 4y_s - (2x_s + 3y_s)\sqrt{2}) \\
&= (3+2\sqrt{2})^{s+1}(3-2\sqrt{2})^{s+1} \\
&= ((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}))^{s+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Siis yhtälö saadaan haluttuun muotoon myös tilanteessa $k = s + 1$. Tällöin yhtälön ratkaisu on $(x_{s+1}, y_{s+1}) = (3x_s + 4y_s, 2x_s + 3y_s)$. Niinpä induktion nojalla yhtälölle $x^2 - 2y^2 = 1$ saadaan ratkaisu $(x_k, y_k)$ jokaisella eksponentilla $k \in \mathbb{N}$ siten, että $(3+2\sqrt{2})^k = x_k + y_k\sqrt{2}$.

**ii)** Seuraavaksi pitää vielä osoittaa, että kaikki yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisut ovat muotoa $(3+2\sqrt{2})^k$, missä $k \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $(a, b)$ on yhtälön jokin ratkaisu. Nyt on osoitettava, että pätee

$$a + b\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^k$$

jollain $k \in \mathbb{N}$. Pienin mahdollinen luku muuttujan $a$ paikalle on luku 3, joten aloitetaan tutkimalla tätä. Osoitetaan, että tällöin $b = 2$ jollain $k$. Tämä on selvää silloin, kun valitaan $k = 1$. Siten voidaankin suoraan olettaa, että muuttuja $a$ on suurempaa kuin kolme. Näytetään, että tällöin on löydyttävä jokin toinen yhtälön ratkaisu $(c, d)$ siten, että $a + b\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$, missä $a > c$. Jos $(c, d) = (3, 2)$, väite on todistettu. Muulloin käytetään Fermat'n äärellisen laskeutumisen menetelmää. Tällöin täytyy luvun $c$ olla suurempaa kuin kolme, ja yhtälölle on jälleen löydyttävä uusi ratkaisu $(e, f)$ siten, että $c + d\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})(e + f\sqrt{2})$, missä $c > e$. Tällöin sijoittamalla saadaan $a + b\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^2(e + f\sqrt{2})$. Väite on jälleen todistettu, jos $(e, f) = (3, 2)$. Muussa tapauksessa jatketaan samalla tavalla. Tällä tavoin saadaan yhtälölle koko ajan uusia ratkaisuja ja muuttujan $x$ arvo on aina edellistä pienempi, mutta luonnollinen luku. Siten lopulta on löydyttävä uudeksi ratkaisuksi lukupari $(3, 2)$ ja tällöin käy siten, että alkuperäinen luku $a + b\sqrt{2}$ saadaan esitettyä luvun $(3+2\sqrt{2})^k$ potenssina.

Näytetään, että yhtälön $a + b\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$ mukainen ratkaisu

$(c, d)$ löytyy, kun $a > c$. Fermat'n äärellisen laskeutumisen menetelmällä osoitetaan, että kaikki ratkaisut saadaan luvun $3+\sqrt{2}$ potensseista kuten edellä on tehty. Lisäksi on osoitettava, että $d$ ja $c$ ovat molemmat positiivisia ja että $c$ on pienempi kuin $a$. Sieventämällä yhtälöä $a+b\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$ saadaan

$$a + b\sqrt{2} = 3c + 4d + (2c+3d)\sqrt{2}.$$

Tästä saadaan kertoimia vertaamalla yhtälöpari

$$\begin{cases} a = 3c + 4d \\ b = 2c + 3d \end{cases}.$$

Ratkaistaan yhtälöistä muuttuja $c$, jolloin ensimmäisen yhtälön perusteella $c = \dfrac{a-4d}{3}$ ja toisen yhtälön perusteella $c = \dfrac{b-3d}{2}$. Siis $\dfrac{a-4d}{3} = \dfrac{b-3d}{2}$, mistä saadaan $d = -2a + 3b$. Sijoitetaan tämä aiempaan yhtälöön, jolloin saadaan

$$c = \frac{b-3d}{2} = \frac{b+6a-9b}{2} = \frac{6a-8b}{2} = 3a - 4b.$$

Nyt

$$\begin{aligned} c^2 - 2d^2 &= (3a-4b)^2 - 2(-2a+3b)^2 \\ &= (9a^2 - 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 - 12ab + 9b^2) \\ &= 9a^2 - 24ab + 16b^2 - 8a^2 + 24ab - 18b^2) \\ &= a^2 - 2b^2. \end{aligned}$$

Lisäksi tiedetään, että $a^2 - 2b^2 = 1$, joten myös $c^2 - 2d^2 = 1$. Siispä $(c, d)$ todella on yhtälön ratkaisu. Yhtälöstä $a^2 - 2b^2 = 1$ saadaan
$a^2 = 1 - 2b^2 > 2b^2$, joten $a > \sqrt{2}b^2$. Siten

$$c = 3a - 4b > 3\sqrt{2}b - 4b = (3\sqrt{2} - 4)b > 0,$$

koska $b > 0$ ja $3\sqrt{2} > 4$. Siis $c$ on positiivinen. Tiedetään myös, että $a > 3$, joten $a^2 > 9$ eli $a^2 - 9 > 0$. Lisätään tämän epäyhtälön kummallekin puolelle luku $8a^2$ ja jaetaan epäyhtälön molemmat puolet tämän jälkeen luvulla yhdeksän, jolloin saadaan epäyhtälö muotoon
$a^2 - 1 > \dfrac{8}{9}a^2$. Tiedetään, että $2b^2 = -1 + a^2$. Sijoittamalla tämä tieto epäyhtälöön saadaan $2b^2 > \dfrac{8}{9}a^2$. Jaetaan epäyhtälö puolittain ja otetaan neliöjuuri jolloin saadaan $b > \dfrac{2}{3}a$. Tällöin

$$d = -2a + 3b > -2a + 3 \cdot \frac{2}{3}a = 0$$

eli myös $d$ on positiivinen. Siis $c$ ja $d$ ovat positiviisia. Siten pätee myös $c < a$, koska $c = \frac{a-4d}{3}$. Kaikki tarvittava on siis osoitettu ja väite on todistettu.

$\square$

**Esimerkki 2.13.** Lauseen 2.12 mukaan pätee $(3+2\sqrt{2})^k = x_k + y_k\sqrt{2}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Vastaavasti $(3-2\sqrt{2})^k = x_k - y_k\sqrt{2}$ pätee jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Yhdistämällä nämä kaksi kaavaa saadaan

$$\begin{aligned} x_k + y_k\sqrt{2} + x_k - y_k\sqrt{2} &= (3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k \\ 2x_k &= (3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k \\ x_k &= \frac{(3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k}{2}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä kaavaan $(3+2\sqrt{2})^k = x_k + y_k\sqrt{2}$ saadaan

$$\begin{aligned} y_k\sqrt{2} &= (3+2\sqrt{2})^k - \frac{(3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k}{2} \\ y_k\sqrt{2} &= \frac{2(3+2\sqrt{2})^k - (3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k}{2} \\ y_k &= \frac{2(3+2\sqrt{2})^k - (3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}} \\ y_k &= \frac{(3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Lasketaan esimerkiksi kahdeksas kolmioneliöluku, joka saadaan arvolla $k = 8$. Tällöin

$$x_8 = \frac{(3+2\sqrt{2})^8 + (3-2\sqrt{2})^8}{2} = 665857$$

ja

$$y_8 = \frac{(3+2\sqrt{2})^8 - (3-2\sqrt{2})^8}{2\sqrt{2}} = 470832.$$

Tämä vastaa kolmiolukua, jonka järjestysnumero on

$$n = \frac{x-1}{2} = \frac{665857-1}{2} = 332928.$$

Siispä kahdeksas kolmioneliöluku on $\frac{(332928 \cdot 332929)}{2} = 55420693056$, joten erittäin harva luku on kolmioneliöluku.

# 3 Pellin yhtälöistä

## 3.1 Pellin yhtälön historiaa

Pellin yhtälö on erikoistapaus Diofantoksen yhtälöstä, jossa kahden muuttujan polynomiyhtälölle etsitään kokonaislukuratkaisuja $x, y \in \mathbb{Z}$. Pellin yhtälö on nimetty englantilaisen matemaatikon John Pellin (1611-1685) mukaan. Nimeämisessä tapahtui väärinkäsitys, sillä Pell ainoastaan auttoi William Brounckerin keksimän yleisen ratkaisun kääntämisessä englannin kieliseen kirjaan vuonna 1658. Leonhard Euler kuitenkin luuli ratkaisua Pellin omaksi ja nimesi yhtälön tämän mukaan.

Ensimmäisen kerran Pellin yhtälön kaltaista yhtälöä ovat yrittäneet ratkaista intialaiset ja kreikkalaiset jo monta sataa vuotta ennen ajanlaskun alkua. Intiassa matemaatikko Brahmagupta yritti selvittää Pellin yhtälön ratkaisua 600-luvulla. Ensimmäisen yleisen ratkaisun Pellin yhtälölle antoi Brahmaguptan aiempaa työtä hyödyntäen intialainen Bhaskara vuonna 1150. Hänen kehittämällään cakravala-algoritmillä voitiin löytää Pellin yhtälölle yksittäisratkaisu. Brahmagupta selvitti ratkaisun Pellin yhtälölle $x^2 - Dy^2 = 1$ tilanteissa, joissa $D = 1, 11, 32, 61$ ja 67.[4, s. 45]

Euroopassa ei kuitenkaan tiedetty intialaismatemaatikkojen töistä, vaan 1600-luvulla useat eurooppalaiset matemaatikot yrittivät ratkaista Pellin yhtälöä. Vuonna 1657 Pierre de Fermat haastoi eurooppalaiset matemaatikot ratkaisemaan Pellin yhtälön. Monet tarttuivat haasteeseen ja yhtälöä ratkaisi muiden muassa Brouncker, jonka menetelmällä yleinen ratkaisu saatiin selville. [5, s. 182]

## 3.2 Arkhimedeen karjaongelma

Pellin yhtälö esiintyy antiikin Kreikassa Arkhimedeen karjaongelmassa. Arkhimedeen ennen ajanlaskua luoma ongelma löydettiin Wolffenbüttelin kirjastosta ja julkaistiin vuonna 1773. Tehtävänä siinä on selvittää paljonko kunkin tyyppistä karjaa auringon jumalalla on. Karjaa on kahdeksaa erilaista väritykseltään toisistaan eroavaa tyyppiä. Neljä ensimmäistä karjatyyppiä ovat $a, b, c$ ja $d$, joiden määrät saadaan lineaarialgebran keinoin ratkaisemalla yhtälöt $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) b + d$, $b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) c + d$ ja $c = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) a + d$. Tässä $a + b$ on neliöluku ja $c + d$ on kolmioluku. Loput karjat $a', b', c'$ ja $d'$ saadaan yhtälöistä $a' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) b + b'$, $b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) c + c'$, $c = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) d + d'$ ja

$$d = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) a + a'.$$

Ensimmäisten yhtälöjen ratkaisut ovat $a = 2226n, b = 1602n, c = 1580n$ ja $d = 891n$, missä $n \in \mathbb{N}$. Loput neljä muuttujaa ovat ratkaistavissa vain, jos luku $n$ on jaollinen luvulla 4657. Ratkaisuja ovat

$$a' = 7206360m, b' = 4893246m, c' = 3515820m \text{ ja } d' = 5439213m,$$

kun $n = 4657m$. Vaikeimmaksi osuudeksi muodostuu ratkaista luku $m$ siten, että $a + b = 4657 \cdot 3828m$ on neliöluku ja että $c + d = 4657 \cdot 2471m$ on kolmioluku. Karjaongelmassa päädytään lopulta laskemaan Pellin yhtälöä $x^2 - 4729494y^2 = 1$. Ratkaisuja on useita, mutta niiden ratkaisuissa käsitellään valtavia lukuja. On epätodennäköistä, että Arkhimedes itse olisi kyennyt ongelmaa ratkaisemaan.[5, s. 182-192]

## 3.3 Reaalilukuratkaisut

Tässä työssä keskitytään etsimään Pellin yhtälölle kokonaislukuratkaisuja, sillä reaalilukuratkaisut on helppo löytää. Reaalilukuratkaisut saadaan ratkaisemalla muuttuja $y$ muuttujan $x$ suhteen, jolloin

$$x^2 - A^2y^2 = 1$$

$$-A^2y^2 = 1 - x^2$$

$$A^2y^2 = x^2 - 1$$

$$y^2 = \frac{x^2 - 1}{A^2}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{A^2}} \text{ tai } y = -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{A^2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{A} \text{ tai } y = -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{A}.$$

Juurrettava ei voi olla negatiivinen, joten on oltava $x^2 - 1 \geq 0$ eli $x \leq -1$ tai $x \geq 1$. Siis Pellin yhtälön reaalilukuratkaisuja ovat lukuparit

$$\left(x, \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{A}\right) \text{ ja } \left(x, -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{A}\right), \text{ missä } x \leq -1 \text{ tai } x \geq 1.$$

## 3.4 Tapaus $D = A^2$

Yleisenä tapauksena käsittelemme Pellin yhtälöä $x^2 - Dy^2 = 1$, missä $D \in \mathbb{N}$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Selvitetään mitä tapahtuu, kun luku $D$ on kokonaisluvun neliö. Tällöin $D = A^2$ jollain $A \in \mathbb{N}$ eli yhtälö on muodossa $x^2 - A^2y^2 = 1$. Nyt

$$1 = x^2 - A^2y^2 = (x + Ay)(x - Ay).$$

Etsitään tämän tapauksen kokonaislukuratkaisuja. Kaikkien muuttujien ollessa kokonaislukuja pätee $(x + Ay) \in \mathbb{Z}$ ja $(x - Ay) \in \mathbb{Z}$. Tällöin täytyy olla $(x+Ay) = 1$ ja $(x-Ay) = 1$ tai $(x+Ay) = -1$ ja $(x-Ay) = -1$, jotta pätee $(x + Ay)(x - Ay) = 1$. Tällöin on oltava $y = 0$, sillä muussa tapauksessa ei voi olla $(x + Ay) = (x - Ay)$. Siispä $x = 1$ ja $y = 0$ sekä $x = -1$ ja $y = 0$ ovat yhtälön ainoat kokonaislukuratkaisut.

## 3.5 Diofantoksen approksimaatio

Pellin yhtälö voidaan ratkaista Diofantoksen approksimaation ja kyyhkyslakkaperiaatteen avulla.

### 3.5.1 Kyyhkyslakkaperiaate

Kyyhkyslakkaperiaatteessa kyyhkysiä on tietty määrä ja kyyhkyslakassa on tietty määrä pesäkoloja, joihin kyyhkyset menevät. Oletetaan, että kyyhkysiä on enemmän kuin koloja kyyhkyslakassa ja että kaikki kyyhkyset menevät koloon. Kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan tällöin vähintään yhteen koloon on mentävä vähintään kaksi kyyhkystä.

### 3.5.2 Diophantoksen approksimaatio

Kirjoitetaan Pellin yhtälön yleinen muoto tulona muodossa

$$1 = x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D})$$

$$\Leftrightarrow x - y\sqrt{D} = \frac{1}{x + y\sqrt{D}}.$$

Mitä suurempi tulossa on toinen tekijä $x + y\sqrt{D}$, sitä pienempi on oltava toinen tekijä $x - y\sqrt{D}$, jotta näiden tulo olisi yksi. Mietitään kuinka pieni tekijä $x - y\sqrt{D}$ voi olla välittämättä saadaanko tulosta vastaukseksi tasan yksi. Valitaan positiivinen kokonaislukumuuttuja $y$. Valitaan nyt positiivinen kokonaislukumuuttuja $x$ siten, että se on lähimpänä lukua $y\sqrt{D}$ oleva kokonaisluku. Tällöin saadaan aito epäyhtälö $\mid x - y\sqrt{D} \mid < \frac{1}{2}$, koska $\sqrt{D}$ on irrationaaliluku. Tätä parempaan arvioon päästään seuraavassa.

**Lause 3.1.** *(Dirichlet'n approksimaatiolause) Oletetaan, että $\alpha$ on mikä tahansa irrationaaliluku. Tällöin on olemassa äärettömän monta lukuparia $(x, y)$, missä $x, y \in \mathbb{N}$ siten, että*

$$\mid x - y\alpha \mid < \frac{1}{y}.$$

*Todistus.* Tarkastellaan irrationaalilukuja $k\alpha$, missä $k = 0, 1, \dots, q$ ja $q \in \mathbb{N}$. Jokainen tällainen luku voidaan kirjoittaa luonnollisen luvun $N_k$ ja reaaliluvun $K_k < 1$ summana $k\alpha = N_k + K_k$, missä $k \leq q$. Tässä $N_k$ on suurin lukua $k\alpha$ pienempi luonnollinen luku ja $0 \leq K_k < 1$.
Siis

$$\begin{aligned} 0\sqrt{D} &= N_0 + K_0, \text{ jolloin } N_0 = 0 \text{ ja } K_0 = 0 \\ 1\sqrt{D} &= N_1 + K_1 \\ 2\sqrt{D} &= N_2 + K_2 \\ &\vdots \\ q\sqrt{D} &= N_q + K_q. \end{aligned}$$

Käytetään nyt kyyhkyslakkaperiaatetta. Kyyhkyset ovat tässä tapauksessa luvut $0 \leq K_k < 1$, joita on $q+1$ kappaletta. Jaetaan väli $[0, 1[$ $q$ yhtä suureen osaväliin siten, että saamme seuraavat kyyhkyslakan kolot

$$\left\{t \in \mathbb{R} : 0 = \frac{0}{q} \leq t < \frac{1}{q}\right\} = \left[0 = \frac{0}{q}, \frac{1}{q}\right[$$

$$\left\{t \in \mathbb{R} : \frac{1}{q} \leq t < \frac{2}{q}\right\} = \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right[$$

$$\left\{t \in \mathbb{R} : \frac{2}{q} \leq t < \frac{3}{q}\right\} = \left[\frac{2}{q}, \frac{3}{q}\right[$$

$$\vdots$$

$$\left\{t \in \mathbb{R} : \frac{q-1}{q} \leq t < \frac{q}{q} = 1\right\} = \left[\frac{q-1}{q}, \frac{q}{q} = 1\right[.$$

Koloja on nyt $q$ kappaletta ja kyyhkysiä siis $q+1$ kappaletta, joten johonkin kyyhkyslakan koloon täytyy mennä vähintään kaksi kyyhkystä. Nimetään nämä kyyhkyset nimillä $K_a$ ja $K_b$, missä positiivisille kokonaisluvuille $a$ ja

$b$ pätee $a < b$. Koska kyyhkyset ovat samassa kolossa, niiden etäisyys on pienempi kuin $1/q$. Siispä

$$| K_a - K_b |< \frac{1}{q}. \tag{3.1}$$

Lisäksi pätee $k\alpha = N_k + K_k$, joten

$$a\alpha = N_a + K_a \text{ ja } b\alpha = N_b + K_b,$$

mistä saadaan

$$K_a = a\alpha - N_a \text{ ja } K_b = b\alpha - N_b.$$

Sijoittamalla nämä kaavaan 3.1 saadaan

$$| (a\alpha - N_a - (b\alpha - N_b) |< \frac{1}{q}$$

ja edelleen

$$| (N_b - N_a) - (b - a)\alpha |< \frac{1}{q}.$$

Tässä luvut $N_b - N_a$ ja $b - a$ ovat luonnollisia lukuja. Siten voimme tehdä muuttujan vaihdon siten, että $N_b - N_a = x$ ja $b - a = y$. Saamme

$$| x - y\alpha |< \frac{1}{q}.$$

Olemme siis osoittaneet, että mille tahansa luonnolliselle luvulle $q$ löytyy luonnolliset luvut $x$ ja $y$ siten, että $| x - y\alpha |< \frac{1}{q}$. Luonnollisia lukuja on ääretön määrä, joten kasvattamalla lukua $q$ saadaan koko ajan uusia kaavan toteuttavia lukupareja $(x, y)$.

Tutkitaan seuraavaksi muuttujaa $y = b - a$. Koska kyyhkyset $K_a$ ja $K_b$ ovat jotkin kyyhkysistä $K_0, K_1, K_2, \dots, K_q$, niin $0 \leq a \leq q$ ja $0 \leq b \leq q$. Lisäksi valitsimme $a < b$. Niinpä $a < b \leq q$, joten $0 < y \leq q$. Tällöin pätee $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{q}$, joten

$$| x - y\alpha |< \frac{1}{q} \leq \frac{1}{y}.$$

Näin on osoitettu, että tarkasteltavalla epäyhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua. $\square$

**Lause 3.2.** *Olkoon $x, y \in \mathbb{N}$. Tällöin $|\frac{x}{y} - \alpha| < \frac{1}{y^2}$ on äärettömän monta ratkaisua millä tahansa irrationaaliluvulla $\alpha$.*

*Todistus.* Seuraa suoraan Dirichlet'n approksimaatiolauseesta 3.1, kun yhtälö

$$| x - y\alpha | < \frac{1}{y}$$

jaetaan puolittain luvulla $y$. $\square$

**Seuraus 3.3.** *Oletetaan, että $D \in \mathbb{N}$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Tällöin on olemassa äärettömän monta lukuparia $(x, y)$, missä $x, y \in \mathbb{N}$ siten, että*

$$| x - y\sqrt{D} | < \frac{1}{y}.$$

*Todistus.* Seuraa lauseesta 3.1, koska $\sqrt{D}$ on irrationaaliluku. $\square$

## 3.6 Pellin yhtälön yleinen ratkaisu

Pellin yhtälö on muotoa $x^2 - Dy^2 = 1$, missä $D$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Helposti huomataan, että millä tahansa luvun $D$ arvolla saadaan ratkaisut $x = 1$ ja $y = 0$ sekä $x = -1$ ja $y = 0$. Lisäksi voidaan yhtälöstä ratkaista luku $y$ lukua $x$ käyttäen:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

$$-Dy^2 = 1 - x^2$$

$$Dy^2 = x^2 - 1$$

$$y^2 = \frac{x^2 - 1}{D}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{D}} \text{ tai } y = -\sqrt{\frac{x^2 - 1}{D}},$$

jolloin luku $x$ voi olla mitä tahansa eikä Pellin yhtälö saa välttämättä kokonaislukuratkaisua. Näiden helposti havaittavien tapausten lisäksi aiemmin tutkittiin erikoistapausta $D = 2$, mutta samalla tavoin ratkaisut löydetään myös muille Pellin yhtälöille riippumatta siitä mikä on luvun $D$ arvo. Käytetään siis tätä samaa periaatetta. Olkoon $(x_1, y_1)$ yhtälön ratkaisu, kun muuttuja $x \geq 2$ on pienin mahdollinen. Tällöin saadaan

$$1 = x_1^2 - y_1^2 D = (x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})$$

ja korottamalla tämä puolittain toiseen saadaan

$$
\begin{aligned}
1 = 1^2 &= ((x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D}))^2 = (x_1 + y_1\sqrt{D})^2(x_1 - y_1\sqrt{D})^2 \\
&= (x_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{D} + y_1^2D)(x_1^2 - 2x_1y_1\sqrt{D} + y_1^2D) \\
&= ((x_1^2 + y_1^2D) + 2x_1y_1\sqrt{D})((x_1^2 + y_1^2D) - 2x_1y_1\sqrt{D}) \\
&= (x_1^2 + y_1^2D)^2 - (2x_1y_1)^2D,
\end{aligned}
$$

joten myös $(x_1^2+y_1^2D, 2x_1y_1)$ on yhtälön ratkaisu. Vastaavalla tavalla saadaan uusia ratkaisuja korottamalla lukua $(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})$ eri potensseihin. Myöhemmin muotoilemme lauseen Pellin yhtälön ratkaisulle yleisessä tilanteessa.

**Määritelmä 3.4.** Olkoot luvut $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $c \in \mathbb{N}$. Luvut $a$ ja $b$ ovat keskenään *kongruentteja* modulo $c$ eli $a \equiv b \pmod{c}$, jos on $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $a - b = kc$.

**Lause 3.5.** *Olkoot luvut $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ja $e \in \mathbb{N}$. Olkoon $a \equiv b \pmod{e}$ ja $c \equiv d \pmod{e}$. Tällöin $ac \equiv bd \pmod{e}$.*

*Todistus.* Koska $a \equiv b \pmod{e}$ ja $ac \equiv bd \pmod{e}$, niin määritelmän 3.4 nojalla $a - b = ke$ ja $c - d = se$, missä $k, s \in \mathbb{Z}$. Siten $a = b + ke$ ja $c = d + se$. Nyt sijoituksella saadaan

$$ac - bd = (b + ke)(d + se) - bd = bd + bse + dke - bd = (bs + dk)e.$$

Siispä $ac - bd$ saadaan kertomalla luonnollisella luvulla lukua $e$, joten $ac \equiv bd \pmod{e}$. □

**Lause 3.6.** *Olkoon $D \in \mathbb{N}$ siten, että $D$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Tällöin Pellin yhtälölle $x^2 - Dy^2 = 1$ löydetään ratkaisu $(x_k, y_k)$, missä $x_k, y_k \in \mathbb{N}$. Kaikki ratkaisut saadaan yhtälöstä $(x_1 + y_1\sqrt{D})^k = x_k + y_k\sqrt{D}$, missä $(x_1, y_1)$ on yhtälön pienin mahdollinen ratkaisu, kun muuttuja $x_1 \geq 2$ ja $k \in \mathbb{N}$.*

*Todistus.* Seuraava todistus on tehty kuten lähteessä [8, Thm. 32.1]. Osoitetaan ensin, että Pellin yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu, jossa muuttujat ovat luonnollisia lukuja. Tehdään kuten aiemmin erikoistapauksessa $D = 2$ lauseessa 2.12 ja merkitään Pellin yhtälö tulona

$$1 = x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}).$$

Käytetään tästä tulosta kuitenkin muotoa

$$\mid 1 \mid = \mid x^2 - Dy^2 \mid = \mid x + y\sqrt{D} \mid \cdot \mid x - y\sqrt{D} \mid .$$

Lauseen 3.1 nojalla on äärettömän monta luonnollisista luvuista muodostuvaa lukuparia $(x, y)$, joille pätee

$$| x - y\sqrt{D} | < \frac{1}{y}.$$

Olkoon $(x, y)$ tällainen pari ja kyseisellä kaavalla saadaan yläraja tulon tekijälle $| x - y\sqrt{D} |$. Lisäksi tästä seuraa, että $x < y\sqrt{D} + \frac{1}{y}$. Lisäämällä puolittain luku $y\sqrt{D}$, saadaan myös tekijälle $| x + y\sqrt{D} |$ yläraja

$$x + y\sqrt{D} < y\sqrt{D} + \frac{1}{y} + y\sqrt{D} = 2y\sqrt{D} + \frac{1}{y}.$$

Lisäksi

$$\frac{1}{y} < y\sqrt{D},$$

koska $y$ ja $D$ ovat luonnollisia lukuja. Niinpä

$$2y\sqrt{D} + \frac{1}{y} < 3y\sqrt{D}.$$

Lisäksi pätee $| x+y\sqrt{D} | = x+y\sqrt{D}$, koska kaikki muuttujat ovat positiivisia. Niinpä

$$| x^2 - Dy^2 | = (x + y\sqrt{D}) \cdot | x - y\sqrt{D} | < 3y\sqrt{D} \cdot \frac{1}{y} = 3\sqrt{D}.$$

Niinpä jokainen lauseen 3.1 toteuttava lukupari toteuttaa myös ehdon

$$| x^2 - Dy^2 | < 3\sqrt{D}. \tag{3.2}$$

Käytetään sitten kyyhkyslakkaperiaatetta. Olkoot lauseen 3.1 toteuttavat lukuparit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kyyhkysiä. Kyseisen lauseen todistuksen nojalla näitä on äärettömän monta. Valitaan kyyhkyslakan koloiksi kokonaisluvut välillä $[-L, L]$, missä $L \in \mathbb{N}$ on suurin kokonaisluku siten, että $L < 3\sqrt{D}$. Luvut $x$ ja $y$ ovat luonnollisia lukuja, joten luku $x^2 - Dy^2$ on kokonaisluku, jota vastaa jokin kyyhkyslakan kolo. Kyyhkyslakan kolojen lukumäärä on äärellinen, kun taas kyyhkysinä toimivia epäyhtälön (3.2) toteuttavia lukupareja on ääretön määrä. Tällöin johonkin koloon on mentävä ääretön määrä kyyhkysiä. Olkoon tämä kolo $r \in \mathbb{Z}$ siten, että $-L \leq r \leq L$. Siis pätee

$$x^2 - Dy^2 = r. \tag{3.3}$$

Tällöin kyseisellä yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua, koska koloon $r$ menee äärettömän monta kyyhkystä. Olkoot nämä yhtälön toteuttavat ratkaisut $(x_n, y_n)$, missä $n \in \mathbb{N}$.

Etsitään näistä keskenään kongruentit ratkaisut $(x_m, y_m)$ ja $(x_l, y_l)$ siten, että pätee $x_m \equiv x_l \pmod r$ ja $y_m \equiv y_l \pmod r$. Lisäksi täytyy olla $y_m, y_\ell > 0$ ja $y_m \neq y_\ell$ . Tällaiset luvut $x_m, x_l, y_m$ ja $y_m$ ovat olemassa, koska äärettömän monella lukuparilla on vain äärellinen määrä jakojäännöspareja $\pmod r$. Näiden ratkaisujen löytämiseksi käytetään jälleen kyyhkyslakkaperiaatetta, jossa kyyhkysinä toimivat lukuparit $(x_n, y_n)$, joita on ääretön määrä. Kyyhkyslakan koloja ovat lukuparit $(a, b)$, missä $0 \leq a, b < r$ ja $a$ ja $b$ ovat jäännösluokkia. Tällöin samaan kyyhkyslakan koloon menevät siis ne luvut, joissa lukuparin molemmat luvut ovat kongruentteja toisen lukuparin vastaavien lukujen kanssa. Siis jokainen luku $x_n$ on samassa jäännösluokassa jonkin luvun $a$ kanssa ja jokainen luku $y_n$ on samassa jäännösluokassa jonkin luvun $b$ kanssa. Niinpä luvuille $x_t$ ja $y_t$ pätee $x_t \equiv a \pmod r$ ja $y_t \equiv b \pmod r$ joillain $a$ ja $b$. Samassa kyyhkyslakan kolossa oleville lukupareille $(x_m, y_m)$ ja $(x_l, y_l)$ pätee

$$x_m \equiv x_l \pmod r \text{ ja } y_m \equiv y_l \pmod r$$

ja

$$x_m^2 - Dy_m^2 = r \text{ ja } x_l^2 - Dy_l^2 = r, \text{ missä } y_m^2 \neq y_l^2.$$

Nyt lauseen 3.5 nojalla $x_m y_l \equiv x_l y_m \pmod r$, joten $x_m y_l - x_l y_m = sr$ jollain kokonaisluvulla $s$. Nyt

$$\begin{aligned}
r^2 &= (x_m^2 - Dy_m^2)(x_l^2 - Dy_l^2) \\
&= x_m^2 x_l^2 - x_m^2 D y_l^2 - x_l^2 D y_m^2 + D y_m^2 D y_l^2 \\
&= x_m^2 x_l^2 + D^2 y_m^2 y_l^2 - D(x_m^2 y_l^2 + x_l^2 y_m^2) \\
&= x_m^2 x_l^2 + D^2 y_m^2 y_l^2 - D x_m^2 y_l^2 - D x_l^2 y_m^2 + (2D x_m x_l y_m y_l - 2D x_m x_l y_m y_l) \\
&= (x_m x_l - D y_m y_l)^2 - D(x_m y_l - x_l y_m)^2 \\
&= (x_m x_l - D y_m y_l)^2 - D(sr)^2.
\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$r^2 + D(sr)^2 = r^2(1 + Ds^2) = (x_m x_l - D y_m y_l)^2,$$

joten $(x_m x_l - D y_m y_l)^2$ on jaollinen luvulla $r^2$. Siis kokonaisluku $x_m x_l - D y_m y_l$ on jaollinen luvulla $r$ ja se voidaan kirjoittaa muodossa $x_m x_l - D y_m y_l = qr$, missä $q \in \mathbb{Z}$. Tästä saadaan

$$r^2 = (x_m x_l - D y_m y_l)^2 - D(x_m y_l - x_l y_m)^2 = (qr)^2 - D(sr)^2.$$

Siis $1 = q^2 - Ds^2$. Siis löysimme Pellin yhtälölle $x^2 - Dy^2 = 1$ ratkaisun luonnollisina lukuina. Tulee vielä osoittaa, että $s \neq 0$. Yhtälöstä $x_l^2 - Dy_l^2 = r$ saadaan $D = \dfrac{x_l^2 - r}{y_l^2}$. Sijoitetaan tämä yhtälöön $x_m^2 - Dy_m^2 = r$, jolloin saadaan

$$x_m^2 - \frac{x_l^2 - r}{y_l^2} y_m^2 = r.$$

Siis

$$x_m^2 y_l^2 - x_l^2 y_m^2 + r y_m^2 = r y_l^2,$$

mistä saadaan

$$x_m^2 y_l^2 - x_l^2 y_m^2 = r y_l^2 - r y_m^2 = r(y_l^2 - y_m^2).$$

Jos nyt $s = 0$ yhtälössä $y_l^2 - y_m^2 = sr$, niin $y_l^2 - y_m^2 = 0$ eli $y_l^2 = y_m^2 = 0$. Tämä on vastoin aiemmin tehtyä valintaa.

Tulee vielä osoittaa, että kaikki ratkaisut saadaan yhtälöstä

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^k = x_k + y_k D\sqrt{D},$$

missä $(x_1, y_1)$ on yhtälön pienin mahdollinen ratkaisu, kun muuttuja $x_1 \geq 2$. Todistuksen alun perusteella tällainen ratkaisu löytyy. Oletetaan, että $(x_2, y_2)$ on yhtälön jokin ratkaisu. Nyt on osoitettava, että pätee

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^k = x_k + y_k\sqrt{D}$$

jollain $k \in \mathbb{N}$.
Olkoon lukupari $(u, v)$ eräs Pellin yhtälön ratkaisu. Tutkitaan reaalilukuja $z = x_1 + y_1\sqrt{D}$ ja $w = u + v\sqrt{D}$. Tässä $z = x_1 + y_1\sqrt{D} > 1$, koska luvut $x_1$ ja $y_1$ ovat luonnollisia lukuja. Tällöin $z^k \leq w < z^{k+1}$ pätee jollain luonnollisella luvulla $k$ , joten

$$\frac{z^k}{z^k} \leq \frac{w}{z^k} < \frac{z^{k+1}}{z^k}$$
$$\Rightarrow 1 \leq \frac{w}{z^k} < z$$

Tällöin $z^k = x_k + y_k\sqrt{D}$ lukujen $x_k$ ja $y_k$ määritelmän perusteella. Lisäksi

$$z^k \cdot z^{-k} = 1 \text{ ja } (x_k + y_k\sqrt{D})(x_k - y_k\sqrt{D}) = x_k^2 - Dy_k^2 = 1,$$

joten $\dfrac{1}{z^k} = z^{-k} = x_k - y_k\sqrt{D}$. Niinpä

$$\begin{aligned} \frac{w}{z^k} = w \cdot \frac{1}{z^k} &= (u + v\sqrt{D})(x_k - y_k\sqrt{D}) \\ &= x_k u - y_k\sqrt{D}u + x_k v\sqrt{D} - y_k D v \\ &= x_k u - y_k D v + (x_k v - y_k u)\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että $x_k u - y_k Dv \geq 0$ ja $x_k v - y_k u \geq 0$ sulkemalla pois kaikki muut vaihtoehdot. Jos $x_k u - y_k Dv < 0$ ja $x_k v - y_k u < 0$, niin myös näiden summa on negatiivinen. Kuitenkin $x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D} = \dfrac{w}{z^k}$ ja $w/z^k \geq 1$, joten kyseessä on ristiriita. Siispä $x_k u - y_k Dv$ ja $x_k v - y_k u$ eivät voi molemmat olla negatiivisia. Oletetaan sitten, että $x_k u - y_k Dv \geq 0$ ja $x_k v - y_k u < 0$. Tiedämme, että

$$x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D} \geq 1.$$

Hyödynnetään tässä tietoja

$$(x_k u - y_k Dv)^2 - (x_k v - y_k u)^2 D = 1$$

ja

$$x_k u - y_k Dv - (x_k v - y_k u)\sqrt{D} > x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D} \geq 1.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} 1 &= (x_k u - y_k Dv)^2 - (x_k v - y_k u)^2 D \\ &= (x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D})(x_k u - y_k Dv - (x_k v - y_k u)\sqrt{D}) > 1, \end{aligned}$$

mikä on mahdotonta, koska yhtäsuuruus pätee. Oletetaan sitten, että $s < 0$ ja $t \geq 0$. Koska

$$-(x_k u - y_k Dv) + (x_k v - y_k u)\sqrt{D} > x_k u - y_k Dv + \sqrt{D} \geq 1,$$

niin

$$\begin{aligned} -1 &= -(x_k u - y_k Dv)^2 + (x_k v - y_k u)^2 D \\ &= -(x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D})(x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D}) > 1. \end{aligned}$$

Tämä on mahdotonta, koska tiedämme yhtäsuuruuden pätevän. Siis on oltava $x_k u - y_k Dv \geq 0$ ja $x_k v - y_k u \geq 0$.

Tiedämme, että lukupari $(x_k u - y_k Dv, x_k v - y_k u)$ on Pellin yhtälön kokonaislukuratkaisu. Koska $x_1 \geq 0$ on Pellin yhtälön pienin ratkaisu, niin $x_k u - y_k vD \geq x_2$, kun $x_k u - y_k Dv > 0$ ja $x_k v - y_k u > 0$. Lisäksi tästä seuraa, että

$$(x_k v - y_k u)^2 = \frac{(x_k u - y_k Dv)^2 - 1}{D} \geq \frac{x_1^2 - 1}{D} = y_1^2,$$

joten $x_k v - y_k u \geq y_1$. Niinpä

$$x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D} \geq x_1 + y_1\sqrt{D} = z.$$

Tämä on ristiriidassa sen tiedon kanssa, että $x_k u - y_k Dv + (x_k v - y_k u)\sqrt{D} < z$. Niinpä täytyy olla $x_k u - y_k Dv = 1$ ja $x_k v - y_k u = 0$. Niinpä $r = z^k$, joten lukuparin $(u, v)$ ollessa Pellin yhtälön ratkaisu, on olemassa luku $k \geq 0$ siten, että $r = u + v\sqrt{D} = z^k = (x_1 + y_1\sqrt{D})^k = x_k + y_k\sqrt{D}$. Tämä osoittaa, että lauseke $u + v\sqrt{D}$ on saatu korottamalla lauseketta $x_1 + y_1\sqrt{D}$ potenssiin, mikä pitikin osoittaa.

$\square$

# 4 Ratkaisu ketjumurtoluvuilla

Pellin yhtälön $x^2 - Dy^2 = 1$ ratkaisun voi löytää myös ketjumurtolukuja käyttäen. Määritellään tätä varten ketjumurtoluvut ja niistä erikoistapauksena äärettömät ketjumurtoluvut.

## 4.1 Äärellinen ketjumurtoluku

**Määritelmä 4.1.** i) *Äärellinen ketjumurtoluku* tarkoittaa luvun esittämistä lausekkeena muodossa

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

missä $a_0 \in \mathbb{N}_0$ ja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Kyseinen ketjumurtoluku voidaan ilmoittaa lyhyemmin merkinnällä $[a_0; a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n]$.

ii) Luku $n \in \mathbb{N}_0$ on ketjumurtoluvun *aste*.

**Esimerkki 4.2.** Jokainen rationaaliluku voidaan esittää äärellisenä ketjumurtolukuna. Luku löydetään Eukleideen algoritmin avulla. Ilmoitetaan luku $\frac{141}{64}$ äärellisenä ketjumurtolukuna.

Ensinnäkin $\frac{141}{64} = 2\frac{13}{64}$. Aletaan sitten käyttää Eukleideen algoritmia, jonka avulla saadaan $64 = 13 \cdot 4 + 12$. Jatketaan tätä, jolloin $13 = 12 \cdot 1 + 1$ ja edelleen $12 = 1 \cdot 12$.
Siten saadaan äärellinen ketjumurtoluku

$$\frac{141}{64} = 2\frac{13}{64} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{64}{13}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{12}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{1}}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}.$$

Sama voidaan ilmoittaa muodossa $[2; 4, 1, 12]$.

## 4.2 Ääretön ketjumurtoluku

Suuri osa luvuista ei kuulu rationaalilukujen joukkoon, vaan on irrationaalilukuina päättymättömiä desimaalilukuja. Tällaisia ovat esimerkiksi Neperin luku $e = 2,718281828459\ldots$ ja pii $\pi = 3,14159265358979\ldots$. Näitä ei saada ilmoitettua äärellisten ketjumurtolukujen avulla, joten määritellään seuraavaksi äärettömät ketjumurtoluvut.

**Määritelmä 4.3.** *Ääretön ketjumurtoluku* tarkoittaa luvun esittämistä lausekkeena muodossa

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

missä $a_0 \in \mathbb{N}_0$ ja $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{N}$. Kyseinen ketjumurtoluku voidaan ilmoittaa lyhyemmin merkinnällä $x = [a_0; a_1, a_2, a_3 \ldots]$.

Äärettömän ketjumurtoluvun kaavassa voi osoittajien lukujen yksi ja lukujen $a_n$, missä $n \in \mathbb{N}_0$, paikalla olla myös reaalilukuja. Pitäydymme kuitenkin edellä esitetyssä erikoistapauksessa, jossa näin ei ole. Kyseisestä erikoistapauksesta käytetään nimitystä *yksinkertainen ketjumurtoluku.* Lisäksi, kun $n \to \infty$, niin ketjumurtoluku $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots a_n]$ lähestyy oikeaa arvoa $x$.

**Määritelmä 4.4.** Ketjumurtoluvun $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ *n. konvergentti* on

$$x_n = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

missä $n \in \mathbb{N}_0$.

Konvergentti saadaan siis katkaisemalla ketjumurtoluku jostain kohdasta. Konvergentti $x_n = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ vastaa tiettyä rationaalilukua jokaisella $n \in \mathbb{N}_0$. Nämä konvergentit lähestyvät lukua $x$, kun $n \to \infty$ ja luvun $x$ äärettömän ketjumurtolukuesityksen konvergenttien jono suppenee lukuun $x$. Siis $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

**Lause 4.5.** *Olkoon $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ ääretön ketjumurtoluku. Tällöin ketjumurtoluvun konvergentti $x_n = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ lähestyy raja-arvoa $x$, kun $n \to \infty$.*

*Todistus.* Katso [3, Thm 165-166]. □

**Esimerkki 4.6.** a) Esitetään luku $e = 2,718281828459\ldots$ äärettömänä ketjumurtolukuna. Tehdään se samoin kuin äärellisten ketjumurtolukujen tapauksessa.

$$
\begin{aligned}
e = 2,718281828459\ldots &= 2 + 0,718281828459\ldots \\
&= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,718281828459\ldots}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1,3922111911\ldots} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + 0,3922111911\ldots} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,3922111911\ldots}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2,549646778\ldots}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + 0,549646778\ldots} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + 0,549646778\ldots}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,549646778\ldots}}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1,8193502435\ldots}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + 0,8193502435\ldots}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0,8193502435\ldots}}}}
\end{aligned}
$$

Jatkamalla tätä päästään koko ajan tarkempaan likiarvoon. Joka tapauksessa $e = [2; 1, 2, 1 \ldots]$, mutta ketjumurtoluku ei jatku lukuja yksi ja kaksi toistaen, vaan vielä tarkempi esitys olisi $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8 \ldots]$

b) Luku $\sqrt{2} = 1,41421356237\ldots$ on päättymätön desimaaliluku. Esitetään se äärettömänä ketjumurtolukuna.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1,41421356237\ldots = 1 + 0,41421356237\ldots \\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,41421356237\ldots}} = 1 + \cfrac{1}{2,41421356237\ldots} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + 0,41421356237\ldots} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,41421356237\ldots}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,41421356237\ldots}} = 1 + \cfrac{1}{2 + 2,41421356237\ldots} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,41421356237\ldots}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,41421356237\ldots}}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,41421356237\ldots}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,41421356237\ldots}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{0,41421356237\ldots}}}}
\end{aligned}
$$

Siispä $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$.

Luvun $\sqrt{2}$ tapauksessa näyttäisi siltä, että ketjumurtoluku jatkuisi säännöllisesti samankaltaisena eli

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}. \tag{4.1}$$

Tällaista ketjumurtolukua kutsutaan *jaksolliseksi.*

## 4.3 Jaksollinen ketjumurtoluku

**Määritelmä 4.7.** i) Ääretön ketjumurtoluku $[a_0, a_1, a_{2,} \ldots]$ on jaksollinen, jos on luonnolliset luvut $L$ ja $k$ siten, että kaikille $l$ pätee $a_{l+k} = a_l$. Tällöin sen ketjumurtolukuesityksessä $[a_0, a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}]$ äärettömän monta kertaa toistuva osa $a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}$ on sen *jakso.*

ii) Jaksollista ketjumurtolukua voidaan merkata $[a_0; a_1, a_2, a_3 \ldots, a_m, \overline{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n}]$, missä $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ on ketjumurtoluvun jakso, kun $a_m, b_n, m, n \in \mathbb{N}$.

**Esimerkki 4.8.** Tutkitaan onko luvun $\sqrt{2}$ ketjumurtolukuesitys jaksollinen. Muokkaamalla luvun $\sqrt{2}$ lauseketta saadaan

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}. \tag{4.2}$$

Tästä taas nimittäjää $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ saadaan sievennettyä laventamalla luvulla $\sqrt{2} - 1$, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Koska $1 < \sqrt{2} < 2$, niin $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$. Tehdään sitten vastaavasti kuin kaavassa (4.2) ja yhdistetään tähän kaavan (4.3) tieto $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$, jolloin

$$\sqrt{2}+1 = 2+\sqrt{2}-1 = 2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = 2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}. \tag{4.4}$$

Siten yhdistämällä kaavat (4.2), (4.3) ja (4.4) saadaan

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Käyttämällä tähän toistuvasti kaavan (4.4) tietoa, päädytään tulokseen (4.1) eli luvun $\sqrt{2}$ ketjumurtolukuesitys on $[1,\overline{2}]$, joten se on jaksollinen.

**Esimerkki 4.9.** Nimetään jaksollinen ketjumurtoluku $A = [4;\overline{2,1,3,1,2,8}]$ ja sen jakso $B = [\overline{2,1,3,1,2,8}]$. Tällöin $A = 4+\dfrac{1}{[\overline{2,1,3,1,2,8}]} = 4+\dfrac{1}{B}$ ja laventamalla useasti saadaan

$$B = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{[2,1,3,1,2,8]}}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{B}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{8B+1}{B}}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{B}{8B+1}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{17B+2}{8B+1}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{8B+1}{17B+2}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{25B+3}{17B+2}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{17B+2}{25B+3}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{92B+11}{25B+3}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{25B+3}{92B+11}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{117B+14}{92B+11}} = 2 + \frac{92B+11}{117B+14} = \frac{326B+39}{117B+14}.$$

Siis $B = \dfrac{326B+39}{117B+14}$, mistä saadaan nimittäjällä kertomalla ja termejä vähentämällä $117B^2 - 312B - 39 = 0$. Sijoitetaan tästä luvut toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan, jolloin saadaan

$$B = \frac{-(-312) + \sqrt{(-312)^2 - 4 \cdot 117 \cdot (-39)}}{2 \cdot 117} = \frac{312 + \sqrt{115596}}{234}.$$

Sijoitetaan tämä ketjumurtoluvun $A$ kaavaan jakson $B$ paikalle, jolloin

$$\begin{aligned}
A = 4 + \frac{1}{B} &= 4 + \cfrac{1}{\cfrac{312 + \sqrt{115596}}{234}} \\
&= 4 + \frac{234}{312 + \sqrt{115596}} \\
&= \frac{1482 + 4\sqrt{115596}}{312 + \sqrt{115596}}.
\end{aligned}$$

Lavennetaan tätä luvulla $312 - \sqrt{115596}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{1482 + 4\sqrt{115596}}{312 + \sqrt{115596}} \cdot \frac{312 - \sqrt{115596}}{312 - \sqrt{115596}} \\
&= \frac{462384 - 1482\sqrt{115596} + 1248\sqrt{115596} - \sqrt{213798963456}}{97344 - 115596} \\
&= \frac{462384 - 462384 - 234\sqrt{115596}}{-18252} \\
&= \frac{0 - 234\sqrt{115596}}{-234 \cdot 78} \\
&= \frac{0 - 78\sqrt{19}}{78} \\
&= \sqrt{19}.
\end{aligned}$$

Lopputuloksesta huomataan, että käsittelimme luvun $\sqrt{19}$ jaksollista ketjumurtolukuesitystä eli $\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$.

Itse asiassa ketjumurtolukuesitys voidaan muodostaa riippumatta juurrettavasta luvusta, kuten seuraava osoittaa.

**Lause 4.10.** *Oletetaan, että $D \in \mathbb{N}$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö, $a, b_n, n \in \mathbb{N}$ ja $c, d, e \in \mathbb{Z}$.*

*i) Tällöin ääretön jaksollinen ketjumurtoluku $[a; \overline{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n}]$ voidaan esittää yksikäsitteisesti reaalilukuna $\dfrac{c + d\sqrt{D}}{e}$.*

*ii) Tällöin reaaliluku $\dfrac{c + d\sqrt{D}}{e}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti äärettömänä jaksollisena ketjumurtolukuna.*

*iii) Tällöin luku $\sqrt{D}$ voidaan esittää muodossa $[a; \overline{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n}]$.*

*Todistus.* Katso [8, Thm 48.2]. □

**Esimerkki 4.11.** Laajennetaan esimerkin 4.8 tilanne käsittämään kaikki reaaliluvut, joiden ketjumurtolukuesitys on jaksollinen. Minkä tahansa tällaisen reaaliluvun jakso voidaan siis löytää menetelmällä, jolla löydettiin luvun $\sqrt{2}$ jakso. Olkoot $\epsilon$ kyseinen reaaliluku, jolle etsitään ketjumurtolukuesitystä ja reaaliluku $\epsilon_n = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots]$ osa sen ketjumurtolukuesityksestä. Lisäksi $n \in \mathbb{N}_0$. Tällöin

$$\epsilon_0 = a_0 + (\epsilon_0 - a_0), \text{ missä } 0 < x - a_0 < 1.$$

Siis

$$\epsilon_0 - a_0 = \frac{1}{\epsilon_1}, \text{ jollain } \epsilon_1 < 1.$$

Niinpä on kokonaisluku $a_1$, jolle pätee

$$\epsilon_1 = a_1 + (\epsilon_1 - a_1), \text{ missä } 0 < \epsilon_1 - a_1 < 1.$$

Jatketaan samalla tavalla, kunnes havaitaan saman luvun $\epsilon_n = \epsilon_1$ esiintyneen ketjussa jo aiemmin. Sama jakso lähtee tällöin toistumaan, joten luvun ketjumurtolukuesitys on $\epsilon = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_{n-1}}]$.[6, Ch 7.9] Kaikkien irrationaalilukujen ketjumurtolukuesitys ei kuitenkaan ole jaksollinen vaan irrationaaliluku on jaksollinen täsmälleen silloin, kun se on kokonaislukukertoimisen toisen asteen yhtälön ratkaisu[3, Thm 176-177].

## 4.4 Konvergenttien selvittäminen

**Määritelmä 4.12.** Olkoon ketjumurtoluku $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots]$. Tällöin määritellään luvut $p_n, q_n, n \in \mathbb{N}_0$ siten, että

$$p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1 \text{ ja } p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \text{ jos } n \geq 2$$

Lisäksi

$$q_0 = 1, q_1 = a_1 \text{ ja } q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \text{ jos } n \geq 2.$$

**Lause 4.13.** *Ketjumurtoluvun $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots]$ n. konvergentti voidaan esittää rationaalilukuna*

$$x_n = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

*missä $p_n$ ja $q_n$ ovat kuten määritelmässä* 4.12.

*Todistus.* Todistetaan lause induktiolla. Määritelmän 4.12 nojalla luvut $p_n$ ja $q_n$ saadaan kaavoilla $p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1$ ja $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2},$ jos $n \geq 2$ sekä kaavoilla $q_0 = 1, q_1 = a_1$ ja $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2},$ jos $n \geq 2$. Siispä kun $n = 0$, niin

$$x_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0.$$

Kun $n = 1$, niin

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_0} = \frac{a_0a_1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Niinpä lause pätee ainakin tilanteissa $n = 0$ ja $n = 1$. Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan lause pätee myös tilanteessa $n = k$, jolloin

$$x_k = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_kp_{k-1} + p_{k-2}}{a_kq_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Osoitetaan, että lause pätee tällöin myös tilanteessa $n = k + 1$. Selvästi

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}]$$

ketjumurtoluvun määritelmän perusteella. Nyt induktio-oletuksen nojalla

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Tätä lauseketta muokkaamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} &= \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} \\
&= \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}},
\end{aligned}$$

joten lause pätee myös tilanteessa $n_k + 1$. Siis lause on todistettu induktiolla, kuten lähteessä [3, Thm 149].

□

**Esimerkki 4.14.** Aiemmin havaittiin, että $\sqrt{19} = [4; \overline{2,1,3,1,2,8}]$. Siispä luvun $\sqrt{19}$ ketjumurtolukuesityksen

0. konvergentti $x_0 = 4 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$,

1. konvergentti $x_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$,

2. konvergentti $x_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}$

ja 3. konvergentti

$$x_3 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4}} = 4\frac{4}{11} = \frac{48}{11}$$
$$= \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3} = 4,363636\ldots.$$

Konvergentti tulee koko ajan tarkemmaksi, kun luku $n$ suurenee. Näin tulee tietenkin ollakin, kun konvergentin pituus kasvaa. Niinpä neljäs konvergentti on edellisiäkin tarkempi, sillä $x_4 = 4\frac{5}{14} = 4,35714\ldots$. Oikeasti $\sqrt{19} = 4,3588989\ldots$, jota konvergentit lähestyvät. Siis koko ajan tarkemmin pätee $x_n = \sqrt{19}$, kun $n \to \infty$.

**Lause 4.15.** *Olkoon $p_n, q_n, n \in \mathbb{N}_0$. Tällöin pätee*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

*Todistus.* Katso [8, Thm 39.2]. □

Seuraavan lauseen 4.16 nojalla alkaa näyttää, että lukupari $(p, q)$ olisi avain Pellin yhtälön ratkaisuun. Lukupari $(p, q)$ on nimittäin Pellin yhtälön kaltaisen yhtälön ratkaisu.

**Lause 4.16.** *Oletetaan, että $D \in \mathbb{N}$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Olkoon $\sqrt{D} = [a; \overline{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n}]$ ja $\frac{p}{q} = [a; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}]$. Tällöin rationaaliluku $\frac{p}{q}$ antaa yhtälön*

$$p^2 - Dq^2 = (-1)^n$$

*pienimmän ratkaisun $(p, q)$.*

*Todistus.* Katso [7, *Ch.* 4.8]. □

## 4.5 Pellin yhtälön pienimmän ratkaisun löytäminen

Edellisen osion lauseessa 4.16 suhteen $\frac{p}{q}$ asteen tulee olla yhtä pienempi kuin jaksollisen ketjumurtoluvun aste. Lauseen avulla saadaan ratkaisu yhtälölle $p^2 - Dq^2 = 1$, kun ketjumurtoluvun jakson aste on parillinen ja yhtälölle $p^2 - Dq^2 = -1$, kun ketjumurtoluvun jakson aste on pariton. Tästä saadaan siis ratkaisu $(x_1, y_1)$ Pellin yhtälölle $x^2 - Dy^2 = 1$ tilanteessa, jossa luvun $\sqrt{D}$ ketjumurtolukuesityksen jakso on parillinen. Parittomassa tapauksessa löydetään erilainen ratkaisu. Pellin yhtälön pienimmän epätriviaalin ratkaisun löytyminen on tämän jälkeen selvää kaikissa tapauksissa.

**Lause 4.17.** *Oletetaan, että $D \in \mathbb{N}$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Olkoon $\sqrt{D} = [a; \overline{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n}]$ ja $\frac{p}{q} = [a; b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}]$. Tällöin yksi Pellin yhtälön $x^2 - Dy^2 = 1$ epätriviaali ratkaisu on*

*a) $(x_1, y_1) = (p, q)$, jos $n$ on parillinen.*

*b) $(x_1, y_1) = (p^2 + q^2 D, 2pq)$, jos $n$ on pariton.*

*Todistus.* a) Todistettu lauseessa 4.16.

b) Määritelmän mukaan $(x_1 + y_1\sqrt{D})^k = x_k + y_k\sqrt{D}$, missä $x_k, y_k, k \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $x_1^2 - Dy_1^2 = -1$ ja käytetään lauseen 4.16 kaavaa. Tällöin

$$\begin{aligned} x_k^2 - Dy_k^2 &= (x_k + y_k\sqrt{D})(x_k - y_k\sqrt{D}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{D})^k (x_1 - y_1\sqrt{D})^k \\ &= (x_1^2 - Dy_1^2)^k \\ &= (-1)^k. \end{aligned}$$

Siis parillisilla luvuilla $k$ saadaan Pellin yhtälön ratkaisu. Tästä muodostuu Pellin yhtälö, jos $k$ on parillinen. Kun lauseen 4.16 tilanteessa luvun $n$ ollessa pariton, lukupari $(p, q)$ toteuttaa yhtälön $p^2 - Dq^2 = -1$. Siten toiseen korottamalla saadaan $(p + q\sqrt{D})^2 = (p^2 + q^2 D) + 2pqD)$, mistä saadaan Pellin yhtälölle lopullinen ratkaisu $(p^2 + q^2 D, 2pq)$.

$\square$

# 5 Esimerkkejä Pellin yhtälön ratkaisuista

Lopulta on päästy tilanteeseen, jossa osataan ketjumurtolukujen avulla selvittää minkä tahansa Pellin yhtälön pienin positiivinen ratkaisu $(x_1, y_1)$ pois lukien kaikille Pellin yhtälöille toteutuvat triviaalit ratkaisut $(x = 1, y = 0)$ ja $(x = -1, y = 0)$ eli on oltava $x_1 \geq 2$. Ratkaisu saadaan hyödyntämällä ketjumurtoluvun jaksoa. Tämän jälkeen muut ratkaisut saadaan korottamalla ensimmäisestä ratkaisusta saatua kaavaa $x_1 + y_1\sqrt{D}$ luonnollisten lukujen potensseihin.

## 5.1 $x^2 - 19y^2 = 1$

**Esimerkki 5.1.** Etsitään Pellin yhtälölle $x^2 - 19y^2 = 1$ kokonaislukuratkaisut. Selvitetään tätä varten ensin luvun $\epsilon = \sqrt{19}$ ketjumurtolukuesitys ja sen jakso (vrt. esimerkki 4.10). Käytetään tähän samaa keinoa kuin esimerkissä 4.8.

$$\epsilon_0 = \sqrt{19} = 4 + \frac{1}{\epsilon_1}, \text{ sillä } 4 < \sqrt{19} < 5.$$

Tällöin ketjumurtolukuesityksen luku $a = 4$. Saadaan

$$\sqrt{19} - 4 = \frac{1}{\epsilon_1}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_1(\sqrt{19} - 4) = 1$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{19} - 4}.$$

Laventamalla luvulla $\sqrt{19} + 4$ saadaan

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{19} + 4}{19 - 16}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_1 = \frac{\sqrt{19} + 4}{3}.$$

Jatketaan kerta toisensa jälkeen samalla tavalla kunnes löydetään luku $\epsilon_n$, joka on esiintynyt jo aiemmin. Koska $2 < \dfrac{\sqrt{19} + 4}{3} < 3$, niin $b_1 = 2$ ja

$$\frac{\sqrt{19} + 4}{3} = 2 + \frac{1}{\epsilon_2}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_2 = \frac{3}{\sqrt{19} - 2}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_2 = \frac{3\sqrt{19}+6}{15}.$$

Tästä saadaan luvulla kolme supistamalla

$$\epsilon_2 = \frac{\sqrt{19}+2}{5}.$$

$1 < \dfrac{\sqrt{19}+2}{5} < 2$, joten $b_2 = 1$. Myöskään luku $\dfrac{\sqrt{19}+2}{5}$ ei ole esiintynyt aiemmin, joten jatketaan jälleen.

$$\frac{\sqrt{19}+2}{5} = 1 + \frac{1}{\epsilon_3}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_3 = \frac{\sqrt{19}+3}{2} \text{ (ja } b_3 = 3)$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2} = 3 + \frac{1}{\epsilon_4}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_4 = \frac{\sqrt{19}+3}{5} \text{ (ja } b_4 = 1)$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1 + \frac{1}{\epsilon_5}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_5 = \frac{\sqrt{19}+2}{3} \text{ (ja } b_5 = 2)$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2 + \frac{1}{\epsilon_6}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_6 = \sqrt{19}+4 \text{ (ja } b_6 = 8)$$

$$\sqrt{19}+4 = 8 + \frac{1}{\epsilon_7}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_7 = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = \epsilon_1.$$

Niinpä luvun $\dfrac{\sqrt{19}+4}{3} = \epsilon_1 = \epsilon_7$ esiintyessä uudelleen, alkaa jakso tästä kohdasta toistumaan. Siispä haluttu jakso on

$$\sqrt{19} = [a; \overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6}] = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}].$$

Jakson aste on parillinen, joten lauseen 4.17 nojalla Pellin yhtälön $x_1 + y_1\sqrt{19}$ pienin ratkaisu on $(x_1, y_1) = (p, q)$, missä $x_1 \geq 2$. Nyt $\dfrac{p}{q} = [4; 2, 1, 3, 1, 2]$, sillä ketjumurtolukuesityksen jakson viimeinen luku saadaan jättää pois. Jakson viimeinen luku on $b_5$, joten $\frac{p}{q} = \frac{p_5}{q_5}$. Luvut $p_n$ ja $q_n$ saadaan määritelmän 4.12 mukaisesti kaavoilla $p_0 = a, p_1 = ab_1 + 1, p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2}$, jos $n \geq 2$, $q_0 = 1, q_1 = b_1$ ja $q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2}$, jos $n \geq 2$. Nämä tulokset on laskettu seuraavassa taulukossa.

| | |
|---|---|
| $p_0 = 4$ | $q_0 = 1$ |
| $p_1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ | $q_1 = 2$ |
| $p_2 = 1 \cdot 9 + 4 = 13$ | $q_2 = 1 \cdot 2 + 1 = 3$ |
| $p_3 = 3 \cdot 13 + 9 = 48$ | $q_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$ |
| $p_4 = 1 \cdot 48 + 13 = 61$ | $q_4 = 1 \cdot 11 + 3 = 14$ |
| $p_5 = 2 \cdot 61 + 48 = 170$ | $q_5 = 2 \cdot 14 + 11 = 39$ |

Taulukosta nähdään, että Pellin yhtälön $x^2 - 19y^2 = 1$ pienin epätriviaali ratkaisu on lukupari $(x_1, y_1) = (p, q) = (p_5, q_5) = (170, 39)$. Tarkistettaessa yhtälö $170^2 - 19 \cdot 39^2 = 1$ näyttää todellakin pätevän.
Lauseen 3.6 mukaan loput ratkaisut saadaan lausekkeesta $(x_1 + y_1\sqrt{D})^k$, missä $k \in \mathbb{N}$. Niinpä kaikki Pellin yhtälön $x^2 - 19y^2 = 1$ kokonaislukuratkaisut saadaan lausekkeen $(170 + 39\sqrt{19})^k$ kertoimista. Esimerkiksi toiseksi pienin yhtälön toteuttava lukupari saadaan laskun $170 + 39\sqrt{19}$ neliöstä.

$$(170 + 39\sqrt{19})^2 = 170^2 + 2 \cdot 170 \cdot 39\sqrt{19} + (39\sqrt{19})^2 = 57799 + 13260\sqrt{19},$$

joten yhtälön toiseksi pienin ratkaisu on lukupari $(x_2, y_2) = (57799, 13260)$. Kolmanneksi pienin kokonaislukuratkaisu saataisiin lausekkeen $170 + 39\sqrt{19}$ kuutiosta ja niin edelleen. Ratkaistaan vielä kolmanneksi pienin ratkaisu.

$$\begin{aligned}(170 + 39\sqrt{19})^3 &= (57799 + 13260\sqrt{19})(170 + 39\sqrt{19}) \\ &= 19651490 + 4508361\sqrt{19},\end{aligned}$$

joten ratkaisuksi saadaan $(x_3, y_3) = (19651490, 4508361)$. Pienimmästä ratkaisusta muodostettua kaavaa $170 + 39\sqrt{19}$ voi korottaa aina vain suurempaan potenssiin, joten uusia ratkaisuja saataisiin samaa menetelmää toistaen äärettömästi.

## 5.2 $x^2 - 13y^2 = 1$

**Esimerkki 5.2.** Selvitetään Pellin yhtälön $x^2 - 13y^2 = 1$ kokonaislukuratkaisut. Selvitetään tätä varten ensin luvun $\epsilon = \sqrt{13}$ ketjumurtolukuesitys ja sen jakso aivan samalla tavalla kuin esimerkissä 5.1.

$$\epsilon_0 = \sqrt{13} = 3 + \frac{1}{\epsilon_1} \text{ (ja } a = 3)$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_1 = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \text{ (ja } b_1 = 1).$$

$$\frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + \frac{1}{\epsilon_2}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_2 = \frac{\sqrt{13}+1}{3} \text{ (ja } b_2 = 1).$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + \frac{1}{\epsilon_3}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_3 = \frac{\sqrt{13}+2}{3} \text{ (ja } b_3 = 1)$$

$$\frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + \frac{1}{\epsilon_4}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_4 = \frac{\sqrt{13}+1}{4} \text{ (ja } b_4 = 1)$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + \frac{1}{\epsilon_5}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_5 = \sqrt{13}+3 \text{ (ja } b_5 = 6)$$

$$\sqrt{13}+3 = 6 + \frac{1}{\epsilon_6}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_6 = \frac{\sqrt{13}+3}{4} = \epsilon_1.$$

Niinpä luvun $\frac{\sqrt{13}+3}{4} = \epsilon_1 = \epsilon_6$ esiintyessä uudelleen, alkaa jakso tästä kohdasta toistumaan. Siispä haluttu jakso on

$$\sqrt{13} = [a; \overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6}] = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}].$$

Erona esimerkkiin 5.1 jakson aste on pariton. Niinpä lauseen 4.17 nojalla Pellin yhtälön $x_1 + y_1\sqrt{13}$ pienin epätriviaali ratkaisu on

$$(x_1, y_1) = (p^2 + q^2 D, 2pq).$$

Nyt $\frac{p}{q} = [3; 1, 1, 1]$, sillä ketjumurtolukuesityksen jakson viimeinen luku saadaan jättää pois. Jakson viimeinen luku on $b_4$, joten $\frac{p}{q} = \frac{p_4}{q_4}$. Luvut $p_n$ ja $q_n$ saadaan kaavoilla $p_0 = a, p_1 = ab_1 + 1, p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2}$, jos $n \geq 2$, $q_0 = 1, q_1 = b_1$ ja $q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2}$, jos $n \geq 2$. Nämä tulokset on laskettu seuraavassa taulukossa.

| | |
|---|---|
| $p_0 = 3$ | $q_0 = 1$ |
| $p_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ | $q_1 = 1$ |
| $p_2 = 1 \cdot 4 + 3 = 7$ | $q_2 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$ |
| $p_3 = 1 \cdot 7 + 4 = 11$ | $q_3 = 1 \cdot 2 + 1 = 3$ |
| $p_4 = 1 \cdot 11 + 7 = 18$ | $q_4 = 1 \cdot 3 + 2 = 5$ |

Taulukon avulla saadaan laskettua Pellin yhtälön $x^2 - 13y^2 = 1$ pienin ratkaisu eli lukupari

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (p^2 + q^2 D, 2pq) = (p_4^2 + q_4^2 D, 2p_4 q_4)\\ &= (18^2 + 5^2 \cdot 13, 2 \cdot 18 \cdot 5) = (649, 180).\end{aligned}$$

Tarkistettaessa yhtälö $649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1$ näyttää todellakin pätevän. Loput kokonaislukuratkaisut saadaan lausekkeesta $(x_1 + y_1\sqrt{D})^k$, missä $k \in \mathbb{N}$ aivan samoin kuin esimerkissä 5.1. Niinpä kaavasta $(649 + 180\sqrt{13})^k$ saadaan kaikki Pellin yhtälön $x^2 - 13y^2 = 1$ kokonaislukuratkaisut. Toiseksi pienin yhtälön toteuttava ratkaisu on lukupari $(x_2, y_2) = (842401, 233640)$, koska

$$(649+180\sqrt{13})^2 = 649^2+2\cdot 649\cdot 180\sqrt{13}+(180\sqrt{13})^2 = 842401+233640\sqrt{193}.$$

# 6 Yhteenveto

Pellin yhtälölle $x^2 - Dy^2 = 1$ siis löydetään helposti triviaaliratkaisut ja reaalilukuratkaisuja, mutta kokonaislukuratkaisujen löytäminen on huomattavasti työläämpää. Tätä varten joudutaan yhtälön erästä ratkaisua varten etsimään ketjumurtolukuesitys luvun $D$ neliöjuurelle ja selvittämään tämän ketjumurtolukuesityksen jakso ja samalla jakson pituus. Tämä tapahtuu esimerkin 4.11 laskutapaa noudattaen. Menetelmää käyttäessä luku $D$ voi muuten olla mikä tahansa luonnollinen luku, mutta se ei saa olla minkään luvun neliö. Ratkaisumenetelmä on siten yleispätevä lähes jokaisessa tilanteessa ja erikoistapauksesta kerrottiin kappaleessa 3.4.

Luvun $\sqrt{D}$ ketjumurtolukuesityksen jakson avulla saadaan selville esityksen konvergentit. Tämän jälkeen konvergenteissä esiintyville luvuille $p_n$ ja $q_n$ käytetään määritelmässä 4.12 esitettyjä laskukaavoja. Näin saadaan selville tässä tutkielmassa pienimmäksi ratkaisuksi kutsuttu lukupari $(x_1, x_2)$, joka toteuttaa Pellin yhtälön $x^2 - Dy^2 = 1$. Siten Pellin yhtälölle on löytynyt yksi ratkaisu.

Pellin yhtälöllä $x^2 - Dy^2 = 1$ on kuitenkin useampia kokonaislukuratkaisuja. Ne saadaan ensimmäisen ratkaisun avulla korottamalla lauseketta $x_1 + y_1\sqrt{D}$ eri potensseihin. Lauseke täytyy potenssiin korotuksen jälkeen muokata muotoon $x_k + y_k\sqrt{D}$, missä lukupari $(x_k + y_k\sqrt{D})$ on Pellin yhtälön ratkaisu. Potenssina voi olla mikä tahansa luonnollinen luku, joten uusia Pellin yhtälön toteuttavia ratkaisuja löydetään äärettömästi.

# Viitteet


[1] John H. Conway, Richard K. Guy, *The Book of Numbers*, Copernicus, 1996

[2] Larry J. Gerstein, *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*, Springer, 2.painos, 2012.

[3] G. H Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, (4. painos), Oxford University Press, 1960.

[4] Matti Lehtinen, *Matematiikan vuosituhannet*, Eukleides-kirjat, 2017.

[5] Hendrik W. Lenstra Jr. *Solving the Pell equation, Amer. Math. Soc.*, vuosikerta 49. 2002 nro. 2.

[6] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 2. painos, Courier Companies, 1966.

[7] C. D. Olds, *Continued Fractions*, The Mathematical Association of America, 1963.

[8] J.H. Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory*, 3. painos, Pearson Education, 2006.

[9] Simon Singh, *Fermat'n viimeinen teoreema*, suomentanut Tuula Kousa-Parikka, Gummerus Kirjapaino, 1998.