Valmiina korkeakouluun – Lyhyen matematiikan kertausosioita luomassa

Juulia Järvelin ja Sara Lepomäki

Pro gradu

Jyväskylän Yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2019

Tiivistelmä: Juulia Järvelin ja Sara Lepomäki, Valmiina korkeakouluun – Lyhyen matematiikan kertausosioita luomassa, matematiikan pro gradu -tutkielma, 69 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

MathMarket on korkeakoulumatematiikkaan valmistava verkkokurssi, jota käytetään Jyväskylän ammattikorkeakoulussa ja Jyväskylän yliopistossa. Kurssi suoritetaan Moodle-oppimisympäristössä, ja sillä kerrataan ennestään tuttuja matematiikan sisältöjä ennen korkeakouluissa alkavia matemaattisia opintoja. MathMarket-verkkokurssi sisältää molempien oppilaitosten opiskelijoille suunnattuja yhteisiä sekä korkeakoulukohtaisia osioita. Aiemmat kertausosiot pohjautuivat peruskoulumatematiikkaan tai lukion pitkään matematiikkaan. Tutkielmassa esitellään prosessi, jossa luotiin verkkokurssille kaksi uutta lukion lyhyeen matematiikkaan pohjautuvaa kertausosiota: kaikille yhteinen sekä yliopisto-opiskelijoille suunnattu osio. Niiden luomisprosessiin kuului muun muassa aihealueiden rajaaminen kurssia hyödyntävien oppilaitosten toiveiden mukaisesti ja tehtävien laadinta.

Korkeakouluopintoihin valmistavaa verkkokurssia suoritetaan täysin itsenäisesti, usein jo ennen korkeakouluopintojen alkamista, joten kurssilla ei ollut mahdollista saada opettajan välitöntä tukea. Sillä oli vaikutusta osioiden sisältöjen rajaukseen sekä tehtävätyyppien valintaan suunnitteluvaiheessa. Tutkielmassa käydään läpi, millaisia oppimisympäristöjä verkkokurssit ovat ja pohditaan, miten mielekkään oppimisen kriteerit toteutuvat MathMarket-verkkokurssilla.

Tutkielmassa analysoidaan opiskelijoilta Moodlessa heti kurssin suorituksen jälkeen vuonna 2018 kerättyä palautetta sekä keväällä 2019 kerättyä palautetta kurssin suorittaneilta yliopisto-opiskelijoilta. Niiden avulla kerättiin tietoa siitä, mikä kurssilla oli toimivaa. Palautteista saatiin toimivia parannusehdotuksia, joita hyödynnettiin uusien osioiden luomisessa. Tutkielman lopussa esitellään vielä uusia kehitysideoita kurssin jatkokehitystä ajatellen.

Sisällys

1. Johdanto

Pro gradussa käsitellään prosessia, jossa tehtiin korkeakouluopintoihin valmistavan matematiikan verkkokurssin uudistus. Verkkokurssi sijaitsee Moodle-oppimisympäristössä Jyväskylän ammattikorkeakoulun (JAMK) ja Jyväskylän yliopiston yhteiskäytössä, ja se on suunniteltu opiskelijoille ennen matematiikan opintojen aloittamista. Kurssin suoritukseen kuuluu verkkokurssilla olevien tehtäväkokonaisuuksien tekeminen, ja opiskelija suorittaa sen itsenäisesti oman aikataulunsa puitteissa. Työnimellä MathMarket kulkevalla verkkokurssilla on aiemmin ollut vain peruskoulun sisältöihin ja lukion pitkään matematiikkaan pohjautuvat kertausosiot. Uudistuksessa verkkokurssille luotiin muun muassa kaksi uutta osiota, joissa on kertaavia tehtäviä lyhyen matematiikan sisällöistä. Niitä ja lukion pitkään matematiikkaan pohjautuvia kertausosioita keskitytään tarkastelemaan tässä työssä. Uudistuksesta ja kurssin rakenteesta kerrotaan luvussa 2.

Lyhyen matematiikan kertausosioiden tehtävien laadinnasta vastasivat tämän pro gradu -työn tekijät, matematiikan aineenopettajaopiskelijat Juulia Järvelin ja Sara Lepomäki. Uusien osioiden luonti toteutettiin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen edustajien Anni Laitisen ja Petri Juutisen ohjauksessa. Kerrattavat aihesisällöt valikoitiin yhdessä työryhmän kanssa, johon kuului edellä mainittujen lisäksi edustajia Jyväskylän ammattikorkeakoululta sekä Jyväskylän koulutuskuntayhtymä Gradialta. Osioiden tarkemmista sisällöistä ja aihealueiden valinnasta kerrotaan luvussa 6, jossa on myös esimerkkejä eri aihealueiden tehtävistä. Koska tehtävien laadinta oli tässä työssä ensisijaista, on tätä prosessia käsitelty luvussa 7 ja harjoitustehtävien malliratkaisujen laadintaa luvussa 8.

Lyhyen matematiikan osiot toteutettiin samalla rakenteella kuin kurssilla jo aiemmin käytössä olleet pitkän matematiikan osiot. Tästä syystä analysoimme kurssin sisällä annettua ja myöhemmin erillisellä kyselyllä kerättyä opiskelijapalautetta, ja kartoitimme verkkokurssin hyväksi todettuja piirteitä sekä kehityskohteita. Kerätystä palautteesta, sen analysoinnista ja palautteen pohjalta tehdyistä muutoksista kerrotaan luvussa 3. Yksi työn tavoitteista on auttaa kurssin tulevaa kehitystyötä ja antaa muille samankaltaista verkkokurssia suunnitteleville vinkkejä ja näkökulmia kurssin luomiseen Moodle-oppimisympäristössä ja myös yleisemmin. MathMarket-verkkokurssiin liittyvistä kehitysideoista kerrotaan luvussa 9, verkkokursseista oppimisympäristönä luvussa 4 ja oppimismotivaatiosta luvussa 5. Kurssin aiemmasta kehitystyöstä on tehty Jyväskylän yliopistossa pro gradu -tutkielma '"Ponnahduslauta uusiin matemaattisiin haasteisiin" keväällä 2018.

2. Tarve MathMarket-verkkokurssille ja sen uudistukselle

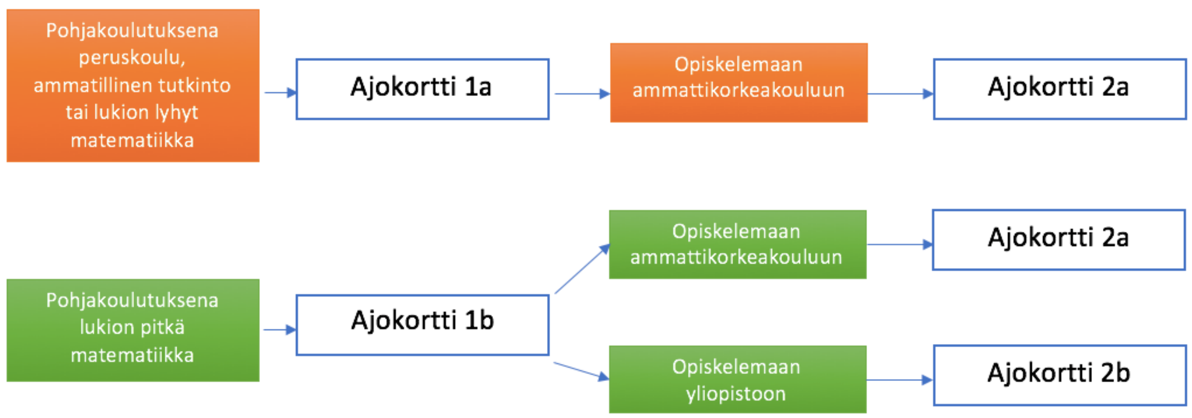
MathMarket-verkkokurssi kertaa peruskoulun ja lukion oppisisältöjä korkeakouluopiskelijoiden matematiikan osaamisen tukemiseksi. Kurssin tavoitteena on luoda uusille korkeakoulussa aloittaville opiskelijoille paremmat valmiudet suoriutua korkeakoulun matematiikan opinnoista. Sitä suositellaan suoritettavaksi ennen matematiikan opintojen aloittamista, jotta sen tarjoama hyöty olisi mahdollisimman suuri. Kurssin tarkoituksena ei ole opiskella täysin uusia sisältöjä, vaan opiskelija tuntee tehtävissä tarvittavat tiedot jo aiemman koulutuksensa pohjalta. Kurssi ei sisällä varsinaista teorian opiskelua, sillä sen suorittamiseksi riittää vaadittujen tehtävien tekeminen. Suoritukseen kuuluvat pakolliset harjoitustehtävät sisältävät kuitenkin opiskelijalle näytettävät malliratkaisut, joissa tehtävään liittyvää teoriaa kerrataan pienimuotoisesti. Kurssi sisältää tehtävien tueksi myös eri osioihin räätälöityjä materiaalikirjoja, joista opiskelija voi kerrata tehtäviin liittyvää teoriataustaa.

Verkkokurssi toimii opiskelijalle itsearvioinnin työkaluna. Sen ensisijainen tarkoitus on antaa opiskelijalle tietoa hänen omasta tasostaan. Toisaalta verkkokurssi voi mahdollistaa sen, että opinto-ohjaajat pystyvät paremmin ohjaamaan opiskelijoita kurssivalintojen teossa. Esimerkiksi matematiikan opiskelun aloittavat saavat itsearvioinnin kautta osviittaa siitä, kannattaako heidän aloittaa ensimmäisen vuoden opinnot laskennallisemmilla ja lukion sisältöjä enemmän kertaavilla Calculus-kursseilla vai analyysiin johdattavilla ja haastavammilla Johdatus matemaattiseen analyysiin -kursseilla. Matematiikan sivuaineopiskelijalle verkkokurssin teko taas antaa osviittaa siitä, onko heidän tarpeen aloittaa matematiikan opinnot lukion pitkää matematiikkaa kertaavalla Matematiikan propedeuttisella kurssilla ennen Calculus- tai tilastotieteen kursseille siirtymistä.

Keväällä 2019 tehdyllä uudistuksella pyrittiin laajentamaan kurssin käyttäjäryhmää. Aiemmin kurssi ei ole palvellut niin hyvin opiskelijoita, jotka ovat opiskelleet lukiossa lyhyen matematiikan. Korkeakoulun aloittavista opiskelijoista suuri osa on opiskellut lyhyen matematiikan, joten myös sille käyttäjäryhmälle haluttiin tarjota oma kertausosionsa. Opiskelijoille tahdottiin tarjota paremmin myös heidän tulevaan opiskelualaansa kohdistettuja sisältöjä. Näiden johdosta kurssille luotiin kaikille yhteinen sekä yliopisto-opiskelijoille suunnattu lyhyen matematiikan osio. Samaan aikaan lyhyen matematiikan kertausosioiden laadinnan kanssa laajennettiin ammattikorkeakoulun opiskelijoille suunnattuja osioita ja uudistettiin peruskoulun oppisisältöjen kertausosio. Tätä kehitystyötä olivat tekemässä ammattikorkeakoululta teknologian ja logistiikan lehtori Anne Rantakaulio, hyvinvoinnin ja terveysalan lehtori Niilo Kuokkanen sekä liiketalouden ja -toiminnan lehtori Teemu Laitinen. Tekniikan alan opiskelijoille suunnatun osion lisäksi kurssille saatiin tämän myötä myös hyvinvointialan ja liiketalouden opiskelijoille suunnatut osiot.

2.1. Kurssin rakenne ennen kevään 2019 uudistusta

Ennen uudistusta MathMarket-verkkokurssi koostui neljästä eri osiosta, joista opiskelija suoritti kaksi: kaikille yhteisen osion ja tulevan opiskelupaikan mukaan valittavan osion. Näitä osioita kutsuttiin ajokorteiksi. Yhteisessä osiossa vaihtoehtona oli peruskoulun matematiikan kertaus, ajokortti 1a, jonka tekivät myös lyhyen matematiikan opiskelleet. Toinen vaihtoehto oli pitkän matematiikan sisältöihin pohjautuva kertaus, ajokortti 1b. Yhteisessä osiossa valinta tehtiin siis sen perusteella, mikä pohjakoulutus opiskelijalla on. Yhteisen osion suorituksen jälkeen siirryttiin toiseen osioon, jossa valinta tehtiin sen perusteella, millä koulutusalalla kurssin tekijä aloittaa opintonsa. Vaihtoehtoina olivat tekniikan alan ammattikorkeakouluopiskelijoille suunnattu ajokortti 2a ja yliopisto-opiskelijoille suunnattu ajokortti 2b. Kurssin aiempi rakenne on esitetty Kuva 1.



Kuva 1. Kurssin rakenne ennen kevään 2019 uudistusta.

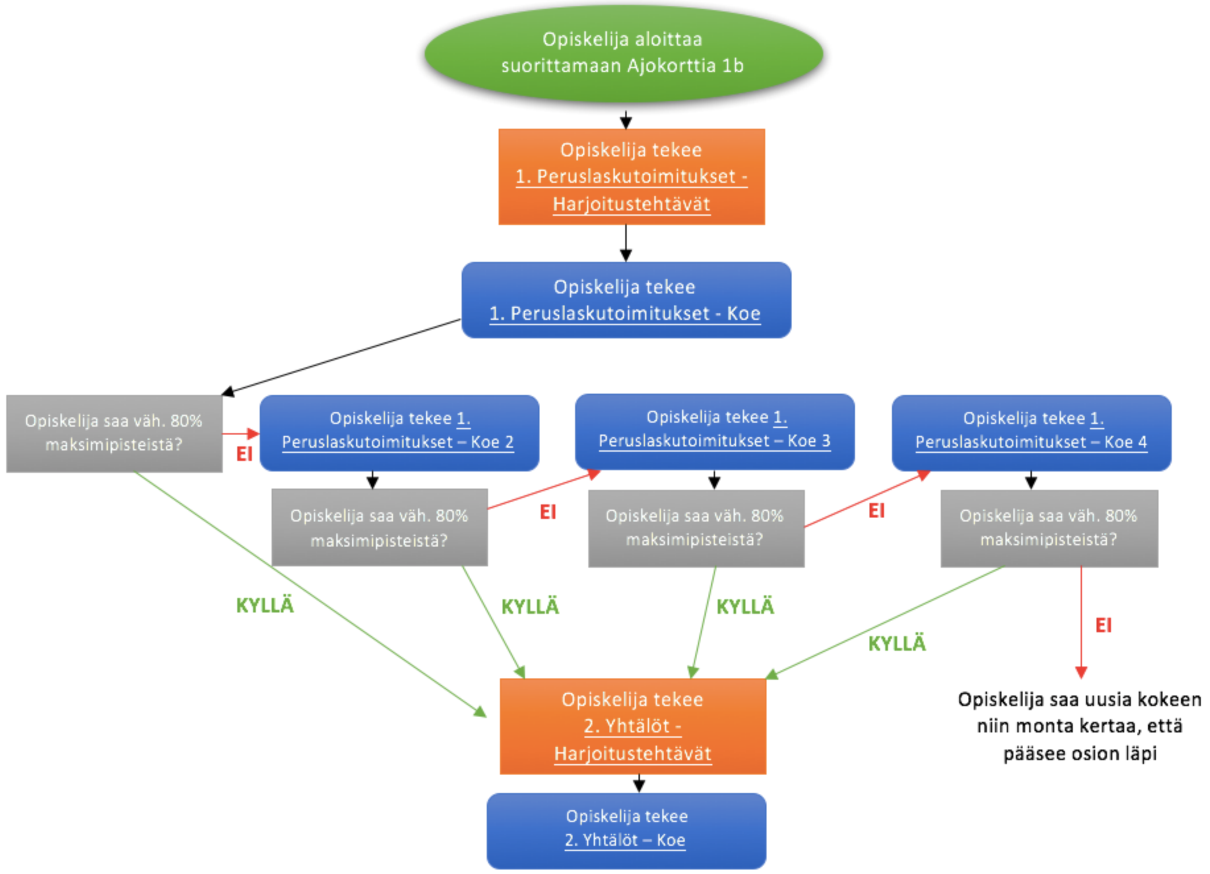
Ajokortti 1b oli rakennettu niin, että sen sisällä oli 5 eri aihealuetta (Kuva 2), joissa jokaisessa oli ensin harjoitustehtäviä ja vasta niihin vastaamisen jälkeen opiskelija pääsi suorittamaan aihealueen koetta. Ajokortti 1b:llä oli opiskelun tukena oma materiaalikirja.

Ajokortin 1b tehtyäsi olet kerrannut lukion sisällöistä seuraavat aihepiirit:

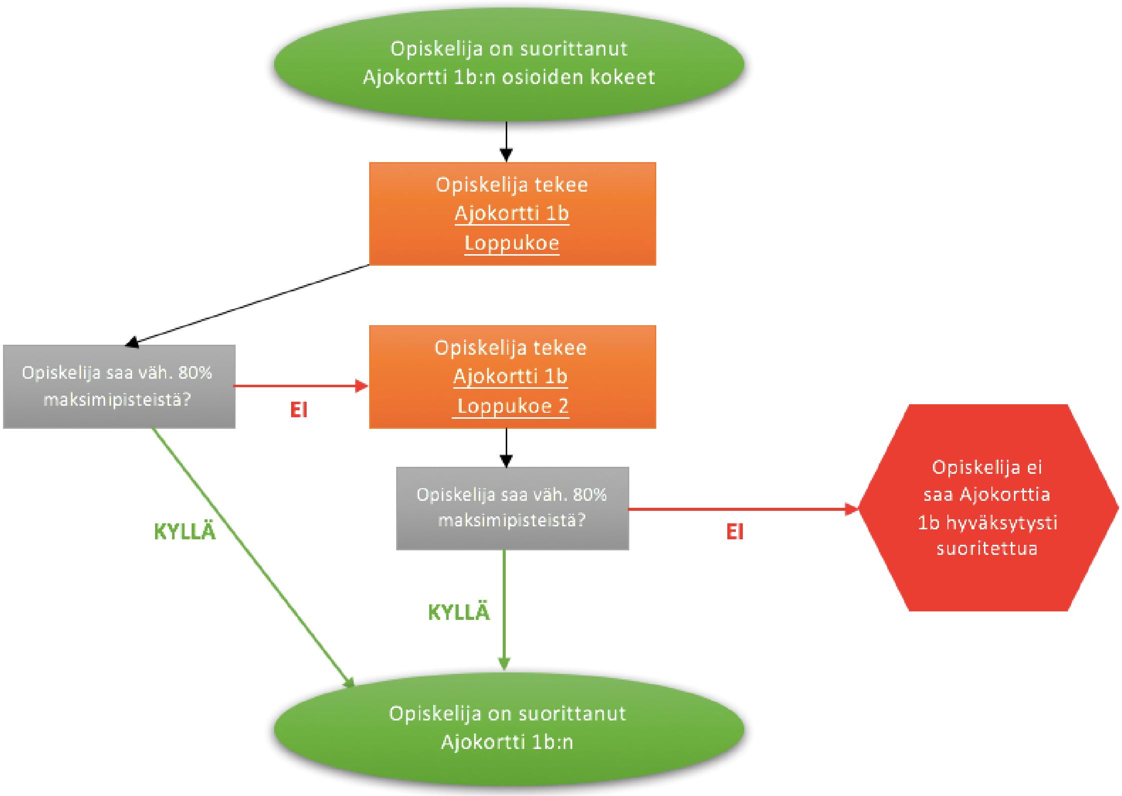
- Peruslaskutoimitukset
- Yhtälöt
- Funktiot
- Geometria
- Derivaatta ja integraali

Kuva 2. Ajokortti 1b:n sisällöt Moodlessa.

Harjoitustehtäviä jokaisessa aihealueessa oli keskimäärin 7 kappaletta ja koetehtäviä 6. Harjoitustehtävissä opiskelijalle tulivat näkyviin malliratkaisut, jotka sisälsivät linkin materiaalikirjan kohtaan, jossa oli tehtävään liittyvää teoriaa. Harjoitustehtävissä ei ollut läpipääsyrajaa, mutta aihealueiden kokeissa opiskelijan tuli saada vähintään 80 % kokeen maksimipisteistä. Jokaisessa aihealueessa ensimmäisen kokeen jälkeen oli vielä kolme erilaista uusintakoetta. Aihealueen neljättä eli viimeistä uusintakoetta oli mahdollista yrittää niin monta kertaa kuin halusi. Lisäksi opiskelijan liikkumista kurssilla oli rajattu siten, ettei seuraavaan aihealueeseen päässyt, ennen kuin edellinen aihealue oli hyväksytysti suoritettu. Kun kaikkien aihealueiden kokeet oli hyväksytysti suoritettu, odotti opiskelijaa vielä 10 tehtävän loppukoe, joka kokosi yhteen kaikki esillä olleet aiheet. Loppukokeita oli vain kaksi, varsinainen loppukoe ja yksi uusintamahdollisuus. Hyväksyttyyn kurssisuoritukseen vaadittiin loppukokeen maksimipisteistä vähintään 80 %. Eteneminen ajokortin 1b suorittamisessa on esitetty alla (Kuva 3 ja Kuva 4).



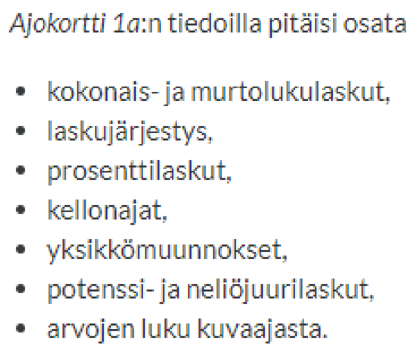
Kuva 3. Ajokortti 1b:n suorituksen eteneminen yhden aihealueen sisällä. Jokainen aihealue toistaa tätä kaavaa.



Kuva 4. Jokaisen aihealueen suorittamisen jälkeen opiskelijan on suoritettava vielä loppukoe.

Ajokortti 1a:ssa ei ollut ajokortti 1b:n tapaan aihealueiden kokeita. Tässä osiossa oli ainoastaan harjoitustesti ja varsinainen koe, josta tuli saada 80 % maksimipistemäärästä, jotta sai suorituksen ajokortista 1b. Varsinaista koetta sai yrittää kaksi kertaa. Harjoitustestiin ja kokeeseen tehtävät arvottiin satunnaisesti tehtäväpankista. Tässä osiossa tehtävien teon tukena oli video- ja tehtäväkirjasto, jossa oli harjoitusaineistoa ja teoriaa videoiden ja tekstien muodossa sekä erilaisia oppimispelejä.

Ajokortti 1a:n rakenne ei taannut sitä, että oppilas todella käytti aikaa asioiden kertaamiseen ja oppimateriaalien lukemiseen, sillä harjoitustesti ei ollut pakollinen. Opiskelija pystyi siis siirtymään osion kokeeseen suoraan ilman harjoittelua. Koska ajokortin 1a varsinaisessa kokeessa oli vain 20 tehtävää, ei ajokortin suorittamiseen kulu yhtä kauan aikaa kuin esimerkiksi ajokortin 1b suorittamiseen, jossa tehtäviä tuli tehdä vähintään 74. Tavoitteena kurssilla kuitenkin olisi, että opiskelija todella kertaa matematiikan sisältöjä, ja palauttaa mieleensä asioita kertaamalla ensin ja tekemällä vasta sitten tehtävät. Ajokortti 1a:ssa kerrattavat aihealueet on esitetty Kuva 5.


Ajokortti 1a:n tiedoilla pitäisi osata

- kokonais- ja murtolukulaskut,
- laskujärjestys,
- prosenttilaskut,
- kellonajat,
- yksikkömuunnokset,
- potenssi- ja neliöjuurilaskut,
- arvojen luku kuvaajasta.

Kuva 5. Ajokortti 1a:n sisällöt Moodlessa.

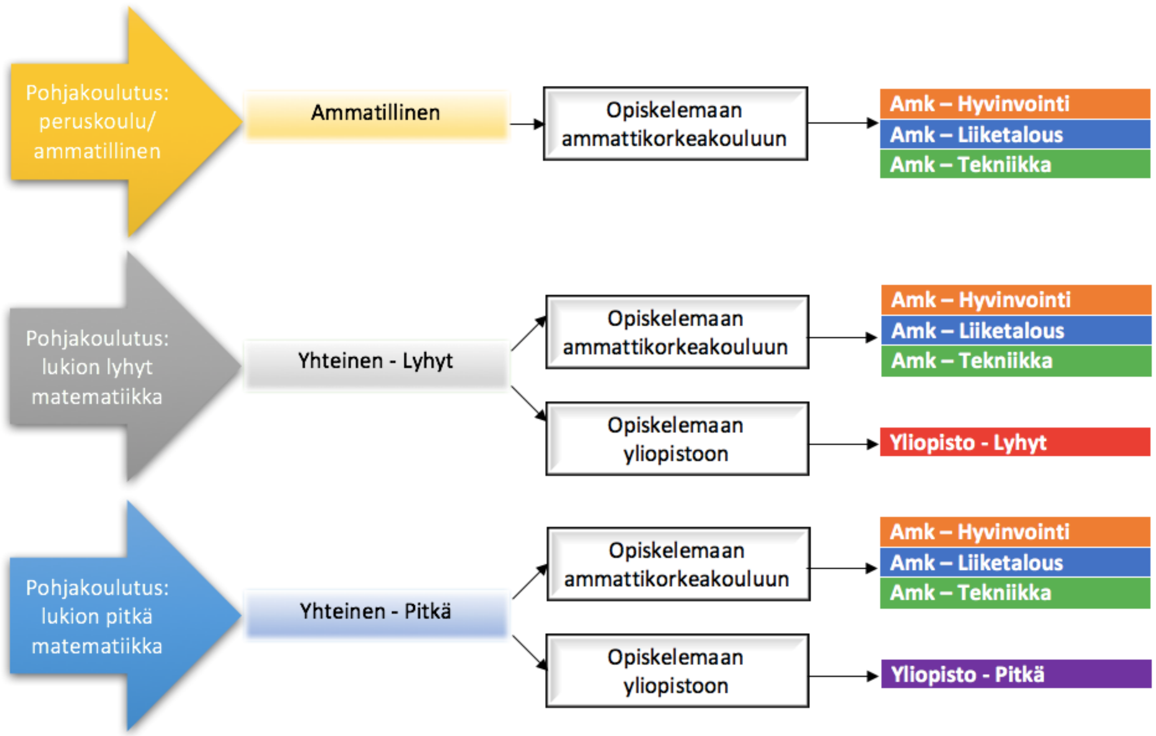
Ajokortti 2a oli suunnattu kaikille tekniikan alan ammattikorkeakouluopiskelijoille pohjakoulutuksesta riippumatta. Se sisälsi materiaalikirjan videoiden muodossa, vapaaehtoiset harjoitustehtävät sekä pakollisen ajokorttikokeen, kuten ajokortti 1a. Ajokortin 2a kokeessa oli 20 tehtävää ja yrityskertoja kaksi. Näiden lisäksi tässä osiossa oli vapaaehtoinen fysiikan ajokortti, joka sisälsi erilliset materiaalit ja harjoitustehtävät.

Ajokortti 2b:n rakenne poikkesi hieman ajokortti 1b:n rakenteesta, sillä loppukoetta ei ollut tässä yliopisto-opiskelijoille suunnatussa osiossa ollenkaan. Lisäksi liikkuminen viiden aihealueen välillä oli vapaampaa, sillä aihealueita pystyi suorittamaan haluamassaan järjestyksessä. Jokaisessa aihealueessa oli keskimäärin 5 harjoitustehtävää ja 6 koetehtävää. Aihealueiden kokeita oli ainoastaan kaksi eli jos ensimmäisellä yrittämällä ei saanut vähintään 80 % kokeen maksimipisteistä, oli yksi uusintamahdollisuus toisessa kokeessa. Ajokortti 2b:ssä ei ollut omaa materiaalikirjaa vaan opiskelijaa ohjeistettiin käyttämään tarvittaessa ajokortti 1b:n materiaalikirjaa sekä taulukkokirjaa. Joissakin tehtävissä oli esitelty aiheeseen liittyvää teoriaa tehtävänannon sisällä.

2.2. Kurssin rakenne kevään 2019 uudistuksen jälkeen

Valmiina olevaa verkkokurssia kehitettiin siten, että lyhyen matematiikan sisältöjen pohjalta haluttiin luoda kaikille yhteinen ja yliopisto-opiskelijoille suunnattu kertausosio. Myös ammattikorkeakouluopiskelijoille suunnattu osio päivitettiin ja tehtiin sen tilalle erilliset osiot tekniikan, liiketalouden sekä hyvinvointialan opiskelijoille. Lisäksi Jyväskylän ammattikorkeakoulun työryhmä muutti ajokortin 1a rakennetta kevään 2019 uudistuksessa enemmän ajokortti 1b:n rakenteen kaltaiseksi. Lyhyen matematiikan osiolle laadittiin oma materiaalikirja, josta opiskelija voi kerrata asioita ennen tehtävien teon aloittamista sekä tehtävien teon lomassa. Lyhyen matematiikan materiaalikirjan verkkokurssille teki matematiikan opettaja Lauri Huttunen Jyväskylän koulutuskuntayhtymä Gradialta. Kaikille yhteisen osion harjoitustehtävien malliratkaisuihin lisättiin linkit materiaalikirjan kohtaan, jossa tehtävään liittyvää aihetta on käsitelty, kuten kurssin aiemman version ajokortti 1b:ssä. Eteneminen pitkän matematiikan osiossa oli koettu toimivaksi, joten lyhyen matematiikan tehtävien kulusta haluttiin tehdä samanlainen. Ensin siis tulee tehdä aihealueen harjoitustehtävät ja sen jälkeen saman aihealueen koe. Kun kaikkien aihealueiden kokeet on läpäisty hyväksytysti, viimeisenä vuorossa on loppukoe. Yliopistoon tuleville, lyhyen matematiikan lukeneille opiskelijoille tehtiin uudistuksessa myös oma kertausosio: Yliopisto - Lyhyt. Tästä kertausosiosta tehtiin samanlainen kuin ajokortista 2b sillä poikkeuksella, että kokeita jokaisessa aihealueessa oli kolme.

Opiskelijan valinnat suoritettavista osioista ja eteneminen kurssilla toimii kevään 2019 uudistuksen jälkeen samalla tavalla, mutta vaihtoehtoja on jatkossa useampia ja osiot nimettiin uudelleen sen mukaan, kenelle ne oli suunnattu. Pitkän matematiikan kertausosiot ajokortti 1b ja ajokortti 2b säilyivät miltei muuttumattomina, ainoastaan tehtävistä löydetyt virheet korjattiin ja ajokorttiin 1b tehtiin yksi loppukoe lisää. Kaikille opiskelijoille suunnatussa yhteisessä osiossa on siis kevään 2019 uudistuksen jälkeen kolme opiskelijan pohjakoulutuksen mukaista vaihtoehtoa: Ammatillinen, Yhteinen - Lyhyt ja Yhteinen - Pitkä. Opiskelupaikan mukaan valittavassa toisessa osassa taas on valittavana viisi osiota: Amk - Hyvinvointi, Amk - Liiketalous ja Amk - Teknologia, Yliopisto - Lyhyt ja Yliopisto - Pitkä. Alakohtaiset osiot ovat ammattikorkeakoulun opiskelijoille samat pohjakoulutuksesta riippumatta. Kurssin uudistettu rakenne on esitetty Kuva 6.



Kuva 6. Kurssin rakenne kevään 2019 uudistuksen jälkeen.

3. Kurssista kerätty opiskelijapalaute

MathMarket-verkkokurssi on ollut käytössä Moodle-ympäristössä kahden vuoden ajan rakenteella, joka esiteltiin luvussa 2.3. Kurssin kehittämiseksi on kerätty kurssin tehneiltä opiskelijoilta palautetta Moodlessa kyselylomakkeella, joka opiskelijan on tullut täyttää kurssin suorittamisen jälkeen saadakseen kurssista suoritusmerkinnän. Lisäksi kevään 2019 uudistusta varten kerättiin palautetta kurssista vielä uudella kyselyllä, joka lähetettiin niille matematiikan, tilastotieteen ja fysiikan pääaineopiskelijoille, jotka ovat tehneet kurssin vuosien 2017 ja 2018 aikana.

3.1. Moodlessa annettu kurssipalaute

Kurssilta kerättiin opiskelijapalautetta jokaisesta ajokortista erikseen täytettävällä lomakkeella. Näissä Moodleen tehdyissä palautelomakkeissa oli osittain eri kysymyksiä eri ajokorteissa. Kaikkien ajokorttien palautelomakkeiden tarkoituksena oli kuitenkin kartoittaa ajokortin toimivia sekä kehittämistä kaipaavia osa-alueita. Kaikkien palautelomakkeiden yhteiset kysymykset on esitetty Kuva 7. Lisäksi palautekyselyt ajokorteista 1b ja 2b ovat tutkielman liitteinä. Palautteet on poimittu Moodlesta helmikuussa 2019, joten sen jälkeen tulleita suorituksia tai palautteita ei ole huomioitu luvuissa 3.1.1.-3.1.4.

Monivalintakysymykset	Avoimet kysymykset
• kuinka paljon käytti aikaa ajokortin tekemiseen • mitä mieltä oli 1) materiaalikirjasta tai teoriamateriaalin puuttumisesta 2) harjoitustehtävien määrästä 3) harjoitus- ja koetehtävien vaikeustasosta 4) harjoitustehtävien malliratkaisuista • tyytyväisyys omaan suoriutumiseen • yleinen mielipide tällaisesta ennakkotehtävästä	- mikä oli haastavinta - mikä oli hyvää ja mikä huonoa? - mitä ajokortissa pitäisi kehittää?

Kuva 7. Jokaisessa palautelomakkeessa esitetyt kysymykset.

3.1.1. Palaute ajokortista 1a

Ajokortin 1a, joka kertasi peruskoulun matematiikkaa, suorittivat peruskoulupohjalla, ammattikoulutaustalla tai lyhyen matematiikan taidoilla Jyväskylän ammattikorkeakoulussa tekniikan aloilla aloittaneet opiskelijat. Ajokortin tarkempi sisältö ja rakenne on esitetty luvussa 2.1. Tämän ajokortin palautekyselyyn vastasi 119 ammattikorkeakoulun opiskelijaa.

Vastaajista 47 % käytti ajokortti 1a:n suorittamiseen aikaa alle 5 tuntia. Tätä selittää se, ettei ajokortin 1a suorittamiseksi ollut pakko tehdä kuin 20 tehtävää. Kaikki aiheet, joita ajokortin tehtävissä käsiteltiin, koettiin tarpeellisiksi ja tärkeiksi. Useita mainintoja tarpeellisimpina kerrattuina asioina saivat muun muassa potenssilaskut, murtolukulaskut sekä yksikkömuunnostehtävät. Haastavimpina asioina mainintoja taas saivat neliöjuurilaskut ja sievennystehtävät. Noin kaksi kolmasosaa vastaajista piti kertausta hyödyllisenä sillä perusteella, että asiat olivat unohtuneet ajan saatossa.
Koetehtäviin kaivattiin enemmän opiskelumateriaalia, jottei sitä tarvitsisi etsiä itse niin paljon netistä. Tehtävien monipuolisuus nähtiin hyvänä asiana, vaikka tehtävien vaikeustaso vaihtelikin melko paljon, kuten seuraavasta opiskelijan kirjoittamasta palautteesta käy ilmi.

> ”Mielestäni on hyvä palata matematiikan tehtävien pariin, kun itsekkin viimeksi näitä laskin n. 2 vuotta sitten. Mutta mielestäni on huonoa, ettei moniin laskuihin ollut missään opiskelumateriaalia. Lukion jälkeen on päässyt unohtumaan monet laskukaavat yms. Myös tehtävien vaikeustaso heitteli ympäriinsä. Oli kysymyksiä joihin ala-astelaisetkin olisivat osanneet vastata, mutta toiset kysymykset taas olivat lukio matematiikkaa.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 1a

Harjoitustehtäviin kaivattiin malliratkaisuja, jotta olisi helpompi ymmärtää, mikä tehtävän ratkaisussa itsellä on mennyt väärin. Toivottiin myös, ettei laskettavaksi tulisi kerralla 20 tehtävää, vaan tehtävät olisi jaoteltu pienempiin osioihin esimerkiksi aihealueiden perusteella. Yleisesti palaute oli hyvää ja ajokorttia 1a pidettiin hyvänä herättelynä, joka antaa realistisen kuvan omista taidoista ja siitä, kuinka paljon matematiikan kanssa tarvitsee tehdä tulevaisuudessa töitä.

> ”Olen selvästi lisää opetuksen tarpeessa ja valitsen matematiikan valmistava opinnot heti.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 1a

3.1.2. Palaute ajokortista 1b

Ajokortti 1b oli pitkän matematiikan kertaus niin ammattikorkeakoulussa kuin yliopistollakin aloittaville opiskelijoille. Vastauksia palautteeseen saatiin 101 kappaletta, joista noin puolet olivat ammattikorkeakoulun ja puolet yliopiston opiskelijoita.

Kuva 8. Ajokorttiin 1b käytetty aika. Pystyakselilla vastaajien lukumäärä.

Kuten Kuva 8 nähdään, alle 15 % vastaajista kertoi käyttäneensä ajokortti 1b:n suorittamiseen aikaa yli 20 tuntia. Koska yliopistolla ajokortin 1b suorittaminen on yhden opintopisteen arvoinen eli sen pitäisi vastata noin 27 tunnin työmäärää, kuulostaa ajokorttiin käytetty aika melko lyhyeltä.

Ajokortin 1b suorittaneet opiskelijat pitivät ajokortin 1b materiaalikirjaa palautteen mukaan melko hyödyllisenä. Hieman yli puolet vastaajista valitsi palautteessa vaihtoehdon ”kertasin sen avulla aina tarvittaessa”. Vain neljä vastaajaa mainitsi käyttäneensä myös muita lähteitä kuin materiaalikirjaa, mistä voinee päätellä materiaalikirjan olleen hyvin kattava. Palautteessa ei noussut esille materiaalikirjasta puuttuvia aihealueita, joita tehtävissä olisi tarvittu.

Yli puolet vastaajista (56 %) piti ajokortin 1b harjoitustehtävien määrää sopivana ja niitä pidettiin myös sopivan haastavina tai jopa melko helppoina, kuten Kuva 9 nähdään.

Kuva 9. Ajokortin 1b harjoitustehtävien vaikeustason arvioinnista. Pystyakselilla vastaajien lukumäärä.

Noin puolet vastaajista (51 %) piti tällaista verkkokurssia hyvin tarpeellisena ja 33 % vastaajista melko tarpeellisena. Erityisesti ajokortissa 1b pidettiin siitä, että tehtävistä sai välitöntä palautetta ja harjoitustehtävissä oli hyvät, ymmärrettävät ratkaisut. Moodlea pidettiin käyttöalustana toimivana ja helppokäyttöisenä sekä ajokorttia tiiviinä ja hyvin jaoteltuna. Yksi positiivinen asia vastaajien mielestä oli myös se, ettei tällaista kurssia tarvitse suorittaa kertaistumalta, vaan sen voi jakaa osiin oman aikataulunsa mukaan. Harjoitustehtäviä ajokorttiin 1b kaivattiin lisää, sillä kurssilla ei ollut muuta lisäharjoittelumahdollisuutta, kuin tehdä samat harjoitustehtävät uudelleen.

Yksi negatiivista palautetta kerännyt asia oli tehtävien helppous. Jotkin tehtävät olivat vastaajista jopa niin helppoja, että he jäivät pohtimaan, oliko niihin upotettu kompakysymyksiä, kuten seuraavasta opiskelijapalautteesta nähdään.

> ”- - Varsinkin näin monen vuoden kerryttyä lukion matematiikan opintojen välille tunsin, että vaikeustaso oli varsin maltillinen ja ajoittain jopa hieman helppo, jolloin aikaa meni ’kompakysymyksen’ etsimiseen.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 1b

Tämän lisäksi jotkin tehtävät koettiin vaikeaselkoisiksi. Osa vastaajista oli myös löytänyt tehtävistä tai niiden ratkaisuista virheitä. Nämä virheet pyrittiin korjaamaan tämän uudistustyön alussa. Huonoina asioina ajokortissa 1b näiden lisäksi pidettiin muun muassa sitä, että kokeiden rajatut suorituskerrat loivat paineita. Lisäksi tehtävänannoissa käytetty fontti sai negatiivista palautetta, kuten nähdään seuraavasta opiskelijan antamasta vastauksesta kysyttäessä ajokortin huonoista puolista.

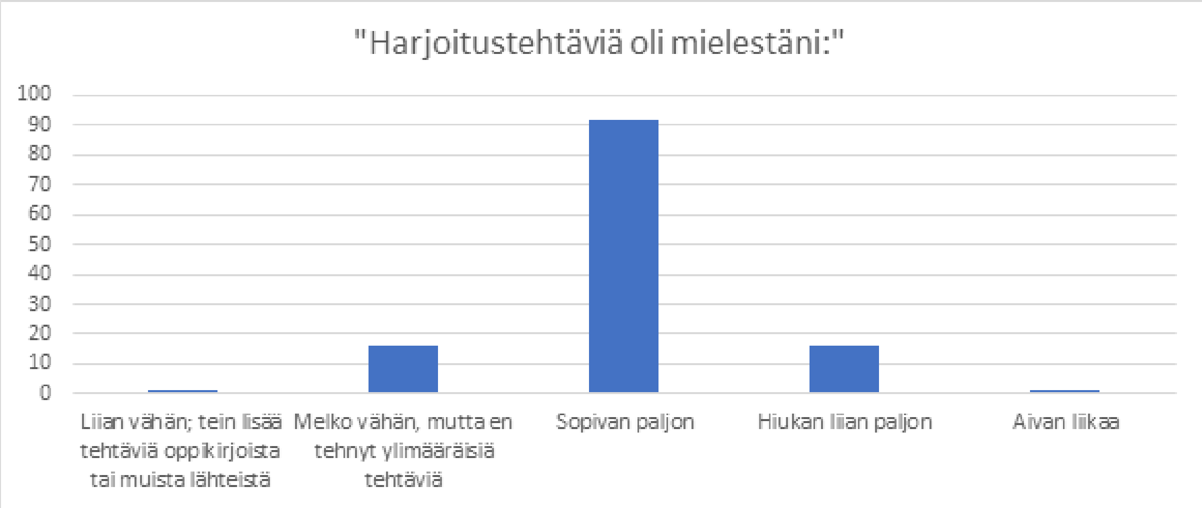
> ”Saada selvää lausekkeissa käytetystä fontista.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 1b

Ajokortti 1b sai opiskelijoilta palautelomakkeen kautta myös kehitysehdotuksia. Kuten mainittu, opiskelijoiden mielestä ajokorttiin pitäisi lisätä tehtäviä ja haastetta. Toiveena oli myös, että tehtävissä pitäisi olla selkeämmät vastausohjeet, jos esimerkiksi on merkitystä käyttääkö vastauksen desimaaliluvussa pilkkua vai pistettä. Kaikkien sellaisten tehtävien ratkaisuissa, joissa pyydetään vastausta desimaalilukuna, oli kuitenkin hyväksytty molemmat vastausvaihtoehdot. Lisäksi opiskelijat toivoivat materiaalikirjaan lisää laskuesimerkkejä ja syventävää teoriaa. Kirjasta oli kuitenkin tehty mahdollisimman selkeä ja kevyt eikä tarkoituksena ollut antaa suoria vastauksia tehtäviin. Opiskelijoilla oli myös vapaus käyttää muita lähteitä, kuten vanhoja lukion oppikirjoja tai internetiä, mikäli he eivät saaneet ajokortin materiaalikirjasta tarpeeksi apua tehtävien tekemiseen.

3.1.3. Palaute ajokortista 2a

Ajokortti 2a oli tarkoitettu kaikille ammattikorkeakoulun tekniikan alalla aloittaville opiskelijoille. Harjoitustehtävien ja ajokorttikokeen lisäksi ajokortissa oli vapaaehtoinen fysiikkaa kertaava osio. Ajokortin 2a palautekyselyyn vastasi 137 opiskelijaa. Vastaajista 39 % käytti ajokortin suorittamiseen oman arvionsa mukaan alle 5 tuntia, 37 % vastaajista 5-10 tuntia ja 16 % vastaajista 10-20 tuntia. Vaikka tässä ajokortissa oli vain 20 pakollista tehtävää, kuulostavat nämä suoritusajat lyhyiltä. Mikäli suoritti vapaaehtoisia tehtäviä ja teki harjoitustehtäviä ennen varsinaista koetta, tehtävien kokonaismäärä nousi kuitenkin 92 tehtävään.

Ajokortti 2a sisälsi oman materiaalikirjan ja sitä piti melko tai erittäin hyödyllisenä apuvälineenä ajokortin suorituksen kannalta 64 % vastaajista. Yli 75 % vastaajista pitivät harjoitustehtävien määrää sopivana. Niitä, joiden mielestä harjoitustehtäviä oli hiukan liian paljon tai aivan liikaa, oli saman verran kuin niitä, joiden mielestä harjoitustehtäviä oli melko vähän tai liian vähän (Kuva 10).



Kuva 10. Opiskelijavastaukset ajokortin 2a harjoitustehtävien määrä. Pystyakselilla vastaajien lukumäärä.

Mielipiteet harjoitustehtävien vaikeustasosta jakaantuivat melko tasaisesti. Vastaajista 36 % oli sitä mieltä, että tehtävien vaikeustaso oli sopiva ja 33 % koki tehtävät melko haastaviksi, työläiksi ja aikaa vieviksi. Ajokortin tarpeellisimpana kerrattavana asiana useat opiskelijat mainitsivat geometrian ja tästä erityisesti pinta-alojen ja tilavuuksien laskemisen, yhtälöt ja niiden ratkaisun, trigonometrian sekä laskimen käytön. Osa opiskelijoista oli kuitenkin sitä mieltä, ettei tämä ajokortti ollut tarpeellinen, jos oli suorittanut ajokortin 1b, sillä sisällöt olivat osittain samoja.

> ”Ajokortti 1b:ssä tuli sen verran kerrattua jo, ettei tässä ajokortissa varsinaisesti kertausta tullut enää, mutta onhan se aina hyödyllistä tehdä harjoituksia.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 2a

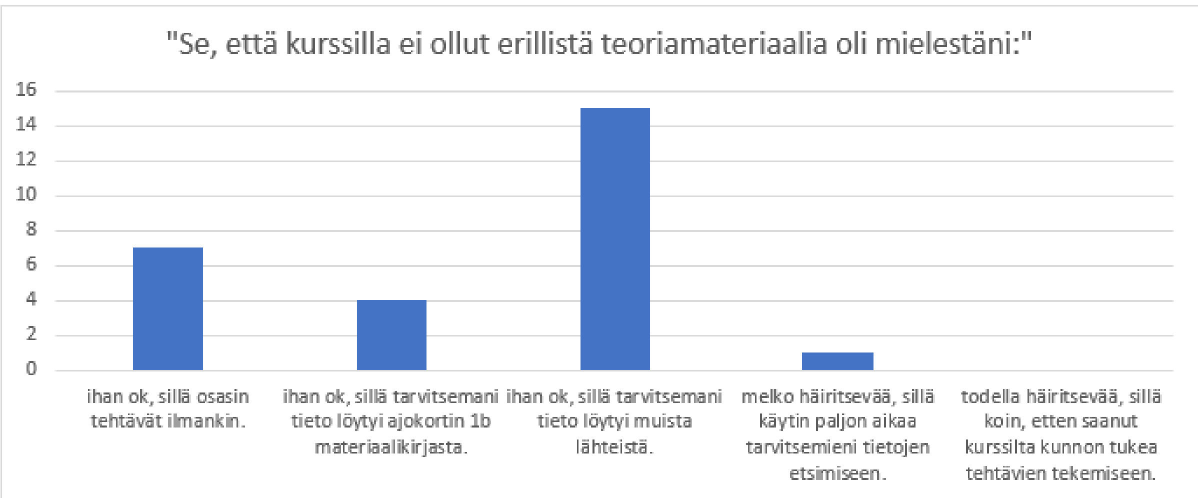
Avoin kysymys, jossa kysyttiin, mitkä olivat opiskelijoiden mielestä haastavimpia aihealueita, jakoi opiskelijoiden vastauksia. Tässäkin kysymyksessä geometria sai useita mainintoja. Se herättää ajatuksen siitä, oliko kokeissa ollut jokin yksittäinen vaikea lasku vai oliko geometrian tehtävät yleisesti muita aihealueita haastavampia. Geometrian lisäksi mainintoja saivat yhtälöt ja opiskelijoiden mielestä huonot tai virheelliset tehtävät. Osa palautteen antajista kertoi, että heidän viimeisimmistä matematiikan opinnoistaan oli kulunut kauan aikaa tai ajokortissa oli aiheita, jotka eivät kuulu ammattikoulun opintosisältöihin, mikä teki ajokortista turhan haastavan.

> ”Suurin osa tehtävistä oli kokonaan uutta asiaa, koska ei ammattikoulussa ole vastaavia tehtääviä ollut.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 2a

Yllä esitetty opiskelijapalaute aiheuttaa huolta, sillä verkkokurssilla ei ollut tarkoitus opettaa mitään uutta, vaan ainoastaan kerrata aiemmin tunnettuja aiheita. Yhden palautteen perusteella ei kuitenkaan voida tehdä johtopäätöstä, että ajokortin sisällöt olivat ammattikoulun oppimäärän ulkopuolella. Voi olla, ettei kyseinen opiskelija vain muista kuulleensa asioista, jos aihe ei ole juuri oppimishetkellä kiinnostanut tai uutta asiaa on tullut kerralla paljon. Ajokorttia pidettiin kuitenkin hyvin tarpeellisena, koska siinä kerrattavat asiat olivat jo ehtineet unohtua 55 (61 %) opiskelijan mielestä. Vain yksi vastaaja piti ajokorttia täysin tarpeettomana ja turhana, eikä usko, että tulee tarvitsemaan näitä asioita opinnoissaan, joten ajokorttia voi pitää melko onnistuneena.

3.1.4. Palaute ajokortista 2b

Ajokortti 2b oli suunnattu yliopistoon tuleville opiskelijoille. Ajokortin suorittajat olivat pääsääntöisesti matematiikan ja tilastotieteen laitokselle opiskelemaan tulleita, joten oletuksena on, että heillä lukion pitkän matematiikan sisällöt olivat hallussa jo ennestään melko hyvin. Tämän ajokortin palautekyselyyn vastasi 25 opiskelijaa.



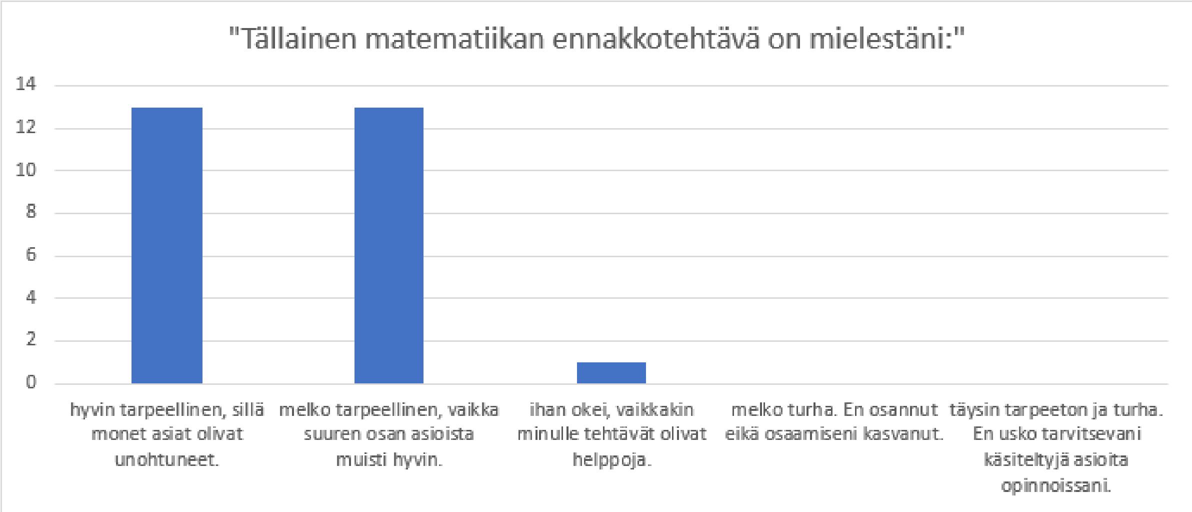
Kuva 11. Vastausten jakautuminen teoriamateriaalin puuttumista koskevan kysymyksen kohdalla ajokortti 2b:ssä. Pystyakselilla vastaajien lukumäärä.

Vastaajista 96 % mielestä oli “ihan ok”, ettei tässä osiossa ollut erillistä teoriamateriaalia (Kuva 11). Tehtävien määrää piti sopivana 64 % ja liian vähäisenä 24 % vastaajista. Monet ajokortin suorittaneista opiskelijoista läpäisivät ainakin osan kokeista ensimmäisellä yrittämällä. Se tarkoittaa sitä, etteivät he joutuneet suorittamaan ainakaan kaikkia kurssille laadittuja tehtäväpaketteja, eli kaikkia ajokortin mahdollista 81 tehtävää. Suoritettujen tehtävien määrä korreloi positiivisesti myös ajokorttiin käytetyn ajan kanssa. Vain yksi vastaaja oli sitä mieltä, että tehtäviä oli aivan liian paljon. Lisäksi kukaan ei ollut käyttänyt osion tekemiseen yli 20 tuntia, joten tehtäviä olisi voinut olla mahdollisesti enemmänkin. Tehtävien ja kokeiden vaikeustaso oli koettu sopivaksi tai melko helpoksi (72 % vastaajista), vaikka kaikki vastaajat mainitsivatkin tarvinneensa hieman kertausta tai lisäapua jostakin valitsemastaan lähteestä.

Monivalintakysymykseen harjoitustehtävien malliratkaisuista sai valita useampia vastausvaihtoehtoja. Kuten Kuva 12 nähdään, 61 % opiskelijoista oli sitä mieltä, että mallivastaukset olivat riittävän yksityiskohtaisia, ja ymmärrettäviä ne olivat 52 % mielestä.

Kuva 12. Opiskelijoiden mielipide ajokortti 2b:n mallivastauksista. Pystyakselilla vastaajien lukumäärä.

Kyselyyn vastanneista 11 piti ajokortin haastavimpana aihealueena todennäköisyyslaskentaa. Sen lisäksi yksittäisiä mainintoja keräsi se, että mallivastausten ymmärtäminen oli haastavaa ja että omat huolimattomuusvirheet tehtävänantoja lukiessa sotkivat ajattelua. Näiden lisäksi analyyttinen geometria koettiin kokonaisuutena haastavaksi. Kuten Kuva 13 nähdään, ajokorttia 2b pitivät hyvin tai melko tarpeellisena kaikki palautekyselyyn vastanneet opiskelijat.



Kuva 13. Opiskelijoiden mielipide matematiikka kertaavasta verkkokurssista.

Opiskelijat olivat sitä mieltä, että verkkokurssista on hyötyä tulevissa opinnoissa. He oppivat sen avulla jotakin uutta tai saivat palautettua jo opittuja asioita takaisin mieleensä, kuten seuraavasta opiskelijan antamasta palautteesta huomataan.

> ”Hyvää oli, että lukiossa unohtuneet tiedot tulivat takaisin mieleen. Selvää huonoa en löytänyt. Tämä verkkokurssi oli oikein hyvä suorittaa.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 2b

Moodlen toimivuutta teknisenä käyttöympäristönä kartoitettiin kysymyksellä, jossa opiskelijan tuli valita annetuista vaihtoehdoista kaikki, joiden kanssa oli samaa mieltä. Opiskelijoiden vastaukset ovat luettavissa Kuva 14. Tällä hetkellä ei ole suunnitelmissa muuttaa kurssin toteutusta muualle kuin Moodleen, sillä se on käytössä sekä ammattikorkeakoululla että yliopistolla. On siis helpottavaa, että positiiviset vaihtoehdot saivat useampia mainintoja kuin negatiiviset.

Kuva 14. Palaute teknisen ympäristön toimivuudesta kurssilla. Pystyakselilla vastaajien lukumäärä.

Hyvinä asioina ajokortissa 2b pidettiin sen selkeää rakennetta ja aihejaottelua, monipuolisia tehtäviä sekä tehtävätyyppejä. Näiden lisäksi hyvänä asiana pidettiin sitä, että verkkokurssin avulla sai tietää oman taitotasonsa realistisesti, tarvittavan teoriatiedon joutui etsimään itse ja tehtävien taso oli inhimillinen.

Ajokortin 2b huonoina puolina taas mainittiin harjoitustehtävien vähyys ja ankara 80% läpäisyvaatimus suhteessa tehtävien määrään, josta esimerkkinä seuraava opiskelijan antama palaute.

> ”Harjoitustehtäviä on aivan liian vähän. Jos asiat olisivat täysin unohtuneet, ei kolmesta harjoituksesta ole paljon hyötyä. Läpipääsyprosentti on mielestäni melko korkea suhteessa tehtävien määrään. Pidin siitä, että tehtävien taso oli inhimillinen.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 2b

Jotkin yksittäiset tehtävät oli koettu epäselviksi, ja opiskelijoilla oli vaikeuksia tulkita, olivatko he läpäisseet osion kokeen vai eivät. Teknisten ongelmien osalta asettelu Moodlessa ei toiminut paikoittain. Tehtävissä olevat kuvat eivät skaalautuneet kaikkien opiskelijoiden näytöille niin, että ne olisivat näkyneet kokonaan.

Opiskelijoiden antamia kehitysideoita ajokorttiin 2b oli esimerkiksi lisätä harjoitustehtäviä sekä koetehtäviä jokaiseen aihealueeseen, jotta ajokortin läpäisy hyväksytysti helpottuisi. Tässä osiossa jokaisessa kokeessa olikin vain 5 tai 6 tehtävää, joten huolimattomuusvirheen merkitys kasvaa melko suureksi.

> ”Ajokortti oli toimiva kokonaisuus. Ajokortissa ei mielestäni ollut mitään huonoa. Ajokorttia voisi kehittää lisäämällä kokeiden tehtävämäärää, jotta yksittäinen huolimattomuusvirhe ei vaikuttaisi niin paljon lopputulokseen.”
>
> Moodlessa annettu opiskelijapalaute ajokortista 2b

3.2. Kevään 2019 kysely verkkokurssin suorittaneille yliopisto-opiskelijoille

Matematiikan, tilastotieteen ja fysiikan pääaineopiskelijoille, jotka olivat suorittaneet joko ajokortin 1b, 2b tai molemmat, lähetettiin sähköpostitse kysely verkkokurssiin liittyen. Kyselyn alustana toimi Google Forms ja se oli vastaajille vapaaehtoinen, toisin kuin kaikille kurssin suorittaneille pakollinen Moodle-kysely. Lisäksi Moodlen kyselyyn vastattiin heti ajokortin suorittamisen jälkeen, kun kevään 2019 kyselyyn taas vastauksia pyydettiin useita kuukausia suorituksen jälkeen. Osalla vastaajista verkkokurssin suorituksesta saattoi olla aikaa jopa puolitoista vuotta.

Tehdyllä kyselyllä tahdottiin kartoittaa MathMarket-verkkokurssin hyödyllisyyttä opiskelijoille ja sitä, oliko ajokorttien vaativuustaso sekä työmäärä opiskelijoiden arvion mukaan sopiva. Koska lyhyen matematiikan kertausosio kurssille tehtiin samalla rakenteella kuin olemassa oleva pitkän matematiikan osio, haluttiin tällä kyselyllä varmistaa sen rakenteen olevan toimiva. Näiden lisäksi haluttiin kysyä erikseen ajokortissa 1b olleesta loppukokeesta, koska oli pohdittu sen tarpeellisuutta opiskelijoiden näkökulmasta. Kyselystä haluttiin tehdä nopea vastattava, joten siihen sisällytettiin vain yhdeksän kysymystä, joista kuusi oli monivalintakysymyksiä. Kyselyn kysymykset on esitetty Kuva 15 ja koko kysely on tutkielman liitteenä (Liite 1).

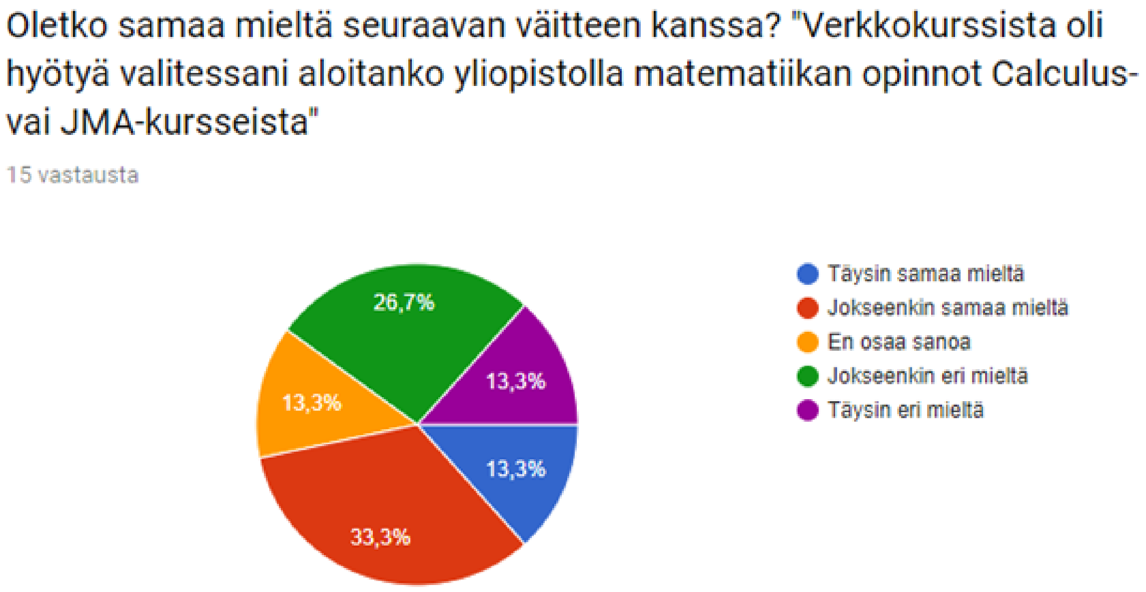
Monivalintakysymykset	Avoimet (vapaaehtoiset) kysymykset
• MathMarket-verkkokurssin suoritusajankohta • miksi teki MathMarket-verkkokurssin • MathMarket-verkkokurssin hyöty matematiikan kurssivalinnoissa • yliopiston kurssit, joissa oli hyötyä MathMarket-verkkokurssista • tehtävien määrä ja haastavuustaso • loppukokeen tarpeellisuus ja haastavuustaso	- miten kurssi vaikutti/ei vaikuttanut kurssivalintoihin yliopistossa, tyytyväisyys tehtyihin kurssivalintoihin - kurssin tehtäviin liittyen vapaa sana - koko kurssiin liittyen vapaa sana

Kuva 15. Kevään 2019 kyselyssä olleet kysymykset.

3.2.1. Kyselystä saadut vastaukset

Kysely lähetettiin 55 opiskelijalle ja vastauksia siihen saatiin 15 kappaletta. Kyselyn vastausprosentti (29 %) jäi siis melko matalaksi. Suurin osa vastaajista (67 %) oli suorittanut verkkokurssin ennen opintojensa aloittamista, kuten matematiikan pääaineopiskelijoiden oli tarkoituskin. Kaikki 15 vastaajaa kertoivat tehneensä kurssin siitä syystä, että saisivat kerrattua lukiossa opittuja asioita. Tähän kysymykseen oli mahdollista valita useita vaihtoehtoja, kertauksen lisäksi opintopisteet motivoivat kuutta vastaajaa ja verkkokurssia oli suositeltu neljälle opiskelijalle. Samoin neljä vastaajaa tahtoi arvioida omaa matematiikan osaamistaan kurssin avulla.

Kysymys verkkokurssin suorituksen hyödyllisyydestä kurssivalintojen suhteen jakoi vastaajia hyvin tasaisesti jokaisen vastausvaihtoehdon kesken, kuten Kuva 16 nähdään.



Kuva 16. Opiskelijoiden vastaukset erääseen kyselyssä esitettyyn kysymykseen.

Koska kaikki kyselyyn vastanneet opiskelijat ovat tehneet MathMarket-verkkokurssin, ei heillä ole tietoa siitä, millaista matematiikan opiskelu olisi ollut ilman tätä korkeakoulumatematiikkaan valmistavaa verkkokurssia. Tästä, ja kyselyn vastaajien vähyydestä johtuen, kyselyn perusteella ei voida tehdä suoria johtopäätöksiä siitä, kuinka paljon apua tällaisesta verkkokurssista on opiskelijoille heidän opinnoissaan. Verkkokurssi koettiin myös joiltain osin liian helpoksi, mikä saattaa heijastua kokemukseen siitä, kuinka hyödylliseksi kurssi koettiin. Kurssin hyödyllisyyttä kartoittavaan kysymykseen vastaamista vaikeuttaa myös se, etteivät opiskelijat kursseja valitessaan voi itse tietää minkälaisia sisältöjä yliopiston kursseilla on, ja kuinka haastavia ne heille ovat. Tästä syystä verkkokurssin tuloksista saattaa olla enemmän hyötyä yliopiston kurssien sisällöt tunteville henkilökohtaisten opintosuunnitelmien ohjaajille.

Vastaajista 73 % oli sitä mieltä, että verkkokurssista oli hyötyä matematiikan ja tilastotieteen laitoksen Calculus 1 tai Calculus 2 -kurssilla. Nämä ovat melko laskennallisia kursseja, joten laskurutiinista ja itsevarmuudesta on näillä varmasti hyötyä. Eräs opiskelija oli lisäksi kokenut verkkokurssin suorittamisesta olleen hyötyä myös fysiikan ensimmäisen vuoden kursseilla.

Vastaajista 10 vastasi verkkokurssin tehtävissä olleen juuri sopivasti haastetta ja neljä vastaajaa oli sitä mieltä, että tehtävät olivat liian helppoja. Kukaan vastaajista ei ollut sitä mieltä, että tehtävät olisivat olleet liian vaikeita. Tässä vaiheessa on kuitenkin hyvä pitää mielessä, että kysely on lähetetty vain matematiikan, tilastotieteen ja fysiikan pääaineopiskelijoille, joilla mitä suurimmalla todennäköisyydellä on hyvin vahva matemaattinen tausta. Lisäksi kyselyn vastausprosentti oli melko alhainen ja koska kysely toteutettiin täysin anonyymisti ei voida tietää, olivatko kyselyyn vastanneet juuri niitä opiskelijoita, joilla kurssi oli mennyt erityisen hyvin.

Tehtävien määrästä kysyttäessä 7 vastaajaa oli sitä mieltä, että tehtäviä oli sopivasti ja 3 vastaajaa sanoi, että tehtäviä oli liian vähän, kuten Kuva 17 nähdään. Jos jokaisen osion kokeen pääsee ensimmäisellä kerralla läpi, kurssista voi selvitä hyvinkin vähäisellä tehtävämäärällä. Jos useita kokeita taas joutuu yrittämään jopa neljä kertaa, kertyy tehtäviä jo moninkertainen määrä kokeet ensimmäisellä kerralla läpäisseeseen verrattuna. Yksikään vastaaja ei kuitenkaan ollut sitä mieltä, että tehtäviä olisi ollut liikaa, joten tehtävien lisääminen ei todennäköisesti tekisi kurssista liian raskasta siitä saatavaan opintopisteiden määrään nähden.

Kuva 17. Opiskelijavastaukset kurssin tehtävistä.

Ajokortin 1b loppukokeesta kysyttäessä 80 % vastaajista oli sitä mieltä, että se kokosi kurssin asiat hyvin. Se antaa viitteitä siitä, että ilman loppukoetta kurssi voisi jäädä tarkoitukseltaan opiskelijoille hieman avoimeksi, joten loppukoe nähtiin tärkeänä osana ajokorttia 1b. Kyselyssä sai antaa myös vapaata palautetta kurssista, josta kävi ilmi, että osa palautteen antajista haluaisi verkkokurssista haastavamman, jotta olisi helpompi arvioida, missä asioissa itsellä on vaikeuksia.

> ”Tehtävät olivat ehkä hieman liian helppoja. Tai ainakin osa tehtävistä olisi voinut olla haastavampia niin olisi päässyt testaamaan tasoaan paremmin.”
>
> Opiskelijapalaute kevään 2019 kyselystä

3.3. Palautteeseen reagointi

Saadun palautteen perusteella päätettiin säilyttää lyhyen matematiikan kertauksen kaikille yhteisessä osiossa samanlainen rakenne kuin ajokortissa 1b ja lyhyeen matematiikkaan pohjautuvassa yliopisto-opiskelijoille suunnatussa osiossa samanlainen rakenne kuin ajokortissa 2b. Tätä ratkaisua tuki myös ajokortin 1a palautteessa esiin noussut toive siitä, ettei yhdessä tentissä tulisi kerralla suoritettavaksi niin suurta tehtäväkokonaisuutta. Useasti palautteessa mainittu 80 % läpäisyvaatimus säilytettiin, vaikka moni opiskelija kokikin sen liian ankaraksi. Tehtävien määrää aihealueiden kokeissa kuitenkin lisättiin pitkän matematiikan kertausosioihin nähden hieman, jottei huolimattomuusvirheiden osuus läpipääsyssä olisi niin merkittävä. Sen lisäksi koko yhteisen osion läpipääsyä pyrittiin helpottamaan lisäämällä toinen uusintakoe loppukokeesta eli loppukokeita tuli yhteensä 3. Kolmas loppukoe lisättiin myös pitkän matematiikan yhteiseen osioon.

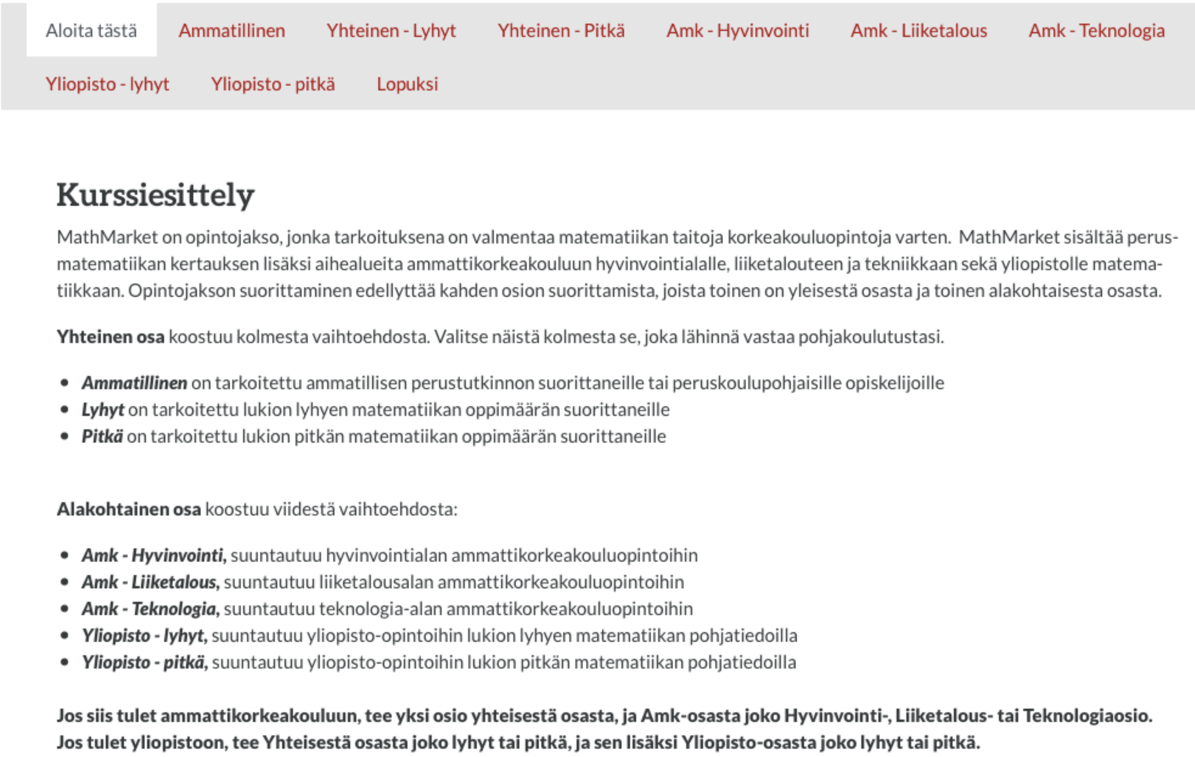
Läpipääsyrajan alentamista kannattavien palautteiden lisäksi palautetta tuli myös ajokorttien haastavuustasosta, jota saisi usean vastaajan mielestä nostaa. Moni verkkokurssin suorittaneista opiskelijoista on voinut päästä korkeakouluun suoraan lukiosta, jolloin lukion sisällöt ovat vielä hyvin muistissa. Verkkokurssin kohderyhmä on kuitenkin hyvin laaja ja jo yksi välivuosi, puhumattakaan useammasta, laskee valmiustasoa tehtävien tekoon roimasti, joten haasteen lisääminen ei palvele kurssin tarkoitusta. Tässä vaiheessa on hyvä pitää mielessä myös, että kevään 2019 kysely lähetettiin vain matematiikan, tilastotieteen ja fysiikan pääaineopiskelijoille, joilla usein on hyvin vahva matemaattinen tausta. Lyhyen matematiikan kertauksen kohderyhmä on kuitenkin hyvin erilainen. Lisäksi on huomioitava, että osa ajokortteja aloittaneista opiskelijoista oli jättänyt suorituksen jostain syystä kesken tai ei ollut suoriutunut niistä hyväksytysti. Haastavuustason nosto voisi lisätä näitä keskeytyksiä.

Jokaisessa ajokortissa yli 85 % opiskelijoista oli oman arvionsa mukaan käyttänyt kyseisen ajokortin suorittamiseen aikaa alle 20 tuntia. Harjoitus- ja koetehtävien yhteismäärä lyhyen matematiikan kertausosioissa Yhteinen - Lyhyt ja Yliopisto - Lyhyt (keskimäärin 16 tehtävää aihealuetta kohti) oli suurempi kuin ajokorteissa 1b ja 2b (ajokortissa 1b keskimäärin 13 tehtävää, ajokortissa 2b 10). Harjoitustehtäviä toivottiin palautteessa lisää. Tätä ajateltiin kehittää kevään uudistuksen aikana ja lisätä vapaaehtoisia harjoitustehtäviä kurssille, mutta ajan puutteen vuoksi tätä ei ollut mahdollista toteuttaa. Se olisikin seuraaville kurssin kehittäjille yksi mahdollinen kehityskohde. Kehitysideoista kerrotaan lisää luvussa 9. On kuitenkin mahdollista, että opiskelijat toivoivat lisää harjoitustehtäviä siksi, että saisivat malliratkaisut myös tuleviin koetehtäviin. Koetehtävistä on tarkoituksella tehty hieman erilaisia kuin harjoitustehtävistä, jottei koetehtävän ratkaisua pysty kopioimaan suoraan harjoitustehtävän ratkaisusta. Kaikki koetehtävissä tarvittavat tiedot aiheesta on kuitenkin harjoitustehtävien yhteydessä kerrattu.

Palautteessa oli mainittu opiskelijoille olevan epäselvää, onko hän suoriutunut kokeesta hyväksytysti vai ei. Ajokortissa 2b joistakin koetehtävistä sai enemmän pisteitä kuin toisista, mutta lyhyen matematiikan osioissa päädyttiin ratkaisuun, että jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 1 ja näin tehtävät ovat kaikki keskenään samanarvoisia. Yksittäisten tehtävien sisällä on kuitenkin alakohtia, joista osasta saattaa saada enemmän pisteitä kuin toisista. Tehtävien samanarvoisuuden nähtiin selkiyttävän koetta ja auttavan opiskelijaa hahmottamaan paremmin läpipääsyyn vaadittava pistemäärä. Lisäksi kurssilla navigoinnin helpottamiseksi lyhyen matematiikan kertausosioiden kokeista saatavaan palautteeseen lisättiin samanlaiset linkitykset kuin ajokortissa 1b. Koesuorituksen jälkeen opiskelija saa suoran linkin seuraavaan suoritettavaan kokonaisuuteen.

Harjoitustehtävien malliratkaisut saivat positiivista palautetta ja niitä toivottiin lisättävän myös koetehtäviin. Koska tarkoitus ei ole antaa mallia jokaisen tehtävätyypin ratkaisuun, vaan halutaan jättää asioita opiskelijoiden itsensä pohdittaviksi, ei näin toiveista huolimatta tehty. Harjoitustehtävien malliratkaisuista pyrittiin tekemään selkeitä ja niissä käytettiin lyhyen matematiikan oppikirjoista tuttua kieltä, jotta kaikki kykenisivät saamaan niistä mahdollisimman paljon irti. Materiaalikirja oli myös palautteen mukaan kurssilla todella toimiva ja tarpeellinen, joten lyhyen matematiikan kertausosioiden tueksi tehtiin oma materiaalikirja samalla idealla kuin pitkän matematiikan kertausosiossa.

Osa kurssin tehneistä opiskelijoista oli kokenut koko kurssin pääsivun sekavaksi ja vaikeaksi hahmottaa mitä osiota kurssilta pitäisi lähteä suorittamaan. Tätä etusivua (Kuva 18) on kehitetty ja kurssin osiot on nimetty uudelleen niiden sisältöjä vastaavilla otsikoilla. Esimerkiksi ”Yhteinen – Lyhyt”, tarkoittaa kaikille lyhyen matematiikan lukeneille suunnattua osiota opiskelupaikasta riippumatta. Vanhoista ajokorttinimityksistä luovuttiin uudistuksen myötä kokonaan.


Aloita tästä | Ammatillinen | Yhteinen - Lyhyt | Yhteinen - Pitkä | Amk - Hyvinvointi | Amk - Liiketalous | Amk - Teknologia | Yliopisto - lyhyt | Yliopisto - pitkä | Lopuksi

Kurssiesittely

MathMarket on opintojakso, jonka tarkoituksena on valmentaa matematiikan taitoja korkeakouluopintoja varten. MathMarket sisältää perusmatematiikan kertauksen lisäksi aihealueita ammattikorkeakouluun hyvinvointialalle, liiketalouteen ja tekniikkaan sekä yliopistolle matematiikkaan. Opintojakson suorittaminen edellyttää kahden osion suorittamista, joista toinen on yleisestä osasta ja toinen alakohtaisesta osasta.

Yhteinen osa koostuu kolmesta vaihtoehdosta. Valitse näistä kolmesta se, joka lähinnä vastaa pohjakoulutustasi.

- ***Ammatillinen*** on tarkoitettu ammatillisen perustutkinnon suorittaneille tai peruskoulupohjaisille opiskelijoille
- ***Lyhyt*** on tarkoitettu lukion lyhyen matematiikan oppimäärän suorittaneille
- ***Pitkä*** on tarkoitettu lukion pitkän matematiikan oppimäärän suorittaneille

Alakohtainen osa koostuu viidestä vaihtoehdosta:

- ***Amk - Hyvinvointi,*** suuntautuu hyvinvointialan ammattikorkeakouluopintoihin
- ***Amk - Liiketalous,*** suuntautuu liiketalousalan ammattikorkeakouluopintoihin
- ***Amk - Teknologia,*** suuntautuu teknologia-alan ammattikorkeakouluopintoihin
- ***Yliopisto - lyhyt,*** suuntautuu yliopisto-opintoihin lukion lyhyen matematiikan pohjatiedoilla
- ***Yliopisto - pitkä,*** suuntautuu yliopisto-opintoihin lukion pitkän matematiikan pohjatiedoilla

Jos siis tulet ammattikorkeakouluun, tee yksi osio yhteisestä osasta, ja Amk-osasta joko Hyvinvointi-, Liiketalous- tai Teknologiaosio. Jos tulet yliopistoon, tee Yhteisestä osasta joko lyhyt tai pitkä, ja sen lisäksi Yliopisto-osasta joko lyhyt tai pitkä.

Kuva 18. Kurssin etusivun opiskelijanäkymä.

Ajokortin 2a palautteessa oli mainittu, että tehtävät olivat osittain päällekkäin jo ajokortissa 1b tehtyjen tehtävien kanssa. Näitä päällekkäisyyksiä on pyritty välttämään alakohtaisissa ja kaikille yhteisissä osioissa käymällä keskusteluita koko työryhmän kesken. Tarkoituksena ei kuitenkaan ole tehdä tehtäviä samoista aiheista kahta kertaa, vaikka kaikilta päällekkäisyyksiltä ei voidakaan välttyä, sillä alakohtaisissa osioissa saatetaan syventää joitain yhteisen osion aihealueita.

4. Verkkokurssi oppimisympäristönä

Lisääntynyt internetin käyttö, koulutuksen budjettileikkaukset, koulujen välinen yhteistyö sekä ajasta ja paikasta riippumattomien opiskelumahdollisuuksien tarjoaminen ovat eräitä syitä siihen, miksi verkko-opetus on tänä päivänä todella yleistä. Tästä syystä verkkokurssin tekijän on tärkeää tietää, millaista on hyvä verkko-opetus, millainen verkkokurssi on opiskelijalle sopiva ja mitä mahdollisuuksia oppiminen verkossa tarjoaa. Opiskelijalle verkko-oppiminen tuo enemmän vastuuta, sillä hänen on huolehdittava kurssin suorittamisesta annetussa aikataulussa ja osattava varata verkko-opiskelulle riittävästi aikaa. Toisaalta se tuo vapauksia, kuten sen, että kurssia voi tehdä mihin kellonaikaan tahansa, missä tahansa ja millä laitteella tahansa.

Verkkokurssilla opiskelijoilla on matalampi kynnys keskeyttää kurssi verrattaessa lähiopetuksella toteutettavaan kurssiin (Nevgi & Tirri 2003: 98). Keskeyttämisen taustalla ovat yleensä juuri edellä mainitut aikatauluongelmat. Verkkokursseilla on usein jokin määrätty päivä, jolloin kurssin tulee olla suoritettuna, ja opiskelijan voi olla itse hankala arvioida kurssin suoritukseen tarvittavaa aikaa. Lähiopetuksessa tapahtuvaan kurssiin verrattuna suurin ero on se, että lähiopetuksella kurssiin käytettävä ajanjakso on kalenteriin jo ennalta varattu, mutta verkkokurssin teon osalta opiskelijan täytyy itse huolehtia kalenteristaan sille sopiva aika. Keskeyttämisen syynä voivat olla myös motivaatio-ongelmat verkkokurssia kohtaan (Nevgi & Tirri 2003: 100).

4.1. Verkkokurssilla oppimista edistävät tekijät

Verkkokurssin tavoite on opettaa siinä missä lähiopetuksessa opettajan ohjauksella opiskeltavan kurssinkin. Verkkokurssin toteutuksessa tulee kuitenkin huomioida hieman eri asioita kuin lähiopetuksen kurssilla, sillä vuorovaikutus verkkokurssilla ei ole yhtä nopeaa kuin lähiopetuksessa ja sitä on vähemmän, joten opettajan on tärkeää valikoida sanansa ja asiansa huolellisesti. Opiskelijat odottavat hyvältä verkkokurssilta onnistunutta linkitystä sen osien välillä, monipuolisuutta ja vuorovaikutuksellisuutta esimerkiksi keskusteluryhmien ja opettajan helpon tavoitettavuuden kautta. Lisäksi verkkokurssin odotetaan olevan selkeä rakenteen, ulkoasun, ohjeiden ja tavoitteen osalta (Nevgi & Tirri 2003: 130-133). On tärkeää, että opiskelija tietää mistä tarvittava tieto kurssin suorittamiseksi löytyy, tehtävät ovat vaihtelevia, ohjeistus on selkeää ja kurssin tavoitteet on kerrottu selkeästi.

Nevgin & Tirri ovat esitelleet kirjassaan seuraavat mielekkään oppimisen kriteerit (32-35):

Aktiivisuus	Opiskelija työskentelee itse aktiivisesti työstäen opittavaa uutta tietoa ollen itse vastuullinen oppimistuloksestaan.
Konstruktiivisuus	Opiskelija yhdistää aikaisempaa tietoaan uuteen tietoon ja muodostaa opittavasta asiasta itselleen merkityksellistä ja ymmärrettävää tietoa.
Kollaboratiivisuus	Opiskelijat toimivat ja oppivat yhdessä hyödyntäen toistensa taitoja ja tietoa samalla tarjoten tukea ja antaen palautetta toisilleen.
Intentionaalisuus	Opiskelijat asettavat oppimiselleen kognitiivisia tavoitteita, joita he pyrkivät omalla aktiivisuudellaan saavuttamaan.
Kontekstuaalisuus	Oppimistehtävät ovat todelliseen elämään kuuluvia tilanteita, mikä harjaannuttaa opiskelijoita vaativampaan ajatteluun kuin vain yksinkertaistettuja malleja ja pelkistettyjä ongelmia ratkoessaan. Näin kontekstuaalisuus tukee myös opiskelijoiden motivaatiota.
Keskustelumuotoisuus ja vuorovaikutteisuus	Oppiminen on sosiaalinen prosessi, jossa opiskelijat muodostavat yhteisiä oppimisyhteisöjä ja rakentavat uutta tietoa yhdessä.
Reflektiivisyys	Opiskelijat ilmaisevat ajatuksiaan pohtien ja reflektoiden omaa oppimistaan ja johtopäätöksiään.
Oppimisen siirtovaikutus eli transfer	Opiskelija oppii tietoja ja taitoja, joiden avulla hän pystyy soveltamaan uusissa ja erilaisissa tilanteissa oppimaansa.

Mielekkään oppimisen kriteereissä toistuu samoja asioita, kuin opiskelijoiden odotuksissa verkkokurssia kohtaan. Nämä kriteerit ovat vuorovaikutukseen liittyen kollaboratiivisuus, keskustelumuotoisuus sekä vuorovaikutteisuus ja tavoitteisiin liittyen intentionaalisuus. Lisäksi opiskelija odottaa verkkokurssilta sitä mahdollisuutta, että hän itse on aktiivinen toimija edeten ohjeistuksen mukaisesti, etsien tarvittavaa tietoa ja löytäen sitä hyvän linkityksen ansiosta.

4.2. Verkkokurssilla oppimista estävät tekijät

Verkkokurssilla voi olla luvussa 4 mainittujen aikataulu- ja keskeyttämisongelmien lisäksi myös muita oppimista estäviä tekijöitä. Oppimisen esteet voivat johtua opiskelijasta itsestään tai verkko-opetuksen suunnittelussa ja toteutuksessa tehdyistä ratkaisuista, jotka heikentävät oppimista (Nevgi & Tirri 2003: 38). Verkkokurssin opetuksesta, suunnittelusta ja teknisestä toteutuksesta vastaavalla organisaatiolla on suuri vastuu sen suhteen, miten tehdyt valinnat ja ratkaisut tukevat oppimista. Mikäli sivustot ovat teknisesti liian raskaita ja sisältävät liian monia elementtejä, verkko-opiskelu käy hankalammaksi (Nevgi & Tirri 2003: 39).

Oppimisympäristöön liittyen oppimisen esteenä voivat olla verkkoympäristön rakenne, opetuksen laatu tai tekniikka- ja ohjelmisto-ongelmat (Nevgi & Tirri 2003: 38-39). Teknisiä ongelmia voivat olla esimerkiksi verkkokurssin toimimattomuus jollakin tietyllä selaimella tai laitteella, verkkokurssin vaativuus päivitysten tai ohjelmistojen suhteen tai yhteysongelmat ylipäätään. Opetuksen laatuun liittyen huono oppimisympäristö voi olla sellainen, että opiskelijan on hankalaa tulkita saatua palautetta tai opettajan suunnasta tuleva viestintä on liian hidasta tai puutteellista. Verkkokurssin rakenteen tulee olla hyvin suunniteltu ja tarpeeksi yksinkertainen sisältäen kattavat ohjeet, jotta oppiminen verkkoympäristössä ei esty.

Oppimisen esteet voivat olla organisaatiosta johtuvien esteiden lisäksi myös opiskelijalähtöisiä. Yleisin opiskelijalähtöinen este on opiskelutaitojen puuttuminen, sillä pitkän opiskeluista pidetyn tauon jälkeen oppiminen voi tuntua vieraalta ja todella työläältä (Nevgi & Tirri 2003: 38-41). Opiskelijan persoonasta riippuvat tekijät, opiskelumotivaatio ja itsekuri ovat suuressa merkityksessä, sillä niiden puuttuessa oppiminen vaikeutuu huomattavasti ja opiskeluun käytetty aika voi jäädä vähemmälle. Elämäntilanne voi vaikuttaa myös niin, että esimerkiksi perhe-elämä ja työ vievät aikaa opiskelulta ja opiskeluun tarvittava aika on hankala löytää. Opiskelijalla voi myös oppimisen ehtona olla suurempi palautteen saamisen tarve, mitä verkkokurssilla on mahdollista toteuttaa.

4.3. Mielekkään oppimisen kriteerien toteutuminen MathMarket-verkkokurssilla

MathMarket-verkkokurssilla kaikki Nevgin & Tirrin esittelemistä mielekkään oppimisen kriteereistä eivät täyty. Suurimpana haasteena ovat oppimisen sosiaalisuus sekä vertaistuen ja -palautteen saaminen, sillä kurssilla ei ole näitä mahdollistavia keskustelualustoja tai toisten opiskelijoiden observointia. Keskustelualustojen toteuttaminen on kurssilla hankalaa, koska opiskelijat voivat suorittaa kurssia hyvin eri aikaan. Kurssin tehtävät ovat myös kaikille opiskelijoille samat, joten keskusteluaiheet jouduttaisiin rajoittamaan lähinnä teknisiin ongelmiin tai verkkoalustaa koskeviin aiheisiin.

Kollaboratiivisuus o oppimisen kannalta tärkeää, sillä toisilta opiskelijoilta voi saada vahvistusta omille ajatuksilleen, uusia ideoita sekä palautetta omista tuotoksistaan. Samalla se luo opiskelijalle yhteenkuuluvuuden tunnetta. MathMarket-verkkokurssin suorituskeskeinen ympäristö ohjaa kuitenkin siihen, että tehtävien halutaan tarkistuvan automaattisesti eikä tehtävistä saatava palaute ole tällöin niin yksilöityä. Moodlessa ei saa luotua automaattisesti tarkistuvia tehtäviä, joissa opiskelijan olisi mahdollista vastata esimerkiksi piirtämällä funktion kuvaaja tai tehtävään olisi upotettu GeoGebra-appletti. Koska kurssilla ei ole sellaista ylläpitäjää, jonka olisi mahdollista tarkistaa opiskelijoiden palauttamia tehtäviä eikä opiskelijoilta tahdottu vaatia esimerkiksi kaavaeditorin tai GeoGebran opettelua, opiskelijoiden omaa tuotosta vaativat tehtävät oli jätettävä kurssilta kokonaan pois.

Aktiivisuus, intentionaalisuus ja kontekstuaalisuus toteutuvat verkkokurssilla hyvin. Opiskelija pystyy verkkokurssilla itse aktiivisesti etsimään haluamiaan tietoja materiaalikirjasta tai vaihtoehtoisesti valita itse tärkeinä pitämiään lähteitä, kuten tutun oppikirjan. Kurssilla on tehtäviä, jotka opiskelija saisi ratkaistua pelkän laskimen avulla helposti. Kurssia laadittaessa on kuitenkin oletettu opiskelijoiden olevan aktiivisia ja motivoituneita kertaamaan asiat siten, että he kykenevät selviytymään tehtävistä itse ja aiemmin opitut asiat vahvistuisivat. Tärkeää aktiivisuuden kannalta on myös se, että tehtävät ovat sopivan tasoisia opiskelijalle, joten MathMarket-verkkokurssilla tehtävien haastavuustasoon on kiinnitetty paljon huomiota.

MathMarket-verkkokurssilla opiskelijan tulee itse asettaa itselleen opiskeluaikataulu ja huolehtia siitä, että tarvittavat osiot tulee tehtyä, mikä tukee intentionaalisuutta. Kurssiosioiden aikatauluttamisen helpottamiseksi lisättiin verkkokurssin ohjeisiin tieto siitä, että yksi verkkokurssin osio on suunniteltu vastaamaan 27 tuntia työtä. Suoritettavan osion esittelytekstissä ilmenee aihealueiden lukumäärä, jotta opiskelija tietää mitä on edessä, vaikka yhteisissä osioissa opiskelijalla ei olekaan pääsyä kaikkiin aihealueisiin ennen aiempien suoritusta. Verkkokurssin osiot ovat melko suoraviivaisia ja niiden rakenne toisiaan toistava, joten tehtäväkokonaisuuksien suorittaminen ja kurssin eteneminen on johdonmukaista.

Kontekstuaalisuutta on pyritty lisäämään MathMarket-verkkokurssilla niin, että eri koulutusaloille suuntaaville opiskelijoille on eri osiot, joissa on juuri kyseiselle kohderyhmälle suunnattuja tehtäviä. Lisäksi tehtävissä on oikeassa elämässä eteen tulevia ongelmia ja todellisia arkielämän tilanteita, kuten pihaterassin öljyämiseen tarvittavien öljypurkkien määrän laskemista ja halvimman sähköyhtiön valintaa. Kurssin materiaalikirjoissa teorian lisäksi oppimista tukemassa on videoita, esimerkkejä ja internet-linkkejä, jotka havainnollistavat opiskeltavaa asiaa.

MathMarket-verkkokurssilla opiskelijat eivät juurikaan joudu reflektoimaan omaa oppimistaan tehtävien luonteen ja kurssin rakenteen vuoksi. Mikäli tätä haluttaisiin kurssilla olevan enemmän, tulisi sille lisätä jonkinlainen itsearviointi esimerkiksi palautekyselyn yhteyteen. Olisi toki toivottavaa, että opiskelijat reflektoisivat omia ajatuksiaan harjoitustehtävien malliratkaisujen avulla. Tällaista opiskelijan omaehtoista reflektointia estää kuitenkin osaltaan se, ettei kurssin kaikkiin tehtäviin ole saatavilla malliratkaisuja.

Konstruktiivisuus toteutuu kurssilla osittain, sillä vaikka kurssilla ei opiskella mitään uusia asioita, voivat asiat silti tuntua opiskelijasta uusilta, jos niiden oppimisesta on kauan aikaa tai kyseinen asia ei ole jäänyt lukiosta hyvin mieleen. Opiskelija joutuu palauttamaan muistista oppimiaan asioita ja esimerkiksi geometrian tehtävissä tulee soveltaa erilaisia aihealueita, kuten yksikkömuunnoksia, verrannollisuutta sekä yhtälön ratkaisua. Myös Yhteinen - Lyhyt -osion loppukokeessa yhdistellään aiemmissa aihealueissa olleita sisältöjä ja saman tehtävän sisällä voi joutua käyttämään eri aihealueissa kerrattuja asioita.

4.4. Moodle oppimisympäristönä MathMarket-verkkokurssille

Moodle antaa paljon eri mahdollisuuksia verkkokurssin toteutukselle. Sen vahvuuksia ovat monipuolisuus, selkeys, palautteen antamisen helppous, opiskelijan liikkumisen ohjattavuus, matemaattisten kaavojen ladontamahdollisuus Tex-koodin avulla ja automaattisesti tarkistuvat kokeet. Moodle mahdollistaa myös kurssin suorittamisen opiskelijan oman aikataulun mukaan. Sen heikkoudet taas ovat lähinnä tekniseen toteutukseen liittyviä seikkoja. Kurssin kehittämistyön aikana Moodlelta oppimisympäristönä olisimme toivoneet kaavojen nopeampaa lataamista, parempaa opiskelijanäkymän muokattavuutta ja hieman laajempia työkaluja tehtävien teossa. Moodlen liittyvistä teknisistä rajoitteista on kerrottu luvussa 4.4.1.

Verkkokurssilla on tärkeää, että kurssin sisältö, eteneminen ja tavoitteet ovat opiskelijalle selkeät. MathMarket-verkkokurssilla opettajan ohjausta ei kurssin tekoon ole välittömästi saatavilla, vaan opiskelijan tulee itse osata edetä kurssilla. Tästä syystä kurssin osioissa on ohjeet ja harjoitus- sekä koetehtävien palautuksen jälkeen opiskelijalle tulee palaute ja linkki seuraavaksi suoritettaviin harjoitus- tai koetehtäviin, kuten Kuva 19 nähdään.

Kuva 19. Koetehtävien palautuksen jälkeen saatava palaute.

Opastusta kurssialueella liikkumiseen on toteutettu myös niin, että harjoitustehtävien ratkaisuissa on materiaalikirjastoon linkki, jossa aihealueen teoriaa on käsitelty. MathMarket-verkkokurssin kaikille opiskelijoille yhteisessä lyhyen matematiikan kertausosiossa opiskelija näkee vain ne tehtäväkokonaisuudet, joita hänen on mahdollista suorittaa tai joista hän on jo suoriutunut. Opiskelijoiden näkymää on rajoitettu tällä tavalla, koska tahdotaan opiskelijoiden kertaavan aihealueet tietyssä järjestyksessä.

Matematiikan verkkokurssilla on tärkeää, että tehtäviin ja niiden malliratkaisuihin on mahdollista kirjoittaa matemaattisia kaavoja. Se oli Moodlessa mahdollista ja mikäli se ei olisi, tehtävät jouduttaisiin toteuttamaan esimerkiksi Tex-järjestelmällä kirjoitetusta tiedostosta otettujen kuvakaappauksien avulla. Moodlessa kerätyn kurssipalautteen mukaan kuvien selkeydessä ja skaalautuvuudessa oli ollut ongelmia, joten tällaisia kuvakaappauksia haluttiin käyttää mahdollisimman vähän. Kaikkien lyhyen matematiikan kertausosioissa käytettyjen kuvien asetukset säädettiin Moodlessa siten, että ne skaalautuivat automaattisesti käyttäjän näyttöön sopiviksi.

Oppimisen kannalta tärkeä Moodlen ominaisuus on se, että tehtäviin on mahdollista laatia malliratkaisut, jotka tulevat opiskelijalle näkyviin vastauksen lukitsemisen jälkeen. Kurssille tehtiin opiskelijoiden tueksi malliratkaisut vain harjoitustehtäviin. Koetehtävien teon jälkeen opiskelijalle näytetään ainoastaan tehtävien oikeat vastaukset. Malliratkaisuista ja niiden laadinnasta on kerrottu luvussa 8.

4.4.1. Moodlen tuomat tekniset rajoitteet verkkokurssille

Moodle loi myös tietynlaisia teknisiä rajoitteita verkkokurssin toteuttamiselle. Esimerkiksi erilaisten tehtävätyyppien yhdistelyä oli rajoitettu eivätkä pudotusvalikon vastausvaihtoehdot voineet sisältää matemaattisia kaavoja. Tällaisia ongelmia tuli vastaan, kun jokin tehtävä olisi haluttu toteuttaa tietyllä tapaa, mutta edellä mainittujen rajoitteiden takia se ei ollut mahdollista. Tällaisista tehtävien tekoon liittyvistä teknisistä rajoitteista kerrotaan tarkemmin luvussa 7.1.1.

Suurin Moodlen rajoite oli se, että tehtävissä ei pystynyt arvioimaan kuin vastausta ja sen oikeellisuutta. Moodlessa tehtävän välivaiheita tai perusteluja ei voida tarkistaa, mikäli niitä ei erota omaksi kysymykseksi. Kyseinen ongelma esiintyy suurimmassa osassa verkossa käytettäviä oppimisalustoja eikä sen kiertäminen ollut tällä kurssilla mahdollista. Joitakin ohjelmia, jotka pyrkivät tarkastamaan automaattisesti koko ratkaisun, on kuitenkin olemassa. Yksi tällainen on esimerkiksi Mathcheck, joka on professori Antti Valmarin laatima opetusohjelmisto. Mathcheck tarkastaa ovatko opiskelijan matemaattiset päättelyt tehty oikein ja mikäli niissä on virheitä, se osaa kertoa missä kohtaa tehtävää virhe on tehty. (Valmari 2019) Koska se ei kuitenkaan kerro opiskelijalle mikä kyseinen virhe on, joutuu opiskelija itse reflektoimaan omaa vastaustaan ja pohtimaan mikä tehtävän ratkaisussa on mennyt pieleen. Tällainen ominaisuus antaa verkkokurssille täysin uuden ulottuvuuden ja opiskelijoiden oppimista saataisiin paremmin tuettua.

5. Oppimismotivaatio ja motivoinnin keinot MathMarket-verkkokurssilla

Motivaatio tarkoittaa prosesseja, jotka käynnistävät ihmisessä tavoitteellisen toiminnan (Vuorinen 1993, 12). Se selittää käyttäytymistämme ja valintojamme ja on jatkuvassa vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa joko houkutellen tietyn asian puoleen tai estäen ryhtymästä tietyn asian tekemiseen (Lindblom-Ylänne ym. 2003, 80). Motivaatio ei siis kerro yksilön ominaisuuksista vaan asioista, jotka vetävät yksilöä puoleensa. Toki yksilöiden välillä on eroja siinä, mikä motivoi ja mitkä ovat syyt motivaation taustalla.

Oppimisen kannalta hyvä motivaatio on tärkeää, sillä sen avulla muut oppimisen alueet, kuten pitkäjänteisyys, tarkkaavaisuus, keskittymiskyky, tiedon prosessointi ja muistaminen, tehostuvat. Lisäksi se tuottaa itseohjautuvampaa opiskelua ja kannustaa opiskelijaa suorittamaan sellaisetkin opiskeluun liittyvät tehtävät, joita hän ei koe kovin mielekkäiksi tai kiinnostaviksi tehdä. (Kauppila 2003, 43.) Vaikka MathMarket-verkkokurssia suorittavat opiskelijat ovat itse hakeutuneet korkeakouluun, ei ole taattua, että opiskelija kokisi kaikki korkeakoulun tarjoamat kurssit tärkeiksi, itselleen mielekkäiksi ja olisi motivoitunut niitä suorittamaan. Tietynlainen perusmotivaatio opiskelijalla kuitenkin on, koska hän on vapaaehtoisesti koulutukseen hakeutunut, mutta motivaation laadusta ei kuitenkaan voida tietää sen tarkemmin (Vuorinen 1993, 22).

Motivaatio voi olla joko sisäistä tai ulkoista motivaatiota (Lindblom-Ylänne ym. 2003, 80). Sisäinen motivaatio tarkoittaa tilannetta, jossa ihminen toimii ja työskentelee siksi, että toiminta itsessään on mielekästä ja palkitsevaa. Ulkoisessa motivaatiossa taas toimitaan ulkoisten palkkioiden toivossa tai rangaistuksia peläten (Lindblom-Ylänne ym. 2003, 80). Kun opiskelija on sisäisesti motivoitunut opiskeltavaan aiheeseen, hän jaksaa paremmin tehdä töitä tavoitteiden eteen eikä lannistu vastoinkäymisistä niin herkästi (Kauppila 2003, 43). Kaikkeen toimintaan ei aina kuitenkaan löydy sisäistä paloa, joten myös ulkoisia motivaatiotekijöitä on hyvä olla käytännön opetustyössä (Vuorinen 1993, 25). Korkeakoulussa se tarkoittaa esimerkiksi opintopisteitä, vanhempien tai yhteiskunnan asettamia paineita, tulevaisuuden ammatin saamista ja taloudellista menestystä. MathMarket-verkkokurssista yliopisto-opiskelijat saavat opintopisteitä, mikä voi olla ulkoisesti motivoiva tekijä. Ammattikorkeakoululaisille kurssin teko kuuluu pakollisiin opintoihin. Kurssilla myös luotetaan siihen, että opiskelijalla on kurssin tekemiseen sisäinen motivaatio. Silloin opiskelija ei yritä selviytyä tehtävistä mahdollisimman vähällä, vaan esimerkiksi noudattaa ohjeita laskimen käytöstä, eikä käytä sitä tehtäviin, joihin sitä ei ole tarkoitettu.

Opiskelijoita voi motivoida erilaisin keinoin. Sisäinen motivaatio saadaan heräämään opiskelijassa liittämällä työskentely sellaisiin kokonaisuuksiin, jotka nostattavat opiskelijoiden mielenkiintoa (Vuorinen 1993, 28). MathMarket-verkkokurssille on luotu monipuolisia tehtäviä, jotka on tuotu mahdollisimman lähelle opiskelijoiden omaa elämää. Nämä tehtävät ovat usein sanallisia tehtäviä, joten kurssille on sen keventämiseksi lisätty myös suoraviivaisempia ja nopeampia monivalintatehtäviä, joissa linkityksiä arkielämään ei ole. Yliopisto - Lyhyt -osiota varten pyydettiin eri laitoksilta kyseiseen alaan liittyviä tehtäviä kurssin suunnittelun avuksi, jotta tehtävät saataisiin liitettyä paremmin opiskeltaviin aloihin. Sisäiseen motivaatioon ohjaa myös elämäntilanteeseen sopiva, yksilölliset erot huomioiva opetus (Vuorinen 1993, 25). MathMarket-verkkokurssilla on ammattikorkeakoulun opiskelijoille alakohtaisesti suunnatut osiot, mikä mahdollistaa osion tehtävien suuntaamisen juuri kyseisen alan opiskelijoille. Yliopisto-opiskelijoille suunnattuihin osioihin tällaista yksilöintiä voisi tulevaisuudessa lisätä tekemällä omat osiot esimerkiksi kemian, biologian ja tietotekniikan opiskelijoille.

Tärkeä keino motivaation ylläpitämiseksi verkkokurssilla on tavoitteiden selkeys. Mitä selkeämmät tavoitteet opiskelijalla on, sitä helpompi hänen on jäsentää tavoitteen saavuttamiseksi tarvittava aika (Kauppila 2003, 52). MathMarket-verkkokurssilla on ohjesivut, joissa kerrotaan osion sisällöt, sen suoritukseen suositeltu aika (27 h) sekä kerrotaan, mitä opiskelijalta vaaditaan osion suorittamiseksi. Tehtävämääriä opiskelijoille ei ole ennakkoon kuitenkaan kerrottu, sillä se riippuu siitä, kuinka monta kertaa opiskelijan on suoritettava uusintakoe hyväksytyn arvosanan saadakseen. Ajankäyttöön liittyen opiskelijalla on myös kilpailevia intressejä, mutta tavoitteiden ja merkittävyyden ymmärtämisen avulla opiskelijasta saadaan motivoitunut, tavoitteisiin sitoutunut, oppija (Kauppila 2003, 50). Kurssin tavoitteita olisi hyvä selkiyttää opiskelijalle vielä entisestään, mistä lisää luvussa 9. Toisaalta MathMarket-verkkokurssilla aihealueittain, pienissä osissa eteneminen on motivaatiota lisäävä seikka, sillä motivoinnin tueksi kokonaistavoite on syytä jakaa osa- tai väliaikatavoitteisiin (Kauppila 2003, 52).

Heikon opiskelumotivaation taustalla ovat usein negatiiviset opiskelukokemukset (Kauppila 2003, 49). Opiskelija tarvitsee opiskellessaan vahvistusta omalle oppimiskyvylleen ja osaamiselleen (Kauppila 2003, 49), joten on tärkeää, että verkkokurssilla opiskelija kokee onnistumisen tunteita ja hänen luottamuksensa omaan matemaattiseen osaamiseen nousisi. MathMarket-verkkokurssi on koottu siten, että tehtävät aloitetaan helpoimmista tehtävistä jokaisessa kurssin osiossa ja haastetta lisätään hiljalleen. Näin saadaan luotua kaikille opiskelijoille näitä positiivisia onnistumisen kokemuksia ja siten uskoa omaan pystyvyyteensä lisäten heidän matemaattista itsevarmuuttaan.

6. Lyhyen matematiikan kertausosioiden sisältöjen valinnoista

MathMarket-verkkokurssin aiempaa käyttäjäkuntaa ovat olleet JAMKin tekniikan alan opiskelijat sekä Jyväskylän yliopiston matemaattis-luonnontieteellisessä tiedekunnassa tai tietotekniikalla aloittavat opiskelijat. Koska työryhmässä on ollut mukana tiettyjen alojen asiantuntijoita, on se vaikuttanut kurssilla tällä hetkellä oleviin aihesisältöihin. Syksystä 2019 lähtien kurssi siis palvelee erityisesti työryhmässä edustettuina olleiden alojen opiskelijoita, mutta kurssia tulevat suosittelemaan opiskelijoilleen myös useat muut Jyväskylän yliopiston laitokset.

Lyhyen matematiikan osioissa ei kerrata koko lukion lyhyen matematiikan oppimäärää, vaan niihin on valittu oppilaitosten tarpeiden mukaiset aihealueet vuoden 2015 opetussuunnitelman lyhyen matematiikan pakollisten kurssien sisällöistä. Sisältöjen valinnassa on huomioitu JAMKin tekniikan-, hyvinvointi- ja liiketalouden alan opettajien toiveet heidän alojensa kannalta olennaisimmista kertausaiheista. Lisäksi yliopiston eri alojen opettajille tehdyistä haastatteluista on koottu heidän alojensa näkökulmasta keskeisimmät kertausaiheet. Yliopistolla tehdyistä haastatteluista on kerrottu luvussa 6.1.

Työryhmän yhteisissä kokouksissa päätetyt aihealueet tuli sisällyttää tehtäväkokonaisuuksiin, mutta se, miten ja millä tavalla asiat haluttiin kerrata, oli meidän päätettävissämme. Kun suuntaa-antavat aihealueet oli valittu, meidän tuli vielä miettiä millä laajuudella aihealuetta kerrataan ja mikä on tehtäviin sopiva haastavuustaso. Haastavuustason osalta meitä auttoivat lyhyen matematiikan ammattilaisina työryhmässä toimineet matematiikan opettajat Henri Jaakkola ja Lauri Huttunen koulutuskuntayhtymä Gradialta. Prosessin aikana tarvitsi muuttaa jo tehtyjä valintoja, kun yksityiskohtien toteutuksessa havaittiin ongelmia. Esimerkiksi Yhteinen - Lyhyt -osioon aihealueita tehtiinkin yksi suunniteltua enemmän. Lisää rajoituksia opetussuunnitelman ja opettajien toiveiden lisäksi toi Moodle oppimisympäristönä. Moodlessa on käytettävissä vain tietyt, rajoitetut tehtävätyypit. Sen lisäksi jokainen opiskelija etenee kurssilla omaa tahtiaan, joten tehtävien tuli olla automaattisesti tarkistuvia.

6.1. Haastattelut yliopistolla

Yliopisto-Lyhyt osiota varten tehtiin haastatteluja eri tiedekunnissa, jotta saatiin kartoitettua millaisissa asioissa eri alojen opiskelijoilla on haasteita, ja millaista matematiikan hallintaa alalla tarvitaan. Haastateltavina oli edustajia tietotekniikalta, kauppatieteiltä, biologialta sekä kemialta. Haastattelut olivat hyvin avartavia ja niiden avulla saimme tietää, kuinka erilaiset lähtötaidot yliopiston uusilla opiskelijoilla matematiikassa on. Haastattelujen vaikutus näkyi kurssilla aihesisältöjen valinnan lisäksi siinä, että haastavuustasoa päädyttiin hieman madaltamaan lyhyen matematiikan osioissa.

Haastatteluissa tuli ilmi, että monet opiskelijat ovat hyvin suurissa vaikeuksissa opinnoissaan, joissa tulee osata soveltaa matemaattista osaamista. Yksi tärkeä tavoite MathMarket-kurssilla on kertaamisen lisäksi parantaa opiskelijoiden matemaattista itseluottamusta onnistumisen kokemuksilla, jotta he uskaltaisivat jatkossa tarttua rohkeasti vaikeammankin näköisiin matematiikan tehtäviin. Itseluottamusta pyrittiin tukemaan niin, että jokaisen aihealueen tehtävät alkoivat helpoilla tehtävillä ja vaikeutuivat kokeen edetessä. Näin ollen opiskelijalla on mahdollisuus saada heti alkuun onnistumisen kokemuksia.

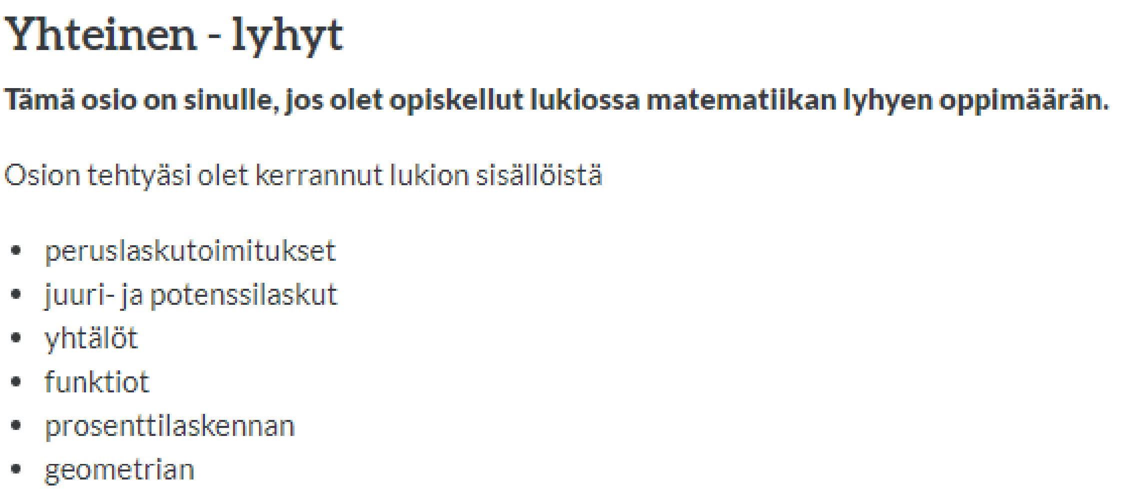
Haastatteluissa haastavina matematiikan osa-alueina nousivat esille muun muassa logaritmit sekä yhtälönratkaisu. Logaritmin ymmärrystä tarvitaan etenkin biologian ja kemian opinnoissa, ja logaritmin osalta toivottiin peruslaskutaitojen kertaamisen lisäksi myös sen ymmärtämistä sekä soveltamista. Haastateltavat toivoivat esimerkiksi logaritmin laskusääntöjen kertaamista, mutta ne eivät kuulu lyhyen matematiikan sisältöihin, joten niitä ei voitu kertauskurssiin toiveista huolimatta sisällyttää. Haastatteluissa keskusteltiin usein myös derivaatan kertaamisesta. Se on vuonna 2015 tehdyn opetussuunnitelman muutoksen myötä siirtynyt lyhyen matematiikan vapaavalintaisten kurssien sisältöihin, joten se rajautui pois kurssilta.

Koska lyhyeen matematiikkaan pohjautuvia osioita laadittiin kaksi: Yhteinen - Lyhyt ja Yliopisto - Lyhyt, toiveita oli mahdollista jakaa eri osioihin. Ne sisällöt, joita toivoivat sekä ammattikorkeakoulun että yliopiston opettajat, huomioitiin kaikille yhteisessä osiossa. Sisällöt, joita ammattikorkeakoulun opiskelijoiden ei ollut tarpeen kerrata, mutta yliopiston puolelta oli, jätimme lyhyen matematiikan yliopisto-opiskelijoille suunnattuun osioon. Esimerkiksi todennäköisyyslaskentaa ei koettu ammattikorkeakoulun alojen kannalta tarpeelliseksi aiheeksi kerrata, mutta biologialla aloittaville opiskelijoille todennäköisyyslaskennan tehtävien kertaamisesta on hyötyä. Ammattikorkeakoulun työryhmä sai sisällyttää halutessaan omiin alakohtaisiin osioihinsa niitä sisältöjä, jotka olivat jääneet pois yhteisestä osiosta, mutta jotka he kokivat omille opiskelijoilleen tarpeellisiksi.

Yliopiston opettajille tehdyissä haastatteluissa nousi usein esiin käsite matikkakammo. Tällä tarkoitettiin opiskelijassa herääviä negatiivisia tuntemuksia, kun hän näkee esimerkiksi matemaattisen kaavan. Opiskelijat, jotka kärsivät matikkakammosta, eivät välttämättä edes yritä tehdä matemaattista tehtävää, koska heidän itseluottamuksensa matemaattisen tehtävän osaamiseksi saattaa olla huono. Matikkakammo liittyy alitajuisiin oppimisen esteisiin ja matematiikka nähdään epäkiinnostavana sekä epämiellyttävänä asiana. Niitä asioita, joille ei uskota olevan käyttöä, jotka eivät kiinnosta tai joista aikaisemmat kokemukset ovat huonoja, ei opita niin hyvin (Kauppila 2003, 90-91). MathMarket-verkkokurssia tekevän biologian tai esimerkiksi tietotekniikan opiskelijan mielestä voi tuntua kaukaiselta ajatukselta kerrata matematiikkaa, jos he eivät koe matematiikan liittyvän omaan opiskelualaansa. Monilla aloilla tarvitaan kuitenkin esimerkiksi tilastojen ymmärtämistä, jossa tulee ymmärtää esimerkiksi se, miten koordinaatisto rakentuu ja kuinka sitä käytetään. Tavoitteiden avulla opiskelijoille pystytään korostamaan matematiikan tärkeyttä ja roolia oman alan opinnoissa, millä voidaan mahdollisesti ennaltaehkäistä matikkakammon syntymistä. Alitajuisista oppimisen esteistä päästään eroon onnistumisen kokemusten lisäksi myönteisen palautteen avulla (Kauppila 2003, 90-91). MathMarket-verkkokurssilla palaute suorituksesta tulee opiskelijalle heti koepisteiden muodossa, mikä ei välttämättä ole kovin motivoivaa. Kehityskohtana voisikin olla yksilöidymmän palautteen anto verkkokurssilla, mistä kerrotaan luvussa 10.

6.2.Yhteinen osio (Yhteinen - Lyhyt)

Yhteiseen osioon valikoituneet aihesisällöt on esitetty Kuva 20. Koska aihealueet suoritetaan määrätyssä järjestyksessä, voidaan olettaa edeltävien aihealueiden sisällöt kerratuiksi myöhemmissä aihealueissa. Esimerkiksi geometrian tehtävissä on tärkeää, että yhtälön ratkaiseminen on käyty hyvin läpi jo aiemmin.


Yhteinen - lyhyt

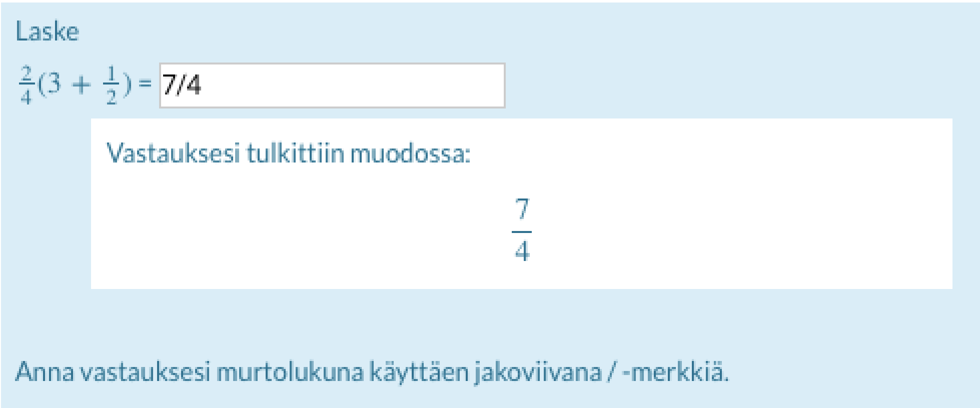
Tämä osio on sinulle, jos olet opiskellut lukiossa matematiikan lyhyen oppimäärän.

Osion tehtyäsi olet kerrannut lukion sisällöistä

- peruslaskutoimitukset
- juuri- ja potenssilaskut
- yhtälöt
- funktiot
- prosenttilaskennan
- geometrian

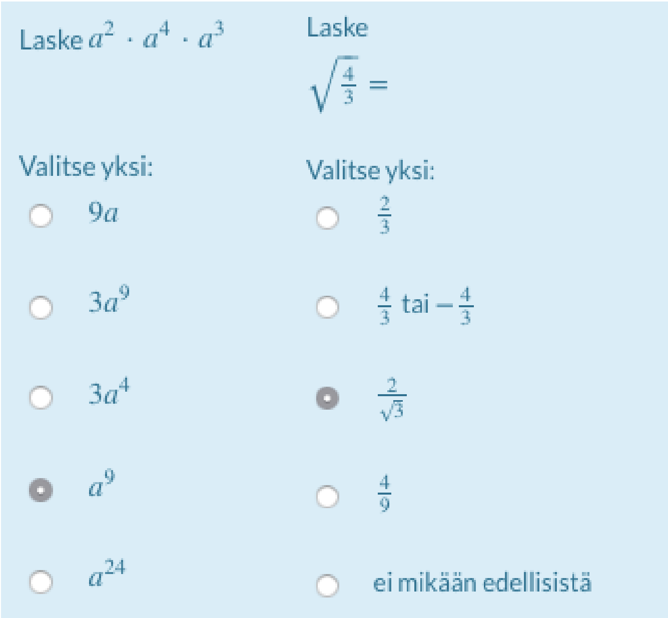
Kuva 20. Lyhyen matematiikan kaikille yhteisen kertauksen sisällöt.

Suunnitteluvaiheessa ensimmäisen aihealueen ajateltiin sisältävän peruslaskutoimitusten lisäksi myös juuri- ja potenssilaskuja, mutta tästä tehtäväpaketista alkoi tulla niin laaja, että aiheet jaettiin kahdeksi eri aihealueeksi. Jakaminen nähtiin parhaaksi ratkaisuksi, sillä tehdyissä haastatteluissa tuli ilmi opiskelijoilla olevan eniten ongelmia peruslaskutaidoissa, ja tähän haluttiin kiinnittää erityistä huomiota aihealueiden valinnassa. Mainitut ongelmat olivat esimerkiksi laskujärjestyksen unohtamista, laskimen käytön hallinnan puutteita, sulkujen vääränlaista poistamista sekä etenkin murtoluvuilla laskeminen (Kuva 21) koettiin haastavaksi ja täten todella tärkeäksi aiheeksi kerrata.



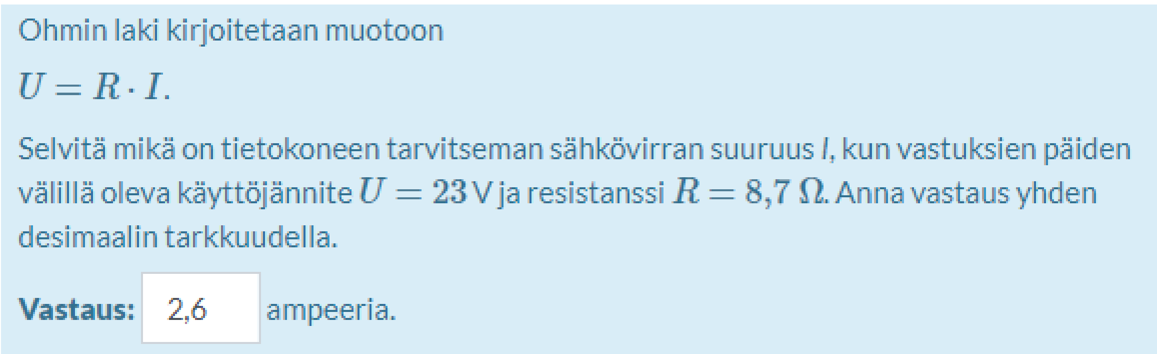
Kuva 21. Peruslaskutoimitusten ensimmäisen kokeen tehtävä 5.

Juuret ja potenssit muodostivat siis oman aihealueensa, joka sisälsi neliöjuuri- ja potenssilaskujen lisäksi yksikkö- sekä kymmenpotenssimuunnoksia. Tehtävissä laskettiin sekä luvuilla että kirjaimilla, jolloin potenssien ja juurten laskusäännöt tulivat kerrattua (Kuva 22). Potensseissa keskityttiin samankantaisten potenssien laskusääntöihin sekä toiseen potenssiin korotukseen.



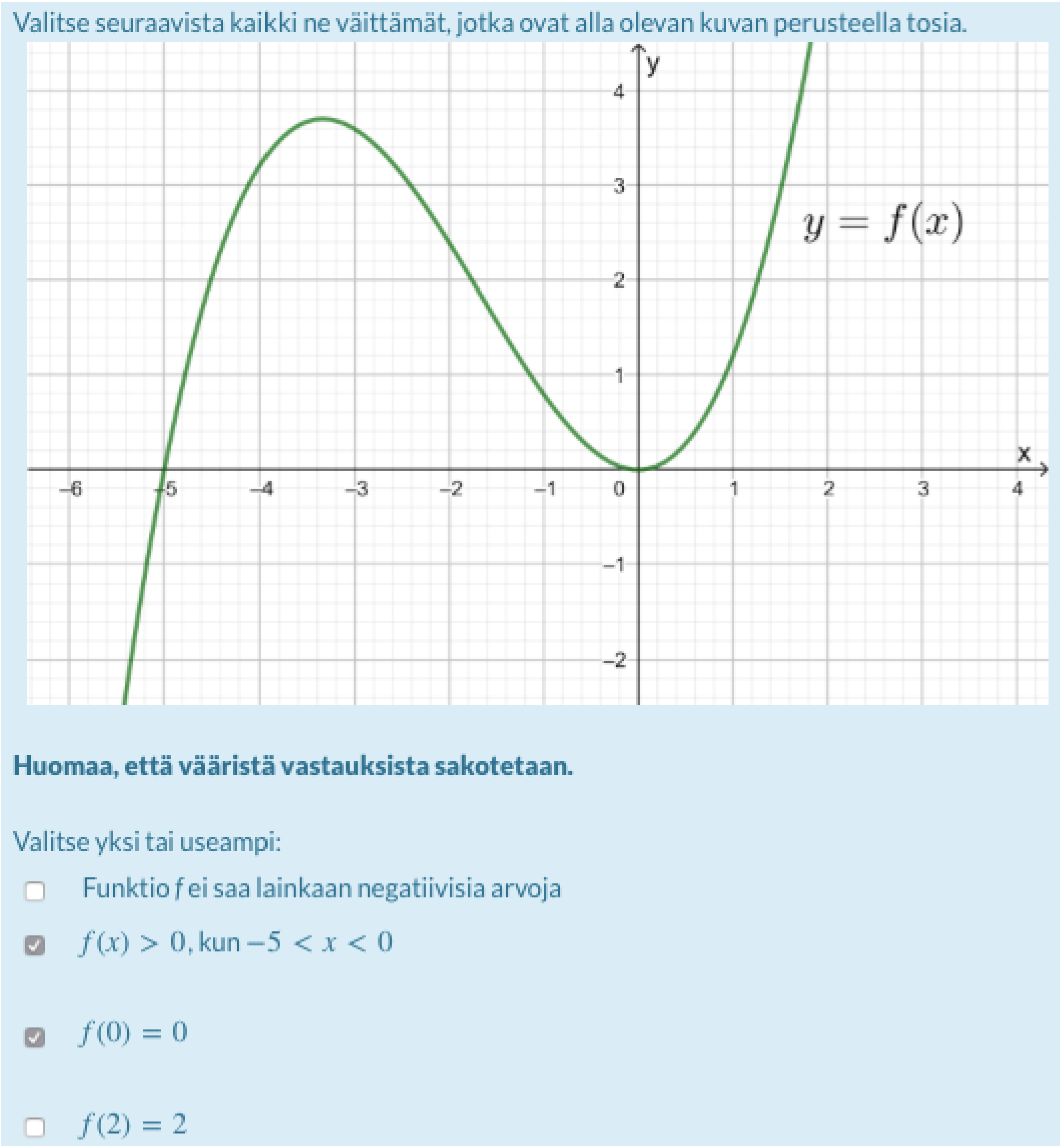
Kuva 22. Juuret ja potenssit harjoitustehtävä 4 ja ensimmäisen kokeen tehtävä 3.

Yhtälöt-aihealueella olivat pääosassa yhtälön ratkaisemisen periaatteet. Yhtälön muodostus ja ratkaiseminen oli tarpeen myös sanallisissa tehtävissä, jotka sisälsivät esimerkiksi valuuttalaskuja ja verrantoja. Haastatteluissa oli tullut ilmi, että opiskelija saattaa mennä lukkoon yksinkertaisessa yhtälönratkaisutehtävässä, jos muuttujana on jokin muu kirjain kuin tuttu x. Kurssin tehtävissä käytettiin muuttujina muitakin kirjaimia, jotta opiskelijan käsitys yhtälöistä laajenee ja hän tottuu muidenkin muuttujien käyttöön. Lisäksi tehtävissä oli mukana fysiikan kaavoja (Kuva 23), joita opiskelijan tuli osata soveltaa. Tällaisilla tehtävätyypeillä matematiikkaa ja yhtälönratkaisua saatiin yhdistettyä paremmin opiskelijoiden omaan alaan.



Kuva 23. Yhtälöiden toisen kokeen tehtävä 7.

Funktiot-aihealueen tärkein kerrattava aihe oli koordinaatiston lukeminen. Sitä harjoitettiin esimerkiksi tehtävissä, joissa oli funktion kuvaaja ja opiskelijan tuli valita vaihtoehdoista ne pisteet, jotka olivat funktion kuvaajalla. Tehtävissä piti myös laskea, onko kysytty piste funktion kuvaajalla ja ratkaista kahden suoran leikkauspiste. Kuvaajan tulkintaa harjoittavissa tehtävissä opiskelijan tuli määrittää esimerkiksi funktion nollakohdat tai arvo kysytyssä pisteessä (Kuva 24). Tehtävissä kerrattiin myös funktion lausekkeen tunnistusta sen kuvaajan perusteella. Tässäkin aihealueessa oli viittauksia arkielämään sanallisissa tehtävissä, joissa laskettiin esimerkiksi taksimatkan ja sähkön hintoja.



Kuva 24. Funktioiden ensimmäisen kokeen tehtävä 6.

Prosenttilaskenta ja tilastojen tulkinta yhdistettiin yhdeksi kokonaisuudeksi. Prosenttilaskennasta mukaan otettiin perustehtäviä: pitoisuuslaskuja (Kuva 25), muutosprosentti, kokonaismuutos sekä vertailuprosentti. Prosenttilaskennan harjoitustehtävät alkoivat myös todella helpolla tehtävällä, jossa piti muuttaa murtoluku prosenttiluvuksi. Aihealueen edetessä tehtävät vaikeutuivat tästä pikkuhiljaa. Tilastojen osalta erilaisten tilastojen tulkinta ja niiden lukeminen olivat keskiössä. Tilastomatematiikan käsitteistä kerrattiin moodi, mediaani ja keskiarvo. Tilastojen lukemisessa keskityttiin siihen, millaisia tietoja tilastosta voidaan päätellä. Kaikki tehtävät tässä osiossa olivat sanallisia, mikä vaati tarkkaa lukutaitoa ja keskittymistä siihen, mitä tehtävässä oikeasti kysytään.

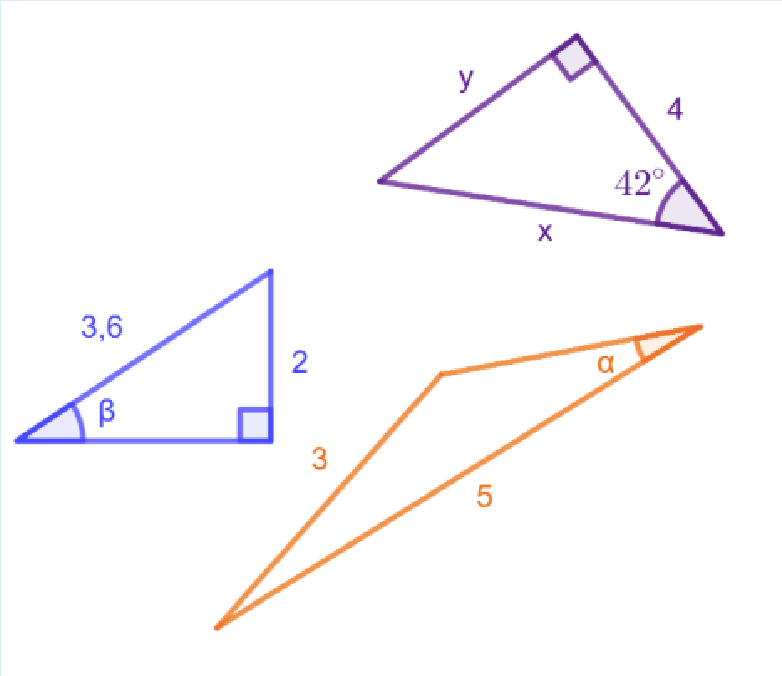
Jyrki valmistaa makkaraa, johon hän laittaa 3,25 kg hirvenlihaa, 1,5 kg sianlihaa ja 0,25 kg muita aineksia. Mikä on valmiin makkaran rasvaprosentti, kun hirvenlihassa rasvaa on 4 %, sianlihassa 25 % ja muussa aineksessa 65 %?

Vastaus: 13 %.

Anna vastaus kokonaislukuna ilman %-merkkiä.

Kuva 25. Prosenttien ja tilastojen harjoitustehtävä 6.

Geometrian aihealueessa suuressa roolissa olivat kolmiot ja niiden ominaisuudet (Kuva 26). Lisäksi tehtäviä oli pinta-aloista, mittakaavasta sekä kulmien ratkaisusta. Geometrian tehtävät olivat pääosin aukkotehtäviä. Lisäksi geometrian tehtäviin oli helppo yhdistää aiemmissa osioissa olleita aiheita. Tällaisia tehtäviin upotettuja kertausaiheita olivat esimerkiksi toisen asteen yhtälön ratkaiseminen sekä yksikkömuunnokset.



Laske kuvan perusteella kulmien α ja β suuruudet sekä sivujen x ja y pituudet. Anna vastaukset 1 desimaalin tarkkuudella ja käytä desimaalierottimena pilkkua.

Jos kysyttyä kulmaa tai pituutta ei voi laskea trigonometrian avulla, laita aukkoon - .

Kulman β suuruus on 33,7 astetta.

Sivun x pituus on 5,4 .

Sivun y pituus on 3,6 .

Kulman α suuruus on - astetta.

Kuva 26. Geometrian harjoitustehtävä 6.

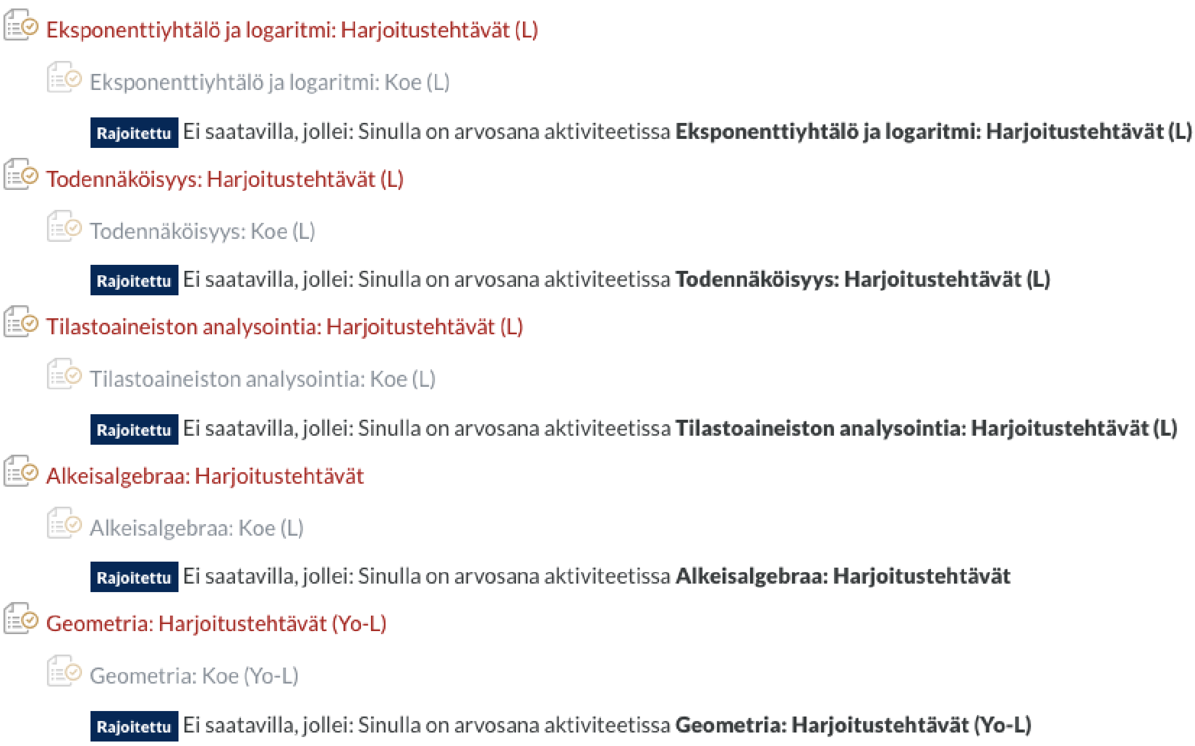
Aihealueiden välillä harjoitus- ja koetehtävien määrä vaihteli, mutta jokaisessa aihealueen neljässä kokeessa oli saman verran tehtäviä. Jos opiskelija suoriutui kaikista aihealueiden kokeista sekä loppukokeesta ensimmäisellä yrittämällä hyväksytysti, hänen tuli tehdä yhteensä 105 tehtävää, joka oli vähimmäisvaatimus osion suorittamiseksi. Taulukko 1. Yhteinen - Lyhyt osion tehtävämäärät. on eriteltynä Yhteinen - Lyhyt -osiossa olleiden tehtävien määrä.

AIHEALUE	HARJOITUSTEHTÄVIÄ	KOKEESSA TEHTÄVIÄ	YHTEENSÄ
1. PERUSLASKUTOIMITUKSET	10	6	**16**
2. JUURET JA POTENSSIT	11	8	**19**
3. YHTÄLÖT	9	7	**16**
4. FUNKTIOT	9	7	**16**
5. PROSENTTEJA JA TILASTOJA	8	5	**13**
6. GEOMETRIA	8	7	**15**
LOPPUKOE	-	10	**10**
			105

Taulukko 1. Yhteinen - Lyhyt osion tehtävämäärät.

6.3. Yliopisto-opiskelijoille suunnattu osio (Yliopisto - Lyhyt)

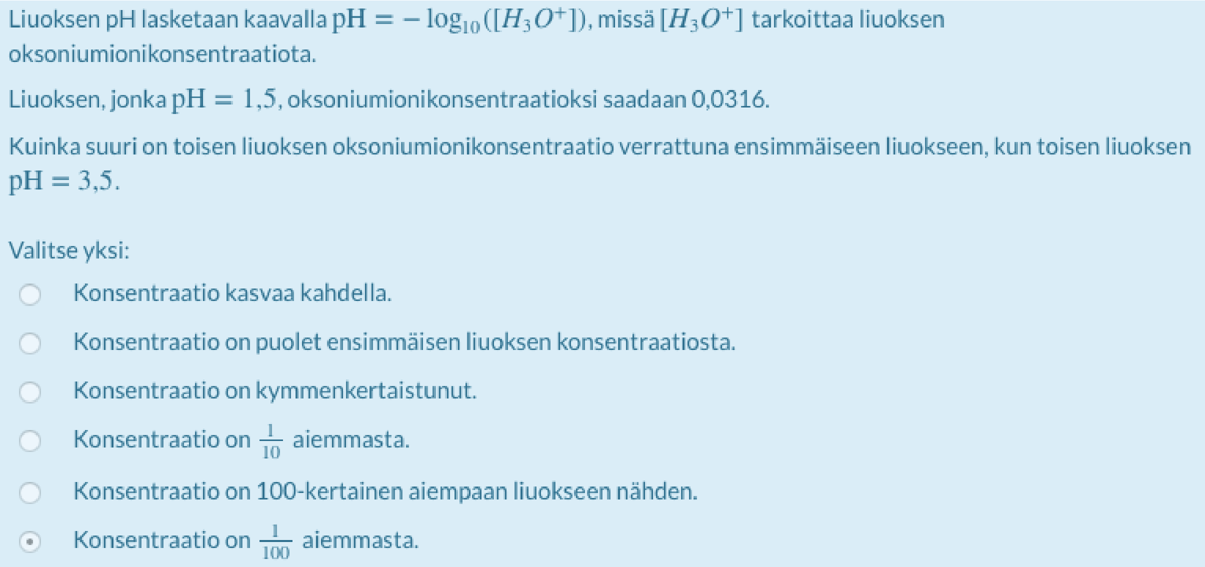
Yliopisto-opiskelijoille suunnatun osion aihealueisiin valittiin paljon samoja sisältöjä, jotka kerrattiin jo Yhteinen - Lyhyt osion tehtävissä, mutta tässä osiossa aiheiden käsittelyä syvennettiin. Yhteisestä osiosta kokonaan uudet aihealueet olivat eksponenttiyhtälö ja logaritmi sekä todennäköisyyslaskenta. Muut osiot olivat alkeisalgebra, tilastoaineiston analysointi sekä geometria. Opiskelija pääsi vapaasti kaikkien aihealueiden harjoitustehtäviin ja hän sai itse päättää missä järjestyksessä niitä tahtoi suorittaa (Kuva 27).



Kuva 27. Yliopisto-opiskelijoille suunnatun osion opiskelijanäkymä, jossa on näkyvissä kaikkien aihealueiden harjoitustehtävät.

Etenkin logaritmin kertaamista toivottiin paljon yliopiston opettajien haastatteluiden perusteella ja logaritmin ymmärrystä haluttiin laajentaa koskemaan muutakin, kuin laskimessa olevaa näppäintä.

Tavoitteena oli, että opiskelijat ymmärtäisivät logaritmin olevan ratkaisu eksponenttiyhtälölle ja sen, kuinka logaritminen asteikko toimii (Kuva 28).



Liuoksen pH lasketaan kaavalla $\mathrm{pH} = -\log_{10}([H_3O^+])$, missä $[H_3O^+]$ tarkoittaa liuoksen oksoniumionikonsentraatiota.

Liuoksen, jonka $\mathrm{pH} = 1{,}5$, oksoniumionikonsentraatioksi saadaan 0,0316.

Kuinka suuri on toisen liuoksen oksoniumionikonsentraatio verrattuna ensimmäiseen liuokseen, kun toisen liuoksen $\mathrm{pH} = 3{,}5$.

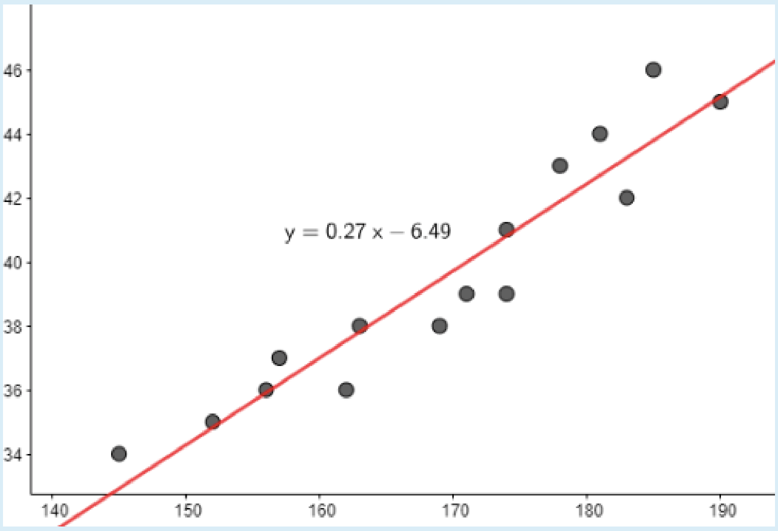
Valitse yksi:

- Konsentraatio kasvaa kahdella.
- Konsentraatio on puolet ensimmäisen liuoksen konsentraatiosta.
- Konsentraatio on kymmenkertaistunut.
- Konsentraatio on $\frac{1}{10}$ aiemmasta.
- Konsentraatio on 100-kertainen aiempaan liuokseen nähden.
- Konsentraatio on $\frac{1}{100}$ aiemmasta.

Kuva 28. Eksponenttiyhtälöiden ja logaritmin harjoitustehtävä 10.

Tilastojen analysoinnissa laajennettiin jo yhteisessä osiossa esillä olleen keskiarvon ja mediaanin käsittelyä, ja mukaan otettiin myös keskihajonnan suuruuden vertailu annetusta aineistosta, ylä- ja alakvartiilit, korrelaatio, regressiosuora (Kuva 29) sekä vaihteluväli ja sen pituus. Lisäksi aineistoa analysoitiin frekvensseillä, summafrekvensseillä, suhteellisilla frekvensseillä sekä suhteellisilla summafrekvensseillä. Prosenteista otettiin mukaan aihealueeseen prosenttiyksikkö.

Kuvassa on esitettynä koordinaatistossa viidentoista henkilön pituudet (cm) ja kengännumerot siten, että x-akselilla on henkilön pituus ja y-akselilla kengännumero. Koordinaatistoon merkittyihin havaintoarvoihin on sovitettu suora, jonka yhtälöksi on saatu $y = 0{,}27x - 6{,}49$.

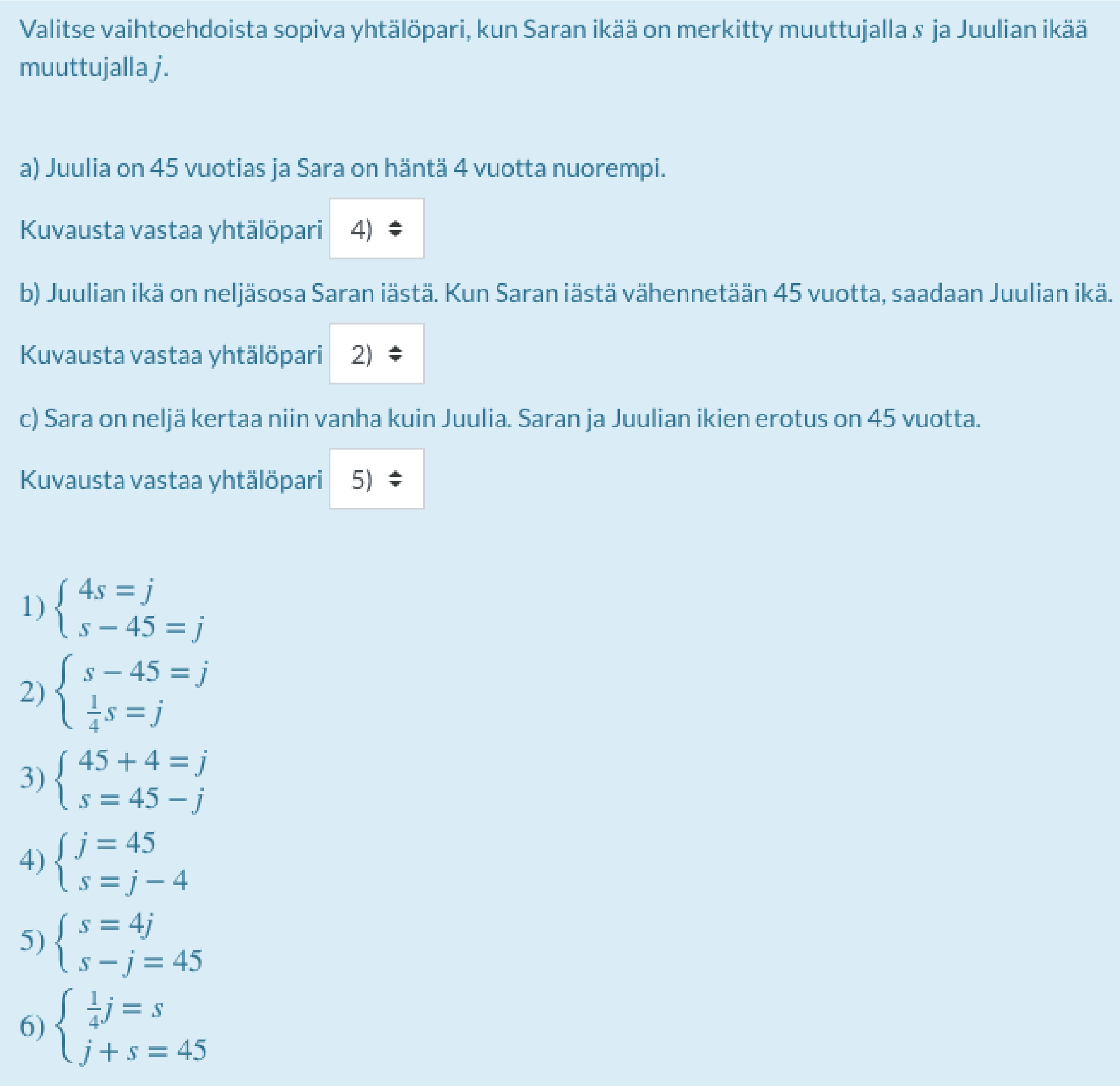


Laske regressiosuoran yhtälön avulla mallin mukainen kengännumero henkilölle, joka on 165 cm pitkä. Anna vastaus kokonaisten tarkkuudella.

Vastaus: Henkilön mallin mukainen kengännumero on 38 .

Kuva 29. Tilastoaineiston analysoinnin kolmannen kokeen tehtävä 7.

Alkeisalgebra sisälsi yhteisestä osiosta ammattikorkeakoululle tarpeettomana pois jääneinä aiheina itseisarvon, yhtälöparit (Kuva 30) sekä vaikeammat pitoisuus- ja liuoslaskut.



Kuva 30. Alkeisalgebran ensimmäisen kokeen tehtävä 3.

Todennäköisyys-aihealueessa kerrattiin kombinaatio, permutaatio, klassinen todennäköisyys (Kuva 31), vastatapahtuma, komplementtisääntö, riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö, yhteenlaskusääntö ja tuloperiaate. Tehtävistä pyrittiin tekemään yksinkertaisia ja vaikeimmat todennäköisyyden sovellukset jätettiin pois. Osioon sisällytettiin myös loogista päättelyä vaativia tehtäviä.

Arvaa kuka -lautapelissä on 24 hahmoa. 9 hahmolla on viikset, 7 hahmolla parta ja 5 hahmolla molemmat. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitulla hahmolla

a) on viikset? 0,38

b) on viikset mutta ei partaa? 0,17

c) on parta tai viikset? 0,46

Anna vastaukset 2 desimaalin tarkkuudella.

Kuvan lähde: *https://www.flickr.com/photos/bethanykhan/4466733616*

Kuva 31. Todennäköisyyslaskennan ensimmäisen kokeen tehtävä 7.

Geometriaa syvennettiin ottamalla mukaan myös tilavuuslaskut. Tehtävien haastavuustasoa nostettiin yhteisestä osiosta hieman, kuten Kuva 32 tehtävässä. Lisäksi aihealueeseen sisällytettiin pinta-alan ja tilavuuden mittakaavat sekä haastavampia yksikkömuunnostehtäviä, joissa yksiköt olivat tavallisuudesta poikkeavia, kuten mikrolitra.

Henna-Kaisa öljyää terassia, jonka leveys on 4,9 m ja pituus 2 m. Terassin kaikille sivuille on lisäksi asennettu 0,3 m korkuinen laudoitus, joka tulee myös öljytä. Kuinka monta purkillista terassiöljyä Henna-Kaisa tarvitsee ostaa, kun hän laittaa terassiin **kaksi kerrosta** öljyä? Yhdessä purkissa on 1 litra öljyä ja sen riittoisuus on 5 m^2/l.

Tehtävässä ei tarvitse huomioida terassilautojen väliin jäävän minkäänlaisia rakoja, vaan se on laudoitettu aukottomasti.

Vastaus: 6 purkillista.

Kuva 32. Geometrian kolmannen kokeen tehtävä 3.

Yliopisto-opiskelijoille suunnatun osion suoritusjärjestystä ei rajoitettu, sillä oletuksena sen suoritukselle on, että opiskelija on ensin tehnyt kaikille yhteisen lyhyen matematiikan osion, jossa on käyty jo tehtävien kannalta olennaisimmat aihealueet läpi. Pitkään matematiikkaan pohjautuvan yliopisto-opiskelijoille suunnatun osion tapaan, myöskään lyhyen matematiikan pohjalta tehtävässä yliopiston osiossa ei ole loppukoetta, vaan kaikkien yksittäisten aihealueiden kokeiden läpäiseminen riittää suorituksen hyväksyntään. Verkkokurssille tehty lyhyen matematiikan materiaalikirja palveli myös tässä osiossa. Yliopisto-opiskelijoille suunnatun osion tehtävämäärät on eritelty Taulukko 2.

AIHEALUE	HARJOITUSTEHTÄVIÄ	KOKEESSA TEHTÄVIÄ	YHTEENSÄ
EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMI	10	8	**18**
TODENNÄKÖISYYS	7	8	**15**
TILASTOAINEISTON ANALYSOINTIA	9	8	**17**
ALKEISALGEBRAA	8	8	**16**
GEOMETRIA	10	9	**19**
			85

Taulukko 2. Yliopisto - Lyhyt osion tehtävämäärät. Hyväksytyn suorituksen saadakseen opiskelijan oli suoritettava vähintään 85 tehtävää.

7. Tehtävien laadinta

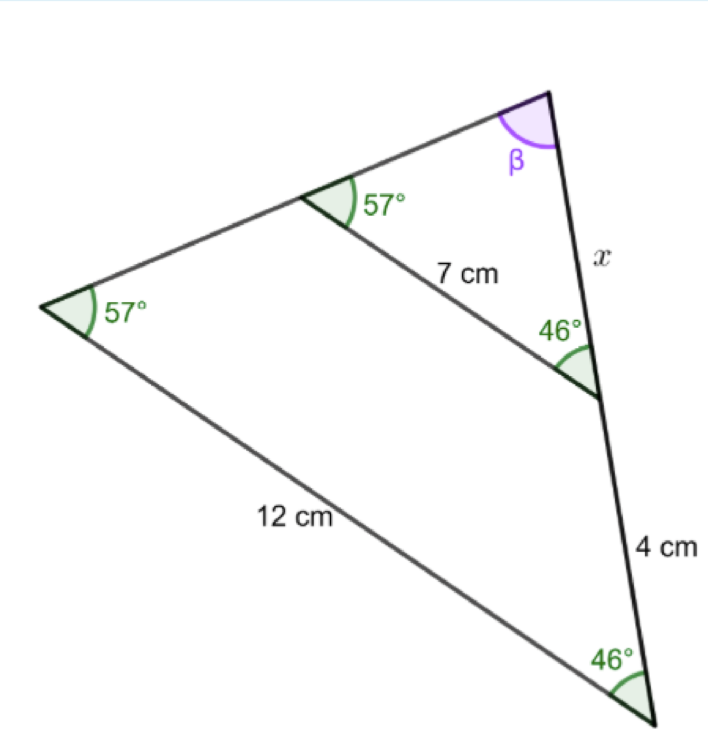
Aihealueiden valinnan jälkeen tuli päättää, millaisia tehtäviä kurssille tahdottiin. Tehtävien laadinnassa apuna olivat oppikirjat, joiden avulla saatiin käsitys siitä, miten laajasti kyseiset aihesisällöt lyhyen matematiikan kursseilla on käyty. Tehtävien laadintaprosessin aikana pidettiin myös viikoittaisia palavereja työn ohjaajien, Petrin ja Annin kanssa ja tehtävät muokkautuivat alkuperäisestä ehdotuksestaan useaan otteeseen. Tehtävät laadittiin LaTex-ladontajärjestelmän avulla ja kuvissa käytettiin apuna matematiikkaohjelmisto GeoGebraa. Vasta sitten, kun tehtävät olivat lopullisessa muodossaan, ne luotiin Moodleen. Moodlen käyttöä opiskeltiin myös koulutuksessa.

Tehtävien laadinta oli prosessina monivaiheinen. Pääasiassa inspiraatiota tehtäviin haettiin lukion lyhyen matematiikan Huippu-kirjasarjasta, mutta tukevana materiaalina olivat myös yläkoulun Laskutaito-kirjasarja sekä pitkän matematiikan Juuri-kirjasarja. Tehtävistä haluttiin motivoivia ja niihin haluttiin viittauksia todellisen elämän tilanteisiin. Tehtäväideoita saatiin kirjojen lisäksi ystävien sekä läheisten elämistä. Näin keksittiin monipuolisia tehtäviä aina makkaran valmistuksesta ja vaellusretkistä 3D-tulostukseen.

Tehtävien ensimmäisten versioiden valmistumisen jälkeen konsultoitiin Henri Jaakkolaa ja Lauri Huttusta tehtävien haastavuustasosta. Heiltä saatiin luotettavaa tietoa siitä, kuinka lyhyen matematiikan taidot omaava opiskelija suoriutuu laadituista tehtävistä. Koska Henri toimii aikuislukion opettajana, saatiin arvokasta tietoa myös siitä, miten matematiikan opiskelusta pidetty tauko vaikuttaa matematiikan osaamiseen. Lähipiiristä otettiin myös eri ikäisiä ja taustaisia henkilöitä, joilla testattiin tehtävien vaikeustasoa ja ymmärrettävyyttä. Näin huomattiin, kuinka suuri merkitys tehtävistä suoriutumisessa oli motivaatiolla, koulutustaustalla, edellisten matematiikan opintojen ajankohdalla sekä omalla harrastuneisuudella.

Harjoitustehtävät tehtiin sillä idealla, että koetehtävissä tarvittava tieto tulee jo harjoitustehtävissä kerrattua. Harjoitus- ja koetehtävistä ei tehty samanlaisia siitä syystä, että opiskelijalle ei haluttu tarjota valmista ratkaisumallia koetehtävien tekemiseen. Esimerkiksi Yliopisto - Lyhyt -osion aihealueessa geometria harjoitustehtävässä käydään läpi yhdenmuotoiset kolmiot ja kolmioiden kulmien summa (Kuva 33. Geometrian harjoitustehtävä 2.).

Ratkaise janan pituus x senttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella ja kulman β suuruus asteen tarkkuudella.



Vastaus:

$x =$ 5,6 cm

ja

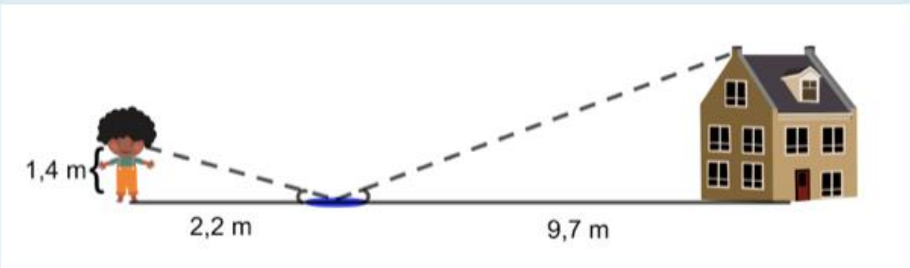
$\beta =$ 77 astetta.

Kuva 33. Geometrian harjoitustehtävä 2.

Geometrian koetehtävän (Kuva 34. Geometrian toisen kokeen tehtävä 2.) ratkaisemiseksi tarvitaan tieto siitä, että kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Tehtävässä sitä ei kuitenkaan sanota suoraan, vaan opiskelijan tulee osata löytää sanallisesta tehtävänannosta tämä tieto. Kun opiskelija on tämän tiedon hoksannut, hän pystyy soveltamaan tehtäviin yhdenmuotoisia kolmioita, joita on käyty läpi osion harjoitustehtävässä.

Suora peili heijastaa valoa niin, että valon säteen tulokulma on sama kuin heijastuskulma. Rikhard asettaa peilin maahan kuvan osoittamalla tavalla.

Kuinka korkea talo on metreinä yhden desimaalin tarkkuudella?



Vastaus: Talo on 6,2 metriä korkea.

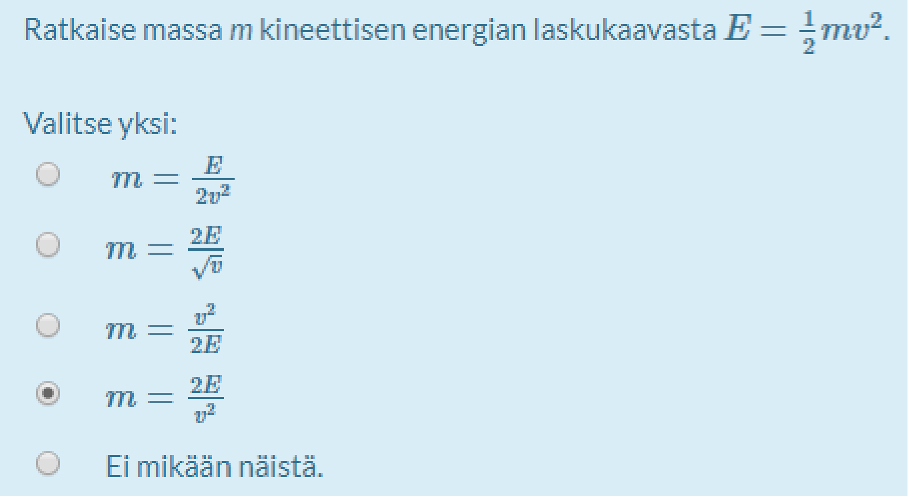
Kuva 34. Geometrian toisen kokeen tehtävä 2.

7.1. Moodlen mahdolliset tehtävätyypit

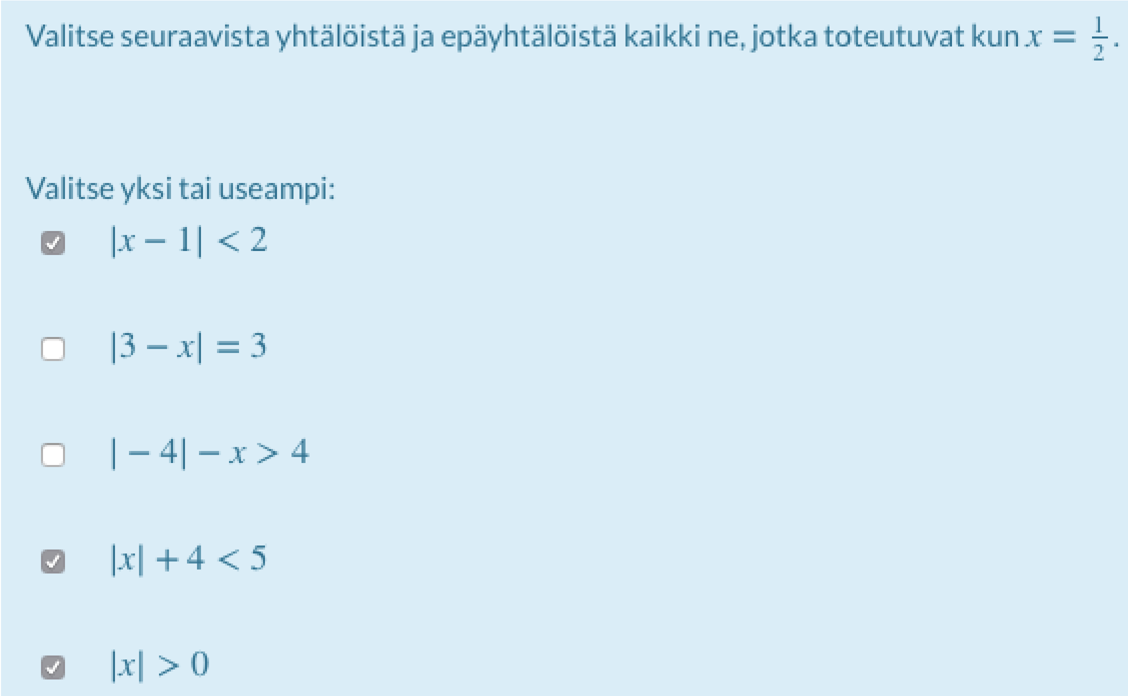
Moodle tarjoaa oppimisympäristönä monia erilaisia tehtävätyyppejä. Käytettäväksi valittiin kurssilla jo aiemminkin käytössä olleet ja hyväksi todetut monivalinta-, aukko-, pudotusvalikko- sekä stack-tehtävät. Näistä suurin osa on opiskelijoille jo entuudestaan tuttuja tehtävätyyppejä, joten heillä ei kurssilla mene energiaa tehtävien tekniseen suorittamiseen, vaan keskittymisen voi suunnata itse matematiikkaan. Yksi tehtäviä rajaava tekijä oli se, että opiskelijat saattavat tehdä kurssin myös muilla laitteilla kuin tietokoneella.

Kurssin tehtäviin haluttiin luoda mahdollisimman paljon vaihtelua, sillä opiskelijapalautteen mukaan se oli yksi kurssin hyvistä puolista. Pudotusvalikko- ja monivalintatehtävissä on valmiit vaihtoehdot, joista usein selviää esimerkiksi vastauksen suuruusluokka tai haluttu muoto, kun taas aukkotehtävissä tällaisia suuntaa antavia vinkkejä ei ole lainkaan. Tämä tekee monivalintatehtävistä aukkotehtäviä keveämpiä ja helpompia vastattavia. Toisaalta taas tietyt tehtävätyypit, kuten lausekkeen supistaminen, toimivat parhaiten monivalintatehtävinä.

Monivalintatehtäviä tehtiin kurssin monipuolistamiseksi useita erilaisia. Osassa tehtävistä piti valita yksi oikea ratkaisu, kuten Kuva 35. Monivalintatehtävä, jossa tehtävänantona "Valitse yksi".. Toisissa oikeita ratkaisuja saattoi olla useita, kuten Kuva 36. Monivalintatehtävä, jossa tehtävänantona "Valitse yksi tai useampi". Tällaisissa tehtävissä vääristä vastauksista sai kuitenkin miinuspisteitä siten, että jokaisen tehtävän vähimmäispistemäärä oli 0. Näin pidettiin yllä sitä, että opiskelijan oli joka kerta luettava tehtävänanto huolella ja käytävä läpi kaikki annetut vastausvaihtoehdot.



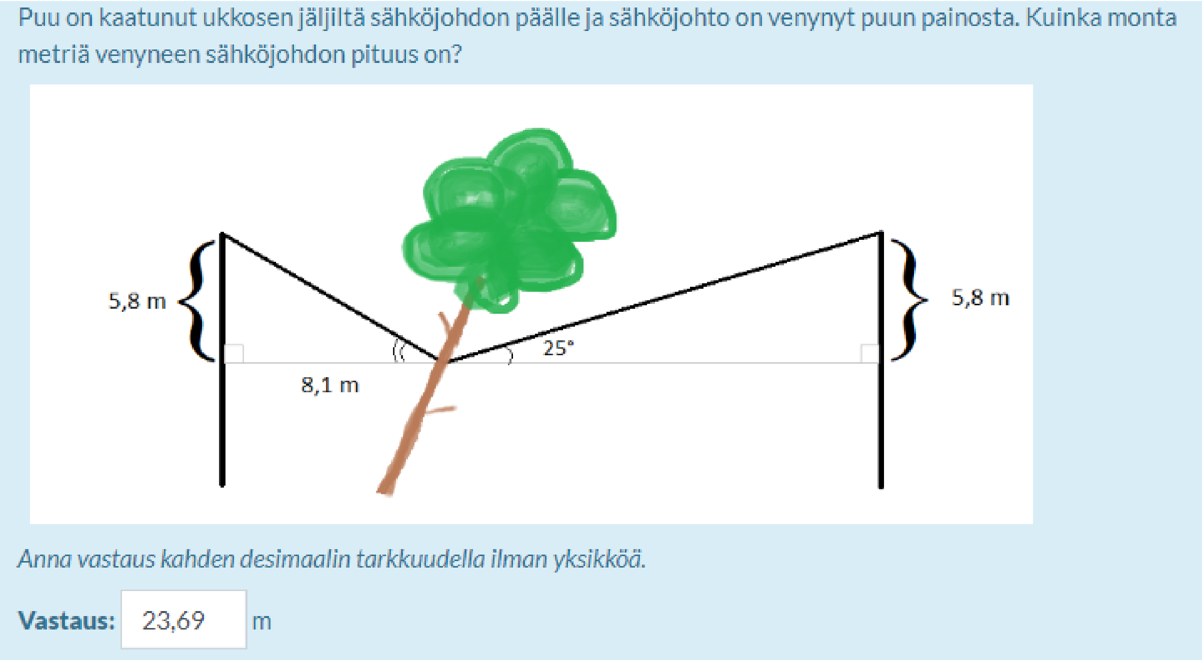
Kuva 35. Monivalintatehtävä, jossa tehtävänantona "Valitse yksi".



Kuva 36. Monivalintatehtävä, jossa tehtävänantona "Valitse yksi tai useampi".

Monivalintatehtäviä oli myös toteutettu siten, että pudotusvalikosta sai valita oikean vastauksen. Näin jo yhdellä tehtävätyypillä saatiin luotua monipuolisia tehtäviä. Yksi monivalintatehtävien heikkous on se, että opiskelijan voi olla mahdollista saada se oikein arvaamalla. Arvaamisen mahdollisuutta rajoitettiin siten, että vastausvaihtoehtoja oli lähes aina useampia kuin kaksi. Tehtävissä, joissa vaihtoehtoja oli vain kaksi, oli aina useampia alakohtia tai laskutehtävä monivalinnan lisäksi, jotta arvaamalla yhden kohdan oikein, ei ollut mahdollista saada ainakaan täysiä pisteitä koko tehtävästä. Toinen huono puoli monivalintatehtävissä on se, että ne saattavat olla ratkaistavissa poissulkutekniikalla, jolloin tehtävän oikea ratkaisumalli ei tule esille.

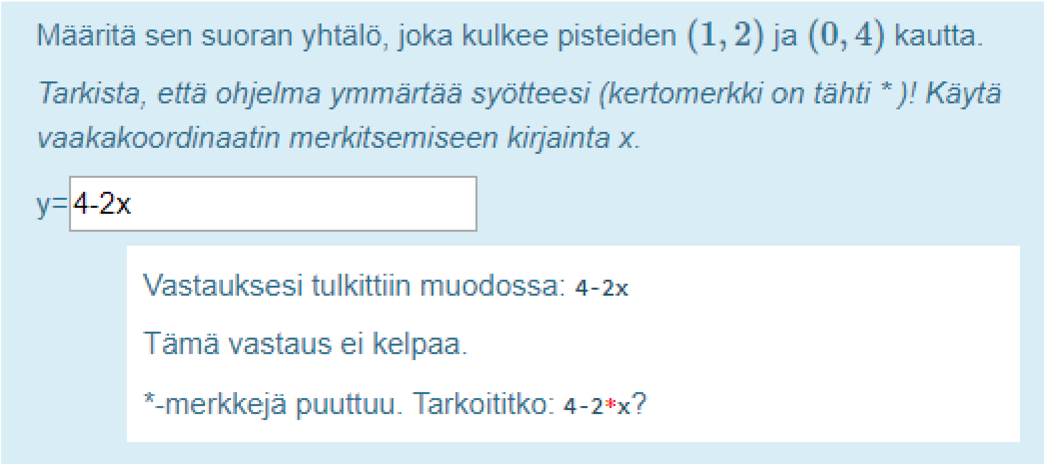
Laskutehtävät, joihin oli mahdollista vastata antamalla vain luku, toteutettiin suurimmaksi osaksi aukkotehtävinä. Tällaiset tehtävät vastaavat kaikista eniten oppikirjoista tuttuja matematiikan tehtäviä ja ne ovat myös tehtävien laatijoille helppoja toteuttaa. Tehtäviin on helppo syöttää kaikki sallitut oikeat ratkaisut, eikä tarvitse miettiä mahdollisia vääriä vastausvaihtoehtoja. Heikkous aukkotäydennystehtävissä taas on se, että ne ovat opiskelijoille melko armottomia. Tehtävissä kysytään vain lopputulosta, vaikka sen eteen pitäisikin tehdä pitkä laskutoimitus ja huolimattomuus kostautuu helposti, koska vain täysin oikea ratkaisu hyväksytään. Heikommalle opiskelijalle voisi olla helpompaa hahmottaa tehtävä ja mahdolliset virheensä, jos tehtävä olisi pilkottu pienempiin osiin ja kysyttäisiin myös joitakin välivaiheiden ratkaisuja. Tehtävän laatijan tulee esittää tarkat vastausohjeet vastauksen tarkkuudesta sekä esimerkiksi siitä millä tavalla mahdolliset murtoluvut tulee kirjoittaa. Lisäksi tehtävän laatijan tulee olla huolellinen, että hyväksyy esimerkiksi desimaaliluvun vastauksessa sekä pilkulla että pisteellä erotettuna, jotta tällaisella pienellä seikalla ei ole merkitystä opiskelijan tuloksessa. Aukkotehtävästä on mahdollista saada vain täydet tai ei lainkaan pisteitä. Esimerkki aukkotäydennystehtävästä Kuva 37.



Kuva 37. Aukkotäydennystehtävä yhteisen osion ensimmäisestä loppukokeesta.

Stack-tehtävät ovat tietokoneella tarkistettavia tehtäviä, jotka hyödyntävät Maxima-ohjelmistoa. Ne osaavat supistaa opiskelijan antaman vastauksen sievimpään mahdolliseen muotoon. Jos oikea vastaus oli esimerkiksi $\frac{1}{2}$, stack-tehtävä hyväksyi kaikki murtoluvut, jotka supistuivat muotoon $\frac{1}{2}$, kuten esimerkiksi $\frac{4}{8}$, $\frac{12}{24}$ ja $\frac{3}{2} - 1$.

Yksi stack-tehtävän hyvistä puolista oli myös se, että tehtävän pystyi laatimaan siten, että se arpoi annetuista luvuista vakion, jota tehtävässä käytetään. Tätä ominaisuutta hyödynnettiin tehtävässä, jossa opiskelijan tuli määrittää koordinaatistossa näkyvän suoran yhtälö. Kyseisessä tehtävässä stack ohjelmoitiin arpomaan suoran yhtälöön muuttujan x kerroin sekä vakio. Stack-tehtävässä kone tarkistaa opiskelijan syötteen, kertoo missä muodossa Maxima on tulkinnut vastauksen ja ehdottaa mahdollisia virheitä, mikäli kirjoitettu syntaksi on virheellinen, kuten Kuva 38.

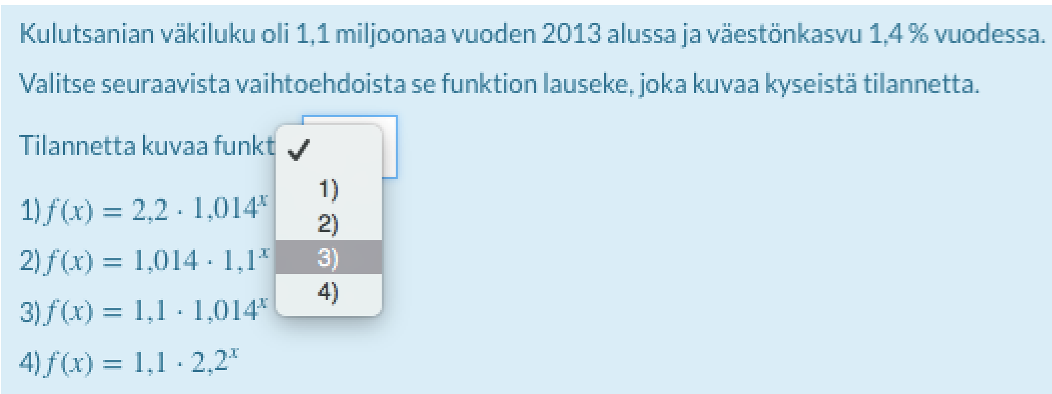


Kuva 38. Stack-tehtävä funktioiden kokeesta 4.

7.1.1. Moodlen rajoitteet tehtävien laadinnassa

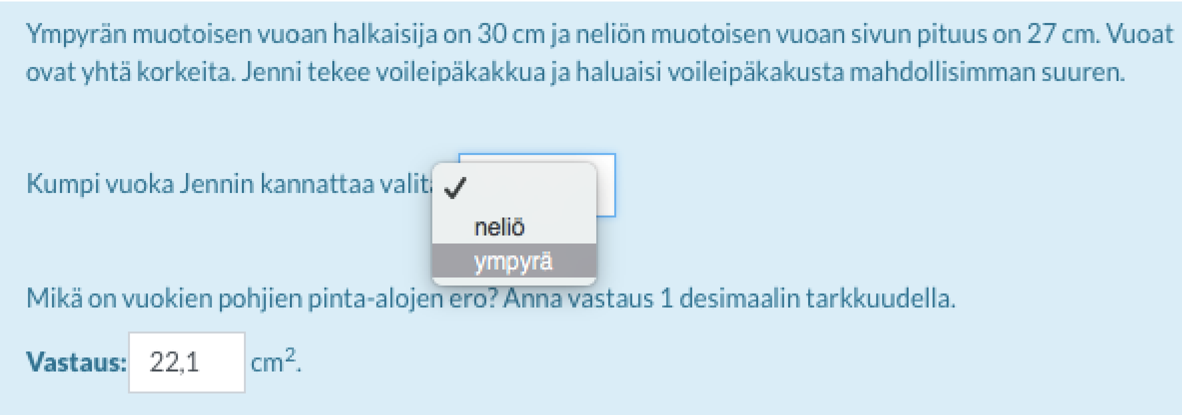
Matemaattisten tehtävien osalta kaavaeditorin käyttö vastauksessa olisi tuonut kurssille lisää opiskelijan omaa tuottamista, vähentänyt monivalintatehtävien määrää ja täten arvaamisen mahdollisuutta. Kaavaeditorin käyttö on toisaalta tällä hetkellä tuttua vain murto-osalle kurssia tekevistä opiskelijoista, sillä kuluneena keväänä suoritettiin vasta ensimmäinen sähköinen matematiikan yo-koe. Toisaalta hyvällä ohjeistuksella ja riittävän selkeällä kaavaeditorilla verkkokurssille olisi saatu monipuolisempia tehtäviä.

Moodlen tehtävätyypeissä oli käytössä matemaattisten kaavojen ladontamahdollisuus kaikkien tehtävätyyppien tehtävänannoissa sekä monivalintatehtävien vaihtoehdoissa. Koska kaavojen ladontamahdollisuutta ei ollut pudotusvalikkotehtävissä, jouduttiin ongelmaa hieman kiertämään kirjoittamalla vaihtoehdot tehtävänantoon ja pyytämällä vastauksena jotakin vaihtoehdoista, kuten Kuva 39.



Kuva 39. Harjoitustehtävä 7 eksponenttiyhtälöistä ja logaritmista.

Moodlessa ei pystynyt yhdistelemään tehtävätyyppejä vaan yksi tehtävä oli aina tiettyä tyyppiä. Aukkotehtävät ja pudotusvalikot olivat tehtävätyyppeinä ainoita, joissa kysymyksiä oli mahdollista tehdä useita saman tehtävän sisällä. Tehtäviä, joissa oli yhdistetty luku- ja pudotusvalikosta valittava vastaus, laadittiin kurssille paljon (Kuva 40). Näitä tehtäviä tehtiin, jotta monivalintatehtäviin saatiin lisättyä haastetta kysymällä vielä jokin tarkentava kysymys. Näin ollen täysien pisteiden saaminen ei onnistunut arvaamalla, vaan opiskelijan tuli osata vastata myös kysyttyyn laskutehtävään.



Kuva 40. Yhteisen osion geometrian kolmannen kokeen tehtävä 3.

MathMarket-verkkokurssilla olisi tahdottu yhdistellä muitakin kuin aukko- ja pudotusvalikkotehtäviä. Esimerkiksi aukko- ja monivalintatehtävien sekä stack- ja aukkotehtävien yhdistely olisi mahdollistanut uudentyyppisten tehtävien luomisen, kuten funktion lausekkeen muodostamisen ja sillä laskemisen yhdistäviä tehtäviä. Ilman tehtävätyyppien yhdistämismahdollisuutta tällaiset tehtävät jouduttiin toteuttamaan Kuva 41 tehtävän tavalla.

Kattilassa keitettiin vettä ruoanlaittoa varten. Veden lämpötila oli alussa 25° C ja se nousi 15 astetta minuutissa.

Veden keittoaika (min)	Veden lämpötila (°C)
0	25
1	40
2	55

a) Mikä oli veden lämpötila, kun vettä oli lämmitetty 3 minuuttia?

Vastaus: 70 °C

b) Muodosta veden lämpötilaa kuvaava lauseke, kun *x* on lämmitykseen käytetty aika minuuteissa ja *y* veden lämpötila asteina hetkellä *x*.

Vastaus: *f(x)*= 15 x +25

(Ensimmäiseen aukkoon x:n kerroin ja toiseen aukkoon vakio + tai - merkillä. Esimerkiksi $f(x) = -2x + 1$ *kirjoitettaisiin* ***[-2]*** *x* ***[+1]****).*

c) Kuinka monta minuuttia vettä täytyy lämmittää, jotta vesi kiehuu?

Vastaus: 5 minuuttia

Kuva 41. Harjoitustehtävä 9 funktioista. b) -kohdassa funktion lauseke muodostetaan ilman stack-tehtävän käyttöä.

7.2. Opiskelijoiden matematiikan osaamiseen liittyvien ongelmien huomiointi

Eri laitosten opettajien haastatteluissa kartoitettiin myös heidän huomaamiaan matematiikan osaamiseen liittyviä ongelmia. Näitä ongelmia haluttiin tuoda kurssilla esiin, joten lyhyen matematiikan osioihin valikoitui tehtäviä, joissa mainittuja ongelmia esiintyi. Esimerkiksi monivalinta- ja pudotusvalikkotehtävien vaihtoehtoihin lisättiin vääriksi vastauksiksi sellaisia ratkaisuja, joihin opiskelija mahdollisesti päätyisi tehdessään tehtävän haastatteluissa esiin tulleella tavalla. Esimerkiksi murtolukulauseketta sievennettäessä yleinen virhe on sieventää summasta, joten tehtäviin lisättiin vääräksi vaihtoehdoksi myös tällä tavalla saatu ratkaisu, kuten Kuva 42.

Mikä seuraavista vaihtoehdoista on lausekkeen $\frac{(a+b)-(a-b)}{3(a+b)}$ sievennetty muoto?

Valitse yksi:

- $\frac{-a+b}{3}$
- $\frac{1}{3a+b}$
- $\frac{2b}{3(a+b)}$
- $\frac{a+b}{3}$
- Ei mikään yllä olevista.

Kuva 42. Tehtävän ensimmäisessä vastausvaihtoehdossa murtoluvun nimittäjästä ja osoittajasta on poistettu tekijä (a+b) eli "supistettu summasta".

Väärät vastausvaihtoehdot voivat kuitenkin pahimmassa tapauksessa vahvistaa opiskelijoiden virheellisiä käsityksiä. Mikäli opiskelija löytää vastausvaihtoehtojen joukosta oman virheellisen ratkaisunsa, voi olla, etteivät he jää miettimään asiaa sen enempää tai kyseenalaista omaa vastaustaan.

Useassa haastattelussa kävi ilmi, että kyseisen alan opiskelijat eivät koe tarvitsevansa opinnoissaan matematiikkaa. Tämä ilmiö on huomattu esimerkiksi biologian ja tietotekniikan opiskelijoiden keskuudessa, joten tehtäviin pyrittiin tuomaan mahdollisimman paljon oikean elämän tilanteita sen tueksi, että matematiikka nähtäisiin osana jokapäiväistä elämää ja opintoja. Esimerkiksi Yliopisto - Lyhyt -osiossa alkeisalgebran tehtävässä tuli laskea proteiininäytteeseen tarvittavan laimentimen määrä (Kuva 43).

Kemian laboratoriossa on 200 ml proteiininäytettä, jonka proteiinipitoisuus on 3 %. Tarvitset näytteestä laimennoksen, jonka proteiinipitoisuus on 1 %.

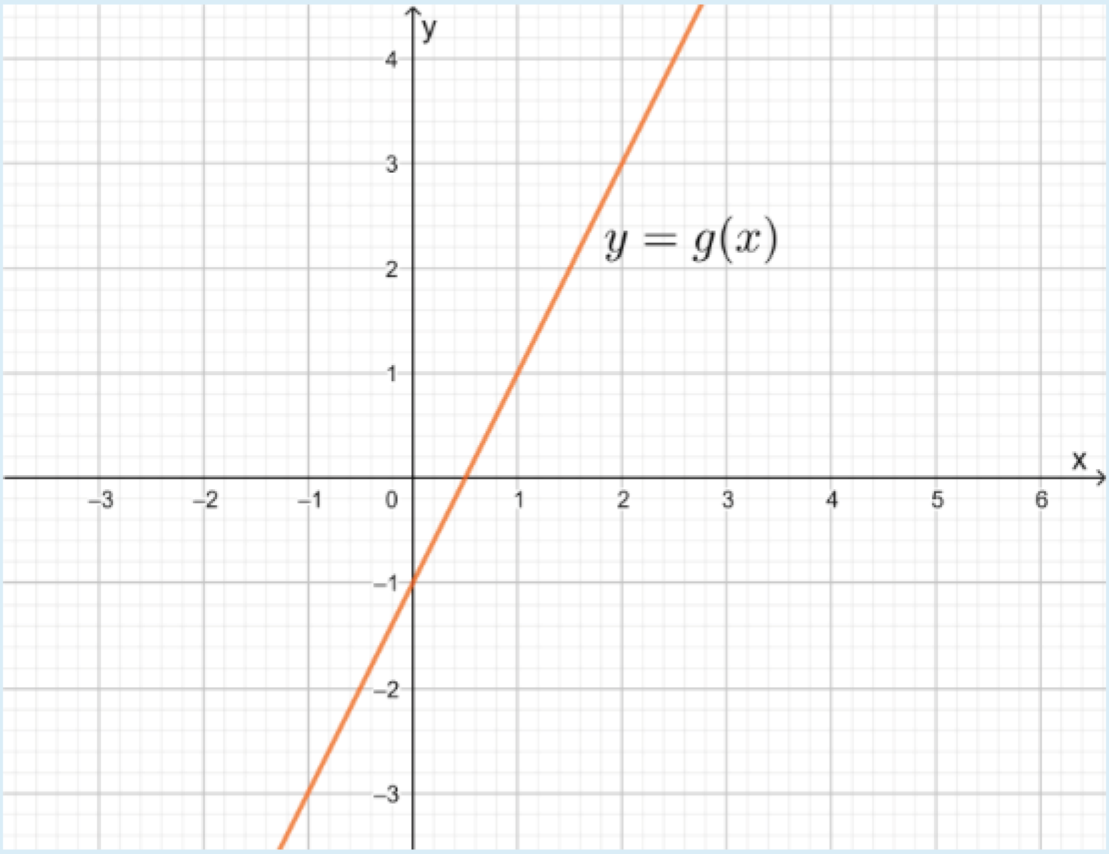
Kuinka monta millilitraa sinun on lisättävä näytteeseen laimenninta saadaksesi haluamasi laimennoksen? Anna vastaus kokonaisten millilitrojen tarkkuudella.

Laimenninta tulee lisätä 400 ml.

Kuva 43. Alkeisalgebran ensimmäisen kokeen tehtävä 7.

Koordinaatistossa opiskelijoilla menevät yliopisto-opettajien mukaan usein x- ja y-akselit sekaisin, kun kysytään esimerkiksi tiettyä koordinaatiston pistettä. Tätä mahdollista unohdusta huomioitiin funktioiden kuvaajien yhteydessä tehtävien vastausvaihtoehdoissa. Väärinä vaihtoehtoina Kuva 44 olevassa tehtävässä ovat pisteet, jotka olisivat suoralla, jos x- ja y-koordinaattiakselit luetaan väärin päin.

Valitse kaikki ne pisteet, jotka ovat funktion *g* kuvaajalla.

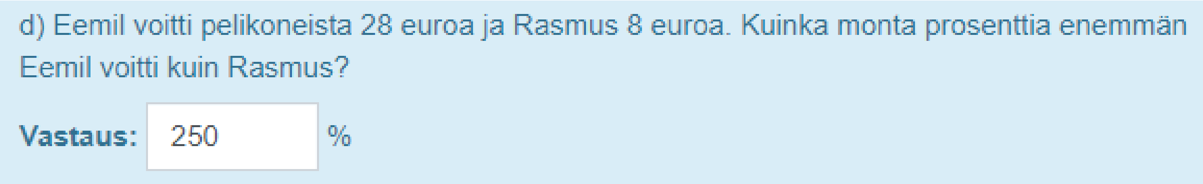


Valitse yksi tai useampi:

- [ ] (3, 2)
- [ ] (-1, 0)
- [x] (1, 1)
- [x] (2, 3)
- [x] (-1, -3)

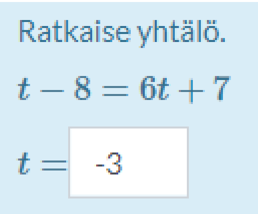
Kuva 44. Funktiot ensimmäisen kokeen tehtävä 1.

Prosenttilaskennassa tehtävän sanallinen muoto on tärkeä laskun kannalta. Opiskelijan ymmärryksen ollessa heikompi, opiskelija saattaa keksiä erilaisia sääntöjä, jotka usein toimivat tehtävän ratkaisemisessa, mutta eivät perustu mihinkään matemaattiseen faktaan. Tällainen keksitty sääntö on esimerkiksi jakaa aina pienempi luku isommalla luvulla. Tästä yritettiin opettaa opiskelijoita pois lisäämällä prosenttilaskennan aihealueelle tehtäviä, joissa isompi luku tuli jakaa pienemmällä luvulla ja vastaukseksi saatiin yli 100 %, kuten Kuva 45.



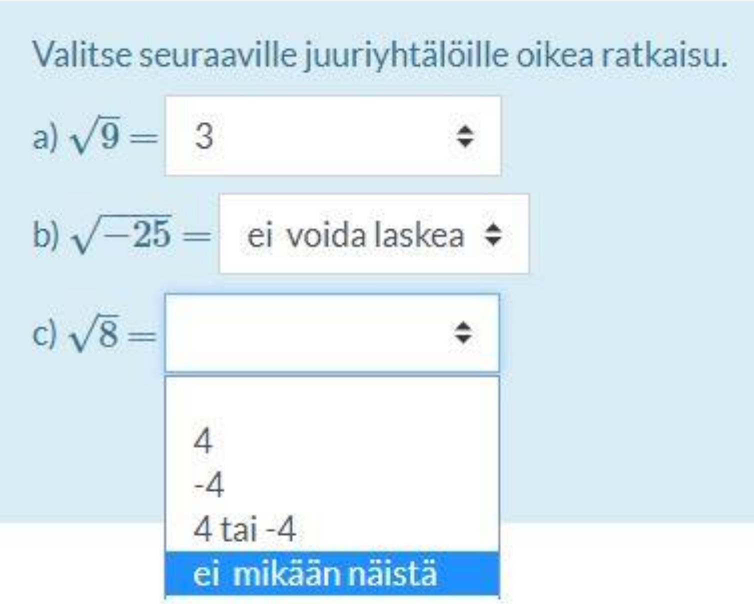
Kuva 45. Prosenttilaskennan tehtävä, jossa tulee jakaa suurempi luku pienemmällä.

Osalle opiskelijoista on haasteellista myös matematiikan merkintöjen lukeminen. Saattaa olla, että yhtälö osataan ratkaista silloin kun muuttujana käytetään tuttua kirjainta x, mutta jos tehtävä pidetään muuten täysin samana ja muuttujaksi vaihdetaan jokin muu kirjain, tehtävästä tuleekin opiskelijalle yhtäkkiä haastava. Tästä syystä Yhteinen - Lyhyt yhtälöt-aihealueeseen lisättiin yhtälönratkaisutehtäviä, joissa muuttujina käytettiin esimerkiksi kirjaimia *t*, *p* ja *h* (Kuva 46).

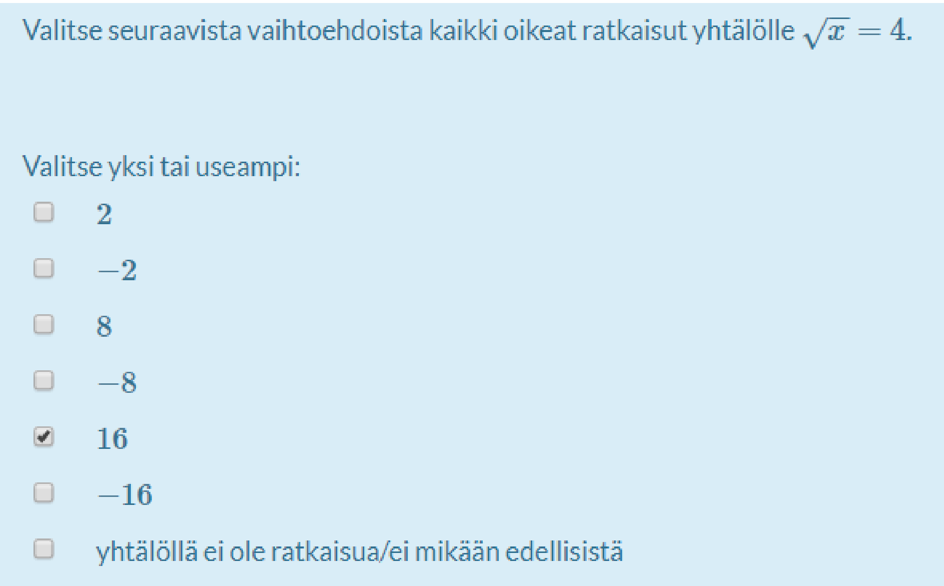


Kuva 46. Yhtälönratkaisutehtävä, jossa muuttujana kirjain t.

Kurssilla tahdottiin korostaa neliöjuuren ymmärrystä. Yhteinen - Lyhyt -osion aihealueessa juuret ja potenssit oli paljon neliöjuureen liittyviä tehtäviä. Yleisin virhekäsitys neliöjuureen liittyen on se, että neliöjuuresta voitaisiin saada negatiivisia lukuja. Neliöjuuren arvo on aina positiivinen tai nolla eikä neliöjuurta negatiivisesta luvusta ole määritelty. Neliöjuuren ominaisuudet unohdetaan usein sen takia, että esimerkiksi yhtälö $x^2 = 25$ ratkaistaan neliöjuuren avulla ja muuttujalle x saadaan kaksi eri ratkaisua, -5 ja 5. Tämä saattaa sekoittua ajatukseen siitä, että neliöjuuresta voitaisiin saada ulos kaksi eri lukua. Näitä neliöjuureen liittyviä virhekäsityksiä huomioitu esimerkiksi tehtävissä, jotka ovat kuvissa Kuva 47 ja Kuva 48.



Kuva 47. Juuret ja potenssin kolmannen kokeen tehtävä 2.



Kuva 48. Juuret ja potenssit ensimmäisen kokeen tehtävä 4.

8. Malliratkaisujen laadinta harjoitustehtäviin

Jokaiset harjoitustehtävät, jotka kurssille laadittiin, sisälsivät kattavat malliratkaisut. Malliratkaisut tulivat opiskelijoille näkyviin heti jokaisen harjoitustehtävän jälkeen, kun he olivat lukinneet tehtävän vastauksen. Kaikille näytettävät ratkaisut toimivat ikään kuin teorian pakkosyöttönä myös heille, jotka eivät tutustu materiaalikirjaan lainkaan. Tehtävien malliratkaisuissa pyrittiin käyttämään lukion lyhyen matematiikan oppikirjoista tuttua kieltä. Pääasiallisena lähteenä tehtävien ja malliratkaisujen laadintaan käytettiin Otavan Huippu -kirjasarjaa. Sen lisäksi apuna käytettiin myös Otavan pitkän matematiikan kirjasarjaa Juuri sekä yläkoulun Laskutaito-kirjoja.

Koska opiskelijoiden haluttiin oppivan myös tekemistään virheistä, olivat malliratkaisut yksi kurssin tärkeimmistä opetuksellisista keinoista. Ratkaisujen laadintaan ja korjaukseen käytettiinkin tästä syystä reilusti työaikaa ja niitä pohdittiin yhdessä työn ohjaajien, Annin ja Petrin, kanssa. Malliratkaisujen avulla opiskelijat pystyvät itse tarkastelemaan, missä ovat mahdollisesti itse joutuneet tehtävässä hakoteille ja näin oppimista tapahtuu myös silloin, kun tehtävää ei ole osattu ratkaista oikein. On kuitenkin mahdollista, että taitavat opiskelijat sivuuttavat malliratkaisut täysin, jos osaavat tehtävät hyvin eikä teorian pakkosyöttö onnistu. Olisi kuitenkin tärkeää, että myös tehtävän osanneet opiskelijat lukevat malliratkaisun huolellisesti läpi, sillä oppimista voi tapahtua heidänkin kohdallaan malliratkaisun kautta. Usein matematiikassa sama tehtävä voidaan ratkaista usealla eri tavalla ja näiden tapojen ymmärtäminen syventää matemaattista osaamista. Kurssin rakenteen ansiosta opiskelijat pystyvät palaamaan harjoitustehtävien malliratkaisuihin kokeita tehdessään ja etsimään materiaalikirjan lisäksi apua niistä, mikäli kokeissa tulee vastaan tehtäviä, joita he eivät osaa ratkaista.

Malliratkaisujen laadinnan haaste saada ratkaisut palvelemaan kaiken tasoisia opiskelijoita. Käytetty kieli pyrittiin pitämään yksinkertaisena ja ratkaisun välivaiheita kirjattiin ylös niin, että ratkaisun seuraaminen olisi heikommallekin opiskelijalle helppoa. Kurssia suorittavat opiskelijat tulevat useista eri oppilaitoksista ja paikkakunnilta, joissa opetustyylit ja matematiikassa käytetyt merkinnät ovat voineet olla hyvinkin moninaisia. Malliratkaisuissa on käytetty selkeitä ja johdonmukaisia merkintätapoja ja siten johdateltu opiskelijoita matemaattisesti oikeanlaisiin merkintöihin. Useimmissa ratkaisuissa esiteltiin vain yksi tapa ratkaista tehtävä, mutta jos tehtävän ratkaisuun käytetään usein tiettyjä eri tapoja tai usean ratkaisumallin antaminen oli tehtävän kannalta järkevää, lisättiin malliratkaisuun toinenkin ratkaisutapa, kuten Kuva 49. Vaikka tehtävät olisi mahdollista ratkaista usealla eri tavalla, luotettiin siihen, että opiskelijat pystyvät hahmottamaan tehtävän idean valitun tavan avulla. Malliratkaisujen tavoitteena oli auttaa opiskelijaa hahmottamaan omassa ajattelussaan tapahtunut mahdollinen virhe, vaikka opiskelijan oma ajatteluprosessi olisikin ollut erilainen kuin malliratkaisussa esitetty.

a) Sara, Juulia, Sauli, Eemil ja Salla ovat vaeltamassa. He sopivat, että kaksi heistä lähtee hakemaan kaivosta vettä. Kuinka monella eri tavalla veden hakijapari voidaan valita?

Vastaus: 10 eri tavalla.

b) Loput kolme retkeilijää jäävät tekemään ruokaa. Heistä yksi valmistelee tulen, yksi kokoaa trangian ja yksi lähtee pilkkomaan puita. Kuinka monella eri tavalla he voivat työjaon tehdä?

Vastaus: 6 eri tavalla.

a) Vedenhakijaparin järjestyksellä ei ole merkitystä, joten lasketaan kuinka monta erilaista kahden henkilön paria viiden henkilön ryhmästä voidaan muodostaa.

Joukosta, jossa on *n* alkiota, voidaan valita *k* alkiota sisältävä osajoukko eli *k*-kombinaatio $\binom{n}{k}$ eri tavalla.

Viidestä vaeltajasta voidaan muodostaa $\binom{5}{2} = 10$ erilaista kahden hengen vedenhakijaparia.

Koska joukko on niin pieni, kaikki vedenhakijaparit voidaan myös luetella:

- Sara ja Juulia
- Sara ja Sauli
- Sara ja Eemil
- Sara ja Salla
- Juulia ja Sauli
- Juulia ja Eemil
- Juulia ja Salla
- Sauli ja Eemil
- Sauli ja Salla
- Eemil ja Salla

b) Kun tehdään useita peräkkäisiä valintoja, vaihtoehtojen kokonaismäärä saadaan kertomalla eri valintavaiheessa olevien vaihtoehtojen lukumäärät.

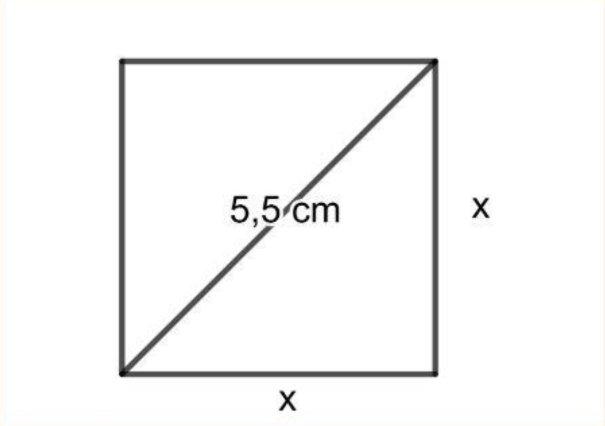
Ensimmäisessä vaihtoehdossa eli tulen teossa vaihtoehtoja on 3, toisessa eli trangian kokoamisessa enää 2 ja kolmannessa eli puiden pilkonnassa 1. Työnjakoon on siis $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eri vaihtoehtoa.

Kuva 49. Esimerkki malliratkaisusta, jossa on esitelty kaksi ratkaisutapaa.

Malliratkaisuihin lisättiin hahmotusta helpottavia kuvia ja kerrottiin myös maltillisesti tehtävän ulkopuolisia tietoja asiasta yleisesti. Myös värit auttoivat malliratkaisun selkiyttämisessä ja lihavointia käytettiin korostamaan ratkaisun olennaista asiaa kuten kuvissa Kuva 50 ja Kuva 51.

Neliön muotoisen aitauksen lävistäjäksi halutaan 5,5 m. Kuinka monta 5 metrin aitarullaa tarvitaan, kun tehdään neljä erillistä aitausta?

Vastaus: 13 ✔ rullaa.



Kun neliön lävistäjän pituus tiedetään, Pythagoraan lauseen avulla saadaan selvitettyä sivun pituus. Merkitään neliön sivun pituutta muuttujalla *x* ja selvitetään sivun pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + x^2 = 5{,}5^2$$
$$2x^2 = 5{,}5^2 \qquad || : 2$$
$$x^2 = \frac{5{,}5^2}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{5{,}5^2}{2}}$$

Neliön sivun pituus ei voi olla negatiivista, joten negatiivinen vastaus hylätään. Neliön sivun pituus on siis $\sqrt{\frac{5{,}5^2}{2}}$ m. Yhtä aitausta varten aitaa tarvitaan $4 \cdot \sqrt{\frac{5{,}5^2}{2}}$ m, joten neljää aitausta varten tarvitaan $4 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{5{,}5^2}{2}}$ m $\approx$ 62 m.

Aita myydään 5 metrin rullissa, joten rullia tarvitaan $\frac{62\ m}{5\ m/rulla} = 12{,}4$ rullaa. Tulos täytyy pyöristää ylöspäin, jotta materiaali riittää kaikkiin aitoihin eli vastaus on **13** rullaa.

Kuva 50. Esimerkki malliratkaisusta, johon on lisätty tehtävää selkiyttävä apukuva.

Ratkaise yhtälö. *Miinusmerkkinä toimii - ja jos vastauksena on murtoluku, käytä jakoviivana merkkiä / , esim. 3/2.*

a) $3x + 1 = 2x + 5$

x= 4

b) $-(x - 1) = 5x - 11$

x= 1

c) $\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$

x= 8

a) Järjestetään muuttujaa sisältävät termit ja vakiotermit eri puolille yhtälöä ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 2x + 5 \\ 3x - 2x &= 5 - 1 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus on $x = 4$.

b) Ratkaistaan yhtälö avaamalla ensin sulkeet. Tämän jälkeen järjestetään muuttujaa sisältävät termit ja vakiotermit eri puolille yhtälöä ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} -(x - 1) &= 5x - 11 \\ -x + 1 &= 5x - 11 \\ -x - 5x &= -11 - 1 \\ -6x &= -12 \qquad || : (-6) \qquad \text{Jaetaan muuttujan kertoimella.} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus on $x = 2$.

c)
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \frac{6}{x} \qquad \text{Poistetaan nimittäjät kertomalla ristiin.} \\ 3 \cdot x &= 6 \cdot 4 \\ 3x &= 24 \qquad \text{Jaetaan muuttujan kertoimella.} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Vastaus on $x = 8$.

Apua yhtälöiden ratkaisemiseen seuraavasta linkistä:
https://moodle.jyu.fi/mod/book/view.php?id=169732&chapterid=3416.

Kuva 51. Esimerkki malliratkaisusta, jossa värien avulla on pyritty helpottamaan ratkaisun seuraamista.

9. Kehitysideoita MathMarket-verkkokurssille

Mikäli kurssille tahdottaisiin lisätä opiskelijan omaa reflektointia, voisi sille lisätä esimerkiksi jonkinlaisen kattavamman itsearvioinnin tai muokata kysymyksiä enemmän itsereflektointia herättelevään suuntaan. Tällä hetkellä palautelomakkeissa on vain yksi monivalintakysymys suoraan opiskelijan omasta toiminnasta: “Kuinka tyytyväinen olet omaan suoriutumiseesi?”. Vastausvaihtoehdot tähän olivat “olin liekeissä”, “meni melko mukavasti”, “yritin parhaani”, minussa on potentiaalia parempaankin” sekä “tarvitsen vielä paljon harjoitusta”. Tämän lisäksi palautelomakkeessa on avoimet kysymykset siitä, mikä osioissa on ollut hankalaa ja mikä helppoa. Niiden avulla opiskelijat voivat mahdollisesti löytää omia kehityskohtiaan, mutta ne ovat tällä hetkellä käytössä enimmäkseen kurssin kehittäjien avuksi.

Moodlessa annetun palautteen perusteella opiskelijat olisivat toivoneet lisää harjoitustehtäviä ennen kokeen suorittamista. Lisäharjoitustehtävillä kyettäisiin myös tukemaan paremmin heikompia opiskelijoita ja vahvistamaan heidän itseluottamustaan. Tästä syystä harjoitustehtävien lisääminen voisi kehittää kurssia parempaan suuntaan. Jos opiskelija on esimerkiksi saanut alle 80 % harjoitustehtävien maksimipisteistä, voisi häntä tehtävien palautteessa kehottaa harjoittelemaan vielä lisää ja antaa linkin vapaaehtoisiin lisäharjoitustehtäviin. Se vahvistaisi myös yksilöllisempää palautteen antoa, mikä parantaa opiskelumotivaatiota (Vuorinen 1993, 25).

Haastavampiin tai monivaiheisiin tehtäviin voisi lisätä vihjeen, jonka opiskelija saisi avata tarvitessaan. Joskus pitkä sanallinen tehtävä voi tuntua vaikealta aloittaa, eikä opiskelija hahmota, mitä kaikkia asioita tehtävän ratkaisemiseksi tulee selvittää. Vihje tehtävän alussa voisi sisältää esimerkiksi ohjeen tehtävän alkuun pääsemiseksi tai väärin menneen tehtävän vastauksessa voisi olla vastaukseen liittyvä huomio, kuten “muistithan, että tehtävän muuttolaatikossa ei ole kantta?”. Aukkotehtäviä, joissa nyt kysytään vain lopullista vastausta, voisi pilkkoa pienempiin osiin ja kysyä myös tehtäviin liittyviä välivaiheiden tuloksia lopullisen vastauksen lisäksi. Näin opiskelijat voisivat saada tehtävistä osittaisia pisteitä. Lisäksi opiskelijan voisi olla helpompi huomata omasta ratkaisustaan kohta, jossa virhe on tapahtunut verratessaan sitä malliratkaisuun, kun hänen on ollut pakollista kirjoittaa myös saamiaan välituloksia ylös.

Stack-tehtävien lisäyksellä voisi saada kurssiin hieman enemmän vuorovaikutteisuutta, sillä näihin tehtäviin on mahdollista syöttää oikean ratkaisun lisäksi myös väärien vastauksien jälkeen annettavia ohjeita. Esimerkiksi yhtälön ratkaisussa tehtävään voidaan laatia erilaisia tarkistuspuita riippuen opiskelijan antamasta vastauksesta. Näissä tarkistuspuissa voidaan ohjata opiskelijaa tarkistamaan, onko esimerkiksi lausekkeen sulut poistettu oikein tai onko opiskelijalle tullut laskussa merkkivirhe. Stack-tehtävillä voisi vähentää myös monivalintatehtävien määrää ja pyytää opiskelijaa kirjoittamaan pyydetty vastaus itse vastausvaihtoehtojen sijaan. Nyt kurssilla on vain muutamia stack-tehtäviä ja ne ovat lähinnä suoran yhtälöön liittyviä.

MathMarket-verkkokurssi palvelee kevään 2019 uudistuksen jälkeen paremmin lyhyen matematiikan lukeneita opiskelijoita kuin aiemmin. Uudistuksen jälkeen myös ammattikorkeakoulun alakohtaiset osiot on suunniteltu yksilöllisesti juuri tietyn alan opiskelijoille. Seuraavat kurssin laajentumismahdollisuudet voisivat olla yliopiston osioon tulevat pääainekohtaiset osiot. Esimerkiksi tietotekniikan, biologian ja kemian opiskelijoille voitaisiin tehdä omat osionsa, joissa olisi juuri näitä aloja varten valittuja tehtäviä ja aihesisältöjä. Verkkokurssin tavoitteen selkiyttäminen sitä suorittaville opiskelijoille auttaisi opiskelumotivaatioon. On tärkeää, että kurssista kerrottaessa opiskelijoille olisi selvää miksi kurssi on tärkeä ja ketä varten sitä suoritetaan. Matematiikan kertaus ennen opintojen aloittamista voi tuntua vieraalta ajatukselta esimerkiksi uudelle biologian opiskelijalle, joten kurssin tavoitteiden tunteminen selkiyttäisi opiskelijalle kurssista saatavaa hyötyä.

Tällä hetkellä pitkän matematiikan kertausosioiden tehtävänannoissa on käytetty melko paljon kuvakaappauksia. Nämä kuvakaappaukset olisi hyvä vaihtaa ja syöttää tehtävänanto suoraan Moodleen tekstin ja kaavojen muodossa, jolloin tehtävä skaalautuu aina opiskelijan näytön mukaan. Näin varmistutaan siitä, että opiskelija näkee koko tehtävänannon eikä siitä jää puuttumaan osia, kuten palautteen mukaan joillakin opiskelijoilla oli käynyt.

10. Lopuksi

Saimme lyhyen matematiikan kertausosioiden teosta paljon hyviä oppeja tulevaa matematiikan opettajan uraamme varten. Tehtäviä laatiessamme huomasimme, kuinka paljon pienillä asioilla on merkitystä ja opimme miettimään, mikä tehtävän tarkoitus on ja mitä sillä halutaan opettaa. Kurssilla opimme tunnistamaan isoista kokonaisuuksista olennaisimmat asiat ja tekemään valintoja esimerkiksi haastavuustason suhteen. Työ opetti meille hyvin sen, millaisiin asioihin verkkokurssia tehdessä tulee kiinnittää huomiota ja kuinka sellaisen kehitys tapahtuu Moodle-oppimisympäristössä.

Tärkeää koko prosessissa oli yhteistyö, jota pääsimme tekemään eri alojen opettajien ja ohjaajiemme kanssa, unohtamatta meidän keskinäistä yhteistyötämme. Osioiden teon aikana opimme toisiltamme paljon uutta, sillä ajattelimme saman asian usein eri tavalla. Siitä saimme arvokasta näkemystä esimerkiksi tehtävien ja malliratkaisujen laadintaan. Kyseenalaistimme myös rohkeasti toistemme laatimia tehtäviä ja ratkaisuja, ja opimme perustelemaan valintojamme ja tavoitettamme tehtävän taustalla.

Työntekoon vaikutti paljon se, että olimme kehittämässä olemassa olevaa kurssia emmekä luomassa täysin uutta. Tietyt kurssin asettamat raamit ja ennalta työryhmän kesken sovitut asiat ohjasivat työtämme. Se oli avuksi työn alkuun pääsemisessä, sillä pääsimme heti aloittamaan uusien kertausosioiden teon, mutta toisaalta ajatteluprosessiamme ohjasi turhan vahvasti se, että yritimme tehdä osioista samanlaisia mitä aiemmat osiot olivat. Varmasti tilaa uusille ajatuksille olisi ollut, mutta ajankäyttö oli rajattua ja tärkeintä oli saada kurssi valmiiksi ennen kesää 2019, jolloin uudet opiskelijat käyttävät taas kurssia. Toisaalta meidän päätettävissämme oli, millaisia tehtävätyyppejä osioihin valikoituu ja miten toivottuja sisältöjä yhdistetään toimiviksi ja loogisiksi aihealueiksi.

Haluamme kiittää ohjaajiamme Anni Laitista ja Petri Juutista asiantuntevasta, tarkkanäköisestä ja eteenpäin vievästä ohjauksesta. Saimme teidän kommenteistanne tärkeitä oivalluksia, joita tulemme vielä pitkään urallamme muistamaan. Kiitos jokaisesta keskusteluntäyteisestä tunnista, joustavista aikatauluista sekä erinomaisesta tavoitettavuudesta. Työ oli mukava tehdä asiasta aidosti välittävässä ohjauksessa, jossa sai apua aina kun sitä tarvitsi.

Haluamme kiittää myös toisiamme, sillä jaksoimme koko prosessin ajan puhaltaa yhteen hiileen, toisiamme tukien ja toisiamme eteenpäin vieden. Emme lannistuneet toisen välillä turhan kärkkäistäkin kommenteista vaan ymmärsimme, että näiden kommenttien avulla saamme kurssista entistä paremman. Arvostimme tasapuolisesti molempien näkemyksiä ja kuuntelimme mitä toisella on sanottavana. Tästä yhteistyöstä saimme paljon eväitä urallemme yhteisopettajuuteen ja luulemme, että prosessi tulee olemaan vielä pitkään mielissämme niin tehtävien kuin malliratkaisujenkin laadinnassa.

LÄHTEET

Hauhia, Milla, Niemi, Kalle ja Suonto, Henri. 2018. ”Ponnahduslauta uusiin matemaattisin haasteisiin: korkeakouluopintoihin valmistavan matematiikan verkkokurssin kehittäminen.” Pro gradu –tutkielma, Jyväskylän yliopisto. http://urn.fi/URN:NBN:fi:jyu-201801291351.

Hähkiöniemi, Markus ym. 2016-2018. Juuri-kirjasarja. Otava.

Kauppila, Reijo. 2003. *Opi ja opeta tehokkaasti*. *Psyykkinen valmennus oppimisen tukena,* PS-kustannus, Jyväskylä, 274 s.

Kurvinen, Sampsa ym. 2016-2018. Huippu-kirjasarja. Otava.

Laurinolli, Teuvo ym. 1999-2001. Laskutaito -kirjasarja. WSOY.

Lindblom-Ylänne ym. 2009. Sari Lindblom-Ylänne & Anne Nevgi (toim.) *Yliopisto-opettajan käsikirja,* WSOY, Helsinki 424 s.

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.

Nevgi, Anne ja Tirri, Kirsi. 2003. *Hyvää verkko-opetusta etsimässä.* Suomen kasvatustieteellinen seura. Kasvatusalan tutkimuksia 15. 172 s.

Valmari, Antti ja Rantala, Johanna. 2019. *Arithmetic, Logic, Syntax and MathCheck.* Informaatioteknologian tiedekunta, Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä.

Vuorinen, Ilpo. 1993. *Tuhat tapaa opettaa.* Menetelmäopas opettajille, kouluttajille ja ryhmänohjaajille. Resurssi. 227 s.

LIITTEET

Liite 1. Kysely yliopistomatematiikkaan valmistavasta kurssista.

Liite 2. Lyhyen matematiikan kertausosioiden harjoitustehtävät ja ensimmäiset kokeet.

Liite 1.

Kysely yliopistomatematiikkaan valmistavasta kurssista

Kysely Jyväskylän yliopiston opiskelijoille, jotka ovat tehneet yliopistomatematiikkaan valmistavan verkkokurssin

*Pakollinen

1. **Milloin teit yliopistomatematiikkaan valmistavan verkkokurssin?** *
   Merkitse vain yksi soikio.
   - ennen opintojen aloittamista
   - syyskuun aikana
   - Muu: ______________________

2. **Miksi teit kurssin?** *
   Valitse kaikki sopivat vaihtoehdot.
   - [ ] Jotta saisin opintopisteitä
   - [ ] Kerratakseni lukiossa opittuja asioita
   - [ ] Luulin sen olevan pakollinen
   - [ ] Sitä suositeltiin minulle
   - [ ] Arvioidakseni omaa osaamistani
   - [ ] Muu: ______________________

3. **Oletko samaa mieltä seuraavan väitteen kanssa? "Verkkokurssista oli hyötyä valitessani aloitanko yliopistolla matematiikan opinnot Calculus- vai JMA-kursseista"** *
   Merkitse vain yksi soikio.
   - Täysin samaa mieltä
   - Jokseenkin samaa mieltä
   - En osaa sanoa
   - Jokseenkin eri mieltä
   - Täysin eri mieltä

4. **Täydennä halutessasi yllä olevaa vastausta, esimerkiksi miten kurssi vaikutti valintoihisi tai miksi se ei vaikuttanut. Kerro myös oletko ollut tyytyväinen tekemääsi valintaan.**

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

5. **Valitse ne käymäsi kurssit, joihin koet saaneesi hyötyä verkkokurssin käymisestä** *
Valitse kaikki sopivat vaihtoehdot.

- [ ] Calculus 1 tai 2
- [ ] Johdatus matemaattiseen analyysiin 1 tai 2
- [ ] Calculus 3
- [ ] Lineaarinen algebra ja geometria 1 tai 2
- [ ] Lukuteoria
- [ ] Muu: ____________________

6. **Valitse seuraavista tehtäviin liittyvistä väittämistä ne, joiden kanssa olet samaa mieltä** *
Valitse kaikki sopivat vaihtoehdot.

- [ ] Tehtävät olivat minulle liian helppoja
- [ ] Tehtävissä oli juuri sopivasti haastetta
- [ ] Tehtävät olivat aivan liian vaikeita
- [ ] Tehtäviä olisi saanut olla enemmän
- [ ] Tehtäviä oli hyvä määrä
- [ ] Tehtäviä oli aivan liikaa

7. **Kerro tässä, jos sinulla on kurssin tehtävistä jotakin sanottavaa**

____
____
____
____
____

8. **Valitse seuraavista loppukokeeseen liittyvistä väittämistä ne, joiden kanssa olet samaa mieltä** *
Valitse kaikki sopivat vaihtoehdot.

- [ ] Loppukoe kokosi kurssin asiat hyvin
- [ ] Loppukoetta tehdessäni huomasin missä asioissa tarvitsen vielä kertausta
- [ ] Loppukoe oli minulle liian haastava
- [ ] Loppukoe tuntui turhalta muiden kokeiden lisäksi
- [ ] Muu: ____________________

9. **Vapaa sana verkkokurssiin liittyen:**

____
____
____
____
____

10. **Mikäli sinuun saa olla yhteydessä tarkempaa haastattelua varten, laita sähköpostiosoitteesi tähän, kiitos :)**

Liite 2.
Kertausosioiden Yhteinen - Lyhyt ja Yliopisto - Lyhyt aihealueiden harjoitustehtävät ratkasuineen ja ensimmäiset kokeet.

Yhteinen - Lyhyt 1. Peruslaskutoimitukset

Harjoitustehtävä 1. *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Laske $\frac{2}{5} + \frac{2}{3}$.

(1) $\frac{1}{4}$
(2) $\frac{1}{2}$
(3) $1\frac{1}{15}$
(4) $\frac{4}{15}$
(5) $1\frac{1}{3}$
(6) Ei mikään näistä

RATKAISU:
Lasketaan murtolukujen yhteenlasku eli summa laventamalla murtoluvut ensin samannimisiksi ja laskemalla sen jälkeen osoittajat yhteen. Muutetaan saatu murtoluku lopuksi sekaluvuksi.

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = {}^{3)}\frac{2}{5} + {}^{5)}\frac{2}{3} = \frac{6}{15} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

Oikea vastaus on **vaihtoehto (3)**.

Harjoitustehtävä 2. *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Laske $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}$

(1) $\frac{8}{27}$
(2) $\frac{10}{9}$
(3) $\frac{4}{27}$
(4) $\frac{8}{9}$
(5) Ei mikään näistä

RATKAISU:
Lasketaan murtolukujen kertolasku eli tulo kertomalla osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 9} = \frac{8}{27}$$

Saatu murtoluku on jo supistetussa muodossa. Oikea vastaus on **vaihtoehto (1)**.

Harjoitustehtävä 3. *Aukkotehtävä*
a) Mikä on luvun $\frac{7}{9}$ vastaluku?
b) Mikä on luvun -5 vastaluku?

RATKAISU:
Luvun a vastaluku on $-a$. Vastaluku saadaan muodostettua vaihtamalla luvun etumerkki. Lukusuoralla luku ja sen vastaluku ovat yhtä kaukana nollasta, mutta sen vastakkaisilla puolilla.

a) Oikea vastaus on $-\frac{7}{9}$.
b) Oikea vastaus on 5.

Harjoitustehtävä 4.*Aukkotehtävä*
a) Mikä on luvun $\frac{3}{8}$ käänteisluku?
b) Mikä on luvun 3 käänteisluku?

RATKAISU:
Luvun ja sen käänteisluvun tulo on 1. Luvun a käänteisluku on $\frac{1}{a}$, kun $a \neq 0$. Murtoluvun käänteisluku saadaan vaihtamalla osoittaja ja nimittäjä keskenään. Luvun $\frac{c}{b}$ käänteisluku on siis $\frac{b}{c}$.

a) Oikea vastaus on $\frac{8}{3}$.
b) Oikea vastaus on $\frac{1}{3}$.

Harjoitustehtävä 5. *Pudotusvalikko*
a) Laske lukujen 3 ja 5 erotus

(1) -2
(2) 2

b) Laske lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{3}$ osamäärä.

(1) $\frac{1}{3}$
(2) $-\frac{3}{2}$
(3) $\frac{3}{4}$
(4) $-\frac{2}{6}$

RATKAISU:
a) Erotus tarkoittaa lukujen vähennyslaskua. Lukujen 3 ja 5 erotus on $3 - 5 = -2$. Oikea vastaus on -2.

b) Osamäärä tarkoittaa jakolaskua. Lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{3}$ osamäärä on $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$.

Lasketaan lausekkeen arvo muuttamalla jakolasku kertolaskuksi korvaamalla jakaja käänteisluvullaan ja laskemalla murtolukujen tulo kertomalla osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}.$$

Oikea vastaus on $\frac{3}{4}$.

Harjoitustehtävä 6. *Pudotusvalikko*
Laita seuraavat murtoluvut suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan.
a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$
b) $-\frac{2}{7}, \frac{5}{14}, \frac{1}{7}$

RATKAISU:
Koska ensimmäisissä kolmessa luvussa kaikkien lukujen osoittajat ovat yhtä suuria, voidaan vertailla nimittäjiä. Mitä suurempi nimittäjän arvo on, sitä useampaan osaan osoittajassa oleva luku jaetaan. Luku siis pienenee, kun nimittäjää kasvatetaan.

Oikea vastaus on siis $\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ eli b)< c)< a).

Huomataan, että $-\frac{2}{7} < 0$, joten se on selvästi luvuista pienin, koska muut kaksi ovat positiivisia. Lavennetaan loput kaksi samannimisiksi, jotta voidaan vertailla niiden suuruuksia.

${}^{2)}\frac{1}{7} = \frac{2}{14} < \frac{5}{14}$, joten oikea vastaus on $-\frac{2}{7} < \frac{1}{7} < \frac{5}{14}$ eli d)< f)< e).

Harjoitustehtävä 7. *Monivalinta (valitse yksi)*
Sievennä $(x - 4)3x$.

(1) $x - 12x$
(2) $3x^2 - 12x$
(3) $3x - 4x$
(4) $x^2 - 12x$

RATKAISU:
Poistetaan lausekkeesta sulkeet laskemalla tulo. Lausekkeella $3x$ kerrotaan kaikkia sulkujen sisällä olevia termejä.

$$\begin{aligned} &(x - 4)3x \\ &= x \cdot 3x - 4 \cdot 3x \\ &= 3x^2 - 12x \end{aligned}$$

Oikea vastaus on $3x^2 - 12x$.

Harjoitustehtävä 8. *Monivalinta (valitse yksi)*
Laske $(3 + 2) \cdot 5 - 2$.

(1) 23
(2) 11
(3) 15
(4) 9

RATKAISU:
Lasketaan sulkujen sisällä oleva summa laskujärjestyksen mukaisesti ensimmäisenä. Tämän jälkeen lasketaan tulo ja lopuksi erotus.

$$\begin{aligned}&(3+2)\cdot 5-2\\&=5\cdot 5-2\\&=25-2\\&=23\end{aligned}$$

Oikea vastaus on 23.

Harjoitustehtävä 9. *Monivalinta (valitse yksi)*
Laske $(\frac{3}{8}+\frac{1}{6})\cdot 2$.

(1) $\frac{2}{3}$
(2) $\frac{17}{24}$
(3) $\frac{13}{24}$
(4) $1\frac{1}{12}$
(5) $1\frac{1}{8}$

RATKAISU:
Lasketaan lausekkeen arvo laventamalla ensin sulkujen sisällä olevat murtoluvut samannimisiksi ja laskemalla ne yhteen.

$$\begin{aligned}&({}^{3)}\frac{3}{8}+{}^{4)}\ \frac{1}{6})\cdot 2\\&=(\frac{9}{24}+\frac{4}{24})\cdot 2\\&=\frac{13}{40}\cdot 2\end{aligned}$$

Kirjoitetaan kokonaisluku murtolukuna ja lasketaan tulo kertomalla osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään. Supistetaan lopuksi saatu luku sievempään muotoon ja muutetaan murtoluku sekaluvuksi.

$$\begin{aligned}&=\frac{13}{40}\cdot\frac{2}{1}\\&\frac{13\cdot 2}{40\cdot 1}\\&=\frac{26}{24}^{(2}\\&=\frac{13}{12}\\&=1\frac{1}{12}\end{aligned}$$

Oikea vastaus on $1\frac{1}{12}$.

Harjoitustehtävä 10. *Monivalinta (valitse yksi)*
Mikä vaihtoehdoista on lausekkeen $8y^2+6y-5(3-y^2)$ sievennetty muoto?

(1) $7y^2+6y-15$
(2) $13y^2+6y-15$
(3) $19y^2-15$

(4) $8y^2 + y - 15$
(5) $3y^2 + 6y - 15$
(6) ei mikään näistä

RATKAISU:
Poistetaan sulkeet kertomalla luvulla -5 suluissa olevan lausekkeen $(3 - y^2)$ kumpikin termi 3 ja $-y^2$.

$$\begin{aligned}&8y^2 + 6y - 5(3 - y^2)\\&= 8y^2 + 6y - 5 \cdot 3 - 5 \cdot (-y^2)\end{aligned}$$

Lasketaan samanmuotoiset termit yhteen.

$$\begin{aligned}&= 8y^2 + 6y - 15 + 5y^2\\&= 13y^2 + 6y - 15\end{aligned}$$

Oikea vastaus on $13y^2 + 6y - 15$.

Koe 1

Tehtävä 1. *Monivalinta (valitse yksi)*
Laske lukujen $\frac{5}{3}$ ja $\frac{6}{8}$ tulo.

(1) $1\frac{5}{12}$
(2) $1\frac{1}{4}$
(3) 1
(4) $2\frac{2}{9}$

Tehtävä 2. *Pudotusvalikko*
Laita seuraavat murtoluvut suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan.

$$\frac{10}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$$

Tehtävä 3. *Monivalinta (valitse yksi)*
Mikä seuraavista vaihtoehdoista on lausekkeen $-3x - (-4x^2)$ sievennetty muoto?

(1) $-3x + 4x^2$
(2) $-3x - 4x^2$
(3) x^2
(4) $-7x^3$
(5) $-7x$
(6) ei mikään näistä

Tehtävä 4. *Monivalinta (valitse yksi)*
Mitä seuraavista lausekkeista laskimen syöte $(8 + 6) - (2 - 5)/3$ vastaa?

(1) $(8 + 6) - \frac{2-5}{3}$
(2) $\frac{(8+6)-(2-5)}{3}$
(3) $8 + 6 - 2 - \frac{5}{3}$
(4) $\frac{8+6-2-5}{3}$
(5) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

Tehtävä 5. *Stack-tehtävä*
Laske $\frac{2}{4}(3 + \frac{1}{2})$.

Tehtävä 6. *Monivalinta (valitse yksi)*
Mikä seuraavista vaihtoehdoista on lausekkeen $x(2x + 3)$ sievennetty muoto?

(1) $5x$
(2) $2x^2 + 3$
(3) $2x + 3$
(4) $2x^2 + 3x$
(5) $5x^2$

Yhteinen - Lyhyt 2. Juuret ja potenssit

Harjoitustehtävä 1. *Pudotusvalikko (kyllä/ei)*
Ovatko seuraavat luvut yhtä suuria?

(1) $(-5)^2$ ja -5^2
(2) 3^2 ja $(-3)^2$
(3) (-4^2) ja $(-4)^2$

RATKAISU:
a) Sulkeiden perässä oleva eksponentti koskee koko suluissa olevaa lauseketta tai lukua.
$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$.
Jos negatiivista lukua ei ole kirjoitettu sulkujen sisään, luvun edessä oleva miinus ei kuulu eksponentin vaikutusalueeseen.
$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$.
Oikea vastaus on **eivät ole**, sillä $-5^2 = -25 \neq 25 = (-5)^2$.

b) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
ja $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$.
Oikea vastaus on **kyllä ovat**.

c) $(-4^2) = (-(4 \cdot 4)) = (-16) = -16$
ja $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$.
Oikea vastaus on **eivät ole**.

Harjoitustehtävä 2. *Pudotusvalikko (kyllä/ei)*
Ovatko seuraavat luvut yhtä suuria?

(1) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ ja $\frac{3}{5}$
(2) $\sqrt{36} + \sqrt{1}$ ja $\sqrt{37}$
(3) $\sqrt{-16}$ ja $\sqrt{16}$
(4) $\sqrt[3]{-27}$ ja -3

RATKAISU:
a) Murtoluvun neliöjuuri voidaan laskea ottamalla neliöjuuri erikseen osoittajasta ja nimittäjästä. Luvun neliöjuuri on se positiivinen luku, joka toiseen korotettuna on yhtä suuri kuin juurrettava luku.
$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$. Oikea vastaus on **kyllä ovat**.

b) Lasketaan summa $\sqrt{36} + \sqrt{1} = 6 + 1 = 7 = \sqrt{49}$.
Koska $\sqrt{49} \neq \sqrt{37}$ oikea vastaus on **eivät ole**.

Huomaa, että $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$!

c) Negatiivisen luvun neliöjuurta ei voida laskea, koska minkään reaaliluvun toinen potenssi ei voi olla negatiivista.
Luvun 16 neliöjuuri voidaan kuitenkin laskea, $\sqrt{16} = 4$.
Oikea vastaus on **eivät ole**.

d) Luvun a kuutiojuuri $\sqrt[3]{a}$ on se luku, joka kolmanteen potenssiin korotettuna on yhtä

suuri kuin juurrettava luku a. Kuutiojuuri voidaan laskea myös negatiivisesta luvusta. Koska $(-3)^3 = -3 \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$, niin $\sqrt[3]{-27} = -3$.
Oikea vastaus on **kyllä ovat**.

Harjoitustehtävä 3. *Pudotusvalikko (yksi, kaksi, kolme, ei yhtäkään)*
Kuinka monta ratkaisua seuraavilla yhtälöillä on?

(1) $x^2 = 64$
(2) $x^3 = 729$
(3) $x^3 = -216$
(4) $x^2 = -576$

RATKAISU:
Potenssiyhtälö $x^2 = a$ ratkaistaan neliöjuuren avulla. Jos luku a on negatiivinen potenssiyhtälöllä ei ole lainkaan ratkaisua. Jos luku a on positiivinen on ratkaisuja kaksi kappaletta, $x = \sqrt{a}$ tai $x = -\sqrt{a}$.

Potenssiyhtälö $x^3 = a$ ratkaistaan kuutiojuuren avulla. Kuutiojuurella on aina täsmälleen yksi ratkaisu $x = \sqrt[3]{a}$

a) Ratkaistaan potenssiyhtälö.

$$\begin{aligned} x^2 &= 64 \\ x &= \sqrt{64} \qquad \text{tai } x = -\sqrt{64} \\ x &= 8 \qquad \text{tai } x = -8 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on **kaksi ratkaisua**, jotka ovat $x = 8$ tai $x = -8$.

b) Potenssiyhtälö $x^3 = 729$ ratkaistaan kuutiojuuren avulla, joten oikea vastaus on **yksi ratkaisu**, joka on $x = 9$ koska $9^3 = 729$.

c) Potenssiyhtälö $x^3 = -216$ ratkaistaan kuutiojuuren avulla, joten oikea vastaus on **yksi ratkaisu**, joka on $x = -6$ koska $(-6)^3 = -216$.

d) Potenssiyhtälö $x^2 = \sqrt{-576}$ ratkaistaan neliöjuuren avulla. Koska juurrettava luku on nyt negatiivinen, ei neliöjuurta voida laskea.
Oikea vastaus on **ei yhtäkään ratkaisua**.

Harjoitustehtävä 4. *Monivalinta (valitse yksi)*
Laske $a^2 \cdot a^4 \cdot a^3$.

(1) $3a^9$
(2) a^{24}
(3) a^9
(4) $9a$
(5) $3a^4$

RATKAISU:
Samankantaisten potenssien tulo saadaan laskemalla eksponentit yhteen.

$$a^2 \cdot a^4 \cdot a^3 = a^{2+4+3} = a^9$$

Kysytty tulo voidaan kirjoittaa myös auki

$$a^2 \cdot a^4 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^9$$

Oikea vastaus on a^9.

Harjoitustehtävä 5. *Monivalinta (valitse yksi)*
Laske $\frac{x^9}{x^3}$.

(1) x^3
(2) x^6
(3) $\frac{x^6}{x}$
(4) $\frac{9}{x^3}$
(5) Ei mikään näistä.

RATKAISU:
Samankantaisten potenssien osamäärä lasketaan vähentämällä osoittajan eksponentista nimittäjän eksponentti.

$$\frac{x^9}{x^3} = x^{9-3} = x^6$$

Kysytty osamäärä voidaan kirjoittaa myös auki

$$\frac{\cancel{x}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{\cancel{x}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{x}} = \frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{1} = x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x = x^6$$

Oikea vastaus on x^6.

Harjoitustehtävä 6. *Monivalinta (valitse yksi)*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista se, jossa toiseen korotus on tehty oikein $(x-3)^2 =$

(1) $x^2 - 6x - 9$
(2) $x^2 - 9$
(3) $x^2 - 6x + 9$
(4) $x^2 - 3$

RATKAISU:

$$\begin{aligned}
&(x-3)^2 = \\
&(x-3)(x-3) \\
&x\cdot x + x\cdot(-3) - 3\cdot x - 3\cdot(-3) \\
&x^2 - 3x - 3x + 9 \\
&x^2 - 6x + 9
\end{aligned}$$

Binomin neliö voidaan laskea myös suoraan binomin neliön kaavalla

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Tässä tapauksessa $a = x$ ja $b = 3$ eli saadaan

$$(x-3)^2 = x^2 - 2x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

Oikea vastaus on $x^2 - 6x + 9$.

Harjoitustehtävä 7. *Monivalinta (valitse yksi)*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista se, jossa toiseen korotus on tehty oikein $(5+x)^2 =$

(1) $25 + x^2$
(2) $25 + 10x + x^2$

(3) $= 5 + x^2$
(4) $25 + x$

RATKAISU:

$$\begin{aligned}&(5+x)^2\\&=(5+x)(5+x)\\&=5\cdot 5+5\cdot x+x\cdot 5+x\cdot x\\&=25+5x+5x+x^2\\&=25+10x+x^2\end{aligned}$$

Samaan vastaukseen päädytään myös käyttämällä binomin neliön kaavaa

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tässä tapauksessa $a = 5$ ja $b = x$ eli saadaan

$$(5+x)^2 = 5^2 + 2\cdot 5x + x^2 = 25 + 10x + x^2$$

Oikea vastaus on $25 + 10x + x^2$.

Harjoitustehtävä 8. *Monivalinta (valitse yksi)*
Mikä seuraavista on yhtä suuri kuin luku x^{-4}?

(1) $-x^4$
(2) $\frac{4}{x}$
(3) $-4x$
(4) $\frac{1}{x^4}$

RATKAISU:
Kun eksponenttina on negatiivinen luku, määritelmän mukaisesti

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

Oikea vastaus on $\frac{1}{x^4}$.

Harjoitustehtävä 9. *Monivalinta (valitse yksi)*
Mikä seuraavista lausekkeen $\frac{a^3\cdot a}{(a^2)^3}$ sievennyksistä on tehty oikein?

(1) $\frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2}$
(2) $\frac{a^4}{a^6} = a^2$
(3) $\frac{2a^3}{a^5} = \frac{2}{a^2}$
(4) $\frac{2a^4}{a^6} = \frac{2}{a^2}$
(5) $\frac{a^4}{a^8} = \frac{1}{a^4}$
(6) $\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$

RATKAISU:
Osoittajassa oleva samankantaisten potenssien tulo saadaan laskemalla eksponentit yhteen. Nimittäjässä oleva potenssin potenssi saadaan kertomalla eksponentit keskenään.

$$\frac{a^3 \cdot a}{(a^2)^3}$$
$$= \frac{a^{3+1}}{a^{2 \cdot 3}}$$
$$= \frac{a^4}{a^6}$$

Samankantaisten potenssien osamäärä saadaan vähentämällä osoittajan eksponentista nimittäjän eksponentti.

$$= a^{4-6}$$
$$= a^{-2}$$
$$= \frac{1}{a^2}$$

Oikea vastaus on $\frac{1}{a^2}$.

Harjoitustehtävä 10. *Monivalinta (valitse yksi)*
a) Missä seuraavista vaihtoehdoista on oikea kymmenpotenssiesitys luvulle 105 000?

(1) $1,05 \cdot 10^5$
(2) $1,05 \cdot 10^4$
(3) $1,05 \cdot 10^{-4}$
(4) $1,05 \cdot 10^{-5}$

b)Missä seuraavista vaihtoehdoista on oikea kymmenpotenssiesitys luvulle 0,000032?

(1) $3,2 \cdot 10^5$
(2) $0,32 \cdot 10^{-5}$
(3) $3,2 \cdot 10^4$
(4) $3,2 \cdot 10^{-4}$

RATKAISU:
Kymmenpotenssimuodossa

$$a \cdot 10^t$$

kerroin a on lukujen 1 ja 10 väliltä ja luvun kymmenen eksponentti t on negatiivinen tai positiivinen kokonaisluku.

a) Muokataan luku 105 000 kymmenpotenssimuotoon

105 000	Siirretään desimaalipilkkua 5 askelta vasemmalle, jotta saadaan kertoimeksi luku 1 ja 10 väliltä.
$= 1{,}05 \cdot 100\,000$	Kirjoitetaan luku 100 000 luvun 10 potenssina.
$= 1{,}05 \cdot 10^5$	

Kymmenpotenssimuotoon muuttamisen voi ajatella myös pilkun siirtämisenä. Koska desimaalipilkkua siirretään 5 askelta vasemmalle, jotta kertoimeksi saadaan luku 1 ja 10 väliltä, merkitään luvun 10 eksponentiksi luku 5.

Oikea vastaus on siis $1{,}05 \cdot 10^5$.

b) Muokataan luku 0,000032 kymmenpotenssimuotoon

$0{,}000032$	Siirretään desimaalipilkkua 5 askelta oikealle, jotta saadaan kertoimeksi luku 1 ja 10 väliltä.
$= 3{,}2 \cdot 0{,}00001$	Kirjoitetaan luku 0,00001 luvun 10 potenssina.
$= 3{,}2 \cdot \dfrac{1}{100\,000}$	
$= 3{,}2 \cdot \dfrac{1}{10^5}$	
$= 3{,}2 \cdot 10^{-5}$	

Kymmenpotenssimuotoon muuttamisen voi ajatella myös pilkun siirtämisenä. Koska desimaalipilkkua siirretään 5 askelta oikealle, jotta kertoimeksi saadaan luku 1 ja 10 väliltä, merkitään luvun 10 eksponentiksi luku -5.
Oikea vastaus on siis $3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Harjoitustehtävä 11. *Pudotusvalikko*

(1) Kuinka monta metriä on 22 000 mm?
(2) Kuinka monta neliökilometriä on 30 aaria?
(3) Yksi litra on yksi kuutiodesimetri. Kuinka monta kuutiomillimetriä on 0,055 l?

RATKAISU:
a) Millimetreistä metreihin muutettaessa siirrytään millimetreistä senttimetreihin, senttimetreistä desimetreihin ja desimetreistä metreihin. Näissä pituuden yksiköissä suhdeluku on 10.

$$22\,000 \text{ mm} = 2\,200 \text{ cm} = 220 \text{ dm} = 22 \text{ m}$$

Oikea vastaus on 22 m.

b) Aareista neliökilometreihin muutettaessa siirrytään aareista hehtaareihin ja hehtaareista neliökilometreihin. Näissä pinta-alan yksiköissä suhdeluku on 100.

$$30 \text{ a} = 0,30 \text{ ha} = 0,0030 \text{ km}^2$$

Oikea vastaus on 0,003 km^2.

c) Muutetaan ensin litrat kuutiodesimetreiksi. Koska 1 litra = 1 dm^3, saadaan 0,055 l = 0,055 dm^3.

Kuutiodesimetreistä kuutiomillimetreihin muutettaessa siirrytään kuutiodesimetreistä kuutiosenttimetreihin ja kuutiosenttimetreistä kuutiomillimetreihin. Näissä tilavuuden yksiköissä suhdeluku on 1000.

$$0,055 \text{ dm}^3 = 55 \text{ cm}^3 = 55\,000\text{mm}^3$$

Oikea vastaus on 55 000 mm^3.

Koe 1

Tehtävä 1. *Monivalinta (valitse yksi)*
Laske
a) $5^2 + (-3)^2 =$

(1) 34
(2) 64
(3) 16
(4) 4
(5) Ei mikään näistä.

b) $(2 + 6)^2 - 4^2 =$

(1) 80
(2) 24
(3) 48
(4) 22
(5) 8
(6) Ei mikään näistä.

Tehtävä 2. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse seuraavista kaikki, jotka ovat yhtä suuria luvun $\frac{\sqrt{9}}{2}$ kanssa.

(1) $\frac{3}{2}$
(2) $\frac{9}{4}$
(3) $\frac{3}{\sqrt{4}}$
(4) $-1\frac{1}{2}$
(5) $-\frac{3}{2}$
(6) $\frac{9}{6}$
(7) $1\frac{1}{2}$
(8) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
(9) $\frac{9}{\sqrt{4}}$

Tehtävä 3. *Monivalinta (valitse yksi)*
Laske $\sqrt{\frac{4}{3}} =$.

(1) $\frac{2}{3}$
(2) $\pm\frac{4}{3}$
(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
(4) $\frac{4}{9}$
(5) Ei mikään näistä

Tehtävä 4. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista kaikki oikeat ratkaisut yhtälölle $\sqrt{x} = 4$.

(1) 2
(2) -2
(3) 8
(4) -8
(5) 16

(6) -16
(7) yhtälöllä ei ole ratkaisua/ei mikään edellisistä

Tehtävä 5. *Monivalinta (valitse yksi)*
Mikä seuraavista vaihtoehdoista on lausekkeen $\frac{a^8}{a^3+5}$ sievennetty muoto?

(1) $\frac{a^5}{5}$
(2) $a^5 + \frac{a^8}{5}$
(3) $1 + \frac{a^5}{5}$
(4) $5a^5$
(5) Lauseketta ei voida sieventää.

Tehtävä 6. *Monivalinta (valitse yksi)*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista se, jossa lauseke $(x+4)^2$ on laskettu oikein.

(1) $x^2 + 8x + 16$
(2) $x^2 + 16$
(3) $x^2 + 4$
(4) $x + 16$

Tehtävä 7. *Monivalinta (valitse yksi)*
a) Missä seuraavista vaihtoehdoista on oikea kymmenpotenssiesitys luvulle 1020?

(1) $1,02 \cdot 10^2$
(2) $10,2 \cdot 10^1$
(3) $1,2 \cdot 10^3$
(4) $1,02 \cdot 10^3$

b) Missä seuraavista vaihtoehdoista on oikea kymmenpotenssiesitys luvulle 0,0052?

(1) $5,2 \cdot 10^{-3}$
(2) $5,2 \cdot 10^{-2}$
(3) $5,2 \cdot 10^3$
(4) $52 \cdot 10^{-4}$

Tehtävä 8. *Monivalinta (valitse yksi)*
a) Kuinka monta metriä on Saran 1,6 km pitkä koulumatka?
b) Mikä on Saran 28 m^2 kokoisen asunnon pinta-ala neliösenttimetreinä?
c) Kuinka monta litraa Sara juo aamusmoothieta, kun hän juo sitä pullollisen, jonka tilavuus on 280 ml?

Yhteinen - Lyhyt 3. Yhtälöt

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Ratkaise yhtälö. Miinusmerkkinä toimii - ja jos vastauksena on murtoluku, käytä jakoviivana merkkiä / , esim. 3/2.

a) $3x + 1 = 2x + 5$

b) $-(x - 1) = 5x - 11$

c) $\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$

RATKAISU:
a) Järjestetään muuttujaa sisältävät termit ja vakiotermit eri puolille yhtälöä ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 2x + 5 \\ 3x - 2x &= 5 - 1 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan yhtälö avaamalla ensin sulkeet. Tämän jälkeen järjestetään muuttujaa sisältävät termit ja vakiotermit eri puolille yhtälöä.

$$\begin{aligned} -(x - 1) &= 5x - 11 \\ -x + 1 &= 5x - 11 \\ -x - 5x &= -11 - 1 \\ -6x &= -12 \qquad || : (-6) && \text{Jaetaan muuttujan kertoimella.} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \frac{6}{x} && \text{Poistetaan nimittäjät kertomalla ristiin.} \\ 3 \cdot x &= 6 \cdot 4 \\ 3x &= 24 && \text{Jaetaan muuttujan kertoimella.} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Ratkaise $\frac{2}{3}x = 8 - 2x$.

RATKAISU:
Kerrotaan ensin yhtälön molemmat puolet muuttujan x kertoimessa olevalla nimittäjällä

3. Näin lasku helpottuu, kun päästään laskemaan pelkillä kokonaisluvuilla.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x &= 8 - 2x && \|\cdot 3 \\ 2x &= 3(8 - 2x) && \text{Avataan sulkeet.} \\ 2x &= 24 - 6x \\ 2x + 6x &= 24 \\ 8x &= 24 && \| : 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 3. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Mitkä x:n arvot toteuttavat yhtälön $x(x-2) = 0$? Valitse kaikki oikeat.

(1) $x = -2$
(2) $x = -\frac{1}{2}$
(3) $x = 0$
(4) $x = 1$
(5) $x = \sqrt{2}$
(6) $x = 2$

RATKAISU:
Yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla, kun avataan ensin sulkeet.
Helpommalla kuitenkin pääsee, kun käyttää kertolaskun ominaisuutta, että tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin tulon tekijöistä on nolla. Yhtälön vasemman puolen tulon tekijät ovat x ja $x - 2$, joten lasketaan milloin kyseiset tekijät ovat yhtä suuria kuin 0.

$$\begin{aligned} x = 0 \qquad \text{tai} \qquad x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on $x = 0$ tai $x = 2$.

Harjoitustehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Ratkaise yhtälö.
a) $x^2 + 6x = 0$
b) $t^2 - 16 = 0$

RATKAISU:
a) Lausekkeen molemmissa termeissä on muuttuja x. Muokataan lauseke tulomuotoon ottamalla x yhteiseksi tekijäksi, jotta ratkaisuun voidaan käyttää tulon nollasääntöä.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 0 \\ x \cdot x + 6 \cdot x &= 0 && \text{Kirjoitetaan muuttuja } x \text{ sulkeiden eteen yhteiseksi tekijäksi.} \\ x(x + 6) &= 0 \end{aligned}$$

Koska tulo on nolla täsmälleen silloin kun jokin tulon tekijöistä on nolla, lasketaan milloin tulon tekijät ovat yhtä suuria kuin 0.

$$\begin{aligned} x = 0 \qquad \text{tai} \qquad x + 6 &= 0 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on $x = 0$ tai $x = -6$.

b) Järjestetään vakiotermi toiselle puolelle yhtälöä ja ratkaistaan yhtälö neliöjuuren avulla.

$$\begin{aligned} t^2 - 16 &= 0 \\ t^2 &= 16 \\ t &= \pm\sqrt{16} \\ t &= \pm 4 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on $t = -4$ tai $t = 4$.

Harjoitustehtävä 5. *Aukkotehtävä*
Ratkaise $x^2 + 2x = 3$.

RATKAISU:
Yhtälö on toisen asteen yhtälö. Muokataan yhtälö normaalimuotoon $ax^2 + bx + c = 0$, jotta saadaan selville kertoimet a, b ja c.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 3 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Kertoimet ovat $a = 1$, $b = 2$ ja $c = -3$.
Tämän jälkeen sijoitetaan kertoimet 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

Yhtälön ratkaisu on

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Evolla järjestettävässä metsän kuninkuuskilpailussa $\frac{1}{3}$ matkasta mennään pyöräillen, $\frac{1}{6}$ uiden, $\frac{1}{4}$ meloen ja loppuun jää 12 km juoksu. Kuinka pitkä koko kilpailu on kilometreinä?

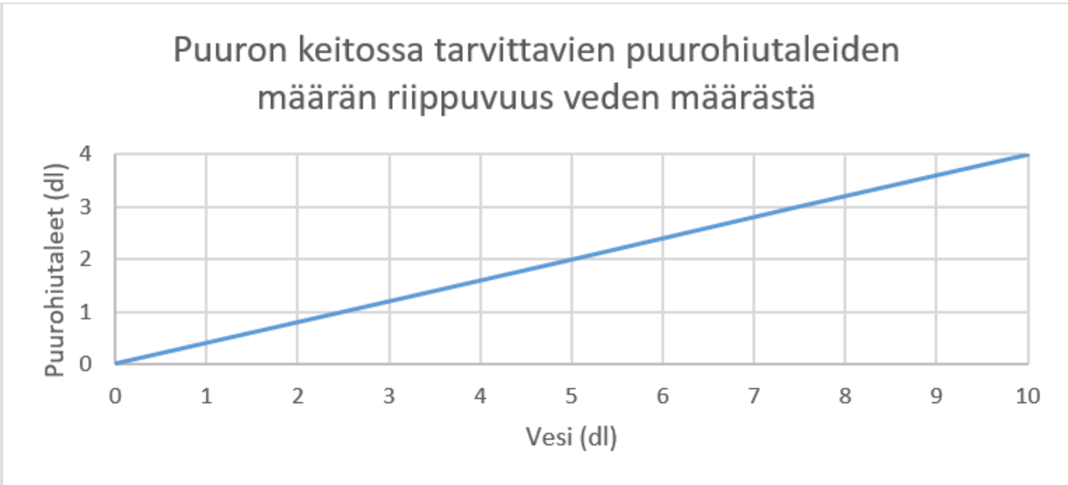
RATKAISU:
Merkitään kilpailun pituutta kilometreinä muuttujalla x. Matka pyöräillen on $\frac{1}{3} \cdot x$, matka uiden on $\frac{1}{6} \cdot x$ ja matka meloen on $\frac{1}{4} \cdot x$. Kun näihin matkoihin lisätään vielä juoksumatka 12 km, saadaan koko matkan pituus x. Muodostetaan yhtälö muuttujan x avulla ja

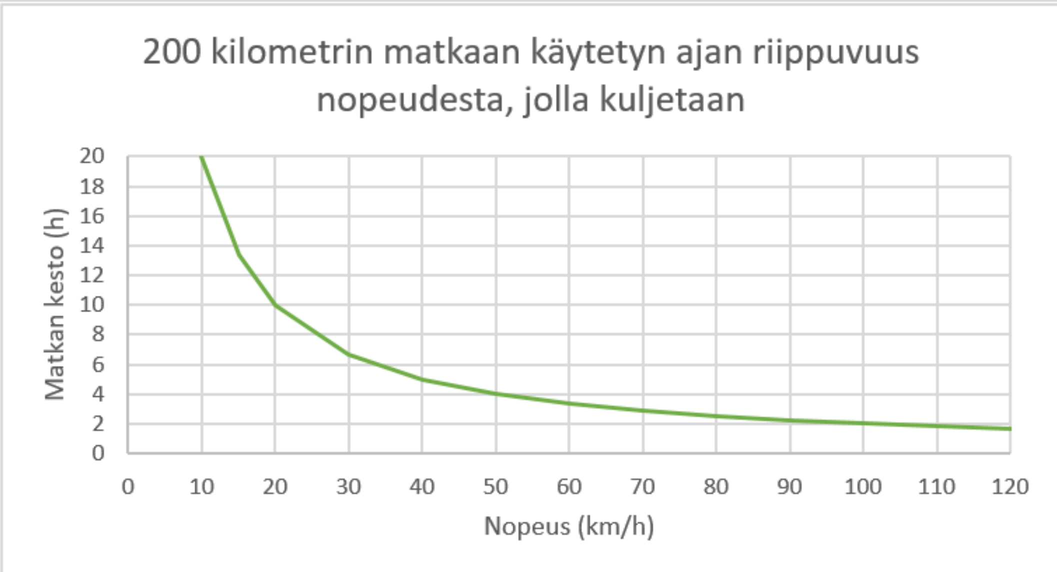
ratkaistaan se.

$$
\begin{aligned}
{}^{4)}\frac{1}{3}x + {}^{2)}\frac{1}{6}x + {}^{3)}\frac{1}{4}x + 12 &= x && \text{Lavennetaan murtoluvut samannimisiksi.} \\
\frac{4x}{12} + \frac{2x}{12} + \frac{3x}{12} + 12 &= x && || \cdot 12 \\
4x + 2x + 3x + 144 &= 12x \\
12x - 4x - 2x - 3x &= 144 \\
3x &= 144 && || : 3 \\
x &= 48
\end{aligned}
$$

Koko kilpailun pituus on 48 kilometriä.

Harjoitustehtävä 7. *Monivalinta ja aukkotehtävä yhdistettynä)*





Täydennä lauseet oikeiksi yllä olevan kuvan perusteella.
a) Kun veden määrä kaksinkertaistuu, puurohiutaleiden määrä *puolittuu, pysyy samana, kaksinkertaistuu, nelinkertaistuu*
b) Matkan kesto on *suoraan/kääntäen* verrannollinen kuljettuun nopeuteen.

c) Kun nopeus puolittuu, matkan kesto *puolittuu, pysyy samana, kaksinkertaistuu, nelinkertaistuu*
d) Puurohiutaleiden määrä on *kääntäen/suoraan* verrannollinen veden määrään.
e) Kun puurohiutaleita on 3 dl, vettä tarvitaan puuron keittoon __ dl.

RATKAISU:
a) **kaksinkertaistuu**: Ylemmästä kuvaajasta nähdään, että kun vettä on esimerkiksi 5 dl, puurohiutaleita on 2 dl. Kun veden määrä on kaksinkertaistunut eli 10 dl, puurohiutaleiden määrä on 4 dl eli myös kaksinkertaistunut.

b) **suoraan**: Puuronhiutaleiden määrä kasvaa samassa suhteessa veden määrän kanssa, joten kyseessä on suoraan verrannollisuus.

c) **kaksinkertaistuu**: Kuvaajasta nähdään, että esimerkiksi nopeudella 40 km/h matkan kesto on 5h, kun taas 20 km/h nopeudella matkan kesto on 10 h. Nopeuden puolittuessa siis matkan kesto kaksinkertaistuu.

d) **kääntäen**: Kun nopeus pienenee, matkan kesto suurenee, joten kyseessä on kääntäen verrannollisuus.

Harjoitustehtävä 8. *Aukkotehtävä*
a) Työhön käytetty aika on kääntäen verrannollinen työntekijöiden määrään, kun he kaikki työskentelevät samalla tehokkuudella. Jos kaksi robottia lajittelee saavillisen sekajätettä 19 minuutissa, kuinka monen kokonaisen minuutin jälkeen työ on täysin tehty kolmella robotilla?

b) Vuoden 2019 helmikuussa 1€ vastasi 7,41 Kroatian kunaa. Kuinka paljon 62,60 kunaa maksanut lounas maksoi euroissa? *Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.*

RATKAISU:
a) Kahdella robotilla kestää sekajätteen lajitteluun 19 min. Koska työhön käytetty aika on kääntäen verrannollinen työntekijöiden määrään, työntekijöiden määrän suhde on käänteisluku työhön käytetyn ajan suhteesta. Ratkaistaan kysytty aika verrannon avulla. Merkitään kysyttyä aikaa muuttujalla x.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{x}{19} && \text{Kerrotaan ristiin.} \\ 2 \cdot 19 &= x \cdot 3 \\ 38 &= 3x \qquad || :3 \\ 12{,}666... &= x \end{aligned}$$

Koska tehtävässä kysyttiin, kuinka monen kokonaisen minuutin jälkeen työ on täysin tehty ja $x \approx 12{,}7$, vastaus on 13 minuutin jälkeen.

b) Merkitään kysyttyä hintaa muuttujalla x. Valuutat ovat suoraan verrannollisia, sillä ne muuttuvat samassa suhteessa. Esimerkiksi koska 1 € on 7,41 kunaa, niin 2 € on 14,83 kunaa. Muodostetaan tilanteesta verranto ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7{,}41} &= \frac{x}{62{,}60} && || \cdot 62{,}60 \\ \frac{62{,}60}{7{,}41} &= x \\ 8{,}4480... &= x \end{aligned}$$

Ratkaisuksi saadaan $x \approx 8{,}45$ eli lounas maksoi 8,45 euroa.

Harjoitustehtävä 9. *Monivalinta (valitse yksi)*
Ratkaise ideaalikaasun tilanyhtälö pV=nRT lämpötilan, eli muuttujan T, suhteen.

(1) $T = \frac{pV}{nR}$
(2) $T = pVnR$
(3) $T = \frac{nR}{pV}$
(4) $T = pV - nR$
(5) Ei mikään näistä

RATKAISU:
Yhtälön ratkaiseminen muuttujan T suhteen tarkoittaa sitä, että muuttuja T kirjoitetaan muiden suureiden avulla.

$$\begin{aligned} nRT &= pV && || : nR \\ T &= \frac{pV}{nR} \end{aligned}$$

Oikea vastaus on $T = \frac{pV}{nR}$.

Koe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Ratkaise yhtälö $t - 8 = 6t + 7$.

Tehtävä 2. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Eve on ostamassa uusia kenkiä, joita Suomessa ei vielä myydä. Hän löytää ne ruotsalaisesta nettikaupasta postikuluineen hintaan 739 kruunua. Even Iso-Britanniassa asuva kaveri on tulossa ensi viikonloppuna Suomeen ja kertoi nähneensä kengät urheilukaupassa 55 punnalla ja lupasi tuoda ne Evelle jos tämä tahtoo. Kummasta maasta kenkien osto tulee halvemmaksi? Kuinka paljon hintaero on kokonaisissa euroissa, kun 1€ vastaa 0,859 puntaa ja 10,557 kruunua?

Tehtävä 3. *Aukkotehtävä, aukot tunneille ja minuuteille*
Matkan kesto on kääntäen verrannollinen nopeuteen, jolla kuljetaan. Kuinka kauan kestää matka Jyväskylästä Tampereelle junalla, jonka nopeus on 140 km/h, kun linja-autolla, jonka nopeus on 90 km/h matka kestää 2 h 15 min?

Tehtävä 4. *Aukkotehtävä, kaksi aukkoa*
Jos vastauksena on murtoluku, käytä merkkiä /, esimerkiksi $\frac{2}{3} = 2/3$*. Jos yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, laita toiseen aukkoon - , esimerkiksi jos yhtälön ainoa ratkaisu on* -1*, merkitään* $x = -1$ *tai* $x = -$*.*

Ratkaise yhtälö $x^2 - 25 = 0$

Tehtävä 5. *Aukkotehtävä*
Jos vastauksena on murtoluku, käytä merkkiä /, esimerkiksi $\frac{2}{3} = 2/3$*. Jos yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, laita toiseen aukkoon - , esimerkiksi jos yhtälön ainoa ratkaisu on* -1*, merkitään* $x = -1$ *tai* $x = -$*.*

Ratkaise $x^2 + 2x - 15 = 0$

Tehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Juulia on pienyrittäjä, joka myy itse valmistamiaan villasukkia. Yksien sukkien valmistuskulut ovat 6,95€ ja Juulia myy villasukkiaan 22€ kappalehintaan. Yritykseen liittyviä muita kuluja on 113€ kuukaudessa.

Kuinka monet sukat Juulian tarvitsee myydä, jotta hänen toimintansa on kannattavaa?

Tehtävä 7. *Monivalinta (valitse yksi)*
Opiskelijat ovat laskemassa, kuinka paljon Radiumia (^{228}Ra) on jäljellä 2 vuoden kuluttua kun sen puoliintumisaika $T = 5{,}75$ vuotta. Aineen määrä ajanhetkellä t saadaan laskettua kaavalla

$$N(t) = N_0 \cdot (\tfrac{1}{2})^{\frac{t}{T}}.$$

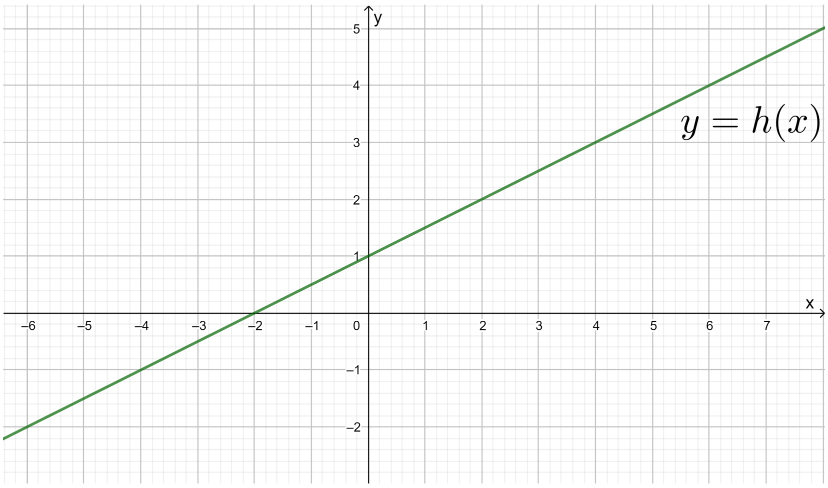
Radiumin määrä N_0 on alussa 1800 g.

Opiskelijat ovat saaneet tulokseksi $N(2) = 1114$ g. Onko saatu tulos

a) liian suuri,
b) juuri oikea vai
c) liian pieni?

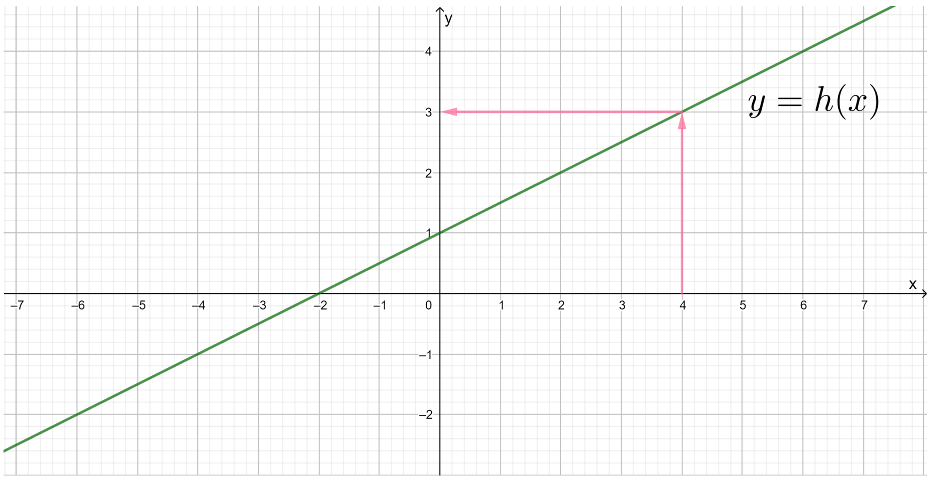
Yhteinen - Lyhyt 4. Funktiot

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Määritä kuvan perusteella



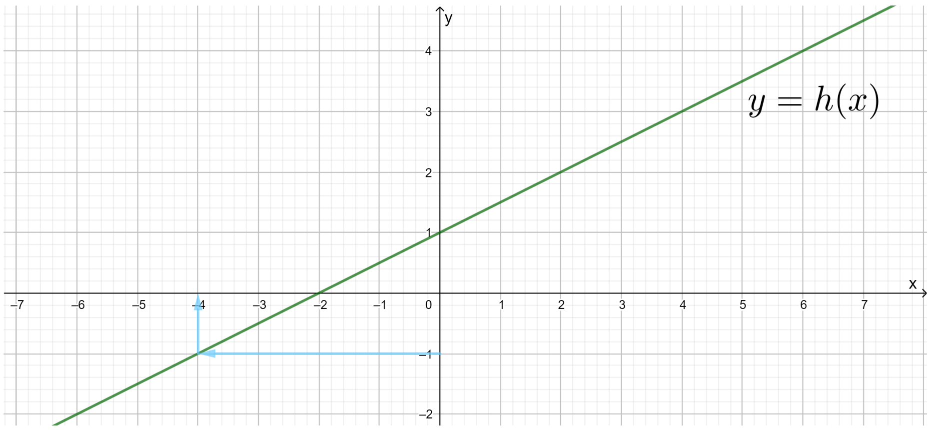
a) funktion h arvo kohdassa $x = 4$.
b) funktion h arvo kohdassa $x = -2$.
c) millä muuttujan x arvolla funktio h saa arvon -1.

RATKAISU:
a) Etsitään x-akselilta eli vaaka-akselilta kohta $x = 4$, edetään siitä pystysuorasti funktion h kuvaajalle ja sen jälkeen vaakasuorasti y-akselille. Funktion h arvo kohdassa $x = 4$ saadaan lukemalla y-akselin arvo pisteessä, johon tällä tavalla päädytään. Kuvan perusteella $h(4) = 3$.

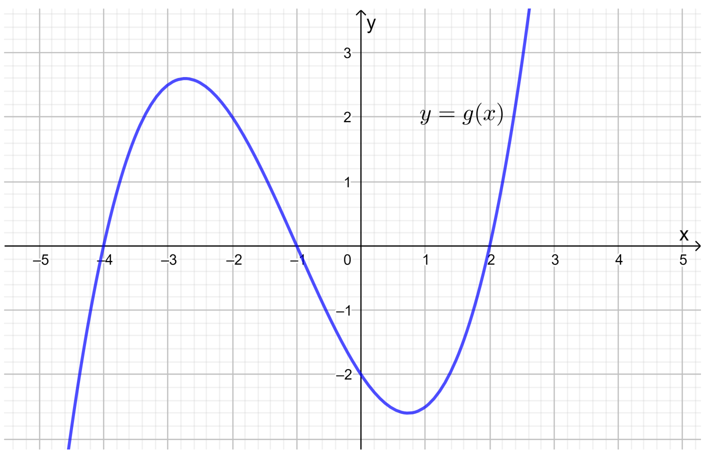


b) Etsitään x-akselilta kohta $x = -2$. Huomataan, että funktion h kuvaaja leikkaa x-akselin tässä pisteessä. Kohta $x = -2$ on siis funktion h nollakohta, joten funktion arvo tässä pisteessä on 0 eli $h(-2) = 0$.

c) Etsitään y-akselilta eli pystyakselilta annettu funktion h arvo -1 . Edetään siitä vaakasuorasti funktion h kuvaajalle ja sen jälkeen pystysuorasti x-akselille. Muuttujan x arvo, jolla funktio h saa arvon -1, on se x-akselin kohta, johon tällä tavalla päädytään. Kuvan perusteella tämä kohta on $x = -4$ eli $h(-4) = -1$.



Harjoitustehtävä 2. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse ne kaikki pisteet, jotka ovat kuvaajan perusteella funktion g nollakohtia.



a) $x = -1$
b) $x = 0$
c) $x = -2$
d) $x = 2$
e) $x = -4$.

RATKAISU:
Funktion g nollakohdilla tarkoitetaan niitä muuttujan x arvoja, joilla funktio saa arvon nolla, eli kun $g(x) = 0$. Nämä tarkoittavat kohtia, joissa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

Funktion g nollakohdat ovat kuvan perusteella $x = -4, x = -1$ ja $x = 2$.

Harjoitustehtävä 3. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
a) Minkä arvon funktio $h(x) = \frac{2}{3}x - 2$ saa kohdassa $x = 3$?

b) Onko piste (2, 1) funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$ kuvaajalla? *on/ei*

RATKAISU:
a) Sijoitetaan annettu muuttujan arvo $x = 3$ funktion h lausekkeeseen ja lasketaan funktion arvo.

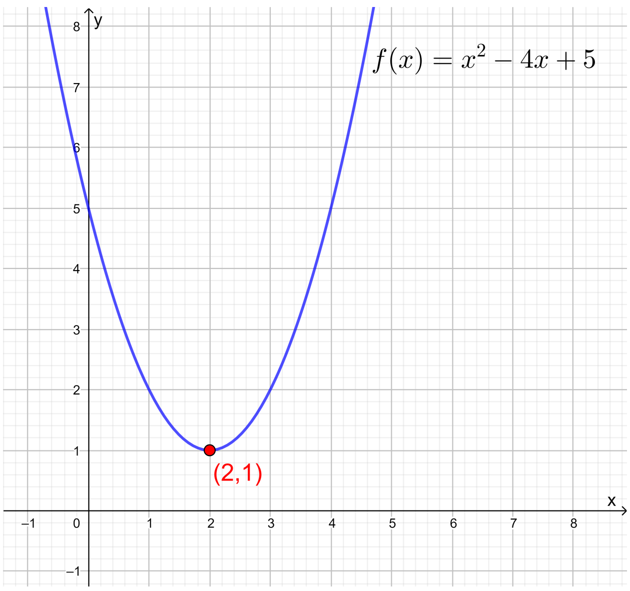
$$\begin{aligned} h(3) &= \frac{2}{3} \cdot 3 - 2 \\ &= \frac{2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} - 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Funktion arvo kohdassa $x = 3$ on 0 eli $h(3) = 0$.

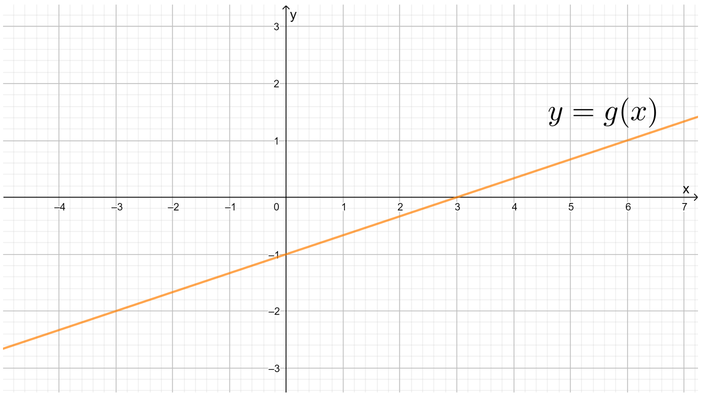
b) Funktion f kuvaaja koostuu niistä pistepareista (x, y), joissa y-koordinaatti on sama kuin funktion f arvo kohdassa x eli $y = f(x)$. Sijoitetaan pisteen $(2, 1)$ x-koordinaatti $x = 2$ funktion f lausekkeeseen ja tutkitaan saadaanko funktion arvoksi pisteen y-koordinaatti $y = 1$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 \\ &= 4 - 8 + 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Koska funktion arvoksi saatiin kysytyn pisteen y-koordinaatti $y = 1$, on piste $(2, 1)$ funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$ kuvaajalla.

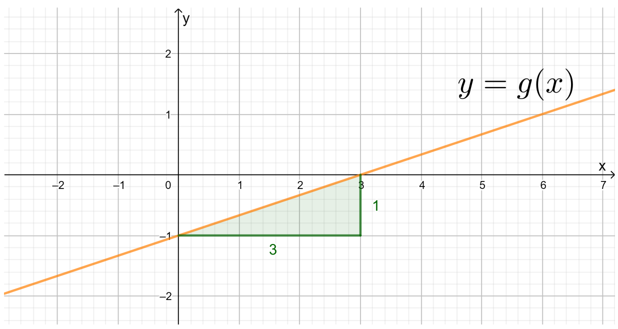


Harjoitustehtävä 4. *Pudotusvalikko*
Täydennä lauseet kuvan perusteella.

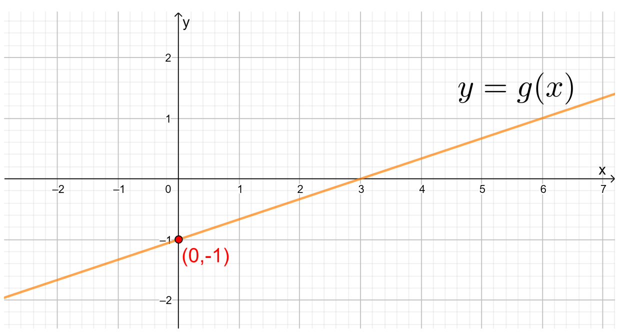


a) Suoran g kulmakerroin on $k =$ *1/3, 3, -3, -1/3, 1.*
b) Suora g on *nouseva/laskeva.*
c) Suora g leikkaa y-akselin pisteessä *(0, 3), (0, -1), (-1, 0), (3, 0).*

RATKAISU:
a) Suoran kulmakerroin ilmaisee suoran kaltevuuden. Kulmakerroin saadaan jakamalla kahden suoralla olevan pisteen y-koordinaattien erotus x-koordinaattien erotuksella. Kuvasta nähdään, että tässä $k = \frac{1}{3}$.



b) Jos suoran kulmakerroin k on positiivinen, suora on nouseva.
Jos suoran kulmakerroin k on negatiivinen, suora on laskeva.
Suoran g kulmakerroin $k = \frac{1}{3}$ on positiivinen, joten suora on **nouseva**.
c) Etsitään kuvasta piste, jossa suora g leikkaa y-akselin. Tässä pisteessä x-koordinaatti on 0 ja y-koordinaatti on -1. Kysytty (x, y) piste on siis $(0, -1)$.



Harjoitustehtävä 5. *Stack-tehtävä*
Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $(1,2)$ ja $(0,4)$ kautta.

RATKAISU:
Aloitetaan ratkaisemalla kysytyn suoran kulmakerroin annettujen pisteiden koordinaattien avulla. Kulmakerroin saadaan jakamalla y-koordinaattien erotus x-koordinaattien erotuksella eli $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-2}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$.

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Sijoitetaan tähän laskemalla saatu kulmakerroin ja toinen annetuista pisteistä $(1,2)$, jotta saadaan selville suoran vakiotermi b.

$$2 = -2 \cdot 1 + b \text{ eli } b = 2 + 2 = 4.$$

Kysytty suoran yhtälö on siis $y = -2x + 4$.

Harjoitustehtävä 6. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
a) Tarkastellaan suoria $y = -2x + 1$, $y = 2x + 3$ ja $y = 2x + 1$. Valitse ne kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia.

$y = -2x + 1$ *ja* $y = 2x + 3$ / $y = -2x + 1$ *ja* $y = 2x + 1$ / $y = 2x + 3$ *ja* $y = 2x + 1$ / *ei mitkään kaksi*

b) Mikä on suorien $y = 2x + 1$ ja $y = -3x + 6$ leikkauspiste?

RATKAISU:
a) Suorat ovat yhdensuuntaisia jos niillä on yhtä suuri kulmakerroin tai ne ovat molemmat y-akselin suuntaisia. Yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa toisiaan tai ne ovat sama suora.
Suoran $y = -2x + 1$ kulmakerroin on -2, suoran $y = 2x + 3$ kulmakerroin on 2 ja suoran $y = 2x + 3$ kulmakerroin on 2.
Siispä annetuista suorista suorat $y = 2x + 3$ ja $y = 2x + 1$ ovat yhdensuuntaisia.

b) Suorien leikkauspiste on piste, joka toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspisteessä y-koordinaatit ovat yhtä suuret, joten muodossa $y = kx + b$ annetut suorat voidaan merkitä yhtä suuriksi ja selvittää ensin pisteen x-koordinaatin arvo.

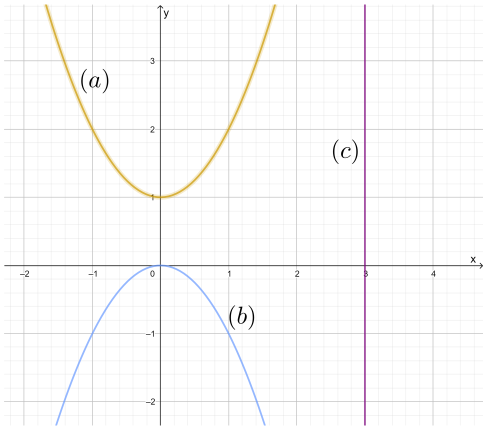
$$\begin{aligned} 2x + 1 &= -3x + 6 \\ 2x + 3x &= 6 - 1 \\ 5x &= 5 && \| : 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan y-koordinaatti sijoittamalla saatu x-koordinaatti toisen annetun suoran yhtälöön $y = 2x + 1$.

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 1 + 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Kysytty leikkauspiste on $(1,3)$.

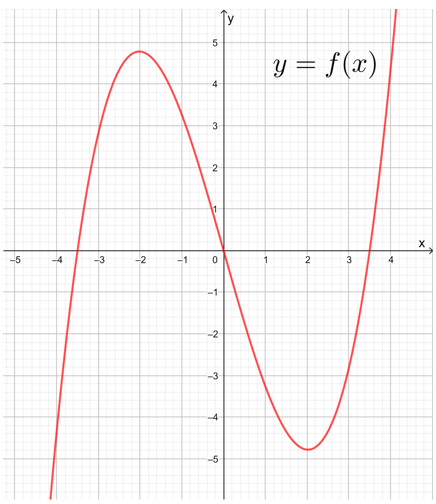
Harjoitustehtävä 7. *Pudotusvalikko*
Yhdistä kuvaajat oikeisiin lausekkeisiin



Kuvaajan (a) lauseke on on $y = -x + 1$, $y = -x^2 + 1$, $y = x + 1$, $y = x^2 + 1$
Kuvaajan (b) lauseke on $y = -x$, $y = x^2$, $y = x$, $y = -x^2$
Kuvaajan (c) lauseke on $y = 3$, *x=3*

RATKAISU:
a) Kyseessä on ylöspäin aukeva paraabeli eli sen yhtälö on toista astetta ja toisen asteen termillä on positiivinen kerroin. Annetuista vaihtoehdoista nämä ehdot toteuttaa vain yhtälö $y = x^2 + 1$.
b) Kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli eli sen yhtälö on toista astetta ja toisen asteen termillä on negatiivinen kerroin. Annetuista vaihtoehdoista nämä ehdot toteuttaa vain yhtälö $y = -x^2$
c) Kyseessä on y-akselin suuntainen suora, jonka kaikkien pisteiden x-koordinaatti on 3. Suoran yhtälö on $x = 3$.

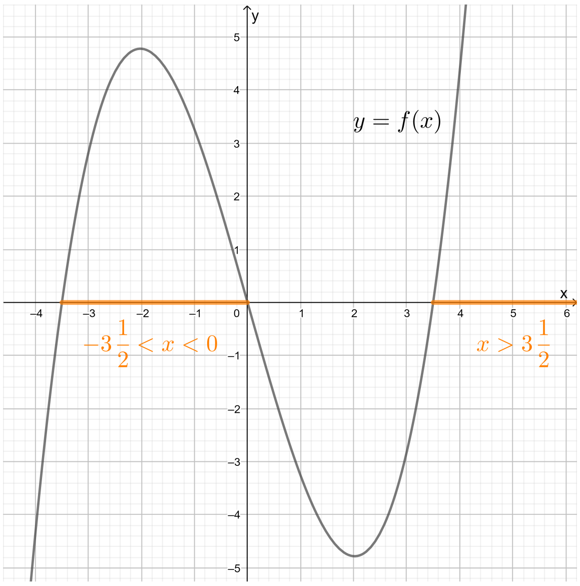
Harjoitustehtävä 8. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista kaikki ne välit, joilla $f(x) > 0$.



a) $x > 0$
b) $x > 3\frac{1}{2}$

c) $-2 < x < 2$
d) $-3\frac{1}{2} < x < 0$

RATKAISU:
Merkintä $f(x) > 0$ tarkoittaa, että funktion arvo kohdassa x on positiivinen. Funktion arvo on kuvaajan pisteen y-koordinaatti. Positiivinen y-koordinaatti tarkoittaa, että piste on x-akselin yläpuolella. Etsitään siis kaikki ne välit, joilla funktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.
Välit, joilla $f(x) > 0$ ovat $-3\frac{1}{2} < x < 0$ ja $x > 3\frac{1}{2}$.



Harjoitustehtävä 9. *Aukkotehtävä*
Kattilassa keitettiin vettä ruoanlaittoa varten. Veden lämpötila oli aluksi 25 $°C$ ja se nousi 15 astetta minuutissa.

Veden keittoaika (min)	Veden lämpötila (°C)
0	25
1	40
2	55

a) Mikä oli veden lämpötila, kun vettä oli lämmitetty 3 minuuttia?
b) Muodosta veden lämpötilaa kuvaava lauseke, kun x on lämmitykseen käytetty aika minuuteissa ja y on veden lämpötila asteina hetkellä x.
$y =$ ___ x ___
c) Kuinka monta minuuttia vettä täytyy lämmittää, jotta vesi kiehuu?

RATKAISU:
a) Veden lämpötila nousee 15 astetta minuutissa. Lämpötila 2 minuutin kohdalla on 55

astetta, joten veden lämpötila 3 minuutin kohdalla on 55 °C + 15 °C = 70 °C.

b) Veden lämpötila nousee 15 °C minuutissa. Kun aikaa on kulunut x minuuttia on veden lämpötila noussut $x \cdot 15$ °C alkulämpötilasta 25 °C.
Veden lämpötilaa y kuvaa siis lauseke $y = 15x + 25$.

c) Veden kiehumispiste on 100 °C. Käytetään kohdassa b) muodostettua lämpötilan lauseketta ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 100 &= 15x + 25 \\ 100 - 25 &= 15x \\ 75 &= 15x \qquad \| : 15 \\ \frac{75}{15} &= x \\ 5 &= x \end{aligned}$$

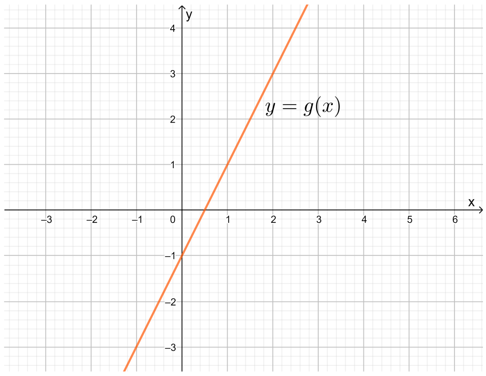
Vesi kiehuu 5 minuutin kuluttua.

Kohdat a) ja c) saadaan ratkaistua myös täydentämällä tehtävänannossa esitettyä taulukkoa veden kiehumispisteeseen asti ja lukemalla arvot taulukosta.

Veden keittoaika (min)	Veden lämpötila (°C)
0	25
1	40
2	55
3	70
4	85
5	100

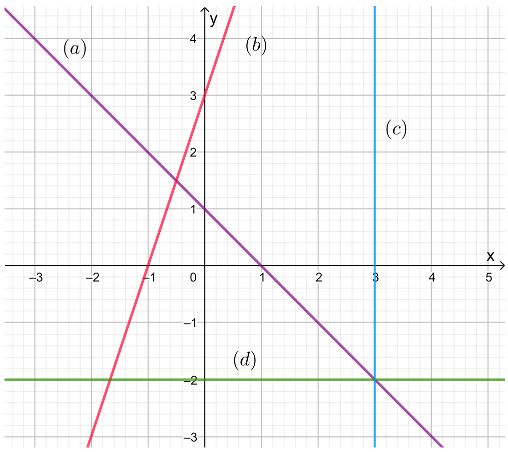
Koe 1

Tehtävä 1. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse kaikki ne pisteet, jotka ovat funktion g kuvaajalla.



a) $(2, 3)$
b) $(3, 2)$
c) $(1, 1)$
d) $(-1, 0)$
e) $(-1, -3)$

Tehtävä 2. *Pudotusvalikko*
Yhdistä suoran kuvaaja oikeaan lausekkeeseen.
Suoran (a) lauseke on *pudotusvalikko, jossa vaihtoehtoina* $y = -x$, $y = x$, $y = x + 1$, $y = -x + 1$
Suoran (b) lauseke on *y=3x+3,* $y = 3x - 1$, $y = x + 3$, $y = x - 1$
Suoran (c) lauseke on *x=3 ja* $y = 3$
Suoran (d) lauseke on $x = -2$, $y = -2$



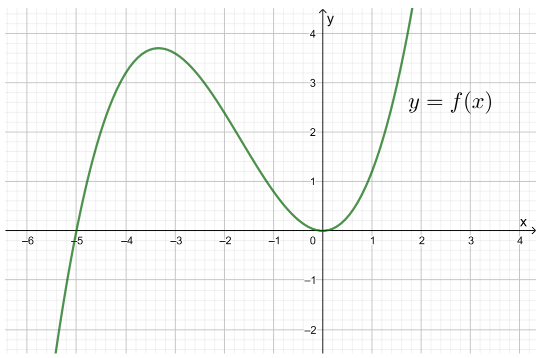
Tehtävä 3. *Pudotusvalikko*
Valitse oikea vaihtoehto funktioon $f(x) = x - x^2$ liittyen.
a) funktio f saa kohdassa $x = -2$ arvon *0, -6, 2, 6, -4, -2.*
b) funktion f kuvaaja on *nouseva suora/laskeva suora/ylöspäin aukeava paraabeli/alaspäin aukeava paraabeli.*

c) funktiolla f on *ei yhtään, yksi, kaksi* nollakohtaa.

Tehtävä 4. *Stack-tehtävä*
Määritä sen suoran yhtälö, jonka kulmakerroin on 3 ja joka kulkee pisteen $(-1, -1)$ kautta.

Tehtävä 5. *Stack-tehtävä*
Määritä kuvassa olevan suoran yhtälö (stack ohjelmoitu arpomaan kuvaan erilaisia suoria).

Tehtävä 6. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse kaikki ne väittämät, jotka ovat kuvan perusteella tosia.



a) funktio f ei saa negatiivisia arvoja
b) $f(0) = 0$
c) $f(x) > 0$ kun $-5 < x < 0$
d) $f(2) = 2$

Tehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Taksin aloitusmaksu on 5,3 € ja kilometritaksa 1,25€ /km.
a) Nealla on käytössään 15 € . Kuinka monta täyttä kilometriä hän pääsee matkustamaan taksilla?
b) Sara ja Juulia matkustivat taksilla Jyväskylässä. Juulia jäi pois Kortepohjassa, jossa taksamittariin oli kertynyt 4,4 km. Mittari jatkoi raksutustaan Saran päätepysäkille Ristonmaalle, jossa kilometrejä mittarissa oli 8,8 km. Kuinka paljon Saralle tuli maksettavaa Juulian maksettua puolet summasta, joka oli kertynyt, kun hän jäi pois kyydistä?

Yhteinen - Lyhyt 5. Prosentteja ja tilastoja

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
a) Kuinka monta prosenttia on $\frac{3}{5}$?
b) Kuinka monta prosenttia on 6 tunnin työpäivä yhdestä vuorokaudesta?
c) Mistä asukasluvusta 600 asukasta on 40%?
d) Jaana lupasi veljelleen 35% saamastaan kalasaaliista. Kuinka monta kalaa Jaanan veli saa 120 kalasta?

RATKAISU:
a) Prosentti tarkoittaa sadasosaa, joten $^{20)}\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 0{,}6 = 60$ %.

b) Yksi vuorokausi on 24 h. Lasketaan kuinka monta prosenttia 6 tuntia on 24 tunnista.

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Vastaus: **25** %

c) Merkitään muuttujalla x tuntematonta asukaslukua. 40% on desimaalilukuna 0,40. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä asukasluku x.

$$\begin{aligned} x \cdot 0{,}4 &= 600 \qquad || : 0{,}4 \\ x &= \frac{600}{0{,}4} \\ x &= 1500 \end{aligned}$$

Vastaus: Asukasluvusta **1500**.

d) Lasketaan, kuinka monta kalaa on 35% kalasaaliin 120 kalasta. 35% on desimaalilukuna 0,35.
$120 \cdot 0{,}35 = 42$

Vastaus: **42** kalaa.

Harjoitustehtävä 2. *Aukkotehtävä*
a) Mikon tuntipalkka oli 8,4 € ja hänelle annettiin 12% palkankorotus. Kuinka suuri oli hänen uusi palkkansa? **9,4 €**
b) Tommin tuntipalkka on 9,3 € ja hänen juuri aloittaneen työkaverinsa Eetun tuntipalkka on 7,9 €. Kuinka monta prosenttia suurempi Tommin tuntipalkka on kuin Eetun?

RATKAISU:
a) Palkka nousee 12% joten uusi palkka on alkuperäisestä 100% + 12% = 112%. Uusi palkka on $1{,}12 \cdot 8{,}4$ € =**9,4 €**

b) Ensin tulee laskea palkkojen erotus ja sen jälkeen lasketaan kuinka monta prosenttia erotus on Eetun tuntipalkasta.

Erotus on 9,3 € − 7,9 € = 1,4 € . Verrataan erotusta Eetun tuntipalkkaan. $\frac{1{,}4\text{ €}}{7{,}9\text{ €}} \approx 0{,}177 =$ **17,7**%. Vastaus: **17,7** %.

Harjoitustehtävä 3. *Aukkotehtävä*
a) Juulia osti laivan tax free -myymälästä hajuveden, joka maksoi 54,60 €. Kuinka paljon hajuvesi olisi maksanut maissa, kun siellä hintaan lisätään 24% arvonlisävero?
b) Ennen laivalle lähtöään Juulia osti kaupasta kasvovoiteen, joka maksoi 16,30 €. Millä hinnalla hän olisi saanut voiteen laivan tax free -myymälästä ilman arvonlisäveroa?

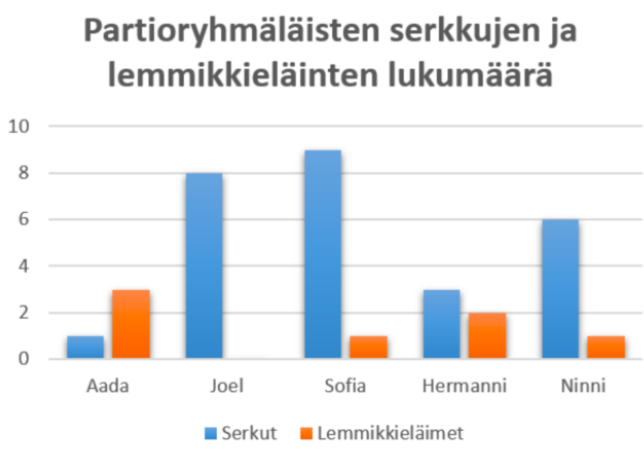
RATKAISU:
a) Verottomaan hintaan lisätään arvonlisävero 24%, jotta saadaan arvonlisäverollinen hinta eli hinta on $100\% + 24\% = 124\%$ verottomasta hinnasta. Veroton hinta on 54,60 € , joten arvonlisäverollinen hinta on 54,60 € $\cdot$ 1,24 $\approx$ **66,70 €**

b) Merkitään laivan tax free myymälän verotonta hintaa muuttujalla x. Koska verottomaan hintaan lisätään arvonlisävero, veron määrä tulee laskea verottomasta hinnasta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan veroton hinta x.

$$\begin{aligned} x \cdot 1{,}24 &= 16{,}30 \qquad || : 1{,}24 \\ x &= \frac{16{,}30}{1{,}24} \\ x &\approx 13{,}15 \end{aligned}$$

Vastaus: **13,15** euroa.

Harjoitustehtävä 4. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Aada, Joel, Sofia, Hermanni ja Ninni tekivät tutkimusta siitä, kuinka paljon heillä on serkkuja ja lemmikkieläimiä. He saivat tulokseksi alla olevan taulukon mukaiset tulokset.



Täydennä seuraavat väittämät niin, että ne vastaavat taulukoituja tuloksia.
a) Kaikilla ryhmäläisistä *on/ei ole* lemmikkieläimiä.
b) Vähiten serkkuja oli *Aadalla/Joelilla/Sofialla/Hermannilla/Ninnillä.*
c) Taulukosta *ei voida/voidaan* päätellä, että Sofian vanhemmilla on eniten sisaruksia.
d) Serkkujen lukumäärän mediaani on ___ .
e) Lemmikkieläinten lukumäärän moodi on ___ .
f) Lemmikkieläinten lukumäärän keskiarvo on ___ .

RATKAISU:
a) **ei ole**: Pylväsdiagrammista nähdään, että Joelilla ei ole oranssia pylvästä ollenkaan. Hänellä ei siis ole lemmikkieläimiä.

b) **Aadalla**: Pylväsdiagrammin sininen pylväs on kaikkein matalin Aadalla.
c) **ei voida**: Taulukko ei kerro partioryhmäläisten vanhempien sisarusten lukumäärää, joten kyseistä taulukon ulkopuolista päätelmää ei voida tehdä.
d) Mediaani on keskimmäinen havaintoarvo, kun havainnot on järjestetty suurusjärjestykseen. Luetellaan serkkujen lukumäärät suuruusjärjestyksessä: 1, 3, 6, 8, 9. Tästä huomataan, että keskimmäinen havaintoarvo on 6, joten mediaani on **6**.
e) Moodi on havaintoarvo, jota on eniten. Oransseista pylväistä katsottuna lemmikkejä on 3, 0, 1, 2 ja 1. Tästä huomataan, että havaintoarvoa 1 on eniten, joten moodi on **1**.
f) Keskiarvo lasketaan jakamalla havaintoarvojen summa havaintoarvojen lukumäärällä. Havaintoarvoja on nyt 5 kpl ja keskiarvo on

$$\frac{3+0+1+2+1}{5} = \mathbf{1{,}4}.$$

Harjoitustehtävä 5. *Aukkotehtävä*
Varastossa on 3 dl suolaliuosta, jonka suolapitoisuus on 20 %. Pulloon lisätään 2 dl vettä. Mikä on uuden liuoksen suolapitoisuus prosentteina?

RATKAISU:
Alkuperäisessä liuoksessa on suolaa $0{,}20 \cdot 3$ dl $= 0{,}6$ dl . Kun pulloon lisätään 2 desilitraa vettä, liuosta on tämän jälkeen 5 desilitraa, josta 0,6 desilitraa on suolaa. Suolapitoisuus on siis $\frac{0{,}6}{5} = 0{,}12 = 12$ %.

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Jyrki valmistaa makkaraa, johon hän laittaa 3,25 kg hirvenlihaa, 1,5 kg sianlihaa ja 0,25 kg muita aineksia. Mikä on valmiin makkaran rasvaprosentti, kun hirvenlihassa rasvaa on 4 %, sianlihassa 25 % ja muussa aineksessa 65 %?

RATKAISU:
Hirven makkaraa tulee yhteensä 3,25 kg + 1,5 kg + 0,25 kg = 5,0 kg. Hirvenlihassa on rasvaa $0{,}04 \cdot 3{,}25$ kg, sianlihassa $0{,}25 \cdot 1{,}5$ kg ja muussa aineksessa $0{,}65 \cdot 0{,}25$ kg. Rasvapitoisuus on

$$\frac{0{,}04 \cdot 3{,}25 + 0{,}25 \cdot 1{,}5 + 0{,}65 \cdot 0{,}25}{5{,}0} = 0{,}1335 \approx 13\ \%$$

Harjoitustehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Matikkakerhossa oli aluksi 20 jäsentä. Seuraavana vuonna jäsenmäärä nousi 60 prosenttia ja kolmantena vuonna laski edellisestä 25 prosenttia.
a) Kuinka monta jäsentä matikkakerhossa oli kolmantena vuonna?
b) Kuinka monta prosenttia kerhon jäsenmäärä muuttui kokonaisuudessaan?
c) Kuinka monta prosenttia jäsenmäärä muuttuu kolmannesta vuodesta jos neljäntenä vuonna jäseniä tulee 7 lisää?

RATKAISU:
a) Jäsenmäärä nousi toisena vuonna 1,6-kertaiseksi eli toisena vuonna jäsenmäärä oli $1{,}6 \cdot 20 = 32$.
Kolmantena vuonna jäsenmäärä laski 0,75-kertaiseksi eli kolmantena vuonna jäsenmäärä oli $0{,}75 \cdot 32 = 24$.
Jäsenmäärä voidaan laskea myös suoraan $0{,}75 \cdot 1{,}6 \cdot 20 = 24$.

b) Muutos on $1{,}6 \cdot 0{,}75 = 1{,}2$ eli 1,2-kertainen, joten jäsenmäärä muuttui 20 %. Muutosprosentin voi laskea myös jakamalla jäsenmääränmuutoksen suuruuden alkuperäisellä jäsenmäärällä: $\frac{24-20}{20} = \frac{4}{20} = 0{,}2 = 20$ %.
c) Muutos kolmannesta vuodesta on 7 jäsentä. Verrataan muutosta kolmannen vuoden jäsenmäärään eli 24 jäseneen ja saadaan kysytty muutosprosentti.

$$\frac{7}{24} = 0{,}29166... \approx 0{,}29 = 29\ \%$$

Harjoitustehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Elokuvateatteri Filmi & Rulla nosti lippujensa hintoja 10 % vuoden alussa. Saman vuoden aikana lippujen hintoja nostettiin vielä 15 %. Kuinka monta prosenttia hinnat nousivat kokonaisuudessaan kyseisen vuoden aikana?

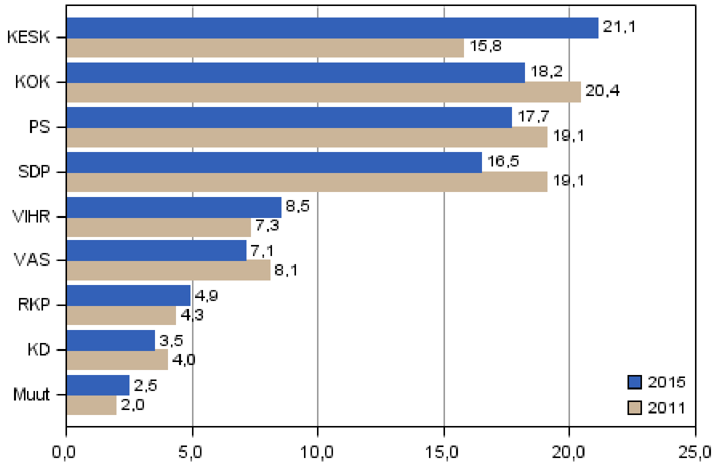
RATKAISU:
Merkitään lipun alkuperäistä hintaa kirjaimella a. Ensin hinnat nousivat 10 %, joten hinta oli 100 % + 10 % = 110 % alkuperäisestä hinnasta eli $1{,}1 \cdot a$. Tämän jälkeen lipun hinta nousi 15 %, joten hinta oli 100 % + 15 % = 115 % edellisen korotuksen jälkeisestä hinnasta eli $1{,}15 \cdot 1{,}1 \cdot a = 1{,}265 \cdot a$. Lipun hinnat siis nousivat korotuksien jälkeen 1,265-kertaisiksi eli hinnat nousivat kokonaisuudessaan 26,5 %.

Koe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*
a) Kuinka monta prosenttia on 250 metrin koulumatka 3,0 km työmatkasta?
b) Mikä on 330 € maksavan kameran arvonlisäveroton hinta, kun tuotteen myyntihintaan sisältyy 24 % arvonlisävero?
c) Kirjan hinta alennettiin 24,90 eurosta 14,90 euroon. Kuinka monta prosenttia hinta aleni?
d) Noora on 151 cm pitkä ja Elli 167 cm pitkä. Kuinka monta prosenttia pidempi Elli on kuin Noora?

Tehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Juulia tulee salilta ja tekee itselleen treenin jälkeen proteiinijuoman, johon hän laittaa 3 rkl proteiinijauhetta ja 5 dl vettä. Mikä on valmiin juoman proteiinijauhepitoisuus kun yhden ruokalusikan vetoisuus on 15 ml?

Tehtävä 3. *Pudotusvalikko*
Valitse kuvaajan perusteella ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia.



Kuva 1. Puolueiden kannatus eduskuntavaaleissa 2011 ja 2015.

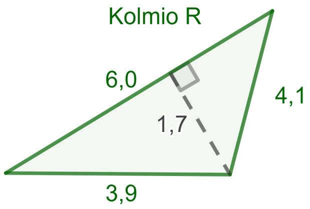
a) Vuoden 2015 vaalien äänistä yli kolmasosa meni Perussuomalaisille (PS) tai SDP:lle.
b) Keskustapuolueen kannatus laski prosenttiyksikköinä eniten vuoden 2011 vaaleista.
c) Noin joka viides suomalainen äänesti vuoden 2011 vaaleissa Kokoomusta.
d) Kristillisdemokraattien (KD) kannatus oli sama vuosien 2011 ja 2015 vaaleissa.
e) Alle puolet äänestäjistä äänesti vuoden 2015 vaaleissa Kokoomusta, Perussuomalaisia tai SDP:tä.

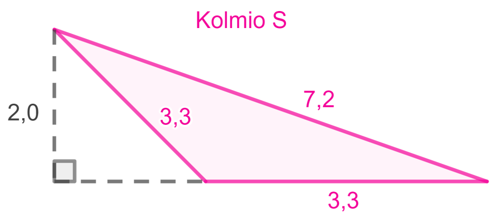
Tehtävä 4. *Pudotusvalikko, tosi/epätosi*
Ravintola on pyytänyt asiakkailtaan arvosteluja nettisivuillaan asteikolla 1-5 ja saanut arviot 4, 3, 1, 3, 2, 4, 4, 5, 2, 1, 4, 2, 2, 4, 3.
Ovatko seuraavat aineistoon liittyvät väitteet tosia?
a) Arvostelujen mediaani on suurempi kuin moodi.
b) Arvostelujen mediaani on suurempi kuin keskiarvo.
c) Jos aineistoon lisätään kolme arvostelua arvosanalla kaksi, uusi moodi on 2.
d) Jos aineistosta poistetaan arvostelut arvosanalla yksi, pysyy aineiston mediaanina 3.

Tehtävä 5. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Farkut maksavat liikkeessä 78 euroa. Samat farkut ovat myymälän nettikaupassa 15% alennuksessa, mutta netistä ostaessa loppusummaan lisätään toimituskulut 8,90 €. Kannattaako farkut ostaa suoraan liikkeestä vai tilata nettikaupasta? Kuinka monta prosenttia edullisemmin farkut saa halvemmalla tavalla?

Yhteinen - Lyhyt 6. Geometria

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Laske kolmioiden R ja S pinta-ala ja piiri. Anna vastaus 1 desimaalin tarkkuudella.
Kolmion R pinta-ala on ___ , kolmion R piiri on ___ .
Kolmion S pinta-ala on ___ , kolmion S piiri on ___ .

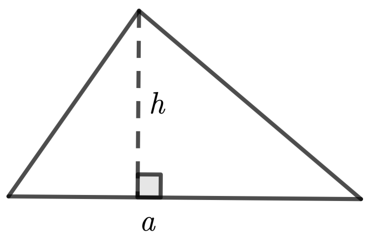




RATKAISU:
Kolmion pinta-ala A lasketaan kaavalla Kolmion R kanta on 6,0 ja korkeus on 1,7. Sijoi-

$$A = \frac{ah}{2},$$

jossa a on kanta ja h kantaa a kohtisuorassa oleva korkeus.



tetaan ne pinta-alan kaavaan

$$A = \frac{6{,}2 \cdot 1{,}7}{2} = \frac{10{,}2}{2} = 5{,}1.$$

Kolmion R pinta-ala on siis **5,1**.

Kolmion piiri p saadaan laskemalla kolmion kaikkien sivujen pituudet yhteen. Kolmion R piiri on $p = 6{,}0 + 3{,}9 + 4{,}1 =$ **14,0**.

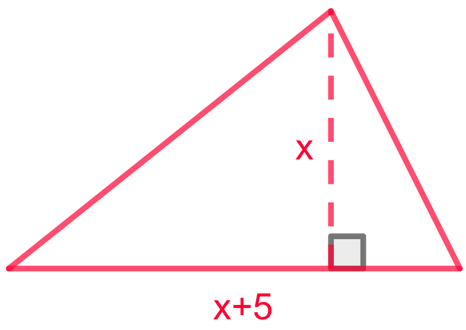
Kolmiosta S kerrottu korkeus on 2,0 ja sitä vastaava kanta on 3,3. Sijoitetaan ne pinta-alan kaavaan

$$A = \frac{3{,}3 \cdot 2{,}0}{2} = \frac{6{,}6}{2} = 3{,}3.$$

Kolmion S pinta-ala on siis **3,3**. Kolmion S piiri on $p = 3{,}3 + 3{,}3 + 7{,}2 =$ **13,8**.

Harjoitustehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Kolmion kanta on 5 cm pidempi kuin sen korkeus. Kolmion pinta-alan tiedetään olevan 18 cm^2. Mikä on kolmion korkeus? Anna vastaus cm tarkkuudella.

RATKAISU:



Merkitään kolmion korkeutta muuttujalla x. Kolmion kanta on tällöin $x + 5$. Lisäksi tiedetään, että kolmion pinta-ala on 18 cm^2. Sijoitetaan tunnetut arvot pinta-alan kaavaan ja ratkaistaan korkeus x.

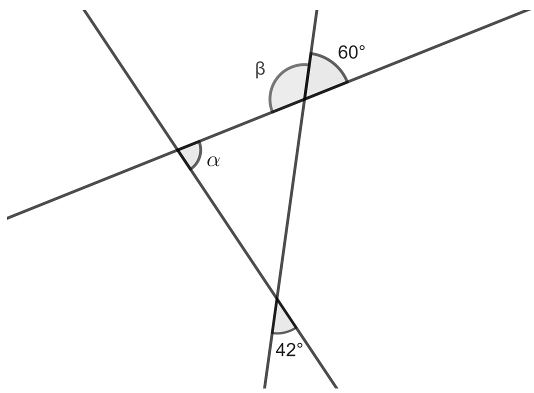
$$\begin{aligned} \frac{x \cdot (x+5)}{2} &= 18 \qquad || \cdot 2 \\ x^2 + 5x &= 36 \\ x^2 + 5x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö $x^2 + 5x - 36 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

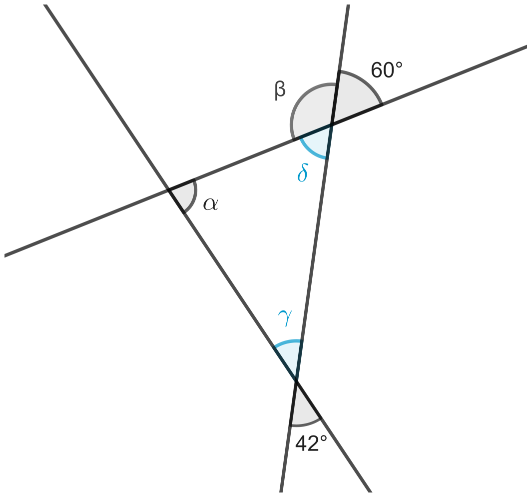
Ratkaisuiksi saadaan $x = \frac{-5+13}{2} = 4$ tai $x = \frac{-5-13}{2} = -9$. Pituus ei voi olla negatiivista, joten negatiivinen vastaus hylätään. **Kolmion korkeus on 4 cm**.

Harjoitustehtävä 3. *Aukkotehtävä*
Laske kulmien α ja β suuruudet.



RATKAISU:
Kulma β on 60 asteisen kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on aina 180°, joten kulman β suuruus on $180° - 60° = 120°$.

Merkitään kuvaan kulmat δ ja γ. Kun saamme selvitettyä kulmien δ ja γ suuruudet, kulma α saadaan selville, koska tiedetään kolmion kulmien summan olevan 180 °. Kulma



$\gamma = 42°$ ja kulma $\delta = 60°$, sillä ristikulmat ovat yhtä suuria. Kolmion kulmien summa on $180°$, joten kulma α saadaan ratkaistua yhtälöstä $180° = \alpha + \delta + \gamma$.

$$\alpha = 180° - \delta - \gamma = 180° - 60° - 42° = 78°$$

Harjoitustehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 97 mm ja kateetin pituus on 72 mm. Laske
a) kolmion toisen kateetin pituus kokonaisina millimetreinä.
b) kolmion pinta-ala neliösenttimetreinä 1 desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU:
a) Pythagoraan lauseen mukaan $a^2 + b^2 = c^2$, kun a ja b ovat suorakulmaisen kolmion kateetit ja c hypotenuusa.

Lauseen avulla saadaan laskettua tehtävän suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus. Merkitään kysytyn kateetin pituutta muuttujalla x ja sijoitetaan luvut Pythagoraan lauseeseen.

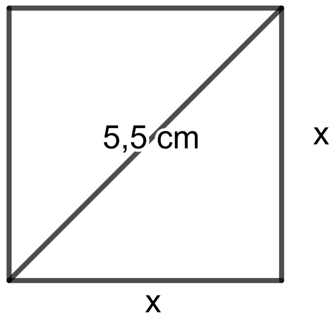
$$\begin{aligned} 72^2 + x^2 &= 97^2 \\ x^2 &= 97^2 - 72^2 \\ x &= \pm\sqrt{97^2 - 72^2} \\ x &= \pm 65 \end{aligned}$$

Kateetin pituus ei voi olla negatiivista, joten negatiivinen vastaus hylätään. Kysytyn kateetin pituus on siis **65** mm.

b) Kolmion pinta-ala on $A = \frac{65\ mm\ \cdot\ 75\ mm}{2} = 2437,5\ mm^2$. Muutetaan vielä neliömillimetrit neliösenttimetreiksi: $2437,5\ mm^2 = 24,375\ cm^2$. Vastaus neliösenttimetreinä 1 desimaalin tarkkuudella on **24,4** cm^2

Harjoitustehtävä 5. *Aukkotehtävä*
Neliön muotoisen aitauksen lävistäjäksi halutaan 5, 5 m. Kuinka monta 5 metrin aitarullaa tarvitaan, kun tehdään neljä erillistä aitausta?

RATKAISU:



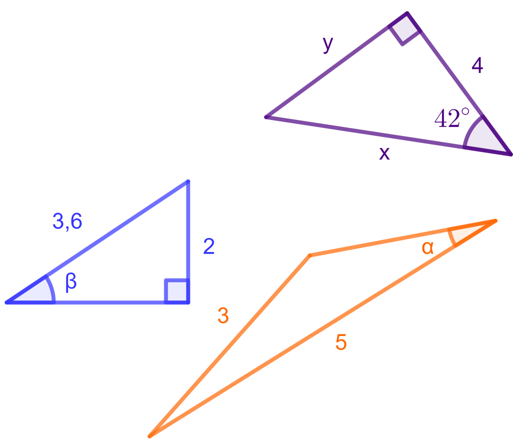
Kun neliön lävistäjän pituus tiedetään, Pythagoraan lauseen avulla saadaan selvitettyä sivun pituus. Merkitään neliön sivun pituutta muuttujalla x ja selvitetään sivun pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 5,5^2 \\ 2x^2 &= 5,5^2 \qquad || : 2 \\ x^2 &= \frac{5,5^2}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{5,5^2}{2}} \end{aligned}$$

Neliön sivun pituus ei voi olla negatiivista, joten negatiivinen vastaus hylätään. Neliön sivun pituus on siis $\sqrt{\frac{5,5^2}{2}}$ m. Yhtä aitausta varten aitaa tarvitaan $4 \cdot \sqrt{\frac{5,5^2}{2}}$ m, joten neljää aitausta varten tarvitaan $4 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{5,5^2}{2}}$ m ≈ 62 m.

Aita myydään 5 metrin rullissa, joten rullia tarvitaan $\frac{62\ m}{5\ m/rulla} = 12,4$ rullaa. Tulos täytyy pyöristää ylöspäin, jotta materiaali riittää kaikkiin aitoihin eli vastaus on **13** rullaa.

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*



Laske kuvan perusteella kulmien α ja β suuruudet sekä sivujen x ja y pituudet. Anna vastaukset 1 desimaalin tarkkuudella ja käytä desimaalierottimena pilkkua. Jos kysyttyä kulmaa tai pituutta ei voi laskea trigonometrian avulla, laita aukkoon - .
Kulman β suuruus on ___ astetta.
Sivun x pituus on ___ .
Sivun y pituus on ___ .
Kulman α suuruus on ___ astetta.

RATKAISU:
Kulman β suuruus saadaan ratkaistua sinin avulla, sillä kulman sini $= \frac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{hypoteenuusa}}$.

$$\sin\beta = \frac{2}{3,6}$$
$$\beta = 33{,}74899...^\circ$$
$$\beta \approx 33{,}7^\circ$$

Sivun x pituus saadaan ratkaistua kosinin avulla, sillä kulman kosini $= \frac{\text{kulman viereinen kateetti}}{\text{hypoteenuusa}}$.

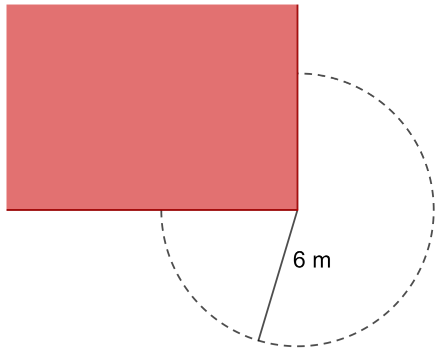
$$\cos 42^\circ = \frac{4}{x}$$
$$x = \frac{4}{\cos 42^\circ}$$
$$x = 5{,}3825...$$
$$x \approx 5{,}4$$

Sivun y pituus saadaan ratkaistua tangentin avulla, sillä kulman tangetti $= \frac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$.

$$\tan 42^\circ = \frac{y}{4}$$
$$y = \tan 42^\circ \cdot 4$$
$$y = 3{,}6016...$$
$$y \approx 3{,}6$$

Kulman α suuruutta ei voida määrittää suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla, sillä kolmio ei ole suorakulmainen.

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Koira on kytkettynä talon kulmaan 6 m pitkällä hihnalla. Kuinka suuri pinta-ala koiralla on liikkua? Anna vastaus kokonaisina neliömetreinä.



RATKAISU:
Ympyrän pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = \pi r^2, \qquad \text{missä } r \text{ on ympyrän säde.}$$

Koiran liikkuma-alue on osa ympyrää, jonka säde on 6 metriä. Alue on kuitenkin vain $\frac{3}{4}$ koko ympyrästä, joten alueen pinta-ala on myös $\frac{3}{4}$ ympyrän pinta-alasta. Lasketaan nyt koiran liikkuma-alueen pinta-ala

$$A = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 \approx 84{,}8$$

Pyöristetään vastaus vielä neliömetrien tarkkuuteen. Pinta-ala on 85 m^2.

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
a) Kartan mittakaava on 1:5000. Luonnossa uimaranta on 220 metriä pitkä. Kuinka pitkä uimaranta on kartalla? Anna vastaus senttimetreinä 1 desimaalin tarkkuudella.
b) Heinäsirkasta on tehty kuvasuurennos mittakaavalla 3:1. Kuinka pitkä on heinäsirkka kuvassa, kun se on todellisuudessa 1,5 cm pitkä?

RATKAISU:
a) Kartan mittakaava on 1:5000, joten 1 cm kartalla on 5 000 cm luonnossa. Muunnetaan 220 metriä senttimetreiksi: 220 m = 22 000 cm. Merkitään kysyttyä matkaa kartalla muuttujalla x. Pituus kartalla ja luonnossa ovat suoraan verrannollisia, joten x saadaan ratkaistua verrantoyhtälöllä.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{5\,000}{22\,000} \\ 1 \cdot 22\,000 &= 5\,000 \cdot x \qquad || : 5\,000 \\ \frac{22\,000}{5\,000} &= x \\ 4{,}4 &= x \end{aligned}$$

Uimaranta on kartalla **4,4** cm pitkä.

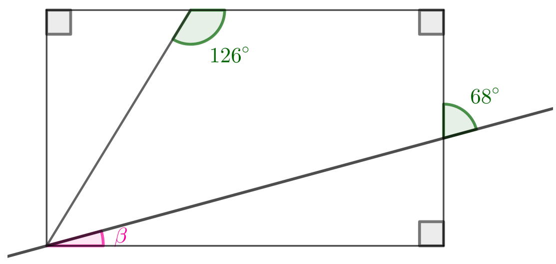
b) Suurennoksen mittakaava on 3:1, joten 3 cm kuvassa on 1 cm luonnossa. Merkitään kysyttyä pituutta muuttujalla x ja ratkaistaan x verrantoyhtälön avulla.

$$\begin{aligned} \frac{3}{1} &= \frac{x}{1{,}5} \\ 3 \cdot 1{,}5 &= x \cdot 1 \\ 4{,}5 &= x \end{aligned}$$

Heinäsirkka on kuvassa **4,5** cm pitkä.

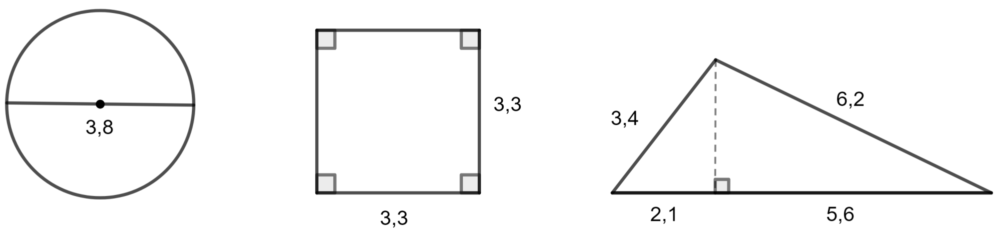
Koe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Laske kulman β suuruus asteina.



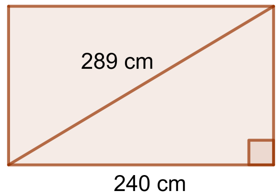
Tehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Kolmion korkeus on 2 kertaa niin pitkä kuin sen kanta. Kolmion pinta-ala on 49 cm^2. Laske kolmion korkeus. Anna vastaus kokonaisina senttimetreinä.

Tehtävä 3. *Aukkotehtävä*

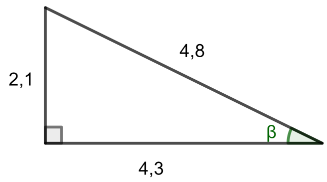


Millä seuraavista kuvioista on suurin pinta-ala? Entä piiri? Laske nämä 1 desimaalin tarkkuudella.
Suurin pinta ala on kuviolla *neliö/kolmio/ympyrä* ja kuvion pinta-ala on __.
Suurin piiri on kuviolla *neliö/kolmio/ympyrä* ja kuvion piiri on __.

Tehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Mika pyysi vaimoaan mittaamaan hiekkalaatikon leveyden ja pituuden. Vaimo mittasi kuitenkin epähuomiossa leveyden sijasta hiekkalaatikon lävistäjän sekä pituuden. Lävistäjäksi hän sai 289 cm ja pituudeksi 240 cm. Kuinka leveä hiekkalaatikko on, kun Mika tietää hiekkalaatikon olevan suorakulmainen? Anna vastaus senttimetrien tarkkuudella.

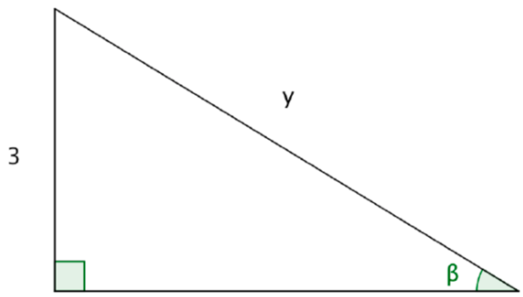


Tehtävä 5. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*



Ovatko väittämät a)-c) tosia vai epätosia?
a) $\cos\beta = \frac{2{,}1}{4{,}8}$ *tosi/epätosi*
b) $\tan\beta = \frac{2{,}1}{4{,}3}$ *tosi/epätosi*
c) $\sin\beta = \frac{4{,}3}{4{,}8}$ *tosi/epätosi*
d) Laske kulman β suuruus.

Tehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Ratkaise sivun y pituus.



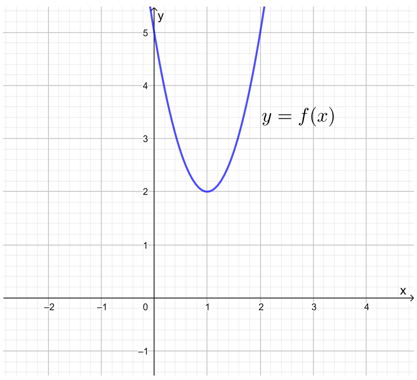
a) $\frac{3}{sin\beta}$
b) $\frac{3}{cos\beta}$
c) $y = 3sin\beta$
d)$y = 3cos\beta$

Tehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Kartalla matka Mattilanniemestä Keskustorille on 3 cm. Todellisuudessa matka on $1,8$ km. Mikä on kartan mittakaava?

Yliopisto - Lyhyt Loppukoe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*
a) Minkä arvon funktio $f(x) = 4x + 10$ saa kohdassa $x = -2$?
b) Millä muuttujan x arvolla funktio $h(x) = \frac{2}{5}x + 18$ saa arvon 22?

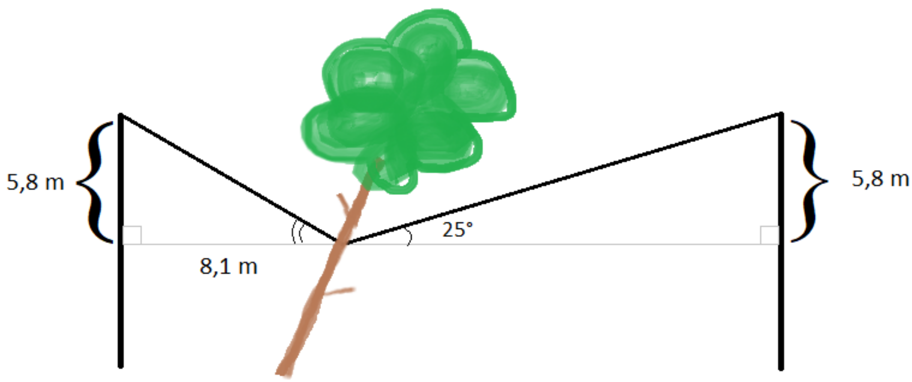
Tehtävä 2. *Pudotusvalikko*
Vastaa kysymyksiin funktion f kuvaajan perusteella. a) Funktion f kuvaaja on *ylös-*



päin/alaspäin aukeava paraabeli.
b) Funktion f arvo kohdassa $x = 2$ on *1, 0, 2, 5, ei mikään näistä.*
c) Funktiolla f on *ei yhtään, yksi, kaksi* nollakohtaa.
d) Funktion f kuvaaja leikkaa suoran $y = x + 2$. *tosi/epätosi*

Tehtävä 3. *Aukkotehtävä*
Ratkaise yhtälöstä x.
a) $2x^2 + 2x = 4x$
b) $x^2 - 4 = 4x + 8$

Tehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Puu on kaatunut ukkosen jäljiltä sähköjohdon päälle ja sähköjohto on venynyt puun painosta. Kuinka monta metriä venyneen sähköjohdon pituus on? Anna vastaus 2 desimaalin tarkkuudella.



Tehtävä 5. *Aukkotehtävä*

Ympyrän säde on 4 cm. Jos sädettä kasvatetaan 2 cm, kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala kasvaa?

Tehtävä 7. *Monivalinta*
Ratkaise massa m kineettisen energian E yhtälöstä $E = \frac{1}{2}mv^2$
a) $m = \frac{E}{2v^2}$
b) $m = \frac{2E}{\sqrt{v}}$
c) $m = \frac{2E}{v^2}$
d) $m = \frac{v^2}{2E}$
e) Ei mikään näistä.

Tehtävä 7. *Monivalinta*
Mikä seuraavista lausekkeen $\frac{a^2b^5+a}{ab}$ sievennyksistä on oikein?
a) $ab^4 + b$
b) $a^3b^6 + a$
c) a^2b^4
d) $ab^4 + \frac{1}{b}$
e) ei mikään näistä.

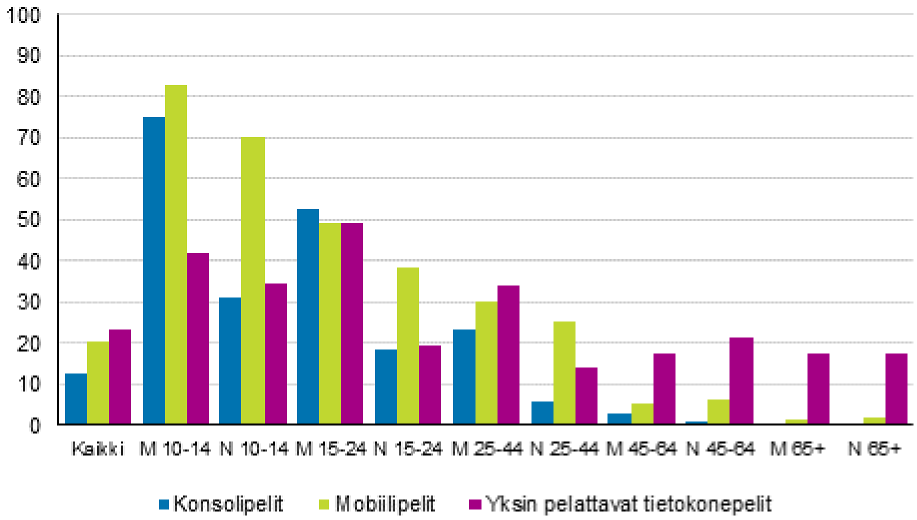
Tehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Sanni teki pirtelöä, josta $\frac{2}{5}$ on jogurttia ja $\frac{2}{5}$ vaniljajäätelöä. Pirtelössä on myös 2 dl mansikoita ja 1 dl vadelmia. Kuinka monta kokonaista annosta pirtelöä on, jos yksi annos on 2 dl?

Tehtävä 9. *Aukkotehtävä*
Karjalanpiirakoita tulee 20 kpl seuraavalla ohjeella:
2 dl vettä
1 tl suolaa
5 dl ruisjauhoja
1 rkl öljyä
0,8 l valmista riisipuuroa

Täydennä ohjeeseen oikeat määrät, kun halutaan tehdä 70 kpl karjalanpiirakoita
___ dl vettä
___ tl suolaa
___ dl ruisjauhoja
___ rkl öljyä
___ l valmista riisipuuroa

Tehtävä 10. *Pudotusvalikko*

Digitaalisten pelien pelaaminen Outolaaksossa pelityypeittäin lokakuussa 2017, %



Valitse tilaston perusteella, ovatko väittämät epätosia vai tosia.

a) Kaikkein suosituin pelityyppi, jota pelataan vähintään kerran kuussa, on mobiilipelit.

b) 10-14 –vuotiailla pojilla ja tytöillä suosituin pelityyppi on mobiilipelit.

c) 25-44 –vuotiaat naiset pelaavat yhtä paljon konsolipelejä kuin yksin pelattavia tietokonepelejä.

d) Sekä miehillä että naisilla konsolipelien pelaaminen vähenee iän kasvaessa.

e) Yli puolet 15-24 –vuotiaista miehistä pelaa vähintään kerran kuussa konsolipelejä.

Yliopisto - Lyhyt Eksponenttiyhtälö ja logaritmi

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Ratkaise
a) $2^x = 16$
b) $6^{4x+1} = 36$
c) $\frac{9^4}{9^x} = 9^{26}$

RATKAISU:
Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet samankantaisina potensseina. Kun kantaluvut ovat yhtä suuret, eksponenttien on oltava yhtä suuria. Näin saadaan yhtälö, josta ratkaistaan kysytty muuttuja x.

a)

$$\begin{aligned} 2^x &= 16 \\ 2^x &= 2^4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on $x = 4$.

b)

$$\begin{aligned} 6^{4x+1} &= 36 \\ 6^{4x+1} &= 6^2 \\ 4x + 1 &= 2 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Oikea vastaus on $x = \frac{1}{4}$.

c)

$$\frac{9^4}{9^x} = 9^{26}$$

Samankantaisten potenssien osamäärä lasketaan vähentämällä osoittajan eksponentista nimittäjän eksponentti.

$$\begin{aligned} 9^{4-x} &= 9^{26} \\ 4 - x &= 26 \\ -x &= 22 \\ x &= -22 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on $x = -22$.

Harjoitustehtävä 2. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista kaikki oikeat ratkaisut yhtälölle $5^x = 125$.
a) $x = \log_5 125$
b) $x = 3$

c) $x = \log_{125} 5$
d) $x = 5$
e) $x = 5^{125}$
f) $x = 125^5$
g) $x = 125$

RATKAISU:
Kun $a > 0, b > 0$ ja $a \neq 1$, yhtälön $a^x = b$ ratkaisu on $x = \log_a b$.
Yhtälön $5^x = 125$ ratkaisu määritelmän mukaan on $x = \log_5 125$.
Yhtälön ratkaisuksi saadaan joko päättelemällä tai laskimella $x = 3$. Oikeita ratkaisuja annetuista vaihtoehdoista on siis kaksi, $x = \log_5 125$ ja sen arvoksi laskimella saatu $x = 3$.

Harjoitustehtävä 3. *Aukkotehtävä*
Ratkaise seuraavat eksponenttiyhtälöt.
a) $7^x = 7$
b) $13^x = 1$

RATKAISU:
a) Mikä tahansa luku potenssiin 1 on luku itse. Siispä $7^1 = 7$ ja oikea vastaus on $x = 1$.
b) On määritelty, että minkä tahansa positiivisen luvun nollas potenssi on aina 1. Siispä $13^0 = 1$ ja oikea vastaus on $x = 0$.

Harjoitustehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Kirjoita seuraavien eksponenttiyhtälöiden ratkaisut logaritmia käyttäen ja ilmoita ratkaisun likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella.
a) $2^x = 9$
b) $6^x = 24$

RATKAISU:
Kuten harjoitustehtävän 2 ratkaisussa, saadaan eksponenttiyhtälölle ratkaisu logaritmin avulla.

a) Yhtälön $2^x = 9$ ratkaisu on $x = \log_2 9$. Syötetään se laskimeen. Oikea ratkaisu neljän desimaalin tarkkuudella on $x = 3{,}1699$.

b) Yhtälön $6^x = 24$ ratkaisu on $x = \log_6 24$. Syötetään se laskimeen. Oikea ratkaisu neljän desimaalin tarkkuudella on $x = 1{,}7737$.

Harjoitustehtävä 5. *Pudotusvalikko*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista funktion sanallista kuvausta vastaava oikea lauseke pudotusvalikosta.
a) Musiikkipalvelussa julkaistun uuden kappaleen kuuntelukertojen määrä viisinkertaistuu joka tunti sen jälkeen, kun kappale on saavuttanut 40 ensimmäistä kuuntelukertaa. Muuttujalla x kuvataan aikaa tunteina siitä hetkestä lähtien, kun kappale on saavuttanut 40 kuuntelukertaa. 1) $f(x) = 5 \cdot 40^x$
2) $f(x) = 40 \cdot 5^x$
3) $f(x) = x \cdot 40^5$
4) $f(x) = 40 \cdot x^5$

b)Täyteen ladatun akun varaus on 2100 mAh. Jos sitä ei käytetä, alkaa sen varaus

purkautua itsekseen siten, että akku menettää varaustaan 0,3 % joka tunti. Muuttujalla x kuvataan aikaa tunteina siitä hetkestä lähtien, kun akku on ladattu täyteen. 5) $f(x) = 2100 \cdot 0{,}997^x$
6) $f(x) = 2100 \cdot x^{0{,}997}$
7) $f(x) = 0{,}997 \cdot 2100^x$
8) $f(x) = x \cdot 0{,}997^{2100}$

c) Joulun jälkeen kaapeissa oli 28 suklaarasiaa. Sukulaisten ollessa kylässä suklaan määrä väheni tasaisesti 1,5 rasialla joka tunti. Muuttujalla x kuvataan aikaa tunteina siitä hetkestä lähtien, kun sukulaiset saapuvat vierailulle.
9) $f(x) = 28 - 1{,}5x$
10) $f(x) = 1{,}5x - 28$
11) $f(x) = 28 - 1{,}5^x$
12) $f(x) = 1{,}5 - 28^x$

RATKAISU:
a) Kyseessä on eksponentiaalinen muutos eli suure muuttuu samassa aikayksikössä aina yhtä monta prosenttia. Eksponentiaalista muutosta mallinnetaan funktiolla $f(x) = a \cdot q^x$, missä a on suureen alkuperäinen arvo ja q muutoskerroin, jonka on oltava suurempaa kuin 0.

Suureen alkuperäinen arvo $a = 40$, koska ennen kuin kuuntelukertojen viisinkertaistuminen alkaa, kappaletta oli kuunneltu 40 kertaa. Koska kuuntelukertojen määrä viisinkertaistuu joka tunti, saadaan muutoskertoimeksi $q = 5$.
Vastaus: Kysytty funktio on $f(x) = 40 \cdot 5^x$, missä x on aika tunteina siitä hetkestä lähtien, kun kappaletta on kuunneltu 40 kertaa.

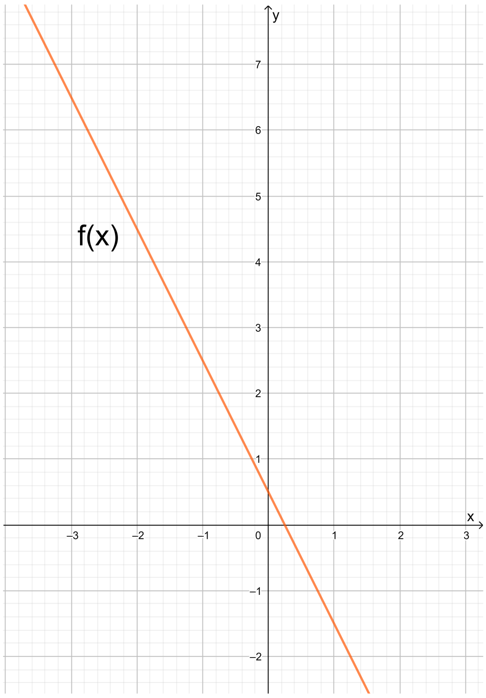
b) Kyseessä on jälleen eksponentiaalinen muutos eli mallinnetaan muutosta funktiolla $f(x) = a \cdot q^x$.

Nyt alkuperäinen arvo $a = 2100$, koska se on täyteen ladatun akun varaus. Muutoskertoimeksi saadaan $q = 1 - 0,003 = 0{,}997$, koska akku menettää varaustaan joka tunti 0,3 %.
Vastaus: Kysytyn funktion yhtälö on $f(x) = 2100 \cdot 0{,}997^x$, missä x on aika tunteina.

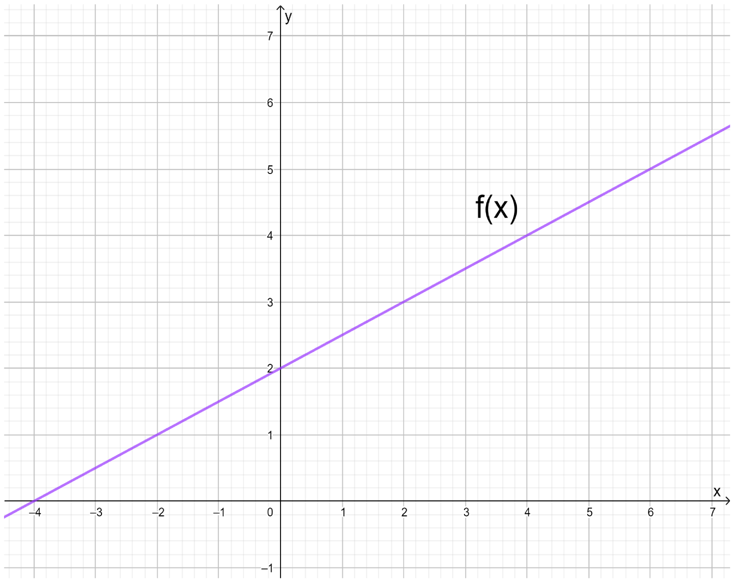
c) Kyseessä ei ole eksponentiaalinen vaan lineaarinen muutos eli suure muuttuu joka tunti yhtä monta yksikköä. Tätä mallinnetaan funktiolla $f(x) = b + kx$.

Koska suklaarasioita oli alussa 28 kpl saadaan vakioksi $b = 28$. Joka tunti suklaarasioita oli 1,5 vähemmän, joten saadaan kulmakerroin $k = -1{,}5$.
Vastaus: Kysytty funktio on siis $f(x) = 28 - 1{,}5x$.

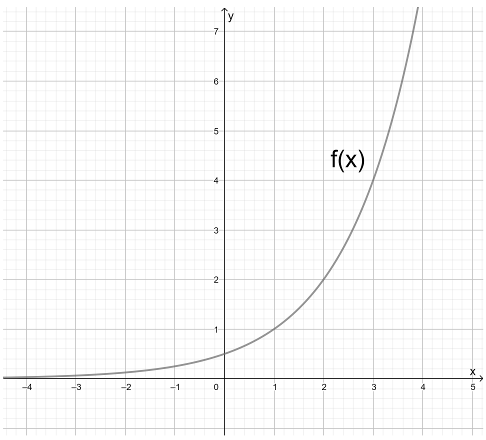
Harjoitustehtävä 6. *Pudotusvalikko*
Yhdistä seuraavat funktiot oikeisiin kuvaajiin.
a) $f(x) = -2x + 0{,}5$
b) $f(x) = 0{,}5x + 2$
c) $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$
d) $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$



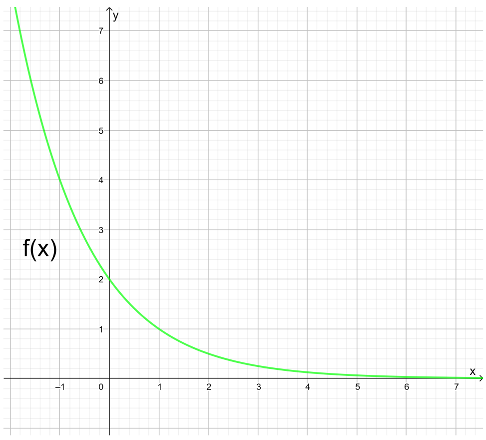
Kuva 1



Kuva 2



Kuva 3



Kuva 4

RATKAISU:
a) $f(x) = -2x + 0{,}5$
Funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on -2 ja vakiotermi 0,5. Suora on siis laskeva ja se leikkaa y-akselin pisteessä (0;0,5). Oikea vastaus on kuva 1.

b) $f(x) = 0{,}5x + 2$

Funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 0,5 ja vakiotermi 2. Suora on siis nouseva ja leikkaa y-akselin pisteessä (0,2). Oikea vastaus on kuva 2.

c) $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$
Funktio kuvaa eksponentiaalista muutosta, jossa **muutoskerroin** $q = 2$ **on suurempaa kuin 1 eli kyseessä on eksponentiaalinen kasvu**. Funktion arvo siis kaksinkertaistuu aina, kun x:n arvo kasvaa yhdellä. Oikea vastaus on kuva 3

d) $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$
Funktio kuvaa eksponentiaalista muutosta, jossa **muutoskerroin** $q = 0{,}5$ **on pienempää kuin 1 eli kyseessä on eksponentiaalinen väheneminen**. Funktion arvo siis puolittuu aina, kun x:n arvo kasvaa yhdellä. Oikea vastaus on kuva 4.

Harjoitustehtävä 7. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Kulutsanian väkiluku oli 1,1 miljoonaa vuoden 2013 alussa ja väestönkasvu 1,4 % vuodessa.
Valitse seuraavista vaihtoehdoista se funktion lauseke, joka kuvaa kyseistä tilannetta.
1) $f(x) = 1{,}1 \cdot 1{,}014^x$
2) $f(x) = 1{,}014 \cdot 1{,}1^x$
3) $f(x) = 2{,}2 \cdot 1{,}014^x$
4) $f(x) = 1{,}1 \cdot 2{,}2^x$

Minkä vuoden alussa väkiluku on ylittynänyt 2,2 miljoonaa, jos väestönkasvu jatkuu samanlaisena?

RATKAISU:
Väestö kasvaa vuosittain 1,4 %, joten seuraavana vuonna väestön määrä on 100 % + 1,4 % = 101,4 % edellisen vuoden väestön määrästä. Väestö siis 1,014-kertaistuu joka vuosi.

Kun aikaa kuluu x vuotta, väkiluku 1,014-kertaistuu x kertaa eli $1{,}014^x$-kertaistuu.
Väkiluku on alussa 1,1 miljoonaa.

Kulutsanian väkilukua kuvaava funktio on $f(x) = 1{,}1 \cdot 1{,}014^x$.

Nyt halutaan tietää kuinka monen vuoden kuluttua väkiluku on 2,2 miljoonaa eli $f(x) = 2{,}2$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muuttuja x.

$$\begin{aligned} 1{,}1 \cdot 1{,}014^x &= 2{,}2 \qquad \| : 1{,}1 \\ 1{,}014^x &= 2 \\ x &= \log_{1{,}014} 2 \\ x &= 49{,}8562 \end{aligned}$$

Koska kysyttiin minä vuonna väkiluku on ylittänyt 2,2 miljoonaa, pyöristetään saatu luku ylöspäin seuraavaan kokonaislukuun, $x \approx 50$.
Kulutsanian väkiluku on ylittänyt 2,2 miljoonaa vuonna $2013 + 50 = 2063$.

Harjoitustehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Siru saa isovanhemmiltaan ylioppilaslahjaksi yhteensä 650 euroa.
a) Hän tallettaa ylioppilaslahjarahat 5 vuoden määräaikaistalletustilille, jonka korko on 4 %. Mikä on Sirun tilin saldo 5 vuoden määräajan jälkeen, kun tililtä ei ole saanut

nostaa ennen määräajan päättymistä lainkaan rahaa. Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

b) Kuinka monen vuoden kuluttua lahjarahojen määrä on kaksinkertaistunut, jos Siru tallettaakin lahjarahat säästötilille, jonka korko on 3 %?

RATKAISU:
a) Talletus kasvaa vuosittain 5 %, joten seuraavana vuonna talletuksen määrä on 100 % + 5 % = 105 % edellisen vuoden talletuksesta. Talletus siis 1,05-kertaistuu joka vuosi. Talletusta kuvaava funktio on $f(x) = 650 \cdot 1{,}05^x$.

Korkoa maksetaan 5 vuoden ajalta eli lasketaan $f(5)$.

$$f(5) = 650 \cdot 1{,}05^5 = 829{,}583 \approx 829{,}58$$

Oikea vastaus kahden desimaalin tarkkuudella on **829,58 euroa**.

b) Jos tilin korko on 3 %, talletus 1,03-kertaistuu joka vuosi.
Nyt talletusta kuvaava funktio on $f(x) = 650 \cdot 1{,}03^x$.
Koska kysyttiin kuinka monen vuoden kuluttua lahjarahojen määrä on kaksinkertaistunut, ratkaistaan yhtälö $f(x) = 2 \cdot 650$.

$$\begin{aligned} 650 \cdot 1{,}03^x &= 2 \cdot 650 \qquad \| : 650 \\ 1{,}03^x &= 2 \\ x &= \log_{1{,}03} 2 \\ x &= 23{,}4498 \end{aligned}$$

Tehtävässä kysyttiin kuinka monen vuoden kuluttua lahjarahojen määrä on kaksinkertaistunut. 23 vuoden jälkeen jäädään tämän alle, joten pyöristetään saatu luku x ylöspäin seuraavaan kokonaislukuun eli $x \approx 24$.

Huomaa, että koska toisella rivillä alkuperäinen talletussumma on jaettu pois, ei tässä tapauksessa ole väliä kuinka suuren summan tallettaa. Ainoastaan koron suuruus määrää ajan, joka kaksinkertaistumiseen kuluu. Samassa ajassa minkä suuruinen talletus tahansa on kaksinkertaistunut tällä korolla.

Lahjarahojen määrä on kaksinkertaistunut **24 vuoden kuluttua**.

Harjoitustehtävä 9. *Aukkotehtävä*
Liuoksen pH lasketaan kaavalla pH $= -\log_{10}([H_3O^+])$, missä $[H_3O^+]$ tarkoittaa liuoksen oksoniumionikonsentraatiota.
a) Mikä on kolajuoman pH, kun sen oksoniumionikonsentraatio on $3{,}2 \cdot 10^{-3}$?
b) Mikä on käsisaippuan oksoniumionikonsentraatio, kun sen pH on on 5,5?

RATKAISU:
Liuoksen pH lasketaan kaavalla pH $= -\log_{10}([H_3O^+])$, missä $[H_3O^+]$ tarkoittaa liuoksen oksoniumionikonsentraatiota.

a) Sijoitetaan oksoniumionikonsentraatio $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ annettuun kaavaan.

$$\text{pH} = -\log_{10}(3{,}2 \cdot 10^{-3}) = 2{,}4948 \approx 2{,}5$$

Kolajuoman pH = 2,5.

b) Sijoitetaan pH = 5,5 annettuun kaavaan.

$$5{,}5 = -\log_{10}([H_3O^+])$$

Kun $a > 0, b > 0$ ja $a \neq 1$, yhtälön $a^x = b$ ratkaisu on $x = \log_a b$.
Nyt logaritmi voidaan palauttaa eksponenttiyhtälöksi tämän määritelmän mukaisesti

$$[H_3O^+] = 10^{-5{,}5}$$
$$[H_3O^+] = 0{,}0000031623 = 3{,}1623 \cdot 10^{-6} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-6}$$

Käsisaippuan oksoniumionikonsentraatio on $3{,}2 \cdot 10^{-6}$.

Harjoitustehtävä 10. *Monivalinta (valitse yksi)*
Liuoksen pH lasketaan kaavalla pH $= -\log_{10}([H_3O^+])$, missä $[H_3O^+]$ tarkoittaa liuoksen oksoniumionikonsentraatiota.

Liuoksen, jonka pH = 1,5, oksoniumionikonsentraatioksi saadaan 0,0316.

Kuinka suuri on toisen liuoksen oksoniumionikonsentraatio verrattuna ensimmäiseen liuokseen, kun toisen liuoksen pH = 3,5?
a) Konsentraatio on kaksinkertainen.
b) Konsentraatio on puolet ensimmäisen liuoksen konsentraatiosta.
d) Konsentraatio on kymmenkertaistunut.
e) Konsentraatio on $\frac{1}{10}$ aiemmasta.
f) Konsentraatio on 100-kertainen aiempaan liuokseen nähden.
g) Konsentraatio on $\frac{1}{100}$ aiemmasta.

RATKAISU:
pH-asteikko on logaritminen asteikko, jossa logaritmin kantalukuna on 10. Se tarkoittaa, että aina kun **pH pienenee yhdellä askeleella**, esimerkiksi pH 7 $\rightarrow$ pH 6, **oksoniumionikonsentraatio 10-kertaistuu**.

Siispä kun pH kasvaa kahdella askeleella pH 2 $\rightarrow$ pH 4 oksoniumionikonsentraatiosta tulee $10^{-2} = \frac{1}{100}$ aiemmasta oksoniumionikonsentraatiosta.

Sama voidaan huomata laskemalla nämä konsentraatiot ja vertaamalla niitä toisiinsa.
Kun pH=4, saadaan kaavalla $pH = -\log_{10}(c(H_3O^+))$

$$4 = -\log_{10}(c(H_3O^+))$$
$$c(H_3O^+) = 10^{-4}$$
$$c(H_3O^+) = 0{,}0001$$

Kun pH=2 on oksoniumionikonsentraatio 0,01 (= 10^{-2}), joten nyt

$$\frac{0{,}0001}{0{,}01} = 0{,}01$$

Eli saatu oksoniumionikonsentraatio on 0,01-kertainen aiempaan nähden eli $\frac{1}{100}$ tästä.

Koe 1

Tehtävä 1. *Monivalintatehtävä (valitse oikea)*
Valitse seuraavista vaihtoehdoista kaikki oikeat ratkaisut yhtälölle $6^x = 15$.

(1) $\log_6 15 = x$
(2) $\log_{15} 6 = x$
(3) $\log_x 6 = 15$
(4) $\log_x 15 = 6$
(5) $x \approx 1,51$
(6) $x \approx 0,66$

Tehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Ratkaise seuraavat eksponenttiyhtälöt

(1) $5^x = 1$
(2) $4^{x-5} = 64$

Tehtävä 3. *Monivalintatehtävä (valitse oikea)*
Ratkaise seuraavat eksponenttiyhtälöt

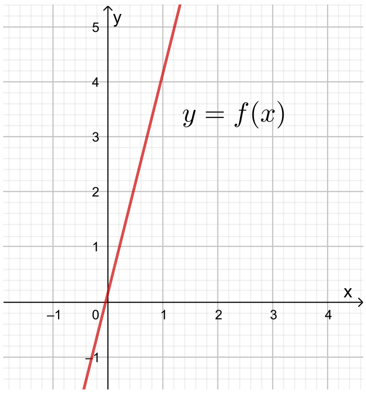
(1) $11^x \cdot 11^4 = 11^7$
(2) $\frac{10^7}{10^x} = 1000$

Tehtävä 4. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Pasin palkkaa korotetaan joka vuosi 3%.
Valitse seuraavista vaihtoehdoista se funktion lauseke, joka kuvaa tilannetta, jossa hänen palkkansa on 50 % suurempi kuin ennen korotuksia.

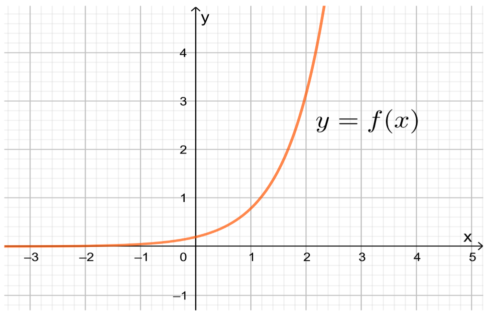
(1) $1{,}5a = a \cdot 1{,}03^x$
(2) $a = 1{,}5a \cdot 1{,}03^x$
(3) $1{,}5a = 1{,}03 \cdot a^x$
(4) $a = 1{,}03 \cdot (1{,}5a)^x$

Kuinka monen vuoden kuluttua palkka on 50 % suurempi kuin ennen korotuksia?

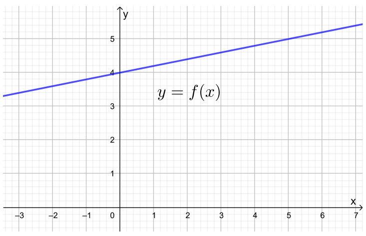
Tehtävä 5. *Pudotusvalikko*
Yhdistä seuraavat funktiot oikeisiin kuvaajiin.
a) $f(x) = 4x + 0{,}2$
b) $f(x) = 0{,}2x + 4$
c) $f(x) = 0{,}2 \cdot 4^x$
d) $f(x) = 4 \cdot 0{,}2^x$



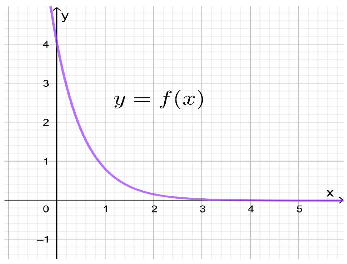
Kuva 1



Kuva 2

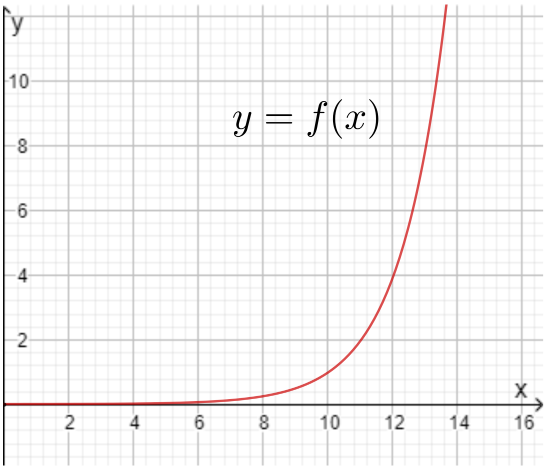


Kuva 3

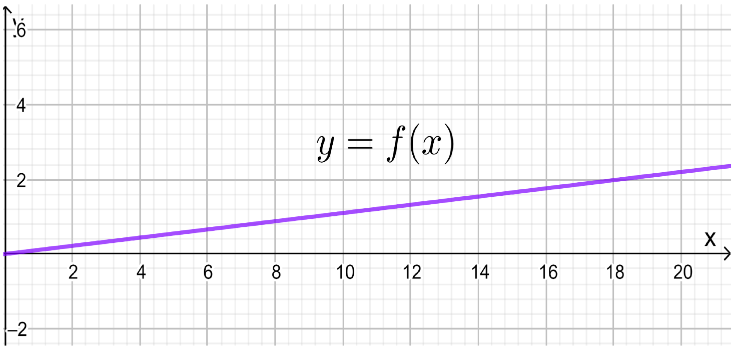


Kuva 4

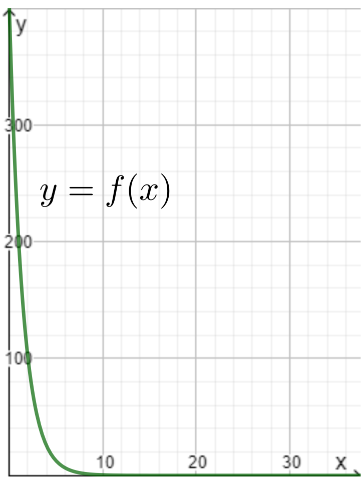
Tehtävä 6. *Pudotusvalikko*
Yhdistä mallin sanallinen kuvailu oikeaan kuvaajaan.
a) Sosiaalisessa mediassa julkaistun videon katselukertojen määrä kaksinkertaistuu joka tunti sen jälkeen, kun video on saavuttanut 10 ensimmäistä katselukertaa.
b) Särkylääkkeen lääkeaineen määrä kehossa tabletin syömisen jälkeen puolittuu jokaisena kuluvana tuntina lääkken oton jälkeen.
c) Kynttilän pituus sen polttamisen aikana muuttuu lineaarisesti.
d) Pellavansiemenannoksen sisältämän ravintokuidun määrä on suoraan verrannollinen pellavansiementen määrään.



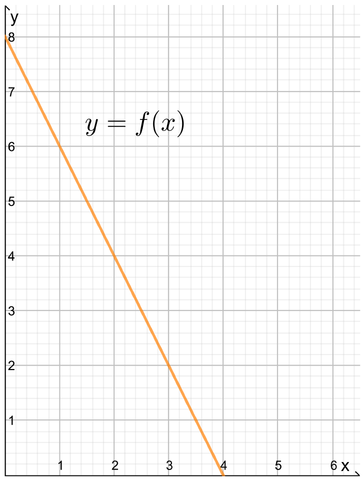
Kuva 1



Kuva 2



Kuva 3



Kuva 4

Tehtävä 7. *Pudotusvalikko*

Yhdistä seuraavat tilanteet oikeisiin funktioiden lausekkeisiin.
a) Saavissa on 120 l vettä, mutta siihen tulee reikä, josta valuu joka tunti 0,4 l vettä pois. Muuttujalla x kuvataan aikaa tunteina.

(1) $f(x) = 0{,}4x - 120$
(2) $f(x) = 120 - 0{,}4x$
(3) $f(x) = 120 \cdot 0{,}4^x$
(4) $f(x) = 0{,}4 \cdot 120^x$

b) Solujen määrä kasvaa tunnissa 20 % ja alussa niitä on 2 miljoonaa. Muuttujalla x kuvataan aikaa tunteina.

(1) $f(x) = 2\,000\,000 \cdot 1{,}2^x$
(2) $f(x) = 2 \cdot 1{,}2^x$
(3) $f(x) = 2\,000\,000 + 1{,}2x$
(4) $f(x) = 1{,}2 \cdot 2^x$

c) Suomen hiilidioksidipäästöt olivat 60,1 miljoonaa tonnia vuonna 2016 ja ne vähenevät 5% vuosittain. Muuttujalla x kuvataan aikaa vuosina.

(1) $f(x) = 0{,}95 \cdot 60{,}1^x$
(2) $f(x) = 60{,}1 - 0{,}95x$
(3) $f(x) = 60{,}1 - x^{0{,}95}$
(4) $f(x) = 60{,}1 \cdot 0{,}95^x$

Tehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

$$M = \frac{\log_{10} E - 5{,}24}{1{,}44},$$

missä E on järistyksessä vapautuva energia jouleina (J).
a) Erään maanjäristyksen voimakkuus on 3. Mikä oli järistyksessä vapautuva energia?
b) Järistyksessä vapautui $7,6 \cdot 10^{13}$ J energiaa. Mikä oli järistyksen voimakkuus?

Yliopisto - Lyhyt Todennäköisyys

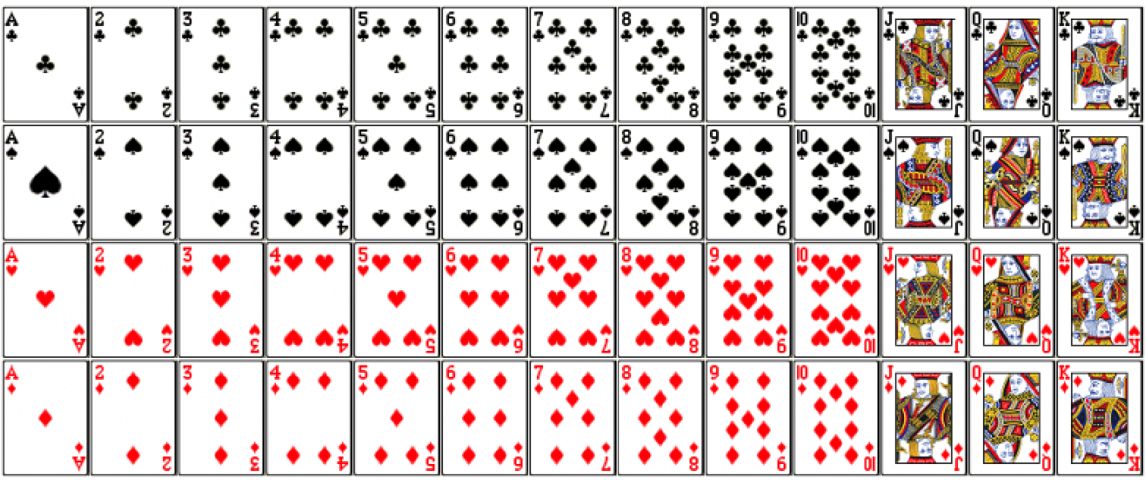
Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Tarkastellaan perinteistä korttipakkaa. Kuinka moni korttipakan korteista on
a) väriltään musta ja numeroarvoltaan kahdeksan eli kasi?
b) väriltään musta tai numeroarvoltaan kahdeksan eli kasi?
c) hertta tai kuningas?

RATKAISU:
Perinteisessä korttipakassa on 52 korttia ja kortteja on neljää maata: risti, pata, hertta ja ruutu. Punaisia maita ovat hertta ja ruutu, ja mustia maita risti ja pata. Jokaista maata on 13 korttia ja jokaisella kortilla on maan lisäksi arvo väliltä $1-13$. Näissä tehtävissä tarkastellaan aina tällaista korttipakkaa.

a) Mustia kaseja on kaksi: ristikasi ja patakasi. **Oikea vastaus on 2.**

b) Matematiikassa tai-sanalla tarkoitetaan tilannetta, jossa jompikumpi tai molemmat asiat tapahtuvat. Mustia kortteja on $13 + 13 = 26$, ja kortteja, joiden arvo on kahdeksan, on 4. Kuitenkin ristikasi ja patakasi toteuttavat nämä molemmat ehdot ja ne on jo laskettu mustiin kortteihin, joten kaseja, jotka eivät ole mukana mustien korttien lukumäärässä on kaksi kappaletta. Kortteja, jotka toteuttavat ehdon 'musta tai kasi' eli jotka ovat väriltään mustia, arvoltaan kaseja tai kumpaakin, on siis yhteensä $26 + 2 = 28$. **Oikea vastaus on 28.**

c) Korttipakassa on herttoja 13 ja kuninkaita 4. Yksi kuninkaista on hertta ja kortti on jo valmiiksi laskettuna herttojen määrään. Herttoja tai kuninkaita on siis $13 + 3 = 16$. **Oikea vastaus on 16.**



Harjoitustehtävä 2. *Aukkotehtävä*
a) Sara, Juulia, Sauli, Eemil ja Salla ovat vaeltamassa. He sopivat, että kaksi heistä lähtee hakemaan kaivosta vettä. Kuinka monella eri tavalla veden hakijapari voidaan valita?
b) Loput kolme retkeilijää jäävät tekemään ruokaa. Heistä yksi valmistelee tulen, yksi kokoaa trangian ja yksi lähtee pilkkomaan puita. Kuinka monella eri tavalla he voivat työjaon tehdä?

RATKAISU:
a) Vedenhakijaparin järjestyksellä ei ole merkitystä, joten lasketaan kuinka monta erilaista kahden henkilön paria viiden henkilön ryhmästä voidaan muodostaa.

Joukosta, jossa on n alkiota, voidaan valita k alkiota sisältävä osajoukko eli k-kombinaatio

$$\binom{n}{k}$$

eri tavalla. Viidestä vaeltajasta voidaan muodostaa $\binom{5}{2} = 10$ erilaista kahden hengen vedenhakijaparia.

Koska joukko on niin pieni, kaikki vedenhakijaparit voidaan myös luetella:
Sara ja Juulia,
Sara ja Sauli,
Sara ja Eemil,
Sara ja Salla,
Juulia ja Sauli,
Juulia ja Eemil,
Juulia ja Salla,
Sauli ja Eemil,
Sauli ja Salla tai
Eemil ja Salla

b) Kun tehdään useita peräkkäisiä valintoja, vaihtoehtojen kokonaismäärä saadaan kertomalla eri valintavaiheessa olevien vaihtoehtojen lukumäärät.

Ensimmäisessä vaihtoehdossa eli tulen teossa vaihtoehtoja on 3, toisessa eli trangian kokoamisessa enää 2 ja kolmannessa eli puiden pilkonnassa 1. Työnjakoon on siis $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eri vaihtoehtoa.

Harjoitustehtävä 3. *Aukkotehtävä*
Erään taloyhtiön hallituksessa on 10 jäsentä. Puheenjohtaja valitaan vuodeksi kerrallaan ja oletetaan lisäksi, että hallitukseen ei tule uusia jäseniä eikä vanhoja jäseniä poistu.

1. Kuinka monella eri tavalla he voivat keskuudestaan valita kolmen vuoden aikana puheenjohtajan, jos
a) puheenjohtajan on oltava joka vuosi eri?
b) puheenjohtaja voi olla sama kuin edellisvuonna?

2. Kuinka monessa eri järjestyksessä taloyhtiön hallituksen jäsenet voivat astua kokoushuoneeseen sisään?

RATKAISU:
a) Kun puheenjohtajan on oltava joka vuosi eri, vaihtoehtoja ensimmäisen vuoden puheenjohtajaksi on 10, toisen vuoden puheenjohtajaksi 9 ja kolmannen vuoden puheenjohtajaksi 8. Tuloperiaatteen mukaan puheenjohtava voidaan valita $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ eri tavalla.

b) Jos puheenjohtaja voi olla sama kuin edellisvuonna, vaihtoehtoja jokaisena vuonna on 10. Tuloperiaatteen mukaan puheenjohtaja voidaan valita $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ eri tavalla.

c) Ensimmäinen kokoukseen tulija voidaan valita 10 eri tavalla, toinen tulija 9 eri tavalla, kolmas 8 eri tavalla ja niin edelleen. Järjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan yhteensä

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3\ 628\ 800$.

Harjoitustehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Luokassa on 24 oppilasta. Luokan oppilaista 7 pelaa salibandya, 12 jalkapalloa ja 5 oppilasta pelaa molempia lajeja. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti luokasta valittu oppilas
a) pelaa jalkapalloa?
b) pelaa jalkapalloa ja salibandya?
c) pelaa jalkapalloa tai salibandya?
d) ei pelaa jalkapalloa eikä salibandya?
Anna vastaukset desimaalilukuna 0-1 väliltä, 2 desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU:
Tapahtuman todennäköisyys saadaan jakamalla tapahtumalle suotuisten alkeistapausten lukumäärä kaikkien alkeistapausten lukumäärällä. Tapahtuman todennäköisyys on vähintään 0 ja korkeintaan 1.

a) Luokassa on yhteensä 24 oppilasta, joten kaikkien alkeistapausten lukumäärä on 24. Merkitään tapahtumaa ”pelaa jalkapalloa” kirjaimella A. Tapahtumalle A suotuisia alkeistapauksia eli jalkapalloa pelaavia oppilaita on 12. Tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{12}{24} = 0{,}50.$$

Oikea vastaus on 0,50.

b) Tapahtumalle B=”pelaa jalkapalloa ja salibandya” suotuisia alkeistapauksia eli molempia lajeja pelaavia oppilaita on 5. Tapahtuman B todennäköisyys on

$$P(B) = \frac{5}{24} = 0{,}208... \approx 0,21.$$

Oikea vastaus on 0,21.

c) Tapahtumalle C=”pelaa jalkapalloa tai salibandya” suotuisia alkeistapauksia ovat jalkapalloa ja salibandya pelaavat oppilaat. Jalkapalloa pelaa 12 oppilasta ja salibandya 7, mutta 5 heistä pelaa molempia lajeja. Jalkapalloa tai salibandya pelaavia on yhteensä siis $12 + 7 - 5 = 14$, jossa ”kahteen kertaan lasketut”on vähennetty summasta. Suotuisten alkeistapausten määrä on siis 14. Tapahtuman C todennäköisyys on

$$P(C) = \frac{14}{24} = 0{,}583... \approx 0,58.$$

Oikea vastaus on 0,58.

d) Tapahtumalle D=”ei pelaa jalkapalloa eikä salibandya” suotuisia alkeistapauksia ovat ne oppilaat, jotka eivät pelaa kumpaakaan lajia. Kohdassa c laskettiin, että 14 luokan oppilaista pelaa jompaa kumpaa lajia, joten oppilaita, jotka eivät pelaa kumpaajaan lajia, on $24 - 14 = 10$. Tapahtuman D todennäköisyys on

$$P(D) = \frac{10}{24} = 0{,}416... \approx 0,42.$$

Tapahtuman D todennäköisyys voidaan laskea myös vastatapahtuman avulla.

Tapahtuman ”ei pelaa jalkapalloa eikä salibandya” vastatapahtuma on c)-kohdan ”pelaa jalkapalloa tai salibandya" tapahtuma. Täten tapahtuman D todennäköisyys $P(D)$ voidaan laskea vastatapahtuman C todennäköisyyden avulla käyttäen komplementtisääntöä.

$$P(D) = 1 - \frac{14}{24} = 0{,}416... \approx 0,42$$

Oikea vastaus on 0,42.

Harjoitustehtävä 5. *Aukkotehtävä*
Koripalloilija heittää vapaaheiton koriin 78 % todennäköisyydellä. Peräkkäiset heitot ovat toisistaan riippumattomia. Mikä on todennäköisyys sille, että
a) vapaaheitto ei mene koriin?
b) kahdesta vapaaheitosta molemmat menevät koriin?
c) kolmesta vapaaheitosta ainakin yksi menee koriin?

RATKAISU:
a) Tapahtuman A="vapaaheitto ei mene koriin" vastatapahtuma on $\bar{A}$ ="vapaaheitto menee koriin". Koska vastatapahtuman $\bar{A}$ todennäköisyys tiedetään, saadaan tapahtuman A todennäköisyys laskettua käyttäen komplementtisääntöä.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$
$$P(A) = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$$

Oikea vastaus on 0,22.

b) Koska peräkkäiset heitot ovat toisistaan riippumattomia, todennäköisyys voidaan laskea kahden tapahtuman todennäköisyyksien tulona.
P(kahdesta vapaaheitosta molemmat menevät koriin)
$= P$(ensimmäinen heitto menee koriin ja toinen heitto menee koriin)
$= P$(heitto menee koriin) $\cdot$ P(heitto menee koriin)
$= 0{,}78 \cdot 0{,}78$
$= 0{,}608...$
$\approx 0,61$

Oikea vastaus on 0,61.

c) Tapahtuman B="kolmesta vapaaheitosta ainakin yksi menee koriin" vastatapahtuma on $\bar{B}$="kolmesta vapaaheitosta yksikään ei mene koriin". Tapahtuman $\bar{B}$ todennäköisyys on helpompi laskea, koska tapahtuman B todennäköisyyden laskemisessa tulisi ottaa huomioon tapaukset, että yksi heitto menee koriin ja kaksi eivät, kaksi heittoa menee koriin ja yksi ei jne. Kun vastatapahtuman $\bar{B}$ todennäköisyys tiedetään, voidaan laskea tapahtuman B todennäköisyys komplementtisäännön avulla.

$P(\bar{B})$
$= P$(1. heitto, 2. heitto ja 3. heitto menevät koriin) $= P$(heitto ei mene koriin) $\cdot$ P(heitto ei menee koriin) $\cdot$ P(heitto ei mene koriin)
$= 0{,}22 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}22$
$= 0{,}010...$

Niinpä

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}010... \approx 0{,}99.$$

Oikea vastaus on 0,99.

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Leena ja Petra pelaavat Yatzya. He ovat sopineet, että pelaajalla on kaksi heittomahdollisuutta. Heitoilla yritetään kerätä pistelomakkeeseen mahdollisimman paljon pisteitä ja jokaisen vuoron jälkeen pistelomakkeeseen merkitään jokin pistemäärä.

Leena saa ensimmäisellä vuorollaan viidellä nopalla kolme kuutosta ja haluaa heittää kahta muuta noppaa uudelleen.

Millä todennäköisyydellä Leena saa kahdella muulla nopalla
a) kaksi kuutosta?
b) kummankin nopan silmäluvuksi enintään 3?
c) kaksi samaa lukua?
d) silmälukujen summaksi enemmän kuin 8?
e) silmälukujen summaksi 6 tai 7?

RATKAISU:
a) Tapahtumat $A =$"ensimmäinen heitetty noppa on 6" ja $B =$"toinen heitetty noppa on 6" ovat toisistaan riippumattomia. Todennäköisyys saada yhden nopan heitosta silmäluvuksi 6 on $\frac{1}{6}$. Näin ollen kysytty todennäköisyys on $\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}277... \approx 0{,}03$.

b) Kummankin nopan silmäluku saa olla enintään kolme, joten suotuisat alkeistapaukset ovat 1, 2 ja 3. Tapahtuman $A =$"ensimmäinen heitetty noppa on enintään 3" todennäköisyys on $\mathrm{P}(A)= \frac{3}{6}$ ja tapahtuman $B =$"toinen heitetty noppa on enintään 3" todennäköisyys on $\mathrm{P}(B)= \frac{3}{6}$. Tapahtumat A ja B ovat toisitaan riippumattomia, joten kysytty todennäköisyys on $\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = 0{,}25$.

c) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla, jossa pystyrivillä on toisen heitetyn nopan mahdolliset silmäluvut ja vaakarivillä toisen. Väritetään taulukosta suotuisat tapaukset eli ne, joissa molempien noppien silmäluku on sama.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Taulukosta nähdään, että alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$, joista 6 on suotuisia, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{6}{36} = 0{,}166... \approx 0{,}17$.

d) Merkitään taulukkoon kahden nopan silmälukujen summat. Väritetään taulukosta suotuisat tapaukset eli ne, joissa silmälukujen summa on enemmän kuin 8.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Taulukosta nähdään, että näitä suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 10, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{10}{36} = 0{,}277... \approx 0{,}28$.

e) Merkitään taulukkoon kahden nopan silmälukujen summat. Väritetään taulukosta suotuisat tapaukset eli ne, joissa silmälukujen summa on 6 tai 7.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Taulukosta nähdään, että näitä suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 11, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{11}{36} = 0{,}305... \approx 0{,}31$.

Harjoitustehtävä 7. *Pudotusvalikko*
Valehtelijoiden saarella asuu kaksi heimoa: lierot ja kierot. Tiedetään, että lierot valehtelevat aina, kun taas kierot voivat valehdella tai puhua totta. Tutkimusmatkailija kysyy eräältä maan asukkaalta, kumpaan heimoon tämä kuuluu. Voiko hän päätellä oikean vastauksen, jos vastaaja ilmoittaa olevansa
a) liero?
b) kiero?

RATKAISU:
a) Asukas voi puhua totta tai valehdella. Oletetaan, että asukas puhuu totta. Tällöin hän on liero. Kuitenkin lierot valehtelevat aina, joten asukas ei silloin voisi puhua totta. Hän ei siis voi olla liero. Koska hän ei voi olla liero, hänen on oltava kiero.

b) Asukas voi puhua totta tai valehdella. Jos asukas valehtelee, hän ei ole kiero vaan liero. Tämä on mahdollista, sillä lierot valehtevat aina. On myös mahdollista, että asukas puhuu totta ja todella on kiero, sillä kierot voivat puhua myös totta. Asukas voi siis kuulua kumpaan heimoon tahansa, ja ei ole mahdollista päätellä, onko asukas liero vai kiero.
Oikea vastaus on ei.

Koe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*
a) Kokouksessa on 4 osallistujaa ja kaikki osallistujat kättelevät keskenään. Kuinka monta kertaa yhteensä kätellään?
b) Piia, Eeva, Miia ja Johanna lähtevät luontopolulle kävelemään. Kuinka monessa eri järjestyksessä he voivat kävellä polulla?

Tehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Viestijoukkue, jossa on neljä juoksijaa, osallistuu ruotsalaisviestille, jossa ensimmäinen juoksee 100 metriä, toinen 200 metriä, kolmas 300 metriä ja neljäs 400 metriä. Kuinka monessa eri järjestyksessä he voivat juosta viestin?

Viestijoukkueeseen tulee yllättäen kaksi juoksijaa lisää. Kuinka monessa eri järjestyksessä he nyt voivat juosta viestin, kun neljä pääsee juoksemaan?

Tehtävä 3. *Aukkotehtävä*

Kuinka monella eri tavalla tekstissä kuvattu valinta voidaan suorittaa? Valitse oikea laskutapa.
a) Seitsemänhenkisestä perheestä valitaan kaksi kauppaanlähtijää.
b) Seitsemänhenkinen työryhmä valitsee keskuudestaan puheenjohtajan, ja puheenjohtaja valitsee itselleen varapuheenjohtajan kahdesta vapaaehtoisesta.
c) Seitsemänhenkinen kaveriporukka valitsee keskuudestaan ensin kuskin ajamaan Audia ja sitten kuskin ajamaan Alfa Romeoa.

$$1)\quad 7\cdot 2 \qquad 2)\quad \binom{7}{2} \qquad 3)\quad 7\cdot 6 \qquad 4)\quad 7!$$

Tehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Millä todennäköisyydellä korttipakasta vedetty kortti on
a) musta?
b) hertta?
c) numero 7?
d) pienempi kuin 5, kun ässän arvo on 1?
e) pataässä tai patajätkä? 0,04
Anna vastaukset 2 desimaalin tarkkuudella.

Tehtävä 5. *Pudotusvalikko*
Saana ehtii kouluun ajoissa todennäköisyydellä 0,98 ja Henna-Kaisa todennäköisyydellä 0,77. Kummankaan ehtiminen ei vaikuta toisen ehtimiseen. Yhdistä kuhunkin seuraavista tapahtumista sen todennäköisyyden oikea laskutapa.
1) Saana ja Henna-Kaisa ehtivät kouluun.
2) Kumpikaan ei ehdi kouluun.
3) Henna-Kaisa ehtii kouluun, mutta Saana ei.

a) $0{,}77 \cdot 0{,}02$ b) $0{,}98 \cdot 0{,}23$ c) $0{,}98 \cdot 0{,}77$ d) $0{,}02 \cdot 0{,}23$

Tehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä
a) noppien silmälukujen summa on 9?
b) molempien noppien silmäluvut ovat vähintään 5?
c) noppien silmälukujen summa on enemmän kuin 10?
d) noppien silmälukujen summa on 11 tai 6?
Anna vastaukset 2 desimaalin tarkkuudella.

Tehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Arvaa kuka –lautapelissä on 24 hahmoa. 9 hahmolla on viikset, 7 hahmolla parta ja 5 hahmolla molemmat. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitulla hahmolla
a) on viikset?
b) on viikset mutta ei partaa?
c) on parta tai viikset?
Anna vastaukset 2 desimaalin tarkkuudella.

Tehtävä 9. *Pudotusvalikko*
Juoksukilpailun lopullinen järjestys jäi hieman epäselväksi. Kilpailussa oli kuusi juoksijaa: Aleksi, Emilia, Jerry, Leena, Petra ja Touko. Neljä juoksijaa muistavat kisasta kuitenkin seuraavat asiat:

Leena: ”Minun edelläni ei ollut ketään tyttöä.”
Aleksi: ”Tulin maaliin Toukon jälkeen, mutta kuitenkin ennen Leenaa.”
Emilia: ”Kaaduin kisan aikana ja jäin viimeiseksi.”
Jerry: ”Vain yksi juoksija oli minua nopeampi.”

Mikä oli juoksijoiden järjestys?

Yliopisto - Lyhyt Tilastoaineiston analysointia

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Kummunkylän koulun abiturienteilta kysyttiin, mikä on heille mieluisin paikka lukea ylioppilaskokeisiin. Alla on taulukoitu 477 oppilaan vastaukset.

Paikka	Frekvenssi *f* (eli vastausten lukumäärä)	Suhteellinen frekvenssi *f* %
koti	257	a)
kirjasto	76	b)
koulu	56	c)
kaverilla	88	d)
Yhteensä	**477**	

1. Laske kaikkien vastausvaihtoehtojen suhteelliset frekvenssit f %. Anna vastaukset kokonaisten prosenttien tarkkuudella.
2. Mikä on todennäköisyys sille, että satunnaisesti valitun kyselyyn vastanneen abiturientin mieluisin lukupaikka on jokin muu kuin koti? Anna vastaus desimaalilukuna lukujen 0 ja 1 väliltä 2 desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU:
1. Suhteellinen frekvenssi ilmaisee, kuinka suuri prosentuaalinen osuus tilastomuuttujan arvolla on havaintojen kokonaismäärästä. Suhteelliset frekvenssit saadaan siis jakamalla kunkin vastauksen lukumäärä vastausten kokonaismäärällä 477.
Oikeat vastaukset ovat a) 54 % b) 16 % c) 12 % ja d) 18 %.

Paikka	Frekvenssi *f* (eli vastausten lukumäärä)	Suhteellinen frekvenssi *f* %
koti	257	$\frac{257}{477} = 0,538\ldots \approx 54\ \%$
kirjasto	76	$\frac{76}{477} = 0,159\ldots \approx 16\ \%$
koulu	56	$\frac{56}{477} = 0,117\ldots \approx 12\ \%$
kaverilla	88	$\frac{88}{477} = 0,184\ldots \approx 18\ \%$
Yhteensä	**477**	

2. Abiturienteista 54 % on vastannut mieluisimmaksi lukupaikaksi kodin. Tämä tarkoittaa sitä, että 100 % − 54 % = 46 % abiturienteista on vastannut jonkin muun kuin kodin. Tilastollinen todennäköisyys kysytylle tapahtumalle on siis 46 %, ja koska vastaus pyydettiin desimaalilukuna 0-1 väliltä, oikea vastaus on 0,46.

Harjoitustehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Taulukkoon on luokiteltu erään paikkakunnan 9.-luokkalaisten kesätöiden kuukausipalkat.

Palkka (€/kk)	Frekvenssi f (eli lukumäärä)	Summafrekvenssi sf
700-999	27	27
1000-1299	32	59
1300-1599	44	103
1600-	7	110

a) Kuinka moni kesätyöläinen sai palkkaa alle 1300 €/kk?
b) Kuinka suuri osa kesätyöläisistä sai palkkaa 1300 – 1599 €/kk? Anna vastaus pyöristettynä kokonaisiksi prosenteiksi.
c) Kuinka suuri osa kesätyöläisistä sai palkkaa 1000 €/kk tai enemmän? Anna vastaus pyöristettynä kokonaisiksi prosenteiksi. __ % (75)

RATKAISU:
a) Summafrekvenssi ilmaisee, kuinka paljon havaintoja on kertynyt tiettyyn tilastomuuttujan arvoon mennessä. Arvoon 1299 €/kk mennessä havaintoja on kertynyt summafrekvenssisarakkeen lukujen perusteella 59.

Oikea vastaus on 59.

b) 44 kesätyöläistä sai palkkaa $1300 - 1599$ €/kk. Summafrekvenssi-sarakkeen viimeiseltä riviltä nähdään, että kesätyöläisiä oli yhteensä 110. Vastaus saadaan laskemalla kuinka monta prosenttia 44 kesätyöntekijää on 110 kesätyöntekijästä.

$$\frac{44}{110} = 0,4 = 40\ \%$$

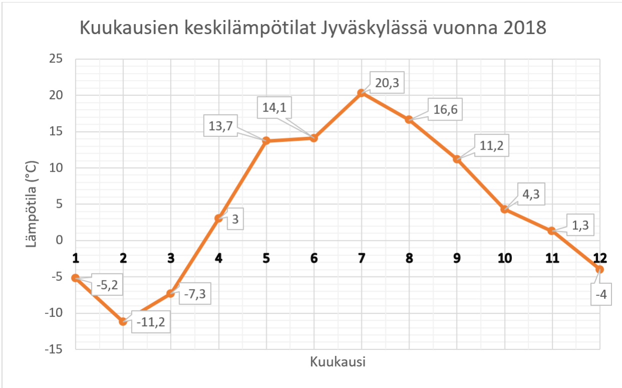
Oikea vastaus on 40 %.

c) Ainoa palkkaluokka, johon kuuluvat eivät saaneet palkkaa 1000€/kk tai enemmän on $700 - 999$ €/kk tienanneet. Kun lasketaan kuinka monta prosenttia kesätyöläisistä tienasi $700 - 999$ €/kk, saadaan tuloksesta kompelenttisäännöllä kysytty prosenttiosuus.

$700 - 999$ €/kk tienasi 27 kesätyöläistä, mikä on $\frac{27}{110}$ = 0,2454... = 24,54...% kaikista kesätyöläisistä. 1000 €/kk tai enemmän tienanneita oli siis 100 % – 24,54...% = 74,46... % ≈ 75 %.

Oikea vastaus on 75 %.

Harjoitustehtävä 3. *Aukkotehtävä*
Määritä kuvaajan tietojen avulla



a) ylin kuukausikeskilämpötila.
b) alin kuukausikeskilämpötila.
c) kuukauden keskilämpötilan vaihteluväli.
d) kuukauden keskilämpötilan vaihteluvälin pituus.

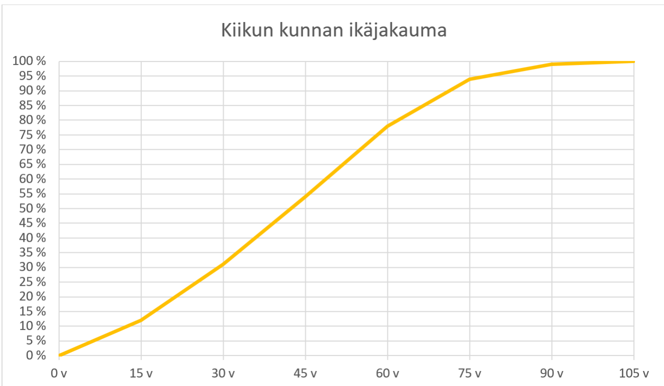
RATKAISU:
a) Kuvaaja on korkeimmillaan heinäkuussa, jolloin se saa arvon 20,3. Ylin kuukausikeskilämpötila on siis 20,3°C.

b) Kuvaaja on matalimmillaan helmikuussa, jolloin se saa arvon $-11{,}2$. Alin kuukausikeskilämpötila on siis $-11{,}2$°C.

c) Vaihteluväli kertoo millä välillä havaintoarvot ovat, ja vaihteluväli ilmaistaan antamalla havaintoarvojen pienin ja suurin arvo. Kuukauden keskilämpötilojen vaihteluväli on siis $[-11{,}2\ ;\ 20{,}3]$.

d) Vaihteluvälin pituus on suurimman ja pienimmän havaintoarvon erotus. Kuukauden keskilämpötilojen vaihteluvälin pituus on siis $20{,}3°\text{C} - (-11{,}2°\text{C}) = 20{,}3°\text{C} + 11{,}2°\text{C} = 31{,}5°\text{C}$.

Harjoitustehtävä 4. *Pudotusvalikko*
Vastaa kysymyksiin alla olevan kertymäkuvaajan perusteella.



a) Kertymäkuvaaja kuvaa taulukkoa *1,2, 3*.

1.

Ikäluokka	f %
0-14 v	12
15-29 v	31
30-44 v	22
45-59 v	10
60-74 v	18
75-89 v	6
90-104 v	1

2.

Ikäluokka	f %
0-14 v	15
15-29 v	17
30-44 v	8
45-59 v	21
60-74 v	16
75-89 v	18
90-104 v	5

3.

Ikäluokka	f %
0-14 v	12
15-29 v	19
30-44 v	23
45-59 v	24
60-74 v	16
75-89 v	5
90-104 v	1

b) *Alakvartiilin alapuolella on 25 % havaintoarvoista. Alakvartiililuokka on luokka, jonka kohdalla suhteellinen summafrekvenssi ylittää arvon 25 %.*
Yläkvartiilin yläpuolella on 25 % havaintoarvoista. Yläkvartiililuokka on luokka, jonka kohdalla suhteellinen summafrekvenssi ylittää arvon 75 %.
Mediaaniluokka on luokka, jonka kohdalla suhteellinen summafrekvenssi ylittää arvon 50 %.

Alakvartiililuokka on __.
Mediaaniluokka on __.
Yläkvartiililuokka on __.
0–14 v, 15–29 v, 30–44 v, 45–59 v, 60–74 v, 75–89 v, 90–104 v

RATKAISU:
a) Kertymäkuvaaja havainnollistaa summafrekvenssiä tai suhteellista summafrekvenssiä. Kuvaajassa vaaka-akselilla ovat tilastomuuttujan saamat arvot ja pystyakselilla havaintojen määrä tai suhteellinen osuus. Kertymäkuvaajasta nähdään, kuinka suuri osa aineiston havainnoista on korkeintaan yhtä suuri kuin tietty havaintoarvo.

Taulukossa 1 alle 30 vuotiaiden osuus on 12 % + 31 % = 44 %, kun se kertymäkuvaajassa on noin 30 %. Kertymäkuvaaja ei siten kuvaa Taulukkoa 1.

Taulukossa 2 yli 74 vuotiaiden osuus on 18 % + 5 % = 23 %, kun se kertymäkuvaajassa on alle 10 %. Kertymäkuvaaja ei siten kuvaa Taulukkoa 2.

Jäljelle jää siis taulukko 3. Lasketaan taulukkoon vielä suhteelliset summafrekvenssit (*sf* %) ja tarkistetaan, vastaavatko ne kertymäkuvaajan arvoja luokkien ylärajoilla.

Ikäluokka	f %	sf %
0-14 v	12	12
15-29 v	19	12+19=31
30-44 v	23	31+23=54
45-59 v	24	54+24=78
60-74 v	16	78+16=94
75-89 v	5	94+5=99
90-104 v	1	99+1=100

Lasketut suhteelliset summafrekvenssit vastaavat kertymäkuvaajaa, joten oikea taulukko on 3.

b) Kertymäkuvaajasta nähdään, että suhteellinen summafrekvenssi ylittää ensimmäisen kerran 25 % noin 25 vuoden kohdalla. Alakvartiililuokka on siis 15−29 v. Alakvartiililuokka voidaan määrittää myös taulukon avulla. Taulukon suhteellinen summafrekvenssi -sarakkeesta nähdään, että suhteellinen summafrekvenssi ylittää ensimmäisen kerran 25 % ikäluokan 15−29 v kohdalla.

Kertymäkuvaajasta nähdään, että suhteellinen summafrekvenssi ylittää ensimmäisen kerran 50 % noin 43 vuoden kohdalla. Mediaaniluokka on siis 30−44 v.

Kertymäkuvaajasta nähdään, että suhteellinen summafrekvenssi ylittää ensimmäisen kerran 75 % noin 58 vuoden kohdalla. Yläkvartiililuokka on siis 45−59 v.

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Työpaikalla seurattiin kuukauden ajan, kuinka monta sairaslomapäivää työntekijät pitivät. Tulokset on luokiteltu alla olevaan taulukkoon.

Sairaslomapäivät	f	f %
0	29	24
1	64	52
2	13	11
3	0	0
4	11	9
5	3	2
6	2	2
Yhteensä	**123**	

a) Mikä on kuukauden aikana pidettyjen sairaslomapäivien keskiarvo? Anna vastaus 1 desimaalin tarkkuudella.
b) Kuinka suuri osa työntekijöistä oli vähintään yhden päivän sairaslomalla? Anna vastaus pyöristettynä kokonaisiksi prosenteiksi.

RATKAISU:
a) Keskiarvo lasketaan jakamalla havaittujen arvojen summa havaintojen lukumäärällä. Havaintojen lukumäärä on aineistossa 123. Keskiarvo voidaan laskea kumman tahansa sarakkeen, frekvenssin tai suhteellisen frekvenssin, avulla.

Frekvenssien avulla laskettuna: Havaittujen arvojen summa saadaan kertomalla jokainen havaintoarvo sen frekvenssillä ja laskemalla nämä tulot yhteen. Jakamalla havaintoarvojen summa luvulla 123 saadaan keskiarvo.

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 29 + 1 \cdot 64 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{123} = \frac{163}{123} = 1{,}3252... \approx 1{,}3$$

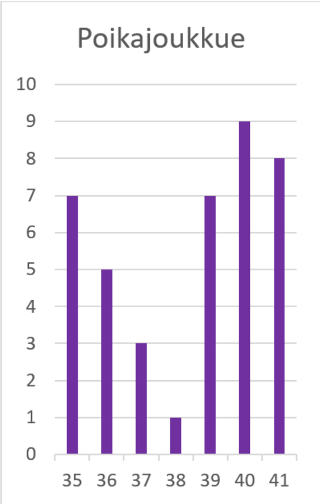
Suhteellisten frekvenssien avulla laskettuna: Keskiarvo saadaan laskettua kertomalla jokainen havaintoarvo sen suhteellisesta frekvenssistä saadulla painokertoimella ja laskemalla nämä tulot yhteen. Esimerkiksi havaintoarvon 1 painokerroin on 0,52.

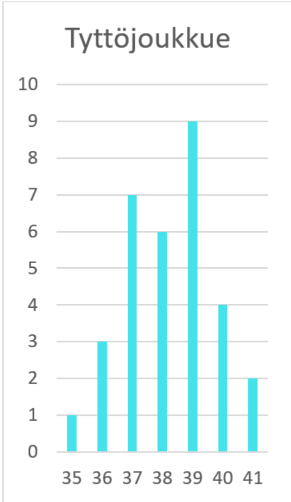
$$\overline{x} = 0 \cdot 0{,}24 + 1 \cdot 0{,}52 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}00 + 4 \cdot 0{,}09 + 5 \cdot 0{,}02 + 6 \cdot 0{,}02 = 1{,}32$$

Huomaa, että suhteellisilla frekvensseillä laskettuna keskiarvoksi ei saada yhtä tarkkaa arvoa kuin frekvensseillä laskettuna. Tämä johtuu siitä, että suhteellisen summafrekvenssin arvoissa on tehty jo pyöristyksiä, mikä aiheuttaa epätarkkuutta. Jos frekvenssit on tiedossa, kannattaa laskea niiden avulla, jotta saa tarkan arvon.

b) Vähintään yhden päivän sairaslomaa pitäneet työntekijät ovat kaikki ne, jotka pitivät 1-6 sairaslomapäivää. Heidän määrä voidaan laskea suhteellisten frekvenssien avulla, ja heitä oli yhteensä 52 % + 11 % + 0 % + 9 % + 2 % + 2 % = 76 %.

Harjoitustehtävä 6. *Monivalinta (valitse yksi)*
Alla on esitettynä nappisvalmistajan keräämät kengän kokotiedot eräältä tyttö- ja poikajoukkueelta.





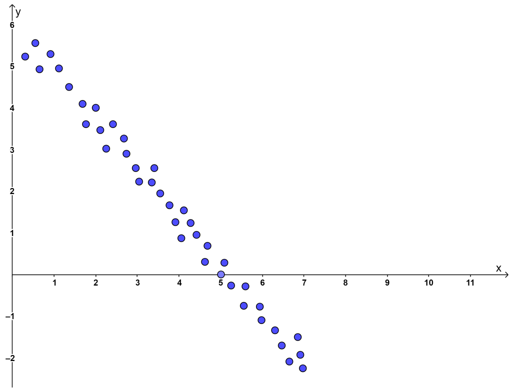
Päättele arvioimalla, laskematta keskihajontaa, kumman joukkueen kengänkokojen keskihajonta on suurempi.

RATKAISU:
Keskihajonta kuvaa sitä, kuinka kaukana keskiarvosta havainnot keskimäärin ovat. Mitä suurempi keskihajonta on, sitä kauempana keskiarvosta havainnot (keskimäärin) ovat. Keskihajonnan suuruus riippuu myös havaintojen suuruusluokasta. Esimerkiksi tuhansia euroja maksavien mopoautojen hinta-aineistossa keskihajonta on yleensä suurempi kuin kymmeniä euroja maksavien koulukirjojen hinta-aineistossa.

Molemmilla joukkueilla kengänkoon keskiarvo on noin 38 tai 39. Poikajoukkueen pelaajista monella kengänkoko on joko 35, 40 tai 41. Nämä arvot ovat melko kaukana arvioidusta keskiarvosta. Tyttöjoukkueen yleisimmät kenkäkoot ovat 37, 38 tai 39, jotka taas ovat lähellä arvioitua keskiarvoa. Lisäksi keskiarvosta kauimpana olevat koot 35, 36 ja 41 ovat melko harvinaisia tyttöjoukkueessa. Päättelyn tuloksena poikajoukkueen kengänkokojen keskihajonta on suurempi.

Harjoitustehtävä 7. *Pudotusvalikko*
Tarkastellaan kahden muuttujan x ja y välistä lineaarista riippuvuutta. Täydennä lauseet oikeiksi.
a) Jos toisen muuttujan kasvaessa toisenkin muuttujan arvot kasvavat, korrelaatio on *positiivinen/negatiivinen*.
b) Jos toisen muuttujan kasvaessa toisen muuttujan arvot pienenevät, korrelaatio on *positiivinen/negatiivinen*.

c) Korrelaatiokerroin on välillä *[0,1]* , *[−1,1]*.
d) Kun korrelaatiokerroin r on positiivinen, riippuvuutta kuvaava regressiosuora on *nouseva/laskeva* suora.
e) Alla olevassa hajontakuviossa muuttujien välinen korrelaatio on *positiivinen/negatiivinen*.



RATKAISU:

Korrelaatiokerroin r kuvaa kahden tilastomuuttujan välisen lineaarisen riippuvuuden voimakkuutta. Korrelaatiokerroin on vähintään -1 ja korkeintaan 1. Jos muuttujien välillä ei ole riippuvuutta, korrelaatiokerroin on 0. Lähellä lukua 1 oleva korrelaatiokerroin kertoo, että muuttujien välillä on voimakas positiivinen riippuvuus eli toisen muuttujan arvojen kasvaessa toisenkin muuttujan arvot kasvavat. Lähellä lukua -1 oleva korrelaatiokerroin kertoo, että muuttujien välillä on voimakas negatiivinen riippuvuus eli toisen muuttujan arvojen kasvaessa toisen muuttujan arvot pienenevät.

a) Korrelaatiokerroin kuvaa muuttujien välistä riippuvuutta, ja koska riippuvuus on positiivista, on korrelaatiokerroin positiivinen.

b) Koska riippuvuus on negatiivista, korrelaatiokerroin on negatiivinen.

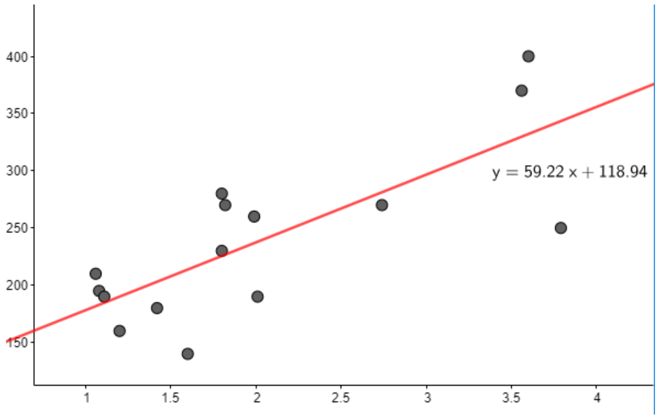
c) Korrelaatiokerroin on vähintään -1 ja enintään 1, joten korrelaatiokerroin on välillä $[-1, 1]$.

d) Lineaarista riippuvuutta kuvataan regressiosuoralla. Kun korrelaatiokerroin on positiivinen, toisen muuttujan arvojen kasvaessa toisenkin muuttujan arvot kasvavat. Regressiosuora on tällöin nouseva suora.

e) Hajontakuviossa pisteet ovat sijoittuneet niin, että toisen muuttujan arvojen kasvaessa toisen muuttujan arvot pienenevät. Korrelaatio on tällöin negatiivinen.

Harjoitustehtävä 8. *Pudotusvalikko ja Aukkotehtävä*
Oheisen kuvan pisteet edustavat havaintoja erään heinäsirkkalajin yksilöiden pituuksista (cm, pisteen x-koordinaatti) ja niiden hyppäämistä matkoista (cm, pisteen y-koordinaatti). Havaintoarvoihin on sovitettu regressiosuora $y = 59{,}22x + 118{,}94$.

Täydennä seuraavat lauseet oikeiksi regressiosuoran yhtälön perusteella.
a) Jos heinäsirkan pituus kasvaa yhdellä senttimetrillä, hypyn pituus *kasvaa/lyhenee* noin *1, 119, 59, 178* senttimetrillä.
b) Jos heinäsirkka on 2,8 cm pitkä, sen hypyn pituus on kokonaisten senttimetrien tarkkuudella ___ cm.



c) Jos heinäsirkan hypyn pituus on 400 cm, heinäsirkan pituus on 1 desimaalin tarkkuudella ___ cm.

RATKAISU:
a) Regressiosuoran lauseke on $y = 59{,}22x + 118{,}94$. Mallissa x kuvaa heinäsirkan pituutta ja y heinäsirkan hypyn pituutta. Koska muuttujan x kerroin on 59,22, aina kun x kasvaa yhdellä senttimetrillä niin y kasvaa 59,22 cm verran. Oikea vastaus on **kasvaa ja 59**.

b) Sijoitetaan heinäsirkan pituus 2,8 (cm) regressiosuoran lausekkeeseen muuttujan x paikalle ja lasketaan hypyn pituus y.

$$y = 59{,}22 \cdot 2{,}8 + 118{,}94 = 284{,}756 \approx 285$$

Oikea vastaus on 285 cm.

c) Sijoitetaan heinäsirkan hypyn pituus 400 (cm) regressiosuoran lausekkeeseen muuttujan y paikalle ja ratkaistaan heinäsirkan pituus x.

$$\begin{aligned} 400 &= 59{,}22x + 118{,}94 \\ 400 - 118{,}94 &= 59{,}22x \\ 281{,}06 &= 59{,}22x \\ \frac{281{,}06}{59{,}22} &= x \\ x &\approx 4{,}7 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on 4,7 cm.

Harjoitustehtävä 9. *Pudotusvalikko*
Erään puolueen kannatus nousi vaaleissa 12 prosentista 14 prosenttiin.
Täydennä seuraavat väittämät.
a) Puolueen kannatus nousi *2, 10, 20, 102, 17, 85* prosenttiyksikköä.
b) Puolueen kannatus nousi *2, 10, 200, 4, 20, 17, 85* prosenttia.

RATKAISU:
a) Prosenttiyksikkö ilmaisee prosenttiosuuksien välisiä absoluuttisia eroja. Muutos prosenttiyksiköinä saadaan, kun lasketaan prosenttilukujen erotus. Oikea vastaus on siis $14 - 12 = 2$ prosenttiyksikköä.

b) Lasketaan kannatuksen suhteellinen muutos eli kuinka monta prosenttia enemmän 14 prosentin kannatus on 12 prosentin kannatuksesta.

$$\frac{14-12}{12} = 0{,}166... \approx 17\ \%$$

Kannatus nousi 17 prosenttia.

Koe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Lounasravintolan työntekijä taulukoi asiakkaiden ostamat lounaat erään työpäivän aikana. Lounaat myydään neljässä eri hintaryhmässä ja lounaita myytiin yhteensä 390 kpl. Täydennä taulukkoon lounaiden hintaryhmien suhteelliset frekvenssit kokonaisten prosenttien tarkkuudella.

Lounaan hinta (€)	f	f %
2,6	130	a)
3,8	108	b)
4,5	97	c)
5,95	54	d)
Yhteensä	390	

Kuinka suuri osa asiakkaista söi alle 5 euroa maksavan lounaan? Anna vastaus kokonaisten prosenttien tarkkuudella.

Tehtävä 2. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Taulukossa on esitetty Juupan kylän asuntojen pinta-alojen jakauma. Määritä taulukon avulla

Asunnon pinta-ala (m^2)	f %
0-19	0,2
20-39	24,9
40-59	17,3
60-79	13,8
80-99	21,7
100-	22,1

a) alakvartiililuokka.
b) mediaaniluokka
c) yläkvartiililuokka.
d) todennäköisyys sille, että Juupan kylästä satunnaisesti valitun asunnon pinta-ala on alle 100 m^2. Anna vastaus 2 desimaalin tarkkuudella.
e) todennäköisyys sille, että Juupan kylästä satunnaisesti valitun asunnon pinta-ala on joko yli 99 m^2 tai alle 20 m^2. Anna vastaus 2 desimaalin tarkkuudella.
Huom! Anna kohdissa d) ja e) vastaus desimaalilukuna väliltä $0 - 1$**.**

Tehtävä 3. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Taulukko esittää kuukausien keskilämpötiloja talvella 2018-2019 neljässä eri kaupungissa.

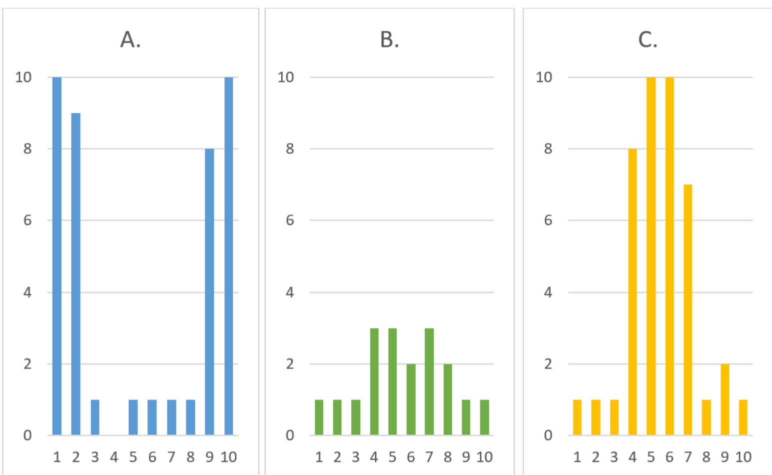
	Rovaniemi	Helsinki	Lahti	Ähtäri
Marraskuu 2018	-0,3	2,8	2,0	0,7
Joulukuu 2018	-6,9	-2,0	-2,9	-3,8
Tammikuu 2019	-13,4	-6,2	-8,1	-9,9
Helmikuu 2019	-9,5	-0,5	-1,3	-3,4

1. Mikä on taulukossa esiintyvien kuukausien keskilämpötilojen vaihteluväli Helsingissä?
2. Mikä on taulukossa esiintyvien kuukausien keskilämpötilojen vaihteluvälin pituus yhden desimaalin tarkkuudella
   a) Rovaniemellä? 13,1
   b) Lahdessa? 10,1
3. Missä kaupungissa oli lämpimintä tammikuussa 2019?

Tehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Taulukko esittää kaupan varastossa olevien öljykanistereiden tilavuuksia. Kanistereita on yhteensä 160 kpl.
a) Kuinka monta 10 litran kanisteria varastossa on?
b) Mikä on todennäköisyys sille, että varastosta satunnaisesti valittu kanisteri on tilavuudeltaan alle 10 litraa?
c) Laske varastossa olevien kanistereiden tilavuuksien keskiarvo 2 desimaalin tarkkuudella.

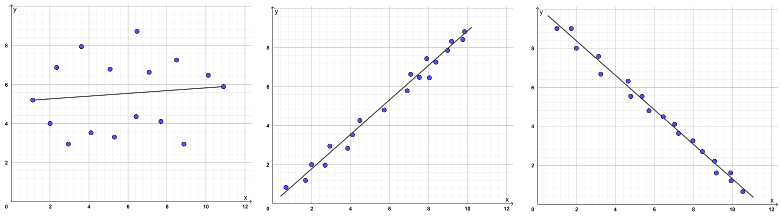
Tilavuus (l)	f %
1	30
5	15
10	55

Tehtävä 5. *Pudotusvalikko*
Järjestä jakaumat A-C keskihajonnan suuruuden mukaiseen järjestykseen (pienimmästä alkaen). Ratkaise tehtävä päättelemällä, keskihajontoja laskematta.



Tehtävä 6. *Pudotusvalikko*
Yhdistä korrelaatiokertoimet hajontakuvioihin 1-3.

$r = 0{,}122$
$r = -0{,}955$
$r = 0{,}850$

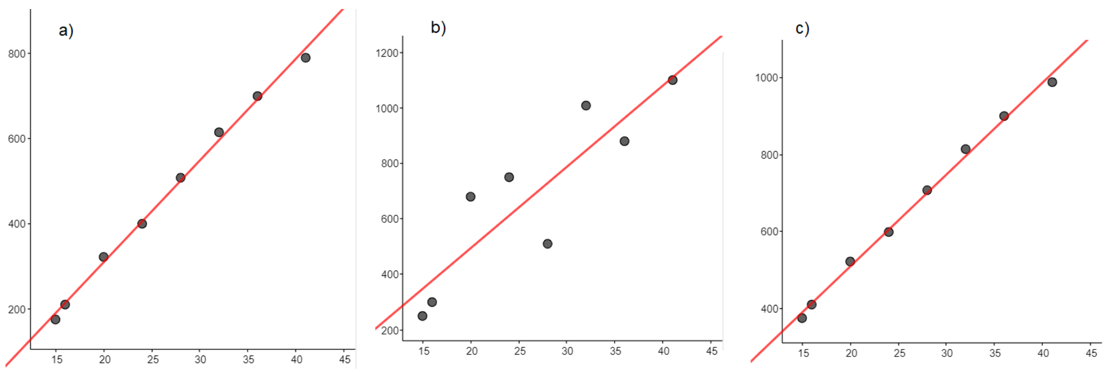


Tehtävä 7. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*

Taulukkoon on koottu erään kalalajin yksilöistä mitattuja pituuksia ja painoja.

Pituus (cm)	Paino (g)
32	815
16	410
24	599
36	901
41	989
20	522
15	375
28	708

1. Aineistosta on muodostettu hajontakuvio, johon on sovitettu regressiosuora. Kalojen pituudet senttimetreinä ovat x-akselilla ja kalojen painot grammoina ovat y-akselilla. Mikä seuraavista hajontakuvioista on taulukon kalalajin pituuksia ja painoja kuvaava hajontakuvio? *a), b) ja c)*



2. Havaintoihin sovitetun regressiosuoran yhtälö on $y = 23{,}94x + 30{,}554$. Laske tämän yhtälön avulla, mikä on mallin mukainen paino tämän kalalajin kalalle, jonka pituus on 35 cm? Anna vastaus kokonaisten grammojen tarkkuudella.

Tehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Radiokanavan Iltahitit osuus kaikista radiokuuntelijoista nousi 15 prosentista 30 prosenttiin.
Täydennä seuraavat väittämät.
a) Radiokanavan osuus kaikista radiokuuntelijoista nousi *5, 10, 15, 50, 100, 150, 200* prosenttia.
b) Radiokanavan osuus kaikista radiokuuntelijoista nousi *5, 10, 15, 50, 100, 150, 200* prosenttiyksikköä.

Yliopisto - Lyhyt Alkeisalgebraa

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Laske
a) $|-6|+|-7|=$
b) $|-6|-7=$
c) lukujen -12 ja 3 itseisarvojen erotus.
d) lukujen -12 ja 3 erotuksen itseisarvo.

RATKAISU:
Merkintä $|a|$ tarkoittaa luvun a itseisarvoa eli sen etäisyyttä nollasta. Positiivisen luvun itseisarvo on luku itse. Negatiivisen luvun itseisarvo on sen vastaluku.

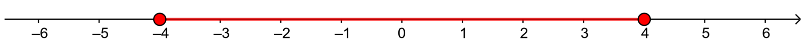
a) $|-6|+|-7|=6+7=13$
b) $|-6|-7=6-7=-1$
c) lukujen -12 ja 3 itseisarvojen erotus kirjoitettuna laskutoimitukseksi on
$|-12|-|3|$.

$$|-12|-|3|=12-3=9$$

d) lukujen -12 ja 3 erotuksen itseisarvo kirjoitettuna laskutoimitukseksi on
$|(-12)-3|$.

$$|(-12)-3|=|-15|=15$$

Harjoitustehtävä 2. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Mitkä seuraavista merkinnöistä kuvaavat lukusuoralle punaisella värillä merkittyjä lukuja? Valitse kaikki oikeat.



(1) $|x|\leq 4$
(2) $|x|=4$
(3) $|x|\geq 4$
(4) $x\leq 4$
(5) $x\geq 4$

RATKAISU:
Lukusuoralle on punaisella värillä merkitty kaikki luvut, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin -4 ja pienempiä tai yhtäsuuria kuin 4. Eli luvut ovat välillä $-4\leq x\leq 4$. Lukujen etäisyys nollasta on siis pienempää tai yhtä suurta kuin 4. Koska luvun itseisarvo tarkoittaa sen etäisyyttä nollasta, **oikea vastaus on** $|x|\leq 4$.

Harjoitustehtävä 3. *Aukkotehtävä*

Eräänä kevätpäivänä mitattiin eri kaupungeissa seuraavat lämpötilat.
Helsinki $-3°C$
Tukholma $5°C$
Oslo $-7°C$
Kööpenhamina $9°C$

Määritä seuraavien kaupunkien väliset lämpötilaerot celsiusasteina kyseisenä päivänä.
a) Helsinki ja Oslo
b) Kööpenhamina ja Oslo
c) Helsinki ja Tukholma

RATKAISU:
a) Mitattu lämpötila Helsingissä oli $-3°C$ ja Oslossa $-7°C$. Näiden lämpötilojen ero on $|-3-(-7)| = |-3+7| = |4| = 4$.
Oikea vastaus on $4°C$.

b) Mitattu lämpötila Kööpenhaminassa oli $9°C$ ja Oslossa oli $-7°C$. Kaupunkien lämpötilaero on $|9-(-7)| = |9+7| = |16| = 16$.
Oikea vastaus on $16°C$.

c) Mitattu lämpötila Helsingissä oli $-3°C$ ja Tukholmassa $5°C$. Kaupunkien lämpötilaero on $|-3-5| = |-8| = 8$.
Oikea vastaus on $8°C$.

Harjoitustehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Ratkaise yhtälöpari.

$$\begin{cases} 6x - 5y + 3 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

RATKAISU:

Koska yhtälöparin alempi yhtälö on jo valmiiksi ratkaistu muuttujan y suhteen, kannattaa yhtälöparin ratkaisemiseksi käyttää sijoitusmenentelmää.
Sijoitetaan ylempään yhtälöön $y = 2x - 1$ ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 6x - 5(2x-1) + 3 &= 0 \\ 6x - 10x + 5 + 3 &= 0 \\ -4x + 8 &= 0 \\ -4x &= -8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan y sijoittamalla saatu muuttujan x arvo $x = 2$ alempaan yhtälöön.

$$y = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = 2$ ja $y = 3$ eli lukupari (2,3).

Harjoitustehtävä 5. *Aukkotehtävä*
Missä pisteessä suorat $x - 4y = -1$ ja $5y - 2x = -4$ leikkaavat toisensa?

RATKAISU:
Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla suorien muodostama yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 4y = -1 \\ 5y - 2x = -4 \end{cases}$$

Järjestellään yhtälöparin ylempi yhtälö uudelleen siten, että x on kirjoitettu muuttujan y avulla. Tämän jälkeen sijoitusmenetelmän käyttö onnistuu.

$$\begin{cases} x = -1 + 4y \\ 5y - 2x = -4 \end{cases}$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön $x = -1 + 4y$ ja ratkaistaan yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} 5y - 2(-1 + 4y) &= -4 \\ 5y + 2 - 8y &= -4 \\ -3y &= -4 - 2 \\ -3y &= -6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan x sijoittamalla saatu muuttujan y arvo $y = 2$ ylempään yhtälöön.

$$x = -1 + 4 \cdot 2 = -1 + 8 = 7$$

Suorien leikkauspiste on (7,2).

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Kuusi litraa maitoa ja neljä litraa kermaa maksoivat yhteensä 21,8 euroa.
Kaksi litraa maitoa ja kolme litraa kermaa maksoivat yhteensä 14,35 euroa.
Laske sekä maidon että kerman litrahinta.

RATKAISU:
Muodostetaan tehtävänannosta yhtälöpari, jossa merkitään maidon litrahintaa muuttujalla m ja kerman litrahintaa muuttujalla k.

$$\begin{cases} 6m + 4k = 21{,}8 \\ 2m + 3k = 14{,}35 \end{cases}$$

Muokataan yhtälöparia siten, että yhteenlaskumenetelmän käyttö onnistuu.

$$\begin{cases} 6m + 4k = 21{,}8 \\ 2m + 3k = 14{,}35 \qquad \| \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m + 4k = 21{,}8 \\ -6m - 9k = -43{,}05 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöparin yhtälöt allekkain yhteen ja ratkaistaan jäljelle jääneen muuttujan arvo.

$$\begin{aligned} -5k &= -21{,}25 \\ k &= 4{,}25 \end{aligned}$$

Ratkaistaan maidon hinta m sijoittamalla saatu muuttujan k arvo $k = 4{,}25$ jompaan kumpaan yhtälöparin yhtälöistä. Valitaan nyt yhtälöistä alempi.

$$\begin{aligned} 2m + 3(4{,}25) &= 14{,}35 \\ 2m + 12{,}75 &= 14{,}35 \\ 2m &= 1{,}6 \\ m &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Vastaus: Maidon litrahinta on 0,8 €/litra ja kerman 4,25 €/litra.

Harjoitustehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Sinulla on valmiina albumiiniproteiinista liuos, jonka proteiinipitoisuus on 1 %. Tarvitset tutkimuksiisi proteiinista laimennoksen, jonka proteiinipitoisuus on 0,2 %. Tarvitset tätä laimennosta 0,1 ml.

Kuinka paljon alkuperäistä albumiiniliuosta laitat laimennokseen ja kuinka paljon lisäät laimenninta? Anna vastaukset mikrolitroina (μl).

RATKAISU:
Ratkaistaan ensin kuinka paljon proteiinia tulee olla tarvittavassa liuoksessa, jonka pitoisuus on oltava 0,2 %. Tätä liuosta tarvitaan 0,1 ml, joten proteiinia siinä on

$$0{,}1 \text{ ml} \cdot 0{,}002 = 0{,}0002 \text{ ml}.$$

Lasketaan nyt kuinka paljon liuosta, jonka proteiinipitoisuus on 1 % tarvitaan, jotta saadaan 0,0002 ml proteiinia. Merkitään liuoksen määrää muuttujalla x.

$$\begin{aligned} x \cdot 0{,}01 &= 0{,}0002 \text{ ml} \\ x &= \frac{0{,}0002 \text{ ml}}{0{,}01} \\ x &= 0{,}02 \text{ ml} \end{aligned}$$

Tämä on tarvittava määrä olemassa olevaa albumiiniliuosta, koska sillä saadaan valmiiseen liuokseen haluttu määrä proteiinia. Vastaus haluttiin mikrolitroina, joten muutetaan 0,02 ml mikrolitroiksi: 0,02 ml = 20,00 μl.

Jotta valmistettavan liuoksen lopullinen tilavuus on haluttu 0,1 ml = 100 μl tulee siihen lisätä 100 μl − 20 μl = 80 μl laimenninta.

Oikea vastaus on albumiiniliuosta 20 μl ja laimenninta 80 μl

Harjoitustehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Liuoksen konsentraatio c lasketaan kaavalla $c = \frac{n}{V}$, missä n on ainemäärä (mol) ja V liuoksen tilavuus (l). Ainemäärä taas lasketaan kaavalla $n = \frac{m}{M}$, missä m on aineen massa (g) ja M sen moolimassa (g/mol).

Valmistat laboratoriossa 200 ml sakkaroosiliuosta, jonka konsentraation c tulee olla 2 mol/l. Kuinka monta grammaa tarvitset sakkaroosia, kun sen moolimassa $M = 342{,}30$ g/mol? Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU:
Tehtävässä kysytään aineen massaa m. Tämä saadaan ratkaistua ainemäärän n kaavasta $n = \frac{m}{M}$. Saadaan $m = n \cdot M$.

Koska ainemäärää ei ole annettu ratkaistaan se ensin liuoksen konsentraation c kaavan avulla $c = \frac{n}{V}$. Saadaan $n = c \cdot V$.

Sijoitetaan tähän annettu liuoksen konsentraatio $c = 2$ mol/l ja tilavuus litroina $V =$ 200 ml = 0,20 l.

$$n = 2 \text{ mol/l} \cdot 0{,}20 \text{ l} = 0{,}40 \text{ mol}$$

Nyt voidaan ratkaista massa m aiemmin saadulla kaavalla $m = n \cdot M$.

Sijoitetaan tähän annettu moolimassa $M = 342{,}30$ g/mol ja aiemmin laskettu ainemäärä $n = 0{,}40$ mol.

$$m = 0{,}40 \text{ mol} \cdot 342{,}30 \text{ g/mol} = 136{,}92 \text{ g}$$

Oikea vastaus on 136,92 g sakkaroosia.

Koe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*
Laske
a) $|-9+12| =$
b) $|9| + |-12| =$
c) lukujen 8 ja -3 itseisarvojen summa.
d) lukujen 8 ja -3 summan itseisarvo.

Tehtävä 2. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse seuraavista yhtälöistä ja epäyhtälöistä kaikki ne, jotka toteutuvat kun $x = \frac{1}{2}$.

(1) $|x-1| < 2$
(2) $|3-x| = 3$
(3) $|-4| - x > 4$
(4) $|x| + 4 < 5$
(5) $|x| > 0$

Tehtävä 3. *Pudotusvalikko*
Valitse vaihtoehdoista sopiva yhtälöpari, kun Saran ikää on merkitty muuttujalla s ja Juulian ikää muuttujalla j.
a) Juulia on 45 vuotias ja Sara on häntä 4 vuotta nuorempi.
b) Juulian ikä on neljäsosa Saran iästä. Kun Saran iästä vähennetään 45 vuotta, saadaan Juulian ikä.
c) Sara on neljä kertaa niin vanha kuin Juulia. Saran ja Juulian ikien erotus on 45 vuotta.
A:

$$\begin{cases} j = 45 \\ s = j - 4 \end{cases}$$

B:

$$\begin{cases} s - 45 = j \\ \frac{1}{4}s = j \end{cases}$$

C:

$$\begin{cases} s = 4j \\ s - j = 45 \end{cases}$$

D:

$$\begin{cases} 45 + 4 = j \\ s = 45 - j \end{cases}$$

E:

$$\begin{cases} 4s = j \\ s - 45 = j \end{cases}$$

F:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}j = s \\ j + s = 45 \end{cases}$$

Tehtävä 4. *Aukkotehtävä*

Maatilalla on kanoja ja kissoja. Yhteensä eläimillä on 86 jalkaa ja 36 päätä. Kuinka monta kissaa ja kuinka monta kanaa maatilalla on?

Tehtävä 5. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*
Valitse seuraavista kaikki ne yhtälöparit, joiden ratkaisu on lukupari (2,3).

$$\begin{cases} x - 8 = 6y \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4 = 2y \\ x = 3y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y + 2 = 0 \\ y = 15 - 6x \end{cases}$$

Tehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Maanviljelijä unohtaa 200 kg kurkkuja päiväksi auringonpaisteeseen. Kurkkujen vesipitoisuus on aamulla 99 %, mutta kuumasta päivästä johtuen illalla kurkkujen vesipitoisuus on vain 98 %. Kuinka monta kilogrammaa kurkut painavat illalla? Anna vastaus pyöristettynä kokonaisiksi kilogrammoiksi.

Tehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Kemian laboratoriossa on 200 ml proteiininäytettä, jonka proteiinipitoisuus on 3 %. Tarvitset näytteestä laimennoksen, jonka proteiinipitoisuus on 1 %. Kuinka paljon sinun on lisättävä näytteeseen laimenninta saadaksesi haluamasi laimennoksen?

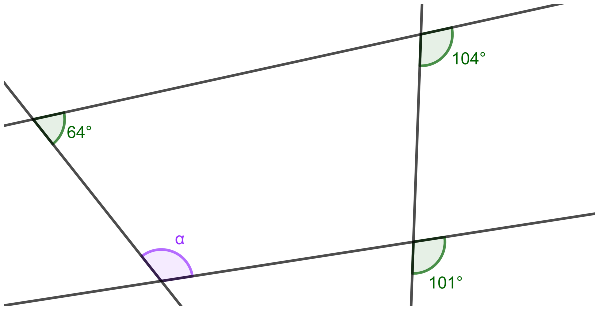
Tehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Tasapainossa olevan reaktion $2\,\mathrm{CH_4} \leftrightharpoons \mathrm{C_2H_2} + 3\,\mathrm{H_2}$ tasapainovakio K saadaan kaavalla

$$K = \frac{[\mathrm{C_2H_2}]\,[\mathrm{H_2}]^3}{[\mathrm{CH_4}]^2},$$

missä hakasulkeet kuvaavat reaktioon osallistuvien aineiden konsentraatioita.
Ratkaise vedyn konsentraatio $[H_2]$ tasapainotilassa kolmen desimaalin tarkkuudella, kun $K = 0,020$, $[\mathrm{CH_4}] = 0,045$ ja $[\mathrm{C_2H_2}] = 0,035$.

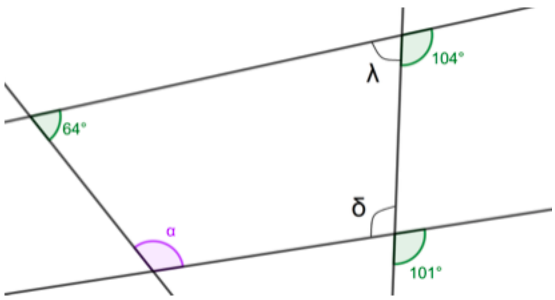
Yliopisto - Lyhyt Geometria

Harjoitustehtävä 1. *Aukkotehtävä*
a) Määritä kulman α suuruus.



b) Määritä kuvan suunnikkaasta kulman β suuruus.

RATKAISU:
a)



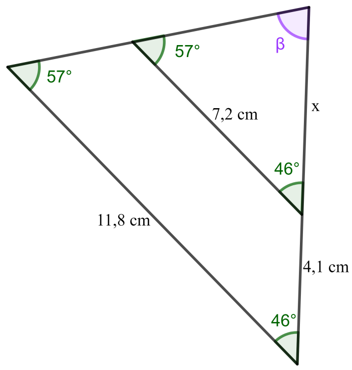
Kulman α selvittämiseksi tulee selvittää ensin kuvaan muodostuvan nelikulmion muut kulmat λ ja δ.
Kulma δ on 101 asteisen kulman ristikulma. Koska ristikulmat ovat yhtä suuria, niin $\delta = 101°$.
Kulma λ on 104 asteisen kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°, joten $\lambda = 180° - 104° = 76°$.
Nelikulmion kulmien summa on 360°. Tämän tiedon avulla saadaan ratkaistua kulma α.

$$\alpha + 64° + \lambda + \delta = 360°$$
$$\alpha = 360° - 64° - \lambda - \delta$$
$$\alpha = 360° - 64° - 76° - 101° = 119°$$

Oikea vastaus on $\alpha = 119°$

b) Kyseessä on suunnikas, joten sen vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. Niinpä $\beta = 127°$.

Harjoitustehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Ratkaise janan x pituus senttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella ja kulman β suuruus asteen tarkkuudella.



RATKAISU:
Kulman β suuruus saadaan ratkaistua sen tiedon avulla, että kolmion kulmien summa on aina 180°.

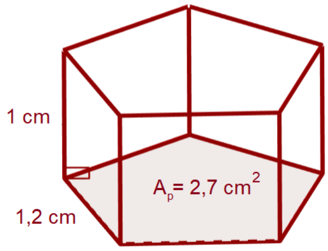
$$\beta = 180° - 57° - 46° = 77°$$

Kuvioon muodostuu kaksi yhdenmuotoista kolmiota, koska niiden kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuria. Pienemmässä kolmiossa 57° kulmaa vastaava sivu on x cm pitkä ja isommassa kolmiossa $x + 4$ cm pitkä. Nämä ovat toistensa vastinsivuja. Kulmaa β vastaavat sivut, joiden pituudet ovat 7 cm ja 12 cm, ovat myös toistensa vastinsivuja. Koska yhdenmuotoisten kolmioiden vastinjanojen pituuksien suhde on vakio, saadaan muodostettua verrantoyhtälö, josta ratkaistaan muuttuja x.

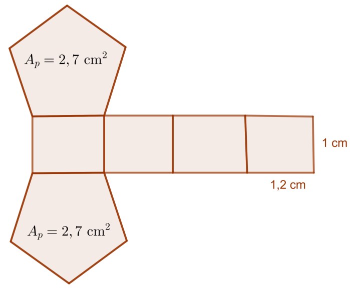
$$\begin{aligned}
\frac{7}{12} &= \frac{x}{x+4} && \text{Kerrotaan ristiin.}\\
7(x+4) &= 12x\\
7x + 28 &= 12x\\
28 &= 12x - 7x\\
28 &= 5x\\
\frac{28}{5} &= x\\
5{,}6 &= x
\end{aligned}$$

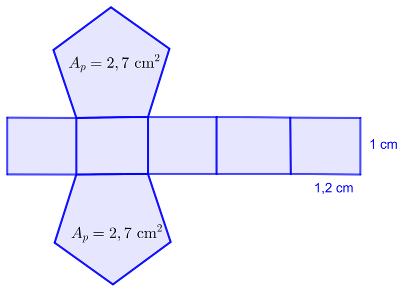
Oikea vastaus $x = 5{,}6$ cm ja $\beta = 77°$.

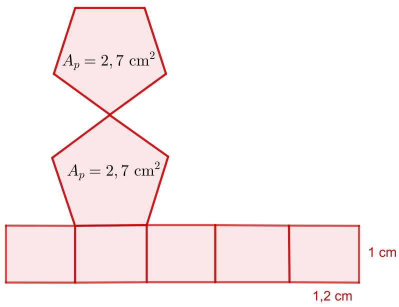
Harjoitustehtävä 3. *Pudotusvalikko ja aukkotehtävä*
Kuvassa on särmiö, jonka pohja on säännöllinen viisikulmio.
a) Mikä seuraavista vaihtoehdoista on kuvan särmiö tasoon levitettynä?



b) Mikä on särmiön kokonaispinta-ala neliösenttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella?







RATKAISU:
a) Kuva 2 on kysytyn särmiön levityskuva. Särmiön pohjassa on viisi kulmaa, joten särmiössä on viisi sivutahkoa. Kuvassa 1 on yksi sivutahko liian vähän ja kuvasta 3 ei saada muodostettua särmiötä, koska sen pohjilla on yksi yhteinen piste.

b) Särmiön sivutahko on suorakulmio, joten sivutahkon pinta-ala lasketaan kertomalla sen korkeus ja kanta keskenään.

$$A_{\text{tahko}} = 1 \text{ cm} \cdot 1{,}2 \text{ cm} = 1{,}2 \text{ cm}^2$$

Tahkoja on yhteensä viisi ja koska särmiö on säännöllinen, on sen kaikkien tahkojen pinta-alat samat. Vaipan kokonaispinta-alaksi saadaan

$$A_{\text{vaippa}} = 5 \cdot A_{\text{tahko}} = 5 \cdot 1{,}2 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2.$$

Särmiön pohjat ovat yhtenevät, joten niiden pinta-alat ovat samat. Särmiön kokonaispinta-ala on

$$A_{\text{särmiö}} = A_{\text{vaippa}} + 2 \cdot A_{\text{pohja}} = 6 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 2{,}7 \text{ cm}^2 = 11{,}4 \text{ cm}^3.$$

Oikea vastaus on **levityskuva 2** ja $A_{\text{särmiö}} = 11{,}4 \text{ cm}^3$.

Harjoitustehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Kuutio on suorakulmainen särmiö, jonka kaikki särmät ovat yhtä pitkiä.
a) Jos kuution särmän pituus on 4 cm, mikä on kuution kokonaispinta-ala kokonaisten neliösenttimetrien tarkkuudella? Mikä on kuution tilavuus kokonaisten kuutiosenttimetrien tarkkuudella?
b) Mikä on kuution särmän pituus kokonaisten senttimetrien tarkkuudella, jos kuution tilavuus on 27 cm^3?

RATKAISU:
a) Jos kuution särmä on 4 cm, niin sen yhden tahkon pinta-ala on $4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$. Kuution kaikki tahkot ovat yhtä suuria ja niitä on yhteensä 6 kappaletta, joten sen kokonaispinta-ala on $6 \cdot 16 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$.

Särmiön tilavuus saadaan kertomalla pohjan pinta-ala särmiön korkeudella. Kuution tilavuudeksi saadaan

$$V_{\text{kuutio}} = A_{\text{pohja}} \cdot h = 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = (4 \text{ cm})^3 = 64 \text{ cm}^3$$

b) Kuution särmän pituus saadaan laskettua kuutiojuuren avulla, kun tiedetään sen tilavuus. Merkitään särmän pituutta muuttujalla x.
Koska kuution tilavuus on $V = x^3$, niin $x = \sqrt[3]{V}$. Sijoitetaan tilavuus $V = 27 \text{ cm}^3$ edellä esitettyyn lausekkeeseen ja ratkaistaan x.

$$x = \sqrt[3]{27 \text{ cm}^3}$$
$$x = 3 \text{ cm}$$

Oikea vastaus on 3 cm.

Harjoitustehtävä 5. *Aukkotehtävä*
Nelli valmistaa leipää ja tekee sitä varten 8 litraa taikinaa. Nelli kaataa taikinaa suorakulmaisen särmiön muotoisiin vuokiin, joiden pohjan pinta-ala on 2,64 dm^2, ja taikinaa tulee vuokiin 9 cm korkeudelle. Kuinka monta kokonaista leipää Nelli saa tekemästään taikinasta?

RATKAISU:
Muutetaan annettu korkeus desimetreiksi, jotta voidaan laskea leipävuoan tilavuus.

$$9 \text{ cm} = 0{,}9 \text{ dm}$$

Yhden leipävuoan tilavuus saadaan laskettua suorakulmaisen särmiön tilavuuden kaavalla.

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= 2{,}64 \text{ dm}^2 \cdot 0{,}9 \text{ dm} \\ &= 2{,}376 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Koska 1 litra = 1 dm^3, niin 8 litraa = 8 dm^3. Kahdeksasta litrasta taikinaa riittää siis

$$\frac{8}{2{,}376} = 3{,}376...$$

leipävuokaan.
Vastaus: Kokonaisia leipiä saadaan 3 kappaletta.

Harjoitustehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Lautapelistä on kadonnut pelinappula, joka on suoran ympyrälieriön muotoinen. Pelinappulan pohjan halkaisija on 12 mm ja korkeus 7 mm. Pelinappulan tilalle tehdään 3D-tulostimella uusi nappula. Kuinka monta sekuntia tulostus kestää, kun tulostin tulostaa nopeudella 4,5 mm^3/s? Anna vastaus pyöristettynä kokonaisiksi sekunneiksi.

RATKAISU:
Lasketaan pelinappulan tilavuus ympyrälieriön tilavuuden kaavalla $V = \pi r^2 h$. Pelinappulan halkaisija on 12 mm, joten säde on puolet tästä eli $r = 6$ mm. Sijoitetaan annetut mitat tilavuuden kaavaan.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot (6 \text{ mm})^2 \cdot 7 \text{ mm} \\ &= 791{,}681... \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

3D-tulostin tulostaa nopeudella 4,5 mm^3/s. Jotta saadaan tietää kuinka kauan pelinappula tulostuu, jaetaan nappulan tilavuus tulostimen nopeudella.

$$\frac{791{,}681... \text{ mm}^3}{4{,}5 \text{ mm}^3/\text{s}} = 175,929... \text{ s} \approx 176 \text{ s}$$

Harjoitustehtävä 7. *Aukkotehtävä*
Kati päällystää suoran ympyrälieriön muotoisen rytmisoittimen kauttaaltaan kankaalla musiikintuntia varten. Rytmisoittimen pohjan säde on 2,5 cm ja pituus 12 cm. Kuinka monta neliösenttimetriä kangasta Kati tarvitsee? Anna vastaus kokonaisina neliösenttimetreinä.

RATKAISU:
Päällystettävä rytmisoitin on suora ympyrälieriö, joten sillä on kaksi ympyrän muotoista pohjaa. Pohjan pinta-ala saadaan kaavalla $A_{\text{pohja}} = \pi r^2$. Sijoitetaan säde $r = 2{,}5$ cm tähän kaavaan.

$$A_{\text{pohja}} = \pi \cdot (2{,}5 \text{ cm})^2 = 19{,}634... \text{ cm}^2$$

Ympyrälieriön vaipan pinta-ala saadaan kaavalla $A_{\text{vaippa}} = 2\pi r h$.
Sijoitetaan tähän säde $r = 2{,}5$ cm ja korkeus $h = 12$ cm.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= 2\pi \cdot 2{,}5 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \\ &= 188{,}495... \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

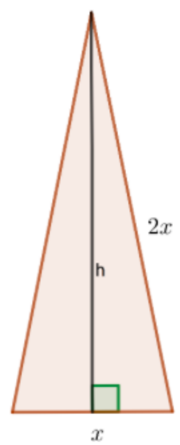
Rytmisoittimen kokonaispinta-ala saadaan laskemalla yhteen vaipan ja molempien pohjien pinta-alat.

$$\begin{aligned} A_{\text{soitin}} &= A_{\text{vaippa}} + 2 \cdot A_{\text{pohja}} \\ &= 188{,}495...\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 19{,}634...\ \text{cm}^2 \\ &= 227{,}765...\ \text{cm}^2 \\ &\approx 228\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: Kati tarvitsee 228 cm^2 kangasta rytmisoittimen päällystämiseen.

Harjoitustehtävä 8. *Aukkotehtävä*
Tasakylkisen kolmion kylki on 2 kertaa niin pitkä kuin sen kanta. Kolmion pinta-ala on 56 cm^2. Laske kolmion kannan pituus senttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU:
Merkitään kolmion kantaa muuttujalla x kuvan mukaisesti. Koska kolmion kyljet ovat 2 kertaa niin pitkiä kuin sen kanta, kylkien pituus on $2x$. Koska korkeusjana on aina



kohtisuorassa kolmion kantaa vastaan, muodostuu kuvioon kaksi suorakulmaista kolmiota. Voidaan siis hyödyntää kolmion korkeuden selvittämiseksi Pythagoraan lausetta $a^2 + b^2 = c^2$. Koska tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa sen kannan, voidaan merkitä

$$\begin{aligned} a &= h \\ b &= 0{,}5x \\ c &= 2x. \end{aligned}$$

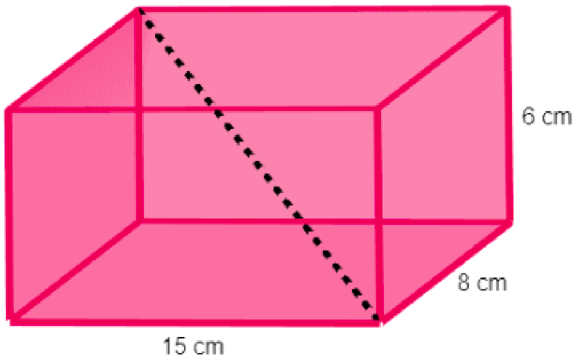
Ratkaistaan korkeus h.

$$\begin{aligned} h^2 + (0{,}5x)^2 &= (2x)^2 \\ h^2 &= (2x)^2 - (0{,}5x)^2 \\ h^2 &= 4x^2 - 0{,}25x^2 \\ h^2 &= 3{,}75x^2 \\ h &= \sqrt{3{,}75x^2} \\ h &= \sqrt{3{,}75} \cdot \sqrt{x^2} \\ h &= 1{,}936... \cdot x \end{aligned}$$

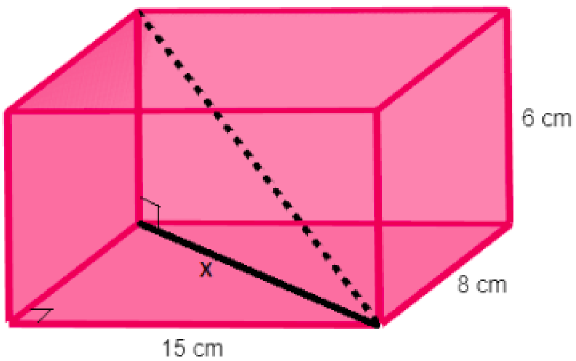
Ratkaistaan kanta x kolmion pinta-alan kaavan avulla.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{kolmio}} &= \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} \\
56\ \text{cm}^2 &= \frac{x \cdot 1{,}936... \cdot x}{2} && \| \cdot 2 \\
112\ \text{cm}^2 &= 1{,}936... \cdot x^2 && \| : 1{,}936... \\
57{,}836...\ \text{cm}^2 &= x^2 \\
\sqrt{57{,}836...\ \text{cm}^2} &= x \\
7{,}605...\ \text{cm} &= x \\
7{,}6\ \text{cm} &\approx x
\end{aligned}
$$

Harjoitustehtävä 9. *Aukkotehtävä*
Laske kuvan suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus kokonaisten senttimetrien tarkkuudella.



RATKAISU:



Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjä muodostaa suorakulmaisen kolmion yhdessä särmiön pohjan lävistäjän ja yhden särmän kanssa.

Lasketaan ensin särmiön pohjan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseen avulla. Pohjan lävistäjää on merkitty kuvaan muuttujalla x.

$$\begin{aligned} x^2 &= (15 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2 \\ x^2 &= 225 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2 \\ x^2 &= 289 \text{ cm}^2 \\ x &= \sqrt{289 \text{ cm}^2} \\ x &= 17 \text{ cm} \end{aligned}$$

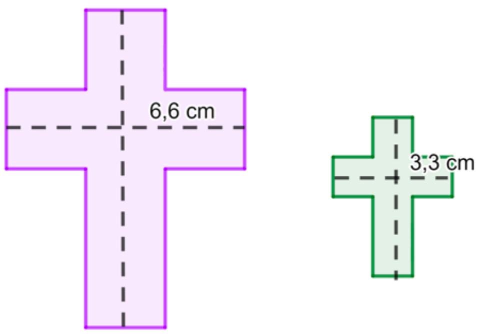
Nyt kun tiedetään pohjan lävistäjän pituus $x = 17$ cm ja särmiön korkeus 6 cm, voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla avaruuslävistäjän pituus. Merkitään avaruuslävistäjää muuttujalla y.

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + (6 \text{ cm})^2 \\ y^2 &= (17 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2 \\ y^2 &= 289 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2 \\ y^2 &= 322 \text{ cm}^2 \\ y &= \sqrt{322 \text{ cm}^2} \\ y &= 17{,}944... \text{ cm} \approx 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

Oikea vastaus on 18 cm.

Harjoitustehtävä 10. *Aukkotehtävä*

a) Kuvan ristit ovat keskenään yhdenmuotoisia. Mikä on isomman ristin pinta-ala, kun pienen ristin pinta-ala on 12,8 cm^2? Anna vastaus neliösenttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella.



b) Tennispallon tilavuus on 157,48 cm^3. Mikä on pingispallon tilavuus, kun se on yhdenmuotoinen sitä suuremman tennispallon kanssa ja pallojen mittakaava on $\frac{2}{3}$. Anna vastaus kokonaisiksi kuutiosenttimetreiksi pyöristettynä.

RATKAISU:

a) Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Ristien mittakaavaksi saadaan vastinsivujen suhteesta $\frac{3{,}3}{6{,}6} = \frac{1}{2}$, joten niiden pinta-alojen suhde on

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Merkitään kysyttyä pinta-alaa muuttujalla A ja ratkaistaan se verrannon avulla.

$$\begin{aligned} \frac{12{,}8}{A} &= \frac{1}{4} \qquad \| \cdot A \\ 12{,}8 \cdot 4 &= A \\ 51{,}2 &= A \end{aligned}$$

Oikea vastaus on 51,2 cm^2.

b) Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Pallojen mittakaava on $\frac{2}{3}$, joten niiden tilavuuksien suhde on

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

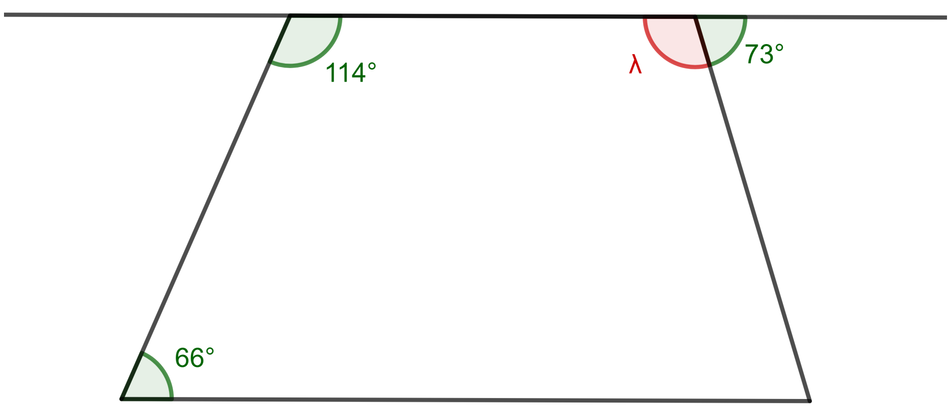
Merkitään kysyttyä tilavuutta muuttujalla V ja ratkaistaan se verrannon avulla.

$$\begin{aligned} \frac{V}{157{,}48} &= \frac{8}{27} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.} \\ 27 \cdot V &= 157{,}48 \cdot 8 \\ 27 \cdot V &= 1259{,}84 \\ V &= \frac{1259{,}84}{27} \\ V &= 46{,}660... \approx 47 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on 47 cm^3.

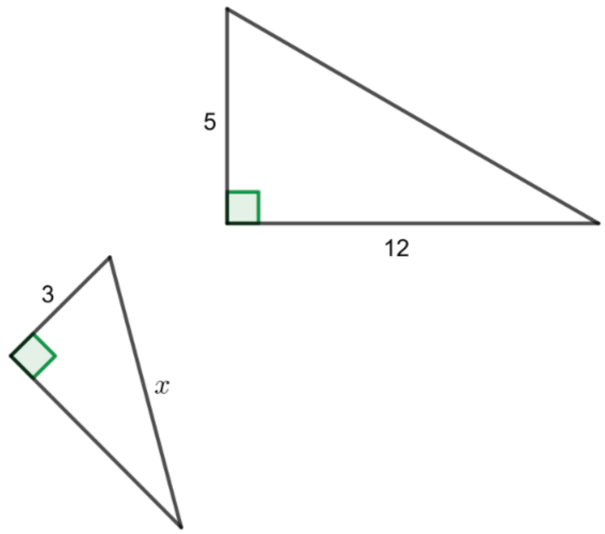
Koe 1

Tehtävä 1. *Aukkotehtävä*



Määritä kulman λ suuruus.

Tehtävä 2. *Aukkotehtävä*
Tiedetään, että kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Ratkaise sivun x pituus. Anna vas-

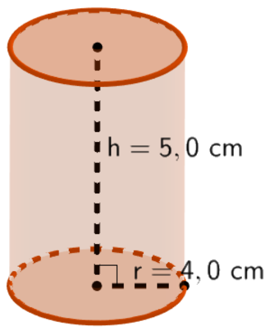


taus yhden desimaalin tarkkuudella.

Tehtävä 3. *Aukkotehtävä*
Kylpyhuoneeseen tehdään remontti, jossa lattia, seinät ja katto saavat uudet pinnat. Kylpyhuoneen lattian pituus on 3,3 m ja leveys 1,9 m. Kylpyhuone on 2,3 metriä korkea ja huoneen oven pinta-ala on 2,1 m^2. Remonttifirman kanssa on sovittu, että pintojen uusiminen maksaa 260 euroa neliömetriltä. Kuinka paljon remontti maksaa? Anna vastaus kokonaisina euroina.

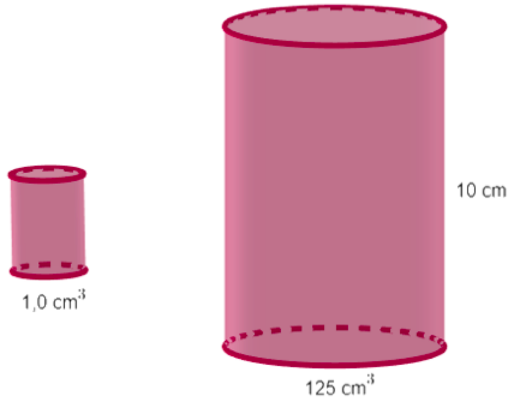
Tehtävä 4. *Aukkotehtävä*
Nelli tarjoilee juhlissa jälkiruoan astioista, jotka ovat suorakulmaisen särmiön muotoisia. Astian mitat ovat 4 cm x 4 cm x 7 cm. Nelli valmistaa jälkiruokaa 15 dl. Kuinka moni tarjoiluastia tulee kokonaan täyteen?

Tehtävä 5. *Aukkotehtävä*



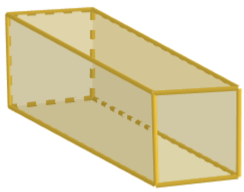
Ympyrälieriön pohjan säde on 4 cm ja korkeus 5 cm. Mikä on ympyrälieriön pohjan pinta-ala neliösenttimetreinä? Entä ympyrälieriön tilavuus kuutiosenttimetreinä? Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.

Tehtävä 6. *Aukkotehtävä*
Kuvassa olevat ympyräpohjaiset lieriöt ovat yhdenmuotoisia. Laske pienemmän ympyrä-

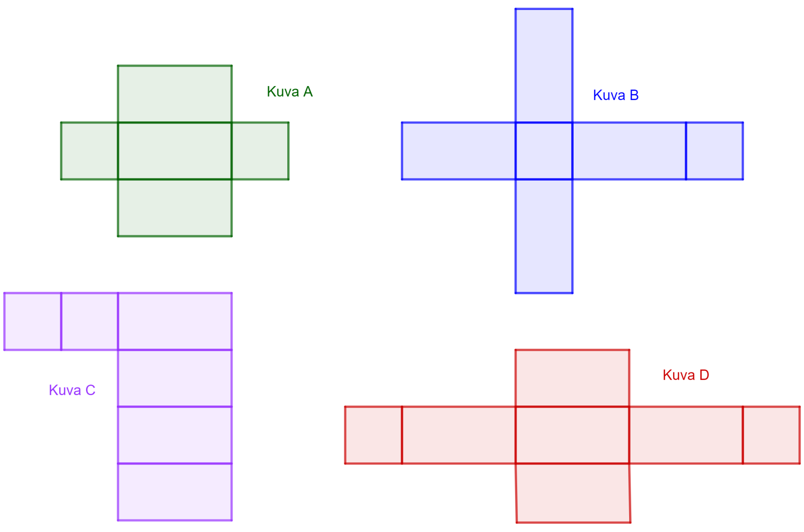


lieriön korkeus, kun suuremman ympyrälieriön korkeus on 10 cm ja kuvassa on annettu lieriöiden tilavuudet. Anna vastaus senttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella.

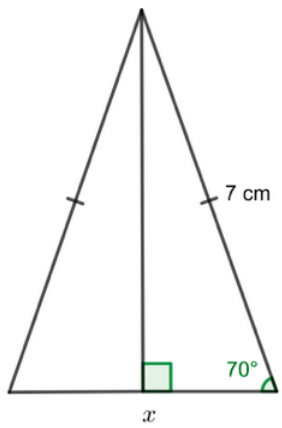
Tehtävä 7. *Monivalinta (valitse kaikki oikeat)*



Mikä seuraavista vaihtoehdoista on kuvan särmiö tasoon levitettynä? Valitse kaikki oikeat.

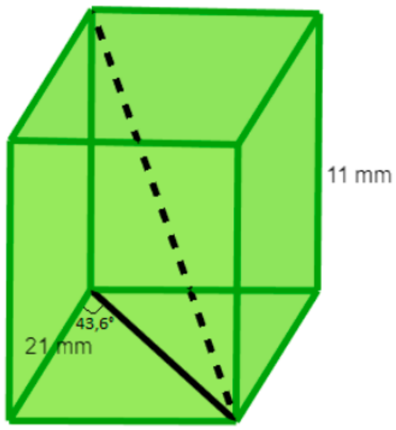


Tehtävä 8. *Aukkotehtävä*



Ratkaise tasakylkisen kolmion kanta x. Anna vastaus senttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella.

Tehtävä 9. *Aukkotehtävä*



Laske kuvassa olevan suorakulmaisen särmiön pohjan lävistäjän pituus sekä särmiön avaruuslävistäjän pituus. Anna vastaukset millimetreinä kokonaisluvuiksi pyöristettynä.