

Taksigeometria

Jutta Raatikainen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: J. Raatikainen, *Taksigeometria* (engl. *Taxigab geometry*), Matematiikan pro gradu -tutkielma, 77 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehdyttää lukija taksigeometriaan. Taksigeometria on yksi epäeuklidisista geometrioista, mutta se on hyvin lähellä euklidista geometriaa. Tutkielmassa tutustutaan tasogeometrian aksiomaattiseen järjestelmään ja perehdytään euklidisen tasogeometrian ja taksigeometrian yhtäläisyyksiin sekä eroavaisuuksiin. Lisäksi lukija saa käyttöönsä Geogebra -ohjelmistolla tehtyjä applikaatioita taksigeometriassa ja euklidisessa geometriassa. Kaikki tutkielman kuvat on tehty Geogebra -ohjelmistolla.

Taksigeometria on hyvin samankaltainen euklidisen tasogeometrian kanssa, mutta geometrioiden eroavaisuus syntyy metriikoiden määritelmän eroavaisuudesta. Metriikoiden eroavaisuutta voidaan esimerkiksi havainnollistaa kaupungin kartalla, jossa kaupungin kadut muodostavat ruudukon ja ruudukon keskellä on rakennuksia. Tällöin taksigeometrian etäisyys voidaan mitata vain katuja pitkin kulkemalla, kun taas euklidinen etäisyys saadaan ”lennunreittiä” pitkin. Taksigeometrian nimi tulee taksinkuljettajien reiteistä, joita kuljetaan katuja pitkin.

Tutkielman alussa tutustutaan taksigeometrian alkeisiin ja aksiomaattiseen järjestelmään. Euklidinen geometria toimii vertailtavana geometriana tutkielmassa. Aksiomien jälkeen tutustutaan kolmioon ja toisen asteen käyriin. Taksigeometriassa toisen asteen käyrät määritetään vastaavalla tavalla kuin euklidisessa geometriassa, mutta niiden ulkomuoto muuttuu huomattavasti. Tutkielmassa tutustutaan muun muassa ympyrään, ellipsiin, paraabeliin ja hyperbeliin. Lopussa käydään läpi myös isometriset siirrot, peilaukset ja kierrot taksigeometriassa.

Sisältö

I	Taksigeometrian alkeita ja aksioomajärjestelmä	3
1	Taksigeometrian alkeet	3
2	Hilbertin aksioomat	12
II	Taksigeometria	26
3	Kolmio	26
4	Toisen asteen käyrät	27
4.1	Pisteen etäisyys suorasta	27
4.2	Ympyrä	30
4.3	Ellipsi	35
4.4	Paraabeli	45
4.5	Hyperbeli	51
5	Isometria	57
5.1	Siirto eli translaatio	58
5.2	Peilaus eli reflektio	59
5.3	Kierto eli rotaatio	64
III	Geogebra	70
6	Geogebra yleisesti	70
7	Geogebbran sovelluksia taksigeometriassa	72

Johdanto

Matematiikan juuret ulottuvat pitkälle vuosituhansien taakse. Geometria on saanut nykyisen nimensä kreikan sanoista *geo*=maa ja *metrein*=mitata. Maanviljelys ja maatalous toivat tarpeen mitata maa-aloja. Yksi ensimmäisiä geometrisia ongelmia on ollut pinta-alojen lisäksi piin määrittäminen. Babylonialaiset onnistuivat jo vuonna 2000-1600 eaa määrittämään $\pi \approx 3$. Vuonna 1800 eaa egyptiläiset onnistuivat tarkentamaan piin arvon jo lähelle nykyistä arvoa. He arvioivat $\pi \approx (\frac{16}{2})^2 \approx 3,1604$. [1, s. 7]. Myöhemmin tässä tutkielmassa tutustutaan piin arvoon taksigeometrian näkökulmasta. Matematiikka on kehittynyt vuosisatojen kuluessa eri puolella maailmaa vaihtelevalla tavalla. Nykyistä todistusperusteista matematiikkaa kehittivät kreikkalaiset, jotka olivat edellä muita maailman matemaatikkoja todistaessaan lauseita järjestelmällisesti. Aiemmin matematiikka oli ei-tarkkoja kokeiluja ja arvauksia laskuina. Ensimmäisiä matemaatikkoja, jotka todistivat lauseita olivat muun muassa Thales (636-546 eaa), Pythagoras (582-496 eaa) ja Platon (427-347 eaa). Merkittävin Platonin oppilaista oli Eukleides. Hän kirjoitti 13-osaisen teoksen *Stoikheia*, joka käsitteli geometriaa ja lukuteoriaa sekä esitteli aksiomaattisen esitystavan. [1, s. 6]. Eukleides esitteli teoksessaan viisi perusolettamusta, eli aksiomaa, joita käytetään pohjana muille määritelmille. Eukleideen aksiomajärjestelmä on yksi merkittävimmistä matematiikan tuotoksista. Eukleideen aksiomajärjestelmä ei kuitenkaan täytä nyky-matematiikan standardeja ja monet matemaatikot ovatkin pyrkineet tekemään omat korjatut versionsa aksiomajärjestelmästä. Näistä yksi tunnetuin on David Hilbertin (1862-1943) tekemä järjestelmä, jota kutsutaan Hilbertin aksiomiksi. [1, s. 70]

Eukleideen aksiomista viides, paralleeliaksioma, on herättänyt paljon kysymyksiä ja sen riippumattomuutta on kyseenalaistettu. Euklidinen geometria on ollut pohjana tasogeometrialle viimeiset pari tuhatta vuotta, mutta 1800-luvulla kehittyi uusi geometrian osa-alue. Matemaatikot kyseenalaistivat paralleeliaksioman voimassolon, joka synnytti epäeuklidisen geometrian. Ensimmäisiä matemaatikkoja, jotka tutkivat ja julkaisivat epäeuklidista geometriaa olivat Carl Friedrich (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) ja Ivanovich Lobachevsky (1792-1856). Epäeuklidisia geometrioita ovat muun muassa hyperbolinen ja elliptinen geometria sekä tässä tutkielmassa käsiteltävä taksigeometria. [1, s. 177].

Taksigeometria on suhteellisen uusi geometria. Sen historia ei ulotu kauas, vaan sitä voidaan kuvailla nuoreksi geometriaksi ja jopa hiukan keskeneräiseksi. Taksigeometriaa ei käsitellä koulumatematiikassa toisin kuin euklidista geometriaa. Taksigeometria on nimensä mukaisesti kehitetty taksikuljettajan näkökulmasta, sillä se sopii erittäin hyvin suurkaupunkien tieverkostoon. Tutkielman lähteenä on käytetty Eugene Krausen teosta *Taxicab Geometry* [2]. Tässä tutkielmassa esitellään taksigeometrian ominaisuuksia ja sitä miten tutut geometrian käsitteet muuttuvat tässä geometriassa. Taksigeometria pohjautuu vahvasti euklidiseen geometriaan ja tutkielmassa käsitellään euklidista geometriaa taksigeometrian ohella. Tullaan huomaamaan, että Hilbertin aksiomat pätevät myös taksigeometriassa lukuunottamatta sivu-kulma-sivu-sääntöä (aksioma (H13)). Aksiomajärjestelmään tutustuessa käytetään lähteenä Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään teosta *Geometria* [5]. Tutkielman ensimmäisessä osassa tutustutaan taksigeometrian alkeisiin ja Hilbertin aksiomiin.

Tullaan huomaamaan, että ainoa eroavaisuus, mikä erottaa taksigeometrian ja euklidisen tasogeometrian toisistaan, on etäisyyden määrittely. Tämä pieni muutos määrittelyssä muuttaa geometrian aivan erinäköiseksi. Tutut geometrian muodot, eivät ole enää totutun näköisiä.

Tutkielman toisessa osassa tutustutaan kolmioon, pisteen etäisyyteen suorasta ja toisen asteen käyriin. Aluksi tutustutaan lyhyesti kolmioon taksigeometriassa ja huomataan, että kolmion pinta-alan kaava eroaa taksigeometriassa ja euklidisessä geometriassa. Lisäksi käsitellään pisteen etäisyyttä suorasta taksigeometriassa ja osoitetaan, että etäisyys saadaan eri tavoin kuin euklidisessä geometriassa. Taksigeometrian ympyrän muoto osoitetaan määrittämällä suorat, joista ympyrä muodostuu. Pisteen etäisyys suorasta ja ellipsi käsitellään Petrovicin, Malesevicin, Banjacin ja Obradovicin artikkelin *Geometry of some Taxicab Curves* [15] pohjalta. Toisessa osassa käsitellään näiden lisäksi taksigeometrian paraabeli ja hyperbeli. Paraabelia käsitellään Moserin ja Kramerin artikkelin *Lines on Parabolas in Taxicab Geometry* [11] pohjalta ja hyperbelia Reynoldsin artikkelin *Taxicab Geometry* [9].

Toisen asteen käyrien jälkeen tutkielmassa tutustutaan taksigeometrian isometrisiin siirtoihin, peilauksiin ja kiertoihin. Isometria kappaleessa pohjateoksena on Kocayusufoglun ja Özdamarin artikkeli *Isometries of Taxicab Geometry* [16]. Osoitetaan, että taksigeometrian isometriat ovat yhteydessä euklidisen tasogeometrian isometrioihin. Viimeisenä tutkielmassa käsitellään Geogebra -ohjelmistoa. Lopussa on listattuna tutkielman tuloksia havainnollistavat itsetehdyt Geogebra -applikaatiot. Kaikki tutkielman kuvat ovat tehty Geogebra -applikaatiolla.

Osa I

Taksigeometrian alkeita ja aksioomajärjestelmä

1 Taksigeometrian alkeet

Tasogeometria jaotellaan usein euklidiseen geometriaan ja epäeuklidiseen geometriaan. Euklidinen tasogeometria on näistä tunnetumpi koulugeometria, johon arkikie- len puhe usein viittaa. Taksigeometria on uudempi ja vähemmän tunnettu geometria, josta ei löydy paljoakaan teoksia suomeksi. Englanninkielisiä artikkeleita puolestaan löytyy, mutta geometria ei silti ole kovin tunnettu. Taksigeometria on kuitenkin hy- vin käytännönläheinen geometria, sillä se sopii nyky-yhteiskunnan suurkaupunkeihin. Kuvitellaan esimerkiksi suurkaupunkia, jossa kadut ovat kohtisuorassa toisiaan kohti. Kadut muodostavat ruudukon, joita pitkin voidaan kulkea ja ruutujen sisälle jää ra- kennuksia. Rakennusten yli ei kuitenkaan pääse oikaisemaan. Taksigeometriassa koor- dinaatisto voidaan kuvitella tällaiseksi, missä etäisyys mitataan vain kuljettuja teitä pitkin. Nimensä mukaisesti tämä geometria siis sallii liikkumisen vain kaupungin ka- tuja pitkin, kuten taksikuljettajat, eikä rakennusten läpi, kuten tutumpi euklidinen geometria sallisi. Taksigeometriaa kutsutaan myös Manhanttan -geometriaksi, ky- seisen kaupungin tieverkoston ruudukkomaisuuden vuoksi. Päälähteenä on käytetty Eugene Krausen teosta *Taxicab Geometry* [2], joka esittelee taksigeometriaa käytän- nönläheisten tehtävien avulla.

Vaikka taksigeometria vaikuttaa yksinkertaiselta ja suoraviivaiselta, täytyy muis- taa, että tälläkin geometrialla on rajoitteensa. Jos geometriaa sovelletaan kaupungin kartan etäisyyksien laskemiseen, täytyy huomioda, ettei kaupungit useinkaan muis- tuta oletettua järjestelmällistä kaupunkikaavaa ja koordinaatistoa. Taksigeometrian idean ymmärtäminen ei vaadi laajaa matemaattista ymmärtämistä, joten sitä voi- daan soveltaa esimerkiksi lukiokoulutuksessa. Vaikka taksigeometria vaikuttaa yk- sinkertaistettuna helpohkolta, se tuo uudenlaisia näkökulmia tasogeometriaan. Eroa- vaisuus, joka muokkaa taksigeometrian täysin omaksi geometriakseen, on etäisyyden määritelmä. Tämä etäisyys määritellään eri tavoin kuin tutumpi euklidinen etäisyys.

Tutustutaan taksigeometrian metriikkaan ja verrataan sitä euklidisen geometrian metriikkaan. Oletetaan peruskäsite *piste* tunnetuiksi tason lukuparina, kuten eukli- disessa geometriassakin.

Määritelmä 1.1. Olkoot $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ pisteitä. Pisteiden A ja B välinen *taksietäisyys* on

$$d_t(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Metriikka d_t määrittää metrisen avaruuden (\mathbb{R}^2, d_t) *taksigeometrialle*.

Euklidisessa geometriassa kahden pisteen A ja B välinen etäisyys on

$$d_e(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Taksigeometria määritellään metriikan d_t määrittämässä metrisessä avaruudessa (\mathbb{R}^2, d_t) . Metriikka määräytyy seuraavien kolmen ominaisuuden avulla [3, s. 21]

Määritelmä 1.2. Kuvaus $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on metriikka, jos sillä on seuraavat ominaisuudet kaikilla $A, B, C \in \mathbb{R}^2$:

1. $d_t(A, B) = 0$, jos ja vain jos $A = B$.
2. $d_t(A, B) = d_t(B, A)$
3. $d_t(A, B) \leq d_t(A, C) + d_t(C, B)$ (kolmioepäyhtälö).

Lemma 1.3. *Taksigeometrian etäisyyden määräämä kuvaus d_t on metriikka.*

Todistus. Olkoot pisteet $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ siten, että $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$

1. " \Leftarrow " Oletetaan, että $A = B$, jolloin $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

$$\begin{aligned} d_t(A, B) &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \\ &= |a_1 - a_1| + |a_2 - a_2| \\ &= |0| + |0| \\ &= 0 \end{aligned}$$

- " \Rightarrow " Oletetaan, että $d_t(A, B) = 0$.

$$d_t(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = 0$$

Koska $|a_1 - b_1| \geq 0$ ja $|a_2 - b_2| \geq 0$ sekä kahden positiivisen luvun summa on nolla, niin saadaan

$$a_1 = b_1 \quad \text{ja} \quad a_2 = b_2$$

Jolloin

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2).$$

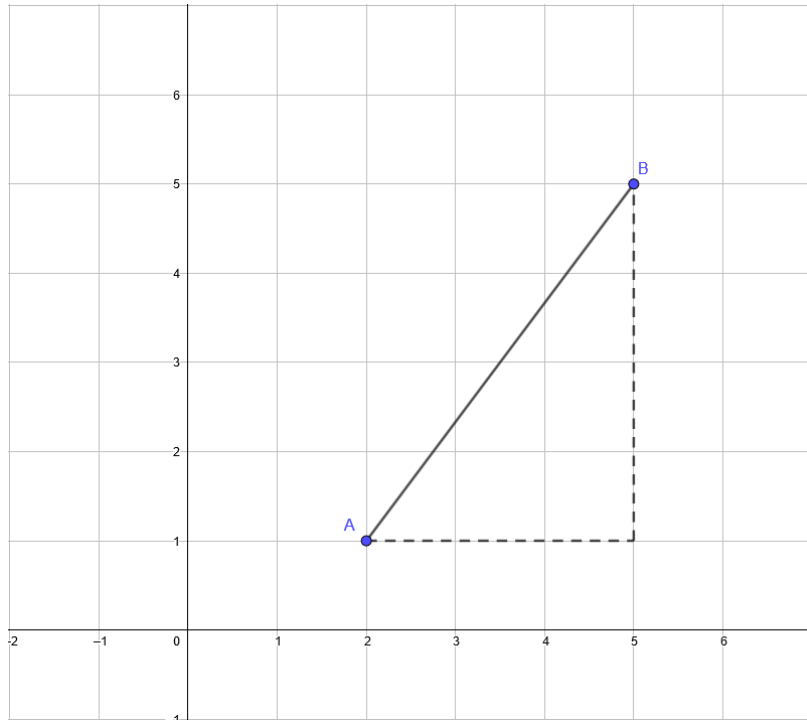
2. Itseisarvon laskusäännöillä saadaan:

$$\begin{aligned} d_t(A, B) &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \\ &= |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| \\ &= d_t(B, A) \end{aligned}$$

3. Kolmioepäyhtälön osoittaminen:

$$\begin{aligned}
 d_t(A, B) &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \\
 &= |a_1 - c_1 + c_1 - b_1| + |a_2 - c_2 + c_2 - b_2| \\
 &\leq |a_1 - c_1| + |c_1 - b_1| + |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2| \\
 &= |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |c_1 - b_1| + |c_2 - b_2| \\
 &= d_t(A, C) + d_t(C, B)
 \end{aligned}$$

□



Kuva 1.1: Yhtenäinen suora viiva esittää euklidista etäisyyttä ja katkoviivalla merkitty taksigeometrian etäisyyttä.

Taksietäisyys ja euklidinen etäisyys ovat verrannollisia keskenään. Määritetään lauseke, josta nähdään näiden geometrioiden etäisyyksien suhde. Kuitenkin ennen lausetta, määritellään suora taksigeometriassa. Tämä määritellään kuten euklidisen geometrian suora tasossa.

Määritelmä 1.4. Joukko $\ell = \{(x, y) + \lambda(\alpha, \beta) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ on *suora*, missä $(x, y), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Taksigeometrian ja euklidisen geometrian metriikoiden eroa voidaan havainnollistaa koordinaatistossa kuvan 1 mukaisesti tai geogebra applikaatiolla, joka löytyy

linkistä Pisteiden etäisyys - taksigeometria. Seuraava lause antaa yhteyden taksigeometrian ja euklidisen geometrian metriikoiden välille. Todistus pohjautuu osittain J.R Hansonin artikkelissa *A Visit to Taxicab Geometry* [4] esitettyyn lauseeseen.

Lause 1.5. *Olkoot pisteet $A, B \in \mathbb{R}^2$, jotka sijaitsevat suoralla ℓ . Olkoon suoran ℓ kulmakerroin m . Kahden pisteen etäisyys on*

1. $d_t(A, B) = d_e(A, B)$, jos pisteet sijaitsevat samalla vaaka- tai pystysuoralla.

2. $d_t = \left(\frac{1+\sqrt{m^2}}{\sqrt{m^2+1}}\right) \cdot d_e(A, B)$ muulloin.

Todistus. Olkoot pisteet $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$. Todistetaan lause osissa.

1. Olkoot pisteet A ja B samalla x -akselin suuntaisella suoralla, jolloin $a_2 = b_2$. Tällöin pisteiden euklidinen etäisyys on

$$d_e = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2} = |a_1 - b_1|$$

ja pisteiden etäisyys taksigeometriassa on

$$d_t = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = |a_1 - b_1|.$$

Siispä $d_t(A, B) = d_e(A, B)$ ja väite pätee. Vastaavasti päättely pätee, kun $a_1 = b_1$.

2. Olkoon suora ℓ , jolla pisteet A ja B sijaitsevat. Edellisen kohdan nojalla voidaan olettaa, että $a_1 \neq b_1$ ja $a_2 \neq b_2$. Tällöin suoran kulmakerroin on

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

Tämä on yhtäpitävää yhtälön $(b_2 - a_1)^2 = m^2(b_1 - a_1)^2$ kanssa. Käytetään saatua tulosta ja lasketaan pisteiden A ja B etäisyys euklidisessä geometriassa.

$$\begin{aligned} d_e(A, B) &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + m^2(b_1 - a_1)^2} \\ &= \sqrt{m^2 + 1} \sqrt{(b_1 - a_1)^2} \\ &= \sqrt{m^2 + 1} |b_1 - a_1|. \end{aligned}$$

Siispä

$$|b_1 - a_1| = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \cdot d_e(A, B).$$

Yhdistämällä saatu tulos euklidisen etäisyyden neliöön, saadaan

$$\begin{aligned}
|b_2 - a_2|^2 + |b_1 - a_1|^2 &= d_e^2(A, B) \\
|b_2 - a_2|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)^2 \cdot d_e^2(A, B) &= d_e^2(A, B) \\
|b_2 - a_2|^2 &= \left(1 - \frac{1}{m^2 + 1}\right) \cdot d_e^2(A, B) \\
|b_2 - a_2|^2 &= \left(\frac{m^2}{m^2 + 1}\right) \cdot d_e^2(A, B) \\
|b_2 - a_2| &= \left(\sqrt{\frac{m^2}{m^2 + 1}}\right) \cdot d_e(A, B).
\end{aligned}$$

Yhdistetään saadut tulokset taksigeometrian etäisyyden määritelmään ja saadaan

$$\begin{aligned}
d_t(A, B) &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \\
&= \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \cdot d_e(A, B) + \left(\sqrt{\frac{m^2}{m^2 + 1}}\right) \cdot d_e(A, B) \\
&= \left(\frac{1 + \sqrt{m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}\right) \cdot d_e(A, B).
\end{aligned}$$

□

Taksigeometrian etäisyys voidaan siis laskea euklidisen etäisyyden avulla. Koska

$$1 \leq \frac{1 + \sqrt{m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

niin taksigeometrian etäisyys on aina suurempaa tai yhtäsuurta kuin euklidisen geometrian etäisyys.

Seuraus 1.6. *Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $d_e(A, B) \leq d_t(A, B)$.*

Molemmat geometriat täyttävät metriikan ehdot ja muodostavat metriset avaruudet. Taksigeometrian metriikan määräämä metrinen avaruus (\mathbb{R}^2, d_t) on myös normiavaruuksien nojalla pätee $\|\lambda A\|_t = |\lambda| \|A\|_t$. Vastaavasti euklidisessä tasossa euklidinen etäisyys määrää normin $\|A - B\|_e = d_e(A, B)$, jolle pätee vastaava ominaisuus $\|\lambda A\|_e = |\lambda| \|A\|_e$. [3, s. 17].

Etäisyyden määritelmän muutos tuo mielenkiintoisia muutoksia tuttuihin geometrian käsitteisiin, kuten janaan, johon tutustutaan tämän kappaleen lopussa. Kuitenkin ennen janan määritelmää, tutustutaan reitin määritelmään ja sen pituuteen. Kahden pisteen välinen etäisyys voidaan määrittää reitin pituuden avulla.

Määritelmä 1.7. Kahden pisteen A ja B välinen *reitti* on jatkuva kuvaus $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä $\gamma(0) = A$ ja $\gamma(1) = B$. Reitin γ pituus on

$$\ell(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n d_t(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) : 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1\right\}.$$

Taksigeometriassa kaikille reiteille pätee $d_t(A, B) \leq \ell(\gamma)$. Euklidisessa tasogeometriassa on vain yksi reitti, jolle pätee $d_e(A, B) = \ell(\gamma)$. Taksigeometriassa reittejä, joille pätee $d_t(A, B) = \ell(\gamma)$ on kuitenkin useampia.

Lause 1.8. *Olkoot pisteet $A, B \in \mathbb{R}^2$, $A \neq B$. Olkoon pisteiden A ja B välinen reitti γ , jolle $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ ja γ_1, γ_2 ovat monotonisia. Tällöin $\ell(\gamma) = d_t(A, B)$.*

Todistus. Voidaan olettaa, että $a_1 < b_1$ ja $a_2 < b_2$. Olkoon reitti $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä $\gamma(0) = A$ ja $\gamma(1) = B$, jolle $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ siten, että γ_1 ja γ_2 ovat monotonisia. Olkoot $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$. Lasketaan reitin pituus määritelmän nojalla:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_t(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) &= d_t(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + d_t(\gamma(t_2), \gamma(t_3)) + \dots + d_t(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)) \\ &= |\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)| + |\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)| + |\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_3)| \\ &\quad + |\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_3)| + \dots + |\gamma_1(t_{n-1}) - \gamma_1(t_n)| + |\gamma_2(t_{n-1}) - \gamma_2(t_n)| \\ &= |\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_n)| + |\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_n)| \\ &= |\gamma_1(0) - \gamma_1(1)| + |\gamma_2(0) - \gamma_2(1)| \\ &= d_t(\gamma(0), \gamma(1)) \\ &= d_t(A, B) \end{aligned}$$

Supremumin määritelmän nojalla tästä saadaan $\ell(\gamma) \leq d_t(A, B)$. Taksigeometriassa kaikille reiteille pätee myös $d_t(A, B) \leq \ell(\gamma)$, jolloin saadaan $d_t(A, B) = \ell(\gamma)$ ja väite pätee. \square

Euklidinen etäisyys $d_e(A, B)$ toteuttaa myös lemmän 1.3, ja kolmiepähätälön yhtäsuuruus on voimassa, kun piste C kuuluu pisteiden A ja B väliselle janalle. Eli $d_e(A, C) + d_e(C, B) = d_e(A, B)$ jos ja vain jos $C = (1-t)A + tB$, missä $0 \leq t \leq 1$. Taksigeometriassa kolmioepähätälön yhtäsuuruus ei tuota janaa vaan suorakulmion. Määritetään pisteiden A ja B muodostama suorakulmio.

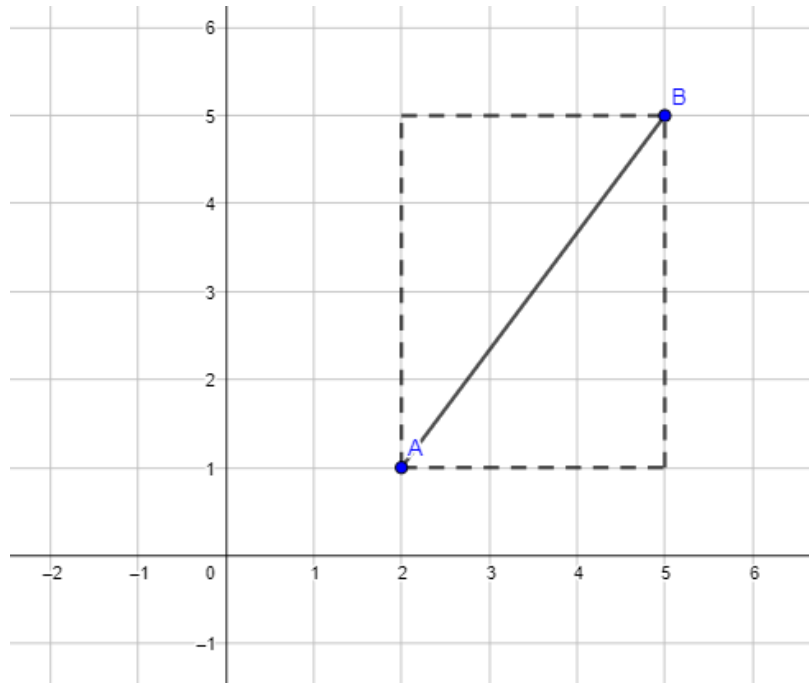
Määritelmä 1.9. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^2$ pisteitä. Suorakulmio $\square AB$ on

$$\square AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \min(a_1, b_1) \leq x \leq \max(a_1, b_1), \min(a_2, b_2) \leq y \leq \max(a_2, b_2)\}.$$

Huomautus 1.10. Jos pisteet A ja B sijatsevat samalla x - tai y -akselin suuntaisella suoralla, suorakulmiosta muodostuu jana AB . Vastaavasti, jos $A = B$, niin suorakulmiosta muodostuu piste.

Euklidisesta geometriasta poiketen piste C ei siis kuulu vain pisteiden A ja B väliselle janalle. Kuvasta 1.2 nähdään, että pisteiden A ja B välinen euklidinen etäisyys saadaan janan AB pituutena. Tämä on ainut reitti, jonka pituus on $d_e(A, B)$. Taksigeometriassa kahden pisteen välinen etäisyys saadaan useamman reitin avulla.

Seuraus 1.11. *Olkoot $A \neq B$ pisteitä. Tällöin on äärettömän monta reittiä γ , jolle $d_t(A, B) = \ell(\gamma)$.*



Kuva 1.2: Taksigeometriassa kahden pisteen välinen etäisyys saadaan esimerkiksi katkoviivalla merkittyjen reittien pituuksina.

Kuvasta 1.2 nähdään, että kahden pisteen A ja B etäisyys esimerkiksi pisteiden $(2, 5)$ ja $(5, 1)$ kautta ovat yhtäsuuret. Kun etsitään kaikki lyhimät reitit kahden pisteen välillä, saadaan muodostettua suorakulmio, jossa kaikki lauseen 1.8 mukaiset reitin pituudet ovat yhtäsuuria.

Lause 1.12. *Olkoot A, B ja C pisteitä. Tällöin pätee $d_t(A, B) = d_t(A, C) + d_t(C, B)$ jos ja vain jos C sisältyy suorakulmioon $\square AB$.*

Todistus. "⇒" Olkoot pisteet $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$. Voidaan olettaa, että $a_1 < b_1$ ja $a_2 < b_2$ (tai $a_2 > b_2$). Todistetaan lause, kun $a_1 < b_1$ ja $a_2 < b_2$. Olkoon $d_t(A, B) = d_t(A, C) + d_t(C, B)$. Näytetään, että tällöin piste C kuuluu suorakulmioon $\square AB$. Siispä

$$d_t(A, B) = d_t(A, C) + d_t(C, B)$$

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |c_1 - b_1| + |c_2 - b_2|.$$

Tehdään antiteesi, että piste C ei kuulu haluttuun suorakulmioon. Todistus käsitellään osissa, jossa suorakulmion $\square AB$ ulkopuolinen alue jaetaan kahdeksaan osaan. Osoitetaan jokaisessa osiossa suorakulmion ulkopuolella, että väite ei päde.

1. Oletetaan, että $c_1 < a_1$ ja $c_2 < a_2$, jolloin

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) &= (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) + (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2) \\ 2a_1 + 2a_2 &= 2c_1 + 2c_2 \\ a_1 + a_2 &= c_1 + c_2.\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $c_1 + c_2 < a_1 + a_2$, mutta saadaan $a_1 + a_2 = c_1 + c_2$ ja päädytään ristiriitaan. Jos valitaan $b_1 < c_1$ ja $b_2 < c_2$, saadaan yllä olevan kaltainen tulos $b_1 + b_2 = c_1 + c_2$. Tämä on jälleen ristiriidassa oletuksen kanssa.

2. Oletetaan, että $c_1 < a_1$ ja $b_2 > c_2$, jolloin

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) &= (a_1 - c_1) + (c_2 - a_2) + (b_1 - c_1) + (c_2 - b_2) \\ -2a_1 + 2b_2 &= -2c_1 + 2c_2 \\ c_1 + b_2 &= a_1 + c_2.\end{aligned}$$

Tämä on vastoin oletusta ja päädytään ristiriitaan. Vastaavasti voidaan näyttää ristiriita, kun $b_1 < c_1$ ja $c_2 < a_2$.

3. Oletetaan, että $c_1 < a_1$ ja $a_2 < c_2 < b_2$, jolloin

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) &= (a_1 - c_1) + (c_2 - a_2) + (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2) \\ 2a_1 &= 2c_1 \\ a_1 &= c_1.\end{aligned}$$

Tämä on vastoin oletusta ja saadaan ristiriita. Vastaavasti saadaan ristiriita alueissa $b_1 < c_1$ ja $a_2 < c_2 < b_2$, $a_1 < c_1 < b_1$ ja $c_2 < a_2$ sekä alueessa $a_1 < c_1 < b_1$ ja $b_2 < c_2$.

Koska antiteesi ei päde, täytyy olla $a_1 \leq c_1 \leq b_1$ ja $a_2 \leq c_2 \leq b_2$, eli piste C kuuluu suorakulmioon $\square AB$. Todistuksessa oletettiin, että $a_1 < b_1$ ja $a_2 < b_2$. Tapaus $a_1 < b_1$ ja $a_2 > b_2$ voidaan osoittaa vastaavasti.

" \Leftarrow " Olkoot pisteet $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$. Voidaan olettaa, että $a_1 \leq b_1$ ja $a_2 \leq b_2$. Valitaan piste $C = (c_1, c_2)$ siten, että piste C kuuluu suorakulmion AB sisään, ts. $a_1 \leq c_1 \leq b_1$ ja $a_2 \leq c_2 \leq b_2$. Lasketaan pisteiden A ja B etäisyys pisteen C kautta

$$d(A, C) + d(C, B) = |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |c_1 - b_1| + |c_2 - b_2|.$$

Kun $a_1 \leq c_1 \leq b_1$, niin saadaan

$$|a_1 - c_1| = c_1 - a_1 \quad \text{ja} \quad |c_1 - b_1| = b_1 - c_1.$$

Lisäksi tiedetään, että $a_2 \leq c_2 \leq b_2$, jolloin saadaan

$$|a_2 - c_2| = c_2 - a_2 \quad \text{ja} \quad |c_2 - b_2| = b_2 - c_2.$$

Yhdistetään nämä pisteiden A ja B etäisyyden määritelmään, jolloin

$$\begin{aligned} d(A, C) + d(C, B) &= |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |c_1 - b_1| + |c_2 - b_2| \\ &= c_1 - a_1 + c_2 - a_2 + b_1 - c_1 + b_2 - c_2 \\ &= -a_1 + b_1 - a_2 + b_2 \\ &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \\ &= d(A, B). \end{aligned}$$

Pisteiden A ja B etäisyys voidaan siis laskea mielivaltaisen pisteen C kautta, kun piste C kuuluu suorakulmion $\square AB$ sisälle. Todistus lasketaan vastaavasti, kun $a_1 < b_1$ ja $b_2 \leq a_2$. \square

Seuraus 1.13. *Kahden eri pisteen välillä määritetyt lyhyimmät reitit muodostavat suorakulmion pisteiden välille.*

Euklidisessa geometriassa jana määritellään kahden pisteen minimietäisyyden avulla. Taksigeometriassa janan määritelmä ei ole aivan näin yksinkertainen. Taksigeometriassa janoja, eli minimireittejä, löytyy useita. Siispä yksikäsitteistä janaa ei ole olemassa. Jana voidaan kuitenkin määritellä kuten euklidisessa geometriassa ”suorimpana” reittinä kahden pisteen välillä.

Määritelmä 1.14. Olkoon taksigeometrian *jana* euklidisen geometrian määrittämä jana

$$AB = \{(1 - t)A + tB : t \in [0, 1]\}.$$

Taksigeometrinen jana määritettiin vastaamaan euklidista janaa, jotta jana saadaan yksikäsitteisesti määriteltyä. Kuitenkin on huomattava, että euklidisen janan ja vastaavan taksigeometrian janan pituudet eivät ole aina yhtä suurta. Näiden määritelmien avulla jatketaan taksigeometrian käsittelyä tutkielman toisessa osassa II Taksigeometria. Seuraavassa kappaleessa tutustutaan Hilbertin aksiomiin taksi- ja euklidisessa geometriassa.

2 Hilbertin aksioomat

Tässä kappaleessa esitetään Hilbertin aksioomat tasogeometrialle ja osoitetaan, että euklidinen tasogeometria ja taksigeometria toteuttavat nämä aksioomat ja muodostavat siten mallin tasogeometrialle. Tutustutaan lisäksi paralleeliaksiomaan. Oletetaan *piste* tunnetuksi tason lukuparina. Olemme tässä tapauksessa kiinnostuneita vain suorista pistejoukkoina. Euklidinen tasogeometria ja taksigeometria pohjautuvat koordinaattigeometriaan, jota käytetään tässä kappaleessa aksioomien mallinnuksessa. Tässä tutkielmassa esitellään aksioomat järjestyksessä ja aloitetaan Hilbertin kolmesta ensimmäisestä aksioomasta. Käsitellään aksioomia taksigeometrian ja euklidisen geometrian näkökulmista. Kaikki tässä kappaleessa esitetyt aksioomat noudattavat Hoken, Kahanpään ja Kuritun teosta *Geometria* [5]. Vastaavanlaiset aksioomajärjestelmät löytyvät myös teoksista [1] ja [17].

- (H1) Jos A ja B ovat eri pisteet, niin on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä pisteen A että B kautta.
- (H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.
- (H3) On olemassa kolme pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

Aksioomat (H1)-(H3) taksigeometriassa

Muistetaan, että koordinaattigeometriassa pisteet ovat muotoa $P = (x, y)$ ja suorat muotoa

$$\ell := \{(x, y) : (x, y) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbb{R} \text{ ja } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}\}.$$

Piste P kuuluu suoralle ℓ , jos $P \in \ell$. Käytetään pisteiden A ja B kautta kulkevalle suoralle merkintää \overleftrightarrow{AB} .

Osoitetaan, että aksioomat (H1) - (H3) pätevät koordinaattigeometriassa. Ensimmäisen aksiooman suora, joka kulkee kahden eri pisteen A ja B kautta, on tällöin joukko

$$\{A + \lambda(B - A) : \lambda \in \mathbb{R}^2\}.$$

Koska pisteet A ja B ovat eri pisteitä, niin $B - A \neq 0$. Piste A kuuluu suoralle, kun valitaan $\lambda = 0$. Samoin piste B kuuluu kyseiselle suoralle, kun valitaan $\lambda = 1$. Olkoon jokin toinen suora, johon pisteet A ja B myös kuuluvat. Olkoon tämä suora muotoa $\{(x, y) + \lambda(\alpha, \beta) : \lambda \in \mathbb{R}^2\}$, missä $(x, y), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin on olemassa kaksi muuttujaa λ_1 ja λ_2 siten, että $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Pisteet A ja B saadaan muotoon

$$A = (x, y) + \lambda_1(\alpha, \beta) \quad \text{ja} \quad B = (x, y) + \lambda_2(\alpha, \beta).$$

Jos olisi $\lambda_1 = \lambda_2$, niin pisteet A ja B olisivat samat. Oletetaan, että $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Ratkaistaan piste (x, y) ja saadaan

$$\begin{aligned}(x, y) &= A - \lambda_1(\alpha, \beta) \\ (x, y) &= B - \lambda_2(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä saadaan

$$\begin{aligned} A - \lambda_1(\alpha, \beta) &= B - \lambda_2(\alpha, \beta) \\ (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha, \beta) &= A - B \\ (\alpha, \beta) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(B - A) \end{aligned}$$

ja piste (x, y) on tällöin muotoa

$$(x, y) = A - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(B - A).$$

Tällöin alkuperäinen suora saadaan muotoon

$$\begin{aligned} (x, y) + \lambda(\alpha, \beta) &= A - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(B - A) + \lambda\left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(B - A)\right) \\ &= A + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(B - A). \end{aligned}$$

Koska kuvaus $\lambda \rightarrow (\lambda - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ on bijektio reaaliluvuilta reaaliluvuille, niin suorat ovat samat. On siis olemassa aksiooman (H1) mukaisesti kaksi eri pistettä, joiden kautta kulkee yksi ja vain yksi suora.

Aksiooma (H2) on ensimmäistä aksioomaa yksinkertaisempi näyttää, sillä pisteet A ja B saadaan edellisen kohdan mukaisesti arvoilla $\lambda = 0$ ja $\lambda = 1$. Siispä suoralla $\{(x, y) + \lambda(\alpha, \beta) : \lambda \in \mathbb{R}^2\}$ on ainakin kaksi pistettä. Kolmas aksiooma (H3) voidaan todentaa valitsemalla kolme pistettä $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$. Suora pisteiden $(0, 0)$ ja $(1, 0)$ kautta on muotoa $\{(0, 0) + \lambda((1, 0) - (0, 0)) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Piste $(0, 1)$ ei siis kuulu kyseiselle suoralle ja siten on olemassa kolme pistettä, jotka eivät kuulu samalle suoralle, eli (H3) pätee.

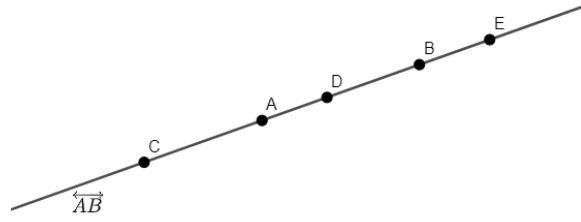
Seuraavia aksioomia (H4) - (H7) kutsutaan välissäoloaksioomiksi. Aksioomissa (H4) - (H6) käytetään merkintää $A * B * C$, joka tarkoittaa, että piste B sijaitsee pisteiden C ja A välissä.

(H4) Jos B on pisteiden A ja C välissä, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja B on pisteiden C ja A välissä.

(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla \overleftrightarrow{AB} on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.

(H6) Jos A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin yksi ja vain yksi seuraavista on voimassa:

$$A * B * C, \quad A * C * B \quad \text{tai} \quad B * A * C.$$

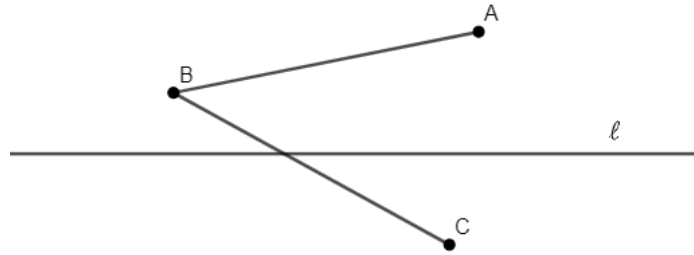


Kuva 2.1: Aksioma (H5).

Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin joukko AB on pisteiden välinen jana, joka on muotoa

$$AB := \{C \text{ on piste} \mid A * C * B \text{ tai } C = A \text{ tai } C = B\}.$$

Aksiomassa (H7) käytetään merkintää $AB\ell$, joka tarkoittaa, että pisteet A ja B sijaitsevat samalla puolella suoraa ℓ . Toisin sanoen pisteet ovat samalla puolella suoraa ℓ jos ja vain jos $A, B \notin \ell$ sekä $AB \cap \ell = \emptyset$. Samaan tapaan pisteet A ja B ovat eri puolilla suoraa ℓ , jos $A, B \notin \ell$ sekä $AB \cap \ell \neq \emptyset$.



Kuva 2.2: Pisteet A ja B sijaitsevat samalla puolella suoraa ℓ .

(H7) Olkoon ℓ suora sekä A, B ja C pisteitä, joiden kautta suora ℓ ei kulje. Tällöin on voimassa:

- (a) jos $AB\ell$ ja BCL , niin ACL
- (b) jos AlB ja $B\ell C$, niin ACL

Aksiomat (H4)-(H7) taksigeometriassa

Määritellään välissäolo koordinaattigeometriassa seuraavasti: Olkoot A, B ja $C \in \mathbb{R}^2$, $A \neq C$ ja $A * B * C$ jos ja vain jos on olemassa $0 < \lambda < 1$ siten, että $B = A + \lambda(C - A)$.

Hilbertin neljäs aksioma täyttää siis pisteiden välit pisteillä. Aksioma (H5) täydentää aksiomaa (H4) lisäämällä pisteitä niin, että suora \overleftrightarrow{AB} ei pääty pisteisiin A

ja B . Kuudes aksiooma varmistaa, ettei suorat voi olla kierroksia, sillä jos kaikki aksiooman (H6) ehdoista olisivat voimassa, olisi kyseessä ympyrä tai jokin muu kieppi. Viimeinen välissäoloaksiooma (H7) määrittää geometrian tasomaisuuden.



Kuva 2.3: Vasemmalla aksiooman (H6) suora ja kuvassa oikealla aksiooman (H6) mahdoton tapaus, kieppi.

Osoitetaan, että (H4) pätee koordinaattigeometriassa: Olkoot pisteet A, B ja C siten, että piste B sijaitsee pisteiden A ja C välissä. Nyt $A \neq C$ ja $B = A + t(C - A)$, missä $0 < t < 1$. Olkoon suora $\ell = \{A + \lambda(C - A)\}$, jossa piste A saadaan asettamalla $\lambda = 0$ ja piste C saadaan asettamalla $\lambda = 1$. Näin saadaan kolme eri pistettä A, B ja C suoralta ℓ . Voidaan kirjoittaa

$$B = A + t(C - A) = C - C + A - t(C - A) = C + (1 - t)(A - C),$$

missä $0 < 1 - t < 1$. Siispä piste B sijaitsee myös pisteiden C ja A välissä.

Osoitetaan seuraavaksi (H5). Olkoot A, B pisteitä siten, että $A \neq B$ ja suora $\ell = \{A + \lambda(B - A), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Pisteet C, D ja E saadaan valitsemalla arvot $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1/2$ ja $\lambda_3 = 2$, jolloin

$$C = A + \lambda_1(B - A)$$

$$D = A + \lambda_2(B - A)$$

$$E = A + \lambda_3(B - A).$$

1. Olkoon $\lambda_1 = -1$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} C &= A + t(B - A) = 2A - B \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = C + \frac{1}{2}(B - C) \end{aligned}$$

Eli piste A sijaitsee pisteiden C ja B välissä.

2. Olkoon $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, jolloin saadaan

$$D = A + \frac{1}{2}(B - A)$$

Tällöin piste D sijaitsee pisteiden A ja B välissä.

3. Olkoon $\lambda_3 = 2$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} E &= A + 2(B - A) = -A + 2B \\ \Leftrightarrow B &= \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E = A + \frac{1}{2}(E - A) \end{aligned}$$

Tällöin pisteet ovat aksiooman mukaisesti $C * A * B$, $A * D * B$ ja $B * A * E$.

Seuraavaksi osoitetaan aksiooma (H6). Olkoot A , B , ja C eri pisteitä samalla suoralla. Piste C sijaitsee siis suoralla AB ja siten $\{C = A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\}$. Koska pisteet A , B , ja C ovat eri pisteitä, niin $t \neq 0$ (muuten olisi $C = A$) ja $t \neq 1$ (muuten olisi $C = B$). Siispä täytyy olla joko $t < 0$, $0 < t < 1$ tai $t > 1$. Nämä arvot eivät voi olla yhtäaikaan voimassa. Jokainen muuttujan t arvo antaa eri pisteen suoralla ja tämän voi osoittaa kuten edellä korvaamalla luvut λ_1, λ_2 ja λ_3 luvulla t , jolle $t < 0$, $0 < t < 1$ ja $t > 1$ vastaavasti. Tällöin tapaukset $t < 0$, $0 < t < 1$ ja $t > 1$ vastaavat välissäoloja $C * A * B$, $A * B * C$ ja $A * B * C$ vastaavasti.

Ennen aksiooman (H7) todennusta tutkitaan pisteiden y -koordinaatteja, kun pisteet sijaitsevat samalla puolella suoraa. Olkoot $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ pisteitä. Tällöin pisteet A ja B ovat samalla puolella suoraa ℓ ($A, B \notin \ell$), jos ja vain jos niiden y -koordinaatit ovat samanmerkkiset. Näytetään tämä tekemällä antiteesi $a_2/b_2 < 0$. Valitaan kerroin λ siten, että

$$\lambda = \frac{a_2}{a_2 - b_2} = \frac{1}{1 - \frac{b_2}{a_2}}.$$

Tällöin $0 < \lambda < 1$. Valitaan piste C siten, että $C = A + \lambda(B - A)$. Tällöin C sijaitsee pisteiden A ja B välissä. Siispä pisteen C y -koordinaatiksi saadaan

$$c_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) = a_2 + \frac{a_2}{a_2 - b_2}(b_2 - a_2) = 0.$$

Tällöin olisi AlB ja päädytään ristiriitaan. Toisaalta, jos oletetaan, että $a_2/b_2 > 0$ ja tehdään antiteesi AlB , niin janalla AB on piste $C = A + \lambda(B - A)$, jolle pätee

$$c_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) = 0.$$

Tästä saadaan $\lambda = \frac{1}{1 - \frac{b_2}{a_2}}$. Siispä pisteiden A ja B y -koordinaattien suhde on $b_2/a_2 = 1 - 1/\lambda < 0$, mikä on ristiriidassa oletuksen $a_2/b_2 > 0$ kanssa.

Näin ollen pisteet A ja B ovat suoran ℓ ulkopuolella ja $AB\ell$ jos ja vain jos $a_2/b_2 > 0$. Käydään seuraavaksi läpi aksiooman (H7) kohdat, kun ℓ_0 on x -akseli:

- a) Olkoot pisteet A, B ja C , jotka eivät kuulu suoralle ℓ_0 . Oletetaan, että $AB\ell_0$ ja $BC\ell_0$. Tällöin a_2 ja b_2 ovat samanmerkkisiä. Vastaavasti b_2 ja c_2 ovat samanmerkkisiä, jolloin a_2 ja c_2 ovat samanmerkkisiä ja pätee $AC\ell_0$.
- b) Aksiooman toinen kohta saadaan vastaavalla tavalla. Jos on Al_0B ja $B\ell_0C$, niin a_2 ja b_2 ovat erimerkkisiä kuten myös b_2 ja c_2 ovat erimerkkisiä. Siispä a_2 ja c_2 ovat samanmerkkisiä ja $AC\ell_0$.

Laajennetaan tämä osoitus kaikille suorille ℓ . Olkoon jokin mielivaltainen suora ℓ ja suora ℓ_0 , joka on x -akseli. Olkoon kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{A}x + b$, missä \mathbb{A} on kääntyvä matriisi. Tällöin F on bijektio ja kuvaa suoran x -akselin suoraksi ℓ , ts.

$F(\ell_0) = \ell$. Tällöin käänteiskuvaus F^{-1} kuvaa suoran ℓ x -akseliksi, eli $F^{-1}(\ell) = \ell_0$. Näytetään, että kuvaukset F ja F^{-1} säilyttävät pisteiden välissäolon. Olkoon suora ℓ ja pisteet $A, B, C \in \ell$, jolloin $C = A + t(B - A)$, missä $t \in [0, 1]$. Tällöin pisteet $F(A), F(B), F(C) \in F(\ell)$ ja

$$F(C) = F(A + t(B - A)) = \mathbb{A}(A + t(B - A)) + b = F(A) + t\mathbb{A}(B - A) = F(A) + t(F(B) - F(A)).$$

Siispä kuvaus F säilyttää pisteen välissäolon ja pätee $A * B * C \Leftrightarrow F(A) * F(B) * F(C)$. Vastaavasti kuvaukselle F^{-1} pätee $A * B * C \Leftrightarrow F^{-1}(A) * F^{-1}(B) * F^{-1}(C)$. Tällöin pätee $AB\ell \Leftrightarrow F^{-1}(A)F^{-1}(B)\ell_0$. Käydään (H7) läpi osissa:

- a) Oletetaan, että $AB\ell$ ja $BC\ell$. Tällöin $F^{-1}(A)F^{-1}(B)\ell_0$ ja $F^{-1}(B)F^{-1}(C)\ell_0$. Pisteiden $F^{-1}(A)$ y -koordinaatti on yllä olevan nojalla samanmerkkinen kuin pisteen $F^{-1}(C)$ y -koordinaatti ja $F^{-1}(A)F^{-1}(C)\ell_0$. Käänteiskuvarauksen F^{-1} käänteiskuvaruksella saadaan siten $AC\ell$ ja väite pätee.
- b) Vastaavasti jos on AlB ja $B\ell C$, niin saadaan $F^{-1}(A)\ell_0F^{-1}(B)$ ja $F^{-1}(B)\ell_0F^{-1}(C)$. Pisteiden $F^{-1}(A)$ ja $F^{-1}(B)$ y -koordinaatit ovat erimerkkisiä, kuten myös pisteiden $F^{-1}(B)$ ja $F^{-1}(C)$ y -koordinaatit. Näin ollen pisteiden $F^{-1}(A)$ ja $F^{-1}(C)$ y -koordinaatit ovat samanmerkkisiä, ja pätee $F^{-1}(A)F^{-1}(C)\ell_0$. Jälleen käänteiskuvarauksen F^{-1} käänteiskuvaruksella saadaan $AC\ell$.

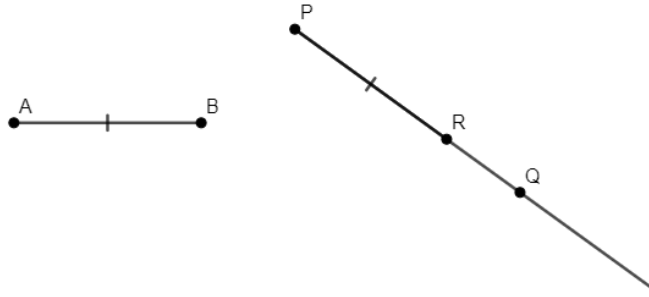
Seuraavaksi käsitellään aksioomat (H8) - (H12), joita kutsutaan yhtenevyysak-sioomiksi. Näissä aksioomissa käytämme janan yhtenevyydelle merkintää $AB \cong CD$. Puolisuora \overrightarrow{AB} määritetään pisteiden joukkona

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{C : A * B * C\}.$$

Aksioomissa (H8) ja (H11) käytetään puolisuoralle merkintää \overrightarrow{AB} .

Kulma on samasta pisteestä alkavan kahden puolisuoran rajaama tason osa. Kulma $\angle ABC$ koostuu siis kahdesta puolisuorasta \overrightarrow{BA} ja \overrightarrow{BC} , jotka eivät ole sama puolisuora eivätkä vastakkaiset. Kulman kärki on piste B ja kulman kyljet ovat puolisuorat \overrightarrow{BA} ja \overrightarrow{BC} . Kulman yhtenevyydelle käytetään merkintää $\angle ABC \cong \angle DEF$.

(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja \overrightarrow{PQ} on puolisuora, niin on olemassa yksi ja vain yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.



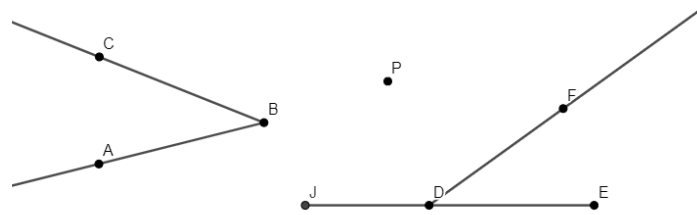
Kuva 2.4: Aksioma (H8).

(H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio eli:

- (a) $AB \cong AB$ (refleksiivisyys)
- (b) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (symmetrisyys)
- (c) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (transitiivisyys)

(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

(H11) Olkoon $\angle ABC$ kulma, \overrightarrow{DE} puolisuora ja P piste, joka ei sisälly suoraan \overrightarrow{DE} . Silloin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora \overrightarrow{DF} siten, että $FPD\overrightarrow{E}$ ja $\angle ABC \cong \angle FDE$.



Kuva 2.5: Aksioma (H11).

(H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Aksiomat (H8)-(H12) taksigeometriassa

Koordinaattigeometriassa janojen yhtenevyys voidaan määritellä pituuden avulla. Taksigeometriassa $AB \cong CD$ jos ja vain jos $\|A - B\|_t = \|C - D\|_t$. Euklidisessa

tasogeometriassa janojen yhtenevyys määritellään vastaavasti korvaamalla taksigeometriian normi euklidisella normilla, eli

$$AB \cong CD \quad \text{jos ja vain jos} \quad \|A - B\|_e = \|C - D\|_e.$$

Janojen yhtenevyyden määrittämä normi voidaan esittää euklidisena normina $d_e = \|A - B\|_e$ tai taksigeometriassa $d_t = \|A - B\|_t$. Kulmien yhtenevyys määritellään seuraavasti: $\angle ABC \cong \angle DEF$ jos ja vain jos

$$\frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e} = \frac{(E - D \mid F - D)}{\|E - D\|_e \|F - D\|_e}.$$

Aksiooman (H8) nojalla voidaan valita pisteet A, B, C ja D siten, että edellisen lausekkeen etäisyydet ovat yhtäsuurta kuin 1. Tällöin kulmien yhtenevyys määräytyy pelkästään sisätulosta.

Aksiooman (H8) nojalla jana AB voidaan siirtää puolisuoralle \overrightarrow{PQ} . Aksiooma (H9) sanoo, että janat, jotka ovat yhteneviä tietyn janan kanssa, ovat yhdenmuotoisia myös toistensa kanssa. Aksiooma (H10) mahdollistaa janojen summaamisen, koska yhtenevien janojen asettaminen peräkkäin antaa summajanan, jotka on jälleen yhteneviä.

Olkoon $A \neq B$, \overrightarrow{PQ} puolisuora ja piste $R \in \overrightarrow{PQ}$. Tällöin piste R on muotoa $R = P + \lambda(Q - P)$, missä $\lambda \geq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} PR \cong AB &\Leftrightarrow \|P - R\|_t = \|A - B\|_t \\ &\Leftrightarrow \|\lambda(Q - P)\|_t = \|A - B\|_t \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\|A - B\|_t}{\|Q - P\|_t} > 0 \end{aligned}$$

Näin ollen piste R on haluttu piste. Piste R on myös yksikäsitteinen, sillä jos on olemassa piste $R' \in \overrightarrow{PQ}$ ja sille pätee ehto $PR' \cong AB$, niin saadaan

$$R' = P + \frac{\|A - B\|_t}{\|Q - P\|_t}(Q - P).$$

Siispä $R' = R$ ja saatu piste on yksikäsitteinen.

Osoitetaan seuraavaksi janojen yhtenevyyden ekvivalenssirelaatio. Käsitellään aksiooman (H9) osat yksitellen.

- a) $\|A - B\|_t = \|A - B\|_t$, jolloin $AB \cong AB$.
- b) Kun $AB \cong CD$, niin pätee $\|A - B\|_t = \|C - D\|_t$, jolloin myös $\|C - D\|_t = \|A - B\|_t$ ja siten $CD \cong AB$.
- c) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $\|A - B\|_t = \|C - D\|_t$ ja $\|C - D\|_t = \|E - F\|_t$. Siispä $\|A - B\|_t = \|E - F\|_t$ ja myös $AB \cong EF$.

Janojen yhtenevyys on siten ekvivalenssirelaatio.

Aksiooman (H10) osoittamiseksi olkoot pisteet $A * B * C$ ja $A' * B' * C'$ siten, että niille pätee $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$. Tällöin pisteet B ja B' voidaan lausua muodossa

$$B = A + \lambda(C - A)$$

missä $0 < \lambda < 1$ ja

$$B' = A' + \lambda'(C' - A')$$

missä $0 < \lambda' < 1$ ja edelleen pätee

$$\begin{aligned} \|A - B\|_t &= \|A' - B'\|_t \text{ ja} \\ \|B - C\|_t &= \|B' - C'\|_t. \end{aligned}$$

Siten saadaan

$$\begin{aligned} \|A - B\|_t &= \|A' - B'\|_t \\ \|\lambda(C - A)\|_t &= \|\lambda'(C' - A')\|_t \\ \lambda \|C - A\|_t &= \lambda' \|C' - A'\|_t, \text{ koska } \lambda > 0 \text{ ja } \lambda' > 0. \end{aligned}$$

Voidaan myös nähdä, että

$$\begin{aligned} B - C &= A - \lambda(C - A) - C = (1 - \lambda)(A - C) \text{ ja} \\ B' - C' &= A' - \lambda'(C' - A') - C' = (1 - \lambda')(A' - C'). \end{aligned}$$

Koska $1 - \lambda > 0$ ja $1 - \lambda' > 0$, niin pätee $(1 - \lambda)(A - C) = (1 - \lambda')(A' - C')$. Siispä

$$\begin{aligned} \|A - B\|_t &= (1 - \lambda + \lambda)\|A - C\|_t \\ &= (1 - \lambda)\|A - C\|_t + \lambda\|A - C\|_t \\ &= (1 - \lambda')\|A' - C'\|_t + \lambda'\|A' - C'\|_t \\ &= (1 - \lambda' + \lambda')\|A' - C'\|_t \\ &= \|A' - C'\|_t. \end{aligned}$$

Siispä lopputulos on halutunlainen ja aksiooma (H10) toimii.

Olkoon $\angle ABC$ kulma, \overrightarrow{DE} puolisuora ja $P \notin \overrightarrow{DE}$. Käsitellään aksioomaa (H11) x -akselilla, jolloin kierroilla ja siirroilla saadaan mielivaltainen suora kuvattua x -akseliksi. Määritellään kuvaus $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x) = R(x) + B,$$

missä $R(x)$ on kierto kuvaus, jolloin kuvaus f_1 on bijektio. Huomataan, että piste $(0,0)$ kuvautuu pisteeksi B ja piste $(1,0)$ pisteeksi A . Lisäksi kuvauksella saadaan suora \overleftrightarrow{AB} kuvautumaan x -akseliksi ja puolisuora $\{(t,0) : t \leq 0\}$ puolisuoraksi \overrightarrow{BA} , kuten osoitettiin aksioman (H7) kohdalla. Käänteiskuvaus f_1^{-1} kuvaa yllämainitut toisiinpäin. Lisäksi kuvaus f_1 säilyttää pisteiden välissäolonkin kuten aksioman (H7) todennuksessa näytetään. Vastaavasti voidaan näyttää, että kulmien yhtenevydet säilyvät kuvauksissa f_1 ja f_1^{-1} . Koska

$$\begin{aligned} \|f_1(A) - f_1(B)\|^2 &= (f_1(A) - f_1(B) \mid f_1(A) - f_1(B)) \\ &= (R(A - B) \mid R(A - B)) \\ &= \|A - B\|^2, \end{aligned}$$

niin kuvaus f_1 säilyttää pisteiden etäisyyden. Lisäksi

$$(f_1(A) - f_1(B) \mid f_1(C) - f_1(B)) = (\mathbb{O}(A - B) \mid \mathbb{O}(C - B)) = (A - B \mid C - B),$$

jolloin yhdistämällä saadut tulokset saadaan kulmien yhtenevyys kuvauksessa f_1 :

$$\frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e} = \frac{(f_1(A) - f_1(B) \mid f_1(C) - f_1(B))}{\|f_1(A) - f_1(B)\|_e \|f_1(C) - f_1(B)\|_e}$$

Näin ollen kulmien yhtenevyys säilyy myös kuvauksessa f_1^{-1} . Euklidisessa tasogeometriassa kierrot ja siirrot ovat isometrioita, mutta taksigeometriassa tämä ei täysin päde. Siksi voimmekin olettaa aiempien aksiomien nojalla, että $\|A - B\|_t = \|C - B\|_t = \|E - F\|_t = \|E - G\|_t = 1$, jolloin kulmien yhtenevyys on riippuvainen vain sisätulosta. Ei ole siis väliä, todennetaanko kulmien yhtenevyyttä taksigeometriassa vai euklidisessa tasogeometriassa.

Olkoon nyt toinen kuvaus f_2 sellainen bijektio, joka kuvaa pisteet E, D ja P vastaavalla tavalla, kuin aiempi kuvaus f_1 kuvasi pisteet A, B ja C . Siispä piste $(0,0)$ kuvautuu pisteeksi D ja piste $(1,0)$ pisteeksi E . Lisäksi kuvaus f_2 kuvaa suoran \overleftrightarrow{ED} x -akseliksi, kuten haluttiin ja puolisuoran $\{(t,0) : t \leq 0\}$ puolisuoraksi \overrightarrow{DE} . Jälleen käänteiskuvaus f_2^{-1} kuvaa päinvastoin. Olkoon yhdistettykuvaus $g = f_2 \circ f_1^{-1}$ ja piste $g(C) = F$. Yhdistetyllä kuvauksella g saadaan

$$\begin{aligned} g(A) &= f_2(f_1^{-1}(A)) = f_2(1,0) = E \\ g(B) &= f_2(f_1^{-1}(B)) = f_2(0,0) = D \\ g(C) &= F. \end{aligned}$$

Kuvaukselle g pätee siis seuraavat ominaisuudet:

- i) Janalle AB pätee $AB \cong g(A)g(B)$.
- ii) Kulmalle $\angle ABC$ pätee $\angle ABC \cong \angle g(A)g(B)g(C)$.

Näiden ominaisuuksien nojalla saadaan

$$\angle ABC \cong \angle g(A)g(B)g(C) = \angle EDF$$

eli kulma $\angle FDE$ on yhtenevä kulman $\angle ABC$ kanssa. Lisäksi pisteet F ja P ovat samalla puolella suoraa \overleftrightarrow{DE} , koska aksiooman (H7) kuvauksen määrittelyjen nojalla pisteiden $f_1^{-1}(C)$ ja $f_1^{-1}(P)$ y -koordinaatit ovat positiivisia ja siten sijaitsevat samalla puolella x -akselia. Koska kuvaus f_2 säilyttää myös välissäolon, niin $g(C) = F$ ja P ovat samalla puolella suoraa \overleftrightarrow{DE} ja haluttu puolisuora on \overleftrightarrow{DF} .

Yksikäsitteisyys saadaan tarkastelemalla puolisuoraa \overleftrightarrow{DG} , jolle $\angle EDF \cong \angle EDG$ ja $GP \overleftrightarrow{DE}$. Siispä $G' = f_2^{-1}(G)$ on x -akselin yläpuolella ja $\angle IOF' \cong \angle IOG'$, missä $O = (0, 0)$, $I = (1, 0)$ ja $F' = f_2^{-1}(F)$ on x -akselin yläpuolella. Näytetään, että $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OF'}$. Oletetaan, että $G' = (g_1, g_2)$, $F' = (f_1, f_2)$ ja $\|G' - O\| = \|F' - O\|$. Koska asetettiin $\angle IOF' \cong \angle IOG'$, niin

$$(G - O \mid I - O) = (F - O \mid I - O) \Leftrightarrow (G' - F' \mid (1, 0)) = 0.$$

Tällöin $g_1 = f_1$. Koska $\|G'\| = \|F'\| = 1$, niin $g_2 = \pm f_2$. Kuitenkin molemmat y -koordinaatit ovat positiivisia ja siksi $g_2 = f_2$. Näin ollen $G' = F'$.

Käsitellään seuraavaksi aksiooma (H12). Tarkastellaan tätä osissa, kuten aksioomaa (H9):

a) Koska

$$\frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e} = \frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e}$$

niin $\angle ABC \cong \angle ABC$.

b) Kun $\angle ABC \cong \angle DEF$, niin

$$\frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e} = \frac{(D - E \mid F - E)}{\|D - E\|_e \|F - E\|_e},$$

jolloin myös

$$\frac{(D - E \mid F - E)}{\|D - E\|_e \|F - E\|_e} = \frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e}$$

ja tällöin $\angle DEF \cong \angle ABC$.

c) Jos $\angle ABC \cong \angle DEF$ ja $\angle DEF \cong \angle GHI$, niin

$$\frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e} = \frac{(D - E \mid F - E)}{\|D - E\|_e \|F - E\|_e},$$

ja

$$\frac{(D - E \mid F - E)}{\|D - E\|_e \|F - E\|_e} = \frac{(G - H \mid I - H)}{\|G - H\|_e \|I - H\|_e}.$$

Tällöin

$$\frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\|_e \|C - B\|_e} = \frac{(G - H \mid I - H)}{\|G - H\|_e \|I - H\|_e}$$

ja $\angle ABC \cong \angle GHI$.

Kaikki edeltävät aksioomat ovat voimassa sekä euklidisessa että taksigeometriassa. Ainoa poikkeavuus, joka geometrioilla on ilmennyt, on janojen yhtenevyyden määrittelmä. Seuraava aksiooma, sivu-kulma-sivu -sääntö, on poikkeustapaus taksigeometriassa. Euklidisessa geometriassa SKS-sääntö on voimassa, mutta taksigeometriassa se ei päde. Tutkitaan aksioomaa (H13) molemmissa geometrioissa. Aksioomassa (H13) käytetään kolmioiden yhtenevyydelle merkintää $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä, jos ja vain jos $AB \cong DE$, $BC \cong EF$, $AC \cong DF$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ja $\angle C \cong \angle F$. Seuraava aksiooma kuitenkin osoittaa, että kolmioiden yhtenevyys voidaan osoittaa myös yksinkertaisemmin.

(H13) (Sivu-kulma-sivu -sääntö, SKS) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\angle A \cong \angle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Osoitetaan ensin aksioomaa (H13) euklidisessa geometriassa. Olkoot kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$, joille pätee $\angle A \cong \angle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Silloin saadaan

$$\begin{aligned} \|A - B\|_e &= \|D - E\|_e, \\ \|C - B\|_e &= \|F - E\|_e, \\ \frac{(A - B|C - B)}{\|A - B\|_e\|C - B\|_e} &= \frac{(D - E|F - E)}{\|D - E\|_e\|F - E\|_e} \end{aligned}$$

ja yhdistämällä nämä saadaan

$$(A - B | C - B) = (D - E | F - E).$$

Nähdään, että

$$\begin{aligned} \|A - C\|_e^2 &= ([A - B] - [C - B] | [A - B] - [C - B]) \\ &= \|A - B\|_e^2 - 2(A - B|C - B) + \|C - B\|_e^2. \end{aligned}$$

Oletusten ja saadun tuloksen nojalla saadaan

$$\|A - C\|_e = \|D - F\|_e \quad \Leftrightarrow \quad AC \cong DF.$$

Kaikki kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ sivujanat ovat yhteneviä. Näytetään, että myöskin kulmien yhtenevyys pätee. Laskemalla saadaan

$$(B - A | C - A) = (B - A | [C - B] - [A - B]) = (B - A | C - B) - \|A - B\|_e^2.$$

Oletusten nojalla $\|A - B\|_e = \|D - E\|_e$, $\|C - B\|_e = \|F - E\|_e$ ja $(A - B|C - B) = (D - E|F - E)$ ja siten $(B - A|C - A) = (E - D|F - D)$. Lisäksi pätee $\|A - C\|_e = \|D - F\|_e$, jolloin

$$\frac{(B - A|C - A)}{\|B - A\|_e\|C - A\|_e} = \frac{(E - D|F - D)}{\|E - D\|_e\|F - D\|_e}.$$

Näin saatiin $\angle BAC \cong \angle EDF$. Samoin voidaan näyttää tapaus $\angle BCA \cong \angle EFD$. Siispä kaikki kulmat ja janat ovat yhteneviä ja tällöin myös kolmiot ovat yhteneviä.

Tutkitaan aksioomaa (H13) myös taksigeometriassa. Tarkastellaan kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$. Valitaan pisteet $A = D = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $E = (1, 1)$, $C = (0, 2)$ ja $F = (-1, 1)$. Koska $\|A - C\|_t = 2 = \|D - F\|_t$ ja $\|A - B\|_t = 2 = \|D - E\|_t$, niin pätee $AC \cong DF$ ja $AB \cong DE$. Lisäksi $\angle A \cong \angle D$, koska

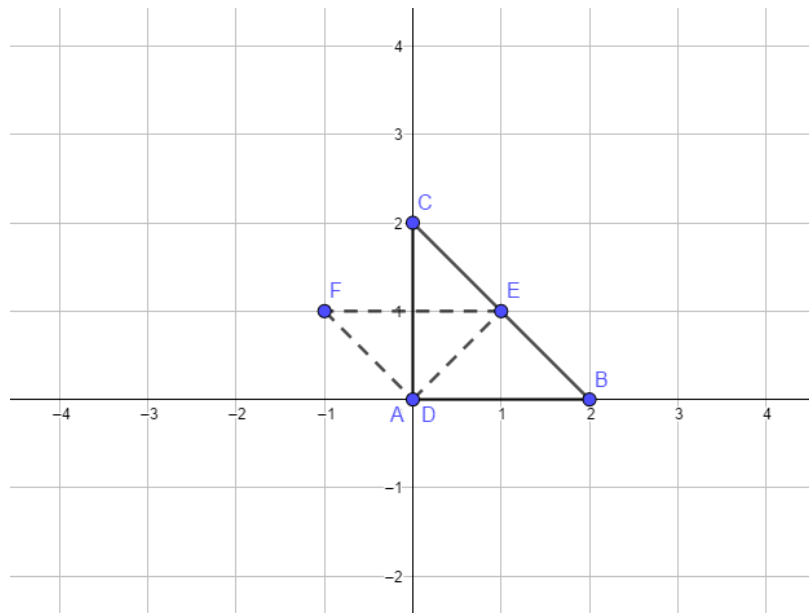
$$(B - A \mid C - A) = ((2, 0) \mid (0, 2)) = 0 \quad \text{ja}$$

$$(E - D \mid F - D) = ((1, 1) \mid (-1, 1)) = 0.$$

Pisteiden B ja C sekä pisteiden E ja F etäisyydet eivät kuitenkaan vastaa toisiaan, sillä

$$\|B - C\|_t = 4 \quad \text{ja} \quad \|E - F\|_t = 2.$$

Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ eivät siis ole yhteneviä ja aksiooma (H13) ei siis päde taksigeometriassa.



Kuva 2.6: Aksiooman (H13) esimerkkikolmiot taksigeometriassa.

Aksioomista ainut, joka erottelee taksigeometrian ja euklidisen geometrian, on siten SKS-sääntö. Muut Hilbertin aksioomat pätevät, koska ne eivät pohjaudu etäisyyden määritelmään. Koska etäisyyden määritelmä vaikuttaa yhtenevyyden määritelmään, niin vastaavasti myös kulmien yhtenevyyden määritelmä muuttuu. Tarkastellaan vielä paralleeliaksiomaa.

(PA) Olkoon ℓ suora ja P piste, joka ei ole suoralla ℓ . Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi suora m , joka kulkee pisteen P kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.

Aksioomat (H1)-(H13) antavat jo ehdot, jossa saadaan pisteen $P \notin \ell$ kautta kulkeva suora k , joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa [5, s. 39]. Paralleeliaksioma täydentää muiden aksioomien antamaa tulosta lisäämällä siihen yksikäsitteisyyden. On siis olemassa vain yksi suora, joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.

Oletetaan, että suora ℓ on x -akseli ja piste $P = (p_1, p_2)$ suoran ulkopuolelta. Merkitään pisteen P kautta kulkevaa suoraa k , joka on muotoa

$$k = \{P + \lambda(\alpha, \beta) : \lambda \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

Suorat leikkaavat jos ja vain jos on olemassa $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että

$$p_2 + \lambda\beta = 0.$$

Koska suora piste P ei kuulu suoralle ℓ , joka on x -akseli, niin $p_2 \neq 0$. Tällöin $\beta = 0$ ja suoran k kanssa yhdensuuntaiset suorat ovat muotoa

$$\{P + \lambda(\alpha, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $\alpha \neq 0$. Tällöin väite pätee. Todistuksessa oletettiin suora ℓ x -akseliksi. Jos ℓ ei ole x -akseli, niin voimme kierroilla ja siirroilla palauttaa tilanteen x -akselin tapaukseen. Tällöin väite seuraa, sillä kierrot ja siirrot säilyttävät suoran yhdensuuntaisuuden.

Näin on käsitelty kaikki Hilbertin aksioomat ja osoitettu, että euklidinen geometria ja taksigeometria ovat hyvin lähellä toisiaan, lukuunottamatta aksioomaa (H13), joka ei päde taksigeometriassa. Seuraavissa kappaleissa tutkitaan, kuinka tämä suhteellisen pieneltä vaikuttava ero, tuo suuria muutoksia geometriaan.

Osa II

Taksigeometria

3 Kolmio

Käsitellään alkuun lyhyesti kolmioita taksigeometriassa. Kuten euklidisessa geometriassakin, kolmio $\triangle ABC$ määritellään järjestettynä pistekolmikkona, jossa kaikki kolme pistettä A , B ja C eivät sijaitse samalla suoralla. Kolmion *kärkiä* ovat pisteet A , B ja C . Janoja AB , AC ja BC kutsutaan kolmion sivuiksi. Euklidisesta geometriasta tuttu kolmion pinta-alan kaava on $A = \frac{1}{2}kh$, missä k on kolmion kanta ja h korkeus. Koska janan pituus on taksigeometriassa yhtä suurta tai suurempaa kuin euklidisessa geometriassa, niin myös kolmion pinta-alan kaava kannan ja korkeuden avulla lausuttuna muuttuu. Tutustutaan kolmion pinta-alan kaavaan seuraavan lauseen avulla, joka pohjautuu Rüstem Kayan artikkeliin *Area Formula for Taxicab Triangles* [6].

Lause 3.1. *Olkoon k_t ja h_t annetun kolmion $\triangle ABC$ kanta ja korkeus taksigeometriassa. Jos kolmion kannan määräämän suoran kulmakerroin on m , niin kolmion $\triangle ABC$ pinta-ala on*

$$A = \frac{1 + m^2}{2(1 + |m|)^2} h_t k_t.$$

Jos kolmion kanta on koordinaattiakselin suuntainen, kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}h_t k_t$.

Todistus. Jos kolmion $\triangle ABC$ kanta on y -akselin kanssa yhdensuuntainen, niin kolmion kanta ja korkeusjana ovat taksigeometriassa ja euklidisessa geometriassa yhtä pitkiä. Tällöin kolmion pinta-alaksi saadaan euklidisestakin tuttu $A = \frac{1}{2}h_t k_t$. Jos kanta on x -akselin suuntainen, niin vastaavasti kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}h_t k_t$.

Oletetaan siis, että kolmion kannan kulmakerroin $m \neq 0$. Lauseen 1.5 nojalla euklidisen geometrian ja taksigeometrian metriikalle saadaan yhteys

$$d(A, B) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m|} \cdot d_t(A, B),$$

kun kulmakerroin

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Olkoon nyt k ja h kolmion $\triangle ABC$ kanta ja korkeus euklidisessa geometriassa ja vastaavasti k_t ja h_t taksigeometriassa. Kun kannan kulmakerroin on m , niin korkeusjanan kulmakerroin on $-1/m$. Näin saadaan korkeusjanalle ja kannalle yhteys taksigeomet-

rian euklidisen geometrian välille seuraavasti

$$k = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}k_t$$

$$h = \frac{\sqrt{1+(-\frac{1}{m})^2}}{1+|-\frac{1}{m}|}h_t = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}h_t.$$

Näistä tuloksista saadaan kolmion pinta-ala taksigeometriassa:

$$A = \frac{1}{2}kh = \frac{1+m^2}{2(1+|m|)^2}k_th_t.$$

□

Kolmioiden pinta-aloja voidaan tarkastella Geogebra applikaation avulla, joka löytyy linkistä Kolmion pinta-ala. Artikkeleita taksigeometrian kulmista ja trigonometriasta löytyy muun muassa Kevin Thompsonin ja Tevian Drayn artikkelista *Taxicab Angles and Trigonometry* [7] sekä Ruth Brisbinin ja Paul Artolan julkaisusta *Taxicab Trigonometry* [8].

4 Toisen asteen käyrät

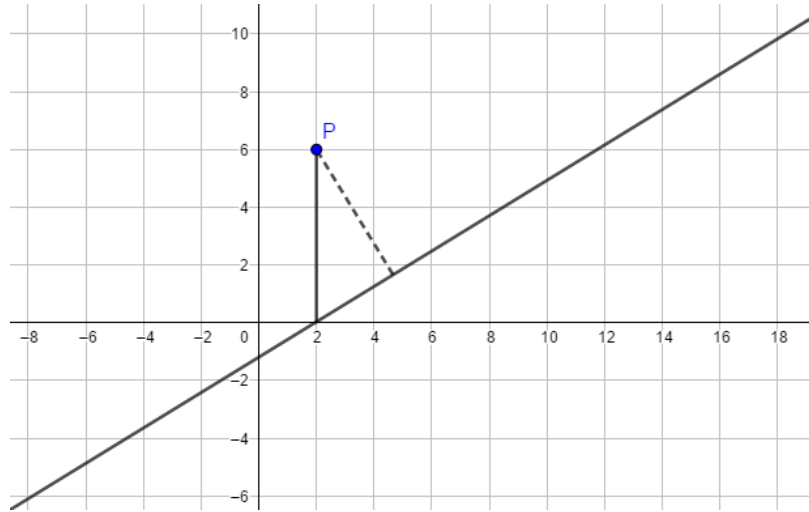
Muistellaan seuraavaksi tutuimpien kartioleikkausten määritelmiä ja tutkitaan, kuinka muutos etäisyyden määritelmässä vaikuttaa toisen asteen käyrien muotoon. Tässä kappaleessa käydään läpi kartioleikkauksista ympyrä, ellipsi, paraabeli ja hyperbeli. Käytetään pohjalähteinä Eugene Krausen teosta *Taxicab Geometry* [2] sekä artikkeleita [4], [9] ja [10]. Aloitetaan määrittämällä pisteen etäisyys suorasta.

4.1 Pisteen etäisyys suorasta

Euklidisessa geometriassa pisteen etäisyys suorasta on lyhin etäisyys pisteen ja suoran välillä. Samoin taksigeometriassa pisteen etäisyys suorasta määritetään lyhyimpänä mahdollisena etäisyytenä suoran ja pisteen välillä. Etäisyyden määritelmän muutos vaikuttaa myös pisteen ja suoran välisen etäisyyteen. Pisteen ja suoran etäisyyden eroavaisuuksia taksigeometriassa ja euklidisessa tasogeometriassa voi havainnollistaa Geogebra applikaatiolla linkistä Pisteen ja suoran etäisyys - taksigeometria.

Määritelmä 4.1. Olkoon piste $P \in \mathbb{R}^2$. Pisteen P etäisyys suorasta ℓ on

$$d_t(P, \ell) = \min\{d_t(P, A) \mid A \in \ell\}.$$



Kuva 4.1: Taksigeometrian pisteen etäisyys suorasta on piirrettynä yhtenäisenä viivana ja euklidinen etäisyys katkoviivana.

Muistetaan, että euklidisessa geometriassa pisteen $P = (x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on

$$d_e(P, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Määritetään pisteen etäisyys suorasta taksigeometriassa seuraavalla lauseella.

Lause 4.2. *Olkoon piste $P \in \mathbb{R}^2$ siten, että $P = (x_0, y_0)$. Olkoon suoran ℓ yhtälö $ax + by + c = 0$. Pisteen P etäisyys suorasta ℓ on*

$$d_t(P, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max(|a|, |b|)}.$$

Taksigeometriassa pisteen ja suoran välinen etäisyys voidaan käsitellä osissa. Todistetaan lause 4.2 seuraavan lemmän avulla. Todistus seuraa artikkelin *Lines and Parabolas in Taxicab Geometry* todistusta [11].

Lemma 4.3. *Olkoon piste $P = (x_0, y_0)$ ja ℓ suora, jonka yhtälö on $ax + by + c = 0$. Pisteen P ja suoran ℓ lyhin etäisyys on*

1. *vaakasuuntainen etäisyys, jos $1 < a/b < \infty$ tai $-\infty < a/b < -1$.*
2. *pystysuuntainen etäisyys, jos $0 < a/b < 1$ tai $-1 < a/b < 0$.*
3. *pystysuuntainen ja vaakasuuntainen etäisyys ovat yhtäsuuret, jos $|a/b| = 1$.*

Todistus. Suoran ℓ yhtälö on $ax + by + c = 0$, jolloin sen kulmakerroin on $1 < a/b < \infty$. Tällöin löytyy piste P_y suoralla ℓ , jonka y -koordinaatti on y_0 . Tällöin piste P_y sijaitsee pisteen P kanssa samalla suoralla $y = y_0$. Koska suora ℓ on jatkuva ja nouseva, löytyy vain yksi piste P_y , jossa suorat $y = y_0$ ja ℓ leikkaavat. Tällöin on

$$P_y = \left(\frac{-by_0 - c}{a}, y_0 \right).$$

Vastaavasti löydetään piste P_x , joka sijaitsee suoralla ℓ ja jonka x -koordinaatti on x_0 . Tällöin

$$P_x = \left(x_0, \frac{-ax_0 - c}{b}\right).$$

Olkoon pisteiden P ja P_y välinen etäisyys d_v ja pisteiden P ja P_x välinen etäisyys d_p . Tällöin pätee

$$\begin{aligned} d_v = d_t(P, P_y) &= \left| \frac{-by_0 - c}{a} - x_0 \right| + |y_0 - y_0| \\ &= \left| \frac{-by_0 - c}{a} - x_0 \right| \\ &= \left| \frac{-ax_0 - by_0 - c}{a} \right| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} d_p = d_t(P, P_x) &= \left| \frac{-ax_0 - c}{b} - y_0 \right| + |x_0 - x_0| \\ &= \left| \frac{-ax_0 - c}{b} - y_0 \right| \\ &= \left| \frac{-ax_0 - by_0 - c}{b} \right| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|} \end{aligned}$$

Todistetaan lause osissa. Voidaan olettaa, että $a, b > 0$.

1. Todistetaan, että $d_v \leq d_p$, kun $1 < a/b < \infty$. Tällöin

$$d_v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|} \leq \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|} = d_p.$$

Vastaavasti voidaan todistaa tapaus $-\infty < a/b < -1$.

2. Todistetaan, että $d_p \leq d_v$, kun $0 < a/b < 1$. Tästä saadaan $a < b$. Tällöin

$$d_p = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|} \leq \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|} = d_v$$

Vastaavasti voidaan todistaa tapaus $-1 < a < 0$.

3. Olkoon $|a/b| = 1$. Tällöin $|a| = |b|$. Pisteet P_y ja P_x sijaitsevat suoralla ℓ , jolloin

$P_y = (y_0, y_0)$ ja $P_x = (x_0, x_0)$. Tällöin

$$\begin{aligned}d_v &= \left| -y_0 - \frac{c}{a} - x_0 \right| + |y_0 - y_0| \\&= \left| \frac{-ax_0 - ay_0 - c}{a} \right| \\&= \frac{|ax_0 + ay_0 + c|}{|a|}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}d_p &= |x_0 - x_0| + \left| -x_0 - \frac{c}{b} - y_0 \right| \\&= \left| \frac{-bx_0 - by_0 - c}{b} \right| \\&= \frac{|bx_0 + by_0 + c|}{|b|}\end{aligned}$$

Koska $|a| = |b|$, niin $d_v = d_p$ ja lause pätee.

□

Huomataan, että vaaka- ja pystysuuntaiset etäisyydet ovat samankaltaisia, mutta pisteen etäisyyteen suorasta vaikuttaa vakioiden a ja b itseisarvot. Todistetaan nyt lause 4.2.

Todistus. Lemman 4.3 todistuksesta huomataan, että pisteen etäisyys suorasta on riippuvainen siitä, kumpi arvoista $|a|$ tai $|b|$ on suurempi. Siispä pisteen P etäisyys suorasta saadaan yhdistämällä lemmän tulokset seuraavasti:

$$d_t(P, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max(|a|, |b|)}.$$

□

Kuten voitiin olettaakin, pisteen etäisyys suorasta -lauseke on erilainen taksigeometriassa kuin euklidisessa geometriassa. Pisteen etäisyys suorasta määritellään samalla tavalla molemmissa geometrioissa, mutta tulos on eri. Kappaleessa 4.4 palataan pisteen etäisyyteen suorasta paraabelin määritelmässä.

4.2 Ympyrä

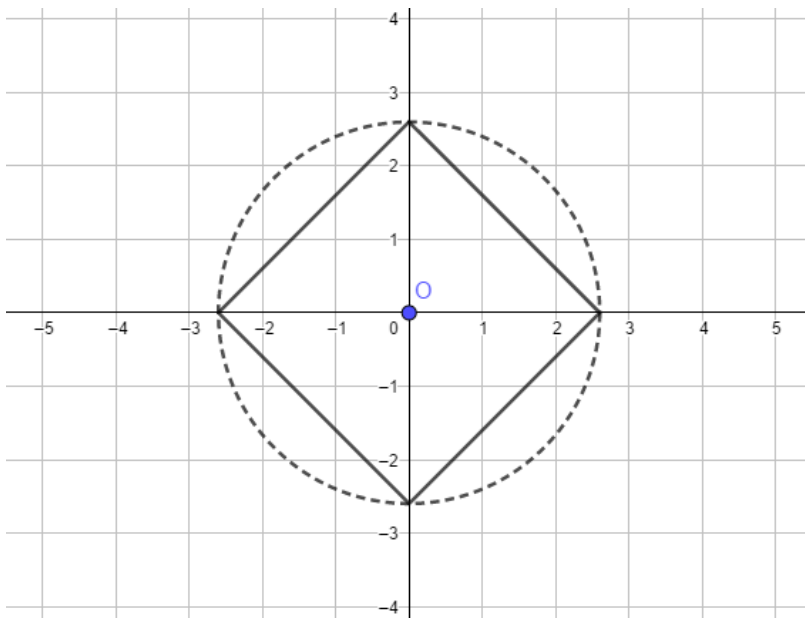
Euklidisessa geometriassa ympyrän yhtälö on $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Ympyrä määritellään niiden pisteiden joukkona, joiden euklidinen etäisyys keskipisteestä on vakio. Taksigeometriassa ympyrä voidaan määrittää vastaavalla tavalla.

Määritelmä 4.4. Olkoon piste $O \in \mathbb{R}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$ siten, että $r > 0$. O -keskinen ja r -säteinen ympyrä on

$$S(O, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_t(O, x) = r\}.$$

Ympyrän *säde* on jana, joka yhdistää ympyrän keskipisteen ja kehän pisteen. Jana, joka yhdistää kaksi kehän pistettä, kutsutaan *jänneeksi*. Jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta on ympyrän *halkaisija*.

Ympyrä on siis se tason pisteiden joukko, joiden etäisyys keskipisteestä on vakio. Taksigeometriassa ympyrän määritelmä tuottaa nelikulmion, joka poikkeaa paljon tutummasta euklidisesta ympyrästä. Huomattavaa on, että etäisyyden määritelmän muutos euklidisesta geometriasta taksigeometriaan on ainoa, joka muuttui. Tätä eroavaisuutta voi tutkia Geogebra applikaatiolla seuraavasta linkistä Ympyrä - taksigeometria. Kuvassa 4 on euklidisen metriikan ja taksigeometrian metriikan määrittämät ympyrät. Seuraava lause määrittää ympyrän yhtälön taksigeometriassa.



Kuva 4.2: Kuvassa euklidinen ympyrän on esitettyinä katkoviivalla ja taksigeometrian ympyrän yhtenäisellä viivalla.

Lemma 4.5. Olkoon piste $O = (x_0, y_0)$ ja $r \in \mathbb{R}$. O -keskeisen ja r -säteisen ympyrän yhtälö on muotoa

$$|x - x_0| + |y - y_0| = r. \quad (4.1)$$

Todistus. Valitaan ympyrän keskipisteeksi $O = (x_0, y_0)$ ja säteeksi $r \in \mathbb{R}$. Ympyrän määritelmän nojalla ympyrä on niiden pisteiden $P = (x, y)$ joukko, joille pätee $d(O, P) = r$. Etäisyyden määritelmästä saadaan ympyrän yhtälöksi

$$d(O, P) = |x - x_0| + |y - y_0| = r.$$

□

Ympyrän yhtälön avulla voidaan tutkia ympyrän muotoa. Ympyrän yhtälö muodostuu itseisarvoista, jolloin yhtälöä voidaan tutkia kaikissa koordinaatiston neljänneksissä. Seuraava lause todistaa taksigeometrian ympyrän nelikulmaisuuuden.

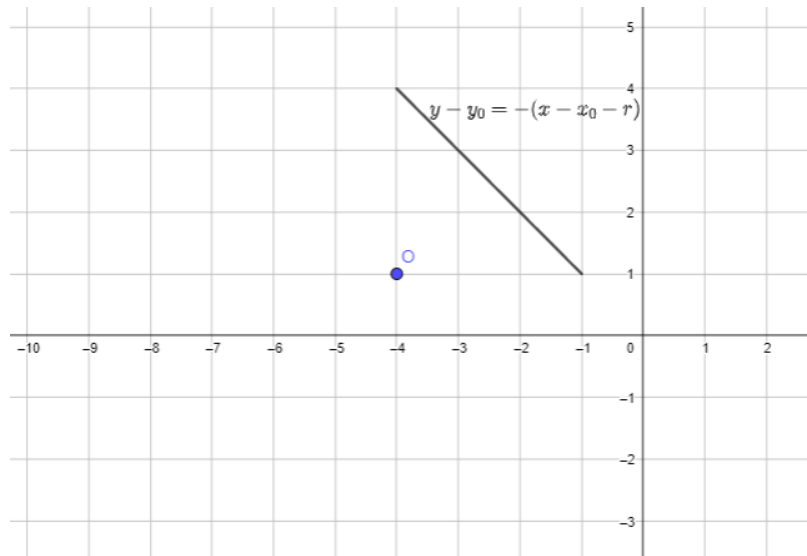
Lause 4.6. *Olkoon ympyrän keskipiste on $O \in \mathbb{R}^2$ ja säde $r \in \mathbb{R}$. Taksigeometrian ympyrä $S(O, r)$ on nelikulmio.*

Todistus. Olkoon ympyrän keskipiste $O = (x_0, y_0)$ ja ympyrän piste $P = (x, y)$. Todistetaan lause osissa.

1. Olkoon $x_0 \leq x$ ja $y_0 \leq y$, jolloin yhtälöstä 4.1 saadaan

$$\begin{aligned} |x - x_0| + |y - y_0| &= r \\ (x - x_0) + (y - y_0) &= r \\ y - y_0 &= -(x - x_0 - r). \end{aligned}$$

Saadaan laskeva suora, joka muodostaa ensimmäisen ympyrän neljästä sivusta. Kuvassa 4.3 on piirretty suora $y - y_0 = -(x - x_0 - r)$, kun $x_0 \leq x$ ja $y_0 \leq y$.

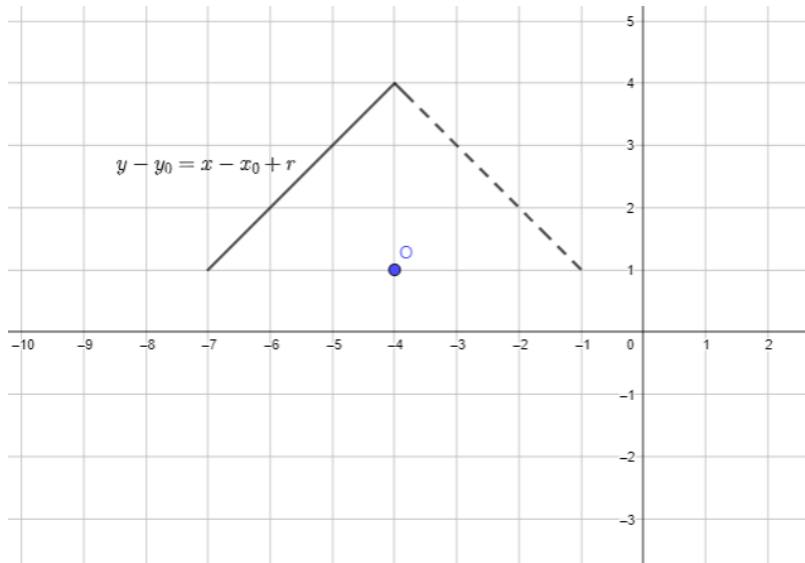


Kuva 4.3: Laskeva suora $y - y_0 = -(x - x_0 - r)$ on yksi ympyrän neljästä sivusta.

2. Olkoon $x \leq x_0$ ja $y_0 \leq y$ ja jälleen yhtälöstä 4.1 saadaan

$$\begin{aligned} |x - x_0| + |y - y_0| &= r \\ (x_0 - x) + (y - y_0) &= r \\ y - y_0 &= x - x_0 + r. \end{aligned}$$

Ympyrän toiseksi sivuksi saadaan nouseva suora, joka muodostaa ensimmäisen kohdan kanssa puolet ympyrästä. Kuvassa 4.4 on piirretty yhteinäisellä viivalla toisen vaiheen muodostama nouseva suora $y - y_0 = x - x_0 + r$ ja katkoviivalla ensimmäisen vaiheen suora.



Kuva 4.4: Toisessa vaiheessa ympyrän toiseksi sivuksi saadaan nouseva suora $y - y_0 = x - x_0 + r$.

3. Olkoon $x \leq x_0$ ja $y \leq y_0$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} |x - x_0| + |y - y_0| &= r \\ (x_0 - x) + (y_0 - y) &= r \\ y - y_0 &= -(x - x_0 + r). \end{aligned}$$

Siispä ympyrän yhtälö alueessa $x \leq x_0$ ja $y \leq y_0$, on laskeva suora. Havainnollistetaan tilannetta jälleen kuvassa 4.5. Katkoviivat ovat aiempien suorien muodostamat ympyrän osat ja yhtenäinen viiva tässä laskettu laskeva suora $y - y_0 = -(x - x_0 + r)$.

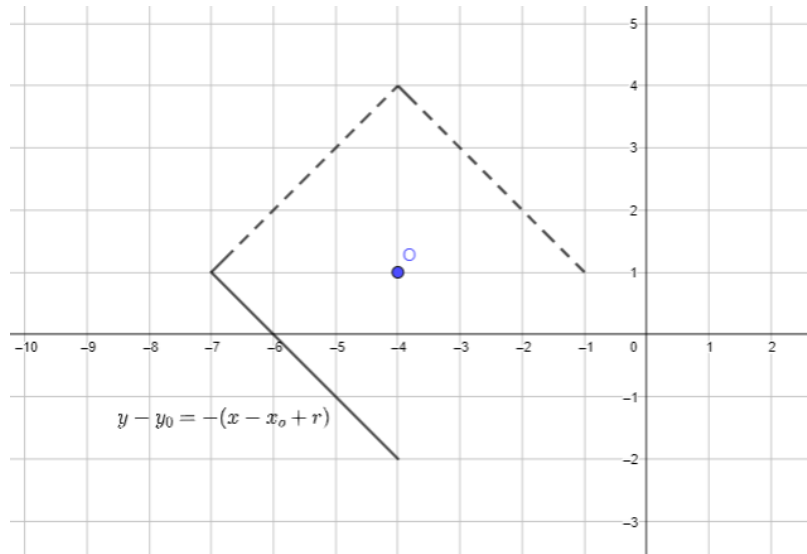
4. Olkoon $x_0 \leq x$ ja $y \leq y_0$, jolloin yhtälöstä 4.1 saadaan

$$\begin{aligned} |x - x_0| + |y - y_0| &= r \\ 1(x - x_0) + (y_0 - y) &= r \\ y - y_0 &= x - x_0 - r. \end{aligned}$$

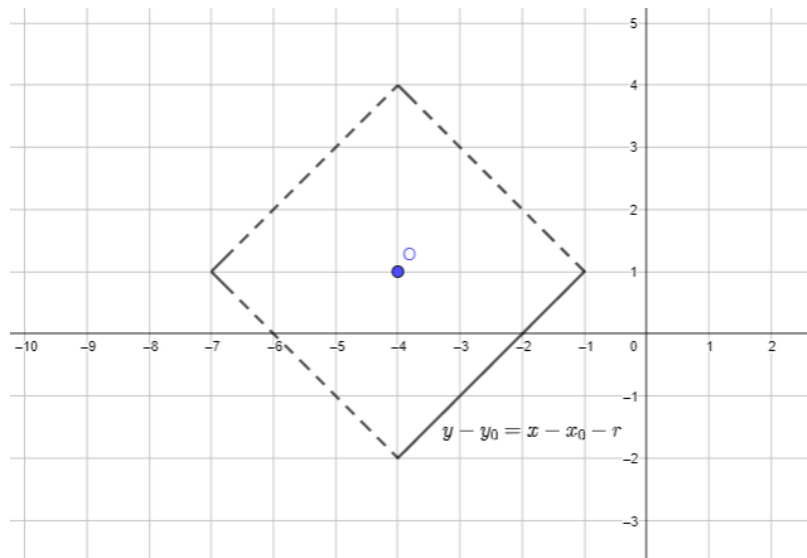
Ympyrän neljäs sivu on siis muotoa $y - y_0 = x - x_0 - r$, joka on nouseva suora. Havainnollistetaan tätä kuvassa 4.6. Kuvassa on yhtenäisellä viivalla piirretty viimeinen suora ja aiempien kohtien muodostamat muut ympyrän osat.

□

Ympyrä koostuu siis neljästä sivusta, jotka muodostavat nelikulmion. Tutkitaan seuraavaksi ympyrän piiriä, joka muodostuu neljästä ympyrän sivusta.



Kuva 4.5: Ympyrän kolmas sivu on laskeva suora $y - y_0 = -(x - x_0 + r)$.



Kuva 4.6: Ympyrän neljäs sivu muodostuu suorasta $y - y_0 = x - x_0 - r$.

Lause 4.7. *Olkoon säde $r \in \mathbb{R}$ siten, että $r > 0$. Tällöin r -säteisen ympyrän kehän pituus on $8r$.*

Todistus. Olkoon $O = (x_0, y_0)$ ja $r \in \mathbb{R}$. Valitaan pisteet A ja B siten, että ne ovat ympyrän yhden sivun päätepisteitä. Ympyrän määritelmän nojalla keskipisteen O ja pisteen A etäisyys on $d(O, A) = r$. Samoin pisteen B ja keskipisteen O etäisyys on $d(O, B) = r$. Koska keskipiste O kuuluu suorakulmioon $\square AB$, voidaan pisteiden A ja B etäisyys laskea keskipisteen kautta. Tällöin lauseen 1.12 nojalla pisteiden A ja B etäisyydeksi saadaan $d(A, B) = r + r = 2r$. Vastaavasti voidaan laskea muut ympyrän sivujen pituudet. Kaikkien ympyrän sivujen pituudet ovat siten $2r$. Lauseen 4.6 mukaan ympyrä on nelikulmio, joka koostuu neljästä sivusta. Koska sivujen pituudet

ovat yhtäsuuret, niin ympyrän piiriksi saadaan $p = 4 \cdot 2r = 8r$. \square

On selvää, että ympyrän sivujen pituudet ovat yhtäpitkiä. Geometriassa neljäkäs määritellään nelikulmiona, jonka sivujen pituudet ovat yhtäsuuret. Neljäkästä kutsutaan joskus myös vinoneliöksi. Ympyrä on siis nelikulmio eli tarkemmin *neliö*.

Seuraus 4.8. *Taksigeometrian ympyrä on neliö.*

Ympyröistä puhuttaessa on luonnollista käsitellä vakion piin arvoa. Pii määritellään kehän pituuden ja ympyrän halkaisijan suhteena. Kun ympyrän säde on r , halkaisijaksi saadaan $d = 2r$. Lauseen 4.7 mukaan ympyrän kehän pituus on $p = 8r$, jolloin piin arvoksi saadaan

$$\pi = \frac{p}{d} = \frac{8r}{2r} = 4$$

Seuraus 4.9. *Taksigeometriassa $\pi = 4$.*

Tässä kappaleessa tutustuttiin ympyrän yhtälöön ja sen muotoon. Euklidisen geometrian ja taksigeometrian metriikoiden eroavaisuus vaikuttaa suuresti ympyrän muotoon ja ominaisuuksiin kuten myös piin arvoon. Lisätietoa taksigeometrian ympyröistä on esimerkiksi artikkelissa [12]. Taksigeometriassa kolmioiden ja ympyröiden yhdistelmä tuottaa mielenkiintoisia tuloksia. Euklidisessa geometriassa voidaan konstruoida kolmion sisä- ja ulkopuolelle euklidinen ympyrä. Taksigeometriassa tämä ei ole yhtä helppoa vaan ympyrän muoto rajoittaa mahdollisuuksia. Tästä lisää Kevin P. Thompsonin artikkelissa *Taxicab Triangle Incircles and Circumcircles* [13].

4.3 Ellipsi

Euklidisessa tasogeometriassa ellipsi voidaan määritellä kahdella tapaa, joko polttopisteen ja johtosuoran avulla tai vaihtoehtoisesti niiden pisteiden joukkona, joiden etäisyyksien summa kahdesta annetusta pisteestä on vakio. Eli euklidinen ellipsi on pistejoukko

$$E_e = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(P, F) = e \cdot d_e(P, \ell)\},$$

missä $0 < e < 1$ on eksentrisyys, polttopiste F ja johtosuora ℓ . Tällöin ellipsi voidaan piirtää kahden polttopisteen F ja F' sekä kahden johtosuoran ℓ ja ℓ' avulla. Ensimmäisessä määritelmässä pisteen P etäisyys polttopisteestä F on yhtäsuurta kuin pisteen P etäisyys johtosuorasta ℓ kerrottuna vakiolla e . Ellipsin pisteille pätee myös

$$d_e(P, F) + d_e(P, F') = 2c,$$

missä c on puolet ellipsin isoakselin pituudesta. Toisaalta ellipsi voidaan siis kirjoittaa pistejoukkona

$$E_c = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(P, F) + d_e(P, F') = 2c\},$$

missä c on vakio. [14]

Taksigeometriassa vastaava ei ole mahdollista. Polttopisteen ja johtosuoran avulla määritetty ellipsi taksigeometriassa ei ole symmetrinen eikä sitä näin ollen luokitella ellipsiksi. Taksigeometriassa ellipsi määritetään vastaavasti kuin euklidisen jälkimmäinen pistejoukko.

Määritelmä 4.10. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^2$. *Ellipsi* on niiden pisteiden joukko, joille pätee

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_t(A, P) + d_t(B, P) = \text{vakio}\}.$$

Pisteitä A ja B kutsutaan ellipsin *polttopisteiksi*.

Ellipsi on siis pisteiden joukko, joiden etäisyyksien summa kahdesta annetusta pisteestä A ja B on vakio. Ympyrä on eräs poikkeustapaus ellipsistä, kun pisteet $A = B$. Kuvassa 4.7 on esitetty ellipsi taksigeometriassa (katkoviiva) ja euklidisessä geometriassa (yhteinen viiva). Ellipsille voidaan muodostaa yhtälö sen määritelmästä. Geogebra applikaatio Ellipsi - taksigeometria havainnollistaa geometrioiden eroavaisuuksia ellipsin kohdalla.

Lemma 4.11. *Ellipsin yhtälö on muotoa*

$$|x - a_1| + |y - a_2| + |x - b_1| + |y - b_2| - \varphi = 0 \quad (4.2)$$

missä *polttopisteet* ovat $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ ja vakio $\varphi \geq d_t(A, B)$.

Todistus. Todistus saadaan suoraan ellipsin määritelmästä. Olkoon ellipsin polttopisteet $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ sekä vakio $\varphi \geq 0$. Tällöin ellipsin määritelmän nojalla saadaan ellipsille yhtälö:

$$\begin{aligned} d_t(A, P) + d_t(B, P) &= \varphi \\ |x - a_1| + |y - a_2| + |x - b_1| + |y - b_2| &= \varphi \\ |x - a_1| + |y - a_2| + |x - b_1| + |y - b_2| - \varphi &= 0. \end{aligned}$$

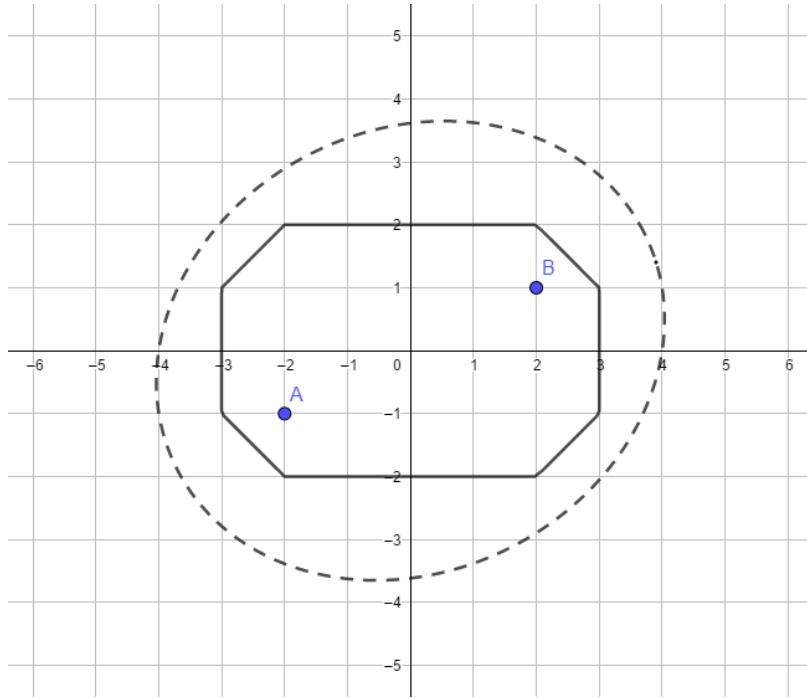
□

Edellisessä kappaleessa määritettiin ympyrän yhtälön avulla ympyrän muoto ja piirin pituus. Ellipsin piiriä ei tässä tutkielmassa määritetä, mutta piirin pituuden määrittämisestä on muutamia metodeja, joilla piirin pituutta voidaan ainakin approksimoida. Ellipsistä voi lukea tarkemmin artikkelissa *Geometry of some taxicab curves* [15]. Taksigeometrian ellipsin muoto poikkeaa euklidisen geometrian ellipsistä, kuten kuvasta 4.7 nähdään. Määritetään taksigeometrian ellipsi tarkemmin seuraavan lauseen avulla. Tehdään myös havainnollistava esimerkki todistuksen vaiheista.

Lause 4.12. *Olkoon ellipsin vakio $\varphi \geq 0$ ja polttopisteiden etäisyys $\delta = d_t(A, B)$. Jos*

1. $\varphi > \delta$ ja $a_1 = b_1$ tai $a_2 = b_2$, *niin ellipsi on kuusikulmio (heksagoni).*
2. $\varphi > \delta$, $a_1 \neq b_1$ ja $a_2 \neq b_2$, *niin ellipsi on kahdeksankulmio (oktagon).*
3. $\varphi = \delta$, *niin ellipsi on suorakulmio, jonka halkaisija on AB .*

Todistus. Olkoot pisteet $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ sekä ellipsin piste $P = (x, y)$.



Kuva 4.7: Kuvassa havainnollistetaan euklidisen ellipsin (katkoviiva) ja taksigeometrian ellipsin (yhtenäinen viiva) eroavaisuuksia.

1. Olkoon $\varphi > \delta$ ja pisteet A ja B siten, että $a_1 < b_1$ ja $a_2 = b_2$. Tällöin ellipsin polttopisteet A ja B sijaitsevat samalla x-akselin suuntaisella suoralla. Tämän vuoksi ellipsin yhtälö 4.2 lyhenee muotoon

$$|x - a_1| + |x - b_1| + 2|y - a_2| - \varphi = 0$$

Ellipsin muoto saadaan tutkimalla ellipsin yhtälöä osissa. Jaetaan koordinaatisto polttopisteiden suhteen kuuteen alueeseen ja tarkastellaan näitä osioita erikseen.

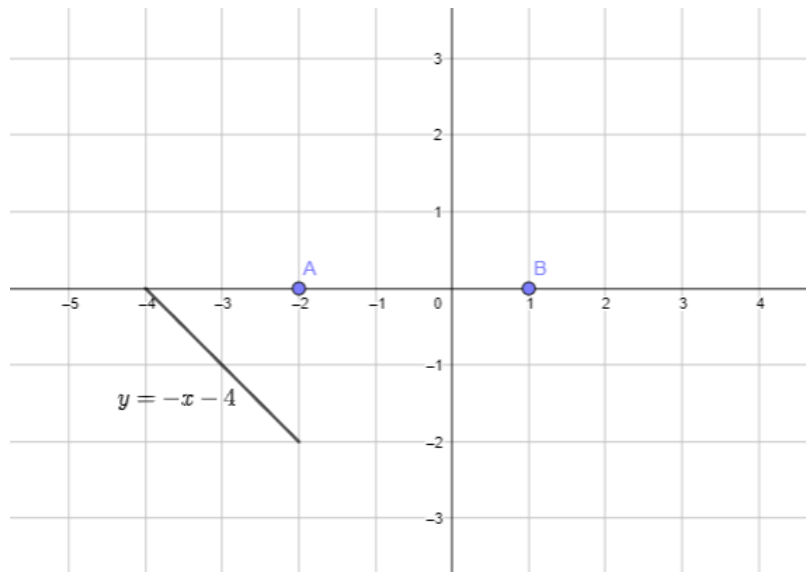
- (a) Olkoon $x < a_1$ ja $y < a_2$. Koska $x < a_1$, niin tällöin $x < a_1 < b_1$. Näin ellipsin yllä oleva yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} (a_1 - x) + (b_1 - x) + 2(a_2 - y) - \varphi &= 0 \\ 2a_2 - 2y &= 2x - (a_1 + b_1) + \varphi \end{aligned}$$

Otetaan esimerkki tilanteesta. Valitaan polttopisteiksi $A = (-2, 0)$ ja $B = (1, 0)$ ja ellipsin vakioksi $\varphi = 7$. Tällöin $\varphi > \delta$ ja ellipsin yhtälöksi saadaan

$$-2y = 2x - (-2 + 1) + 7 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 4.$$

Saadaan siis laskeva suora. Kuva 4.8 havainnollistaa tilannetta.



Kuva 4.8: Esimerkin ellipsi on laskeva suora $y = -x + 4$ alueessa $x < -2$ ja $y < 0$.

- (b) Olkoon $x < a_1$ ja $a_2 < y$. Koska $x < a_1$, niin tällöin $x < a_1 < b_1$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} (a_1 - x) + (b_1 - x) + 2(y - a_2) - \varphi &= 0 \\ 2y - 2a_2 &= 2x - (a_1 + b_1) + \varphi \end{aligned}$$

Tehdään jälleen sama esimerkki kuin edellisessä kohdassa. Valitaan siis polttopisteiksi $A = (-2, 0)$ ja $B = (1, 0)$ ja ellipsin vakioksi $\varphi = 7$. Tällöin $\varphi > \delta$ ja ellipsin yhtälöksi saadaan

$$2y = 2x - (-2 + 1) + 7 \quad \Rightarrow \quad y = x + 4.$$

Saadaan nouseva suora. Havainnollistetaan tätä kuvassa 4.9.

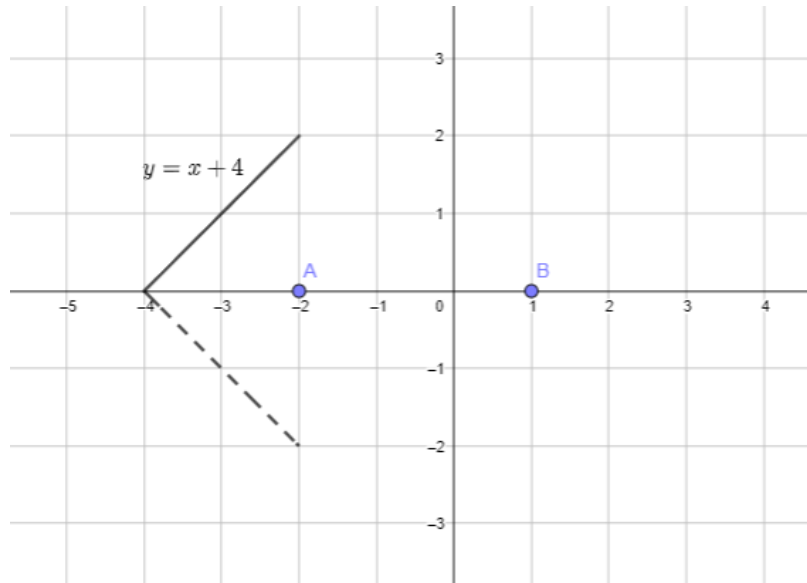
- (c) Olkoon $a_1 \leq x < b_1$ ja $a_2 \leq y$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} (x - a_1) + (b_1 - x) + 2(y - a_2) - \varphi &= 0 \\ 2y - 2a_2 &= a_1 - b_1 + \varphi \end{aligned}$$

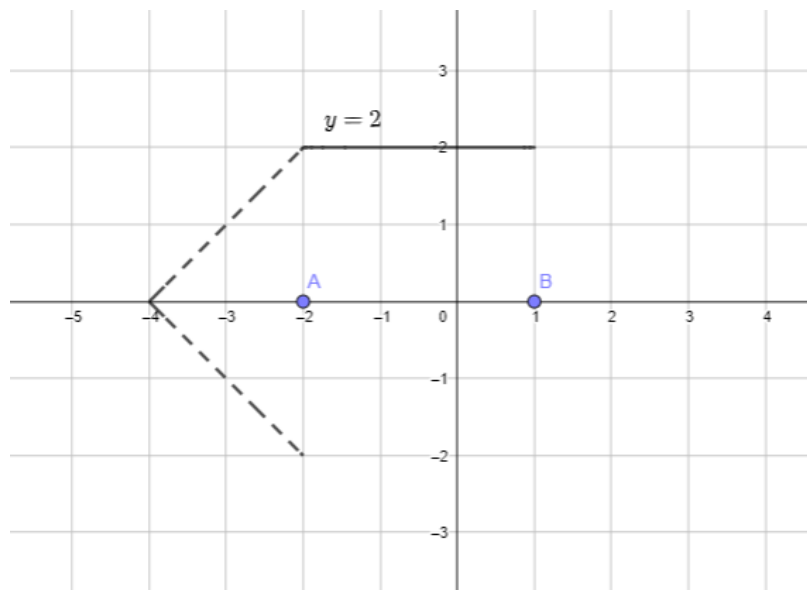
Tehdään jälleen sama esimerkki kuin edellisessä kohdassa. Tällöin $\varphi > \delta$ ja ellipsin yhtälöksi saadaan

$$2y = -2 - 1 + 7 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Saadaan x-akselin kanssa yhdensuuntainen suora. Havainnollistetaan tätä kuvassa 4.10.



Kuva 4.9: Alueessa $x < -2$ ja $0 < y$ saadaan ellipsiin nouseva suora $y = x + 4$.



Kuva 4.10: Ellipsi on x -akselin suuntainen suora $y = 2$ alueessa $-2 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y$.

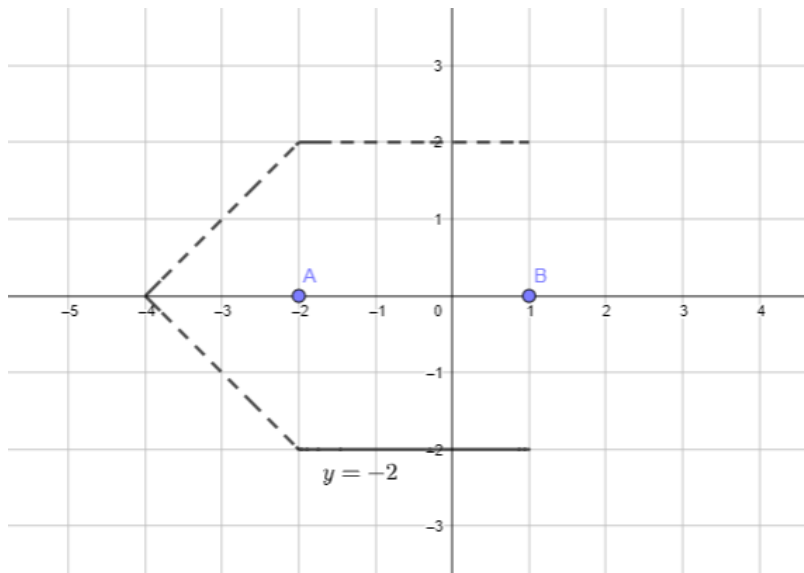
(d) Olkoon $a_1 < x \leq b_1$ ja $y < a_2$. Näin saadaan edellisen kohdan tapaisesti

$$\begin{aligned} (x - a_1) + (b_1 - x) + 2(y - a_2) - \varphi &= 0 \\ 2a_2 - 2y &= a_1 - b_1 + \varphi \end{aligned}$$

Tehdään jälleen sama esimerkki kuin edellisessä kohdassa. Tällöin saadaan

$$-2y = -2 - 1 + 7 \quad \Rightarrow \quad y = -2.$$

Saadaan jälleen x-akselin kanssa yhdensuuntainen suora. Havainnollistetaan tätä kuvassa 4.11.



Kuva 4.11: Ellipsi muodostuu suorasta $y = -2$ alueessa $-2 < x < 1$ ja $y < 0$.

(e) Olkoon $a_1 < b_1 < x$ ja $y < a_2$. Näin saadaan

$$\begin{aligned}(x - a_1) + (x - b_1) + 2(a_2 - y) - \varphi &= 0 \\ 2a_2 - 2y &= -2x + (a_1 + b_1) + \varphi\end{aligned}$$

Tehdään jälleen sama esimerkki kuin edellisessä kohdassa.

$$2y = -2x + (-2 + 1) + 7 \quad \Rightarrow \quad y = x - 3.$$

Saadaan nouseva suora, kuten b)-kohdassa. Havainnollistetaan tätä kuvalla 4.12.

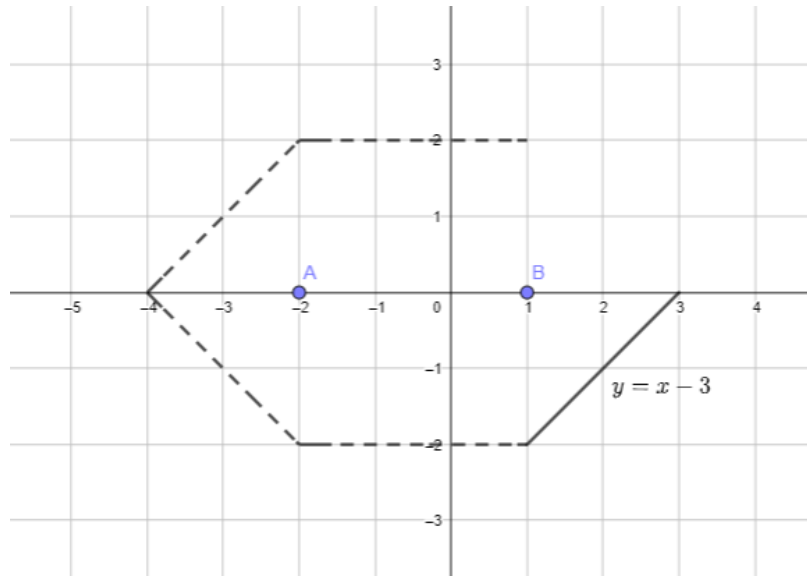
(f) Olkoon $a_1 < b_1 < x$ ja $a_2 < y$. Näin saadaan

$$\begin{aligned}(x - a_1) + (x - b_1) + 2(y - a_2) - \varphi &= 0 \\ 2y - 2a_2 &= -2x + (a_1 + b_1) + \varphi\end{aligned}$$

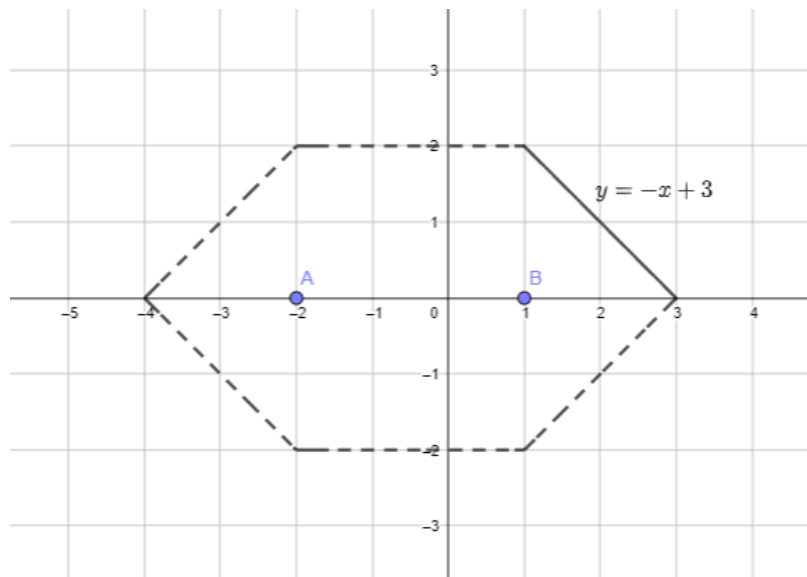
Tehdään jälleen sama esimerkki kuin edellisessä kohdassa. Yhtälöksi saadaan

$$2y = -2x + (-2 + 1) + 7 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 3.$$

Saadaan laskeva suora, kuten a) -kohdassa. Havainnollistetaan tätä kuvassa 4.13.



Kuva 4.12: Alueessa $1 < x$ ja $y < 0$ saadaan ellipsille nouseva suora $y = x - 3$.



Kuva 4.13: Ellipsin viimeinen suora on $y = -x + 3$ alueessa $1 < x$ ja $0 < y$.

Saatiin siis ellipsin muodoksi kuusikulmio, jonka jokaiselle osalle saadaan muodostettua suoran yhtälö. Todistuksen alussa valittiin, että $a_2 = b_2$. Vastaavalla tavalla voidaan todistaa ellipsin muoto, kun $a_1 = b_1$. Tällöin ellipsi on pystysuuntainen kuusikulmio.

2. Olkoot $\varphi > \delta$ ja pisteet A ja B siten, että ne eivät sijaise samalla pysty- tai vaakasuoralla. Tällöin $a_1 \neq b_1$ ja $a_2 \neq b_2$. Käsitellään todistus jälleen osissa. Jaetaan koordinaatisto kahdeksaan osaan polttopisteiden suhteen. Olkoot pisteet $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ siten, että $a_1 < b_1$ ja $a_2 < b_2$. Olkoon ellipsin

piste $P = (x, y)$.

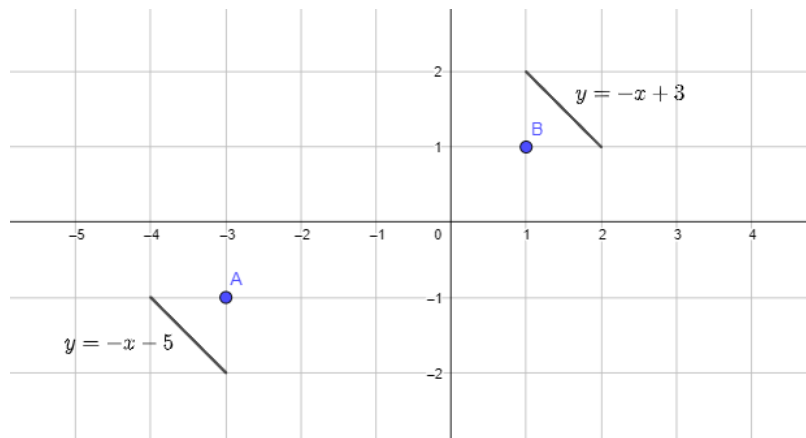
(a) Olkoon $x < a_1$ ja $y < a_2$. Tällöin ellipsin yhtälö 4.2 on

$$\begin{aligned}(a_1 - x) + (a_2 - y) + (b_1 - x) + (b_2 - y) - \varphi &= 0 \\ -2y + (a_2 + b_2) &= 2x - (a_1 + b_1) + \varphi\end{aligned}$$

Tutkitaan ellipsin muodostumista jälleen esimerkin avulla jokaisessa kohdassa. Olkoot ellipsin polttopisteet $A = (-3, -1)$ ja $B = (1, 1)$ ja vakio $\varphi = 8$. Tällöin yllä oleva suora saa muodon

$$-2y = 2x - (-3 + 1) + 8 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 5.$$

Vastaavasti, jos valitaan $x > b_1$ ja $y > b_2$, saadaan laskeva suora. Esimerkissä tämä on suora $y = -x + 3$. Alla olevaan kuvaan 4.14 on piirretty saadut suorat.



Kuva 4.14: Ensimmäisessä vaiheessa ellipsille saadaan kaksi suoraa $y = -x - 5$ ja $y = -x + 3$.

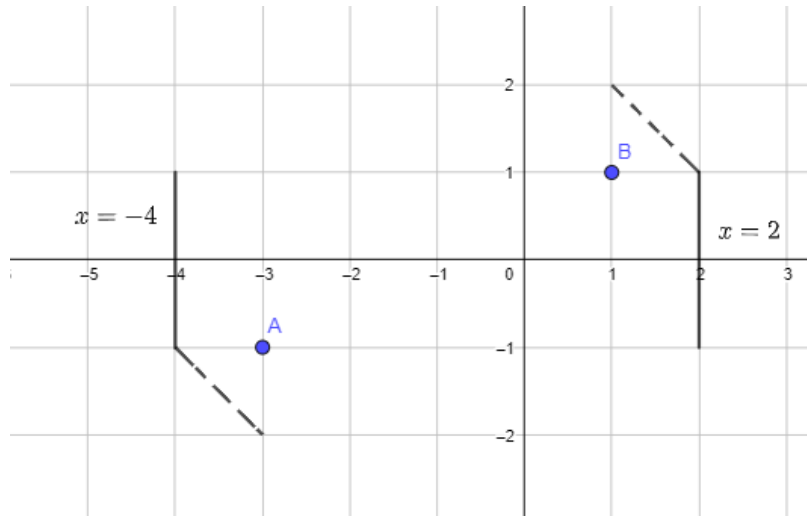
(b) Olkoon $x \leq a_1$ ja $a_2 \leq y < b_2$. Tällöin ellipsin yhtälö 4.2 on

$$\begin{aligned}(a_1 - x) + (y - a_2) + (b_1 - x) + (b_2 - y) - \varphi &= 0 \\ a_2 + b_2 &= 2x - (a_1 + b_1) + \varphi\end{aligned}$$

Tutkitaan ellipsin muodostumista edellisen kohdan esimerkin mukaisesti. Tällöin suora on

$$2 = 2x - (-3 + 1) + 8 \quad \Rightarrow \quad x = -4.$$

Saatiin siis y-akselin suuntainen suora. Vastaavasti saadaan myös y-akselin suuntainen suora, kun valitaan $b_1 \leq x$ ja $a_2 < y \leq b_2$. Esimerkissä tämä vastaa suoraa $x = 2$. Alla olevassa kuvassa 4.15 on piirrettynä saadut suorat.



Kuva 4.15: Toisessa vaiheessa ellipsiin kuuluu kaksi y -akselin suuntaista suoraa $x = -4$ ja $x = 2$.

(c) Olkoon $x < a_1$ ja $b_2 < y$. Tällöin ellipsiksi saadaan

$$\begin{aligned}(a_1 - x) + (y - a_2) + (b_1 - x) + (y - b_2) - \varphi &= 0 \\ 2y - (a_2 + b_2) &= 2x - (a_1 + b_1) + \varphi\end{aligned}$$

Tutkitaan jälleen esimerkkiä. Tällöin

$$2y = 2x - (-3 + 1) + 8 \quad \Rightarrow \quad y = x + 5.$$

Saadaan nouseva suora. Vastaavasti saadaan nouseva suora, kun valitaan $b_1 < x$ ja $y < a_2$. Esimerkkissä tämä vastaa suoraa $y = x - 3$. Alla olevassa kuvassa 4.16 on piirrettynä saadut suorat.

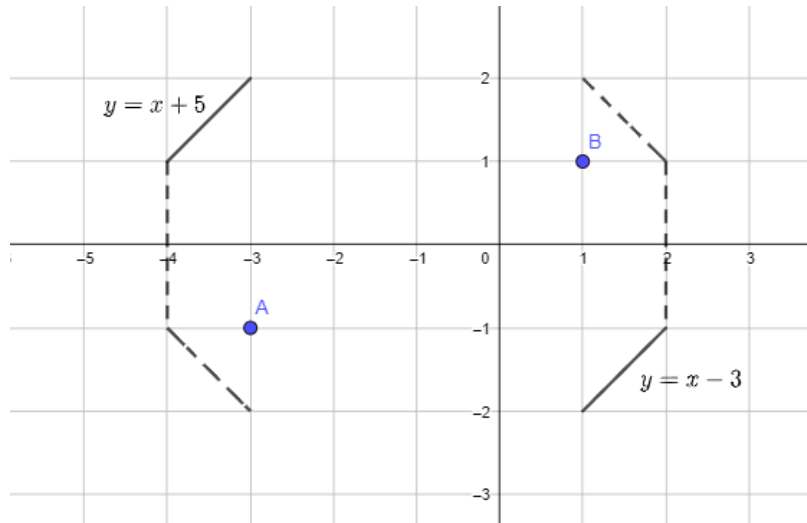
(d) Olkoon $a_1 < x < b_1$ ja $b_2 < y$. Tällöin yhtälö on

$$\begin{aligned}(x - a_1) + (y - a_2) + (b_1 - x) + (y - b_2) - \varphi &= 0 \\ 2y - (a_2 + b_2) &= (a_1 - b_1) + \varphi\end{aligned}$$

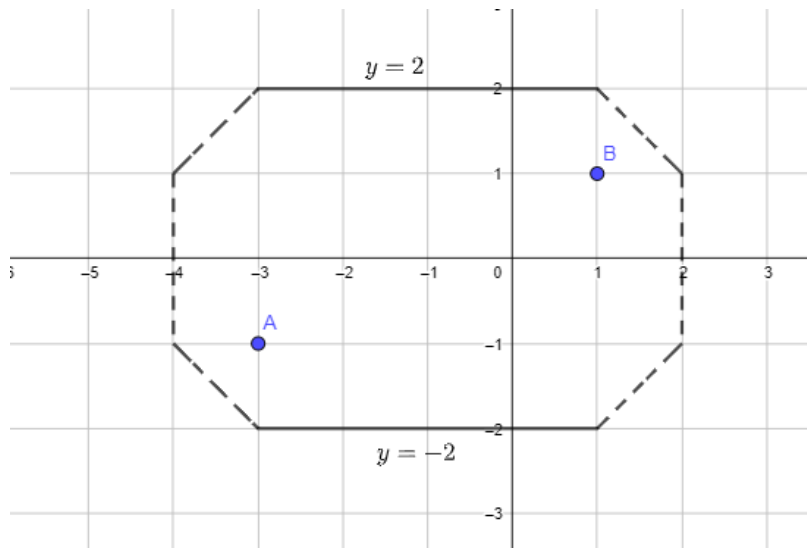
Tutkitaan esimerkkiä. Yllä oleva suora on

$$2y = (-3 - 1) + 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Näin saatiin x -akselin suuntainen suora. Tilanne $a_1 < x < b_1$ ja $y < a_2$ todistetaan vastaavasti ja saadaan myös x -akselin suuntainen suora. Esimerkissä tämä vastaa suoraa $y = -2$. Kuvassa 4.17 on saadut suorat.



Kuva 4.16: Kolmannessa vaiheessa ellipsiin muodostuu kaksi suoraa $y = x + 5$ ja $y = x - 3$.



Kuva 4.17: Viimeisessä vaiheessa ellipsin täydentää suorat $y = 2$ ja $y = -2$.

Näin saatiin ellipsille kahdeksan suoraa, jotka määrittävät ellipsin muodon. Vastaavasti voitaisiin valita $a_1 > b_1$ ja $a_2 > b_2$.

3. Olkoon $\varphi = \delta$, jolloin $d(A, P) + d(P, B) = d(A, B)$. Lauseen 1.12 nojalla piste P sijaitsee siis pisteiden A ja B muodostamassa suorakulmiossa. Jos pisteet A ja B ovat samalla x -akselin suuntaisella suoralla, niin tällöin piste P sijaitsee janalla AB

□

Huomataan, että ellipsin muoto vaihtelee polttopisteiden sijainnin mukaan. Lisää taksigeometrian ellipseistä voi lukea esimerkiksi artikkelista *Geometry of some*

Taxicab Curves [15], jossa esitellään muun muassa kolmen polttopisteen ellipsi.

4.4 Paraabeli

Euklidisessa tasogeometriassa paraabeli määritellään johtosuoran ja polttopisteen avulla, kuten ellipsikin. Ellipsille eksentrisyysvakio on $0 < e < 1$, mutta paraabelille pätee $e = 1$. Euklidisessa tasogeometriassa paraabelin yhtälö on

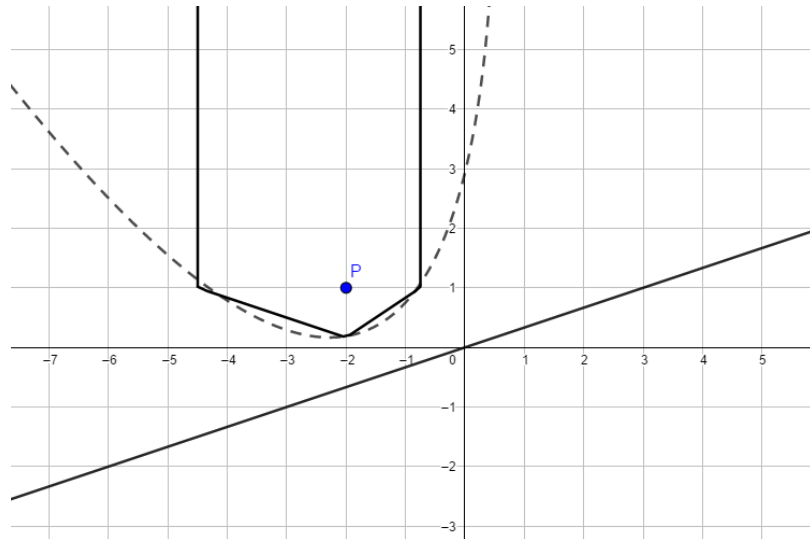
$$L_e = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(P, F) = d_e(P, \ell)\},$$

missä F on paraabelin polttopiste ja ℓ johtosuora. Vastaavalla tavalla saadaan taksigeometriassa määriteltyä paraabeli.

Määritelmä 4.13. Olkoon piste F ja suora ℓ siten, että $F \notin \ell$. *Paraabeli* on

$$L = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_t(F, P) = d_t(\ell, P)\}.$$

Pistettä F kutsutaan paraabelin *polttopisteeksi* ja suoraa ℓ sen *johtosuoraksi*.



Kuva 4.18: Kuvassa havainnollistetaan euklidisen paraabelin (katkoviiva) ja taksigeometrian paraabelin (yhtenäinen viiva) eroavaisuuksia.

Paraabeli on siis niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteestä A on yhtäsuuri kuin etäisyys suorasta ℓ . Tutkitaan paraabelia osissa. Oletetaan, että paraabelin johtosuora kulkee origon kautta, ts. $by = ax + c$, missä $b = 1$ ja $c = 0$. Tämä oletus voidaan tehdä, sillä isometrioista siirto on mahdollinen taksigeometriassa, kuten aiemminkin on tullut jo esille. Palataan isometrioihin tarkemmin seuraavassa kappaleessa. Paraabelin muodon määrittäminen jakautuu neljään osaan, jotka ovat

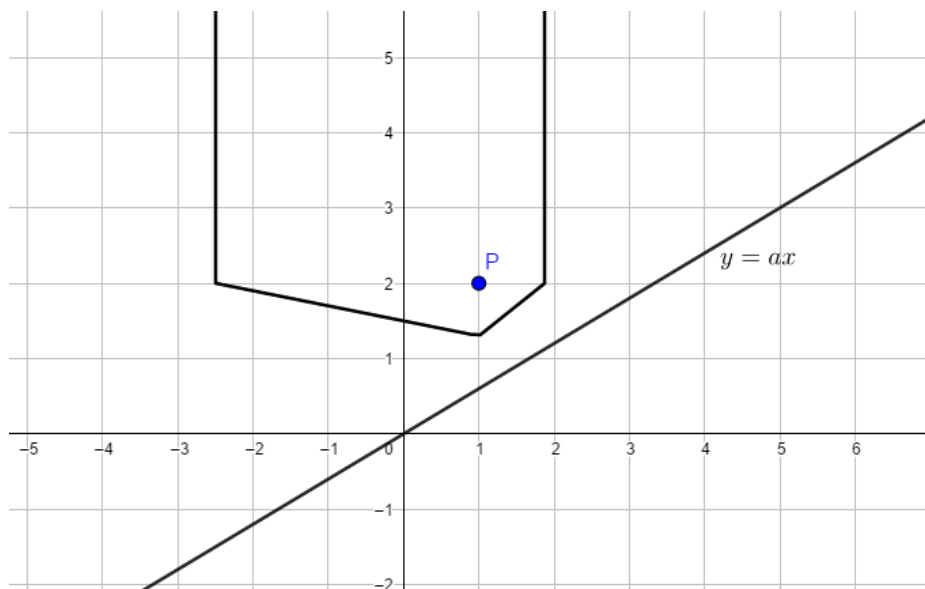
(i) $y_0 > ax_0 \quad |a| < 1$

(ii) $y_0 < ax_0 \quad |a| < 1$

$$(iii) \ y_0 > ax_0 \quad |a| > 1$$

$$(iv) \ y_0 < ax_0 \quad |a| > 1$$

Eli tutkitaan tapauksia, jossa kulmakerroin a on itseisarvoltaan pienempää tai suurempaa kuin yksi. Nämä tapaukset jakautuvat kahteen osaan, eli piste P voi sijaita johtosuoran yläpuolella $y_0 > ax_0$ tai sen alapuolella $y_0 < ax_0$. Osoitetaan tapaus (i). Vastaavasti saadaan kohdat (ii)-(iv). Taksigeometrian paraabeli, jonka johtosuoran kulmakerroin on $|a| = 1$ poikkeaa aiemmin mainituista. Tämä paraabeli muodostuu vain kolmesta suorasta, kun kohdissa (i)-(iv) määritellyt paraabelit muodostuvat neljästä suoran osasta. Tämä voidaan todistaa vastaavalla tavalla. Taksigeometriassa paraabelia ei voida määrittellä yhdellä lausekkeella, kuten euklidisessä geometriassa. Todistetaan paraabeli paloittain kuvan 4.20 mukaisesti. Todistus seuraa artikkelia [11].



Kuva 4.19: Taksigeometrian paraabeli, jonka polttopiste on P ja johtosuora $y = ax$.

Lause 4.14. *Olkoon $F = (x_0, y_0)$ paraabelin polttopiste ja johtosuora $y = ax$, missä $y_0 > ax_0$ ja $|a| < 1$. Tällöin taksigeometrian paraabeli on esitetty kuvassa 4.19.*

Todistus. Olkoon $P = (x, y)$ paraabelin piste, $F = (x_0, y_0)$ paraabelin polttopiste ja $y = ax$ polttosuora. Merkitään johtosuoraa lyhemmin ℓ . Kuvassa 4.19 suoran $y = ax$ kulmakerroin a on positiivista, mutta vastaavasti saataisiin tulos negatiivisella kulmakertoimella. Koska $|a| < 1$, niin pisteen P etäisyys johtosuorasta on lauseen 3 nojalla pystysuuntainen etäisyys. Tiedetään myös, että paraabeli on pisteen kanssa samalla puolella suoraa. Koska $y_0 > ax_0$, paraabeli on suoran ℓ yläpuolella. Todistetaan paraabelin yhtälö osissa.

1. $x = x_0$, ja $ax_0 < y < y_0$

Olkoon piste $P = (x, y)$. Paraabelin huippu $x = x_0$ sijaitsee johtosuoran ℓ ja polttopisteen P_0 puolivälissä. Tämä seuraa suoraan paraabelin määritelmästä. Näin ollen lauseen 4.2 mukaan paraabelin huippu sijaitsee pisteen P ja johtosuoran $y = ax$ pystysuuntaisen etäisyyden puolivälissä. Olkoon nyt $d_p = d_t(P, P_0)$ ja $d_\ell = d_t(P, \ell)$. Tällöin saadaan:

$$d_p = |y - y_0| + |x - x_0| = |y - y_0| + |0| = y_0 - y$$

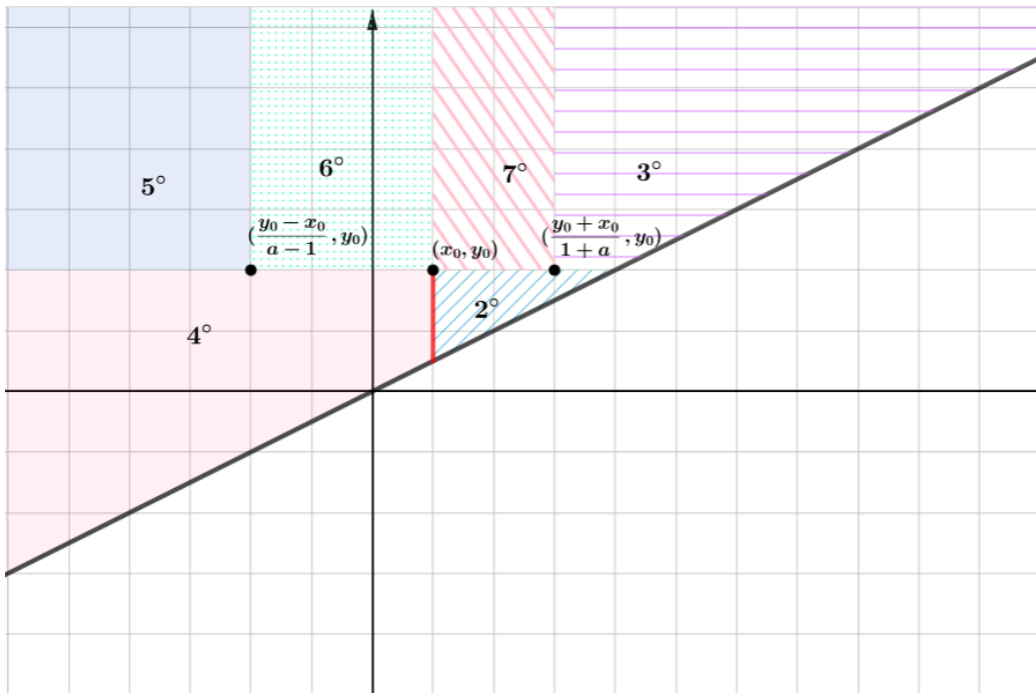
ja koska $|a| < 1$ sekä $|b| = 1$, niin

$$d_\ell = \frac{|y - ax|}{\max(|a|, |b|)} = |y - ax| = |y - ax_0| = y - ax_0.$$

Piste $P = (x, y)$ on paraabelilla, jos ja vain jos $d_p = d_\ell$, eli

$$y_0 - y = y - ax_0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{y_0 + ax_0}{2}$$

Paraabelin huipuksi saadaan siis piste $(x, y) = \left(x_0, \frac{y_0 + ax_0}{2}\right)$.



Kuva 4.20: Osoitetaan paraabeliin kuuluvat pisteet paloittain kuvan mukaisissa alueissa.

2. $x_0 < x$, ja $ax < y \leq y_0$

Käsitellään seuraavaksi tilanne, jossa piste $P = (x, y)$ sijaitsee kolmion muotoisen alueen sisällä, jota rajoittaa johtosuora ℓ , pystysuora polttopisteen ja johtosuoran välissä sekä vaakasuora johtosuoran ja polttopisteen välillä. Kuten aiemmassakin kohdassa, lasketaan pisteen P ja polttopisteen P_0 etäisyys $d_p = d_t(P, P_0)$

$$d_p = |y - y_0| + |x - x_0| = y_0 - y + x - x_0$$

ja pisteen P ja johtosuoran etäisyys $d_\ell = d_t(P, \ell)$

$$d_\ell = |y - ax| = y - ax.$$

Koska täytyy olla $d_p = d_\ell$, niin saadaan

$$\begin{aligned} y_0 - y + x - x_0 &= y - ax \\ y &= \left(\frac{1+a}{2}\right)x + \frac{y_0 - x_0}{2}. \end{aligned}$$

Tämä yhtälö esittää suoraa, jolla on positiivinen kulmakerroin. Se on osa paraabelia oletuksen mukaan vain, jos $y \leq y_0$. Asetetaan $y = y_0$ ja etsitään suurin x , jolle tämä pätee:

$$y_0 = \left(\frac{1+a}{2}\right)x + \frac{y_0 - x_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y_0 + x_0}{1+a}.$$

Näin saadaan paraabelille suora $y = \left(\frac{1+a}{2}\right)x + \frac{y_0 - x_0}{2}$, kun $x_0 < x \leq \frac{y_0 + x_0}{1+a}$ ja $ax < y \leq y_0$.

3. $\frac{y_0 + x_0}{1+a} < x$

Jatketaan edellisen kohdan mukaisesti. Oletetaan, että $y_0 < y$. Tällöin

$$\begin{aligned} d_p &= |y - y_0| + |x - x_0| \\ &= (y - y_0) + \left(x - \frac{y_0 + x_0}{1+a}\right) + \left(\frac{y_0 + x_0}{1+a} - x_0\right) \end{aligned}$$

ja

$$d_\ell = |y - ax| = y_0 + (y - y_0) - a \left(\frac{y_0 + x_0}{1+a}\right) - a \left(x - \frac{y_0 + x_0}{1+a}\right).$$

Koska piste $\left(\frac{y_0 + x_0}{1+a}, y_0\right)$ on paraabelilla, niin tämän pisteen etäisyys polttopisteestä on yhtäsuurta kuin tämän pisteen ja johtosuoran etäisyys. Tällöin

$$\frac{y_0 + x_0}{1+a} - x_0 = y_0 - \left(\frac{y_0 + x_0}{1+a}\right)a.$$

Koska $|a| < 1$ ja $x - \frac{y_0 + x_0}{1 + a} > 0$, niin

$$y - y_0 \leq |y_0 - y| \quad \text{ja} \quad a \left(x - \frac{y_0 + x_0}{1 + a} \right) < x - \frac{y_0 + x_0}{1 + a}$$

Näin ollen $d_\ell < d_p$ ja pisteet, joille pätee oletus $x > \frac{y_0 + x_0}{1 + a}$ eivät kuulu paraabeliin.

4. $x < x_0$ ja $ax < y \leq y_0$

Tutkitaan aluetta, joka on pisteen (x_0, y_0) vasemmalla puolella ja jota rajoittaa suorat ℓ ja $y = y_0$. Lasketaan jälleen etäisyydet $d_p = d_t(P, P_0)$ ja $d_\ell = d_t(P, \ell)$.

$$d_p = |y - y_0| + |x - x_0| = y_0 - y + x_0 - x$$

ja

$$d_\ell = |y - ax| = y - ax.$$

Piste P sijaitsee paraabelilla, jos $d_p = d_\ell$. Tällöin

$$\begin{aligned} y_0 - y + x_0 - x &= y - ax \\ y &= \left(\frac{a-1}{2} \right) x + \frac{y_0 + x_0}{2}. \end{aligned}$$

Saadaan siis suora $y = \left(\frac{a-1}{2} \right) x + \frac{y_0 + x_0}{2}$, mutta se on osa paraabelia vain, jos oletus $y \leq y_0$ pätee. Asetetaan $y = y_0$ ja etsitään x . Tällöin

$$y_0 = \left(\frac{a-1}{2} \right) x + \frac{y_0 + x_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y_0 - x_0}{a-1}.$$

Paraabeli on suora $y = \left(\frac{a-1}{2} \right) x + \frac{y_0 + x_0}{2}$, kun $\frac{y_0 - x_0}{a-1} \leq x < x_0$ ja $ax < y \leq y_0$.

5. $x < \frac{y_0 - x_0}{a-1}$

Jatketaan jälleen edellisen kohdan tapausta, kun $y_0 < y$. Tällöin

$$d_p = |y - y_0| + |x - x_0| = (y - y_0) + \left(x_0 - \frac{y_0 - x_0}{a-1} \right) + \left(\frac{y_0 - x_0}{a-1} - x \right)$$

ja

$$d_\ell = |y - ax| = y + (y - y_0) - \left(\frac{y_0 - x_0}{a - 1}\right)a + a\left(\frac{y_0 - x_0}{a - 1} - x\right).$$

Koska piste $\left(\frac{y_0 - x_0}{a - 1}, y_0\right)$ on paraabelilla, niin jälleen tämän pisteen etäisyys polttopisteestä on yhtäsuurta kuin tämän pisteen ja johtosuoran etäisyys. Siispä

$$\frac{y_0 - x_0}{a - 1} - x = y_0 - \left(\frac{y_0 - x_0}{a - 1}\right)a.$$

Koska $|a| < 1$ ja $\frac{y_0 - x_0}{a - 1} - x > 0$, niin oletuksista saadaan

$$y - y_0 \leq |y_0 - y| \quad \text{ja} \quad a\left(x - \frac{y_0 - x_0}{a - 1} - x\right) < \left(\frac{y_0 - x_0}{a - 1} - x\right).$$

Siispä $d_\ell < d_p$ ja pisteet, joille $x < \frac{y_0 - x_0}{a - 1}$ eivät siis kuulu paraabeliin.

6. $\frac{y_0 - x_0}{a - 1} \leq x < x_0$ ja $y > y_0$

Tutustutaan paraabelin pisteisiin, kun olemme kuvan 4.20 alueessa 6°. Kuten aiemmissakin kohdissa, lasketaan etäisyydet d_p ja d_ℓ .

$$d_p = |y - y_0| + |x - x_0| = y - y_0 + x_0 - x$$

ja

$$d_\ell = |y - ax| = y - ax.$$

Tällöin $d_p = d_\ell$ vain jos

$$y - y_0 + x_0 - x = y - ax \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y_0 - x_0}{a - 1}.$$

Eli saadaan paraabeliksi puolisuora $x = \frac{y_0 - x_0}{a - 1}$ kun $y > y_0$.

7. $x_0 \leq x < \frac{y_0 + x_0}{1 + a}$ ja $y > y_0$

Tutkitaan vielä viimeinen alue, johon mahdollisesti paraabelin pisteet voisi kuulua. Lasketaan jälleen etäisyydet d_p ja d_ℓ :

$$d_p = |y_0 - y| + |x_0 - x| = y - y_0 + x - x_0$$

ja

$$d_\ell = |y - ax| = y - ax.$$

Kuten aiemminkin, piste P kuuluu paraabelille, jos $d_p = d_\ell$. Tällöin

$$y - y_0 + x - x_0 = y - ax \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y_0 + x_0}{1 + a}.$$

Eli saadaan puolisuora $x = \frac{y_0 + x_0}{1 + a}$, kun $y > y_0$.

□

Näin saatiin muodostettua kuvan 4.19 mukainen paraabeli. Euklidisen ja taksigeometrian paraabelien eroavaisuuksia voi jälleen tarkastella Geogebra -applikaatiolla linkistä Paraabeli - taksigeometria. Lisää taksigeometrian paraabeleista voi lukea artikkeleista [9] ja [11].

4.5 Hyperbeli

Euklidisessa tasogeometriassa hyperbeli määritetään jälleen polttopisteiden ja johtosuoran avulla. Ellipsin ja paraabelin määritelmästä poiketen, hyperbelin parametrin e arvo on aidosti suurempaa kuin 1. Euklidisen hyperbelin määritelmä on

$$H_e = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(P, F) = e \cdot d_e(P, \ell)\},$$

missä $e > 1$, hyperbelin polttopiste on F ja johtosuora ℓ . Euklidisessa geometriassa hyperbeli voidaan sanoa myös kahden polttopisteen avulla, eli

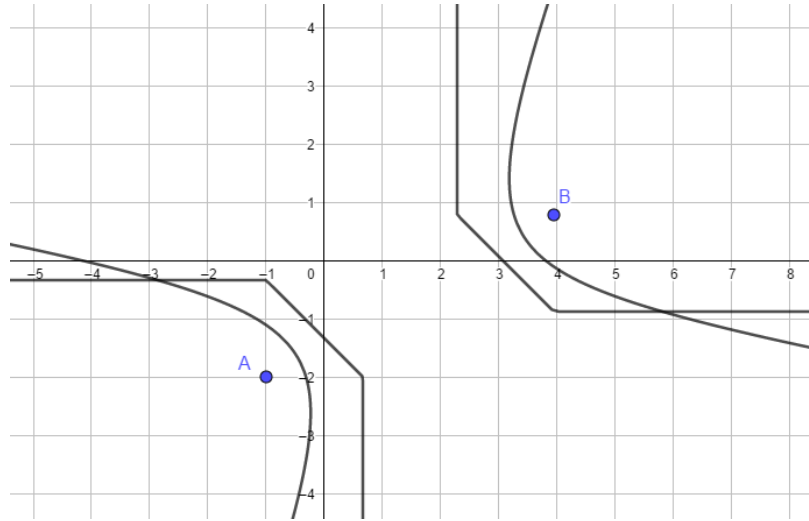
$$H_e = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d_e(F, P) - d_e(F', P)| = 2c\},$$

missä c on polttopisteiden F ja F' etäisyys. Taksigeometriassa hyperbelin yhtälö määritetään polttopisteiden etäisyyksien erotuksena pisteestä P .

Määritelmä 4.15. Olkoot pisteet $A, B \in \mathbb{R}^2$ ja vakio $\phi > 0$. *Hyperbeli* on niiden pisteiden P joukko, joille pätee

$$H = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d_t(A, P) - d_t(B, P)| = \phi\}.$$

Kuvassa 4.21 havainnollistetaan euklidisen geometrian ja taksigeometrian hyperbelien eroavaisuuksia. Hyperbelien eroavaisuuksia voi myös tutkia geogebra applikaatiolla, joka löytyy linkistä Hyperbeli - taksigeometria.



Kuva 4.21: Kuvassa on euklidinen hyperbeli ja taksigeometriian hyperbeli.

Lause 4.16. *Hyperbelin yhtälö on muotoa*

$$|x - a_1| + |y - a_2| - (|x - b_1| + |y - b_2|) \mp \phi = 0 \quad (4.3)$$

missä polttopisteet $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ sekä vakio $\phi > 0$.

Todistus. Olkoot pisteet $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $P = (x, y)$ sekä vakio $\phi \leq 0$. Pisteiden etäisyyden määritelmän ja hyperbelin määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned} |d_t(A, P) - d_t(B, P)| &= \phi \\ |a_1 - x| + |a_2 - y| - (|x - b_1| + |y - b_2|) &= \pm\phi \\ |a_1 - x| + |a_2 - y| - (|x - b_1| + |y - b_2|) \mp \phi &= 0. \end{aligned}$$

□

Tapausta, jossa $\phi = 0$ ei luokitella hyperbeliksi, sillä euklidisessa geometriassa tämä tuottaa pisteiden keskinormaalin. Taksigeometriassa vastaavasti saadaan pisteille uudenlainen keskinormaali. Tutustutaan tähän tapaukseen hieman tarkemmin Reynoldsin artikkelin *Taxicab Geometry* pohjalta [9].

Lause 4.17. *Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^2$ pisteitä ja $k = |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2|$. Jos hyperbelin yhtälössä $\phi = 0$, niin yhtälön (4.3) ratkaisujoukko on esitetty kuvan 4.22 vasemmassa yläkulmassa.*

Todistus. Olkoot $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $P = (x, y)$ pisteitä ja $k = |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2|$. Olkoon $\phi = 0$, jolloin $|d_t(A, P) - d_t(B, P)| = 0$ jos ja vain jos $d_t(A, P) = d_t(B, P)$. Tällöin

$$|x - a_1| + |y - a_2| = |x - b_1| + |y - b_2|.$$

Valitaan pisteet A ja B siten, että $a_1 < b_1$ ja $a_2 < b_2$. Koska $d_t(A, P) = d_t(B, P)$, piste P sijaitsee pisteiden A ja B välissä.

1. Olkoon siten $a_1 < x < b_1$ ja $a_2 < y < b_2$. Tällöin yllä oleva yhtälö on

$$\begin{aligned}(x - a_1) + (y - a_2) &= (b_1 - x) + (b_2 - y) \\ x + y - a_1 - a_2 &= -x - y + b_1 + b_2 \\ 2x + 2y &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \\ y &= -x + \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}.\end{aligned}$$

Hyperbeli on siten suora alueessa $a_1 < x < b_1$ ja $a_2 < y < b_2$.

2. Olkoon siten $a_1 < x < b_1$ ja $b_2 < y$. Tällöin yllä oleva yhtälö on

$$\begin{aligned}(x - a_1) + (y - a_2) &= (b_1 - x) + (y - b_2) \\ x + y - a_1 - a_2 &= -x + y + b_1 - b_2 \\ x &= \frac{a_1 + b_1 + a_2 - b_2}{2}.\end{aligned}$$

Hyperbeli on puolisuora alueessa $a_1 < x < b_1$ ja $b_2 < y$.

3. Olkoon siten $a_1 < x < b_1$ ja $y < a_2$. Tällöin yllä oleva yhtälö on

$$\begin{aligned}(x - a_1) + (a_2 - y) &= (b_1 - x) + (b_2 - y) \\ x - y - a_1 + a_2 &= -x - y + b_1 + b_2 \\ x &= \frac{a_1 + b_1 - a_2 + b_2}{2}.\end{aligned}$$

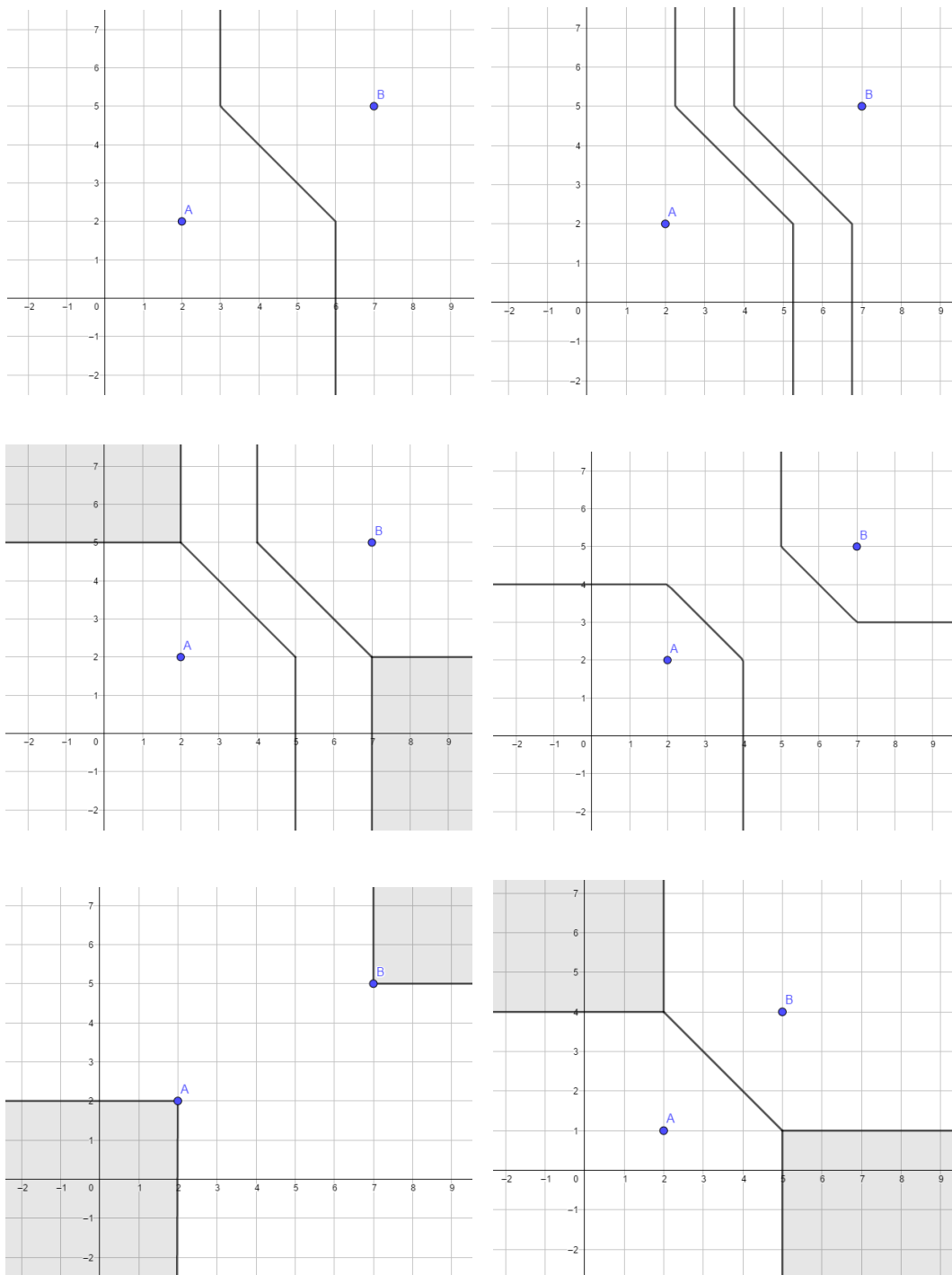
Hyperbeli on puolisuora alueessa $a_1 < x < b_1$ ja $y < a_2$.

Kuvio on siis kuvan 4.22 ylävasemman kaltainen. Tämä on taksigeometrian keskinormaali janalle AB . \square

Hyperbelin yhtälöstä nähdään, että se on ellipsin ja ympyrän yhtälöä monimutkaisempi taksigeometriassa. Yhtälöstä saadaan hyperbelille monimuotoinen tulos, joka vaihtelee pisteiden etäisyyden ja sijainnin mukaan. Määritetään hyperbelin vakio ϕ ja $k = |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2|$. Tällöin hyperbelia voidaan tarkastella kuudessa osassa kuvan 4.22 mukaisesti:

- (i) jos $0 < \phi < k$
- (ii) jos $\phi = k$
- (iii) jos $k < \phi < d_t(A, B)$
- (iv) jos $\phi = d_t(A, B)$
- (v) jos $k = 0$

Tapaus $d_t(A, B) < \phi$ ei ole mahdollinen lemmän 1.3 nojalla. Kuvassa 4.22 on esitetty kaikki taksigeometrian hyperbelit, lukuunottamatta kohtaa (vii), jossa hyperbelilla ei ole pisteitä. Lisäksi ensimmäisessä kuvassa on tapaus $\phi = 0$. Todistetaan seuraavassa lauseessa (iii)-kohta, joka muistuttaa ulkonäöltään eniten euklidista hyperbelia. Todistusta havainnollistetaan esimerkin avulla.



Kuva 4.22: Tapaukset ylävasemmalta alkaen: (i) $0 < \phi < k$, (ii) $\phi = k$, (iii) $k < \phi < d_t(A, B)$, (iv) $\phi = d_t(A, B)$, (v) $k = 0$.

Lause 4.18. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^2$ pisteitä ja $k = |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2|$. Jos $k < \phi < d_t(A, B)$, niin hyperbeli on kuten kuvassa 4.22 keskellä oikeassa laidassa.

Todistus. Olkoot $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $P = (x, y)$ pisteitä, joille lemma 4.3 pätee ja $k = |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2|$. Olkoon $k < \phi < d_t(A, B)$, jolloin $k < |d_t(A, P) - d_t(B, P)| < d_t(A, B)$. Tällöin

$$|a_1 - b_1| - |a_2 - b_2| < |x - a_1| + |y - a_2| - (|x - b_1| + |y - b_2|) < |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|. \quad (4.4)$$

Valitaan pisteet A ja B siten, että $a_1 < b_1$ ja $a_2 < b_2$.

1. Olkoon $x < a_1 < b_1$ ja $y < a_2 < b_2$. Tällöin hyperbelin yhtälöstä (4.3) saadaan

$$\begin{aligned} a_1 - x + a_2 - y - (b_1 - x + b_2 - y) \mp \phi &= 0 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \mp \phi &= 0. \end{aligned}$$

Hyperbelilla ei ole pisteitä alueessa $x < a_1 < b_1$ ja $y < a_2 < b_2$. Vastaavasti voitaisiin todistaa, että hyperbelilla ei ole pisteitä alueessa $a_1 < b_1 < x$ ja $a_2 < b_2 < y$.

2. Olkoon $x < a_1 < b_1$ ja $a_2 < y < b_2$. Tällöin

$$\begin{aligned} a_1 - x + y - a_2 - (b_1 - x + b_2 - y) \mp \phi &= 0 \\ y &= \frac{\pm\phi - a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}. \end{aligned}$$

Hyperbeli on x -akselin suuntainen puolisuora alueessa $x < a_1 < b_1$ ja $a_2 < y < b_2$. Vastaavasti saataisiin alueessa $a_1 < b_1 < x$ ja $a_2 < y < b_2$ x -akselin suuntainen puolisuora.

Tehdään esimerkki tilanteesta. Valitaan pisteet $A = (-2, -2)$ ja $B = (3, 0)$, jolloin $3 < \phi < 7$. Valitaan $\phi = 5$. Tällöin alueessa $x < -2$ ja $-2 < y < 0$ hyperbelin yhtälöksi saadaan

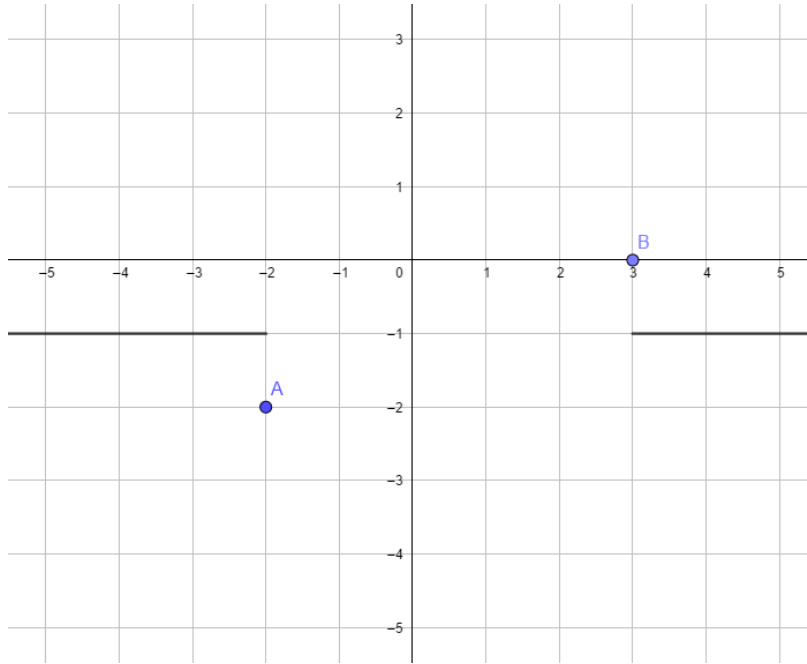
$$y = \frac{\pm 5 + 2 - 2 + 3 + 0}{2} = \frac{\pm 5 + 3}{2},$$

missä $y = 4$ ei kuulu välille $-2 < y < 0$. Siispä $y = -1$. Alueessa $3 < x$ ja $-2 < y < 0$, hyperbelin puolisuoraksi saadaan $y = 1$. Alla olevassa kuvassa 4.23 on havainnollistettu hyperbelin suoria.

3. Olkoon $x < a_1 < b_1$ ja $a_1 < b_1 < y$. Tällöin yhtälöstä (4.3) saadaan

$$\begin{aligned} a_1 - x + y - a_2 - (b_1 - x + y - b_2) \mp \phi &= 0 \\ a_1 - a_2 - b_1 + b_2 \mp \phi &= 0. \end{aligned}$$

Hyperbelilla ei siten ole pisteitä alueessa $x < a_1 < b_1$ ja $a_1 < b_1 < y$. Vastaavalla tavalla voitaisiin todistaa, että hyperbelilla ei ole pisteitä alueessa $a_1 < b_1 < x$ ja $y < a_2 < b_2$.



Kuva 4.23: Alueessa $x < -2$ ja $-2 < y < 0$ hyperbelin puolisuoraksi saadaan $y = -1$ ja kun $3 < x$ ja $-2 < y < 0$, niin saadaan $y = 1$.

4. Olkoon $a_1 \leq x < b_1$ ja $y \leq a_2 < b_2$. Siispä

$$x - a_1 + a_2 - y - (b_1 - x + b_2 - y) \mp \phi = 0$$

$$x = \frac{\pm\phi + a_1 - a_2 + b_1 + b_2}{2}.$$

Hyperbeli on y -akselin suuntainen puolisuora alueessa $a_1 \leq x < b_1$ ja $y \leq a_2 < b_2$. Vastaavasti alueessa $a_1 < x \leq b_1$ ja $a_2 < b_2 \leq y$ saadaan y -akselin suuntainen puolisuora.

Jatketaan kohdan 2. esimerkkiä. Siispä $-2 \leq x < 3$ ja $y \leq -2$. Tällöin hyperbeliksi saadaan

$$x = \frac{\pm 5 - 2 + 2 + 3 + 0}{2} = \frac{\pm 5 + 3}{2}.$$

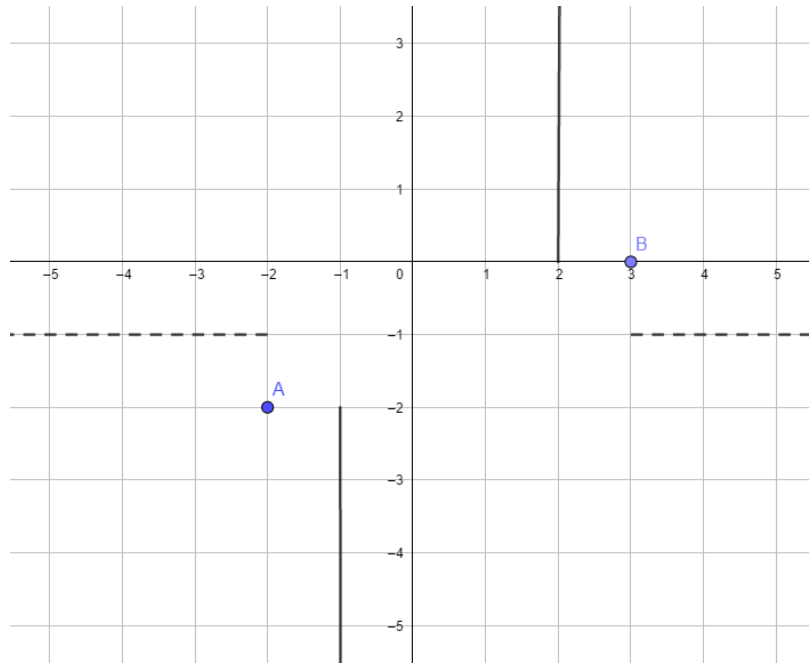
Siten hyperbeli on puolisuora $x = -1$, koska puolisuora $y = 4$ ei kuulu määritettyyn alueeseen $y \leq -2$. Vastaavasti alueessa $-2 < x \leq 3$ ja $0 \leq y$ saadaan puolisuora $x = 2$. Kuvassa 4.24 on piirrettynä saadut suorat.

5. Olkoon $a_1 < x < b_1$ ja $a_2 < y < b_2$. Tällöin yhtälöstä 4.3 saadaan

$$x - a_1 + y - a_2 - (b_1 - x + b_2 - y) \mp \phi = 0$$

$$2x + 2y - a_1 - a_2 - b_1 - b_2 \mp \phi = 0$$

$$y = -x + \frac{\pm\phi + a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}.$$



Kuva 4.24: hyperbeli on puolisuora $x = -1$ alueessa $y \leq -2$. Vastaavasti alueessa $-2 < x \leq 3$ ja $0 \leq y$ saadaan puolisuora $x = 2$

Hyperbelilla on siten kaksi yhdensuuntaista suoraa alueessa $a_1 < x < b_1$ ja $a_2 < y < b_2$. Tehdään jälleen aiempien kohtien mukainen esimerkki. Nyt $-2 < x < 3$ ja $-2 < y < 0$ ja hyperbelin yhtälöksi saadaan

$$y = -x + \frac{\pm 5 - 2 - 2 + 3 + 0}{2} = -x + \frac{\pm 5 - 1}{2}.$$

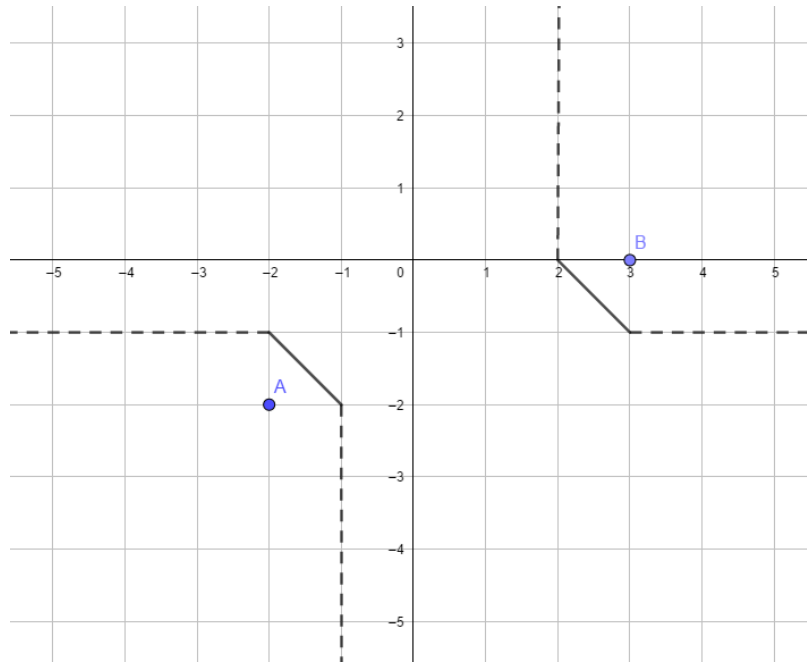
Hyperbeli on alueessa $-2 < x < 3$ ja $-2 < y < 0$ kaksi suoraa $y = -x + 2$ ja $y = -x - 3$. Kuvassa 4.25 on piirrettynä saadut suorat.

Hyperbeli koostuu siten neljästä puolisuorasta ja kahdesta janasta, kun $k < \phi < d_t(A, B)$. Vastaavasti voitaisiin todistaa tapaus $a_1 < b_1$ ja $b_2 < a_2$. \square

Muut tapaukset (ii)-(vi) voidaan käsitellä vastaavasti. Kuten ollaan huomattu, taksigeometrian toisen asteen käyrät poikkeavat euklidisista vastineista huomattavasti. Käyristä tulee kulmikkaampia ja monimutkaisempia. Lisää taksigeometrian käyristä voi lukea *The Pi Mu Epsilon Journal* lehden artikkeleista [9] ja [11].

5 Isometria

Euklidisessa geometriassa kuvaus on isometria, jos se säilyttää pisteiden etäisyydet. Määritetään aluksi isometria taksigeometriassa, kuten euklidisessa geometriassakin, metriikan d suhteen.



Kuva 4.25: Alueessa $-2 < x < 3$ ja $-2 < y < 0$ hyperbeli on kaksi suoraa $y = -x + 2$ ja $y = -x - 3$.

Määritelmä 5.1. Bijektio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on *isometria*, jos se säilyttää etäisyyden

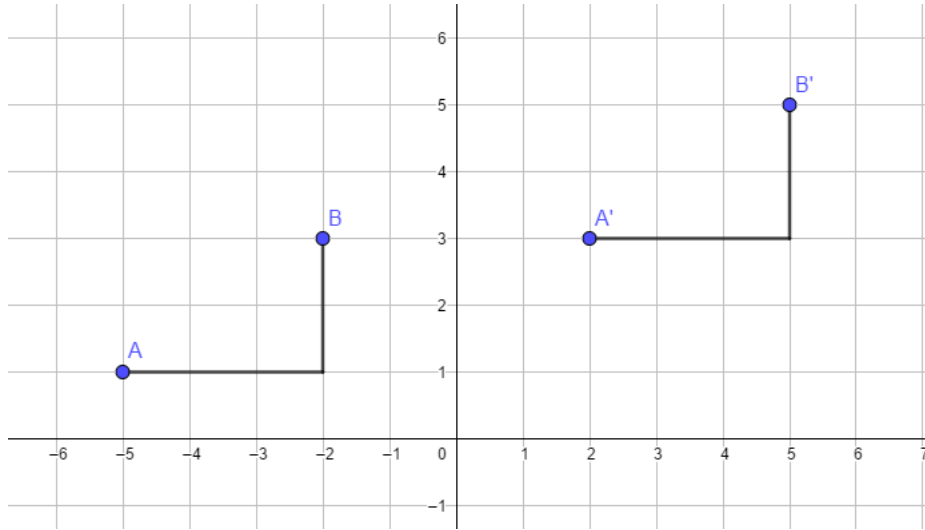
$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$. Isometrioiden f sisältämää joukkoa merkitään I_d .

Euklidisessa geometriassa tason siirrot, peilaukset ja kierrot ovat isometrioita. Tiedetään, että euklidisten isometrioiden joukko $I_e(2)$ (usein merkitään myös $E(2)$) voidaan sanoa joukkojen $O(2)$ ja $T(2)$ yhdisteenä, missä $O(2)$ sisältää kaikki tason kierrot ja peilaukset ja ryhmä $T(2)$, joka sisältää kaikki tason siirtokuvaukset. Jokainen isometria $f \in I_e(2)$ on muotoa $f(x) = T(P(x))$, missä $T \in T(2)$ ja $P \in O(2)$. Tutustutaan seuraavissa kappaleissa isometrisiin siirtoihin, peilauksiin ja kiertoihin taksigeometriassa Kocayusufoglun ja Özdamarin artikkelin *Isometries of Taxicab Geometry* [16] pohjalta.

5.1 Siirto eli translaatio

Taksigeometrian alkeet kappaleessa todistettiin, että kahden pisteen välinen minimi-etäisyys saadaan taksigeometriassa kaikkien pisteiden kautta, jotka kuuluvat pisteiden muodostamaan suorakulmioon. Siispä etäisyys kahden pisteen välillä voidaan ajatella esimerkiksi L-kirjaimen muotoisena etäisyytenä kuten kuvassa 5.1. On yksinkertaista näyttää, että kahden pisteen välinen etäisyys säilyy siirtofunktiossa, kuten euklidisessä geometriassakin. Tarkastellaan esimerkiksi kuvaa 5.1. Nähdään, että pisteiden etäisyyden L-kirjaimen muoto ja pituus säilyy siirron myötä. Seuraava lause näyttää, kuinka kaikki siirrot taksigeometriassa ovat isometrioita.



Kuva 5.1: Siirtokuvaus, joka säilyttää pisteiden A ja B etäisyyden.

Lause 5.2. *Olkoon kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(P) = P + a$ kaikille $P \in \mathbb{R}^2$. Tällöin kaikki taksigeometriian siirrot T ovat isometrisiä.*

Todistus. Isometrian määritelmän nojalla siirto on isometrinen, jos se säilyttää etäisyyden. Olkoon kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ siten, että $T(P) = P + a$ on siirtofunktio kuten euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^2 . Olkoot $P, Q \in \mathbb{R}^2$ pisteitä siten, että $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$. Jos pisteitä P ja Q siirretään a_x verran x -akselin suunnassa ja a_y y -akselin suunnassa, niin $a = (a_x, a_y)$ jollakin $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
 d_t(T(P), T(Q)) &= d_t(P + a, Q + a) \\
 &= |p_1 + a_x - (q_1 + a_x)| + |p_2 + a_y - (q_2 + a_y)| \\
 &= |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| \\
 &= d_t(P, Q).
 \end{aligned}$$

Siispä siirtofunktio T on isometrinen. □

Vastaavasti saataisiin euklidisen siirtokuvauksen isometrisyys todistettua. Siirtokuvaus taksigeometriassa on ainoa isometria, joka toimii ilman rajoitteita ja on vastaava kuin euklidisessä geometriassa isometrinen siirtojen joukko $T(2)$. Seuraavissa kappaleissa huomataan, kuinka peilaus ja kierto eivät käyttydy kuten euklidisessä tasogeometriassa.

5.2 Peilaus eli reflektio

Euklidisesta tasogeometriasta poiketen, taksigeometriassa on vain neljä isometristä peilausta. Lemman 4.3 mukaan pisteen P taksigeometrinen etäisyys suorasta ℓ on joko vaakatasoista tai pystysuuntaista, riippuen suoran ℓ kulmakertoimesta. Tarkastellaan aluksi tilannetta, missä peilaussuoran kulmakerroin on erisuurta kuin yksi,

koska tällöin pisteen ja suoran ℓ etäisyys olisi yhtäsuurta pystysuunnassa ja vaakasuunnassa. Euklidisessa geometriassa pisteen P peilaus suoran ℓ suhteen saadaan piirtämällä suoran ℓ normaali pisteen P kautta ja etsimällä piste tältä normaalilta suoran ℓ toiselta puolelta, jonka euklidinen etäisyys suorasta ℓ on yhtäsuurta kuin pisteen P etäisyys suorasta ℓ . Löydetään piste P' , joka on pisteen P peilaus suoran suhteen. Taksigeometrinen peilaus saadaan määritettyä vastaavalla tavalla, mutta täytyy huomioida, että pisteen etäisyys suorasta määritetään eri tavoin euklidisessa geometriassa ja taksigeometriassa. Siirtojen avulla riittää tarkastella peilauksia origon kautta kulkevien suorien suhteen. Seuraavassa merkintä $m = \infty$ tarkoittaa peilausta suoran $x = 0$ suhteen.

Määritelmä 5.3. Olkoon kuvaus $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Peilaus suoran $y = mx$ suhteen on

$$S_m(x, y) = \begin{cases} (x, 2mx - y), & 0 \leq |m| < 1 \\ \left(\frac{2y - mx}{m}, y\right), & |m| > 1 \\ (-x, y), & m = \infty. \end{cases}$$

Osoitetaan, että isometrisia peilauksia taksigeometrian tasossa ovat peilaukset akseleiden suhteen tai peilaukset suorien $y = x$ tai $y = -x$ suhteen. Seuraava lause osoittaa isometrisen peilauksen koordinaattiakseleiden suhteen taksigeometriassa.

Lause 5.4. *Olkoon suoran ℓ yhtälö $y = mx$, missä $|m| \neq 1$. Peilaus suoran ℓ suhteen on isometria jos ja vain jos $m = 0$ tai $m = \infty$.*

Todistus. Olkoon kuvaus $f_m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka on peilaus suoran $y = mx$ suhteen. Tällöin

$$f_m(x, y) = \begin{cases} (x, 2mx - y), & 0 \leq |m| < 1 \\ \left(\frac{2y - mx}{m}, y\right), & |m| > 1 \\ (-x, y), & m = \infty. \end{cases}$$

Oletetaan, että kuvaus f on isometria, jolloin saadaan ehto $d_t((x, y), (a, b)) = d_t(f_m(x, y), f_m(a, b))$. Käsitellään todistus osissa.

1. Olkoon $0 \leq |m| < 1$, jolloin

$$\begin{aligned} d_t((x, y), (a, b)) &= d_t(f(x, y), f(a, b)) \\ |x - a| + |y - b| &= |x - a| + |2ma - b - (2mx - y)|. \end{aligned}$$

Siispä $|y - b| = |2ma - b - (2mx - y)|$ ja tämä pätee jos ja vain jos $m = 0$. Peilaus f_m , missä $0 < m < 1$, on siis isometria täsmälleen silloin, kun $m = 0$, eli kyseessä on peilaus x -akselin suhteen.

2. Oletetaan seuraavaksi, että $|m| > 1$. Tällöin

$$d_t((x, y), (a, b)) = |x - a| + |y - b|$$

ja

$$\begin{aligned} d_t(f_m(x, y), f_m(a, b)) &= \left| \frac{2b - ma}{m} - \frac{2y - mx}{m} \right| + |y - b| \\ &= \left| \frac{2b - 2y}{m} + (x - a) \right| + |y - b|. \end{aligned}$$

Tarkastellaan pisteitä $(x, y) = (0, 1)$ ja $(a, b) = (0, 0)$, jolloin

$$\begin{aligned} d_t(f_m(x, y), f_m(a, b)) &= \left| \frac{-2}{m} \right| + |1| \\ &= \frac{2}{|m|} + 1 \\ &> 1 = d_t((x, y), (a, b)). \end{aligned}$$

Eli $d_t((x, y), (a, b)) \neq d_t(f_m(x, y), f_m(a, b))$, jolloin peilaus f_m ei ole isometria kaikilla pisteillä (x, y) ja (a, b) , kun $|m| > 1$.

3. Jos $m = \infty$, niin $f_m(x, y) = (-x, y)$ ja tällöin

$$\begin{aligned} d_t(f_m(x, y), f_m(a, b)) &= |-x - (-a)| + |y - b| \\ &= |x - a| + |y - b| \\ &= d_t((x, y), (a, b)). \end{aligned}$$

Siispä peilaus f_m , missä $|m| > 1$, on isometria täsmälleen silloin, kun $m = \infty$. Tällöin kyseessä on peilaus y -akselin suhteen.

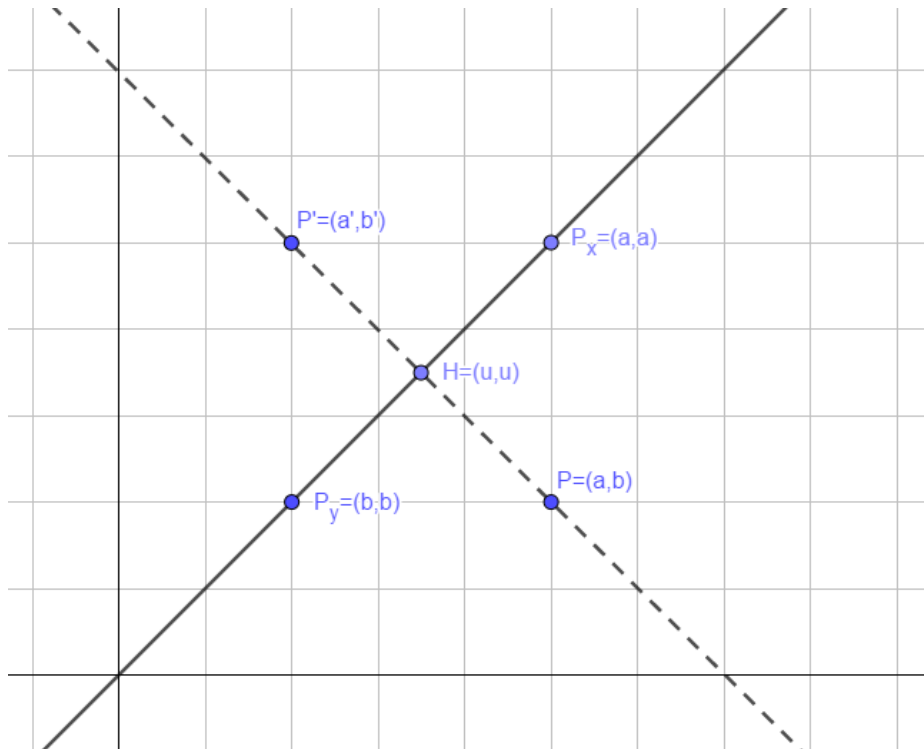
□

Aiemmin peilaussuoran kulmakertoimen oletettiin olevan erisuurta kuin 1 tai -1 . Olkoon nyt suoran kulmakerroin $m = \pm 1$, jolloin tarkastellaan peilauksia suorien $y = x$ ja $y = -x$ suhteen. Olkoon suora $y = x$. Jos piste $P = (a, b)$ on suoran y ulkopuolella, niin lauseen 1.12 ja lemmän 4.3 nojalla suoran ja pisteen minimietäisyys voidaan laskea usean pisteen kautta. Siispä peilaus suoran $y = x$ suhteen voidaan määrittellä erikseen jokaisen tällaisen pisteen avulla. Nyt suora $y = b$ kulkee pisteen P kautta, jolloin suorien $y = b$ ja $y = x$ leikkauspiste on $P_y = (b, b)$. Vastaavasti suoran $y = a$ ja $y = x$ leikkauspiste on $P_x = (a, a)$. Lauseen 1.12 nojalla jokaisella pisteellä, joka sijaitsee pisteiden P_x ja P_y välisellä janalla, on minimietäisyys pisteeseen P . Olkoon piste $H = (u, u)$ janalla $P_x P_y$. Kuva 5.2 havainnollistaa pisteitä. Tällöin etäisyys on $d_t(P, H) = |b - a|$. Tiedetään, että $u = b + \lambda(a - b)$, kun $0 \leq \lambda \leq 1$. Pisteellä P on olemassa peilaus P' suoran y suhteen, kun piste P' , joka on pisteen P kanssa eri puolella suoraa $y = x$ siten, että $d_t(P, H) = d_t(P', H)$. Osoitetaan, että peilattu piste on $P' = (a', b')$ missä $a' = -a + 2(b + \lambda(a - b))$ ja $b' = b + 2\lambda(a - b)$.

Pisteiden P' ja H etäisyydeksi saadaan

$$\begin{aligned}
 d_t(P', H) &= d_t((a', b'), (u, u)) \\
 &= |-a + 2b + 2\lambda(a - b) - (b + \lambda(a - b))| + |b + 2\lambda(a - b) - (b + \lambda(a - b))| \\
 &= |-a + b + \lambda(a - b)| + |b + 2\lambda a - 2\lambda b - b - \lambda a + \lambda b| \\
 &= |(-1)(a - b) + \lambda(a - b)| + |\lambda(a - b)| \\
 &= |\lambda - 1| |a - b| + |\lambda| |a - b| \\
 &= (1 - \lambda)|a - b| + \lambda |a - b| \\
 &= |a - b| \\
 &= d_t(P, H).
 \end{aligned}$$

Siispä P' on peilaus pisteestä P suoralla sijaitsevan pisteen H suhteen. Otetaan käyttöön merkintä H_λ tällaisille peilauksille, eli $H_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $H_\lambda(a, b) = (-a + 2(b + \lambda(a - b)), b + 2\lambda(a - b))$.



Kuva 5.2: Peilaus suoran $y = x$ suhteen.

Lause 5.5. H_λ -peilaukset suoran $y = x$ suhteen ovat isometrioita jos ja vain jos $\lambda = 1/2$.

Todistus. Oletetaan, että peilaus $H_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on isometria. Olkoon kuvaus

$$H_\lambda(x, y) = (-x + 2y + 2\lambda(x - y), y + 2\lambda(x - y)).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 d_t(H_\lambda(x, y), H_\lambda(a, b)) &= | -a + 2b + 2\lambda(a - b) - (-x + 2y + 2\lambda(x - y)) | \\
 &\quad + | y + 2\lambda(x - y) - (b + 2\lambda(a - b)) | \\
 &= | -a + 2b + 2\lambda a - 2\lambda b + x - 2y - 2\lambda x + 2\lambda y | \\
 &\quad + | y + 2\lambda x - 2\lambda y - b - 2\lambda a + 2\lambda b | \\
 &= | a(-1 + 2\lambda) + b(2 - 2\lambda) + x(1 - 2\lambda) + y(-2 + 2\lambda) | \\
 &\quad + | -2\lambda a + b(-1 + 2\lambda) + 2\lambda x + y(1 - 2\lambda) |
 \end{aligned}$$

ja

$$d_t((x, y), (a, b)) = |x - a| + |b - y|.$$

Olkoon $\lambda = \frac{1}{2}$. Etsitään pisteet (x, y) ja (a, b) siten, että pätee

$$d_t(H_\lambda(x, y), H_\lambda(a, b)) = d_t((x, y), (a, b)),$$

eli kuvaus f on isometria. Valitaan pisteiksi $(x, y) = (1, 0)$ ja $(a, b) = (0, 0)$. Tällöin

$$d_t(H_\lambda(x, y), H_\lambda(a, b)) = |1 - 2\lambda| + |2\lambda| = 1 = d_t((x, y), (a, b))$$

ja väite pätee kun $\lambda = \frac{1}{2}$.

Olkoon nyt $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Etsitään pisteet (x, y) ja (a, b) siten, että pätee

$$d_t(H_\lambda(x, y), H_\lambda(a, b)) \neq d_t((x, y), (a, b)),$$

eli peilaus H_λ ei ole isometria. Olkoon $\lambda > \frac{1}{2}$ ja valitaan $(x, y) = (1, 0)$ ja $(a, b) = (0, 0)$, niin tällöin sijoittamalla pisteet yllä olevaan lausekkeeseen saadaan

$$\begin{aligned}
 d_t(H_\lambda(x, y), H_\lambda(a, b)) &= |1 - 2\lambda| + |2\lambda| \\
 &= 2\lambda - 1 + 2\lambda \\
 &= 4\lambda - 1 \\
 &> 1 = d_t((x, y), (a, b)).
 \end{aligned}$$

Peilaus H_λ ei siten ole isometria, kun $\lambda > \frac{1}{2}$. Olkoon nyt $\lambda < \frac{1}{2}$ ja valitaan $(x, y) = (0, 1)$ ja $(a, b) = (0, 0)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
 d_t(H_\lambda(x, y), H_\lambda(a, b)) &= | -2 + 2\lambda | + | 1 - 2\lambda | \\
 &= 2 - 2\lambda + 1 - 2\lambda \\
 &= 3 - 4\lambda \\
 &> 1 = d_t((x, y), (a, b))
 \end{aligned}$$

ja peilaus H_λ ei ole isometria, kun $\lambda < \frac{1}{2}$.

□

Seuraus 5.6. *Isometrinen peilaus suoran $y = x$ suhteen on H_λ -peilaus, missä $\lambda = 1/2$.*

Sama tulos pätee peilaukselle suoran $y = -x$ suhteen. Näin ollen saatiin neljä taksigeometrian isometrasta peilausta. Kuten aiemmin jo todettiin, taksigeometriassa on vain nämä neljä isometrasta peilausta.

Seuraus 5.7. *Taksigeometriassa isometrinen peilaus voidaan tehdä vain suorien $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ ja $y = -x$ suhteen.*

Taksigeometrian peilaukset voidaan esittää myös matriiseilla:

$$S_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

missä ensimmäinen ja toinen matriisi ovat peilauksia x - ja y -akseleiden suhteen ja jälkimmäiset matriisit peilauksia suorien $y = x$ ja $y = -x$ suhteen.

Merkitään taksigeometrian isometrisia peilauksien joukkoa $S_t(2)$ ja euklidisen taksigeometrian isometrisia peilauksia vastaavasti $S_e(2)$. Euklidisessa geometriassa peilaukset origon kautta kulkevan suoran suhteen ovat muotoa $g(x) = Ax$, missä $A \in O(2)$ ja $\det(A) = -1$. Lisäksi isometrisilla siirroilla mikä tahansa suora saadaan origon kautta kulkeväksi suoraksi ja takaisin. Näin ollen $S_t \subset S_e$.

5.3 Kierto eli rotaatio

Tutkitaan seuraavaksi isometrisia kiertoja taksigeometriassa. Kierroissa käytetään euklidisiä trigonometrisia funktioita, jotka antavat taksigeometrialle isometriset kierrot. Vastaavasti voitaisiin kierrot käsitellä taksigeometrian trigonometrisilla funktioilla [8]. Esitetään teoreema, että mahdollisia isometrisia kiertoja on vain neljä.

Lause 5.8. *Isometriset kierrot taksigeometriassa ovat*

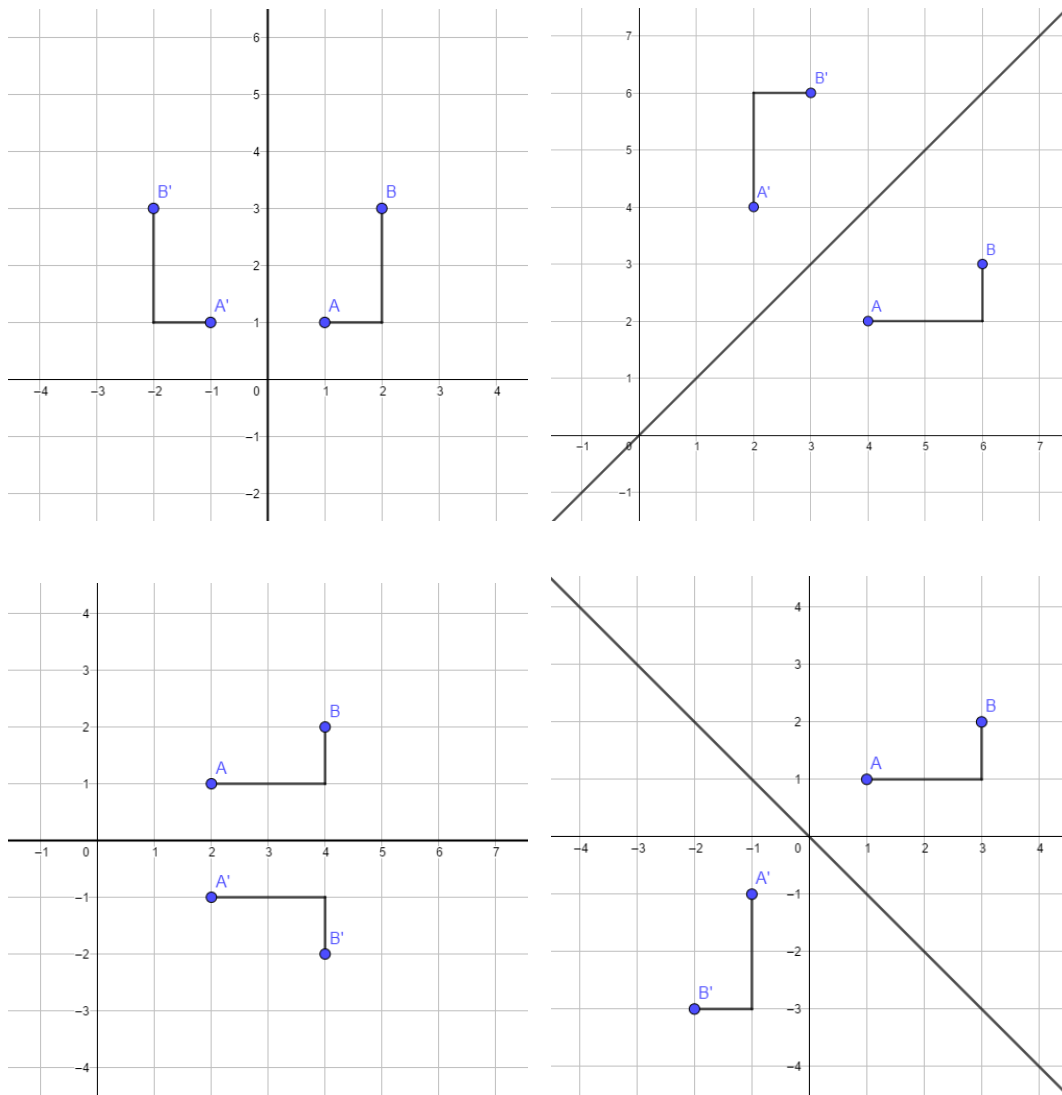
$$R_t = \{A_\theta((x, y)) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \mid \theta = k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3\}$$

Todistus. Olkoot pisteet $P = (1, 0)$ ja $Q = (0, 1)$. Oletetaan kierto A_θ isometriseksi. Kierretään pistettä P kulman θ verran, jolloin saadaan $A_\theta(P) = (\cos \theta, \sin \theta)$ yksikköympyrässä. Kierretään myös pistettä Q kulman θ verran, jolloin saadaan $A_\theta(Q) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Koska kierto on isometrinen, niin täytyy olla $d_t(P, Q) = d_t(A_\theta(P), A_\theta(Q))$. Pisteiden etäisyydeksi saadaan $d_t(P, Q) = 2$, jolloin täytyy olla $(A_\theta(P), A_\theta(Q)) = 2$. Tällöin

$$d_t(A_\theta(P), A_\theta(Q)) = |\cos \theta + \sin \theta| + |\sin \theta - \cos \theta| = 1 + |\sin \theta - \cos \theta| = 2$$

eli $|\sin \theta - \cos \theta| = 1$. Siispä

$$\sin \theta - \cos \theta = 1 \quad \text{tai} \quad \sin \theta - \cos \theta = -1$$



Kuva 5.3: Kuvassa esitetty kaikki taksigeometrian isometriset peilaukset.

ja näin ollen

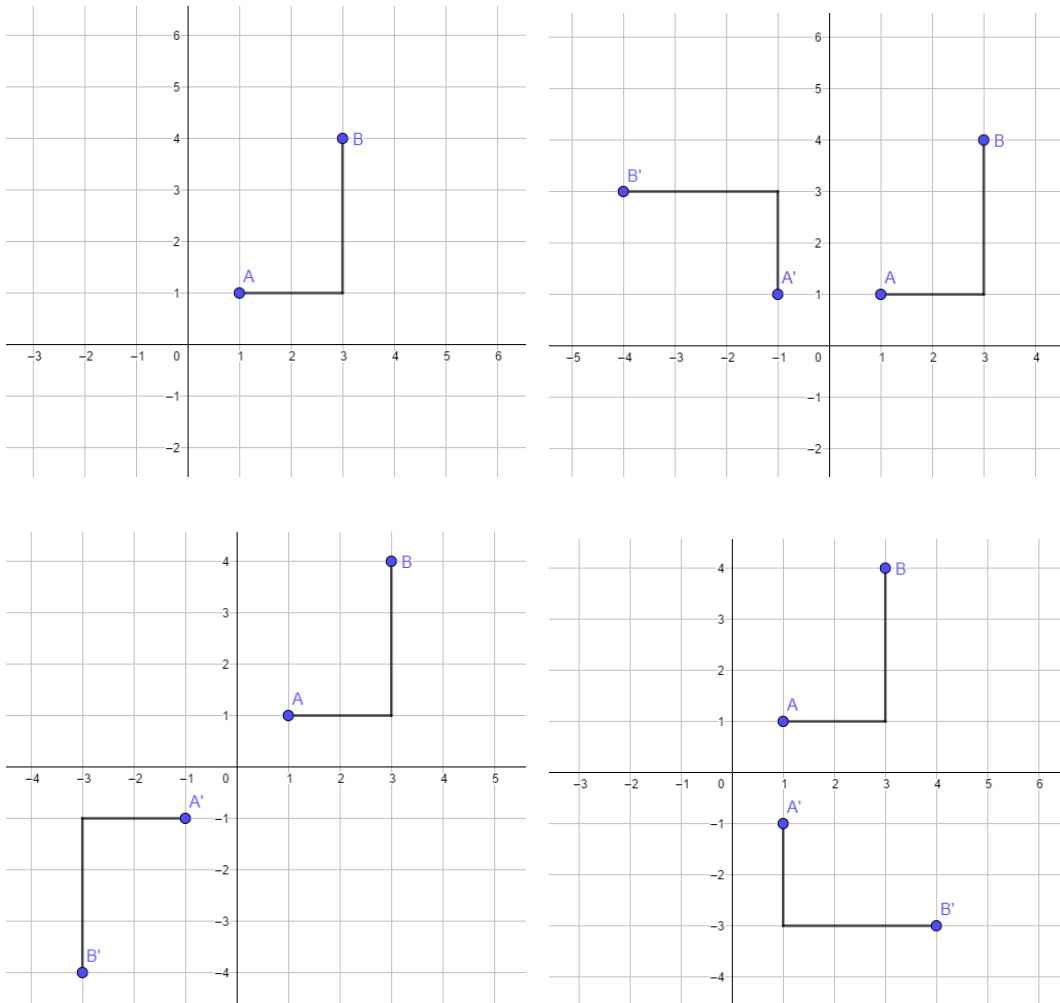
$$\cos \theta = 0 \quad \text{tai} \quad \sin \theta = 0$$

Tällöin on oltava $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ ja suora lasku osoittaa, että näille θ on $d_t(A_\theta(x), A_\theta(y)) = d_t(x, y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$. □

Lause 5.9. *Olkkoon kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrinen ja olkkoon $\square AB$ suorakulmio. Tällöin*

$$F(\square AB) = \square(F(A)F(B))$$

Todistus. Muistetaan, että kahden pisteen etäisyys voidaan laskea pisteen P kautta, joka kuuluu suorakulmioon $\square AB$. Olkkoon piste $P \in F(\square AB)$. Tällöin, kun $P \in$



Kuva 5.4: Kuvassa esitetty kaikki taksigeometrian isometriset kierrot.

$F(\square AB)$, niin löytyy jokin $C \in \square AB$, jolle pätee $P = F(C)$. Lauseen 1.12 nojalla saadaan

$$d_t(A, C) + d_t(C, B) = d_t(A, B)$$

ja koska kuvaus F on isometrinen, niin pätee

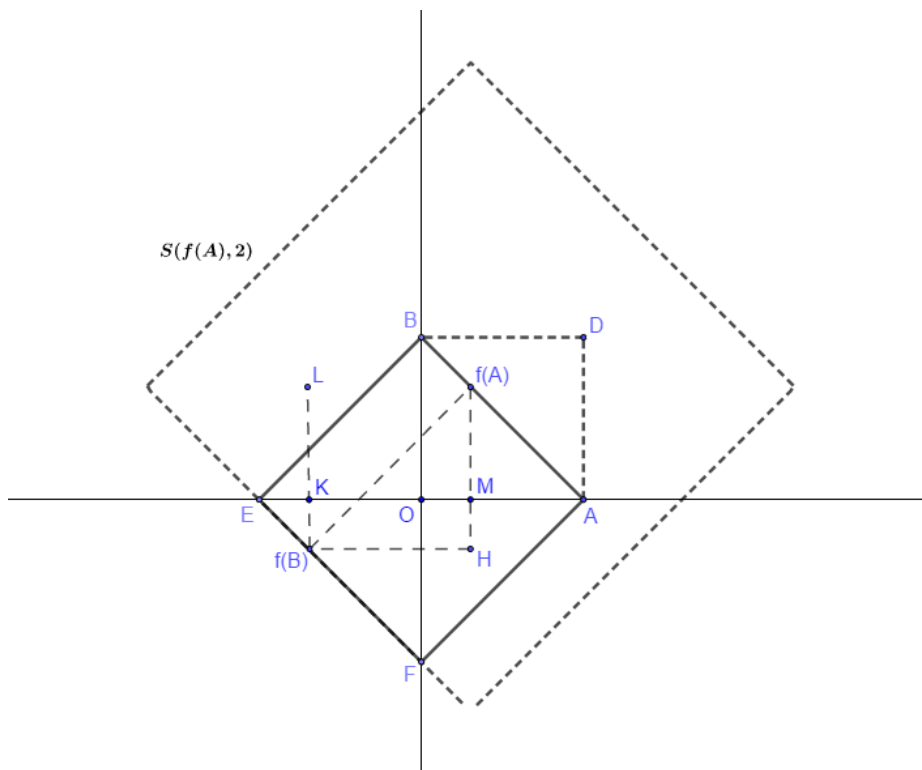
$$d_t(F(A), F(C)) + d_t(F(C), F(B)) = d_t(F(A), F(B)).$$

Tällöin $P = F(C) \in \square F(A)F(B)$. □

Seuraus 5.10. *Olkoon kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrinen ja olkoon $\square AB$ tason suorakulmio. Tällöin kuvaus F säilyttää suorakulmion nurkkapistet ja lisäksi suorakulmion piirin pituuden.*

Lause 5.11. *Olkoon kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrinen siten, että $f(0) = 0$. Tällöin $f \in \mathbb{R}_t$ tai $f \in S_t$.*

Todistus. Olkoot $A = (1, 0)$ ja $B = (0, 1)$ suorakaiteen $\square OD$ nurkkapisteitä. Olkoot muut pisteen kuvan kuten kuvassa 5.5. Tällöin kuvaus $f(A)$ kuuluu jollekin janoista, eli $f(A) \in AB$ tai $f(A) \in BE$ tai $f(A) \in EF$ tai $f(A) \in AF$. Käsitellään näistä ensimmäinen tapaus, jossa $f(A) \in AB$.



Kuva 5.5: Todistuksen idea.

Olkoon siten kuvaus $f(A) \in AB$, missä $f(A) \neq A$ ja $f(A) \neq B$. Tällöin

$$d_t(A, B) = 2 \quad \text{ja} \quad d_t(O, B) = 1,$$

mistä saadaan isometrisyyden nojalla

$$d_t(f(A), f(B)) = 2 \quad \text{ja} \quad d_t(f(O), f(B)) = 1.$$

Koska $f(0) = 0$, $f(O) = O$ ja pisteen $f(B)$ täytyy sijaita origokeskisellä yksikköympyrällä. Lisäksi koska pisteiden $f(A)$ ja $f(B)$ etäisyys on kaksi, niin pisteen $f(B)$ täytyy olla $f(A)$ -keskisellä ja 2-säteisellä ympyrällä. Siispä $f(B) \in EF$ ja

$$1 = d_t(O, f(B)) = d_t(f(B), K) + d_t(K, O).$$

Näin ollen $d_t(K, O) < 1$.

Toisaalta, koska D on suorakulmion $\square AB$ nurkkapiste, niin lauseen 5.9 ja seurausten 5.10 nojalla $f(D)$ on suorakulmion $\square(f(A)f(B))$ nurkkapiste. Lisäksi koska

$d_t(K, O) < 1$ ja $d_t(O, D) = 2$, niin saadaan $f(D) \neq H$ ja siten täytyy olla $f(D) = L$. Yhdistämällä nämä saadaan, että

$$d_t(K, O) < 1 \quad \text{ja} \quad d_t(L, K) = d_t(K, O) = d_t(O, L) = d_t(O, D) = 2,$$

jolloin $d_t(L, K) > 1$. Huomataan lisäksi, että $1 \leq d_t(M, f(A)) = d_t(L, K)$, mikä on ristiriita. Täytyy siis olla $f(A) = A$ tai $f(A) = B$.

1. Jos $f(A) = A$, niin f on identtinen kuvaus, joka on kiertokuvaus kiertokulmalla $\theta = 0$ tai peilaus x -akselin suhteen. Siispä $f \in \mathbb{R}_\theta$ tai $f \in S$ ja väite pätee.
2. Jos $f(A) = B$, niin $f(B) = A$, $f(B) = E$ tai $f(B) = F$. Käydään kaikki tapaukset läpi.
 - (a) Jos $f(B) = A$, niin f on peilaus suoran $y = x$ suhteen, eli $f \in S$ ja väite pätee.
 - (b) Jos $f(B) = E$, niin f on kiertokuvaus, jossa kiertokulma on $\theta = \frac{\pi_t}{2}$ ja $f \in \mathbb{R}_\theta$. Jälleen väite pätee.
 - (c) Todistetaan viimeinen kohta $f(B) = F$. Tällöin

$$f(\square AB) = \square(f(A)f(B)) = \square BF,$$

missä $\square BF$ on jana BF . Näin ollen kuvaus $f(D)$ kuuluu janalle BF ja $d_t(O, f(D)) \leq 1$. Kuitenkin

$$2 = d_t(O, D) = d_t(O, f(D)),$$

mikä on ristiriita ja $f(B) \neq F$.

Vastaavalla tavalla voitaisiin todistaa tapaukset $f(A) \in BE$, $f(A) \in EF$ ja $f(A) \in AF$. Näistä todistuksista saadaan loput osoitukset kierroille ja peilauksille. \square

Isometriset kierrot voidaan esittää myös matriiseina

$$R_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Merkitään $O_t(2) = R_t \cup S_t$. Todistetaan viimeisenä, että kaikki taksigeometrian isometriat ovat aina joko $T(2)$ tai $O_t(2)$ tai näiden yhdiste.

Lause 5.12. *Olkoon kuvaus $F : \mathbb{R}_T^2 \rightarrow \mathbb{R}_T^2$ isometria. Silloin on olemassa yksikäsitteiset $T_a \in T(2)$ ja $C \in O_t(2)$ siten, että $F = T_a \circ C$.*

Todistus. Olkoon $F(0) = a$. Määritetään $C = T_{-a} \circ F$. Tällöin on selvää, että C on isometrinen ja $C(0) = 0$. Lauseen 5.11 mukaan $C \in O_t(2)$ ja siten $F = T_a \circ C$. \square

Kuten euklidisessa geometriassakin, taksigeometrian isometriat ovat aina yhdiste siirroista, peilauksista ja kierroista. Aiemmin kappaleessa 2 näytettiin, että taksigeometriassa ei päde euklidisen geometrian SKS-sääntö (aksioma (H13)). Hartshornen teoksesta *Geometry: Euclid and Beyond* osoitetaan yhteys isometrioiden lukumäärälle ja SKS-säännölle [17, s. 153]: Jos on olemassa riittävän paljon isometrioita, niin SKS-sääntö on voimassa. Koska taksigeometriassa isometrioiden lukumäärä on huomattavasti pienempi kuin euklidisessa, jolloin SKS-lause ei voi olla voimassa taksigeometriassa.

Osa III

Geogebra

6 Geogebra yleisesti

Geogebra on dynaaminen matematiikkaohjelmisto, jossa yhdistyy matematiikan osa-alueet geometriasta algebraan. Ohjelmistoa voidaan käyttää opetuksessa aina alakoulusta jopa yliopistoon asti. Geogebra -ohjelmistoa on mahdollista käyttää erinäisillä tietoteknisillä alustoilla ja käyttöjärjestelmillä ja ohjelman saa ladattua ilmaiseksi käyttöönsä. Ohjelmistoa on myös mahdollista käyttää suoraan internetselaimella osoitteessa www.geogebra.org. Ohjelmisto koostuu useammasta osasta, joita on mahdollista käyttää yhdessä ja erikseen. Geogebra -ohjelmistosta löytyy helppokäyttöinen geometrian osa (Geometry Software DGS) ja algebran osa (Computer Algebra systems CAS). Näiden avulla voidaan yhdistää geometria, algebra ja laskenta, jotka usein käsitellään erillisinä osa-alueina koulumatematiikassa. Esimerkiksi ohjelmistolla on mahdollista konstruoida pisteitä, suoria ja kartiroleikkauksia geometrian osassa. Algebra osassa on mahdollista määrittää funktioita, tutkia funktion juuria, derivoida ja integroida. Geogebra on siis yhdistelmä näitä kaikkia. Lisäksi on tärkeää huomata, kuinka geogebra taipuu samaan lopputulokseen useasta eri näkökulmasta. Esimerkiksi ympyrän piirtäminen on mahdollista sekä geometria että algebra -osiossa.

Geogebrian kehittäjä on Markus Hohenwarter, Salzburgin yliopistosta, Itävallasta. Hän kehitti Geogebra-ohjelmiston osana hänen matematiikan ja tietotekniikan Pro gradu työtönsä vuosina 2001-2002. Hänen toiveena oli kehittää matemaattinen ohjelmisto, joka auttaisi ja kehittäisi oppilaiden matemaattista ymmärtämistä. Kun ohjelma julkaistiin, useat opettajat ottivat Hohenwarteriin yhteyttä ja kertoivat innoissaan ohjelman käytöstä opetuksessa. Hohenwarter jatkoi ohjelman kehitystä apurahan turvin tohtorin tutkinnossaan, jossa hän tutki Geogebrian pedagogisia menetelmiä itävaltalaisissa kouluissa. Ohjelmisto on voittanut paljon kansainvälisiä palkintoja ja se on käännettynä useille eri kielille. Itävallan opetusministeriä on myös tukenut Geogebrian kehitystyötä ja ylläpitoa vuodesta 2006 lähtien. Vuonna 2006 Geogebra levisi myös Yhdysvaltoihin, missä kehitystä on jatkettu Floridan Atlantic yliopiston projektissa. Elokuussa 2006 Hohenwarter aloitti vierailevana luennoitsijana Floridan yliopistossa. Yhdysvalloissa työskennellessään, hän on kehittänyt Geogebra-ohjelmistoa tutkimusten nojalla vielä paremmin opetukseen soveltuvaksi.

Kun ohjelma julkaistiin, Hohenwarteria kutsuttiin pitämään seminaareja ja geogebra-työpajoja Euroopassa ja Pohjois-Amerikassa. Opettajien liitot, yliopistot ja akateemiset konferenssit olivat kiinnostuneita hänen työstään. Geogebrian käyttö on laajentunut opetusluokista myös tutkijoiden käyttöön ja ohjelmistoa on käytetty myös opetuskirjallisuudessa. Geogebra on kansainvälisesti huomiota herättänyt ohjelmisto ja se on käännettynä yli 40 kielelle vapaaehtoisten voimin. Sivustolla on käyttäjiä yli 350 000 kuukaudessa, 188 eri maasta. Tutkimusten ja aktiivisuuden mukaan on arvioitu, että tuhannet opettajat käyttävät ohjelmistoa opetuksessaan maailmanlaajuisesti. Käyttäjien pyyntöjen lisääntyessä, Hohenwarter julkaisi geogebra foorumin

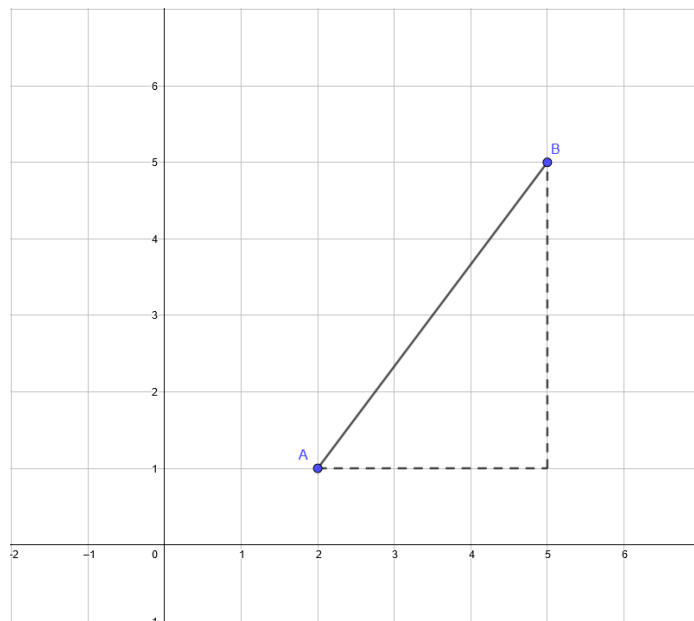
ja geogebrawikin, jossa käyttäjien on mahdollista saada tukea ja materiaalia muilta käyttäjiltä. Nämä löytyvät osoitteesta <https://help.geogebra.org/topic/welcome-to-the-geogebra-user-forum>. Geogebralla ei ole omaa ohjelmistoa tai foorumia jatko-opiskelijoille, mutta sitä on kuitenkin sisällytetty jo joissakin yliopistoissa opettajao-piskelijoiden opetukseen. Geogebbran perustaja Hohenwarter ja hänen tiiminsä päät-tivät luoda kuitenkin uuden organisaation, jotta voidaan tavoittaa ja tukea opet-tajia ilmaisella ammattiohjelmistolla, varmistaa ohjelmiston teknistä kehitystä sekä koordinoita geogebraan liittyviä tutkimuksia. Näin syntyi Kansainvälinen Geogebra Instituutti (IGI).

Geogebra Instituutin ensimmäinen kokous järjestettiin toukokuussa 2008. Kaksi-kymmentä kansainvälistä vierasta saapui Cambridgen yliopiston kasvatustieteelliseen tiedekuntaan, jossa ensimmäinen kokous kesti kaksi vuorokautta. Kokouksessa käsi-teltiin perustetun kansainvälisen instituution ja alueellisesti perustettujen instituutioiden (GI) visioista, rakenteista ja tulevaisuuden tavoitteista. Henkilöitä oli paikalla ympäri maailman, Yhdysvalloista, Kanadasta, Englannista, Espanjasta, Unkarista, Norjasta, Puolasta, Luxemburgista, Islannista ja Ranskasta. Esille tulleet tutkimuk-set osoittivat, että tietotekniikan hyödyntäminen opetuksessa ei toteudu pelkästään teknologiaa lisäämällä. Instituutin ensimmäisessä kokouksessa aloitettiin kehittämään IGI:n visiota näiden tutkimusten nojalla; Kansainvälinen Geogebra Instituut-ti (IGI) tarjoaa ilmaisen dynaamisen matemaattisen ohjelmiston ja jakaa osaamista koulutukseen, tukeen ja kehitykseen materiaaleja kaikille opiskelijoille ja opettajil-le matematiikan, tieteen ja tekniikan koulutuksen parantamiseksi maailmanlaajui-sesti. Se ylläpitää ja edistää yhteistyötä opettajien ja tutkijoiden välillä. Instituut-in rakennetta määriteltiin seuraavasti: Kansainvälinen GeoGebra-instituutti on kes-keinen, virtuaalinen organisaatio, joka toimii yhdessä riippumattoman, alueellisten GeoGebran Instituutioiden (GIs) kanssa, ja jotka antavat virallisia todistuksia Geo-Gebran käyttäjille, asiantuntijoille ja kouluttajille. Ensimmäisen kokouksen raport-ti, jossa kuvaillaan IGI:n yleistä rakennetta ja tavoitteita, paikallisille instituutioille valtuutettuja projekteja, Geogebra käyttäjien ja kouluttajien todistukset ja yksityis-kohtaisemmat päivitykset Geogebra -projekteista ja tutkimuksista löytyy osoittees-ta www.geogebra.org/institutes. Sivustolta löytyy myös tietoa nykyisten instituutioi-den määrästä ja käyttäjistä. Suomen Geogebra -verkoston blogi löytyy osoitteesta <https://geogebbrasuomi.wordpress.com/>. [18] [19]

7 Geogebrian sovelluksia taksigeometriassa

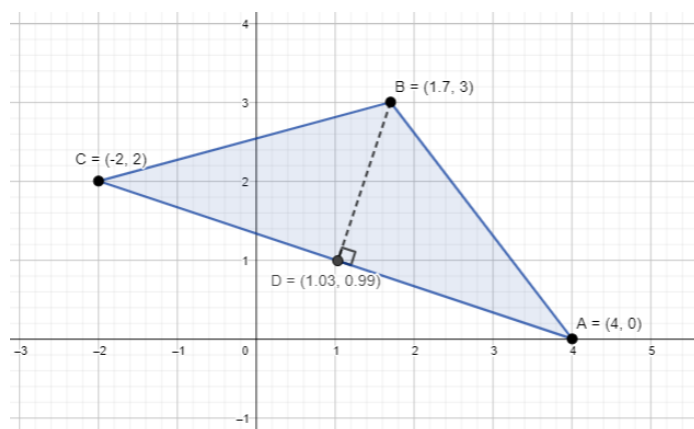
Tässä tutkielmassa määritetyt Geogebra -applikaatiot löytyvät tästä kappaleesta lueteltuna. Jokaisen kuvan jälkeisestä linkistä pääsee kokeilemaan ja testaamaan applikaation toimintaa. Kaikki applikaatiot löytää myös linkistä Geogebra -applikaatiot.

1. Kahden pisteen etäisyys



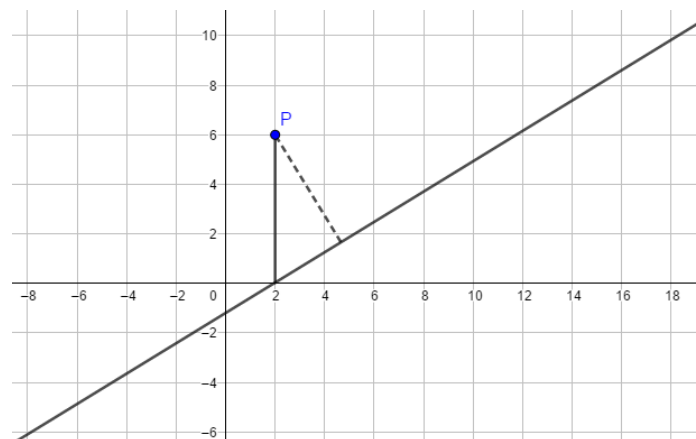
Kahden pisteen etäisyys taksigeometriassa verrattuna euklidiseen etäisyyteen.

2. Kolmio



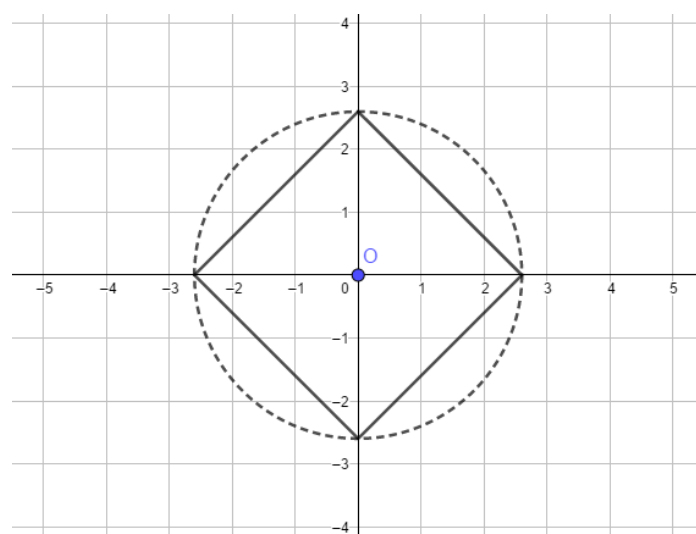
Kolmioiden vertailua taksigeometriassa ja euklidisessä tasogeometriassa.

3. Pisteen etäisyys suorasta



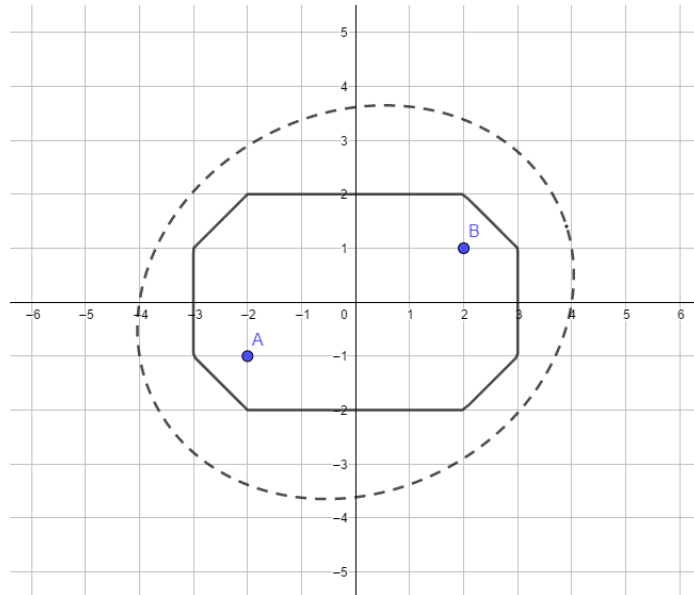
Pisteen etäisyys suorasta taksigeometriassa ja euklidisessä geometriassa

4. Ympyrä



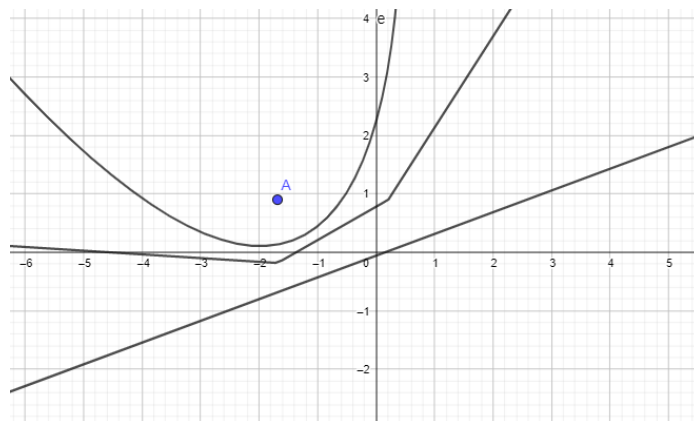
Taksigeometrian ja euklidisen ympyrän vertailua.

5. Ellipsi



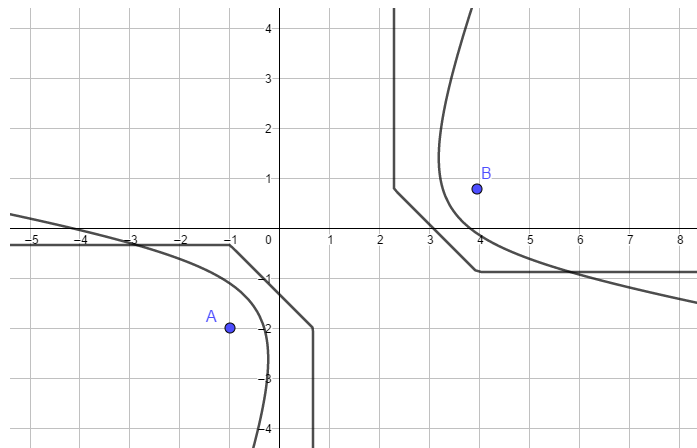
Ellipsi taksigeometriassa ja euklidisessa geometriassa.

6. Paraabeli



Paraabeli molemmissa geometrioissa.

7. Hyperbeli



Hyperbeli taksigeometriassa ja euklidisessä.

Viitteet

- [1] M.J. GREENBERG: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 3. painos, W. H. Freeman and Company, 1993.
- [2] E.F. KRAUSE: *Taxicab Geometry. An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1965.
- [3] J. VÄISÄLÄ: *Topologia 1*, Jyväskylän Yliopisto, 2011.
- [4] J.R. HANSON: *A Visit to Taxicab Geometry*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2012, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.662291>
- [5] L. KURITTU, V-M. HOKKANEN, L. KAHANPÄÄ: *Geometria*. Jyväskylän Yliopisto, 1993. <http://users.jyu.fi/laurikah/Geometria/Geometria2006.pdf>
- [6] K. RÜSTEM: *Area Formula for Taxicab Triangles*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 12, No. 4, 2006, s. 219-220
- [7] K. THOMPSON, T. DRAY: *Taxicab Angles and Trigonometry*, The Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 11, No. 2, 2000, s. 87-96
- [8] R. BRISBIN, P. ARTOLA: *Taxicab Trigonometry*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 8, No. 2, 1985, s. 89-95
- [9] B.E. REYNOLDS: *Taxicab Geometry*, Pi Mu Epsilon Journal, Volume 7, No. 2, 1980, s. 77-88
- [10] R.I. BERGER: *From Circle to Hyperbola in Taxicab Geometry*, The Mathematics Teacher, Vol. 109, No. 3, 2015, s. 214-219
- [11] J.M. MOSER, F. KRAMER: *Lines on Parabolas in Taxicab Geometry*, Pi Mu Epsilon Journal, Volume 7, No. 7, 1982, s. 441-448
- [12] T. SONGLIN, S. SHING-SEUNG, C. GUANGHUI *Concerning circles in taxicab geometry*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 28, No. 5, 1997, s. 727-733
- [13] K.P. THOMPSON: *Taxicab Triangle Incircles and Circumcircles*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 13, No. 5, 2011
- [14] D. BRANNAN, M. ESPLEN, J. GRAY: *Geometry*, 2. painos, Cambridge University Press, 2012
- [15] M. PETROVIC, B. MALESEVIC, B. BANJAC, R. OBRADOVIC: *Geometry of some Taxicab Curves*, <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1405/1405.7579.pdf>

- [16] I. KOCAYUSUFOGLU, E. ÖZDAMAR: *Isometries of Taxicab Geometry*, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1, V. 47, 1998, s. 73-83
- [17] R. HARTSHORNE: *Geometry: Euclid and Beyond*, 2. painos, Springer Science & Business Media, 2000
- [18] M. HOHENWARTER, D. JARVIS, Z. LAVICZA: *Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute*, International Journal for Technology in Mathematics Education, 2009
- [19] *Geogebra kotisivut*, www.geogebra.org