Cauchyn lause ja potentiaalifunktiot

Ivar Haasianlahti

Matematiikan pro gradu - tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Haasianlahti Ivar, *Cauchyn lause ja potentiaalifunktiot* (engl. *Cauchy's theorem and potential functions*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 77 sivua, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämä tutkielma käsittelee reaalisen ja kompleksisen tieintegraalin käytöstä tasossa. Näiden integraalien määritelmät perustuvat *tien* käsitteeseen: kuvaus $\gamma = (\alpha, \beta) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ on tie, jos komponenttikuvaukset α ja β ovat paloittain jatkuvasti derivoituvia välillä $[a, b]$ (päätepisteissä toispuoleisesti). Kun annettuna on jatkuva vektorikenttä $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, niin kentän F reaalinen tieintegraali yli tien γ on

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt, \tag{0.1}$$

missä Riemann-integraalilla tarkoitetaan summaa integraaleista yli niiden välin $[a, b]$ osavälien, joilla $\gamma' = (\alpha', \beta')$ on jatkuva, ja symboli $\cdot$ merkitsee pistetuloa. Analogisesti, kun annettuna on jatkuva funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, niin funktion f kompleksinen tieintegraali yli tien γ on

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt, \tag{0.2}$$

missä $\cdot$ merkitsee kompleksista tuloa. Integraaleja (0.1) ja (0.2) tutkitaan erityisesti siinä erikoistapauksessa, jossa tie γ on niin sanotusti *suljettu*, eli $\gamma(a) = \gamma(b)$. Lisäksi integroitavalta kuvaukselta on aihetta vaatia enemmän kuin pelkkä jatkuvuus: oletetaan, että funktiolle f on olemassa *kompleksinen derivaatta*

$$\lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

kaikille pisteille z jossakin avoimessa joukossa D (johon tien kuvajoukko sisältyy). Tällöin f on *kompleksisesti derivoituva* joukossa D, eli *analyyttinen.* Vastaavasti vektorikentältä $F = (u, v)$ vaaditaan, että osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{sekä} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

ovat jatkuvia jossakin avoimessa joukossa D. Lisäksi oletetaan, että joukossa D pätee

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Tällöin F on *lokaalisti integroituva.* Analyyttisyyden ja lokaalin integroituvuuden määritelmät luovat pohjan *Cauchyn lauseen* neljälle versiolle. Kukin näistä lauseista antaa ehdot, joiden vallitessa sekä analyyttisen funktion kompleksinen tieintegraali että lokaalisti integroituvan vektorikentän reaalinen tieintegraali yli suljetun tien ovat arvoltaan 0.

Cauchyn lauseen ensimmäinen versio olettaa, että tien kuvajoukko määrittelee *vyöhykkeen* (eli "siistin" tason osajoukon). Jos vyöhyke on edelleen "riittävän siisti", voidaan soveltaa Greenin lausetta. Tämä taktiikka kuitenkin vaatii pintaintegraalien käsittelyä, mikä johtaa melko syvällisiin ja raskaisiin laskuihin (jotka kirjallisuudessa yleensä sivuutetaan enemmän tai vähemmän täsmällisillä perusteluilla). Toinen versio asettaa topologiset ehdot, joiden vallitessa lokaalisti integroituvalle kentälle $F = (u, v)$ voidaan konstruoida *potentiaalifunktio*, eli funktio g, jolle pätee

$$\frac{\partial g}{\partial x} = u \text{ sekä } \frac{\partial g}{\partial y} = v.$$

Käy ilmi, että potentiaalifunktion olemassaolo johtaa reaalisen tieintegraalin häviämiseen (yli suljetun tien). Analogisesti, jos analyyttiselle funktiolle on olemassa *primitiivi* (eli kompleksinen antiderivaatta), niin vastaava kompleksinen tieintegraali häviää. Potentiaalifunktion ja primitiivin välisiä yhteyksiä saadaan esiin karakterisoimalla analyyttisyys *Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden* avulla. Kyseisten yhtälöiden mukaan analyyttiselle funktiolle $f = u + iv$ pätee

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ sekä } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cauchyn lauseen kolmas versio laajentaa edeltäjänsä sanomaa olettamalla, että integroitava kuvaus on lokaalisti integroituva tai analyyttinen *yhdesti yhtenäisessä* (eli "reiättömässä") joukossa. Tällöin suljetun tien kuvajoukko voidaan kutistaa jatkuvalla kuvauksella yksittäiseksi pisteeksi, eikä tämä muunnos vaikuta tieintegraalien arvoihin. Lopuksi lauseen neljäs versio osoittaa tieintegraalien (lineaarikombinaatioiden) häviävän, jos tie (teiden lineaarikombinaatio) ei "kierrä" yhtäkään pistettä, jossa annettu kuvaus ei ole lokaalisti integroituva tai analyyttinen. Lause yleistää edeltävien versioiden sanoman yhdistämällä potentiaaliteorian *kierrosluvun* käsitteeseen.

Sisältö

Johdanto 4
1. Kompleksiluvuista ja vektorikentistä 6
2. Tie 9
3. Tieintegraali 16
4. Analyyttisyys 22
5. Greenin lause 30
6. Potentiaali ja primitiivi 40
7. Homotopia 51
8. Tien kierrosluku 61
9. Cauchyn lause 67
Loppusanat 75
Viitteet 77

Johdanto

Kirjallisuudessa ilmaisulla *Cauchyn lause* on tapana viitata lauseeseen, joka antaa ehdot analyyttisen (eli avoimessa joukossa kompleksisesti derivoituvan) funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksisen tieintegraalin häviämiselle, kun integraali lasketaan suljetun tien yli. Lauseesta on erilaisia (ja eritasoisia) versioita, ja kukin niistä vastaa seuraavaan kysymykseen:

Millä ehdoilla analyyttisen funktion kompleksinen tieintegraali yli suljetun tien häviää?

(0.3)

Cauchyn lause käsittelee kompleksimuuttujan kompleksiarvoisia funktioita, joten epämääräisesti puhuen kyseessä on "kompleksinen" ilmiö. Käy kuitenkin ilmi, että lokaalisti integroituvien vektorikenttien reaaliset tieintegraalit käyttäytyvät lähestulkoon analogisesti, kun niitä verrataan analyyttisten funktioiden kompleksisiin tieintegraaleihin. Onkin aihetta esittää myös seuraava kysymys:

Millä ehdoilla lokaalisti integroituvan vektorikentän reaalinen tieintegraali yli suljetun tien häviää?

(0.4)

Reaali– ja kompleksianalyysi on tapana pitää kirjallisuudessa toisistaan erillään, joten ongelmia (0.3) ja (0.4) ei kovinkaan usein käsitellä rinnakkain. Niiden ratkaisut voidaan esittää yllättävän "topologisessa" muodossa tutkimalla, miten tien kuvajoukko suhtautuu niihin pisteisiin, joissa integroitava kuvaus ei ole (välttämättä) analyyttinen tai lokaalisti integroituva. Tässä tutkielmassa Cauchyn lauseesta muotoillaan neljä versiota (5.11, 6.13, 7.15 sekä 9.1), jotka tarjoavat erilaisia vastauksia kysymyksiin (0.3) ja (0.4). Lisäksi esitystapa on siinä mielessä "nouseva", että jokainen versio on seuraajansa erikoistapaus.

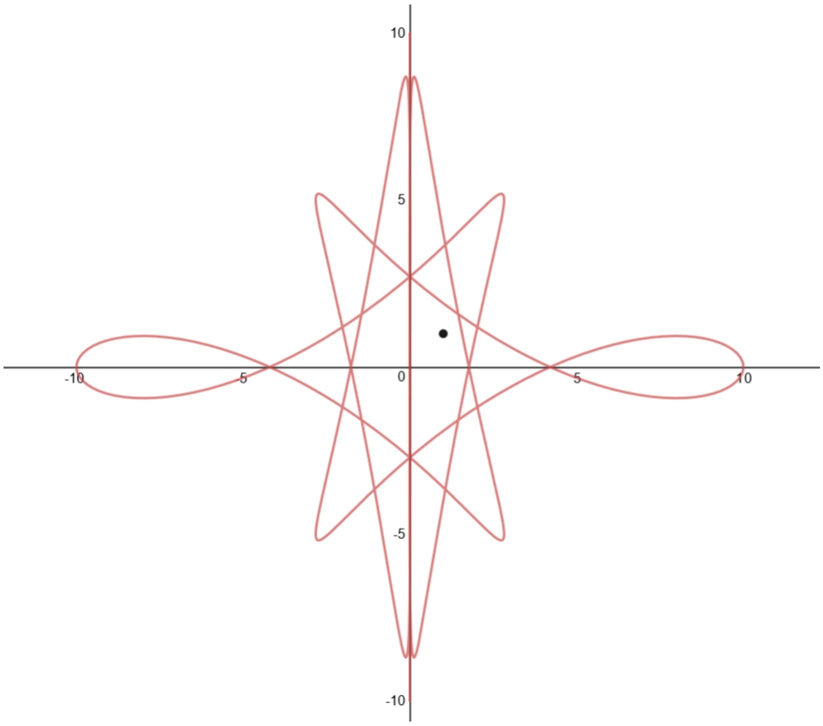
Motivaatiota tarjoaa seuraava enteilevä esimerkki: asetetaan tie

$$\gamma(t) := (10\cos^5(t)\cos(4t), 10\sin(t)\cos(6t)) \text{ kaikille } t \in [0, 2\pi].$$

Kuvassa 1 on esitetty tien γ kuvajoukko (eli sen *jälki*) sekä piste $(1,1) = 1 + i$. Määritellään kompleksimuuttujan funktio

$$f(z) := \frac{z^2}{z - 1 - i}$$

kaikille $z \in \mathbb{C} \setminus \{1 + i\}$. Voidaan osoittaa, että f on määrittelyjoukossaan analyyttinen, joten häviääkö kompleksinen tieintegraali $\int_\gamma f dz$? Käy ilmi, että integraalin häviäminen on yhteydessä jäljen $\gamma([0, 2\pi])$ sekä "ongelmakohdan" $1 + i$ väliseen suhteeseen. Kyseinen suhde on tässä esimerkkitapauksessa hiukan vaikeaselkoinen, koska tien γ jälki "menee solmuun" —



Kuva 1. Tien γ kuvajoukko (punainen viiva) sekä mustalla symbolilla merkitty piste $1 + i$.

asiaa on syytä tutkia yleisemmin, kuten tässä tekstissä tehdään. Esitys on siinä mielessä perusteellinen, että ensimmäiset neljä kappaletta rakentavat olennaiset määritelmät ja tulokset aina kompleksilukujen määritelmästä alkaen. Edelleen kappaleissa 5–9 paneudutaan integraalien häviämiseen, eli kysymyksiin (0.3) ja (0.4).

Määritelmä 1.1. Määritellään laskutoimitus $\cdot$ reaalisille tasovektoreille asettamalla

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya) \text{ kaikille } (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Laskutoimitus $\cdot$ on *kompleksinen tulo*. Kompleksisella tulolla varustettu reaalinen taso $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, \cdot)$ on *kompleksilukujen joukko*.

Joukolle $\mathbb{C}$ saadaan vaihtoehtoinen määritelmä asettamalla luku i ehdolla $i^2 := -1$. Lukua i kutsutaan *imaginaariyksiköksi*. Sovitaan, että i käyttäytyy reaalisen tulon, summan ja erotuksen kannalta reaaliluvun tavoin. Täten, kun $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, saadaan reaalisella tulolla esitys

$$\begin{aligned}(x + iy)(a + ib) &= xa + ixb + iya + i^2 yb \\ &= xa + ixb + iya - yb = xa - yb + i(xb + ya).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Vertaamalla yhtälöitä (1.1) ja (1.2) nähdään, että luku $x + yi$ voidaan samaistaa vektoriin $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Kannattaa erityisesti huomata, että nyt reaaliluvulle x pätee $x = x + i0 = (x, 0)$, joten $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Lisäksi $i = 0 + i1 = (0, 1)$ ja $0 = 0 + i0 = (0, 0)$. Toisinaan joukkoa $\{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ kutsutaan *imaginaariakseliksi* (tai *y-akseliksi*) ja joukkoa $\mathbb{R}$ *reaaliakseliksi* (tai *x-akseliksi*).

Huomautus 1.2. Ensinnäkin, kompleksisen tulon symboli $\cdot$ on tapana jättää merkitsemättä. Toisekseen, kompleksinen tulo on helppo sekoittaa tasovektoreiden pistetuloon, joten tässä suhteessa on oltava tarkkana. Kolmanneksi, kun kirjoitetaan $x + iy \in \mathbb{C}$, niin samalla oletetaan (ellei toisin mainita), että $x, y \in \mathbb{R}$.

Listataan kompleksilukujen perusominaisuuksia ja niihin liittyviä määritelmiä. Olkoot tätä varten $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ja $w = a + ib \in \mathbb{C}$.

1) Luvun z *normi* on $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$, eli tuttu kaksiulotteinen euklidinen normi.

2) Luvun z *kompleksikonjugaatti* on luku $\overline{z} := x - iy$.

3) Kun $z \neq 0$, niin luvun z *käänteisluku* on $z^{-1} := \overline{z}/|z|^2$. Määritelmä on järkevä, koska

$$zz^{-1} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = \frac{(x + iy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

4) Kun $z \neq 0$, niin asetetaan $w/z := wz^{-1}$.

5) Eräs kompleksilukujen tärkeimmistä ominaisuuksista on *Eulerin kaava*,

jonka mukaan

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)). \tag{1.3}$$

Muistetaan sini– ja kosinifunktioiden summakaavat: kaikille $s, t \in \mathbb{R}$ pätee

$$\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t), \text{ sekä}$$
$$\sin(s+t) = \cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t).$$

Näiden kaavojen avulla on helppo osoittaa todeksi laskusääntö

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Jos $z \neq 0$, niin luku z on siis tasovektori, joka ei ole nollavektori. Täten on olemassa luku $\theta \in \mathbb{R}$ siten, että

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

Lukua θ kutsutaan luvun z *napakulmaksi*. Visuaalisesti ottaen napakulma määritetään suhteessa positiiviseen reaaliakseliin siten, että kiertosuunta vastapäivään on positiivinen ja kiertosuunta myötäpäivään negatiivinen. Täsmälleen yksi luvun z napakulmista on välillä $[0, 2\pi)$ — tätä napakulmaa kutsutaan luvun z *argumentiksi* ja merkitään $\mathrm{Arg}(z)$. Esimerkiksi luvulla $i = (0,1)$ on napakulmat $\pi/2, -3\pi/2$ sekä $37\pi/2$, mutta $\mathrm{Arg}(i) = \pi/2$.

Kun θ on luvun z napakulma ja ϕ luvun w napakulma, saadaan

$$zw = |z||w|e^{i\theta}e^{i\phi} = |z||w|e^{i(\theta+\phi)}.$$

Tässä nähdään kompleksilukujen kaunein ominaisuus: visuaalisesti ottaen luvun z kertominen luvulla w tarkoittaa vektorin z skaalaamista kertoimella $|w|$ ja rotaatiota kulmalla ϕ (luvun ϕ etumerkki määrä rotaation suunnan). Esimerkki: $-2i \cdot i = 2$. Koska $\mathrm{Arg}(i) = \pi/2$ ja $\mathrm{Arg}(-2i) = 3\pi/2$, niin tulo $-2i \cdot i$ pyörittää vektoria $i = (0,1)$ kulman $3\pi/2$ verran vastapäivään, jolloin päädytään positiiviselle reaaliakselille. Lisäksi i skaalataan kertoimella 2.

Rotaatio ja skaalaus ovat lineaarisia operaatioita, joten voidaan päätellä, että kompleksinen tulo on esitettävissä matriisitulona. Näin todellakin on:

$$wz = px - qy + i(qx + py) = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

missä matriisi

$$\begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix}$$

vastaa lukua w. Huomaa, että jokaiselle luvulle $w \in \mathbb{C}$ on tällainen matriisiesitys. Kompleksilukujen perusominaisuuksia löytyy helposti myös kirjallisuudesta; katso esimerkiksi [1, s.3–12].

* * *

Määritelmä 1.3. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$. Kuvausta $f : D \to \mathbb{R}^2$ kutsutaan *vektorikentäksi* tai lyhyemmin *kentäksi*. f voidaan kirjoittaa muotoon $f = (u, v)$, missä $u, v : D \to \mathbb{R}$ ovat kentän f *komponenttikuvaukset* tai lyhyemmin *komponentit*.

Jos tässä f on lineaarikuvaus, niin kaikille $v_1, v_2 \in D$ ja $a, b \in \mathbb{R}$ pätee $f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$. Toisaalta, jos f ei ole lineaarikuvaus, voidaan tutkia missä määrin se ”muistuttaa lineaarikuvausta lähietäisyydeltä”. Helpommin visualisoitava analogia on derivoituvan funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ käytös: koska g derivoituu pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin funktion g käytöstä pisteen x ympäristössä voidaan approksimoida lineaarisella funktiolla, eli graafisesti ottaen funktion g graafin tangenttisuoralla. Tämä idea laajennetaan tasosta tasoon suuntautuvalle vektorikentälle seuraavasti:

Määritelmä 1.4. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $f : D \to \mathbb{R}^2$ kuvaus sekä $a \in D$. Sanotaan, että f on *differentioituva* pisteessä a, jos on olemassa lineaarikuvaus $L : D \to \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\lim_{h \to 0,\, h \in \mathbb{R}^2} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0 \tag{1.4}$$

(katso esimerkiksi [2, s.125]).

Huomaa, että yhtälössä (1.4) merkintä $L(h)$ tarkoittaa vektorin h kuvaamista kuvauksella L, joten $L(h)$ on itsekin tasovektori. Määritelmä voi olla hiukan vaikeaselkoinen, mutta idea on siinä, että riittävän lähellä pistettä a kenttä f käyttäytyy lineaarikuvauksen L tavoin. Nimittäin, kun f on differentioituva pisteessä a, niin voidaan määritellä

$$\epsilon(h) := f(a+h) - f(a) - L(h),$$

missä $h \neq 0$, ja vaaditaan $a + h \in D$. Nyt differentioituvuuden määritelmän perusteella $\epsilon(h)/|h| \to 0$, kun $h \to 0$, ja voidaan kirjoittaa erityisen hyödyllinen esitys

$$f(a+h) = L(h) + f(a) + \epsilon(h). \tag{1.5}$$

Yhtälöstä (1.5) nähdään differentioituvuuden heuristinen merkitys: kun $|h|$ on pieni luku, f käyttäytyy pisteen a ympäristössä $B(a, |h|)$ ”melkein” kuin lineaarikuvaus L kiekossa $B(0, |h|)$. Huomaa kuitenkin, että virhefunktion $\epsilon(h)$ on lähestyttävä origoa ”nopeammin” kuin h, eli $\epsilon(h)/|h| \to 0$, kun $h \to 0$. Erityisesti tämän rajankäynnin on toteuduttava riippumatta siitä, *miten* h lähestyy origoa.

Voidaan osoittaa, että jos kenttä $f = (u, v)$ on differentioituva pisteessä $a \in D \subset \mathbb{R}^2$, niin yhtälö (1.4) toteutuu lineaarikuvaukselle

$$L_a := \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{bmatrix},$$

missä siis vektori a on annettu kentän f komponenttikuvausten osittaisderivaatoille (katso [2, s.126, lause 16]). Tätä lineaarikuvauksen L_a esitystä kutsutaan kentän f *Jacobin matriisiksi* pisteessä a. Enteilevänä kysymyksenä esitettäköön seuraavaa: millä ehdolla matriisi L_a on kompleksiluvun matriisiesitys?

Huomautus 1.5. Vektorikentän differentioituvuudelle pisteessä a riittää, että kentän komponenttien osittaisderivaatat ovat jatkuvia jossakin pisteen a avoimessa ympäristössä ([2, s.127, lause 9]). Derivaattojen jatkuvuus ei kuitenkaan ole välttämätön ominaisuus — siis differentioituvuus takaa komponenttien osittaisderivaattojen olemassaolon, mutta ei niiden jatkuvuutta.

Täsmällisyyden nimissä asetetaan seuraava määritelmä:

Määritelmä 1.6. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$. Kuvausta $f : D \to \mathbb{C}$ on tapana kutsua *funktioksi*. f voidaan kirjoittaa muotoon $f = u + iv$, missä $u, v : D \to \mathbb{R}$ ovat funktion f *komponenttikuvaukset* tai lyhyemmin *komponentit*. Funktion f parametrin symbolina on tapana käyttää kirjainta z.

Täten, asiayhteydestä riippuen, tasosta tasoon suuntautuvaa kuvausta voidaan kutsua joko funktioksi tai vektorikentäksi. Myöhemmin tarkastellaan erityisesti sellaisia kenttiä ja funktioita, joiden komponenttikuvausten osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Täten on aihetta asettaa seuraava määritelmä:

Määritelmä 1.7. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = (u, v) = u + iv : D \to \mathbb{C}$ kuvaus. Sanotaan, että f on *C^1-funktio* tai *C^1-kenttä*, jos komponenttien u ja v osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{sekä} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

ovat olemassa ja jatkuvia joukossa D. Jos $U \subset \mathbb{C}$ on suljettu, niin sanotaan, että f on C^1-funktio (tai C^1-kenttä) joukossa U, jos on olemassa avoin joukko E siten, että $U \subset E$, ja f on C^1-funktio (tai C^1-kenttä) joukossa E.

2. Tie

Pidetään mielessä, että kompleksilukujen joukko on vain reaalinen taso varustettuna kompleksisella tulolla — täten monet määritelmät annetaan joukossa $\mathbb{C}$. Erityisesti on muistettava, että nyt reaaliluvuista voidaan puhua tason pisteinä; esimerkiksi $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$.

Aloitetaan asettamalla useita tarvittavia määritelmiä, joskin varoituksen sana on tarpeen: kirjallisuudessa tämän aihepiirin käsitteistö voi olla hyvinkin sekavaa, koska eri kirjoittajat määrittelevät asioita eri tavoin (ja saattavat tästä huolimatta käyttää samoja käsitteitä).

Määritelmä 2.1. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus (pisteissä a ja b toispuoleisesti). Tällöin kuvausta γ kutsutaan *poluksi*. Piste $\gamma(a)$ on polun γ *alkupiste*, ja piste $\gamma(b)$ puolestaan polun γ *päätepiste*. γ voidaan esittää muodossa $\gamma = \alpha + i\beta = (\alpha, \beta)$, missä funktiot $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat polun γ *komponenttikuvaukset* tai lyhyemmin *komponentit*. Jos $\gamma(a) = \gamma(b)$, niin sanotaan, että kuvaus γ on *suljettu*. Kuvajoukko $\gamma([a,b])$ on kuvauksen γ *jälki*, jota merkitään $\gamma([a,b]) =: \gamma^*$.

Määritelmä 2.2. Olkoon $\gamma = \alpha + i\beta : [a,b] \to \mathbb{C}$ polku. Jos funktiot α ja β ovat jatkuvasti derivoituvia välillä $[a,b]$ (pisteissä a ja b toispuoleisesti), niin kuvaus γ on *sileä tie*. Tällöin kuvauksen γ *derivaatta* on

$$\gamma'(t) := \alpha'(t) + i\beta'(t)$$

kaikille $t \in [a,b]$ (kun $t = a$ tai $t = b$, merkinnöillä $\alpha'(t)$ ja $\beta'(t)$ tarkoitetaan toispuoleisia derivaattoja).

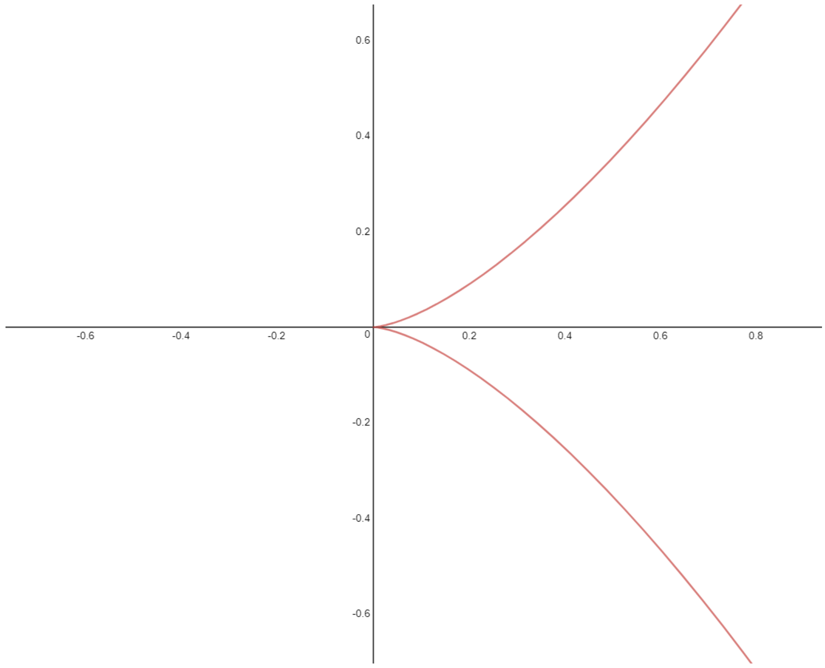
Koska $\gamma'(t)$ on jäljen γ^* tangenttivektori pisteessä t, niin voisi kuvitella, että sileän tien tangentti ei "käänny äkkijyrkästi". Näin ei kuitenkaan välttämättä ole: asetetaan esimerkiksi $\gamma(t) := (t^2, t^3)$ kaikille $t \in [-1,1]$. Tällöin $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$, eli erityisesti $\gamma'(t) = 0$ pisteessä $t = 0$. Kuten kuvasta 2 nähdään, jälki γ^* piikittyy origoon, eli visuaalisesti ottaen tangenttivektori vaihtaa origossa yllättäen suuntaansa. Tästä huolimatta γ' on kuitenkin jatkuva. Edelleen polun jälki voi olla hyvinkin kaoottinen, koska siltä ei vaadita (edes) tangenttivektorin olemassaoloa yhdessäkään määrittelyvälinsä pisteessä.

Esimerkki 2.3. Tutkitaan kuvausta $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$, missä $r > 0$. Eulerin kaavan (1.3) mukaan $\gamma(t) = re^{it} = r\cos(t) + ir\sin(t)$, joten kuvauksen γ komponentit ovat $\alpha(t) = r\cos(t)$ sekä $\beta(t) = r\sin(t)$. Selvästi nämä funktiot ovat jatkuvasti derivoituvia välillä $[0, 2\pi]$, joten γ on sileä tie (ja täten myös polku). Kun parametri t käy läpi välin $[0, 2\pi]$ luvut, muodostuu jäljeksi γ^* r-säteinen origokeskinen ympyrä.

Esimerkki 2.4. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin voidaan määritellä polku $\delta(t) = (t, f(t))$ kaikille $t \in [a,b]$, jolloin δ^* on funktion f graafi yli välin $[a,b]$. Ääriesimerkki saadaan valitsemalla funktioksi f Weierstrassin ei-missään derivoituva funktio, jolloin polulle δ ei ole derivaattaa yhdessäkään välin $[a,b]$ pisteessä.

Määritelmä 2.5. Olkoot $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Polkua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ kutsutaan *janaksi (pisteestä z_0 pisteeseen z_1)*. Nimitys on mielekäs, koska tapauksessa $z_0 \neq z_1$ jälki γ^* on geometrinen jana.

Kannattaa huomata, että janan $t \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$ derivaatta on $z_1 - z_0 \in \mathbb{C}$, mikä on helppo nähdä sileän tien derivaatan määritelmän avulla.



KUVA 2. Sileän tien $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ käytös origon läheisyydessä.

Esimerkki 2.6. Olkoot $\gamma, \delta : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$ ja $\delta(t) = 1 + it$. Nyt jäljet γ^* ja δ^* ovat janoja. Olennaista on se, että polun γ päätepiste 1 on polun δ alkupiste. Määritellään polku $\kappa : [0, 2] \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$\kappa(t) = \begin{cases} t, & \text{kun } t \in [0, 1], \\ 1 + i(t-1), & \text{kun } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Nyt $\kappa^* = \gamma^* \cup \delta^*$. Huomaa kuvauksen κ määrittelyn idea: kun $t \in [1, 2]$, niin t ”skaalataan” välille $[0, 1]$ käyttämällä kuvausta $t \mapsto (t-1)$. Tämä skaalaus on tarpeen, jotta κ saadaan määriteltyä yksittäiselle suljetulle välille. Lisäksi huomaa, että välillä $[0, 1]$ on $\kappa'(t) = 1$, kun taas välillä $[1, 2]$ pätee $\kappa'(t) = i$. Täten kuvauksella κ ei ole derivaattaa (määritelmän 2.2 mielessä) pisteessä 1, mikä on visuaalisesti ottaen perin selvää: kyseisessä pisteessä jälki κ^* tekee ”äkkijyrkän käännöksen”, eli tangenttia ei ole olemassa. Näin ollen κ ei ole sileä tie.

Esimerkissä 2.6 janat γ ja δ ”yhdistettiin” poluksi κ. Formalisoidaan tämä yhdistämisen idea seuraavasti:

Määritelmä 2.7. Olkoot $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ja $\delta : [c, d] \to \mathbb{C}$ polkuja siten, että $\gamma(b) = \delta(c)$. Polkujen γ ja δ *yhdistetty polku* (tai lyhyemmin *yhdiste*) on $\kappa = \gamma * \delta : [0, 2] \to \mathbb{C}$, jolle

$$\kappa(t) = \begin{cases} \gamma(t(b-a) + a), & \text{kun } t \in [0, 1], \\ \delta((t-1)(d-c) + c), & \text{kun } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Yleisesti, olkoon annettuna polut $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Oletetaan, että $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ kaikille $j \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$. Jokaiselle

$j \in \{1,2,3,...,n\}$ määritellään $\kappa_j(t) = \gamma_j((t-j+1)(b_j-a_j)+a_j)$ kaikille $t \in [j-1,j]$. Asetetaan polku $\kappa : [0,n] \to D$, $\kappa(t) := \kappa_j(t)$, kun $t \in [j-1,j]$, kaikille $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Sanotaan, että κ on polkujen $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ *yhdistetty polku* (tai *yhdiste*), ja käytetään merkintää $\kappa = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$.

Määritelmän 2.7 symbolismi on sekavaa, mutta idea on perin yksinkertainen: kun kuvaukselle $\kappa = \gamma * \delta$ annetaan $t \in [0,1]$, niin t skaalataan välille $[a,b]$. Tämä skaalaus on määritelmän olennaisin osuus, ja se lienee helpointa ajatella suhteiden tai prosenttiosuuksien kautta: koska t on välillä $[0,1]$, niin t on jokin prosenttiosuus välin $[0,1]$ pituudesta 1. Täten t voidaan skaalata välille $[a,b]$ etsimällä luku $r \in [a,b]$, jolle pituuksien suhde $(r-a)/(b-a)$ on yhtä suuri kuin luku t. Yhtälön $t = (r-a)/(b-a)$ ratkaisu (muuttujan r suhteen) on $r = t(b-a)+a$, ja täsmälleen tämä ratkaisu annetaan kuvaukselle γ polun $\gamma * \delta$ määritelmässä. Näin voidaan tehdä, koska $r \in [0,1]$.

Entä kun $t \in [1,2]$? Nyt toimitaan samoin kuten edellä, mutta ensin t on skaalattava välille $[0,1]$. Tämä onnistuu kuvauksella $t \mapsto (t-1)$, kuten esimerkissä 2.6. Yleisesti, kun yhdistettäviä polkuja on n kappaletta, niin yhdisteen κ määrittelyväli on $[0,n]$. Kun t valitaan joltain osaväliltä $[j-1,j]$, $j \in \{1,2,...,n\}$, niin t on jälleen skaalattava välille $[0,1]$ kuvauksella $t \mapsto (t-(j-1))$.

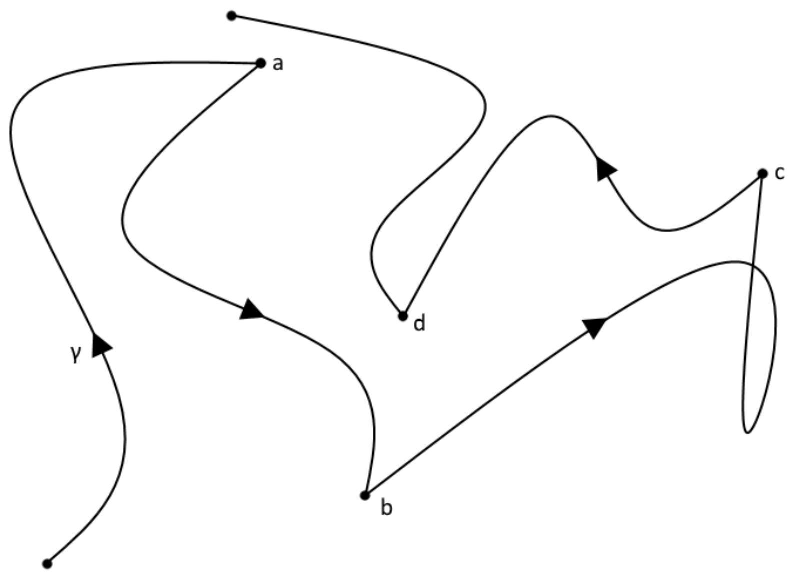
Eräs yhdistetyn polun ikävyys on siinä, että sen määrittelyväli on aina muotoa $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$. Periaatteessa ongelmasta päästään eroon määritelmällä jälleen uusi skaalaus (katso 2.10), mutta sitä ennen asetetaan tien määritelmä:

Määritelmä 2.8. Olkoon $\gamma = \alpha + i\beta : [a,b] \to \mathbb{C}$ kuvaus. Oletetaan, että on olemassa (nousevassa järjestyksessä) pisteet $a_1, a_2, ..., a_n \in (a,b)$ siten, että funktioiden α ja β derivaatat ovat jatkuvia kullakin osavälillä $[a_j, a_{j+1}]$, $j \in \{1,2,...,n-1\}$ (päätepisteissä a_j ja b_j derivaatat ovat toispuoleisesti jatkuvia). Lisäksi oletetaan, että α' ja β' ovat jatkuvia myös väleillä $[a,a_1]$ sekä $[a_n,b]$ (päätepisteissä toispuoleisesti). Tällöin sanotaan, että γ on *tie*. Kun $t \in [a,b] \setminus \{a_1,...,a_n\}$, niin tien γ *derivaatta* on

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t),$$

missä $\gamma'(a)$ ja $\gamma'(b)$ viittaavat toispuoleisiin derivaattoihin.

Koska tien γ derivaatta on epäjatkuva äärellisen monessa tien määrittelyvälin sisäpisteessä, niin jälki γ^* on visuaalisesti ottaen "paloittain sileä" (katso kuva 3 ja vertaa sitä kuvaan 2). Huomaa, että tie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on sileiden teiden yhdiste skaalattuna välille $[a,b]$. Lang käyttää tätä ideaa tien määritelmässään ([1, s.88]), joskin esitys on hiukan epämääräinen (Langin ajatus sileiden teiden yhdistämisestä jää melko heuristiseksi). Sen sijaan Conway ([3, s.45–46]) puhuu kuvauksesta, joka on *piecewise differentiable path*, ja kyseessä on täsmälleen sama olio kuin määritelmässä 2.8 (Conway sisällyttää derivaatan jatkuvuuden ominaisuuteen *differentiable* — kuten lukija huomaa, käsitteistön kanssa menee helposti hermot). Seuraavassa pari kiinnostavaa esimerkkiä aiheesta:



Kuva 3. Tien γ derivaatta on epäjatkuva pisteiden a, b, c ja d alkukuvissa.

Esimerkki 2.9. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{kun } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Asetetaan $\gamma(t) = (t, f(t))$ kaikille $t \in [-1,1]$. Onko γ tie? Eipä ole, mikä johtuu sen käytöksestä pisteessä $(0,0)$. Kun $h \in (0,1]$, niin

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin(1/h)}{h} = \sin(1/h),$$

joten erotusosamäärälle ei ole oikeanpuoleista (saati vasemmanpuoleista) raja-arvoa, kun $h \to 0$. Siis f (ja täten γ) ei derivoidu toispuoleisesti pisteessä 0, joten γ ei ole tie. Toisaalta γ on polku, koska f on jatkuva välillä $[0,1]$. Määritellään vielä funktio g asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{kun } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Nyt g on derivoituva myös origossa, koska

$$\frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = h \sin(1/h) \to 0,$$

kun $h \to 0$. Derivaatta g' ei kuitenkaan ole jatkuva origossa, koska

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin(1/x)) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x),$$

eikä tällä lausekkeella ole toispuoleisia raja-arvoja, kun $x \to 0$. Täten kuvaus $t \mapsto (t, g(t))$, $t \in [-1, 1]$, ei ole tie.

Määritelmä 2.10. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ polku ja $p : [c, d] \to [a, b]$ välillä $[c, d]$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle pätee $p(c) = a$ ja $p(d) = b$. Määritellään $\delta : [c, d] \to \mathbb{C}$ asettamalla $\delta(t) := \gamma(p(t))$ kaikille $t \in [c, d]$. Sanotaan, että polku δ on polun γ *parametrisaatio*, ja p on *parametrifunktio*. Lisäksi sanotaan, että γ on *parametrisoitu välille* $[c, d]$.

Parametrifunktiolta vaaditaan jatkuva derivoituvuus siksi, että tämä ominaisuus tulee olemaan hyödyllinen tieintegraalien käsittelyssä (esimerkiksi lauseessa 3.5). Itse asiassa pelkkä paloittainen jatkuva derivoituvuus riittäisi, mutta jatkuvan derivoituvuuden vaatimus ei ole mitenkään kohtuuton, kuten tullaan näkemään (funktiosta (2.1)). Huomaa myös, että parametrifunktio on määritelmänsä seurauksena surjektio.

Esimerkki 2.11. Olkoon $\gamma(t) = e^{it}$ kaikille $t \in [0, 2\pi]$. Asetetaan jatkuvasti derivoituva funktio $p : [0, 1] \to [0, 2\pi]$, jolle $p(t) = 2\pi t$. Nyt voidaan määritellä polku $\delta(t) = \gamma(p(t)) = e^{2\pi i t}$, jolloin δ on polun γ parametrisaatio. Huomaa, että toisaalta γ on polun δ parametrisaatio, koska $\gamma(t) = \delta(p^{-1}(t))$, missä $p^{-1} : [0, 2\pi] \to [0, 1]$, $p^{-1}(t) = t/2\pi$. Tässä kävi niin onnekkaasti, että p on bijektio, vaikka määritelmä 2.10 ei tätä ominaisuutta vaadi.

Parametrifunktion avulla polkujen yhdiste voidaan skaalata mille tahansa välille $[a, b]$ (käyttämällä funktiota $p(t) = n(t - a)/(b - a)$, joka skaalaa pisteen $t \in [a, b]$ välille $[0, n]$). Itse asiassa mikä tahansa polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ voidaan parametrisoida mielivaltaiselle välille $[c, d]$ jatkuvasti derivoituvalla funktiolla

$$p(r) = \frac{r - c}{d - c}(b - a) + a, \tag{2.1}$$

joka siis kuvaa välille $[a, b]$ (huomaa, että p on jopa bijektio). Nimetään muutamia polun erikoistapauksia:

Määritelmä 2.12. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ suljettu polku siten, että rajoittuma $\gamma|_{[a,b)}$ on injektio. Tällöin sanotaan, että γ on *Jordanin polku*, ja γ^* on *Jordanin käyrä*. Jordanin käyrälauseen mukaan γ^* jakaa tason $\mathbb{C}$ yhteen rajoitettuun ja yhteen rajoittamattomaan avoimeen osajoukkoon. Rajoitettua osajoukkoa kutsutaan polun γ *sisäpuoleksi*, ja merkitään $I(\gamma)$. Lisäksi, jos γ on suljettu tie siten, että rajoittuma $\gamma|_{[a,b)}$ on injektio, niin sanotaan, että γ on *Jordanin tie*.

Huomaa, että Jordanin polut ja tiet oletetaan suljetuiksi, minkä lisäksi Jordanin polun sisäpuoli $I(\gamma)$ on avoin. Kirjallisuudessa esiintyy myös käsite *Jordan arc*, joka on injektiivinen polku; katso esimerkiksi [4, s.26].

Eräs (heuristinen) polun ominaisuus on sen ”piirtosuunta”. Esimerkiksi polku $t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, piirtää origokeskisen ympyrän vastapäivään, kun taas polku $t \mapsto e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$, piirtää saman ympyrän myötäpäivään — siis ympyrän piirtosuunnan voi ainakin tässä tapauksessa kääntää vastakkaiseksi.

Jos kyseessä ei ole suljettu polku, niin piirtosuunnan kääntäminen tarkoittaa alku– ja päätepisteiden roolien vaihtamista. Pohditaan asiaa formaalisti: olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ polku, ja valitaan piste $t \in [a, b]$. Nyt halutaan löytää luku $s \in [a, b]$ siten, että sen etäisyys luvusta b on yhtä suuri kuin luvun t etäisyys luvusta a, eli $b-s = t-a$, mistä ratkaistaan $s = a+b-t$. Kun t käy läpi välin $[a, b]$ luvut ”aloittaen” pisteestä a, niin $s = s(t)$ aloittaa pisteestä b. Sovitaan tältä pohjalta seuraavaa:

Määritelmä 2.13. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ polku. Asetetaan kuvaus $\overleftarrow{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}$, jolle

$$\overleftarrow{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t).$$

Sanotaan, että $\overleftarrow{\gamma}$ on polun γ *vastakkainen* polku.

Ajatus polun ”piirtosuunnasta” on erityisen merkittävä, kun kyseessä on Jordanin tie. Tällöin suunta voidaan karakterisoida sen suhteen, millainen yhteys tien derivaatalla ja tien sisäpuolella on. Heuristisesti puhuen asetetaan, että tien suunta on ”positiivinen”, jos sisäpuoli on tien tangentin vasemmalla puolella, ja ”negatiivinen”, jos sisäpuoli on tangentin oikealla puolella.

Ilmiön formaalia muotoilua voi pohtia seuraavasti: oletetaan, että Jordanin tien γ sisäpuoli on jäljen γ^* tangenttivektorin vasemmalla puolella (tässä on oletettava, että tangenttivektori ei ole 0). Visuaalisesti ajatellen on oltava niin, että kun tangenttia pyöritetään kulman $\pi/2$ verran vastapäivään, osoittaa se tien sisäpuolen suuntaan. Luvussa 1 todettiin, että vektorin rotaatio vastapäivään kulmalla $\pi/2$ vastaa vektorin (eli kompleksiluvun) kertomista luvulla i. Edelleen ”tien sisäpuolen suuntaan osoittaminen” voidaan määritellä siten, että kun pyöritetty tangenttivektori skaalataan riittävän lyhyeksi, sen karakterisoima piste on tien sisäpuolella. Siis tien sisäpuoli on tangentin vasemmalla puolella pisteessä $t \in (a, b)$, jos γ on derivoituva pisteessä t, $\gamma'(t) \neq 0$, ja on olemassa luku $\epsilon > 0$, jolle $\gamma(t) + \epsilon i \gamma'(t) \in I(\gamma)$. Tällainen luku $\epsilon > 0$ on varmasti olemassa, koska $I(\gamma)$ on avoin. Vastaavasti, jos tien sisäpuoli on tangentin oikealla puolella, niin tangentin rotaatio kulmalla $\pi/2$ myötäpäivään osoittaa sisäpuolen suuntaan. Tältä pohjalta asetetaan seuraavaa:

Määritelmä 2.14. Olkoon $\gamma = (\alpha, \beta) : [a, b] \to \mathbb{C}$ Jordanin tie sekä $A = \{t \in (a, b) | \gamma'(t) \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}$. Sanotaan, että tie γ on *positiivisesti suunnistettu*, jos jokaiselle $t \in A$ on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$\gamma(t) + \epsilon i \gamma'(t) \in I(\gamma).$$

Edelleen sanotaan, että tie γ on *negatiitivisesti suunnistettu*, jos jokaiselle $t \in A$ on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$\gamma(t) - \epsilon i \gamma'(t) \in I(\gamma).$$

Voisi olettaa, että tien piirtosuunnan kääntäminen kääntäisi myös suunnistuksen — näin todella on:

Lause 2.15. *Olkoon $\gamma = (\alpha, \beta) : [a, b] \to \mathbb{C}$ Jordanin tie. Jos γ on positiivisesti suunnistettu, niin $\overleftarrow{\gamma}$ on negatiivisesti suunnistettu. Edelleen, jos γ on negatiivisesti suunnistettu, niin $\overleftarrow{\gamma}$ on positiivisesti suunnistettu.*

Todistus. Olkoon $A = \{t \in (a, b) \mid \gamma'(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Oletetaan ensin, että γ on positiivisesti suunnistettu. Kiinnitetään $t \in (a, b)$ siten, että $\gamma'(a + b - t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On osoitettava, että on olemassa luku $\epsilon_t > 0$, jolle pätee

$$\overleftarrow{\gamma}(t) - \epsilon_t i \overleftarrow{\gamma}'(t) \in I(\gamma).$$

Tämä yhtälö on auki kirjoitettuna

$$\gamma(a + b - t) + \epsilon_t i \gamma'(a + b - t) \in I(\gamma).$$

Koska $t \in (a, b)$, niin $a < a + b - t < b$, eli erityisesti $a + b - t \in A$. Täten, koska γ on positiivisesti suunnistettu, etsityn luvun ϵ_t olemassaolo seuraa suoraan määritelmästä 2.14. Väitteen käänteinen suunta todistetaan vastaavasti. $\square$

3. Tieintegraali

Jos lukija on huolissaan tien käsitteeseen liittyvien merkintöjen sekavuuksista ja niiden vaikutuksesta tieintegraaleihin, niin huoli on turha: käy ilmi, että tieintegroinnissa olennaista on tien topologinen käytös. Muistetaan, että kun $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, niin *pistetulo* on laskutoimitus $\cdot$, jolle $(x, y) \cdot (a, b) = xa + yb$. Huomaa, että samaa symbolia $\cdot$ käytetään myös kompleksiselle tulolle.

Asetetaan nyt reaalisen tieintegraalin määritelmä (vilkaise [5, s.395–398]; kannattaa tutustua myös kolmiulotteiseen tilanteeseen lähteessä [2, s.282, 288–289]).

Määritelmä 3.1. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $f = (u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ jatkuva vektorikenttä sekä $\gamma = (\alpha, \beta) : [a, b] \to D$ tie. Olkoot nousevassa järjestyksessä $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ ne välin (a, b) pisteet, joissa γ' ei ole jatkuva. Lisäksi merkitään $a_0 := a$ sekä $a_n := b$, jolloin γ on jatkuvasti derivoituva kullakin välillä $[a_j, a_{j+1}]$, $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ (päätepisteissä toispuoleisesti). Asetetaan

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s} := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt, \tag{3.1}$$

missä $\cdot$ on pistetulon symboli, ja jokaisen välin $[a_j, a_{j+1}]$ päätepisteissä $t = a_j$ ja $t = a_{j+1}$ merkintä $\gamma'(t)$ symboloi toispuoleista derivaattaa. Sanotaan, että $\int_\gamma f \cdot d\vec{s}$ on *kentän f reaalinen tieintegraali yli tien γ*. Lisäksi otetaan käyttöön merkinnät

$$\int_\gamma u dx := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} u(\gamma(t)) \alpha'(t) dt$$

sekä

$$\int_\gamma v dy := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} v(\gamma(t))\beta'(t)dt,$$

jolloin saadaan esitys

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s} = \int_\gamma u dx + \int_\gamma v dy.$$

Huomaa, että sileälle tielle γ yhtälön (3.1) summassa on vain yksi termi. Kiinnitä lisäksi huomiota yhtälön (3.1) vasemmanpuoleiseen merkintään: reaalisessa tieintegraalissa on symboli $d\vec{s}$, jonka heuristinen rooli on sama kuin Riemann-integraalin differentiaalin vastaava. Nimittäin, $d\vec{s}$ viittaa tien γ derivaatan ja parametrin t differentiaalin tuloon, eli olioon $\gamma'(t)dt$. Koska γ' on jäljen γ^* tangenttivektori, niin $d\vec{s}$ on "infinitesimaalinen tangenttivektori".

Esimerkki 3.2. Olkoon $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ sekä $f(x, y) = (x, 1 - y)$ kaikille $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (huomaa, että γ^* on puoliympyrä). Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi (\cos(t), 1 - \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))dt \\ &= -\int_0^\pi \sin(t) + 2\cos(t)\sin(t)dt \\ &= \cos(t)\Big|_0^\pi - \sin^2(t)\Big|_0^\pi = -2.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Toisaalta, nyt $\overleftarrow{\gamma}(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)) = (-\cos(t), \sin(t))$ joten

$$\begin{aligned}\int_{\overleftarrow{\gamma}} f \cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi (-\cos(t), 1 - \sin(t)) \cdot (\sin(t), \cos(t))dt \\ &= \int_0^\pi \sin(t) - 2\cos(t)\sin(t)dt = -\cos(t)\Big|_0^\pi - \sin^2(t)\Big|_0^\pi = 2.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Esimerkissä 3.2 kävi niin, että tieintegraalit yli tien ja sen vastakkaisen tien olivat vastakkaismerkkisiä. Kyseessä ei ole sattuma, kuten seuraavasta lauseesta nähdään.

Lause 3.3. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $f : D \to \mathbb{R}^2$ jatkuva vektorikenttä sekä $\gamma : [a, b] \to D$ tie. Tällöin*

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s} = -\int_{\overleftarrow{\gamma}} f \cdot d\vec{s}.$$

Todistus. Merkitään $f = (u, v)$. Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned}
-\int_{\overleftarrow{\gamma}} f \cdot d\vec{s} &= -\int_a^b f(\overleftarrow{\gamma}(t)) \cdot \overleftarrow{\gamma}'(t)dt \\
&= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(a+b-t))dt \\
&= \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot \gamma'(a+b-t)dt = \int_b^a f(\gamma(r)) \cdot \gamma'(r)(-dr) \\
&= \int_a^b f(\gamma(r)) \cdot \gamma'(r)dr = \int_\gamma f \cdot d\vec{s},
\end{aligned}$$

missä kolmannella rivillä käytettiin muuttujanvaihtoa $r := a + b - t$. $\square$

Esimerkki 3.4. Olkoon $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ sekä $\delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\delta(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$. Huomataan, että jatkuvasti derivoituvalle funktiolle $p(t) = \pi t$, $t \in [0, 1]$, pätee $\delta(t) = \gamma(p(t))$ kaikille $t \in [0, 1]$. Täten δ on tien γ parametrisaatio. Esimerkissä 3.2 nähtiin, että

$$\int_\gamma (x, 1-y) \cdot d\vec{s} = -2.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
\int_\delta (x, 1-y) \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 (\cos(\pi t), 1 - \sin(\pi t)) \cdot (-\pi\sin(\pi t), \pi\cos(\pi t))dt \\
&= -\int_0^1 \pi\sin(\pi t) + 2\pi\cos(\pi t)\sin(\pi t)dt \\
&= \cos(\pi t)\Big|_0^1 - \sin^2(\pi t)\Big|_0^1 = -2.
\end{aligned}$$

Eipä ole sattumaa tämäkään ilmiö, kuten nähdään seuraavasta lauseesta. Nyt päästään hyödyntämään parametrifunktiolta vaadittavaa jatkuvaa derivoituvuutta (katso myös [1, s.95]).

Lause 3.5. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $\gamma : [a, b] \to D$ tie sekä $p : [c, d] \to [a, b]$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle pätee $p(c) = a$ ja $p(d) = b$. Asetetaan $\delta : [c, d] \to D$, $\delta(t) := \gamma(p(t))$. Jos f on jatkuva vektorikenttä joukossa D, niin*

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s} = \int_\delta f \cdot d\vec{s}. \tag{3.4}$$

Todistus. Olkoot $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1}$ ne välin (a, b) pisteet, joissa γ' ei ole jatkuva. Merkitään vielä $a_0 = a$ ja $a_n = b$. Lisäksi olkoot pisteet $c_0, c_1, ..., c_n$

siten, että $p(c_j) = a_j$ kullekin $j \in \{0, 1, ..., n\}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\int_\delta f \cdot d\vec{s} &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(\delta(t)) \cdot \delta'(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(\gamma(p(t))) \cdot \gamma'(p(t)) p'(t) dt \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{p(c_j)}^{p(c_{j+1})} f(\gamma(r)) \cdot \gamma'(r) dr = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(r)) \cdot \gamma'(r) dr \\
&= \int_\gamma f \cdot d\vec{s},
\end{aligned}$$

missä käytettiin muuttujanvaihtoa $r = p(t)$. □

Lauseesta 3.5 saadaan intuitiivisesti selvä seuraus:

Seuraus 3.6. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin sekä $\gamma : [a, b] \to D$, $\delta : [c, d] \to D$ teitä, joille $\gamma(b) = \delta(c)$. Olkoon lisäksi κ teiden γ ja δ yhdiste, eli $\kappa : [0, 2] \to D$, $\kappa = \gamma * \delta$. Jos f on jatkuva vektorikenttä joukossa D, niin*

$$\int_\kappa f \cdot d\vec{s} = \int_\gamma f \cdot d\vec{s} + \int_\delta f \cdot d\vec{s}.$$

Edelleen, jos annettuna on tiet $\gamma_j : [a_j, b_j] \to D$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, joille $\kappa = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ on määritelty, niin

$$\int_\kappa f \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f \cdot d\vec{s}.$$

Todistus. Todistetaan kahden tien yhdistettä koskeva väite. Merkitään $p(t) = t(b - a) + a$ kaikille $t \in [0, 1]$ sekä $q(t) = (t - 1)(d - c) + c$ kaikille $t \in [1, 2]$. Nyt tie $A(t) := \gamma(p(t))$ on tien γ parametrisaatio, ja $B(t) := \delta(q(t))$ tien δ parametrisaatio. Määritelmän 2.7 ja lauseen 3.5 perusteella

$$\int_\kappa f \cdot d\vec{s} = \int_A f \cdot d\vec{s} + \int_B f \cdot d\vec{s} = \int_\gamma f \cdot d\vec{s} + \int_\delta f \cdot d\vec{s}.$$

Yleinen tapaus saadaan todistettua vastaavalla päättelyllä. □

Tulokset 3.3, 3.5 ja 3.6 helpottavat tieintegrointia huomattavasti: tien suunnistus vaikuttaa ainoastaan integraalin etumerkkiin, parametrisaation valinnalla ei ole merkitystä ja integraali yli yhdistetyn tien on summa integraaleista yli yhdistettyjen teiden.

* * *

Ennen kompleksisen tieintegraalin määritelmää on määriteltävä reaalimuuttujan kompleksiarvoisen funktion integraali (katso [1, s.94–95]):

Määritelmä 3.7. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli sekä $f : I \to \mathbb{C}$ funktio. Nyt siis f voidaan kirjoittaa siis muodossa $f = u + iv$, missä $u, v : I \to \mathbb{R}$. Jos u ja v

ovat Riemann-integroituvia, niin asetetaan

$$\int_I f(x)dx := \int_I u(x)dx + i\int_I v(x)dx.$$

Kuten seuraava määritelmä paljastaa, reaalisen ja kompleksisen tieintegraalin ero tulee olemaan kahden laskutoimituksen välillä:

Määritelmä 3.8. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Olkoot lisäksi $\gamma = \alpha + i\beta : [a, b] \to D$ tie sekä nousevassa järjestyksessä $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ ne välin (a, b) pisteet, joissa γ' ei ole jatkuva. Merkitään vielä $a_0 := a$ ja $a_n := b$. Asetetaan nyt

$$\int_\gamma f dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt, \tag{3.5}$$

missä $\cdot$ on kompleksisen tulon symboli, ja jokaisen välin $[a_j, a_{j+1}]$ päätepisteissä $t = a_j$ ja $t = a_{j+1}$ merkintä $\gamma'(t)$ symboloi toispuoleista derivaattaa. Sanotaan, että $\int_\gamma f dz$ on *kentän f kompleksinen tieintegraali yli tien γ* (huomaa, että nyt merkintä $d\vec{s}$ on korvattu merkinnällä dz — kyseessä on vain tapa erottaa integraalit toisistaan).

Huomautus 3.9. Esimerkiksi Conway ([3, s.63], määritelmä 1.12) määrittelee myös kompleksisen *polkuintegraalin* (Conwayn olettaa, että polku on "äärellisesti heilahteleva", eli *rectifiable*). Tieintegraalin käsite tullaan yleistämään poluille myös tässä tekstissä, mutta vasta luvussa 7.

Reaalisen ja kompleksisen tieintegraalin välillä on seuraava yhteys:

Seuraus 3.10. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin, $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio sekä $\gamma = \alpha + i\beta : D \to \mathbb{C}$ sileä tie. Tällöin*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f dz &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(\alpha'(t) + i\beta'(t))dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)dt \\ &\quad + i\int_a^b u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)dt \\ &= \int_\gamma (u, -v) \cdot d\vec{s} + i\int_\gamma (v, u) \cdot d\vec{s}.\end{aligned}$$

Huomaa, että seuraus 3.10 yleistyy välittömästi tielle γ. Näin nähdään, että kompleksisen tieintegraalin komponentit ovat tiettyjen vektorikenttien reaalisia tieintegraaleja. Täten monet reaalisiin tieintegraaleihin liittyneet lauseet pätevät myös kompleksisille tieintegraaleille, mikä kirjataan ylös suorana seurauksena:

Seuraus 3.11. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin, $f : D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio sekä kuvaukset $\gamma : [a,b] \to D$, $\delta : [c,d] \to D$ teitä. Ensinnäkin,*

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f dz = -\int_{\gamma} f dz.$$

Toisekseen, jos δ on tien γ parametrisaatio, niin

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\delta} f dz.$$

Kolmanneksi, jos $\gamma * \delta$ on määritelty, niin

$$\int_{\gamma * \delta} f dz = \int_{\gamma} f dz + \int_{\delta} f dz,$$

ja tämä ilmiö yleistyy äärellisen monen tien yhdisteelle.

Rudin tiivistää kompleksisen tieintegraalin ominaisuudet ytimekkäästi; lukaise [6, s.217–219].

Esimerkki 3.12. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ sekä $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funktio $f(z) = \overline{z}$, eli $f(x,y) = x - iy$. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f dz &= \int_0^{2\pi} (\cos(t) - i\sin(t))(-\sin(t) + i\cos(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0dt + i\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi i.\end{aligned}$$

Johdannon kysymyksissä pohdittiin milloin analyyttisen funktion tai lokaalisti integroituvan vektorikentän tieintegraali yli suljetun tien häviää. Tähän ei (tietenkään) osata sanoa toistaiseksi mitään, koska kaksi määritelmää puuttuu — niihin paneudutaan seuraavassa luvussa. Asetetaan nyt eräs toinen määritelmä, joka johtaa intuitiivisesti mielekkääseen lemmaan:

Määritelmä 3.13. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tie sekä $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1}$ ne välin (a,b) pisteet, joissa γ' ei ole jatkuva. Lisäksi merkitään $a_0 := a$ ja $a_n := b$. Tällöin tien γ *pituus* on

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |\gamma'(t)| dt. \tag{3.6}$$

Huomaa, että yhtälössä (3.6) funktio $t \mapsto |\gamma'(t)|$ on oletetusti jatkuva kullakin välillä $[a_j, a_{j+1}]$ (luonnollisesti $\gamma'(t)$ symboloi tien toispuoleista derivaattaa pisteissä $t = a_j$ sekä $t = a_{j+1}$). Täten $L(\gamma)$ on reaalinen, eli toisin sanoen tien pituus on aina äärellinen. Polun pituutta ei kannata yrittää määritellä vastaavasti, koska lopputulos ei ole välttämättä reaaliluku — heuristisesti ottaen polusta saadaan äärettömän pitkä pakottamalla se ”heilumaan” riittävän innokkaasti (polun jälki on jatkuvuuden perusteella rajoitettu joukko, joten sen jälki ei voi ”kadota horisonttiin”).

Lemma 3.14. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin, $f : D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio sekä $\gamma : [a, b] \to D$ tie. Tällöin pätee*

$$\left|\int_\gamma f dz\right| \leq ML(\gamma),$$

missä $M = \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|$.

Todistus. Koska γ on jatkuva, niin γ^* on kompakti. Edelleen, koska $|f|$ on jatkuva joukossa γ^* (eli $|f|$ on jatkuva avoimessa joukossa D, johon γ^* sisältyy), niin väitteen luku M on olemassa. Olkoot jälleen nousevassa järjestyksessä $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ ne välin (a, b) pisteet, joissa γ' ei ole jatkuva, sekä $a_0 := a$ ja $a_n := b$. Nyt päätellään

$$\left|\int_\gamma f dz\right| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$$

$$\leq M \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |\gamma'(t)|dt = ML(\gamma),$$

ja asia on selvä (katso [1, s.100, lause 2.3]). Vastaava ilmiö pätee myös jatkuvalle vektorikentälle, kun tieintegraali on reaalinen. □

4. Analyyttisyys

Määritelmä 4.1. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $f = (u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ vektorikenttä. Sanotaan, että f on *lokaalisti integroituva*, jos f on C^1-kenttä, ja lisäksi pätee

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.1}$$

Jos U on suljettu joukko, niin sanotaan, että f on lokaalisti integroituva joukossa U, jos f on lokaalisti integroituva avoimessa joukossa E, jolle $U \subset E$.

Asetetaan nyt kaksi erittäin tärkeää määritelmää:

Määritelmä 4.2. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ funktio. Oletetaan, että raja-arvo

$$\lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \tag{4.2}$$

on olemassa pisteessä $z \in D$ (ja kuuluu joukkoon $\mathbb{C}$). Tällöin merkitään

$$f'(z) = \frac{d}{dz}f(z) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

ja sanotaan, että f on *kompleksisesti derivoituva* tai lyhyemmin *derivoituva* pisteessä z. Luku $f'(z)$ on funktion f *(kompleksinen) derivaatta pisteessä* z.

Määritelmä 4.2 muistuttaa reaalisen derivaatan vastaavaa, mutta vaatii enemmän: erotusosamäärässä (4.2) luku h on kompleksiluku. Täten se voi lähestyä nollaa ”mielivaltaisesti”. Seuraavaksi käsitteellistetään funktiot, jotka ovat derivoituvia avoimessa joukossa:

Määritelmä 4.3. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ funktio. Jos f on derivoituva jokaisessa pisteessä $z \in D$ ja funktio $z \mapsto f'(z)$ on jatkuva joukossa D, niin sanotaan, että f on *analyyttinen* joukossa D. Edelleen sanotaan, että f on analyyttinen pisteessä $z \in \mathbb{C}$, jos f on analyyttinen jossakin pisteen z avoimessa ympäristössä. Lisäksi, jos $U \subset \mathbb{C}$ on suljettu, niin sanotaan, että f on analyyttinen joukossa U, jos f on analyyttinen avoimessa joukossa $E \subset \mathbb{C}$, jolle $U \subset E$.

Huomautus 4.4. Huomaa, että analyyttisyyden määritelmä vaatii derivaattafunktion f' jatkuvuuden. Voidaan kuitenkin osoittaa (ei mitenkään erityisen vaivattomasti), että tämä vaatimus on turha: derivaatan jatkuvuus avoimessa joukossa D seuraa siitä, että erotusosamäärä (4.2) on olemassa kaikille $z \in D$. Itse asiassa analyyttinen funktio on jopa äärettömästi derivoituva (eli sillä on kaikkien kertalukujen derivaatat), mikä on perin hämmästyttävää. Tämä ilmiö voidaan todistaa osoittamalla, että analyyttinen funktio on esitettävissä lokaalisti potenssisarjana. Kun potenssisarjaa derivoidaan ”termeittäin”, saadaan alati korkeamman kertaluvun derivaattoja (katso [1, s.128, lause 7.3 sekä s.72, lause 5.1]). Jatkuvuusoletus sisällytetään määritelmään 4.3 siksi, että se helpottaa analyyttisten funktioiden käsittelyä huomattavasti.

Huomautus 4.5. Langin teoksessa [1] esiintyy käsite *holomorphic function*, jolla tarkoitetaan edellä määriteltyä analyyttistä funktiota. Lang tarkoittaa ilmaisulla *analytic function* funktiota, joka on esitettävissä lokaalisti potenssisarjana. Kuten huomautuksesta 4.4 ilmenee, holomorfisuus ja analyyttisyys tarkoittavat täsmälleen samaa ilmiötä (minkä Lang toteaa itsekin painokkaasti; katso [1, s.129]). Vastaavasti toimii Kodaira; katso [4, s.11]. Käsitteistöön liittyy tällaista lievää sekavuutta, joten tarkkuutta vaaditaan.

Huomautus 4.6. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin joukko sekä $f : I \to \mathbb{R}$ reaalisesti derivoituva funktio. Tällöin reaalinen derivaatta f' ei ole välttämättä jatkuva joukossa I, kuten nähtiin esimerkissä 2.9.

Esimerkki 4.7. Olkoon $f(z) = z^2$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} \\ &= 2z + h \to 2z, \text{ kun } h \to 0.\end{aligned}$$

Siis $f'(z) = 2z$ joukossa $\mathbb{C}$. Koska f' on selvästi jatkuva, on f analyyttinen joukossa $\mathbb{C}$.

On sangen helppoa löytää funktio, joka ei derivoidu missään:

Esimerkki 4.8. Olkoon $f(z) = \overline{z}$. Tällöin

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z}+\overline{h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Jos $h \neq 0$ on reaaliluku, niin $\overline{h}/h = 1$. Toisaalta, jos h on muotoa $h = is$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, niin $\overline{h}/h = -is/(is) = -1$. Eli hiukan epätäsmällisesti sanoen erotusosamäärällä on eri raja-arvot, kun h lähestyy nollaa reaaliakselia ja imaginaariaskelia pitkin. Täten f ei ole derivoituva pisteessä $z \in \mathbb{C}$.

Otetaan vielä kolmas esimerkki, joka muistuttaa derivoituvuuden ja analyyttisyyden erosta:

Esimerkki 4.9. Olkoon $f(z) = \overline{z}^2$. Nyt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(\overline{z}+\overline{h})(\overline{z}+\overline{h})-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}^2+2\overline{z}\overline{h}}{h} = \frac{\overline{h}^2}{h} + 2\overline{z}\frac{\overline{h}}{h}.$$

Esimerkissä 4.8 havaittiin, että osamäärällä $\overline{h}/h$ ei ole raja-arvoa, kun $h \to 0$ tasossa. Täten ainoa piste jossa f voi olla derivoituva, on $z = 0$. Tässä pisteessä erotusosamäärä on siis $\overline{h}^2/h$. Nyt

$$\left|\frac{\overline{h}^2}{h}\right| = \frac{|h|^2}{|h|} = |h| \to 0, \text{ kun } h \to 0.$$

Täten f on derivoituva pisteessä $z = 0$, ja $f'(0) = 0$. Toisaalta f ei ole analyyttinen pisteessä 0, koska f ei ole derivoituva yhdessäkään pisteen 0 avoimessa ympäristössä.

Kompleksisella derivaatalla on samanlaisia ominaisuuksia kuin reaalisellakin, mikä ilmenee seuraavasta lauseesta.

Lause 4.10. *Olkoot $D, E \subset \mathbb{C}$ avoimia joukkoja sekä $f : D \to \mathbb{C}$, $g : D \to \mathbb{C}$ ja $h : E \to D$ funktioita. Jos f on kompleksisesti derivoituva pisteessä $z \in D$, on f jatkuva pisteessä z. Lisäksi, niissä määrittelyjoukkojensa pisteissä z, joissa f, g ja h ovat kompleksisesti derivoituvia, pätevät yhtälöt*

1) $(af+bg)'(z) = af'(z)+bg'(z)$ *kaikille* $a, b \in \mathbb{C}$,
2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z)+g'(z)f(z)$,
3) $(1/f)'(z) = -f'(z)/f(z)^2$ *kun* $f(z) \neq 0$,
4) $(g \circ h)'(z) = (g' \circ h)(z)h'(z)$.

Todistus. Katso [1, s.27–30]. □

Esimerkki 4.11. Lauseen 4.10 avulla on helppo löytää polynomifunktion derivointisääntö: asetetaan kaikille $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja kertoimet $a_n, ..., a_0$ ovat kompleksilukuja. Käyttämällä lauseen 4.10 yhtälöä 2) induktiivisesti saadaan $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$, jolloin kaavan 1) mukaan

$$f'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + (n-2)a_{n-2}z^{n-3} + ... + a_1.$$

Lisäksi, koska f' on selvästi jatkuva, niin f on analyyttinen koko tasossa.

Erotusosamäärän (4.2) käyttäminen voi olla työlästä, mikä motivoi etsimään helppokäyttöisempiä tapoja analyyttisyyden selvittämiseksi. Seuraava lause, jota jatkossa tullaan soveltamaan useaan otteeseen, paljastaa funktion derivoituvuuden ja komponenttikuvausten välisen yhteyden.

Lause 4.12. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Tällöin f toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{sekä} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.3}$$

Lisäksi pätee

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.4}$$

Todistus. Olkoon $z = (x, y) \in D$ sekä $h \neq 0$ reaaliluku. Nyt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(z+h) - v(z)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \tag{4.5}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Olkoon sitten h muotoa $h = is$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $1/h = -i/s$, joten saadaan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = -i \lim_{s\to 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{s} + \lim_{s\to 0} \frac{v(z+h) - v(z)}{s}$$

$$= -i \lim_{s\to 0} \frac{u(x, y+s) - u(x, y)}{s} + \lim_{s\to 0} \frac{v(x, y+s) - v(x, y)}{s}$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial v}{\partial y}(z). \tag{4.6}$$

Vertaamalla kaavoja (4.5) ja (4.6) nähdään välittömästi, että

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \ \text{ sekä } \ \frac{\partial v}{\partial x}(z) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z),$$

joten yhtälöt (4.3) pätevät joukossa D. Edelleen väitteen kaava (4.4) seuraa siitä, että yhtälöiden (4.5) ja (4.6) raja-arvot ovat $f'(z)$. □

Lausetta 4.12 voidaan soveltaa esimerkiksi funktioon $f(z) = \overline{z} = x - iy$, ja heti huomataan, että toinen yhtälöistä (4.3) saa järjettömän muodon $1 = -1$. Täten f ei ole derivoituva missään, kuten jo esimerkissä 4.8 todettiin (käyttämällä samaa tarkastelua kuin lauseen 4.12 todistuksessa). Toisaalta, esimerkin 4.9 funktiolle $f(z) = \overline{z}^2$ saadaan esitys $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2xyi$. Soveltamalla yhtälöitä (4.3) tähän funktioon saadaan yhtälöt $-2y = 2y$ sekä $2x = -2x$, joiden ainoa ratkaisu on $z = (x,y) = (0,0)$. Ei mitenkään yllättävää, koska tunnetusti $f(z) = \overline{z}^2$ on derivoituva ainoastaan origossa.

Seuraus 4.13. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Tällöin kentät $(u, -v)$ ja (v, u) ovat lokaalisti integroituvia.*

Todistus. Cauchyn ja Riemannin yhtälöt (4.3) antavat lokaalin integroituvuuden vaatiman ominaisuuden (4.1) molemmille väitteen kentille. Edelleen yhtälö (4.4) takaa, että funktioiden u ja v osittaisderivaatat ovat jatkuvia (koska määritelmän 4.3 mukaan f' on jatkuva, kun f on analyyttinen). □

Vertaamalla seurausta 4.13 seuraukseen 3.10 nähdään, että lokaali integroituvuus ja analyyttisyys liittyvät toisiinsa mielekkäällä tavalla tieintegroinnin kannalta. Toinen kaunis yhteys saadaan differentioituvuuden ja analyyttisyyden välille: määritelmän 1.4 jälkeisessä kommentissa todettiin, että tason pisteessä a differentioituvaan vektorikenttään $f = (u, v)$ liittyy Jacobin matriisi

$$L_a := \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{bmatrix}.$$

Jos f on derivoituva pisteessä a, saa L_a yhtälöiden (4.3) nojalla muodon

$$L_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(a) & \frac{\partial u}{\partial x}(a) \end{bmatrix},$$

joka on derivaatan $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$ matriisiesitys. Huomaa siis, että kompleksinen derivoituvuus johtaa differentioituvuuteen, koska $L_a(h)$ voidaan esittää kompleksilukujen tulona. Käänteinen implikaatio ei toteudu: esimerkiksi kuvaus $f(x,y) := (x, 0) = x$ on differentioituva, mutta ei kompleksisesti derivoituva.

Differentioituvuuden avulla saadaan osoitettua lauseen 4.12 käänteinen vastine:

Lause 4.14. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ C^1-funktio, joka toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt (4.3). Tällöin f on analyyttinen.*

Todistus. Koska f on C^1-funktio, funktioiden u ja v reaaliset osittaisderivaatat ovat jatkuvia joukossa D. Täten riittää osoittaa, että f on derivoituva, jolloin derivaatan f' jatkuvuus (ja täten myös funktion f analyyttisyys) seuraa yhtälöstä (4.4). Nyt huomautuksen 1.5 (eli lähteen [2, s.127, lause 9]) mukaan f on differentioituva joukossa D. Sovelletaan yhtälöä (1.5): kun $|h| > 0$ on riittävän pieni, on olemassa funktio ϵ siten, että $\epsilon(h)/|h| \to 0$, kun $h \to 0$. Lisäksi voidaan kirjoittaa

$$f(a+h) = L_a(h) + f(a) + \epsilon(h),$$

missä L_a on kuvauksen f Jacobin matriisi pisteessä a. Koska $\epsilon(h)/|h| \to 0$, kun $h \to 0$, niin myös $\epsilon(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$ (missä siis h ja $\epsilon(h)$ on tulkittu kompleksiluvuiksi). Lisäksi yhtälöiden (4.3) nojalla

$$L_a(h) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a)\right] \cdot h,$$

missä $\cdot$ on kompleksinen tulo. Näin ollen

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a) + \epsilon(h)/h \to \frac{\partial u}{\partial x}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a),$$

kun $h \to 0$, joten f on derivoituva pisteessä a. Samalla nähtiin, että $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$, mikä todistettiin jo lauseessa 4.12. □

Lauseen 4.14 ilmiö voidaan todistaa eri tavoilla; katso esimerkiksi (yksiulotteista) väliarvolausetta hyödyntävä Conwayn esitys [3, s.41–42]. Lang käy asiat läpi menemättä yksityiskohtiin; katso [1, s.31–33]. Yhdistämällä lauseet 4.12 ja 4.14 saadaan analyyttisyys karakterisoitua kauniisti:

Seuraus 4.15. *Olkoon $D \in \mathbb{C}$ avoin ja $f : D \to \mathbb{C}$ C^1-funktio. Tällöin f on analyyttinen jos ja vain jos f toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt* (4.3).

Seurauksen 4.15 valossa on aihetta mainita *Loomanin ja Menchoffin lause*:

Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, jonka komponenteilla u ja v on reaaliset osittaisderivaatat joukossa D. Tällöin f voidaan esittää lokaalisti potenssisarjana joukossa D jos ja vain jos f toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt joukossa D.

Tämä ilmiö todistetaan esimerkiksi lähteessä [7, s.48, lause 1]. Kuten huomautuksessa 4.4 todettiin, funktion lokaalin potenssisarjaesityksen olemassaolo on yhtäpitävää analyyttisyyden kanssa.

Esimerkki 4.16. Olkoon $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Tällöin $f(z) = u(z) + iv(z) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$, joten heti nähdään, että f toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt (4.3). Edelleen lauseen 4.12 nojalla $f'(z) = e^x\cos(y) - i[-e^x\sin(y)] = e^z$, eli eksponenttifunktio f on itsensä derivaatta. Koska f' on jatkuva, on f analyyttinen joukossa $\mathbb{C}$.

Käy ilmi, että lokaalisti integroituvien kenttien reaalisilla tieintegraaleilla on "taipumuksena" olla tiestä riippumattomia (joten seurausten 4.13 ja 3.10 nojalla vastaava taipumus on myös analyyttisten funktioiden kompleksisilla tieintegraaleilla). Viihdyttävä esimerkki aiheesta:

Esimerkki 4.17. Asetetaan $f(x,y) := (xy^2, x^2y)$ kaikille $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x}.$$

Lisäksi kentän f komponenttikuvausten osittaisderivaatat ovat kaikkialla jatkuvia, joten f on lokaalisti integroituva koko tasossa. Määritellään tie $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t-t^2)$, jolloin γ^* on funktion $t \mapsto t - t^2$ graafi yli välin $[0,2]$ (katso kuva 4). Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \cdot d\vec{s} &= \int_0^2 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^2 (t[t-t^2]^2, t^2[t-t^2]) \cdot (1, 1-2t)dt \\ &= \int_0^2 (3t^5 - 5t^4 + 2t^3)dt = \left(\frac{1}{2}t^6 - t^5 + \frac{1}{2}t^4\right)\Big|_0^2 = 8.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Määritellään seuraavaksi tie $\delta_1 : [0, 50\pi] \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$\delta_1(t) = (t\cos(t), t\sin(t/3)).$$

Joukko δ_1^* näkyy kuvassa 5. Nyt $\delta_1(0) = 0$ ja $\delta_1(50\pi) = (50\pi, 25\sqrt{3}\pi)$. Tältä pohjalta asetetaan tie $\delta_2 : [50\pi, 51\pi] \to \mathbb{R}^2$, jolle

$$\delta_2(t) = (2,-2) + \frac{51\pi - t}{\pi}(50\pi - 2, 25\sqrt{3}\pi + 2).$$

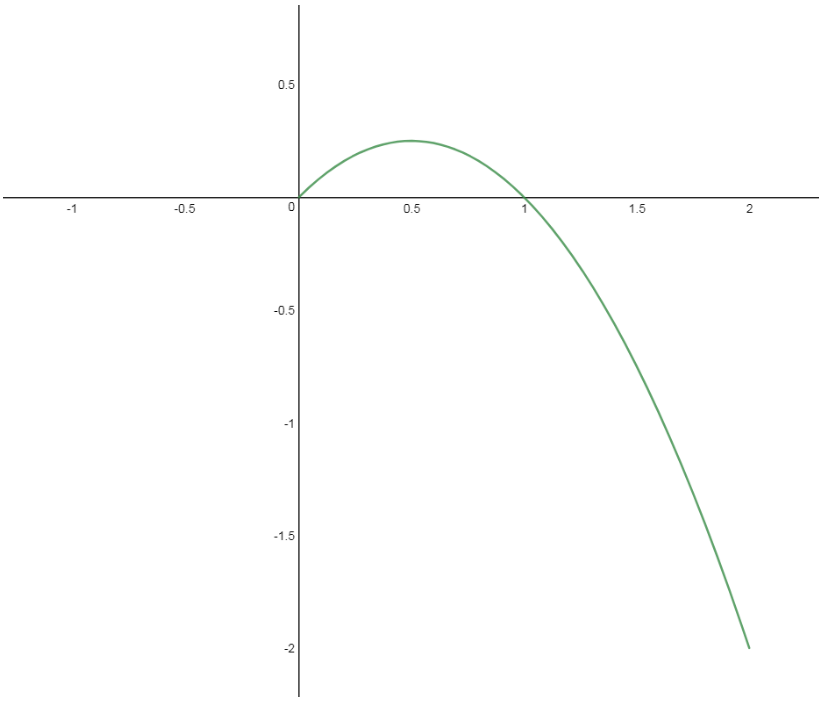
Tien δ_2 määritelmä voi olla hiukan sekava, mutta sen "toimintaperiaatteena" on vain erotusvektorin $(50\pi, 25\sqrt{3}\pi) - (2,-2)$ skaalaaminen siten, että jälki δ_2^* on jana pisteestä $(50\pi, 25\sqrt{3}\pi)$ pisteeseen $(2,-2)$. Olennaista on se, että nyt tien δ_1 päätepiste on tien δ_2 alkupiste, joten voidaan muodostaa yhdiste $\kappa := \delta_1 * \delta_2$. Jälki κ^* on esitetty kuvassa 5. Huomaa, että nyt teillä γ ja κ on samat alku– ja päätepisteet. Seurauksen 3.6 nojalla

$$\int_\kappa f \cdot d\vec{s} = \int_{\delta_1} f \cdot d\vec{s} + \int_{\delta_2} f \cdot d\vec{s}.$$

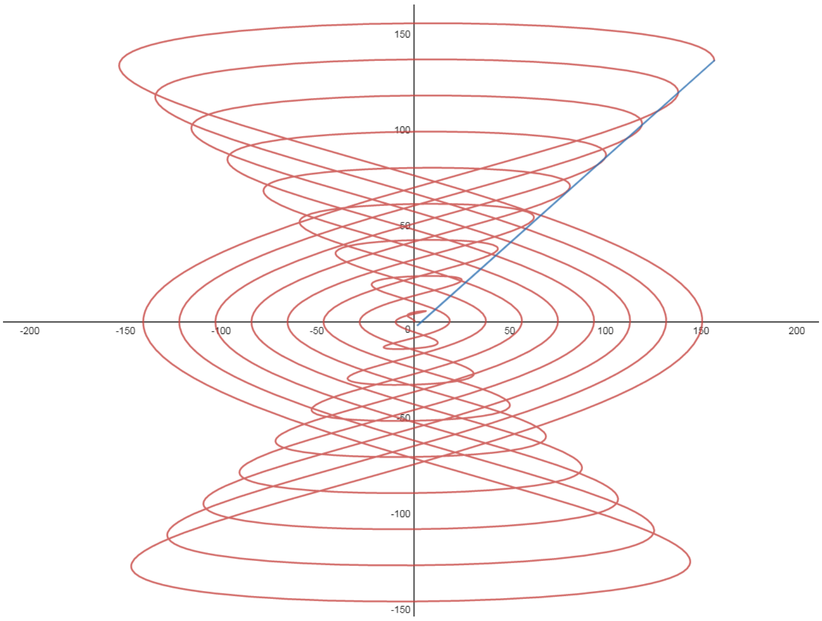
Huumori on totta kai siinä, että nämä integraalit ovat auki kirjoitettuina erittäin epäselviä (kehotan lukijaa kokeilemaan laskuja kynän ja paperin kanssa). Tietotekniikan avulla laskeminen onnistuu, ja saadaan

$$\int_\kappa f \cdot d\vec{s} = 8.$$

Vaikka tie κ on hyvinkin "kaoottinen" verrattuna tiehen γ, ovat kentän f tieintegraalit teiden yli samanarvoiset. Nyt lauseen 3.6 nojalla yhdisteelle



Kuva 4. Tien γ jälki on paraabelin osajoukko.



Kuva 5. Tien κ jälki muodostuu "väännetystä spiraalista" δ_1^* (punainen viiva), sekä janasta δ_2^* (sininen viiva).

$\aleph := \kappa * \overleftarrow{\gamma}$ saadaan

$$\int_{\aleph} f \cdot d\vec{s} = \int_{\kappa} f \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma} f \cdot d\vec{s} = 0.$$

Tämä ei tietenkään ole sattumaa, kuten tullaan huomaamaan.

5. Greenin lause

Tässä kappaleessa annetaan ensimmäiset vastaukset johdannon kysmyksiin (0.3) ja (0.4). Aloitetaan määritelmillä:

Määritelmä 5.1. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ epätyhjä, avoin ja yhtenäinen joukko. Tällöin sanotaan, että D on *alue*. Oletetaan, että on olemassa Jordanin tie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ siten, että $\gamma^* \subset \partial D$. Merkitään $A = \{t \in (a, b) \mid \gamma'(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Jos jokaiselle $t \in A$ on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$\gamma(t) + \epsilon i \gamma'(t) \in D,$$

niin sanotaan, että γ on *suunnistettu positiivisesti suhteessa alueeseen D.*

Määritelmä 5.2. Olkoon E alue ja $D := \overline{E}$ alueen E sulkeuma. Oletetaan, että on olemassa Jordanin tiet $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, joilla on seuraavat ominaisuudet:

1) $\gamma_j^* \cap \gamma_k^* = \varnothing$, kun $j \neq k$;
2) kullekin $j \in \{1, 2, ..., n\}$ joukko $\{t \in [a_j, b_j] \mid \gamma_j'(t) = 0\}$ on äärellinen;
3) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j^* = \partial D$, missä kukin tie γ_j on suunnistettu positiivisesti suhteessa alueeseen E.

Tällöin sanotaan, että D on *vyöhyke*. Lisäksi, kun f on jatkuva vektorikenttä joukossa D, niin kentän f *(reuna)integraali yli joukon D reunan* on

$$\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f \cdot d\vec{s}.$$

Jos edellä $n = 1$, niin sanotaan, että γ_1 on joukon D *reunatie.*

Vyöhykkeen käsite antaa täsmällisen merkityksen ajatukselle "joukon reunaa pitkin integroimisesta". Huomaa, että vyöhykkeen reuna sisältää vain äärellisen määrän "jyrkkiä käännöksiä" (eli pisteitä t, joissa jollekin j pätee $\gamma_j'(t) = 0$ tai $\gamma_j'(t)$ ei ole olemassa). Esimerkiksi kahden sisäkkäisen ympyrän muodostaman "donitsin" sulkeuma on vyöhyke, koska ympyrät voidaan esittää sopivasti suunnistettujen teiden jälkinä (sisemmän ympyrän on "piirryttävä myötäpäivään"). On syytä nimetä kaksi vyöhykkeen erikoistapausta:

Määritelmä 5.3. Olkoot $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituvia funktioita, joille $f(t) < g(t)$ kaikille $t \in (a, b)$. Lisäksi oletetaan, että f on joko injektio tai vakiokuvaus, ja edelleen myös g on joko injektio tai vakiokuvaus. Tällöin vyöhykkeitä

$$D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$

ja

$$D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le b,\ f(y) \le x \le g(y)\}$$

kutsutaan *yksinkertaisiksi vyöhykkeiksi* (katso kuva 6).

Huomautus 5.4. On helppo nähdä, että määritelmän 5.3 joukot D_1 ja D_2 todellakin ovat vyöhykkeitä: esimerkiksi joukon D_1 tapauksessa asetetaan janat $\gamma_1(t) := (a, f(a) + t[g(a) - f(a)])$, $\gamma_2(t) := (b, f(b) + t[g(b) - f(b)])$ kaikille $t \in [0,1]$ (huomaa, että näiden janojen kuvajoukot ovat voivat olla yksiöitä). Edelleen asetetaan $\delta_1(t) := (t, f(t))$ sekä $\delta_2(t) := (t, g(t))$ kaikille $t \in [a,b]$. Jos $f(a) \neq g(a)$ sekä $f(b) \neq g(b)$, niin joukon D_1 reunatieksi kelpaa yhdiste $\kappa := \delta_1 * \gamma_2 * \overleftarrow{\delta_2} * \overleftarrow{\gamma_1}$. Jos $f(a) = g(a)$ (tai $f(b) = g(b)$), niin tien κ määrittelevästä yhdisteestä poistetaan $\overleftarrow{\gamma_1}$ (tai γ_2) muuttamatta muiden yhdistettävien teiden järjestystä.

Seuraavaksi todistetaan Greenin lause yksinkertaiselle vyöhykkeelle.

Lause 5.5. *Olkoon D yksinkertainen vyöhyke sekä $f = (u,v)$ C^1-vektorikenttä joukossa D. Tällöin pätee*

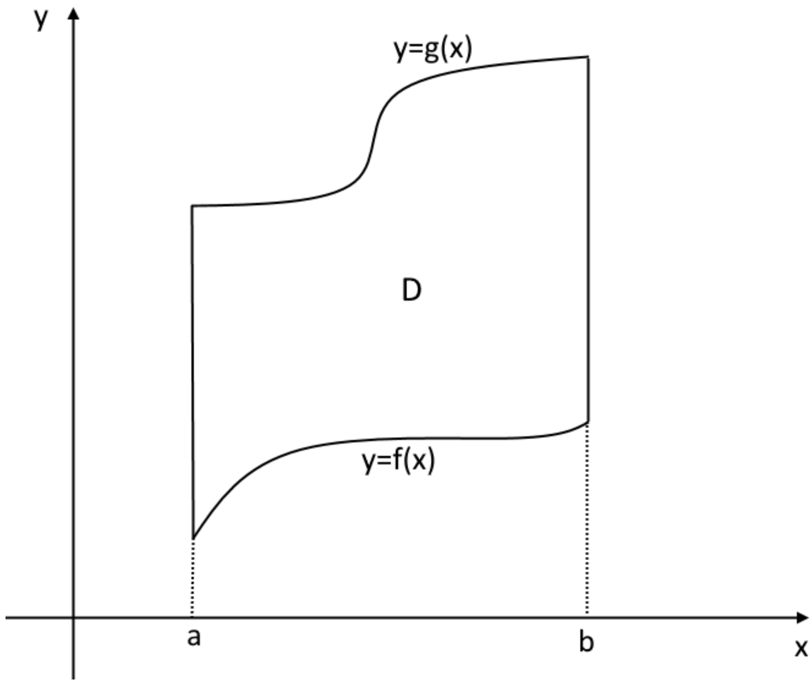
$$\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA. \tag{5.1}$$

Todistus. Oletetaan, että D voidaan esittää määritelmän 5.3 joukkona D_1, missä f ja g ovat injektioita (tapaukset, joissa ainakin toinen funktioista on vakiokuvaus, todistetaan vastaavalla tavalla). Oletetaan vielä, että $f(a) \neq g(a)$ sekä $f(b) \neq g(b)$, ja olkoot $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2$ ja κ kuten huomautuksessa 5.4. Tällöin Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial u}{\partial y} dA &= -\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx = -\int_a^b (u(x,g(x)) - u(x,f(x))) dx \\ &= -\int_a^b u(x,g(x)) dx + \int_a^b u(x,f(x)) dx. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Oletetaan nyt, että $f(b) < g(a)$, kuten kuvassa 6 (toiset kaksi vaihtoehtoista tapausta todistetaan vastaavasti).

Koska funktiot g ja f ovat jatkuvia injektioita suljetulla välillä, ovat ne myös surjektioita. Täten on olemassa käänteisfunktiot $g^{-1} : [g(a), g(b)] \to [a,b]$ ja $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Näin ollen saadaan



KUVA 6

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial v}{\partial x} dA &= \int_{f(a)}^{f(b)} \int_a^{f^{-1}(y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + \int_{f(b)}^{g(a)} \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \\
&\quad + \int_{g(a)}^{g(b)} \int_{g^{-1}(y)}^b \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \\
&= \int_{f(a)}^{f(b)} v(f^{-1}(y), y) - v(a, y)\, dy + \int_{f(b)}^{g(a)} v(b, y) - v(a, y)\, dy \\
&\quad + \int_{g(a)}^{g(b)} v(b, y) - v(g^{-1}(y), y)\, dy \\
&= \int_{f(a)}^{f(b)} v(f^{-1}(y), y) dy - \int_{g(a)}^{g(b)} v(g^{-1}(y), y) dy \\
&\quad + \int_{f(b)}^{g(b)} v(b, y) dy - \int_{f(a)}^{g(a)} v(a, y) dy.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Olkoon κ kuten huomautuksessa 5.4. Väitteen reunaintegraalille on

$$
\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} = \int_\kappa f \cdot d\vec{s} = \int_\kappa u dx + \int_\kappa v dy, \tag{5.4}
$$

missä

$$\begin{aligned}\int_\kappa u dx &= \int_{\delta_1} u dx + \int_{\gamma_2} u dx + \int_{\overleftarrow{\delta_2}} u dx + \int_{\overleftarrow{\gamma_1}} u dx \\ &= \int_{\delta_1} u dx + \int_{\gamma_2} u dx - \int_{\delta_2} u dx - \int_{\gamma_1} u dx.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Ensinnäkin

$$\int_{\delta_1} u dx = \int_a^b u(t, f(t)) dt, \text{ sekä } \int_{\gamma_2} u dx = 0 = \int_{\gamma_1} u dx. \tag{5.6}$$

Lisäksi

$$\int_{\delta_2} u dx = \int_a^b u(t, g(t)) dt. \tag{5.7}$$

Yhdistämällä yhtälöt (5.5), (5.6) ja (5.7) saadaan

$$\int_\kappa u dx = \int_a^b u(t, f(t)) dt - \int_a^b u(t, g(t)) dt. \tag{5.8}$$

Vertaamalla kaavoja (5.8) sekä (5.2) todetaan, että

$$-\iint_D \frac{\partial u}{\partial y} dA = \int_\kappa u dx. \tag{5.9}$$

Toimitaan vastaavasti funktion v suhteen. Ensinnäkin

$$\int_\kappa v dy = \int_{\delta_1} v dy + \int_{\gamma_2} v dy - \int_{\delta_2} v dy - \int_{\gamma_1} v dy. \tag{5.10}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} v dy &= \int_0^1 v(b, f(b) + t[g(b) - f(b)](g(b) - f(b)) dt \\ &= \int_{f(b)}^{g(b)} v(b, y) dy,\end{aligned} \tag{5.11}$$

missä käytettiin muuttujanvaihtoa $y = f(b) + t[g(b) - f(b)]$. Lisäksi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} v dy &= \int_0^1 v(a, f(a) + t[g(a) - f(a)](g(a) - f(a)) dt \\ &= \int_{f(a)}^{g(a)} v(a, y) dy.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Tielle δ_1 on parametrisaatio $\epsilon_1(t) := (f^{-1}(t), t)$, $t \in [f(a), f(b)]$, joten lauseen 3.5 nojalla

$$\int_{\delta_1} vdy = \int_{\epsilon_1} vdy = \int_{f(a)}^{f(b)} v(f^{-1}(t),t)dt. \tag{5.13}$$

Vastaavasti tielle δ_2 on parametrisaatio $\epsilon_2(t) := (g^{-1}(t),t)$, $t \in [g(a),g(b)]$, joten

$$\int_{\delta_2} vdy = \int_{\epsilon_2} vdy = \int_{g(a)}^{g(b)} v(g^{-1}(t),t)dt. \tag{5.14}$$

Yhdistämällä yhtälöt (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) sekä (5.14) saadaan

$$\begin{aligned}\int_\kappa vdy = &\int_{f(a)}^{f(b)} v(f^{-1}(t),t)dt + \int_{f(b)}^{g(b)} v(b,y)dy \\ &- \int_{g(a)}^{g(b)} v(g^{-1}(t),t)dt - \int_{f(a)}^{g(a)} v(a,y)dy.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Vertaamalla kaavoja (5.15) ja (5.3) nähdään, että

$$\iint_D \frac{\partial v}{\partial x} dA = \int_\kappa vdy. \tag{5.16}$$

Väitteen yhtälö (5.1) seuraa yhdistämällä yhtälöt (5.9) ja (5.16). Todistus suoritetaan vastaavalla tavalla, jos D on esitettävissä määritelmän 5.3 joukkona D_2 (katso [2, s.346–348] sekä [8, s.406-413]). □

Verrataan nyt yhtälöä (5.1) lokaalin integroituvuuden määritelmään 4.1. Koska lokaalisti integroituvalle vektorikentälle $f = (u,v)$ pätee

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

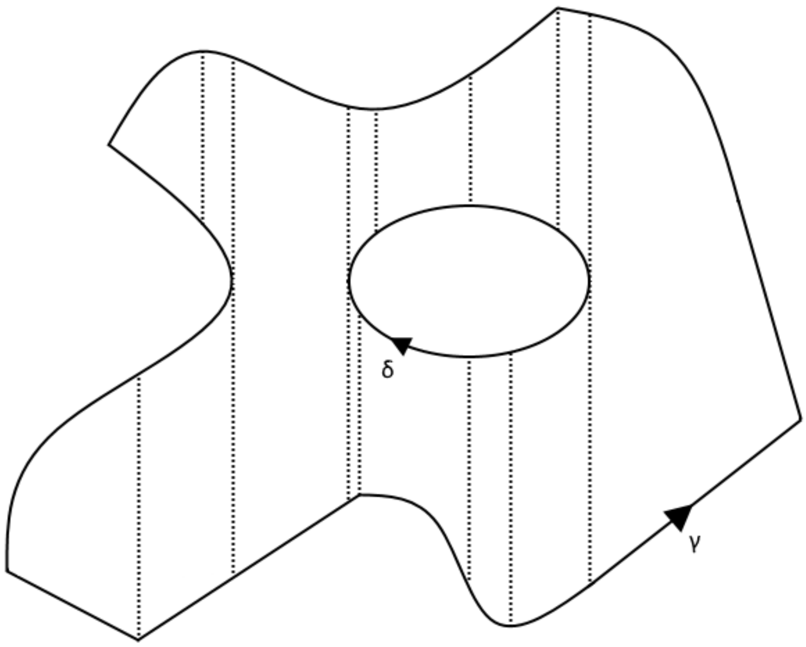
niin lauseesta 5.5 saadaan välitön seuraus:

Seuraus 5.6. *Olkoon D yksinkertainen vyöhyke sekä $f = (u,v)$ lokaalisti integroituva vektorikenttä joukossa D. Tällöin pätee*

$$\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} = 0. \tag{5.17}$$

Seuraus 5.6 olisi aihetta yleistää monimutkaisemmille vyöhykkeille, jolloin saataisiin melko kattavat vastaukset johdannon kysymyksiin (0.3) ja (0.4). Ikävä kyllä yhtälö (5.1) on hyvinkin hankala käsiteltävä, kun vyöhykkeen käytöstä ei rajoiteta riittävästi. Toisaalta, jos vyöhyke on ”siisti”, niin se voi olla jaettavissa äärelliseen määrään yksinkertaisia vyöhykkeitä. Kuvassa 7 esitellään tämän tekniikan idea: oletetaan, että vyöhykkeen D reuna muodostuu teiden γ ja δ jäljistä. Etsitään ne tason pisteet, joissa vyöhykkeen reuna ”kääntyy”. Näihin käännöspisteisiin asetetaan vaaka– ja pystysuuntaisia janoja, jotka jakavat vyöhykkeen yksinkertaisiin vyöhykkeisiin.

Jos lisäksi $f = (u, v)$ on lokaalisti integroituva kenttä vyöhykkeessä D, niin



Kuva 7. Teiden γ ja δ jäljet rajaavat vyöhykkeen, joka on edelleen jaettu yksinkertaisiin vyöhykkeisiin. Jakoon voidaan käyttää myös vaakasuuntaisia janoja.

seurauksen 5.6 nojalla kentän f integraali yli kunkin yksinkertaisen vyöhykkeen reunan on 0. Toisaalta, kun tieintegraaleja lasketaan jakoon käytettyjä janoja pitkin (jotka eivät sisälly teiden γ ja δ jälkiin), niin janaintegraalit kumoavat toisensa vastakkaissuuntaisina. Täten jäljelle jää ainoastaan kentän f integraali yli vyöhykkeen D reunan, joten kyseisen integraalin arvo on 0. Tässä jakoperiaatteessa on kuitenkin (käännöspisteiden määrittelyn lisäksi) eräs ongelma: käännöspisteitä voi olla äärettömästi. Pieni pohdinta paljastaa, että tällainen tilanne johtaa suuriin vaikeuksiin.

Lähestytään aihetta erilaisesta suunnasta: koska suorakulmiot ovat yksinkertaisia vyöhykkeitä, niin voisi kuvitella, että yhtälö (5.1) toteutuu myös ”suorakulmiota muistuttaville” vyöhykkeille. Näin todellakin on, jos vyöhyke voidaan esittää sopivan kuvauksen Γ kuvana suorakulmiosta (katso Buckin selvitys aiheesta: [8, s.410, lause 7]). Toisaalta ilmiön yleistämisen kanssa alkavat jälleen ongelmat: millä ehdoilla mielivaltainen vyöhyke voidaan jakaa tällaisiin ”muokattuihin suorakulmioihin”? Tässä kohtaa on syytä tukeutua kirjallisuuteen: Kodaira todistaa ([4, s.80-99]), että jokainen vyöhyke on jaettavissa eräänlaisiin ”muokattuihin suorakulmioihin”, kunhan muunnokselle Γ asetetaan sopivat ominaisuudet (jotka eroavat merkittävästi Buckin esityksestä). Otetaan täten käyttöön Kodairan määritelmän mukainen *solu* (katso [4, s.77, määritelmä 2.4]):

Määritelmä 5.7. Asetetaan suorakulmio $K = \{(t, s) \in \mathbb{C} \mid a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq 1\}$. Olkoon $\Gamma : K \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus, jolle osittaisderivaatat

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \text{ ja } \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}$$

ovat jatkuvia. Joukko $\Gamma(K)$ on *solu*, jos kuvaus Γ toteuttaa seuraavat ehdot:
1) $\Gamma(K)$ on suljettu, $\Gamma(\mathrm{Int}(K)) = \mathrm{Int}(\Gamma(K))$ ja reuna $\partial\Gamma(K)$ voidaan esittää Jordanin tien $\gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$ jälkenä, jolle $\gamma'(t) = 0$ äärellisen monessa pisteessä $t \in [c,d]$.
2) Merkitään $L_1 = \{(t,0) \mid a \leq t \leq b\}$, $L_2 = \{(b,s) \mid 0 \leq s \leq 1\}$, $L_3 = \{(t,1) \mid a \leq t \leq b\}$ ja $L_4 = \{(a,s) \mid 0 \leq s \leq 1\}$. Nyt kullekin $j \in \{1,2,3,4\}$ pätee, että kuva $\Gamma(K_j)$ on joko yksiö tai esitettävissä sileän injektiivisen tien $\gamma_j : [c_j, d_j] \to \mathbb{C}$ jälkenä, jolle $\gamma_j'(t) \neq 0$ kaikille $t \in [c_j, d_j]$.
3) Poistetaan joukosta K ne osajoukot K_j, $j \in \{1,2,3,4\}$, joille $\Gamma(K_j)$ on yksiö. Merkitään jäljelle jäävää joukkoa symbolilla K'. Tällöin rajoittuma $\Gamma : K' \to \Gamma(K')$ on injektio, jolle pätee

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,s)\overline{\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s)}\right) > 0$$

kaikille $(t,s) \in K'$.
4) Kun $s \in [0,1]$ on kiinteä, niin kuvaus $t \mapsto \Gamma(t,s)$ on joko vakiokuvaus tai pätee $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s) \neq 0$ kaikille $t \in [a,b]$. Vastaavasti, kun $t \in [a,b]$ on kiinteä, niin kuvaus $s \mapsto \Gamma(t,s)$ on joko vakiokuvaus tai $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,s) \neq 0$ kaikille $s \in [0,1]$.

Määritelmä 5.8. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ suljettu ja yhtenäinen. Oletetaan, että on olemassa solut $K_1, K_2, ..., K_n$ siten, että joukolle D pätevät seuraavat ehdot:
1) Kun $j \neq l$, niin $\mathrm{Int}(K_j) \cap \mathrm{Int}(K_l) = \varnothing$.
2) $D = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n$.
3) Kun $j \neq l$ ja $K_j \cap K_l \neq \varnothing$, niin joukko $K_j \cap K_l$ on joko yksiö tai esitettävissä sileän injektiivisen tien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jälkenä, jolle $\gamma'(t) \neq 0$ kaikille $t \in [a,b]$.
Nyt sanotaan, että $H := \{K_1, K_2, ..., K_n\}$ on joukon D *solujako* (katso [4, s.80]).

Lause 5.9. *Olkoon D vyöhyke. Tällöin joukolle D on olemassa solujako.*

Todistus. Ei todisteta tässä. Väite vaikuttaa intuitiivisesti triviaalilta, mutta täsmällinen todistus on kauniisti sanottuna työläs; katso [4, s.80–99]. □

Lauseen 5.9 perusteella olisi mielekästä yleistää yhtälö (5.1) solulle. Ikävä kyllä solun määritelmään liittyvä muunnos Γ ei ole ”riittävän siisti”: differentiointia ja muunnoksen soveltamista ei voida käsitellä vaihdannaisina. Toisaalta, koska tässä tutkielmassa tutkitaan tieintegraalien häviämistä, niin yhtälö (5.1) on tavoitteen kannalta turhankin raskas työkalu. Todistetaan sen sijasta kaava (5.17) solulle D käyttämällä perin yllättävää todistustekniikkaa. Esitys noudattaa Kodairan vastaavaa (katso [4, s.42, lause 1.14]), joskin Kodaira käsittelee tässä yhteydessä analyyttisen funktion kompleksisia tieintegraaleja.

Lause 5.10. *Olkoon D solu sekä $f = (u, v)$ lokaalisti integroituva vektorikenttä joukossa D. Tällöin pätee*

$$\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} = 0.$$

Todistus. Olkoon $\Gamma = (A, B)$ määritelmän 5.7 mukainen kuvaus, jolle $\Gamma(K) = D$ (missä myös suorakulmio K on kuten määritelmässä 5.7). Asetetaan kullekin $s \in [0, 1]$

$$\gamma_s(t) := \Gamma(t, s) \text{ kaikille } t \in [a, b], \tag{5.18}$$

jolloin solun määritelmän nojalla kukin γ_s on tie (huomaa, että γ_s ottaa vastaan suorakulmioon K sisältyvän vaakasuuntaisen janan ja "taivuttaa" sen jäljeksi γ_s^* — kun kaikki tällaiset "väännetyt janat" yhdistetään, muodostuu vyöhyke D). Vastaavasti kullekin $t \in [a, b]$ määritellään tie

$$\gamma^t(s) := \Gamma(t, s) \text{ kaikille } s \in [0, 1]. \tag{5.19}$$

Täten solun D reunatie on yhdistetty tie $\kappa := \gamma_0 * \gamma^b * \overleftarrow{\gamma_1} * \overleftarrow{\gamma^a}$, ja näin ollen

$$\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} = \int_{\kappa} f \cdot d\vec{s}. \tag{5.20}$$

Tutkitaan derivaattaa

$$\frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} f \cdot d\vec{s} = \frac{d}{ds} \int_a^b (u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial B}{\partial t} \right) dt, \tag{5.21}$$

missä on otettu käyttöön lyhennetyt merkinnät

$$\Gamma := \Gamma(t, s), \frac{\partial A}{\partial t} := \frac{\partial A}{\partial t}(t, s) \text{ sekä } \frac{\partial B}{\partial t} := \frac{\partial B}{\partial t}(t, s).$$

Yhtälössä (5.21) derivointi voidaan "siirtää integraalin sisään". Tämä johtuu siitä, että yhtälön oikeanpuoleinen integrandi on muuttujan s suhteen jatkuvasti osittaisderivoituva (mikä edelleen seuraa kuvauksen Γ määritelmästä sekä kentän f lokaalista integroituvuudesta). Täten

$$\frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial B}{\partial t} \right) \right) dt. \tag{5.22}$$

Tarvittava s-osittaisderivaatta saadaan laskettua käyttämällä derivoinnin tulosääntöä sekä ketjusääntöä:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s} \left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial B}{\partial t} \right) \right) \\ &= u(\Gamma) \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial s} + v(\Gamma) \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial s} \\ &+ \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\Gamma) \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}(\Gamma) \frac{\partial B}{\partial s} \right] \frac{\partial A}{\partial t} + \left[\frac{\partial v}{\partial x}(\Gamma) \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y}(\Gamma) \frac{\partial B}{\partial s} \right] \frac{\partial B}{\partial t}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

missä jälleen $\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial s}(t,s)$ sekä $\frac{\partial B}{\partial s} = \frac{\partial B}{\partial s}(t,s)$. Käsitellään analogisesti derivaattaa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial s}, \frac{\partial B}{\partial s}\right)\right),$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial s}, \frac{\partial B}{\partial s}\right)\right) \\
&= u(\Gamma)\frac{\partial^2 A}{\partial s \partial t} + v(\Gamma)\frac{\partial^2 B}{\partial s \partial t} \\
&+ \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\Gamma)\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}(\Gamma)\frac{\partial B}{\partial t}\right]\frac{\partial A}{\partial s} + \left[\frac{\partial v}{\partial x}(\Gamma)\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}(\Gamma)\frac{\partial B}{\partial t}\right]\frac{\partial B}{\partial s}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Verrataan nyt yhtälöitä (5.23) sekä (5.24). Tunnetusti

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 A}{\partial s \partial t} \text{ sekä } \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 B}{\partial s \partial t}.$$

Lisäksi, koska f on lokaalisti integroituva, niin $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Täten yhtälössä (5.24) voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\Gamma)\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}(\Gamma)\frac{\partial B}{\partial t} \text{ sekä } \frac{\partial v}{\partial x}(\Gamma)\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}(\Gamma)\frac{\partial A}{\partial t}.$$

Tällöin nähdään, että yhtälöiden (5.23) ja (5.24) oikeanpuoleisten summien termit ovat samat. Näin ollen

$$\frac{\partial}{\partial s}\left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial B}{\partial t}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial s}, \frac{\partial B}{\partial s}\right)\right). \tag{5.25}$$

Nyt voidaan päätellä

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{\gamma_s} f \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial B}{\partial t}\right)\right) dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left((u(\Gamma), v(\Gamma)) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial s}, \frac{\partial B}{\partial s}\right)\right) dt \\
&= f(\Gamma(b,s)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,s) - f(\Gamma(a,s)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,s).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Yhtälöketjun (5.26) vasemman– ja oikeanpuoleisimmat termit voidaan integroida muuttujan s suhteen yli välin $[0,1]$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_0} f \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 (f(\Gamma(b,s)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,s) - f(\Gamma(a,s)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,s))ds \\ &= \int_{\gamma^b} f \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma^a} f \cdot d\vec{s}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Järjestelemällä kaavan (5.27) termejä huomataan, että

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma_0} f \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma^b} f \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_1} f \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma^a} f \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\kappa} f \cdot d\vec{s} = \int_{\partial D} f \cdot d\vec{s},\end{aligned} \tag{5.28}$$

ja väite on sillä todistettu. □

Lauseista 5.9 sekä 5.10 seuraa, että vyöhykkeessä lokaalisti integroituvan vektorikentän integraali yli kyseisen vyöhykkeen reunan häviää. Tämäkin ilmiö vaikuttaa intuitiivisesti selvältä: kun vyöhyke jaetaan soluihin, integraalit solujen reunojen yli kumoavat toisiaan, kunnes jäljelle jää integraali yli vyöhykkeen reunan. Hyödynnetään jälleen Kodairan esitystä, jotta saadaan muotoiltua Cauchyn lauseen ensimmäinen versio. Se antaa ensimmäiset vastaukset johdannon kysymyksiin (0.3) ja (0.4):

Seuraus 5.11 (Cauchyn lause, ensimmäinen versio)**.** *Olkoon D vyöhyke. Jos F on lokaalisti integroituva kenttä joukossa D, niin*

$$\int_{\partial D} F \cdot d\vec{s} = 0. \tag{5.29}$$

Lisäksi, jos f on analyyttinen funktio joukossa D, niin

$$\int_{\partial D} f dz = 0. \tag{5.30}$$

Todistus. Merkitään $F = (u,v)$ ja $f = p + iq$. Lauseen 5.9 nojalla on olemassa joukon D solujako $\{S_1, ..., S_n\}$. Kodairan esityksen [4, s.101, lauseen 2.2 todistus] alkuosan sekä lauseen 5.10 nojalla

$$\int_{\partial D} F \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial S_j} F \cdot d\vec{s} = 0, \tag{5.31}$$

eli (5.29) pätee. Edelleen, koska f on analyyttinen, niin seurauksen 4.13 nojalla kentät $(p,-q)$ ja (q,p) ovat lokaalisti integroituvia. Täten yhtälön (5.29) sekä seurauksen 3.10 avulla saadaan

$$\int_{\partial D} f dz = \int_{\partial D} (p,-q) \cdot d\vec{s} + i \int_{\partial D} (q,p) \cdot d\vec{s} = 0.$$

□

Tietenkään kaikki suljetut tiet eivät määrittele vyöhykkeitä — esimerkissä 4.17 asetettu tie $\aleph$ ei (ainakaan kuvien perusteella) ole vyöhykkeen reunatie, ja silti siihen liitetty tieintegraali häviää. Tällaisten yleisempien teiden tarkastelu vaatii muutamia topologisia työkaluja, joita ihmetellään seuraavissa luvuissa. Vilkaistaan vielä erästä kiinnostavaa "kompleksianalyyttistä" lausetta, joka on mainio esimerkki Cauchyn lauseen soveltamisesta:

Lause 5.12. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin, $\gamma : [a, b] \to D$ positiivisesti suunnistettu Jordanin tie sekä f funktio joukossa D. Oletetaan„ että on olemassa avoin kiekko $B(a, r) \subset I(\gamma)$ siten, että f on analyyttinen funktio joukossa $D \setminus B(a, r)$. Merkitään $\delta(t) = a + re^{it}$ kaikille $t \in [0, 2\pi]$. Tällöin pätee*

$$\int_\gamma f dz = \int_\delta f dz.$$

Todistus. Olkoon E tason suljettu osajoukko, jonka reuna on $\gamma^* \cup \delta^*$. Nyt E on vyöhyke, koska sen reuna voidaan esitää teiden γ ja $\overleftarrow{\delta}$ jälkien yhdisteenä, ja nämä tiet ovat positiivisesti suunnistettuja suhteessa joukkoon E. Oletetusti f on analyyttinen joukossa E (eli oletetusti f on analyyttinen jossakin avoimessa joukossa, johon E sisältyy). Täten seurauksen 5.11 perusteella

$$\int_\gamma f dz + \int_{\overleftarrow{\delta}} f dz = 0,$$

mistä edelleen seuraa

$$\int_\gamma f dz = -\int_{\overleftarrow{\delta}} f dz = \int_\delta f dz. \qquad \square$$

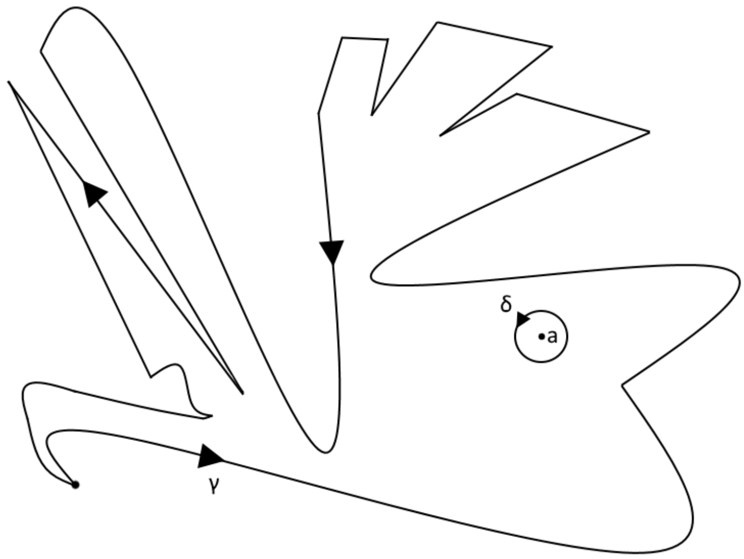
Lauseen 5.12 olettama tilanne on visualisoitu kuvassa 8. Nyt siis analyyttisen funktion f integraali yli kiekon $B(a, r)$ reunatien δ on sama luku, kuin funktion f integraali yli tien γ — olkoonkin, että jälki γ^* voi olla erittäin "kaoottinen". Huomaa, että funktion f mahdolliset epäanalyyttisyyspisteet on eristetty kiekkoon $B(a, r)$. Jos kyseisten pisteiden joukko on tyhjä, niin funktion f integraali yli teiden γ ja δ on 0 (seurauksen 5.11 nojalla).

6. Potentiaali ja primitiivi

Määritelmä 6.1. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin sekä $f = (u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ vektorikenttä. Oletetaan, että on olemassa funktio $g : D \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\frac{\partial g}{\partial x} = u \quad \text{sekä} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = v.$$

Tällöin sanotaan, että g on kentän f *potentiaali(funktio).*



KUVA 8

Määritelmä 6.2. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin sekä $f : D \to \mathbb{C}$ funktio. Oletetaan, että on olemassa funktio $g : D \to \mathbb{C}$, jolle pätee

$$g' = f.$$

Tällöin sanotaan, että g on funktion f *primitiivi*.

Primitiivin ja potentiaalin välinen yhteys käy ilmi seuraavasta lauseesta.

Lause 6.3. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ sekä $g = \phi + i\psi : D \to \mathbb{C}$ funktioita siten, että f on jatkuva. Tällöin $g' = f$ jos ja vain jos ϕ on kentän $(u, -v)$ potentiaali ja ψ puolestaan kentän (v, u) potentiaali.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $g' = f$. Nyt siis g on kompleksisesti derivoituva, minkä lisäksi sen derivaatta f on jatkuva. Täten g on analyyttinen, joten lauseen 4.12 nojalla

$$g' = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6.1}$$

Oletetusti $g' = f = u + iv$, joten vertaamalla tätä tietoa yhtälöön (6.1) saadaan

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ sekä } \quad -v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6.2}$$

Täten määritelmän 6.1 nojalla ϕ on kentän $(u, -v)$ potentiaali ja ψ on kentän (v, u) potentiaali, kuten haluttiin osoittaa.

Oletetaan sitten kääntäen, että yhtälöt (6.2) toteutuvat. Nyt on siis osoitettava, että funktiolle $g = \phi + i\psi$ pätee $g' = f$. Yhtälöistä (6.2) nähdään välittömästi, että g toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt joukossa D. Lisäksi, koska f on jatkuva, niin u ja v ovat jatkuvia, mistä edelleen yhtälöiden (6.2) nojalla seuraa, että g on C^1-funktio. Täten lauseen 4.14 perusteella g on analyyttinen, mistä lauseen 4.12 avulla saadaan

$$g' = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y} = u + iv = f.$$

□

Huomaa, että lauseessa 6.3 oletettiin funktion f jatkuvuus. Näin siksi, että analyyttisyyden määritelmä 4.3 vaatii kompleksisen derivoituvuuden lisäksi derivaattafunktion jatkuvuuden. Toisaalta, kuten huomautuksessa 4.4 todettiin, tämä jatkuvuusoletus on itse asiassa turha: yhtälöstä $g' = f$ seuraa funktion f jatkuvuus (ja paljon enemmän: yhtälö implikoi funktioille f ja g kaikkien kertalukujen kompleksiset derivaatat).

Lause 6.4. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin sekä $\gamma : [a,b] \to D$ tie. Lisäksi olkoon $f = (u,v) = u + iv : D \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus. Jos g on kuvauksen f potentiaalifunktio, niin*

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)). \tag{6.3}$$

Lisäksi, jos h on kuvauksen f primitiivi, niin

$$\int_\gamma f dz = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)). \tag{6.4}$$

Todistus. Oletetaan aluksi, että γ on sileä tie. Kun $(x,y) \in \gamma^*$, niin $x = \alpha(t)$ ja $y = \beta(t)$ jollekin $t \in [a,b]$. Täten ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned}(g \circ \gamma)'(t) &= \frac{d}{dt} g((\alpha(t), \beta(t))) = \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}(t) + \frac{\partial g}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}\alpha'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}\beta'(t) = u(x,y)\alpha'(t) + v(x,y)\beta'(t) \\ &= u(\gamma(t))\alpha'(t) + v(\gamma(t))\beta'(t)\end{aligned}$$

kaikille $t \in [a,b]$. Tämän tiedon ja analyysin peruslauseen avulla saadaan

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \cdot d\vec{s} &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (u(\gamma(t))\alpha'(t) + v(\gamma(t))\beta'(t)) dt \\ &= \int_a^b (g \circ \gamma)'(t) dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Merkitään $h = \phi + i\psi$. Nyt seurauksen 3.10, lauseen 6.3 sekä kaavan (6.5) perusteella

$$\begin{aligned}\int_\gamma f dz &= \int_\gamma (u,-v)\cdot d\vec{s} + i\int_\gamma (v,u)\cdot d\vec{s} \\ &= \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) + i[\psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))] \\ &= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).\end{aligned} \tag{6.6}$$

Oletetaan sitten, että γ on tie. Olkoot nousevassa järjestyksessä $a_1, a_2, ..., a_n$ ne välin (a,b) pisteet, joissa γ' ei ole jatkuva, ja merkitään vielä $a_0 := a$ sekä $a_{n+1} := b$. Nyt kukin rajoittuma $\gamma_j := \gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$, $j \in \{0,1,2,...,n\}$, on sileä tie, minkä lisäksi pätee $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j-1}(a_j)$ kaikille $j \in \{1,2,...,n\}$. Täten yhtälön (6.5) nojalla

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\cdot d\vec{s} &= \sum_{j=0}^{n}\int_{\gamma_j} f\cdot d\vec{s} = \sum_{j=0}^{n} g(\gamma_j(a_{j+1})) - g(\gamma_j(a_j)) \\ &= g(\gamma_n(a_{n+1})) - g(\gamma_0(a_0)) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Jälleen seurauksesta 3.10 sekä lauseesta 6.3 saadaan

$$\int_\gamma f dz = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)),$$

ja väite on todistettu (Lang todistaa osan tästä ilmiöstä; katso [1, s.243] sekä [1, s.96–97]). □

Osoitetaan vielä, että alueessa potentiaali ja primitiivi ovat vakioita vaille yksikäsitteisiä.

Lause 6.5. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja $f = (u,v) = u + iv : D \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus. Jos g ja h ovat kuvauksen f potentiaaleja, niin $g - h$ on vakio. Vastaavasti, jos G ja H ovat kuvauksen f primitiivejä, niin $G - H$ on vakio.*

Todistus. Koska

$$\frac{\partial g}{\partial x} = u = \frac{\partial h}{\partial x} \text{ sekä } \frac{\partial g}{\partial y} = v = \frac{\partial h}{\partial y},$$

niin funktiolle $P := g - h$ pätee

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Nyt siis P on vakiokentän $(0,0) = (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y})$ potentiaali. Valitaan pisteet $z_0, z \in D$, ja olkoon $\gamma : [a,b] \to D$ tie, jolle $\gamma(a) = z_0$ ja $\gamma(b) = z$. Tällöin lauseen 6.4 nojalla

$$0 = \int_\gamma \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot d\vec{s} = P(z) - P(z_0),$$

eli erityisesti $P(z) = P(z_0)$. Koska pisteet z, z_0 valittiin mielivaltaisesti joukosta D, on P vakiofunktio. Nyt primitiivejä koskeva väite voidaan johtaa lauseen 6.3 avulla. Toisaalta potentiaaleihin sovellettu taktiikka toimii yhtä hyvin: olkoon $S := G - H$, jolloin $S' = G' - H' = f' - f' = 0$. Nyt S on vakiofunktion 0 primitiivi, joten lauseen 6.4 nojalla

$$0 = \int_\gamma S' dz = S(z) - S(z_0),$$

mistä jälleen päätellään, että S on vakiofunktio. $\square$

Otetaan ylös suoraviivainen joskin erittäin merkittävä seuraus:

Seuraus 6.6. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin sekä $f = (u, v) = u + iv : D \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus. Olkoon lisäksi $\gamma : [a, b] \to D$ suljettu tie. Jos kuvaukselle f on potentiaali, niin*

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s} = 0. \tag{6.7}$$

Lisäksi, jos kuvaukselle f on primitiivi, niin

$$\int_\gamma f dz = 0. \tag{6.8}$$

Todistus. Koska suljetun tien määritelmän nojalla $\gamma(b) = \gamma(a)$, niin ilmiöt seuraavat välittömästi lauseesta 6.4. $\square$

Seuraus 6.6 paljastaa syyn esimerkissä 4.17 havaittuun ilmiöön: koska kentälle $f(x, y) = (xy^2, x^2 y)$ on potentiaali $(x, y) \mapsto x^2 y^2 / 2$ (koko tasossa), niin reaalinen tieintegraali yli suljetun tien $\aleph$ häviää. Täten herää olennainen kysymys: miten annetun kuvauksen primitiivi tai potentiaali yleisesti ottaen löydetään? Millä ehdoilla se ylipäätään *voidaan* löytää? Sitä ei välttämättä ole olemassa, kuten seuraava yksinkertainen (joskin äärimmäisen tärkeä) esimerkki osoittaa.

Esimerkki 6.7. Olkoon $\gamma(t) = e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$ kaikille $t \in [0, 2\pi]$. Tutkitaan kenttää

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

On helppo todeta, että F on lokaalisti integroituva kenttä joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Suoralla laskulla havaitaan, että

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{s} = ... = 2\pi,$$

joten seurauksen 6.6 nojalla kentälle F ei voi olla potentiaalia joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Asetetaan sitten funktio $f(z) = 1/z$, joka on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Huomataan, että

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Merkitään $u = x/(x^2 + y^2)$ ja $v = -y/(x^2 + y^2)$, jolloin $(v, u) = F$. Nyt lauseen 6.3 nojalla funktiolle f ei voi olla primitiiviä joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, koska primitiivin olemassaolosta seuraisi potentiaali kentälle F. Toki voidaan myös laskea

$$\int_\gamma f dz = ... = 2\pi i,$$

ja seuraus 6.6 takaa jälleen, että primitiiviä ei ole olemassa (joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Kannattaa kuitenkin huomata, että kentälle $(u, -v)$ itse asiassa on potentiaali; nimittäin funktio $(x, y) \mapsto \log\sqrt{x^2 + y^2}$. Tästä johtuen integraalin $\int_\gamma f dz$ reaaliosa häviää.

* * *

Olettaen, että potentiaali tai primitiivi on olemassa, niin sen konstruktiossa kannattaa ottaa mallia yksiulotteisesta tilanteesta: tunnetusti, jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on reaalimuuttujan jatkuva funktio, niin sen reaaliseksi primitiiviksi kelpaa integraalifunktio $x \mapsto \int_a^x f(s)ds$. Myös tasossa kenttää (tai funktiota) voidaan integroida (tietä pitkin) jostakin vakiopisteestä muuttujaan z, mutta ongelma on siinä, että integraalin arvo voi olla riippuvainen tiestä. Tästä johtuen on syytä hyödyntää mahdollisimman "yksinkertaisia" teitä, eli janoja. Nyt on kuitenkin otettava huomioon, että annettu kenttä f voi olla lokaalisti integroituva sellaisessa joukossa, joka ei sisällä kaikkia pisteidensä välisiä janoja. Täten tarkastelu rajoitetaan (toistaiseksi) tilanteeseen, jossa f on lokaalisti integroituva niin sanotusti *tähtimäisessä* joukossa:

Määritelmä 6.8. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin joukko. Oletetaan, että on olemassa piste $z_0 \in D$ siten, että jokaiselle $z \in D$ pätee

$$z_0(1 - t) + tz \in D \text{ kaikille } t \in [0, 1].$$

Tällöin sanotaan, että D on *tähtimäinen.*

Toisin sanoen tähtimäisellä joukolla D on vähintään yksi "keskipiste", joka voidaan yhdistää janalla mihin tahansa joukon toiseen pisteeseen siten, että kyseinen jana sisältyy joukkoon D. Huomaa myös, että tähtimäinen joukko on oletetusti avoin. Kuten seuraava lause osoittaa, tällaiseen joukkoon on verrattain helppoa konstruoida potentiaalifunktio. Tämän jälkeen vastaava ilmiö analyyttiselle funktiolle ja sen primitiiville saadaan lauseesta 6.3, joskin myös vaihtoehtoisia taktiikoita tarjotaan (katso lause 6.10 sekä huomautus 6.11).

Lause 6.9. *Olkoon $f = (u, v)$ lokaalisti integroituva vektorikenttä tähtimäisessä joukossa D. Tällöin kentälle f on olemassa potentiaali.*

Todistus. Olkoon $z_0 = (a, b) \in D$ siten, että jokaiselle $z \in D$ pätee

$$z_0(1 - t) + tz \in D \text{ kaikille } t \in [0, 1].$$

Kiinnitetään $z = (x, y) \in D$, ja määritellään

$$\gamma(t) := z_0(1-t) + tz \text{ kaikille } t \in [0,1],$$

jolloin γ on jana joukossa D. Määritellään funktion g arvo pisteessä z seuraavasti:

$$g(z) := \int_\gamma f \cdot d\vec{s}. \tag{6.9}$$

Osoitetaan, että g on funktion f potentiaali, eli että $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = u(x, y)$ ja $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = v(x, y)$. Tutkitaan ensin erotusosamäärää

$$\frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h}.$$

Oletetaan, että $h > 0$ (tapaus $h < 0$ käsitellään vastaavasti) ja määritellään jana $\eta(t) := z_0(1-t) + t(x+h, y)$ kaikille $t \in [0,1]$. Nyt funktion g määritelmän (6.9) mukaan

$$g(x+h, y) = \int_\eta f \cdot d\vec{s}.$$

Lisäksi määritellään jana $\delta(t) := (x + th, y)$ kaikille $t \in [0,1]$. Koska $h > 0$, niin yhdistetty tie $\kappa := \eta * \overleftarrow{\delta} * \overleftarrow{\gamma}$ määrittelee suljetun kolmion $K := \overline{I(\kappa)} \subset D$ (jos $h < 0$, niin määritellään $\kappa := \gamma * \delta * \overleftarrow{\eta}$). Nyt K on vyöhyke (sen reunatie on κ), joten lauseen 5.5 (tai seurauksen 5.11) nojalla

$$\int_K f \cdot d\vec{s} = \int_\kappa f \cdot d\vec{s} = 0. \tag{6.10}$$

Näin ollen

$$0 = \int_\kappa f \cdot d\vec{s} = \int_\eta f \cdot d\vec{s} - \int_\delta f \cdot d\vec{s} - \int_\gamma f \cdot d\vec{s},$$

mistä edelleen saadaan

$$\int_\delta f \cdot d\vec{s} = \int_\eta f \cdot d\vec{s} - \int_\gamma f \cdot d\vec{s}. \tag{6.11}$$

Yhtälön (6.11) nojalla

$$g(x+h, y) - g(x, y) = \int_\eta f \cdot d\vec{s} - \int_\gamma f \cdot d\vec{s} = \int_\delta f \cdot d\vec{s}. \tag{6.12}$$

Tieintegraalin määritelmän mukaan

$$\int_\delta f \cdot d\vec{s} = \int_0^1 u(x + th, y) h dt = h \int_0^1 u(x + th, y) dt,$$

mistä yhtälön (6.12) avulla saadaan esitys

$$\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} = \int_0^1 u(x+th,y)dt. \tag{6.13}$$

Kirjoitetaan

$$\int_0^1 u(x+th,y)dt = \int_0^1 u(x,y)dt + \int_0^1 (u(x+th,y)-u(x,y))dt. \tag{6.14}$$

f on lokaalisti integroituvana kenttänä myös jatkuva joukossa D, eli erityisesti u on jatkuva pisteessä $z = (x, y)$. Täten, kun $\epsilon > 0$ on kiinnitetty, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|u(x+h,y) - u(x,y)| < \epsilon$ kun $|(x+h,y)-(x,y)| = |h| < \delta$. Olkoon siis $h < \delta$, jolloin myös $th < \delta$, kun $t \in [0,1]$. Täten yhtälön (6.14) oikeanpuoleisimmalle integraalille saadaan arvio

$$\left|\int_0^1 (u(x+th,y)-u(x,y))dt\right| \leq \int_0^1 |u(x+th,y)-u(x,y)|dt < \epsilon, \tag{6.15}$$

mistä seuraa

$$\lim_{h\to 0,\, h>0} \int_0^1 (u(x+th,y)-u(x,y))dt = 0.$$

Yhdistetään tämä tieto yhtälöihin (6.14) sekä (6.13), jolloin saadaan

$$\lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} = \int_0^1 u(x,y)dt + 0 = u(x,y). \tag{6.16}$$

Tapaus $h < 0$ käsitellään vastaavasti, mistä seuraa tavoiteltu kaava $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = u(x,y)$. Yhtälö $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = v(x,y)$ todistetaan analogisesti määrittelemällä $\delta(t) := (x, y+th)$ kaikille $t \in [0,1]$ ja hyödyntämällä tietoa funktion v jatkuvuudesta. Näin ollen g on kentän f potentiaalifunktio. □

Jos annettuna on tähtimäisessä joukossa analyyttinen funktio, voidaan sen primitiivi rakentaa käyttäen lauseita 6.9 sekä 6.3. Toisaalta, "kolmiointegrointi" toimii myös tässä tapauksessa:

Lause 6.10. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ tähtimäinen joukko sekä $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Tällöin funktiolle f on primitiivi.*

Todistus. Olkoot $z_0 = (a, b)$ sekä jana γ kuten lauseen 6.9 todistuksessa. Määritellään funktion g arvo pisteessä $z = (x, y)$ ehdolla

$$g(z) := \int_\gamma f dz. \tag{6.17}$$

Todistetaan, että $g' = f$. Täten on tutkittava erotusosamäärää

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h}.$$

Merkitään $h = (h_1, h_2)$, ja oletetaan, että $h_1, h_2 > 0$ (muut tapaukset käsitellään vastaavasti). Olkoot $\eta(t) := z_0(1-t) + t(z+h)$ sekä $\delta(t) := z + th$ kaikille $t \in [0,1]$. Nyt yhdistetty tie $\kappa := \eta * \overleftarrow{\delta} * \overleftarrow{\gamma}$ määrittelee suljetun kolmion $K := \overline{I(\kappa)} \subset D$. Koska K on vyöhyke ja κ on sen reunatie, niin lauseen 5.5 (tai seurauksen 5.11) avulla saadaan

$$0 = \int_\kappa f dz = \int_\eta f dz - \int_\delta f dz - \int_\gamma f dz,$$

mistä seuraa

$$\int_\delta f dz = \int_\eta f dz - \int_\gamma f dz = g(z+h) - g(z).$$

Koska $\delta' = h \in \mathbb{C}$, niin kompleksisen tieintegraalin määritelmän nojalla

$$\int_\delta f dz = \int_0^1 f(z+th) \cdot h\, dt = h \cdot \int_0^1 f(z+th) dt.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \int_0^1 f(z+th) dt \\ &= \int_0^1 f(z) dt + \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt. \end{aligned} \tag{6.18}$$

f on analyyttisenä funktiona jatkuva pisteessä z. Täten, kun $\epsilon > 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(z+th) - f(z)| < \epsilon$, kun $|z+th-z| = t|h| < \delta$. Olkoon nyt $|h| < \min\{\delta, 1\}$. Sovelletaan lemmaa 3.14 funktioon $H(c) := f(c) - f(z)$, $c \in D$, ja tiehen δ. Tällöin saadaan

$$\left| \int_\delta H(c) dc \right| = |h| \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| \le \max_{t \in [0,1]} |f(z+th) - f(z)| \cdot 1 < \epsilon.$$

Näin ollen

$$\lim_{h \to 0} \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt = 0.$$

Yhdistämällä tämä tieto yhtälöön (6.18) saadaan

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = f(z),$$

missä oletetusti $h_1, h_2 > 0$. Muut tapaukset todistetaan vastaavasti, mistä seuraa $g' = f$. □

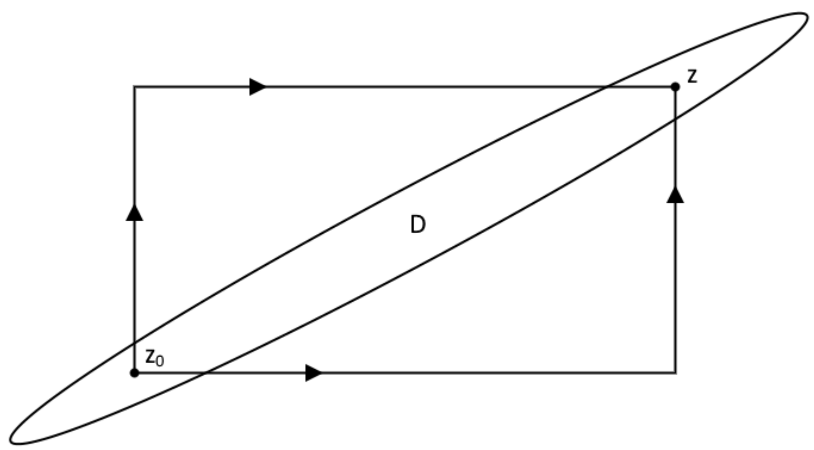
Huomautus 6.11. Edeltävä potentiaalin (ja primitiivin) konstruktio perustuu siihen, että lokaalisti integroituvan kentän (ja analyyttisen funktion) tieintegraali yli kolmion reunan on 0 (yhtälö (6.10)). Tämä tieto saadaan esimerkiksi lauseesta 5.5, koska suljettu kolmio on helppo jakaa yksinkertaisiin vyöhykkeisiin. Analyyttiselle funktiolle ilmiö voidaan todistaa myös toisin: tekniikka tunnetaan nimellä *Goursatin lause*. Sen ideana on jakaa kolmio alati pienempiin "osakolmioihin", ja hyödyntää analyyttisen funktion jatkuvuutta; katso esimerkiksi [9, s.129, lause 11.2]. Toisaalta primitiivin (ja potentiaalin) konstruktiossa voidaan käyttää myös suljettua suorakulmiota, joka on niin ikään yksinkertainen vyöhyke. Goursatin lauseesta on myös tähän tilanteeseen sopiva versio, jonka mukaan analyyttisen funktion kompleksinen tieintegraali yli suorakulmion reunan on 0; katso [1, s.105].

Jos esimerkiksi primitiivin konstruktiossa halutaan käyttää suorakulmioita, niin voidaan toimia seuraavasti: kun f on analyyttinen avoimessa joukossa D ja $z_0 \in D$, niin asetetaan jälleen tie γ pisteestä z_0 pisteeseen $z \in D$. Nyt γ ei ole välttämättä yksittäinen jana, vaan se voi olla (korkeintaan) kahden janan yhdiste siten, että toinen janoista on vaakasuuntainen, ja toinen pystysuuntainen. Määritellään funktio g tuttuun tapaan yhtälöllä

$$g(z) := \int_\gamma f dz, \tag{6.19}$$

ja pyritään osoittamaan, että $g' = f$. Tässä lähestymistavassa on kuitenkin eräs ongelma: tien γ jäljen on sisällyttävä joukkoon D, mikä on merkittävä rajoite. Oletetaan esimerkiksi, että D on soikio, kuten kuvassa 9. Jos pisteen z_0 etäisyys pisteestä z on liian suuri, ei tien γ jälki sisälly enää joukkoon D. Toisaalta D on tähtimäinen, joten lauseen 6.10 konstruktio onnistuu. Huomaa, että "kantikas integrointi" kuitenkin toimii esimerkiksi avoimessa kiekossa, ja Lang käyttää nimenomaan tätä lähestymistapaa; katso [1, s.108, lause 3.2]. Toki avoin kiekko on myös tähtimäinen joukko, eli lauseen 6.10 mukaan avoimessa kiekossa analyyttiselle funktiolle on primitiivi. Tätä tietoa tullaan hyödyntämään luvussa 7.

Kuten edeltävät kommentit paljastavat, potentiaalia ja primitiiviä voidaan



KUVA 9. Kun soikiosta D valitaan piste z_0, löytyy aina piste $z \in D$ siten, että kuvan mukaiset "kantikkaat reitit" eivät sisälly joukkoon D.

käsitellä useilla erilaisilla tavoilla, mutta lopputuloksen sanoma ei muutu:

kun f on lokaalisti integroituva tai analyyttinen kuvaus riittävän "yksinkertaisessa" joukossa D (esimerkiksi tähtimäisessä joukossa), niin potentiaali tai primitiivi on olemassa. Tämän ilmiön avulla saadaan todistettua vahvempia ja syvällisempiä väitteitä liittyen suljettujen tieintegraalien häviämiseen, mistä esimerkkinä välitön (ja erittäin hyödyllinen) seuraus:

Seuraus 6.12. *Olkoon f analyyttinen funktio tähtimäisessä joukossa D, sekä $z_0 \in D$. Määritellään*

$$g(z) := \int_\gamma f dz$$

kaikille $z \in D$, missä γ on mielivaltainen tie pisteestä z_0 pisteeseen z. Tällöin g on funktio, jolle pätee $g' = f$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että g on funktio (eli että funktion f tieintegraali on riippumaton valitusta tiestä γ). Olkoot γ_1 ja γ_2 teitä pisteestä z_0 pisteeseen z. Nyt yhdiste $\gamma_1 * \overleftarrow{\gamma_2}$ on suljettu tie. Lauseen 6.10 nojalla funktiolle f on primitiivi joukossa D, joten edelleen seurauksen 6.6 perusteella

$$0 = \int_{\gamma_1 * \overleftarrow{\gamma_2}} f dz = \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz,$$

mistä saadaan

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

Näin ollen g on funktio. Olkoon $h \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ sekä δ jana pisteestä z pisteeseen $z+h$. Koska funktion g määritelmä sallii mielivaltaisen tien hyödyntämisen, niin

$$g(z+h) = \int_{\gamma_1 * \delta} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_\delta f dz,$$

joten edelleen voidaan kirjoittaa

$$g(z+h) - g(z) = \int_{\gamma_1} f dz + \int_\delta f dz - \int_{\gamma_1} f dz = \int_\delta f dz.$$

Täten lauseen 6.10 todistuksen nojalla pätee $g' = f$. □

Seurauksen 6.12 nojalla primitiiviä ei ole välttämätöntä perustaa janoihin, koska mikä tahansa tie vakiopisteestä muuttujaan kelpaa (tähtimäisessä joukossa). Vastaava ilmiö pätee myös lokaalisti integroituvan vektorikentän potentiaalille. Nyt voidaan muotoilla astetta vahvempi versio Cauchyn lauseesta:

Seuraus 6.13 (Cauchyn lause, toinen versio). *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ tähtimäinen ja f analyyttinen funktio joukossa D. Jos $\gamma : [a,b] \to D$ on suljettu tie, niin*

$$\int_\gamma f dz = 0.$$

Edelleen, jos F on lokaalisti integroituva vektorikenttä joukossa D, niin

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{s} = 0.$$

Todistus. Lauseen 6.10 nojalla funktiolle f on primitiivi joukossa D, joten seurauksen 6.6 perusteella $\int_\gamma f dz = 0$. Lisäksi lauseen 6.9 nojalla kentälle F on potentiaali joukossa D, joten jälleen seurauksen 6.6 perusteella $\int_\gamma F \cdot d\vec{s} = 0$. □

Vertaa seurausta 6.13 Cauchyn lauseen ensimmäiseen versioon 5.11. Siinä missä seuraus 5.11 teki oletuksia itse tiehen γ liittyen, Cauchyn lauseen toinen versio olettaa joukon D olevan tähtimäinen. Huomaa, että tämän oletuksen "topologisuudesta" huolimatta kyseessä on oletus funktion f (tai kentän F) käytöksestä: komplementissa $\complement D$ analyyttisyys (tai lokaali integroituvuus) ei välttämättä enää toteudu.

7. Homotopia

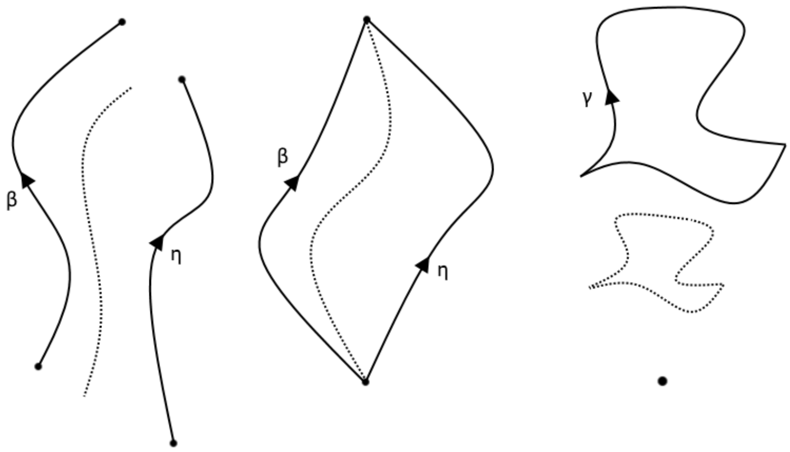
Seurauksen 6.13 nojalla avoimessa kiekossa analyyttisen funktion integraali yli suljetun tien häviää (koska avoin kiekko on tähtimäinen joukko). Nyt tarkastellaan tilannetta huomattavasti yleisemmällä tasolla: olkoon funktio f analyyttinen jossakin avoimessa joukossa D, joka ei siis välttämättä ole tähtimäinen. Oletetaan toistaiseksi, että

$$\gamma \text{ on Jordanin tie.} \tag{7.1}$$

Periaatteessa nyt ei ole mitään selvitettävää, koska Cauchyn lauseen ensimmäisen version 5.11 nojalla $\int_\gamma f dz = 0$. Tämä siis johtuu siitä, että f on analyyttinen vyöhykkeessä $\overline{I(\gamma)}$ (eli kentät $(u, -v)$ ja (v, u) ovat siellä lokaalisti integroituvia).

Otetaan kuitenkin huomioon, että lause 5.11 perustuu solujakoon (lause 5.9), jonka käsitteleminen on työlästä. Asioita on syytä lähestyä hiukan erilaisesta näkökulmasta: nyt siis lauseen 5.11 mukaan $\int_\gamma f dz = 0$, jos joukossa $I(\gamma)$ ei ole komplementin $\complement D$ pisteitä. Visuaalisesti ottaen on oltava niin, että jälki γ^* voidaan *kutistaa jatkuvalla tavalla* joksikin joukon D pisteeksi; katso kuvan 10 oikeanpuoleisin piirros. Tällainen jatkuvan muunnoksen idea voidaan yleistää mielivaltaisille teille visualisoimalla, miten tien β jälki muuttuu jatkuvalla tavalla tien η jäljeksi (kuvan 10 vasemmanpuoleisin piirros). Kuvitellaan vielä tapaus, jossa teillä β ja η on samat alku– ja päätepisteet. Tällöin kaikki muunnoksen "välivaiheet" jäävät teiden jälkien "väliin". Nämä ideat toimivat myös silloin, kun γ, β ja η leikkaavat itseään (mahdollisesti muuallakin kuin alku– ja päätepisteissään), joten oletuksesta (7.1) voidaan saman tien luopua.

Määritellään edellä kuvailtu jatkuva muunnos täsmällisesti suljetuille po-



KUVA 10

luille. Esitys muistuttaa solun määritelmässä 5.7 asetettua kuvausta Γ, mutta oletuksia on huomattavasti vähemmän:

Määritelmä 7.1. Olkoot D alue sekä $\gamma, \eta : [0,1] \to D$ suljettuja polkuja joukossa D. Oletetaan, että on olemassa jatkuva kuvaus $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$, jolle pätee

$$\Gamma(t,0) = \gamma(t) \quad \text{ja} \quad \Gamma(t,1) = \eta(t) \text{ kaikille } t \in [0,1], \tag{7.2}$$

sekä

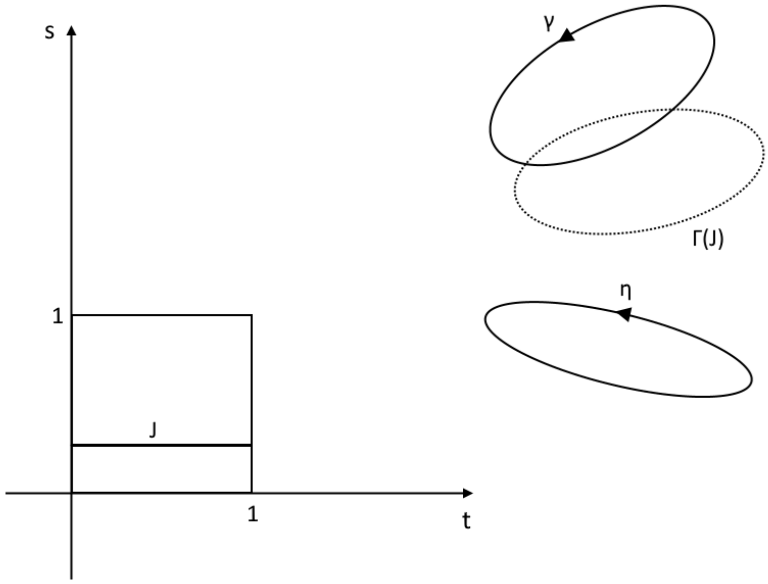
$$\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s) \quad \text{kaikille } s \in [0,1]. \tag{7.3}$$

Tällöin sanotaan, että polut γ ja η ovat *silmukkahomotooppiset (joukossa D)*, ja kuvaus Γ on polkujen γ ja η välinen *homotopia*. Lisäksi merkitään $\gamma \sim_D \eta$, tai lyhyemmin $\gamma \sim \eta$. Jos polku η on vakiopolku, niin sanotaan, että γ on *nollahomotooppinen*, ja merkitään $\gamma \sim_D 0$, tai jälleen lyhyemmin $\gamma \sim 0$.

Huomautus 7.2. Määritelmä 7.1 koskee nimenomaan suljettujen polkujen välistä homotopiaa, mistä johtuen on syytä puhua *silmukkahomotooppisuudesta*. Sovitaan, että tästedes silmukkahotooppisuuteen viitataan lyhyemmällä ilmaisulla *homotooppisuus*, mutta tämän nimityksen kanssa on oltava varovainen: esimerkiksi Narasimhan kirjoittaa homotooppisista teistä (käyttäen käsitettä *homotopic*), mutta ei oleta teiden olevan suljettuja. Sen sijaan hän olettaa, että niiden alku– ja päätepisteet ovat samat (kuten kuvan 10 keskimmäisessä piirroksessa). Tästä luonnollisesti seuraa, että Narasimhanin määritelmä itse homotopialle Γ poikkeaa määritelmän 7.1 vastaavasta (katso [7, s.166]).

Homotopian määritelmä 7.1 voi olla symbolisesti hiukan sekava, mutta idea on erittäin kaunis: kun kuvaukselle Γ annetaan jokin neliön $[0,1] \times [0,1]$ vaakasuora osajana J, sen kuvaksi muodostuu eräs jälkien γ^* ja η^* ”välimuoto”. Yhtälön (7.2) nojalla neliön alalaita kuvautuu polun γ jäljeksi, ja ylälaita puolestaan polun η jäljeksi (katso kuva 11). Edelleen yhtälö (7.3) vaatii, että jokainen näistä välimuodoista on suljetun polun jälki, eli heuristisesti puhuen jälkeä γ^* ei saa "katkaista", kun se muunnetaan jäljeksi η^* (kuvassa 11 joukot γ^*, η^* ja $\Gamma(J)$ on valittu soikioiksi selkeyden tähden). Huomaa, että kun $J = J_s := \{(t, s) \mid t \in [0, 1]\}$, niin lukua s (eli janaa J) vastaava "välimuoto" on polun $\Gamma_s(t) := \Gamma(t, s)$ kuva välistä $[0, 1]$. Koska Γ on jatkuva, niin Γ_s todellakin on polku, mutta *se ei välttämättä ole tie*. Näin siksi, että kuvaukselta Γ ei vaadita osittaisderivoituvuutta. Tästä seuraa, että tieintegraalin käsite on yleistettävä poluille (määritelmä 7.7), jotta homotopiaa päästään hyödyntämään tieintegraalien käsittelyssä.

Käytännössä homotopian lausekkeen löytäminen voi olla hyvinkin vaike-



Kuva 11

aa. Toisaalta se on myös yllättävän helppoa, kun homotopia määritellään konveksiin joukkoon:

Lemma 7.3. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ konveksi, sekä $\gamma, \eta : [0, 1] \to D$ suljettuja polkuja. Tällöin $\gamma \sim_D \eta$.*

Todistus. Konveksin joukon määritelmän mukaan jana $L_t := \{(1 - s)\gamma(t) + s\eta(t) \mid s \in [0, 1]\}$ sisältyy joukkoon D kaikille $s \in [0, 1]$. Määritellään

$$\Gamma(t, s) := (1 - s)\gamma(t) + s\eta(t). \tag{7.4}$$

Koska γ ja η ovat jatkuvia, on Γ selvästi jatkuva. Heti nähdään, että Γ toteuttaa yhtälöt (7.2) ja (7.3), joten Γ on polkujen γ ja η välinen homotopia (katso myös [1, s.118]).

□

Tavoitteena on todistaa, että analyyttisen funktion tieintegraalit yli suljettujen homotooppisten teiden ovat samat. Tähän liittyy eräs maininnan arvoinen erikoistapaus, joka otetaan ylös lemmana:

Lemma 7.4. *Oletetaan, että $\gamma, \eta : [0,1] \to D$ ovat sileitä ja suljettuja teitä, missä D on alue. Lisäksi oletetaan, että jokaiselle $t \in [0,1]$ jana $L_t := \{(1-s)\gamma(t) + s\eta(t) \mid s \in [0,1]\}$ sisältyy joukkoon D. Jos f on analyyttinen funktio joukossa D, niin*

$$\int_\gamma f dz = \int_\eta f dz.$$

Todistus. Katso Kodairan todistus [4, s.37] (vertaa tätä ilmiötä lauseeseen 5.12). □

Lemmassa 7.4 on huomattava, että tiet γ ja η oletetaan sileiksi teiksi (eli niiden derivaatat ovat jatkuvia). Täten myös niiden välisellä homotopialla (7.4) on jatkuvat osittaisderivaatat. Kodaira todistaa tältä pohjalta kaavan

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 f(\Gamma(t,s))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s)dt = 0. \tag{7.5}$$

Tämän yhtälön sanoma on se, että funktion f tieintegraali on riippumaton "siirrosparametrista" s (vertaa kaavaa (7.5) lauseen 5.10 todistukseen). Vastaavaa tekniikkaa esittelee myös Conway; katso [3, s.82–83]. Tieintegraalin derivoinnissa on kuitenkin se ikävyys, että periaatteessa on käytävä läpi ylinumeroituva määrä parametrin s arvoja. Lisäksi huomaa, että yleisesti ottaen homotopiasta $\gamma \sim_D \eta$ ei seuraa, että janat L_t sisältyvät joukkoon D. Visuaalisessa mielessä yksikin komplementin $\complement D$ piste jälkien γ^* ja η^* "välissä" sotkee kaiken, mutta se ei välttämättä estä homotopian olemassaoloa (kuvittele kyseinen piste kuvan 11 soikioiden väliin).

* * *

Ryhdytään konstruoimaan lähestymistapaa, joka hyödyntää tietoa analyyttisen funktion lokaalista primitiivistä, eli primitiivistä avoimessa kiekossa. Kuten viittauksista ilmenee, tässä seurataan pääasiassa Langin teosta [1]. Aloitetaan peittämällä annetun polun jälki osittain päällekkäisillä kiekoilla.

Lemma 7.5. *Olkoon D avoin sekä $\gamma : [0,1] \to D$ polku. Nyt on olemassa välin $[0,1]$ jako $P = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ (missä $a_0 = 0$ ja $a_n = 1$) sekä avoimien kiekkojen kokoelma $H = \{B_0, B_1, ..., B_n\}$ siten, että $B \in H \Rightarrow B \subset D$, sekä $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset B_j$ kaikille $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.*

Todistus. Koska γ on jatkuva, niin γ^* on kompakti joukko avoimessa joukossa D, jolle $\complement D$ on suljettu. Täten on olemassa $r > 0$ siten, että jokaiselle $z \in \gamma^*$ pätee $B(z,r) \cap \complement D = \varnothing$. Koska γ on jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$, on se myös tasaisesti jatkuva. Täten on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < r, \quad \text{kun} \quad |t - s| < \delta. \tag{7.6}$$

Valitaan nyt $n \in \mathbb{N}$ siten, että $1/n < \delta$, ja muodostetaan välin $[0,1]$ jako

$$P = \{0, 1/n, 2/n, ..., 1\}.$$

Merkitään $a_j := j/n$ kaikille $j \in \{0,1,2,...,n\}$, minkä lisäksi määritellään kiekot $B_j := B(\gamma(a_j), r)$ kaikille $j \in \{0,1,2,...,n\}$. Luvun r valinnan perusteella on selvää, että $B_j \subset D$ kaikille $j \in \{0,1,2,...,n\}$. Todistetaan vielä, että kullekin $j \in \{0,1,2,...,n-1\}$ pätee

$$\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset B_j. \tag{7.7}$$

Kun $t \in [a_j, a_{j+1}]$, niin $|t - a_j| \leq 1/n < \delta$. Täten epäyhtälöiden (7.6) nojalla

$$|\gamma(a_j) - \gamma(t)| < r,$$

joten (7.7) pätee, ja väite on todistettu (katso [1, s.110–111]). □

Huomaa, että lemmassa 7.5 kiekko $B_n = (\gamma(a_n), r)$ on siinä mielessä "ylimääräinen", että joukko $\gamma([a_{n-1}, a_n])$ sisältyy jo edeltävään kiekkoon B_{n-1}. Täten kiekkoa B_n ei olisi edes tarpeen määritellä, mutta kirjoittajan mielestä ilmiö on helpompi visualisoida, kun jokaiseen pisteeseen $\gamma(a_j)$ liitetään kiekko — eli myös pisteeseen $\gamma(a_n)$. Huomaa myös, että jos γ on suljettu tie, niin $B_0 = B_n$.

Lemma 7.6. *Olkoon D avoin, $\gamma : [0,1] \to D$ polku sekä $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Lisäksi olkoon $P = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ välin $[0,1]$ jako sekä avoimet kiekot $B_0, B_1, ..., B_n$ siten, että ne toteuttavat lemman 7.5 oletukset. Kun $j \in \{0,1,2,,...,n-1\}$, niin olkoon $\gamma_j := \gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$ sekä g_j funktion f primitiivi kiekossa B_j (jonka olemassaolon takaa lause 6.10). Merkitään vielä $\gamma(a_j) := z_j$ kaikille $j \in \{0,1,2,...,n\}$. Tällöin summa*

$$\sum_{j=0}^{n-1} (g_j(z_{j+1}) - g_j(z_j)) \tag{7.8}$$

ei riipu valituista primitiiveistä, jaosta P saati kiekoista B_j, kunhan ne toteuttavat asetetut oletukset.

Todistus. Kiinnitetään $j \in \{0,1,2,...,n-1\}$. Olkoon D_j avoin kiekko, jolle pätee $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset D_j$, sekä h_j funktion f primitiivi kiekossa D_j. Toisaalta, oletetusti $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset B_j$ ja g_j on funktion f primitiivi kiekossa B_j. Täten sekä g_j että h_j ovat funktion f primitiivejä joukossa $B_j \cap D_j$, mistä lauseen 6.5 nojalla seuraa, että $g - h$ on vakiofunktio joukossa $B_j \cap D_j$. Täten erityisesti $g(z_{j+1}) - h(z_{j+1}) = g(z_j) - h(z_j)$, mistä edelleen seuraa $g(z_{j+1}) - g(z_j) = h(z_{j+1}) - h(z_j)$. Siis summa (7.8) on riippumaton valituista primitiiveistä ja avoimista kiekoista.

Vielä on osoitettava, että summa (7.8) on riippumaton valitusta jaosta P.

Tässä riittää osoittaa, että yksittäisen pisteen c lisääminen jakoon P ei muuta summan (7.8) arvoa (yleinen tapaus kahdelle eri jaolle P ja Q seuraa, kun jako P muunnetaan jaoksi Q lisäämällä tai poistamalla yksi piste kerrallaan). Olkoon siis $c \in [a,b]$, ja asetetaan jako $Q = \{a_0, a_1, ..., a_k, c, a_{k+1}, ..., b\}$. Nyt $\gamma([a_k, a_{k+1}]) \subset B_k$, joten

$$
\begin{aligned}
&g_k(z_{k+1}) - g_k(\gamma(c)) + g_k(\gamma(c)) - g_k(z_k) + \sum_{j=0,\, j\neq k}^{n-1} (g_j(z_{j+1}) - g_j(z_j)) \\
&= g_k(z_{k+1}) - g_k(z_k) + \sum_{j=0,\, j\neq k}^{n-1} (g_j(z_{j+1}) - g_j(z_j)) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (g_j(z_{j+1}) - g_j(z_j)).
\end{aligned}
$$

Täten väite on tosi ([1, s.112–113]). □

Lemman 7.6 avulla tieintegraalin käsite voidaan yleistää poluille:

Määritelmä 7.7. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ polku joukossa D sekä $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Olkoot vielä jako P, kiekot B_j sekä primitiivit g_j kuten lemmassa 7.6. Tällöin määritellään

$$
\int_\gamma f dz := \sum_{j=0}^{n-1} (g_j(z_{j+1}) - g_j(z_j)). \tag{7.9}
$$

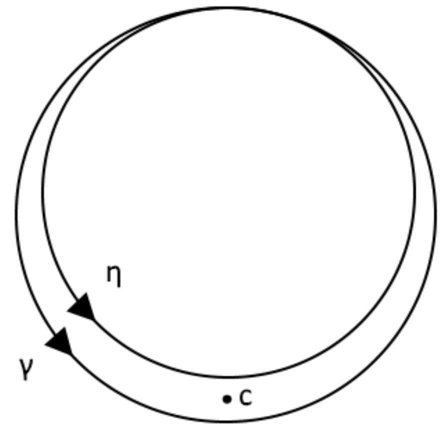
Jos määritelmässä 7.7 kuvaus γ on tie, niin yhtälön (7.9) summa saa muodon

$$
\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma_j} f dz,
$$

missä kuvaukset γ_j ovat tien γ rajoittumia jaon P määräämille osaväleille (katso [1, s.113]). Täten määritelmä 7.7 on järkevä.

Määritelmä 7.8. Olkoon D avoin sekä $\gamma, \eta : [0,1] \to D$ polkuja. Oletetaan, että olemassa välin $[0,1]$ jako $P = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ (missä $a_0 = 0$ ja $a_n = 1$) sekä avoimien kiekkojen kokoelma $H = \{B_0, B_1, ..., B_n\}$ siten, että $B \in H \Rightarrow B \subset D$, sekä $\gamma([a_j, a_{j+1}]), \eta([a_j, a_{j+1}]) \subset B_j$ kaikille $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Tällöin sanotaan, että polut γ ja η ovat *lähekkäin (joukon D suhteen)*.

Huomautus 7.9. Määritelmässä 7.8 polkujen γ ja η lähekkäisyys määräytyy suhteessa annettuun joukkoon D, mikä tekee lähekkäisyyden käsitteestä hiukan harhaanjohtavan. Oletetaan esimerkiksi, että γ on positiivisesti suunnistettu polku, jolle γ^* on ympyrä (kuten kuvassa 12). Jos $\epsilon > 0$, niin valitaan positiivisesti suunnistettu polku η siten, että myös η^* on ympyrä, ja $\max\{|\gamma(t) - \eta(t)| \mid t \in [0,1]\} < \epsilon$. Kuitenkin, kun piste c valitaan kuvan 12 osoittamalla tavalla (luvun ϵ valinnan jälkeen), niin γ ja η *eivät* ole lähekkäin suhteessa joukkoon $\mathbb{C} \setminus \{c\}$. Tämä johtuu siitä, että määritelmän 7.8 mukainen kiekkojen peite sisältäisi pisteen c.



Kuva 12

Lemma 7.10. *Olkoon D avoin sekä $\gamma, \eta : [0,1] \to D$ suljettuja polkuja, jotka ovat lähekkäin. Jos $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, niin*

$$\int_\gamma f dz = \int_\eta f dz.$$

Todistus. Olkoot jako P sekä kiekot B_j kuten määritelmässä 7.8. Merkitään $z_j := \gamma(a_j)$ sekä $w_j := \eta(a_j)$ kaikille $j \in \{0,1,2,...,n\}$. Huomaa, että $z_n = z_0$, $w_n = w_0$ sekä $B_n = B_0$. Kiinnitetään $j \in \{0,1,2,...,n-1\}$. Nyt lauseen 6.10 nojalla funktiolle f on primitiivi g_j joukossa B_j. Täten (käyttäen määritelmää 7.7) saadaan

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f dz - \int_\eta f dz &= \sum_{j=0}^{n-1} (g_j(z_{j+1}) - g_j(z_j) - [g_j(w_{j+1}) - g_j(w_j)]) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (g_j(z_{j+1}) - g_j(w_{j+1}) - [g_j(z_j) - g_j(w_j)]) \\
&= g_{n-1}(z_n) - g_{n-1}(w_n) - [g_0(z_0) - g_0(w_0)] \\
&+ \sum_{j=0}^{n-2} (g_j(z_{j+1}) - g_j(w_{j+1}) - [g_j(z_j) - g_j(w_j)]) \\
&= g_{n-1}(z_0) - g_0(z_0) - [g_{n-1}(w_0) - g_0(w_0)] \\
&+ \sum_{j=0}^{n-2} (g_j(z_{j+1}) - g_{j+1}(z_{j+1}) - [g_j(w_{j+1}) - g_{j+1}(w_{j+1})]).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Huomataan aluksi, että $z_0, w_0 \in B_0 = B_n$, mutta toisaalta $z_0, w_0 \in B_{n-1}$, joten $z_0, w_0 \in B_0 \cap B_{n-1}$. Joukossa $B_0 \cap B_{n-1}$ pätee (lauseen 6.5 nojalla), että $g_{n-1} - g_0$ on vakio, mistä seuraa

$$g_{n-1}(z_0) - g_0(z_0) - [g_{n-1}(w_0) - g_0(w_0)] = 0.$$

Olkoon sitten $j \in \{0, 1, 2, ..., n-2\}$. Nyt $z_j, w_j \in B_j \cap B_{j+1}$. Joukossa $B_j \cap B_{j+1}$ pätee , että $g_j - g_{j+1}$ on vakio, mistä jälleen seuraa

$$g_j(z_{j+1}) - g_{j+1}(z_{j+1}) - [g_j(w_{j+1}) - g_{j+1}(w_{j+1})] = 0.$$

Täten yhtälöketjun (7.10) viimeisimmän summan jokainen termi on 0, mistä seuraa

$$\int_\gamma f dz - \int_\eta f dz = 0,$$

ja väite on täten todistettu. □

Nyt voidaan todistaa tavoiteltu tulos (ja vähän enemmänkin käyttämällä määritelmää 7.7).

Lause 7.11. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin sekä $\gamma, \eta : [0,1] \to D$ suljettuja polkuja, joille pätee $\gamma \sim_D \eta$. Kun $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, niin*

$$\int_\gamma f dz = \int_\eta f dz.$$

Ennen todistusta pari sanaa sen ideasta: tavoitteena on käsitellä homotopian antamia ”välivaiheita” (kuvassa 11 katkoviivalla esitetty yksi tällainen välivaihe), kun γ^* muunnetaan joukoksi η^*. Nämä välivaiheet voidaan valita siten, että kahden peräkkäisen välivaiheen etäisyys toisistaan on mielivaltaisen pieni. Kun etäisyys on *riittävän* pieni, välivaiheet ovat polkujen jälkiä siten, että niihin liittyvät polut ovat lähekkäin. Näin saadaan muodostettua ”tikapuut”, joita pitkin funktion f integraali kuljetetaan arvosta $\int_\gamma f dz$ arvoon $\int_\eta f dz$.

Todistus. Olkoon $\Gamma : [0,1]^2 \to D$ polkujen γ ja η välinen homotopia. Olkoon lisäksi $n \in \mathbb{N}$ sekä välin $[0,1]$ jako $P = \{0, 1/n, 2/n, ..., 1\}$, ja merkitään $a_j := j/n$ kaikille $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Määritellään vielä kuvaukset Γ_j kullekin $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ ehdolla

$$\Gamma_j(t) := \Gamma(t, a_j).$$

Koska Γ on jatkuva ja $[0,1]^2$ on kompakti, niin myös kuvajoukko $\Gamma([0,1])$ on kompakti. Koska $\complement D$ on suljettu, niin on olemassa luku $r > 0$ siten, että $B(z,r) \cap \complement D = \varnothing$ kaikille $z \in \Gamma([0,1]^2)$. Lisäksi Γ on tasaisesti jatkuva, joten edellä asetettu luku n voidaan valita niin suureksi, että

$$|\Gamma(t,s) - \Gamma(t',s')| < r, \text{ kun } |(t,s) - (t',s')| < 2/n. \tag{7.11}$$

Merkitään kaikille $k, j \in \{0, 1, ..., n\}$

$$z_{kj} := \Gamma(a_k, a_j),$$

jolloin luvun r valinnan mukaan $B(z_{kj}, r) \subset D$ kaikille $k, j \in \{0, 1, ..., n\}$. Jaetaan neliö $[0, 1]^2$ osajoukkoihin

$$S_{kj} := \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] = [a_k, a_{k+1}] \times [a_j, a_{j+1}]$$

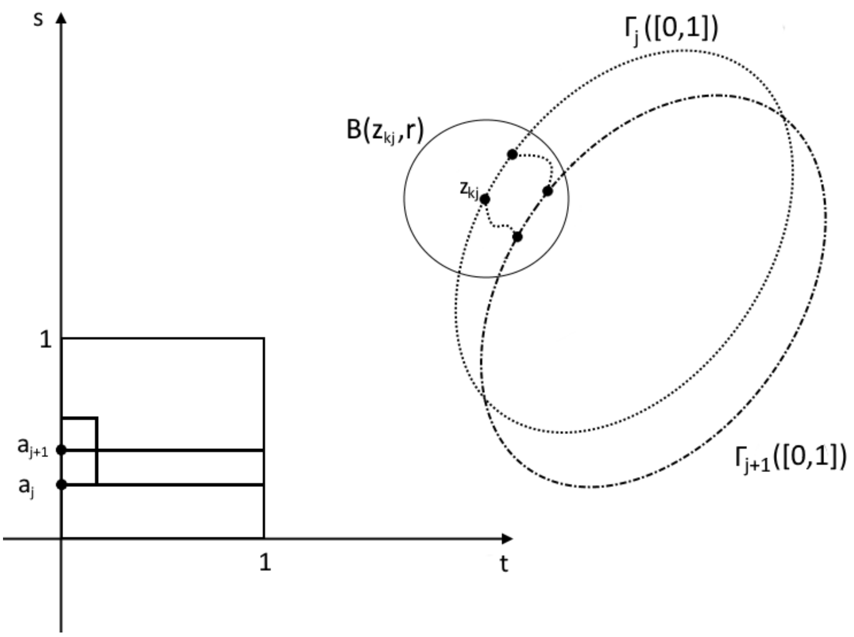
kaikille $k, j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Kun pisteet (t, s) ja (t', s') ovat neliössä S_{kj}, niin $|(t, s) - (t', s')| \leq \sqrt{2}/n < 2/n$. Täten epäyhtälöiden (7.11) nojalla

$$\Gamma(S_{kj}) \subset B(z_{kj}, r) \subset D. \tag{7.12}$$

Erityisesti kaikille $k, j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ pätee $\Gamma_j([a_k, a_{k+1}]), \Gamma_{j+1}([a_k, a_{k+1}]) \subset B(z_{kj}, r)$, joten polut Γ_j, Γ_{j+1} ovat lähekkäin (katso kuva 13). Täten lemman 7.10 avulla saadaan pääteltyä

$$\int_\gamma f dz = \int_{\Gamma_0} f dz = \int_{\Gamma_1} f dz = \int_{\Gamma_2} f dz = ... = \int_{\Gamma_n} f dz = \int_\eta f dz.$$

Väite on sillä todistettu ([3, s.83–84], [1, s.116–117]). $\square$



Kuva 13. Homotopia Γ kuvaa neliön S_{kj} tason osajoukoksi, joka voidaan rajoittaa kiekkoon $B(z_{kj}, r)$. Kuvan neliölle S_{kj} pätee $k = 0$.

Huomautus 7.12. Tämän luvun määritelmissä ja ilmiöissä on käsitelty ainoastaan välille $[0, 1]$ määriteltyjä polkuja (mukavuussyistä johtuen). Täten määritelmiä 7.1, 7.7 ja 7.8 laajennetaan sopimalla, että yleisillä väleillä määritellyt polut toteuttavat annetun määritelmän, jos niiden parametrisaatiot välillä $[0, 1]$ toteuttavat kyseisen määritelmän. Huomaa lisäksi, että ainoa analyyttisen funktion f ominaisuus, jota edellä hyödynnettiin, oli tieto lokaalista primitiivistä (eli lause 6.10). Täten todistetut ilmiöt pätevät myös lokaalisti integroituvan vektorikentän reaalisille tieintegraaleille, mikä nähdään hyödyntämällä tietoa kentän lokaalista potentiaalista (lause 6.9).

Huomaa, että lauseessa 7.11 polkujen γ ja η ei siis tarvitse olla Jordanin käyriä: ne voivat vallan hyvin leikata itseään muuallakin kuin alku– ja päätepisteissään. Nyt kannattaa verrata lauseen 7.11 todistusta yhtälöön (7.5). Homotopian ansiosta kaikkia parametrin $s \in [0,1]$ arvoja ei tarvitse käydä läpi — ainoastaan arvot $\{0, 1/n, 2/n, ..., 1\}$, kun n on valittu riittävän suureksi. Otetaan vielä ylös lauseen 7.11 välitön seuraus:

Seuraus 7.13. *Olkoon D avoin, $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, $F : D \to \mathbb{R}^2$ lokaalisti integroituva vektorikenttä sekä $\gamma : [a,b] \to D$ suljettu nollahomotooppinen tie. Tällöin pätee*

$$\int_\gamma f dz = 0 \quad \textit{ja} \quad \int_\gamma F \cdot d\vec{s} = 0.$$

Nollahomotooppisuuden avulla voidaan muotoilla täsmällinen määritelmä joukon ”reiättömyydelle”:

Määritelmä 7.14. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Jos jokainen suljettu tie $\gamma : [a,b] \to D$ on nollahomotooppinen (joukossa D), niin sanotaan, että D on *yhdesti yhtenäinen.*

Esimerkiksi tason avoimet konveksit osajoukot ovat yhdesti yhtenäisiä, kuten lemmasta 7.3 nähdään. Määritelmästä 7.14 sitä ei välttämättä näe, mutta yhdesti yhtenäisyys on erittäin syvällinen käsite. Esimerkiksi Rudin todistaa yhdeksän yhtäpitävää ilmiötä ([6, s.292, lause 13.11]), joista osalla ei vaikuta olevan paljoakaan tekemistä määritelmän 7.14 kanssa (katso myös Narasimhanin listaus [7, s.151]). Tässä tekstissä tyydytään seuraavaan arvokkaaseen lopputulokseen, joka nimetään Cauchyn lauseen kolmanneksi versioksi:

Seuraus 7.15 (Cauchyn lause, kolmas versio)**.** *Olkoon f analyyttinen funktio yhdesti yhtenäisessä joukossa $D \subset \mathbb{C}$. Jos $\gamma : [a,b] \to D$ on suljettu tie, niin $\int_\gamma f dz = 0$. Vastaavasti, jos F on lokaalisti integroituva vektorikenttä joukossa D, niin $\int_\gamma F \cdot d\vec{s} = 0$.*

Vertaa seurausta 7.15 Cauchyn lauseen versioihin 5.11 sekä 6.13 — huomaa erityisesti, että tähtimäiset joukot ovat yhdesti yhtenäisiä. Toki nyt voidaan esittää looginen jatkokysymys: entä jos D ei olekaan yhdesti yhtenäinen? Tällöin siis jokin joukon D suljettu tie γ ei ole nollahomotooppinen — mitä tieintegraalin häviämisestä voidaan tässä tilanteessa sanoa? On täysin mahdollista, että annetun kuvauksen tieintegraali yli tien γ edelleenkin häviää, mutta ilmiön syyt voivat olla perin syvällisiä.

Cauchyn lauseen versiot ovat rajoittaneet tien γ käytöstä näennäisesti erilaisilla oletuksilla: γ on joukkoon D sisältyvän vyöhykkeen reunatie, γ^* sisältyy tähtimäiseen joukkoon D, tai γ on nollahomotooppinen joukossa D — mitä yhteistä näillä oletuksilla on? Yhteinen piirre on se, että γ ei pääse "kiertämään" komplementin $\complement D$ pisteitä. Tätä viimeistä näkökulmaa tutkitaan seuraavissa luvuissa.

8. Tien kierrosluku

Olkoon $\gamma(t) := e^{it}$ kaikille $t \in [0, 2\pi]$. Esimerkissä 6.7 huomattiin, että

$$\int_\gamma \frac{1}{z} = 2\pi i. \tag{8.1}$$

Ei ole sattumaa, että integraalin arvo on i-kertainen 1-säteisen ympyrän kehän pituus. Tämä ei kuitenkaan johdu siitä, että γ^* on ympyrä. Nimittäin, kun γ on mielivaltainen Jordanin tie, jolle $0 \in I(\gamma)$ ja $r > 0$ on valittu siten, että $B(0, r) \subset I(\gamma)$, niin lemman 5.12 (tai lauseen 7.11) nojalla

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i. \tag{8.2}$$

Lisäksi, kun merkitään $z = (x, y)$, niin

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_\gamma \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\vec{s} + i \int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\vec{s},$$

ja tämän integraalin reaaliosa häviää, koska kentälle

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

on potentiaalifunktio $(x, y) \mapsto \log\sqrt{x^2 + y^2}$ joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Täten on aihetta tutkia kentän

$$F(x, y) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

tieintegraaleja yli suljettujen teiden. Aloitetaan konstruoimalla kentälle F potentiaali joukkoon $D := \mathbb{C} \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Yleisesti ottaen, kun $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin pisteen z argumentti (eli napakulma välillä $[0, 2\pi)$) saadaan määritettyä arkustangentin avulla. Jos $x, y > 0$, niin asetetaan

$$g(z) := \arctan(y/x) = \operatorname{Arg}(z).$$

Tämä funktio voidaan laajentaa kaikkiin tason neljänneksiin. Tässä on otettava huomioon, että arkustangentti on pariton funktio (origon suhteen), ja

$\arctan(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$. Merkitään

$$\begin{aligned} N_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}, \\ N_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y > 0\}, \\ N_3 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y < 0\}, \text{ sekä} \\ N_4 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y < 0\}. \end{aligned}$$

Asetetaan

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } y = 0, x > 0, \\ \arctan(y/x), & \text{kun} (x,y) \in N_1, \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0, y > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & \text{kun } (x,y) \in N_2, \\ \pi, & \text{kun } y = 0, x < 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & \text{kun } (x,y) \in N_3, \\ 3\pi/2, & \text{kun } x = 0, y < 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi, & \text{kun } (x,y) \in N_4. \end{cases}$$

On helppo nähdä, että g on jatkuva funktio kaikkialla paitsi positiivisella reaaliakselilla: jos esimerkiksi pistettä $3 \in \mathbb{R}$ lähestytään "alatasosta", niin funktion g arvot lähestyvät lukua $2\pi \neq g(3) = 0$. Tunnetusti

$$\frac{d}{ds}\arctan(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

joten joukoissa N_1, N_2, N_3 ja N_4 funktion g x-osittaisderivaatta on

$$\frac{\partial \arctan(y/x)}{\partial x} = \frac{1}{(y^2/x^2)+1} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \tag{8.3}$$

ja y-osittaisderivaatta puolestaan

$$\frac{\partial \arctan(y/x)}{\partial y} = \frac{1}{(y^2/x^2)+1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{8.4}$$

Nämä osittaisderivaatat käyttäytyvät vastaavasti myös akseleilla (positiivista reaaliakselia lukuun ottamatta). Esimerkiksi pisteessä $(0, y)$, $y > 0$, saadaan x-osittaisderivaatalle toispuoleinen arvo

$$\lim_{h \to 0,\, h > 0} \frac{g(h,y) - g(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0,\, h > 0} \frac{\arctan(y/h) - \pi/2}{h} = -\frac{1}{y},$$

mikä voidaan osoittaa l'Hospitalin säännöllä. Huomaa siis, että

$$-\frac{1}{y} = \frac{-y}{0^2+y^2}.$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että yhtälöt (8.3) ja (8.4) antavat funktion g

osittaisderivaatat kaikkialla joukossa $D = \mathbb{C} \setminus \{(x,0) \,|\, x \geq 0\}$, joten $g = \text{Arg}$ on kentän F potentiaali (joukossa D). Lisäksi lauseen 6.3 avulla voidaan osoittaa, että funktio

$$l(x,y) := \log|(x,y)| + ig(x,y) = \log|z| + i\text{Arg}(z)$$

on funktion

$$k(x,y) := \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$$

primitiivi joukossa D.

Huomautus 8.1. Itse asiassa, kun $z = (x,y)$, niin $e^{l(z)} = |z|(\cos(\text{Arg}(z)) + i\sin(\text{Arg}(z))) = z$. Lisäksi $l(x) = \log(x)$ kaikille $x > 0$, eli l on reaalisen logaritmifunktion laajennus joukkoon $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Koska g ei ole jatkuva positiivisella reaaliakselilla, niin erityisesti l ei voi derivoitua (kompleksisesti) positiivisella reaaliakselilla — tästä johtuen l on funktion $z \mapsto 1/z$ primitiivi ainoastaan joukossa D, eli tasossa, josta on poistettu kaikki epänegatiiviset reaaliluvut. Toisaalta, tasosta voidaan poistaa myös mikä tahansa toinen origon sisältävä puolisuora S, jolloin napakulma rajataan jollekin toiselle puoliavoimelle, 2π-mittaiselle välille. Esimerkiksi, jos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, niin napakulma voidaan rajata välille $(-\pi, \pi]$. Huomaa, että napakulmafunktio ei ole jatkuva joukossa S. Lisäksi kullekin tällaiselle puolisuoralle S pätee, että joukkoon $\mathbb{C} \setminus S$ voidaan määritellä derivoituva kompleksinen logaritmi — niin kutsuttu *logaritmin haara*, mistä kuvaus l on yksi esimerkki. Katso myös [1, s.120–121] sekä [1, s.67, harjoitus 1].

* * *

Asetetaan nyt suljettu tie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lauseen 7.5 nojalla on olemassa välin $[0,1]$ jako $P = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ (missä $a_0 = 0$ ja $a_n = 1$) sekä avoimien kiekkojen kokoelma $H = \{B_0, B_1, ..., B_n\}$ siten, että $B \in H \Rightarrow 0 \notin B$, sekä $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset B_j$ kaikille $j \in \{0,1,2,...,n-1\}$. Kiekot B_j ovat muotoa

$$B_j = (\gamma(a_j), r)$$

kullekin $j \in \{0,1,...,n\}$, missä $r > 0$ on riittävän pieni luku. Nyt siis $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset B_j$ kaikille $j \in \{0,1,2,...,n-1\}$, ja kiekossa B_j kentälle F on lokaali potentiaali g_j (lauseen 6.9 nojalla). Itse asiassa funktio $g = \text{Arg}$ kelpaa kentän F potentiaaliksi jokaisessa kiekossa B_j, joka ei leikkaa epänegatiivista reaaliakselia L. Koska g on määritelty arkustangentin avulla, niin sen arvojen erotukset ovat tulkittavissa kulmien muutoksiksi. Oletetaan esimerkiksi, että $B_0 \cap L = \varnothing$. Nyt siis $\gamma([a_0, a_1]) \subset B_0$. Kun merkitään $\gamma_0 = \gamma|_{[a_0,a_1]}$, niin saadaan

$$\int_{\gamma_0} F \cdot d\vec{s} = g(\gamma(a_1)) - g(\gamma(a_0)),$$

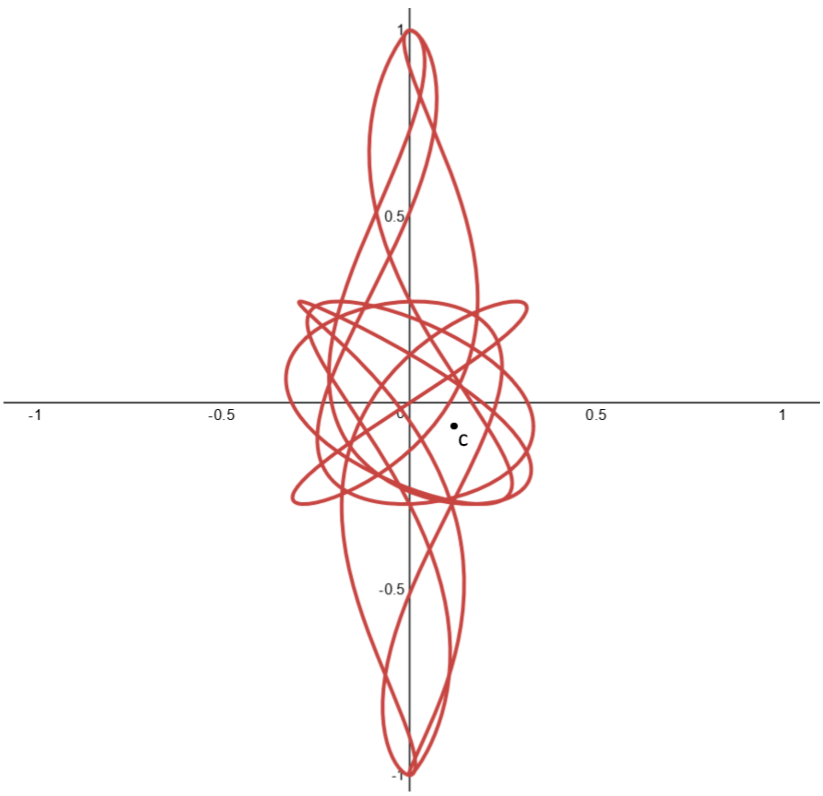
eli tämän integraalin arvo on vektoreiden $\gamma(a_1)$ ja $\gamma(a_0)$ välinen kulma. Toisaalta, jos kiekko B_0 leikkaa akselin L, niin potentiaaliksi kyseisessä kiekossa kelpaa jokin toinen napakulmafunktio g. Se on määriteltävä suhteessa joukkoon $\mathbb{C} \setminus S$, missä S on origon sisältävä puolisuora, joka ei leikkaa kiekkoa B_0 (yleistä määritelmää ei käydä tässä läpi). Täten integraali

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{s}$$

voidaan esittää summana tien γ kuvapisteiden välisten kulmien muutoksista. Koska γ on suljettu tie, niin (intuitiivisesti ottaen) näiden kulmien muutosten summan on oltava luvun 2π monikerta. Ilmiö on helppo visualisoida esimerkiksi silloin, kun γ^* on origokeskinen ympyrä. Toisaalta, olkoon

$$\eta(t) := \left(\frac{1}{3}\cos(23t/5)\sin(t), \cos(2t)\cos(t)\right) \tag{8.5}$$

kaikille $t \in [0, 4\pi]$. Nyt η on suljettu tie (sen alku– ja päätepiste on i). Kuvassa 14 on esitetty jälki η^*, sekä piste $c = (12 - 8i)/100$. Kiertääkö η pisteen c? Voidaanko tässä tapauksessa edes puhua kierrosten lukumäärästä? Käy ilmi, että voidaan: jos kenttää F "siirretään" vakiolla c, niin siirretyn kentän integraali yli tien η antaa kokonaisluvun. Todistetaan tämä ilmiö mahdollisimman yleisessä tapauksessa.



Kuva 14

Lause 8.2. *Olkoon γ suljettu tie, sekä $c = (a, b) \in \mathbb{C}$ piste, joka ei kuulu joukkoon γ^*. Lisäksi olkoot*

$$f(z) = \frac{1}{z-c} \text{ } ja \text{ } F(x,y) = \left(\frac{-y+b}{(x-a)^2+(y-b)^2}, \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2} \right).$$

Tällöin pätee

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f dz = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma F \cdot d\vec{s}, \tag{8.6}$$

missä $(1/2\pi i)\int_\gamma f dz$ *on kokonaisluku.*

Todistus. Merkitään $z = (x,y)$. Huomataan, että

$$\frac{1}{z-c} = \frac{\overline{z}-\overline{c}}{|z-c|^2} = \left(\frac{x-a}{|z-c|^2}, \frac{-y+b}{|z-c|^2} \right),$$

missä siis $|z-c|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$. Nyt saadaan

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma \left(\frac{x-a}{|z-c|^2}, \frac{y-b}{|z-c|^2} \right) \cdot d\vec{s} + i \int_\gamma \left(\frac{-y+b}{|z-c|^2}, \frac{x-a}{|z-c|^2} \right) \cdot d\vec{s}.$$

Kentälle

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{x-a}{|z-c|^2}, \frac{y-b}{|z-c|^2} \right)$$

on potentiaalifunktio $(x,y) \mapsto \log|z-c|$ joukossa $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, joten seurauksen 6.6 nojalla

$$\int_\gamma f dz = i \int_\gamma \left(\frac{-y+b}{|z-c|^2}, \frac{x-a}{|z-c|^2} \right) \cdot d\vec{s} = i \int_\gamma F \cdot d\vec{s}, \tag{8.7}$$

mistä seuraa väitteen yhtälö (8.6). Vielä on todistettava, että $(1/2\pi i)\int_\gamma f dz$ on kokonaisluku. Oletetusti γ on tie, joten olkoot $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ ne välin (a,b) pisteet, joissa γ' ei ole jatkuva. Lisäksi merkitään $a_0 := a$ ja $a_n := b$. Kun $t \in [a_k, a_{k+1}]$ jollekin $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, niin määritellään

$$H(t) := \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-c} ds + \int_{a_k}^{t} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-c} ds.$$

Nyt H on välillä $[a,b]$ jatkuva funktio. Lisäksi H on derivoituva kaikille $t \in (a,b) \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$. ja näissä pisteissä pätee $H'(t) = \gamma'(t)/(\gamma(t)-c)$. Täten saadaan

$$\frac{d}{dt} e^{-H(t)}(\gamma(t)-c) = e^{-H(t)}\gamma'(t) - H'(t)e^{-H(t)}(\gamma(t)-c) = 0.$$

Siis funktion $t \mapsto e^{-H(t)}(\gamma(t)-c)$ derivaatta on 0 kaikkialla välillä (a,b) paitsi pisteissä $a_1, ..., a_{n-1}$. Toisaalta H on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$, joten on olemassa vakio $d \in \mathbb{C}$ siten, että

$$e^{-H(t)}(\gamma(t)-c) = d$$

kaikille $t \in [a, b]$. Edelleen

$$\gamma(t) - c = de^{H(t)},$$

eli erityisesti

$$de^{H(a)} = \gamma(a) - c = \gamma(b) - c = de^{H(b)}.$$

Koska c ei kuulu joukkoon γ^*, niin $\gamma(a) - c \neq 0$, joten on oltava $d \neq 0$. Lisäksi $e^{H(a)} = e^0 = 1$. Siis

$$1 = e^{H(a)} = e^{H(b)}.$$

Täten on $k \in \mathbb{Z}$, jolle pätee

$$H(b) = 2\pi i k.$$

Toisaalta

$$H(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - c} ds = \int_\gamma f dz,$$

joten $(1/2\pi i) \int_\gamma f dz = k$, ja väite on todistettu ([1, s.134–135]).

□

Lauseen 8.2 nojalla on järkevää asettaa seuraava määritelmä:

Määritelmä 8.3. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin, $\gamma : [a, b] \to D$ suljettu tie sekä $c \in \mathbb{C}$ piste, jolle $c \notin \gamma^*$. Asetetaan

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - c} dz. \tag{8.8}$$

Lukua $n(\gamma, c)$ kutsutaan *tien γ kierrosluvuksi pisteen c suhteen.* Jos $n(\gamma, c) = 0$ kaikille $c \in \complement D$, niin sanotaan, että γ on *nollahomologinen (joukossa D).*

Huomaa, että lauseesta 8.2 saadaan vaihtoehtoinen tapa tien kierrosluvun määrittelemiseksi (kyseistä tapaa käytetään reaalianalyysissä; katso esim. [5, s.422–423]). Lisäksi huomaa, että kierrosluvun määritelmän nojalla suljetulle tielle γ ja pisteelle $c \notin \gamma^*$ pätee $n(\gamma, c) = -n(\overleftarrow{\gamma}, c)$. Seuraavat kierrosluvun ominaisuudet tulevat olemaan hyödyksi:

Lemma 8.4. *Olkoon γ suljettu tie. Tällöin kuvaus $N(c) := n(\gamma, c)$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Lisäksi, jos $A \subset (\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$ on yhtenäinen joukko, niin N on vakiokuvaus joukossa A. Erityisesti, jos A on rajoittamaton, niin $N = 0$ joukossa A.*

Todistus. Katso [1, s.135, lemma 1.2], [6, s.219] sekä [3, s.90]. □

Nyt nollahomotooppisuuden ja nollahomologisuuden välille saadaan seuraava yhteys:

Lemma 8.5. *Olkoon γ suljettu nollahomotooppinen tie avoimessa joukossa D. Tällöin γ on nollahomologinen.*

Todistus. Kun $c \in \complement D$, niin funktio $f(z) := 1/(z-c)$ on analyyttinen joukossa D. Täten seurauksen 7.13 perusteella $n(\gamma, c) = (1/2\pi i)\int_\gamma f dz = 0$. $\square$

Päteekö lemman 8.5 väite käänteiseen suuntaan? Vastaus on (ehkä hiukan yllättäen) kieltävä: tien nollahomologisuus ei implikoi sen nollahomotooppisuutta, minkä todistaminen on sangen vaikeaa. Esimerkissä 8.7 esitellään heuristinen vastaesimerkki. Huomattavasti täsmällisempi selvitys löytyy Kodairan teoksesta; katso [4, s.198, esimerkki 4.5] (Kodaira hyödyntää funktion *analyyttiseen jatkamiseen* liittyviä ilmiöitä).

Kuitenkin yhdesti yhtenäisyyden ja nollahomologisuuden välillä on seuraava ekvivalenssi:

Lause 8.6. *Joukko $D \subset \mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen jos ja vain jos jokainen suljettu tie $\gamma : [a, b] \to D$ on nollahomologinen.*

Todistus. Oletetaan ensin, että D on yhdesti yhtenäinen. Jos γ on suljettu tie joukossa D, niin tien γ nollahomologisuus seuraa välittömästi lemmasta 8.5. Käänteistä suuntaa ei todisteta tässä, koska se on huomattavasti vaikeampi. Ilmiö todistetaan monivaiheisesti esimerkiksi lähteissä [6, s.292, lause 13.11] sekä [7, s.151, lause 1]. Katso myös Ahlforsin esitys, joka perustuu yhdesti yhtenäisyyden vaihtoehtoiseen määritelmään: [10, s.139, lause 14]. $\square$

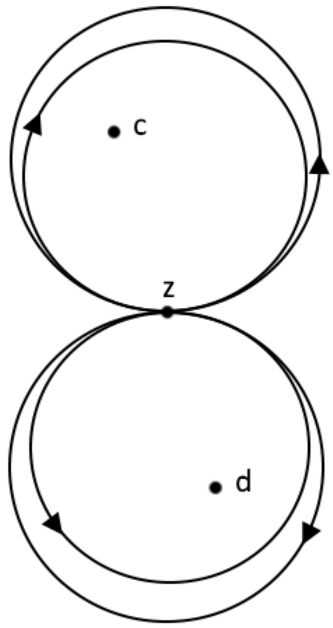
Esimerkki 8.7. Kuvassa 15 on esitetty suljetun tien γ jälki joukossa $\mathbb{C} \setminus \{c, d\}$ (tien alku– ja päätepiste on z). Aluksi γ piirtää sisemmistä ympyröistä alemman (vastapäivään), ja jatkaa piirtämällä sisemmistä ympyröistä ylemmän (myötäpäivään). Näin syntyy kahdeksikko. Seuraavaksi piirtyy ulommista ympyröistä ylempi (myötäpäivään), ja lopuksi alempi (vastapäivään). Nyt esimerkiksi $n(\gamma, c) = 0$, koska pisteen c kiertävät ympyrät ovat vastakkaisesti suunnistettuja (jolloin siis $n(\gamma, c) = 1 - 1$). Sama pätee pisteelle d, joten γ on nollahomologinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{c, d\}$. γ ei kuitenkaan ole nollahomotooppinen. Intuitiivisesti ottaen tämä johtuu siitä, että homotopia ei saa "katkaista" suljetun tien jälkeä. Koska c ja d ovat kahdeksikkojen "sisällä", homotopian olisi välttämättä kuvattava jokin jäljen γ^* piste komplementtiin $\{c, d\}$, mikä on ristiriita ([1, s.140, kuva 5]).

9. Cauchyn lause

Todistetaan nyt Cauchyn lauseen neljäs ja viimeinen versio. Se antaa lopulliset vastaukset johdannon kysymyksiin (0.3) ja (0.4).

Lause 9.1 (Cauchyn lause, neljäs versio). *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin, $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, $F : D \to \mathbb{R}^2$ lokaalisti integroituva vektorikenttä sekä kuvaukset $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ suljettuja teitä joukossa D. Oletetaan, että kaikille $c \in \complement D$ pätee*

$$\sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j, c) = 0. \tag{9.1}$$



KUVA 15

Tällöin

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f dz = 0, \tag{9.2}$$

sekä

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} F \cdot d\vec{s} = 0. \tag{9.3}$$

Huomaa, että lause 9.1 ei puhu vain yhdestä tiestä, vaan äärellisestä määrästä teitä, joiden kierroslukujen summa jokaisen joukon D komplementin pisteen häviää. Tämä käytös "periytyy" kuvauksille f ja F, mikä on perin hämmästyttävää — teiden γ_j yhteys komplementtiin $\complement D$ takaa tieintegraalien summautumisen nollaksi (vertaa ilmiötä Cauchyn lauseen ensimmäiseen versioon 5.11 sekä vyöhykkeen määritelmään 5.2). Lause 9.1 voidaan todistaa (tai ainakin perustella) käyttäen yllättävän yksinkertaista päättelyä, jossa hyödynnetään kierrosluvun geometrista merkitystä. Kompleksisen tieintegraalin häviäminen voidaan todista myös "analyyttisemmillä" tekniikoilla — esimerkiksi Conway käyttää niin kutsuttua Rungen lausetta. Karkeasti ottaen Conway approksimoi funktiota f käyttäen kuvausta $z \mapsto P(z)/Q(z)$, missä Q ja P ovat polynomifunktioita siten, että funktion Q nollakohdat jäävät komplementtiin $\complement D$ (katso [3, s.202]).

Rungen lause on kuitenkin työläs todistaa. Huomattavasti vähemmällä pääsee Rudin, jonka menetelmä on erityisen kiinnostava: hän osoittaa, että lauseen 9.1 oletuksin pätee

$$f(z_0)n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{9.4}$$

kaikille $z_0 \in D \setminus \gamma^*$. Yhtälö (9.4) on niin kutsuttu *Cauchyn globaali integraalikaava*. Jos yhtälö (9.4) on tosi, niin määritellään pisteelle $z_0 \in D \setminus \gamma^*$ funktio $F(z) := (z - z_0)f(z)$. Soveltamalla yhtälöä (9.4) analyyttiseen funktioon F saadaan

$$0 = F(z_0)n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f dz,$$

mistä seuraakin väitetty yhtälö (9.2). Täten riittäisi todistaa integraalikaava (9.4), mihin Rudin käyttää niin kutsuttua Moreran lausetta ([6, s.235–237]). Toisaalta kaava (9.4) saadaan myös lauseen 9.1 seurauksena — katso esimerkiksi Langin esitys [1, s.145, lause 2.5].

Todistetaan nyt lause 9.1 ”topologisella” taktiikalla. Merkintöjä on paljon, minkä lisäksi todistuksen rakenne voi olla hankala hahmottaa: annetun funktion analyyttisyyttä käytetään ainoastaan lokaalin primitiivin takaamiseen, minkä jälkeen väite saadaan todistettua kierrosluvun ominaisuuksilla (kentän F tapauksessa hyödynnetään lokaalin potentiaalin olemassaoloa). Yksityiskohtainen todistus käydään läpi ainoastaan yhtälölle (9.2), koska todistus reaalista integraalia koskevalle väitteelle on analoginen. Merkintöjen siistimiseksi otetaan käyttöön seuraava määritelmä:

Määritelmä 9.2. Olkoot $\gamma_1, ..., \gamma_p$ teitä joukossa $D \subset \mathbb{C}$. Kun $a_1, ..., a_p \in \mathbb{R}$, niin formaalia summaa $a_1\gamma_1 + ... + a_p\gamma_p = \sum_{j=1}^p a_j\gamma_j$ kutsutaan *ketjuksi*. Jos tiet $\gamma_1, ..., \gamma_p$ ovat suljettuja, niin niiden muodostamaa ketjua kutsutaan *sykliksi*. Olkoon nyt f jatkuva funktio joukossa D. Kun merkitään lyhyemmin $\gamma := a_1\gamma_1 + ... + a_p\gamma_p$, niin sanotaan, että *funktion f integraali yli ketjun γ* on luku

$$\int_\gamma f dz := a_1 \int_{\gamma_1} f dz + ... + a_p \int_{\gamma_p} f dz.$$

Jos $\delta = b_1\delta_1 + ... + b_m\delta_m$ on ketju, jolle pätee

$$\int_\delta f dz = \int_\gamma f dz,$$

niin kirjoitetaan $\delta = \gamma \,(\mathrm{mod}\, f)$. Olkoon nyt $c \in D$ siten, että $c \notin \gamma_j$ kaikille $j \in \{1, 2, .., p\}$. Jos γ on sykli, niin *syklin γ kierrosluku pisteen c suhteen* on

$$n(\gamma, c) := a_1 n(\gamma_1, c) + ... + a_p n(\gamma_p, c).$$

Koska (esimerkiksi) tielle γ_1 pätee

$$\int_{\gamma_1} f dz = -\int_{\overleftarrow{\gamma_1}} f dz,$$

niin voidaan kirjoittaa $a_1\gamma_1 = -a_1\overleftarrow{\gamma_1}$ (mod f). Jos $\int_{\gamma_1} f dz = 0$, niin merkitään $\gamma_1 = 0$ (mod f) (katso [10, s.137–138] ja [1, s.141–143]).

Lauseen 9.1 todistus. Merkitään $\gamma := \gamma_1 + ... + \gamma_m$, ja valitaan $\gamma_s : [a,b] \to D$, missä siis $s \in \{1, 2, ..., m\}$ on kiinnitetty. Nyt lemman 7.5 todistuksen nojalla on olemassa välin $[a,b]$ jako $P = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, (missä $a_0 = a$ ja $a_n = b$) sekä avoimien kiekkojen kokoelma $H = \{B_0, B_1, ..., B_n\}$ siten, että $B \in H \Rightarrow B \subset D$, sekä $\gamma_s([a_j, a_{j+1}]) \subset B_j$ kaikille $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Tutkitaan kiekkoa B_j kiinnitetylle $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Koska f on analyyttinen kiekossa B_j, niin lauseen 6.13 nojalla

$$\delta = 0 \,(\text{mod } f) \tag{9.5}$$

jokaiselle suljetulle tielle δ joukossa B_j. Olkoon κ_j vaaka– tai pystysuora jana, tai vaakasuoran ja pystysuoran janan yhdiste siten, että tien κ_j alkupiste on $\gamma_s(a_j)$ ja päätepiste puolestaan $\gamma_s(a_{j+1})$. Olkoon vielä R_j tien γ_s rajoittuma välille $[a_j, a_{j+1}]$. Tällöin tie $R_j * \overleftarrow{\kappa_j}$ on suljettu, joten päätellään

$$0 = R_j * \overleftarrow{\kappa_j} = R_j - \kappa_j \,(\text{mod } f),$$

mistä saadaan

$$R_j = \kappa_j \,(\text{mod } f). \tag{9.6}$$

Olkoon $\kappa_s := \kappa_0 * ... * \kappa_{n-1}$. Kun edeltävä tarkastelu suoritetaan kaikille $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, saadaan

$$\gamma_s = \sum_{j=0}^{n-1} R_j = \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j = \kappa_s \,(\text{mod } f).$$

Visuaalisesti ottaen tie γ_s on "korvattu kantikkaalla tiellä" κ_s, jonka jälki muodostuu vaaka– ja pystysuuntaisista janoista. Toistetaan tämä päättely kullekin indeksille $s \in \{1, 2, ..., m\}$, ja muodostetaan ketju $\kappa := \kappa_1 + ... + \kappa_m$. Nyt saadaan

$$\gamma = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s = \sum_{s=1}^{m} \kappa_s = \kappa \,(\text{mod } f). \tag{9.7}$$

Huomataan nyt, että funktiolle $g(z) := 1/(z-c)$, $c \in \complement D$, on lokaali primitiivi kaikkialla paitsi pisteessä c, joten yhtälö (9.7) toteutuu myös tälle funktiolle — eli täsmällisemmin

$$\gamma = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s = \sum_{s=1}^{m} \kappa_s = \kappa \,(\text{mod } g). \tag{9.8}$$

Toisaalta oletuksen (9.1) nojalla $\gamma = 0 \pmod g$, joten määritelmän 9.2 mukaan

$$n(\kappa, c) = 0 \tag{9.9}$$

kaikille $c \in \complement D$. Merkitään $\kappa_s^* = S_s$ kaikille $s \in \{1, 2, ..., m\}$, jolloin kukin S_s on vaaka– tai pystysuuntaisten (geometristen) janojen yhdiste. Täydennetään jokainen näistä janoista suoraksi. Kyseiset suorat jakavat tason $\mathbb{C}$ suljettuihin suorakulmioihin $A_1, A_2, ..., A_p$, sekä rajoittamattomiin osajoukkoihin. Valitaan jokaisesta suorakulmiosta A_r sisäpiste z_r siten, että z_r ei kuulu yhteenkään jäljistä $\gamma_1^*, ..., \gamma_m^*$. Merkitään

$$m_r := \sum_{s=1}^{m} n(\kappa_s, z_r) = n(\kappa, z_r)$$

kaikille $r \in \{1, 2, ..., p\}$. Kiinnitetään huomio niihin pisteisiin z_r, joille $m_r \neq 0$ — täten voidaan indeksointeja muuttamatta olettaa, että $m_r \neq 0$ kaikille $r \in \{1, 2, ..., p\}$.

Osoitetaan aluksi, että kukin suorakulmio A_r sisältyy joukkoon D. Suorakulmion A_r sisäpisteet muodostavat yhtenäisen joukon, joten lemman 8.4 nojalla kuvaus

$$N(c) := \sum_{s=1}^{m} n(\kappa_s, c)$$

on vakio joukossa $\mathrm{Int}(A_r)$. Täten, koska oletetusti $m_r \neq 0$, niin $N(c) \neq 0$ kaikille $c \in \mathrm{Int}(A_r)$. Näin ollen joukossa $\mathrm{Int}(A_r)$ ei voi olla komplementin $\complement D$ pisteitä (yhtälön (9.9) nojalla). Tästä seuraa $\mathrm{Int}(A_r) \subset D$. Olkoon sitten $z \in \partial A_r$. Jos $z \in \kappa_j^*$ jollekin $j \in \{1, 2, ..., m\}$, niin $z \in D$, ja asia on selvä. Toistaalta, jos $z \notin \kappa_j^*$ kaikille $j \in \{1, 2, ..., m\}$, niin kuvauksen N jatkuvuuden perusteella $N(z) \neq 0$ (sillä $N(c) \neq 0$ kaikille $c \in \mathrm{Int}(A_r)$). Täten yhtälön (9.9) nojalla on oltava $z \in D$, ja täten $A_r \subset D$.

Tavoitteena on todistaa yhtälö

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa_j = \sum_{r=1}^{p} m_r \partial A_r \pmod f, \tag{9.10}$$

missä (hiukan huolimattomalla) merkinnällä ∂A_r tarkoitetaan suorakulmion A_r positiivisesti suunnistetettua reunatietä. Edellä osoitettiin, että kukin A_r sisältyy joukkoon D, joten (esimerkiksi) Cauchyn lauseen kolmannen version 7.15 nojalla $\partial A_r = 0 \pmod f$ kaikille $r \in \{1, 2, ..., p\}$. Täten väitteen yhtälö (9.2) seuraa välittömästi yhtälöistä (9.7) ja (9.10).

Tehdään vastaoletus:

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa_j - \sum_{r=1}^{p} m_r \partial A_r \neq 0 \pmod f. \tag{9.11}$$

Epäyhtälön (9.11) vasemmalla puolella on muodollinen summa vaaka– ja pystysuorista janoista. Täten voidaan kirjoittaa

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa_j - \sum_{r=1}^{p} m_r \partial A_r = \sum_{j=1}^{l} h_j \sigma_j \pmod f, \tag{9.12}$$

missä luvut $h_1, h_2, ..., h_l$ ovat sopivia kokonaislukuja, sekä tiet $\sigma_1, ..., \sigma_l$ vaaka– ja pystysuuntaisia janoja. Niiden jäljet kuuluvat suorakulmioiden $A_1, ..., A_p$ reunoihin, minkä lisäksi niiden suunnistukset määräytyvät luonnollisesti suorakulmioiden $A_1, ..., A_p$ reunateiden suunnistuksista. Kun yhtälön (9.12) oikean puolen summasta ”irrotetaan” ensimmäinen termi, saadaan esitys

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa_j - \sum_{r=1}^{p} m_r \partial A_r = h_1 \sigma_1 + \sum_{j=2}^{l} h_j \sigma_j \pmod f. \tag{9.13}$$

Huomaa, että toki summasta olisi voitu irrottaa mikä tahansa muukin termi $h_j \sigma_j$. Todistetaan nyt, että $h_1 = 0$ (mistä induktiivisesti päätellen kaikki kertoimet h_j ovat nollia). Voidaan (esimerkiksi) olettaa, että A_1 on se suorakulmio, jonka eräs sivu on σ_1^*. Olkoon lisäksi $\tilde{A} \neq A_1$ tason osajoukko, jonka reuna sisältää janan σ_1^*. Tällainen joukko $\tilde{A}$ syntyi edellä tehdyssä tason jaossa, mutta $\tilde{A}$ ei välttämättä ole suorakulmio (katso kuva 16 — joukon $\tilde{A}$ yksi sivu on esitetty katkoviivalla, koska $\tilde{A}$ voi olla rajoittamaton). Kirjoitetaan yhtälö (9.13) muotoon

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa_j - \sum_{r=1}^{p} m_r \partial A_r - h_1 \sigma_1 = \sum_{j=2}^{l} h_j \sigma_j \pmod f. \tag{9.14}$$

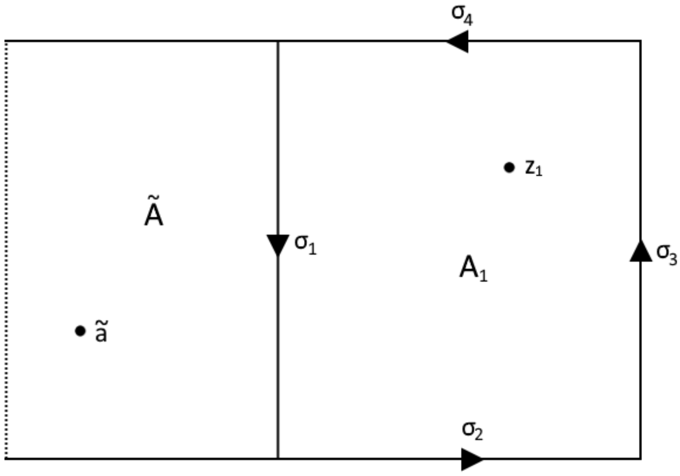
missä siis vain siirrettiin termiä $h_1 \sigma_1$. Oletetaan nyt, että suorakulmion A_1 muut kolme sivua ovat σ_2^*, σ_3^* ja σ_4^* (merkinnät valitaan näin selkeyden tähden). Yhtälön (9.14) oikea puoli voidaan kirjoittaa (funktion f suhteen) ketjuksi

$$h_1(\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) + \sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \sigma_j, \tag{9.15}$$

missä luvut $\tilde{h}_j$ ovat sopivia kokonaislukuja — eli kyseessä ovat kertoimien h_j ”korjaukset”, kun summasta irrotetaan h_1-kertaisina janat σ_2, σ_3 ja σ_4. Itse asiassa ainoat tarpeelliset muutokset kertoimiin ovat $h_2 \mapsto h_2 - h_1$, $h_3 \mapsto h_3 - h_1$ ja $h_4 \mapsto h_4 - h_1$. Kun esityksen (9.15) h_1-kertainen summa siirretään yhtälön (9.14) vasemmalle puolelle, termi $h_1 \sigma_1$ ”täydentyy” reunatieksi ∂A_1 kerrottuna vakiolla h_1 (suhteessa funktioon f). Näin saadaan yhtälö

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa_j - \sum_{r=1}^{p} m_r \partial A_r - h_1 \partial A_1 = \sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \sigma_j \pmod f. \tag{9.16}$$

Kaava (9.16) on todistuksen olennaisin vaihe. Olkoon nyt $\tilde{a}$ jokin joukon $\tilde{A}$ sisäpiste siten, että se ei sisälly joukkoon $\gamma_1^* \cup ... \cup \gamma_m^*$. Muistetaan myös, että $z_1 \notin (\gamma_1^* \cup ... \cup \gamma_m^*)$ on jokin suorakulmion A_1 sisäpiste (kuva 16).



KUVA 16

Määritellään

$$g_1(z) := \frac{1}{2\pi i(z - z_1)}$$

ja

$$\tilde{g}(z) := \frac{1}{2\pi i(z - \tilde{a})}.$$

Huomataan, että yhtälö (9.16) toteutuu myös funktioille g_1 ja $\tilde{g}$ (mikä johtuu siitä, että nämä funktiot ovat määriteltyjä kussakin joukkojen $\kappa_1^* \cup ... \cup \kappa_m^*$ ja $\gamma_1^* \cup ... \cup \gamma_m^*$ pisteessä). Kun yhtälössä (9.16) funktio f korvataan funktiolla g_1, saadaan (lukujen $m_1, ..., m_p$ määritelmän avulla) yhtälö

$$m_1 - m_1 - h_1 = \sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} g_1 dz. \tag{9.17}$$

Funktion $\tilde{g}$ käytöksessä on otettava huomioon pisteen $\tilde{a}$ sijainti. Oletetaan aluksi, että $\tilde{A}$ on tason rajoittamaton osajoukko, joka syntyi edellä muodostetussa tason jaossa. Nyt lemman 8.4 nojalla pätee $n(\kappa, \tilde{a}) = 0$. Täten, kun yhtälössä (9.16) funktio f korvataan funktiolla $\tilde{g}$, saadaan

$$0 - 0 - 0 = \sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} \tilde{g} dz. \tag{9.18}$$

Toisaalta on mahdollista, että $\tilde{A}$ on suorakulmio, mutta $\tilde{A} \notin \{A_1, ..., A_p\}$. Tällöin suorakulmioiden $A_1, ..., A_p$ valinnan nojalla $n(\kappa, \tilde{a}) = 0$. Jälleen yhtälöstä (9.16) saadaan

$$0 - 0 - 0 = \sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} \tilde{g} dz. \tag{9.19}$$

Kolmannessa tapauksessa $\tilde{A} = A_y$ jollekin $y \in \{1, 2, ..., p\}$. Nyt $\sum_{j=1}^{m} n(\kappa_j, \tilde{a}) =$

$m_y \neq 0$, joten saadaan

$$m_y - m_y - 0 = \sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} \tilde{g} dz. \tag{9.20}$$

Kiinnitetään huomio yhtälöiden (9.17), (9.18), (9.19) ja (9.20) oikeanpuoleisiin summiin. Olennaista on se, että kyseiset summat eivät sisällä integraalia yli janan σ_1. Funktion g_1 määritelmän mukaan luku

$$\sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} g_1 dz$$

on summa suljettujen teiden kierrosluvuista suhteessa pisteeseen z_1. Vastaavasti luku

$$\sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} \tilde{g} dz$$

on summa suljettujen teiden kierrosluvuista suhteessa pisteeseen $\tilde{a}$. Koska nämä summat eivät sisällä integraalia yli janan σ_1, niin summien integraalit lasketaan sellaisten teiden yli, joiden suhteen pisteet z_1 ja $\tilde{a}$ kuuluvat samaan yhtenäiseen tason osajoukkoon (sillä näiden pisteiden välinen jana ei leikkaa jälkiä $\sigma_2^*, ..., \sigma_l^*$). Täten lemman 8.4 perusteella

$$\sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} g_1 dz = \sum_{j=2}^{l} \tilde{h}_j \int_{\sigma_j} \tilde{g} dz.$$

Kun tämä tieto yhdistetään yhtälöihin (9.17), (9.18), (9.19) ja (9.20), saadaan

$$-h_1 = 0, \tag{9.21}$$

eli $h_1 = 0$, kuten haluttiin osoittaa. Kun tätä päättelyä sovelletaan toistuvasti yhtälöön (9.12), saadaan $0 = h_1 = h_2 = ... = h_l$, mistä seuraakin välitön ristiriita vastaoletuksen (9.11) kanssa. Täten yhtälö (9.10) on tosi, mistä seuraa väite (9.2) (katso [1, s.149–154] — Lang ei paneudu todistuksessaan yksityiskohtiin, mikä voi tehdä siitä hiukan vaikeaselkoisen). Yhtälö (9.3) voidaan todistaa vastaavalla päättelyllä, kun hyödynnetään kentän F lokaaleja potentiaaleja (joiden olemassaolon takaa lause 6.9). □

Loppusanat

Kuten tässä tutkielmassa on käynyt ilmi, ovat reaalinen ja kompleksinen tieintegraali monilla tavoin yhteydessä toisiinsa. Toisaalta integraalien käytös on eräänlainen "tienhaara" analyyttisen funktion ja lokaalisti integroituvan vektorikentän suhteessa: siinä missä lokaali integroituvuus vaatii yhden differentiaaliyhtälön (eli yhtälön (4.1)), niin analyyttisyys implikoi kaksi differentiaaliyhtälöä, eli Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Tältä pohjalta voisi olettaa, että analyyttisen funktion käytöksessä on jokin piirre, jolle ei löydy varsinaista analogiaa lokaalisti integroituvan vektorikentän ominaisuuksista. Näin todellakin on: kyseinen piirre on analyyttisen funktion potenssisarjaesitys. Nimittäin, Cauchyn integraalikaavassa (9.4) voidaan valita positiivisesti suunnistettu tie γ siten, että γ^* on ympyrä, minkä lisäksi $n(\gamma, z_0) = 1$. Tällöin kaava saa muodon

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz. \tag{9.22}$$

On syytä mainita, että yhtälö (9.22) voidaan johtaa myös lauseesta 5.6. Olkoon nyt s ympyrän γ^* keskipiste. Koska kaavan tieintegraali lasketaan kyseisen ympyrän yli, niin integraalin muuttujalle z pätee $|z_0 - s| < |z - s|$, eli erityisesti $|\frac{z_0-s}{z-s}| < 1$. Havaitaan, että

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0 - s}{z - s}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z_0-s}{z-s}} = \frac{z - s}{z - z_0},$$

joten

$$\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0 - s)^n}{(z - s)^{n+1}}.$$

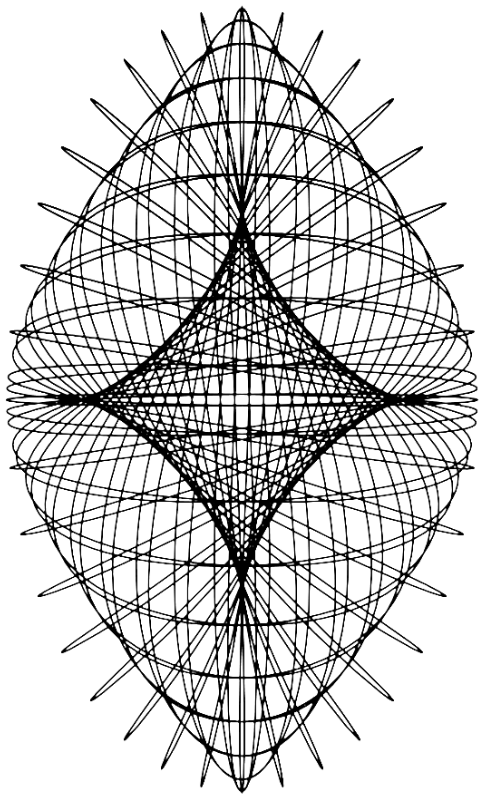
Sijoittamalla tämä tieto kaavaan (9.22) saadaan $f(z_0)$ esitettyä potenssisarjana pisteen s suhteen (kun oikeutetaan tarvittava äärettömän summauksen ja tieintegroinnin järjestyksen vaihto). Selkeä esitys tällaisista potenssisarjoista ja niiden ominaisuuksista löytyy esimerkiksi Langin teoksesta [1].

Vielä pari sanaa kirjallisuudesta: tässä tutkielmassa on nojauduttu useaan kertaan Langin kirjaan [1] — viimeksi näin tehtiin pari riviä ylempänä. Syy on pitkälti siinä, että kyseinen teos on erittäin selkeästi kirjoitettu (esimerkiksi Priestleyn vastaavantasoinen teos [9] tuntuu paikoin hiukan sekavalta). Jos kompleksianalyysiä haluaa harrastaa astetta syvällisemmin, niin kannattaa vilkaista kirjoja [4] sekä [7]. Kodaira käy asioita läpi erityisellä tarkkuudella, mikä luonnollisesti asettaa vaatimuksia lukijan kärsivällisyydelle. Narasimhanin teos vaikuttaa erittäin kattavalta — kirja sisältää Cauchyn lauseen version, jota tässä tutkielmassa ei käsitelty (katso [7, s.124]). Lopuksi on suositeltava Rudinin teosta [6], joka yhdistää reaali– ja kompleksianalyysin mittateoriaan. Aihepiirien sekoittumisesta huolimatta esitys on todella siisti ja helppolukuinen.

Koska kuvauksiin $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ liittyvä estetiikka vetoaa kirjoittajaan, niin kuvassa 17 on vielä esitetty tien

$$\gamma(t) := (12\cos(t)\cos(54t), 20\cos(36t)\sin(t))\ \forall t \in [0, 2\pi]$$

jälki ilman koordinaattiakseleita.



Kuva 17

Viitteet

[1] Serge Lang, *Complex Analysis*, neljäs painos, Springer, 1999.
[2] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, *Vector Calculus*, W.H. Freeman and Company, 1976.
[3] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1975.
[4] Kunihiko Kodaira, *Complex Analysis*, Cambridge University Press, 2007.
[5] Serge Lang, *Undergraduate Analysis*, toinen painos, Springer, 1997.
[6] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, toinen painos, McGraw-Hill, 1974.
[7] Raghavan Narasimhan, *Complex Analysis in One Variable*, Birkhäuser, 1985.
[8] R. Creighton Buck, *Advanced Calculus*, toinen painos, McGraw-Hill, 1965.
[9] H.A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*, toinen painos, Oxford, 2003.
[10] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, toinen painos, McGraw-Hill, 1966.