Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuus ja Hausdorffin mitta

Henna-Kaisa Salo

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Henna-Kaisa Salo, *Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuus ja Hausdorffin mitta*, matematiikan Pro Gradu -tutkielma, 27 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on osoittaa, että Lebesguen mitta on kiertoinvariantti, sekä esitellä lukijalle Hausdorffin mitta ja sen ominaisuuksia. Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuuden todistus vaatii paljon esitietoja, joita käsittelemme ensimmäisessä luvussa. Toisessa luvussa todistamme, että Lebesguen mitta on kiertoinvariantti, ja kolmannessa luvussa tutustumme Hausdorffin mittaan.

Ensimmäisessä luvussa tarkastelemme useita Mitta- ja integraaliteorian kurssilta opiskelijalle tuttuja määritelmiä ja lauseita, esimerkiksi Lebesguen ulkomittaan, Lebesguemitallisuuteen ja lopuksi myös Lebesguen mittaan liittyen. Eräitä tärkeitä tuloksia ovat mitallisten joukkojen ominaisuudet ja Lebesguen mitan siirtoinvarianttisuus. Näitä tuloksia tarvitsemme myöhemmin, jotta voimme osoittaa Lebesguen mitan olevan kiertoinvariantti.

Toisen luvun alussa määrittelemme Whitney-kuutiot, jotka ovat puoliavoimia kuutioita, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Esittelemme myös muita Whitney-kuutioiden ominaisuuksia. Tämän jälkeen kertaamme kääntyvän lineaarikuvauksen ominaisuuksia ja määrittelemme kiertokuvauksen. Näiden valmistelujen jälkeen olemme valmiit todistamaan tutkielman päätuloksen: mille tahansa $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m^*(TE) = |\det T| \cdot m^*(E)$ aina, kun T on kääntyvä lineaarikuvaus. Todistuksen jälkeen pystymme toteamaan, että Lebesguen mitta on kiertoinvariantti, sillä kiertokuvaukselle pätee $|\det T| = 1$.

Viimeisessä luvussa tutkimme yleistä ulkomittaa μ ja osoitamme, että μ-mitallisten joukkojen kokoelma muodostaa σ-algebran. Osoitamme myös, että metrinen ulkomitta on Borel-mitta. Tämän jälkeen tutustumme Hausdorffin mittaan, ja osoitamme sen olevan ulkomitta, Borel-mitta ja Borel-säännöllinen. Lopuksi toteamme, että Hausdorffin ja Lebesguen n-ulotteiset mitat ovat yhtä suuret avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Mittateoriaa 3

Luku 2. Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuus 11
2.1. Whitney-kuutiot 11
2.2. Kierto 12
2.3. Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuus 12

Luku 3. Hausdorffin mitta 19
3.1. Metrinen avaruus ja yleinen ulkomitta 19
3.2. Hausdorffin mitta ja sen ominaisuudet 21
3.3. Hausdorffin ja Lebesguen mittojen yhtäsuuruus 25

Kirjallisuutta 27

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutkia Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuutta ja tutustua Hausdorffin mittaan. Mitta- ja integraaliteorian kurssilla on todistettu, että Lebesguen mitta on siirtoinvariantti. Samalla kurssilla opiskelija on saattanut kiinnittää huomiota kaavaan, joka kertoo miten Lebesguen mitta käyttäytyy lineaarisissa muutoksissa, esimerkiksi kun kyseessä on kierto. Kaavaa ei kuitenkaan ole todistettu kurssilla, joten teemme sen tässä tutkielmassa. Todistus on monivaiheinen, ja se vaatii tietämystä Lebesguen mitan ominaisuuksista. Hausdorffin mittaa käsittelemme tutkielman loppupuolella, jolloin tutustumme laajemmin myös ulkomitan käsitteeseen.

Ensimmäisessä luvussa tarkastelemme tärkeitä Lebesguen ulkomittaan ja sen ominaisuuksiin sekä Lebesgue-mitallisuuteen liittyviä määritelmiä ja lauseita, joista useimmat ovat tuttuja esimerkiksi Mitta- ja integraaliteorian kurssilta. Lebesgue-mitallisuuteen tutustumisen jälkeen määrittelemme Lebesguen mitan, ja palautamme mieleen muun muassa Lebesguen mitan siirtoinvarianttisuuden todistuksineen. Siirtoinvarianttisuudesta on suuri hyöty Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuuden osoittamisessa.

Toisessa luvussa tutkimme ensin Whitney-kuutioita, jotka ovat puoliavoimia kuutioita, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Esittelemme myös muita Whitney-kuutioiden ominaisuuksia. Seuraavaksi tutkimme kiertokuvausta ja sitä vastaavaa matriisia, ja toteamme kiertokuvauksen matriisin determinantin arvon olevan 1. Näiden valmistelujen jälkeen olemme valmiit todistamaan tutkielman päälauseen: mille tahansa $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m^*(TE) = |\det T| \cdot m^*(E)$ aina, kun T on kääntyvä lineaarikuvaus. Lopuksi toteamme edellä mainitun lauseen avulla, että Lebesguen mitta on kiertoinvariantti.

Kolmannessa luvussa tutkimme Hausdorffin mittaa ja sen ominaisuuksia. Ensin määrittelemme yleisen ulkomitan ja tarkastelemme siihen liittyviä lauseita. Sen jälkeen määrittelemme Hausdorffin mitan, ja todistamme, että se on ulkomitta. Osoitamme luvussa myös sen, että Hausdorffin mitta on Borel-mitta ja Borel-säännöllinen. Lopuksi toteamme, että Hausdorffin ja Lebesguen mitat ovat yhtä suuret.

LUKU 1

Mittateoriaa

Tässä luvussa esittelemme muutamia tuttuja määritelmiä ja lauseita, joita tarvitsemme tutkielman päätulosten todistamiseen. Määritelmien ja lauseiden ideat ovat peräisin Cravenin [**1**] ja Follandin [**2**] teoksista, sekä Kilpeläisen [**5**] luentomonisteesta.

Aluksi tutkimme Lebesguen ulkomittaa ja sen ominaisuuksia. Sen jälkeen tutustumme Lebesgue-mitallisiin joukkoihin, joita tarvitsemme luvun lopussa Lebesguen mitan määrittämiseen.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Joukko $I = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I^{(n)}$ on väli $\mathbb{R}^n$:ssä, missä $I^{(k)} = (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$. Koska välit $I^{(k)}$ ovat avoimia, on myös I avoin. Välin I geometrinen mitta on

$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n),$$

ja lisäksi $v(\emptyset) = 0$.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguen ulkomitta on luku

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_1^\infty v(I_i) : I_i \in \mathcal{K} \text{ ja } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_i\right\},$$

missä $\mathcal{K}$ tarkoittaa avoimien välien joukkoa.

Lebesguen ulkomitalla on tiettyjä ominaisuuksia, joita tarvitaan esimerkiksi kiertoinvarianttisuuden todistamisessa. Seuraavat ominaisuudet ovat tuttuja Mitta- ja integraaliteorian kurssilta. Lause todistuksineen löytyy myös Kilpeläisen [**5**] luentomonisteesta, Lause 2.1.

LAUSE 1.3. *Lebesguen ulkomitalle* $m^* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *pätee*

(1) $m^*(\emptyset) = 0$
(2) $m^*(A) \leq m^*(B)$ *kun* $A \subset B$ *(monotonisuus)*
(3) $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^\infty m^*(A_i)$ *kun* $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. *(subadditiivisuus)*

TODISTUS. (1) Tässä voidaan valita $I_i = \emptyset$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, jolloin $v(I_i) = 0$. Siis Määritelmän 1.2 nojalla $m^*(\emptyset) = 0$.

(2) Olkoon $\bigcup_{i=1}^\infty I_i$ joukon B peite, jolloin $B \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_i$. Tällöin on myös $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_i$, joten $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^\infty v(I_i)$. Tämä pätee kaikille joukon B peitteille, joten $m^*(A) \leq m^*(B)$.

(3) Olkoon $\epsilon > 0$. Voidaan valita välit $I_{i,j}$ siten, että $A_i \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_{i,j}$, ja

$$\sum_{j=1}^\infty v(I_{i,j}) \leq m^*(A_i) + 2^{-i}\epsilon \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}.$$

Täten $\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j}$ on joukon $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ peite. Siis

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v(I_{i,j}) < \sum_{i=1}^{\infty}(m^*(A_i) + 2^{-i}\epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) + \epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i).$$

□

Seuraava lause ja sen todistus ovat Cravenin [**1**] kirjasta (Proposition 3.3.6).

Lause 1.4. *Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin mille tahansa joukolle $E \subset \mathbb{R}^n$ on olemassa avoin joukko $G \supset E$ siten, että*

$$m^*(G) < m^*(E) + \epsilon.$$

Todistus. Olkoon I_n avoin väli siten, että $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ja

$$m^*(E) > \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) - \epsilon.$$

Tällöin $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ on avoin ja ulkomitan määritelmän ja subadditiivisuuden nojalla

$$m^*(G) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < m^*(E) + \epsilon.$$

□

Määrittelemme nyt Lebesgue-mitalliset joukot:

Määritelmä 1.5. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, jos

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \backslash A)$$

kaikille $E \subset \mathbb{R}^n$. Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelmaa merkitään

$$\mathcal{M}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on Lebesgue-mitallinen}\}.$$

Käytämme jatkossa joukosta $E \backslash A$ myös merkintää $E \cap A^C$.

Esittelemme seuraavaksi muutamia Lebesgue-mitallisia joukkoja. Seuraavan lauseen todistus mukailee Kilpeläisen [**5**] Lemman 2.4 todistusta.

Lause 1.6. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(A) = 0$. Tällöin A on Lebesgue-mitallinen.*

Todistus. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(A) = 0$. Tällöin $(E \cap A) \subset A$ ja $(E \backslash A) \subset E$, joten oletuksen ja Lebesguen ulkomitan monotonisuuden nojalla

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \backslash A) \leq m^*(A) + m^*(E) = m^*(E).$$

Koska Lebesguen ulkomitan subadditiivisuuden nojalla on myös

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \backslash A) \geq m^*(E),$$

niin täten

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \backslash A) = m^*(E).$$

Siis A on Lebesgue-mitallinen. □

Seuraava mitallisia joukkoja esittelevä lemma ja sen todistuksen idea on Cravenin [**1**] kirjasta (Proposition 3.3.12, Proposition 3.3.13):

Lemma 1.7. *Olkoon A ja B Lebesgue-mitallisia. Tällöin myös*

(1) *A^C on Lebesgue-mitallinen*
(2) *$A \cup B$ on Lebesgue-mitallinen*
(3) *$A \cap B$ on Lebesgue-mitallinen.*

Todistus. (1) Määritelmän 1.5 nojalla

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right) = m^*\left(E \cap (A^C)^C\right) + m^*\left(E \cap A^C\right),$$

joten A^C on Lebesgue-mitallinen.

(2) Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Koska A on Lebesgue-mitallinen, on

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right).$$

Myös B on Lebesgue-mitallinen, joten voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} m^*\left(E \cap A^C\right) &= m^*\left(E \cap A^C \cap B\right) + m^*\left(E \cap A^C \cap B^C\right) \\ &= m^*\left(E \cap A^C \cap B\right) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C \cap B\right) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right) \\ &\geq m^*\left((E \cap A) \cup (E \cap A^C \cap B)\right) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right) \\ &= m^*\left(E \cap (A \cup B)\right) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Koska subadditiivisuuden nojalla pätee aina

$$m^*(E) \leq m^*\left(E \cap (A \cup B)\right) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right),$$

niin täytyy olla

$$m^*(E) = m^*\left(E \cap (A \cup B)\right) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right),$$

ja täten $A \cup B$ on Lebesgue-mitallinen.

(3) Kohdan (1) nojalla A^C ja B^C ovat Lebesgue-mitallisia ja kohdan (2) nojalla myös $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$ on Lebesgue-mitallinen. Tällöin taas kohdan (1) nojalla $\left((A \cap B)^C\right)^C = A \cap B$ on Lebesgue-mitallinen.

□

Seuraava lause ja sen todistus mukailee Kilpeläisen [**5**] luentomonistetta, Lause 2.5 ja Seuraus 2.6.

Lause 1.8. (1) *Olkoon A, B Lebesgue-mitallisia. Tällöin $A \backslash B$ on Lebesgue-mitallinen.*

(2) *Olkoon $A_1, A_2, \ldots$ Lebesgue-mitallisia. Tällöin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on Lebesgue-mitallinen.*
(3) *Olkoon $A_1, A_2, \ldots$ Lebesgue-mitallisia. Tällöin $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ on Lebesgue-mitallinen.*
(4) *jos $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}_n$ ovat erillisiä, niin tällöin $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.*

Todistus. (1) Huomataan, että $A\backslash B = A \cap B^C$. Koska Lemman 1.7 nojalla B^C on Lebesgue-mitallinen ja täten myös $A \cap B^C$ on Lebesgue-mitallinen, on $A\backslash B$ Lebesgue-mitallinen.

(2) Olkoon $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2\backslash A_1,\ B_3 = A_3\backslash(A_1 \cup A_2), \ldots, B_j = A_j\backslash(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{j-1}) = A_j\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right)$, jolloin jokainen B_i $(i = 1, 2, \ldots, j)$ on Lebesgue-mitallinen. Lisäksi $B_n \cap B_m = \emptyset$, kun $m \neq n$, eli joukot B_i ovat erillisiä. Pätee myös, että

$$\bigcup_{j=1}^{N} A_j = \bigcup_{j=1}^{N} B_j \text{ ja}$$

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Merkitään $S_N = \bigcup_{j=1}^{N} A_j = \bigcup_{j=1}^{N} B_j$. Tällöin S_N on Lebesgue-mitallinen. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Osoitetaan induktiolla, että

$$m^*(E \cap S_N) = \sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j). \tag{1.3}$$

(a) Olkoon $N = 1$, jolloin selvästi

$$m^*(E \cap S_1) = m^*(E \cap B_1).$$

(b) Induktio-oletus: Oletetaan, että yhtälö (1.3) pätee kaikille N.

(c) Induktioaskel: Testataan, päteekö yhtälö (1.3) kaikille $N + 1$. Koska S_N on mitallinen, voidaan sen, induktio-oletuksen ja tiedon $S_N \subset S_{N+1}$ avulla kirjoittaa

$$\begin{aligned} m^*(E \cap S_{N+1}) &= m^*\left((E \cap S_{N+1}) \cap S_N\right) + m^*\left((E \cap S_{N+1}) \cap S_N^C\right) \\ &= m^*(E \cap S_N) + m^*(E \cap B_{N+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap B_{N+1}) \qquad (1.4) \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} m^*(E \cap B_j). \end{aligned}$$

Täten yhtälö (1.3) pätee kaikille $N \in \mathbb{N}$. Nyt pätee myös

$$\sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) = m^*(E \cap S_N) \leq m^*\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = m^*(E \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j)$$

ja kun $N \to \infty$, niin $\sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j)$, joten

$$m^*(E \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j). \tag{1.5}$$

Joukon S_N mitallisuuden, ulkomitan monotonisuuden ja yhtälön (1.3) nojalla

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap S_N) + m^*\left(E \cap S_N^C\right) \\ &\geq \sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) + m^*\left(E \cap A^C\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) + m^*\left(E \cap A^C\right) \\ &= m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ulkomitan subadditiivisuudesta kuitenkin seuraa

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right),$$

joten täytyy olla

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right).$$

Siis $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ on Lebesgue-mitallinen.

(3) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \backslash A_j)$ on Lauseen kohtien (1) ja (2) nojalla Lebesgue-mitallinen.

(4) Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_n$ ovat erillisiä, niin tällöin $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \dots B_j = A_j$. Kun yhtälössä (1.5) valitaan $E = \mathbb{R}^n$, niin saadaan

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m^*(A) = m^*(E \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j).$$

□

Seuraava lause todistuksineen on Kilpeläisen [**5**] monisteesta, Lause 2.12.

Lause 1.9. *Olkoon A ja B Lebesgue-mitallisia, $m(A) < \infty$ ja $A \subset B$. Tällöin*

$$m^*(B \backslash A) = m^*(B) - m^*(A).$$

Todistus. Lauseen 1.8 kohdan (3) nojalla $B \backslash A$ on mitallinen. Koska $B \backslash A$ ja A ovat erillisiä ja $A \subset B$, niin täten $B = (B \backslash A) \cup A$ ja Lauseen 1.8 kohdan (4) nojalla

$$m^*(B) = m^*(B \backslash A) + m^*(A),$$

josta seuraa

$$m^*(B \backslash A) = m^*(B) - m^*(A).$$

□

Seuraavaksi esittelemme mittateoriassa paljon käytetyt joukot, Borel-joukot. Borel-joukot muodostavat Borelin σ-algebran.

Määritelmä 1.10. Joukon X osajoukkojen kokoelma $\mathcal{F}$ on σ-algebra joukossa X, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
(2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $X \backslash A \in \mathcal{F}$.
(3) Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Täten esimerkiksi Lebesgue-mitalliset joukot muodostavat σ-algebran Lauseiden 1.6 ja 1.8 nojalla.

Määritelmä 1.11. Borel-joukkojen σ-algebra on joukkokokoelma

$$\mathcal{B} = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ on } \sigma\text{-algebra, joka sisältää avaruuden } \mathbb{R}^n \text{ avoimet joukot}\}.$$

Borel-joukkojen σ-algebran joukkoja kutsutaan Borel-joukoiksi.

Mielivaltaisen monen σ-algebran leikkaus on myös σ-algebra, mikä tekee Borel-joukkojen määritelmästä järkevän. Borel-joukot ovat Lebesgue-mitallisia.

Seuraava lause on Kilpeläisen [**5**] luentomonisteesta, Lause 2.13.

Lause 1.12. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen ja $m(A) < \infty$. Tällöin on olemassa Borel-joukko B jolle $A \subset B$ ja $m^*(B \backslash A) = 0$.*

Todistus. Lauseen 1.9 nojalla on

$$m^*(B \backslash A) = m^*(B) - m^*(A).$$

Näytetään siis nyt, että $m^*(B) = m^*(A)$. Lauseen 1.4 nojalla kaikille $j \in \mathbb{N}$ on olemassa avoin joukko U_j siten, että $A \subset U_j$ ja

$$m^*(U_j) \leq m^*(A) + \frac{1}{j}.$$

Valitaan B siten, että $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Tällöin B on Borel-joukko. Koska nyt on $A \subset B \subset U_j$, niin täten

$$m^*(A) \leq m^*(B) \leq m^*(U_j) \leq m^*(A) + \frac{1}{j}.$$

Koska tämä pätee kaikille $j \in \mathbb{N}$, niin täytyy olla

$$m^*(B) = m^*(A).$$

Siis

$$m^*(B \backslash A) = 0.$$

□

Tähän mennessä olemme tutustuneet Lebesguen ulkomittaan ja Lebesgue-mitallisiin joukkoihin. Lebesguen ulkomitan määritelmässä ei ollut väliä, onko mitattava joukko Lebesgue-mitallinen vai ei. Lebesguen mitta saadaan, kun Lebesguen ulkomitta rajoitetaan Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelmaan:

Määritelmä 1.13. Lebesguen mitta on funktio $m : \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$, jolle pätee $m(A) = m^*(A)$, kun A on Lebesgue-mitallinen.

Seuraava lause on tuttu Mitta- ja integraaliteorian kurssilta, mutta sen todistus on kirjoittajan itse laatima. Tarvitsemme tietoa Lebesguen mitan siirtoinvarianttisuudesta esimerkiksi kiertoinvarianttisuuden todistamisessa.

Lause 1.14. *Lebesguen mitta on siirtoinvariantti. Toisin sanoen kaikille $A \in \mathcal{M}_n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $m(A + x) = m(A)$.*

Todistus. Olkoon
$$I = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I^{(n)}$$
ja
$$I + x = \left(I^{(1)} + x_1\right) \times \left(I^{(2)} + x_2\right) \times \cdots \times \left(I^{(n)} + x_n\right).$$
Osoitetaan, että
$$v(I + x) = v(I).$$

Olkoon välin $I^{(k)}$ päätepisteet $a_k \leq b_k$, jolloin välin $I^{(k)} + x_k$ päätepisteet ovat $a_k + x_k \leq b_k + x_k$.

Tällöin välin I geometrinen mitta on
$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n)$$
ja välin $I + x$ geometrinen mitta on
$$\begin{aligned} v(I + x) &= (b_1 + x_1 - (a_1 + x_1))(b_2 + x_2 - (a_2 + x_2))\dots(b_n + x_n - (a_n + x_n)) \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Siis $v(I + x) = v(I)$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Voidaan valita välit I_i siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ja
$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \leq m(A) + \epsilon.$$
Tällöin on myös $A + x \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i + x)$ ja
$$m(A + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i + x) = \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \leq m(A) + \epsilon.$$
Asettamalla $\epsilon \to 0$ saadaan
$$m(A + x) \leq m(A).$$
Samalla tavalla pätee
$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i + x) \leq m(A + x) + \epsilon,$$
ja asettamalla $\epsilon \to 0$ saadaan
$$m(A) \leq m(A + x).$$
Siis $m(A + x) = m(A)$. □

LUKU 2

Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuus

Lebesguen mitan siirtoinvarianttisuus on tuttu tulos esimerkiksi Mitta- ja integraaliteorian kurssilta, ja sen todistus on lyhyt ja suoraviivainen. Tässä luvussa todistamme, että Lebesguen mitta on myös kiertoinvariantti. Todistusta varten tulee ensin määritellä eräs erikoistapaus kuutiosta, jota kutsumme Whitney-kuutioksi. Cravenin [**1**] kirjan kappaleessa 6.2 Whitney-kuutioita kutsutaan nimellä "boxes".

2.1. Whitney-kuutiot

Määritelmä 2.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Whitney-kuutio on puoliavoin kuutio

$$B = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) : a_i \leq x_i < a_i + 2^{-k}\right\}, \text{ missä } 1 \leq i \leq n,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tässä a_i on luvun 2^{-k} moninkerta, ja lisäksi kuution sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kaikki Whitney-kuutiot ovat joko erillisiä tai sisäkkäisiä. Whitney-kuutio voidaan kirjoittaa avoimien suorakulmaisten särmiöiden $C_{\frac{1}{j}}$, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, leikkauksena,

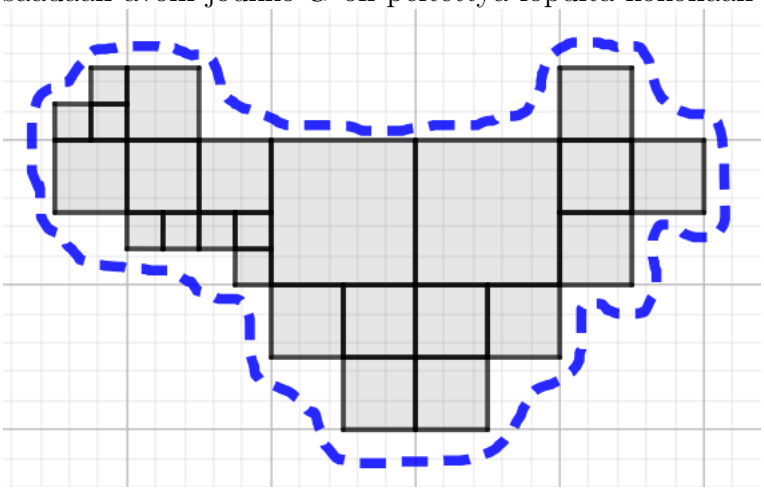
$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{\frac{1}{j}}.$$

Olkoon Q Whitney-kuutio, jolle $k = 0$ ja $a_i = 0$. Tällöin kyseessä on siis sellainen Whitney-kuutio, jonka yksi nurkka on origossa ja jonka sivun pituus on 1.

Lause 2.2. *Jokainen avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$ on erillisten Whitney-kuutioiden yhdiste.*

Todistus. Olkoon $x \in G$. Tällöin on olemassa Whitney-kuutio B siten, että $x \in B \subset G$. Whitney-kuutiot ovat joko erillisiä tai sisäkkäisiä. Valitaan joukosta G ensin mahdollisimman suuria Whitney-kuutioita ja poistetaan niiden sisällä olevat pienemmät Whitney-kuutiot. Valitaan sitten seuraavaksi suurimmat Whitney-kuutiot ja poistetaan taas niiden sisällä olevat Whitney-kuutiot. Jatkamalla tätä

saadaan avoin joukko G on peitettyä lopulta kokonaan erillisillä Whitney-kuutioilla.



□

2.2. Kierto

MÄÄRITELMÄ 2.3. Alkeismatriisiksi kutsutaan $n \times n$-matriisia, joka voidaan muodostaa $I_{n\times n}$-matriisista eli yksikkömatriisista yhdellä alkeisrivioperaatiolla. Alkeisrivioperaatioita ovat kahden rivin vaihtaminen keskenään, rivin kertominen nollasta poikkeavalla vakiolla ja rivin moninkerran lisääminen toiseen riviin.

LAUSE 2.4. *Neliömatriisi on kääntyvä jos ja vain jos se voidaan kirjoittaa alkeismatriisien tulona.*

TODISTUS. Olkoon A alkeismatriisien tulo. Koska jokainen alkeismatriisi on kääntyvä, ja kääntyvien matriisien tulomatriisi on kääntyvä, niin tällöin A on kääntyvä. Oletetaan sitten, että A on kääntyvä. Tästä seuraa, että matriisi A voidaan rivioperaatioiden avulla muuttaa yksikkömatriisiksi. Rivioperaatiot ovat samat kuin Määritelmän 2.3 alkeisrivioperaatiot. Täten on olemassa alkeismatriisit $T_1, T_2, ..., T_j$ siten, että

$$T_j ... T_2 T_1 A = I.$$

Tästä seuraa

$$A = T_1^{-1} T_2^{-1} ... T_j^{-1}.$$

Koska alkeismatriisien käänteismatriisit ovat myös alkeismatriiseja, on A alkeismatriisien tulo. □

MÄÄRITELMÄ 2.5. Lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on kiertokuvaus, jos kuvauksen matriisille A pätee $A^T A = AA^T = I$ ja $\det A = 1$. Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ kierron matriisi on muotoa

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

missä θ on kiertokulma. Tästä nähdään helposti, että $\det T = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

2.3. Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuus

Tässä kappaleessa tutkimme Lebesguen mitan käyttäytymistä lineaarisissa muutoksissa. Tarkastellaan lineaarikuvauksia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Merkintä $GL(n, \mathbb{R})$ tarkoittaa

kääntyvien lineaarikuvausten joukkoa. Seuraavaksi esittelemme tutkielman päätuloksen, joka kertoo, miten lineaariset muutokset vaikuttavat joukon Lebesguen mittaan. Lauseen todistus mukailee Cravenin [**1**] todistusta kirjan kappaleessa 6.2, kuitenkin lukuisilla täydennyksillä.

LAUSE 2.6. *Olkoon $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Mille tahansa joukolle $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee*

$$m^*(TE) = |\det T| \cdot m^*(E),$$

ja $TE \equiv \{Tx : x \in E\}$ on mitallinen jos ja vain jos E on mitallinen.

TODISTUS. (1) Osoitetaan, että TB on mitallinen aina, jos B on Whitney-kuutio. Koska T on lineaarikuvaus, niin myös sen käänteiskuvaus T^{-1} on lineaarikuvaus. Tiedetään, että B on mitallinen, sillä

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{\frac{1}{j}},$$

ja avoimien joukkojen leikkaukset ovat mitallisia. Koska T^{-1} on lineaarikuvaus, niin se on jatkuva. Koska $C_{\frac{1}{j}}$ on avoin, niin täten myös $T\left(C_{\frac{1}{j}}\right)$ on avoin. Koska avoimien joukkojen leikkaukset ovat mitallisia, niin

$$TB = \bigcap_{j=1}^{\infty} T\left(C_{\frac{1}{j}}\right)$$

on täten mitallinen.

(2) Asetetaan $W(T) = m^*(TQ)$, missä Q on Whitney-kuutio, jonka sivun pituus on 1 ja jonka yksi nurkka on origossa. Olkoon J joukko, johon kuuluvat kaikki osajoukot E joille pätee

$$m^*(TE) = W(T)m^*(E).$$

Osoitetaan, että mikä tahansa Whitney-kuutio $B \in J$. Koska Lebesguen mitta on siirtoinvariantti, niin

$$m^*(B + x) = m^*(B) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Olkoon $B_s = B + x_s$ Whitney-kuutioita siten, että $Q = \bigcup_s B_s$. Tällöin löytyy kokonaisluku $a = 2^{kb}$ siten, että $m^*(Q) = \sum m^*(B_s) = a \cdot m^*(B)$. Koska jokainen B_s on mitallinen, niin myös jokainen TB_s on mitallinen kohdan (1) nojalla. Koska on myös

$$m^*(T(B + x)) = m^*(TB + Tx) = m^*(TB),$$

niin tällöin

$$m^*(TQ) = \sum m^*(TB_s) = \sum m^*(T(B + x_s)) = a \cdot m^*(TB).$$

Täten voidaan kirjoittaa

$$\frac{a \cdot m^*(TB)}{a \cdot m^*(B)} = \frac{m^*(TQ)}{m^*(Q)} = W(T),$$

sillä $m^*(Q) = 1$. Siis $W(T)m^*(B) = m^*(TB)$, eli $B \in J$.

(3) Osoitetaan, että mikä tahansa avoin joukko $G \in J$. Lauseen 2.2 nojalla jokainen avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$ on erillisten Whitney-kuutioiden B_i yhdiste,

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Koska kaikki $B_i \in J$ ovat erillisiä ja joukot TB_i ovat Lebesgue-mitallisia, täytyy olla

$$\begin{aligned} m^*(TG) &= m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} TB_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T(B_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} W(T)m^*(B_i) \\ &= W(T)\sum_{i=1}^{\infty} m^*(B_i) \\ &= W(T)m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\ &= W(T)m^*(G). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Siis $G \in J$.

(4) Osoitetaan, että mikä tahansa joukko $E \in J$. Lauseen 1.4 mukaan kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko G siten, että $E \subset G$, ja $m^*(G) < m^*(E) + \epsilon$. Tällöin myös $TE \subset TG$. Siis ulkomitan monotonisuuden ja Lauseen 1.4 nojalla voidaan kirjoittaa

$$m^*(TE) \leq m^*(TG) = W(T)m^*(G) < W(T)(m^*(E) + \epsilon).$$

Tästä seuraa

$$m^*(TE) \leq W(T)m^*(E). \tag{2.2}$$

Huomataan myös, että

$$1 = m^*(Q) = m^*\left(TT^{-1}Q\right) = W(T)m^*(T^{-1}Q) = W(T)W(T^{-1})m^*(Q),$$

eli

$$W(T^{-1})W(T) = 1.$$

Lauseen 1.4 mukaan kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa myös avoin joukko G' siten, että $TE \subset G'$, ja $m^*(G') < m^*(TE) + \epsilon$. Tällöin myös $T^{-1}TE =$

$E \subset T^{-1}G'$. Siis ulkomitan monotonisuuden ja Lauseen 1.4 nojalla voidaan kirjoittaa

$$m^*(E) \leq m^*\left(T^{-1}G'\right) = W(T^{-1})m^*(G') < \frac{1}{W(T)}m^*(TE + \epsilon).$$

Tästä seuraa

$$W(T)m^*(E) \leq m^*(TE). \tag{2.3}$$

Epäyhtälöiden (2.2) ja (2.3) nojalla

$$m^*(TE) = W(T)m^*(E).$$

Täten $E \in J$.

(5) Osoitetaan, että $W(T) = |\det T|$. Lauseen 2.4 mukaan jokainen kääntyvä lineaarikuvaus $T \in GL(n, \mathbb{R})$ on muotoa $T = T_1 \circ \cdots \circ T_k$, missä T_j:t ovat muotoa

(a) $T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

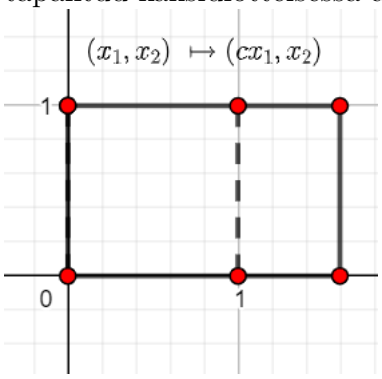
(b) $T(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, x_n), c \in \mathbb{R}$

(c) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n)$.

Lisäksi kuvauksen determinanteille pätee $|\det T_a T_b| = |\det T_a| \cdot |\det T_b|$ kaikilla $a, b \in \{1, ..., k\}$. Täten tarvitsee tarkastella ainoastaan näitä kolmea kuvausta.

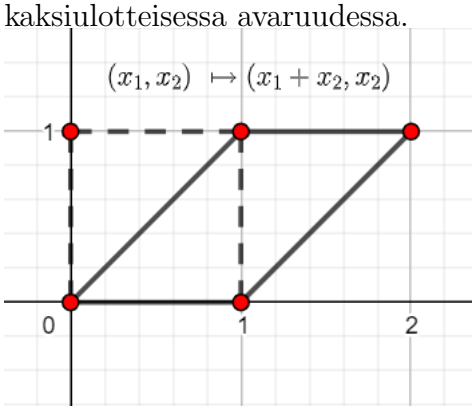
(a) Tässä selvästi $|\det T| = 1$. Myös $W(T) = m^*(TQ_0) = 1$, sillä ainoastaan kaksi koordinaattia vaihtuvat keskenään. Siispä $W(T) = |\det T|$.

(b) Tässä tapauksessa $|\det T| = |c|$. Tarkastellaan kuvan avulla, mitä $W(T)$:lle tapahtuu kaksiulotteisessa avaruudessa.



Kuvasta nähdään, että myös $W(T) = m^*(TQ_0) = |c|$. Tämä toimii samalla tavalla myös korkeammissa ulottuvuuksissa, joten $W(T) = |\det T|$.

(c) Tässä $|\det T| = 1$. Tarkastellaan kuvan avulla, mitä $W(T)$:lle tapahtuu kaksiulotteisessa avaruudessa.



Huomataan siis, että myös tässä tapauksessa $W(T) = 1$. Tämäkin toimii samalla tavalla myös korkeammissa ulottuvuuksissa, joten myös tässä tapauksessa $W(T) = |\det T|$.

Koska sekä $W(T)$ että $|\det T|$ ovat multiplikatiivisia funktioita, eli

$$W(T_a T_b) = W(T_a)W(T_b)$$

ja

$$|\det T_a T_b| = |\det T_a||\det T_b|,$$

on $W(T) = |\det T|$ kaikilla $T \in GL(n, \mathbb{R})$.

(6) Näytetään vielä, että jos joukko E on mitallinen, niin tällöin myös TE on mitallinen. Lauseen 1.12 nojalla on olemassa Borel-joukko A siten, että $E \subset A$ ja

$$m^*(A \backslash E) = 0.$$

Huomataan, että

$$T(E) = T(A) \backslash T(A \backslash E).$$

Koska A on Borel-joukko, niin on myös $T(A)$. Siis $T(A)$ on mitallinen. Jos saadaan osoitettua, että myös $T(A \backslash E)$ on mitallinen, on joukon $T(E)$ mitallisuus todistettu.

Osoitetaan, että $m^*(T(A \backslash E)) = 0$, sillä tällöin $T(A \backslash E)$ on mitallinen.

Olkoon V_j avoin joukko, $j \geq 1$, jolle $(A \backslash E) \subset V_j$ ja $m^*(V_j) \leq \frac{1}{j}$. Koska avoimille joukoille pätee

$$m^*(TV_j) = |\det T| m^*(V_j),$$

niin täytyy olla

$$m^*(TV_j) \leq \frac{|\det T|}{j}.$$

Koska $T(A \backslash E) \subset T(V_j)$, niin

$$m^*(T(A \backslash E)) \leq m^*(TV_j) \leq \frac{|\det T|}{j}.$$

Täten $m^*(T(A\backslash E)) = 0$ ja $T(A\backslash E)$ on mitallinen.

Siis jokainen $T(E)$ on mitallinen.

□

Seuraus 2.7. *Lebesguen mitta on kiertoinvariantti.*

Todistus. Koska kiertokuvaukselle pätee $|\det T| = 1$, niin täten

$$m(T(E)) = m(E).$$

□

LUKU 3

Hausdorffin mitta

Tässä luvussa tutkimme Hausdorffin mittaa ja sen ominaisuuksia. Luvussa esitettyjen määritelmien ja lauseiden ideat ovat peräisin Follandin [**2**], Ambrosion ja Tillin [**4**] sekä Evansin [**3**] teoksista. Epätyhjän joukon X osajoukkojen kokoelmaa merkitään

$$\mathcal{P}(X) = \{E : E \subset X\},$$

ja yleistä ulkomittaa merkitään symbolilla μ.

3.1. Metrinen avaruus ja yleinen ulkomitta

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon funktiolla $d : X \times X \to [0, \infty)$ seuraavat ominaisuudet jokaiselle $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$
(2) $d(x, y) = d(y, x)$
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Tällöin d on metrinen funktio, ja X (tai pari (X, d)) on metrinen avaruus.

ESIMERKKI 3.2. Euklidinen etäisyysfunktio $d(x, y) = |x - y|$ on metrinen funktio $\mathbb{R}^n$:ssä ja $\mathbb{R}^n$ on metrinen avaruus. Myös jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko, johon etäisyys $d(x, y)$ kuuluu, on metrinen avaruus.

MÄÄRITELMÄ 3.3. Funktio $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on ulkomitta jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.
(2) Jos $A \subseteq B$, niin $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(3) Jos $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, niin $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Olkoon X metrinen avaruus. Joukko $A \subseteq X$ on μ-mitallinen, jos

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \backslash A) \text{ kaikille } F \subseteq X.$$

LAUSE 3.5. *μ-mitallisten joukkojen kokoelma on σ-algebra.*

TODISTUS. Määritelmien 3.3 ja 3.4 nojalla Lemma 1.7 ja Lause 1.8 pätevät yleiselle ulkomitalle samoilla todistuksilla. Täten Määritelmän 1.10 nojalla μ-mitallisten joukkojen kokoelma on σ-algebra. □

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$. Jos

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ aina, kun } d(A, B) > 0,$$

niin μ on metrinen ulkomitta X:ssä.

Huomautus 3.7. Merkintä $d(A,B) > 0$ tarkoittaa sitä, että joukot A ja B ovat positiivisella etäisyydellä toisistaan, eli

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Seuraavaksi esittelemme lauseen, joka käsittelee Borel-mitallisuutta. Lauseen todistus mukailee Ambrosion ja Tillin [**4**] todistusta (Theorem 1.1.11), kuitenkin kirjoittajan toimesta täydennettynä.

Lause 3.8. *Olkoon μ metrisen avaruuden (X,d) metrinen ulkomitta. Tällöin μ on Borel-mitta eli kaikki Borel-joukot ovat μ-mitallisia.*

Todistus. Osoitetaan, että suljetut joukot ovat μ-mitallisia. Olkoon F suljettu ja $A \subset X$, jolle $\mu(A) < \infty$. Määritellään joukot

$$D_0 = \{x : d(x,F) \geq 1\} \text{ ja } D_n = \left\{x : \frac{1}{2^n} \leq d(x,F) < \frac{1}{2^{n-1}}\right\}.$$

Ulkomitan subadditiivisuuden nojalla tiedetään, että

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap F) + \mu(A \backslash F),$$

joten osoitetaan nyt, että

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap F) + \mu(A \backslash F).$$

Joukot D_i ja D_j ovat positiivisella etäisyydellä toisistaan aina, kun $|i-j| > 1$. Täten

$$\mu(A) \geq \mu\left(A \cap \bigcup_{j=0}^{m} D_{2j}\right) = \sum_{j=0}^{m} (A \cap D_{2j}),$$

kun m on mielivaltainen. Koska on myös

$$\mu(A) \geq \mu\left(A \cap \bigcup_{j=0}^{m} D_{2j+1}\right) = \sum_{j=0}^{m} (A \cap D_{2j+1}),$$

eli molemmat sarjan $\sum_j \mu(A \cap D_j)$ osajonot ovat suppenevia, niin täten myös sarja $\sum_j \mu(A \cap D_j)$ suppenee. Koska F ja $\bigcup_{j=0}^{m} D_j$ ovat positiivisella etäisyydellä toisistaan ja

$$\mu(A \backslash F) \leq \mu\left(A \cap \bigcup_{j=0}^{m} D_j\right) + \mu\left(A \cap \bigcup_{j>m} D_j\right),$$

niin jokaiselle $m \geq 0$ pätee

$$\begin{aligned} \mu(A) &\geq \mu\left((A \cap F) \cup \left(A \cap \bigcup_{j=0}^{m} D_j\right)\right) \\ &= \mu(A \cap F) + \mu\left(A \cap \bigcup_{j=0}^{m} D_j\right) \\ &\geq \mu(A \cap F) + \mu(A \backslash F) - \sum_{j>m} \mu(A \cap D_j). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Asettamalla $m \to \infty$, saadaan

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap F) + \mu(A \backslash F).$$

Täten

$$\mu(A) = \mu(A \cap F) + \mu(A \backslash F).$$

Koska tämä pätee kaikille suljetuille joukoille F, niin pätee se myös kaikille avoimille joukoille F^C. Määritelmän 1.11 nojalla Borel-joukot muodostavat avaruuden X pienimmän σ-algebran, joka sisältää avoimet joukot. Toisaalta, myös μ-mitalliset joukot muodostavat σ-algebran. Täten Borel-joukot ovat μ-mitallisia, joten μ on Borel-mitta. □

MÄÄRITELMÄ 3.9. Olkoon μ ulkomitta avaruudessa E. Jos joukolle $A \subseteq E$ on olemassa μ-mitallinen joukko $\tilde{A} \supseteq A$ siten, että

$$\mu(\tilde{A}) = \mu(A),$$

niin tällöin ulkomitta μ on säännöllinen.

3.2. Hausdorffin mitta ja sen ominaisuudet

Tässä kappaleessa esittelemme Hausdorffin mitan määritelmän sekä muutamia perusominaisuuksia. Tutkimme esimerkiksi Hausdorffin mitan ulkomitallisuutta ja Borel-säännöllisyyttä.

MÄÄRITELMÄ 3.10. Olkoon X metrinen avaruus. Joukon $A \subset X$ halkaisija on

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

MÄÄRITELMÄ 3.11. Jokaiselle $k \geq 0$ olkoon

$$\omega_k := \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)},$$

missä $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$.

Olkoon X metrinen avaruus. Jos $A \subset X$ ja $0 < \delta \leq \infty$, määritellään

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) := \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\operatorname{diam}(A_i))^k \;\middle|\; \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta, A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \right\}.$$

Lopuksi määritellään vielä k-ulotteinen Hausdorffin mitta avaruudessa X:

$$\mathcal{H}^k(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^k_\delta(A).$$

LAUSE 3.12. *Gammafunktiolle* $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ *pätee*

(1) $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$.
(2) $\Gamma(1) = 1$.
(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Todistus. (1) Tulokseen päästään osittaisintegroinnin avulla:

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) &= \int_0^\infty x^{t+1-1}e^{-x}dx \\ &= \int_0^\infty x^t e^{-x}dx \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-x^te^{-x}\right) - \left(-0^te^{-0}\right) - \int_0^\infty -tx^{t-1}e^{-x}dx \\ &= t\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx \\ &= t\Gamma(t).\end{aligned} \tag{3.2}$$

(2) Sijoitetaan $t = 1$, jolloin saadaan

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx = \lim_{x\to\infty} -e^{-x} - \left(-e^0\right) = 0 - (-1) = 1.$$

(3) Tehdään integraalille $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx$ muuttujanvaihto $x = y^2$. Tällöin $dx = 2y\ dy$ ja

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty y^{2^{-\frac{1}{2}}}e^{-y^2}2y\ dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y}e^{-y^2}2y\ dy \\ &= 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Saatu integraalifunktio on Gaussin integraali, jonka arvo on tunnettu

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}.$$

Siis $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

□

Esimerkki 3.13. Lasketaan funktion ω_k arvot, kun $k = 1, 2, 3$.
Olkoon $k = 1$. Tällöin

$$\omega_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 2.$$

Olkoon $k = 2$. Tällöin

$$\omega_2 = \frac{\pi}{\Gamma(1+1)} = \frac{\pi}{1\Gamma(1)} = \frac{\pi}{1} = \pi.$$

Olkoon $k = 3$. Tällöin

$$\omega_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}\pi.$$

Määritelmässä 3.3 kerroimme ominaisuuksista, jotka pätevät ulkomitalle. Seuraavan lauseen todistus mukailee Ambrosion ja Tillin [**4**] todistusta (Theorem 2.1.3).

LAUSE 3.14. *Olkoon X metrinen avaruus. $\mathcal{H}^k_\delta$ ja $\mathcal{H}^k$ ovat ulkomittoja jokaiselle $k \geq 0$ ja $\delta \in (0, +\infty)$.*

TODISTUS. Osoitetaan, että Hausdorffin mitalle pätevät Määritelmässä 3.3 esitellyt ominaisuudet.

(1) Määritelmästä 3.11 seuraa, että $\mathcal{H}^k_\delta(\emptyset) = 0$. Koska $\mathcal{H}^k(A) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^k_\delta(A)$, niin tästä seuraa, että myös $\mathcal{H}^k(\emptyset) = 0$.

(2) Olkoon $A \subseteq B$. Tällöin Määritelmästä 3.11 seuraa, että
$$\mathcal{H}^k_\delta(A) \leq \mathcal{H}^k_\delta(B).$$
Kun asetetaan $\delta \to 0$, saadaan
$$\mathcal{H}^k(A) \leq \mathcal{H}^k(B).$$

(3) Olkoon $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin jokaiselle A_j löytyy peite $\{E^j_i\}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ siten, että $\operatorname{diam}\left(E^j_i\right) < \delta$ ja
$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=1}^\infty \left(\operatorname{diam}\left(E^j_i\right)\right)^k \leq \mathcal{H}^k_\delta(A_j) + 2^{-j}\epsilon.$$
Tällöin $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \subseteq \bigcup_{i,j=1}^\infty \left\{E^j_i\right\}$, ja näin ollen
$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k_\delta(A) &\leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_j \sum_{i=1}^\infty \left(\operatorname{diam}\left(E^j_i\right)\right)^k \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^k_\delta(A_j) + 2^{-j}\epsilon \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^k_\delta(A_j) + \epsilon. \end{aligned} \tag{3.4}$$
Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin täytyy olla
$$\mathcal{H}^k_\delta(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^k_\delta(A_j).$$
Kun asetetaan $\delta \to 0$, saadaan
$$\mathcal{H}^k(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^k(A_j).$$

Täten $\mathcal{H}^k_\delta$ ja $\mathcal{H}^k$ ovat ulkomittoja. □

Esittelemme seuraavaksi lauseet, joista ensimmäinen käsittelee Hausdorffin mitan Borel-mitallisuutta ja toinen Borel-säännöllisyyttä. Lauseiden todistukset mukailevat Evansin [**3**] (Section 2.1, Theorem 1) ja Ambrosion ja Tillin [**4**] (Theorem 2.1.4) todistuksia.

Lause 3.15. *Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^k$ on Borel-mitta, eli toisin sanoen jokainen Borel-joukko on Hausdorff-mitallinen.*

Todistus. Sovelletaan todistuksessa Lausetta 3.8. Olkoon A ja B erillisiä joukkoja, ja olkoon

$$0 < \delta < \frac{d(A,B)}{2},$$

missä $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Tällöin mikään joukko E_i, jolle $\operatorname{diam}(E_i) < \delta$, ei voi leikata kumpaakin joukkoa A ja B. Oletetaan, että $A \cup B \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Olkoon

$$\mathcal{A} = \{E_j : E_j \cap A \neq \emptyset\} \text{ ja } \mathcal{B} = \{E_j : E_j \cap B \neq \emptyset\},$$

jolloin

$$A \subset \bigcup_{E_j \in \mathcal{A}} E_j \text{ ja } B \subset \bigcup_{E_j \in \mathcal{B}} E_j.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_j))^k &\geq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{E_j \in \mathcal{A}} (\operatorname{diam}(E_j))^k + \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{E_j \in \mathcal{B}} (\operatorname{diam}(E_j))^k \\ &\geq \mathcal{H}^k_\delta(A) + \mathcal{H}^k_\delta(B). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Koska $0 < 2\delta < d(A,B)$, niin täten

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k_\delta(A \cup B) &\geq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{E_j \in \mathcal{A}} (\operatorname{diam}(E_j))^k + \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{E_j \in \mathcal{B}} (\operatorname{diam}(E_j))^k \\ &\geq \mathcal{H}^k_\delta(A) + \mathcal{H}^k_\delta(B). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Asetetaan $\delta \to 0$, jolloin saadaan

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) \geq \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B).$$

Toisaalta ulkomitan subadditiivisuudesta seuraa

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) \leq \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B),$$

ja täten

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) = \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B).$$

□

Lause 3.16. *Olkoon X metrinen avaruus. Jokainen Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^k$ on Borel-säännöllinen; jokaiselle joukolle A on olemassa Borel-joukko B siten, että $A \subseteq B$ ja $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.*

Todistus. Valitaan A siten, että $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Tällöin löytyy peite $C_n = \bigcup_i E_i^n \supseteq A$ jokaiselle n siten, että jokainen E_i^n on suljettu joukko, $\operatorname{diam}(E_i^n) < \frac{1}{n}$, ja

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_i (\operatorname{diam}(E_i^n))^k \leq \mathcal{H}^k_{\frac{1}{n}}(A) + \frac{1}{n}.$$

Pelkkien suljettujen joukkojen käyttö on tässä sallittua, sillä Määritelmän 3.11 nojalla $\operatorname{diam}(E_i) = \operatorname{diam}(\overline{E_i})$, missä $\overline{E_i}$ on suljettu joukko. Olkoon $B = \bigcap_n C_n$. Koska C_n on suljettujen joukkojen yhdiste, on C_n Borel-joukko. Tällöin B on Borel-joukkojen

leikkauksena Borel-joukko, ja on myös $A \subseteq B$, sillä $A \subseteq C_n$. On siis $A \subseteq B \subseteq C_n$, joten

$$\mathcal{H}^k_{\frac{1}{n}}(B) \leq \mathcal{H}^k_{\frac{1}{n}}(C_n) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_i (\operatorname{diam}(E_i^n))^k \leq \mathcal{H}^k_{\frac{1}{n}}(A) + \frac{1}{n}.$$

Asetetaan $n \to \infty$, josta seuraa

$$\mathcal{H}^k(B) \leq \mathcal{H}^k(A).$$

Koska on kuitenkin $A \subseteq B$, niin ulkomitan monotonisuuden nojalla

$$\mathcal{H}^k(A) \leq \mathcal{H}^k(B).$$

Täten on siis oltava

$$\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B).$$

□

3.3. Hausdorffin ja Lebesguen mittojen yhtäsuuruus

Tässä kappaleessa toteamme avaruuden $\mathbb{R}^n$ n-ulotteisen Hausdorffin mitan ja Lebesguen mitan olevan yhtä suuria. Laskemme yksikköpallolle Lebesguen mitan.

MÄÄRITELMÄ 3.17. Yksikköpallo on joukko $B(0,1) = \{x : \ d(x,0) = 1\}$, eli sen keskipiste on origossa ja sen säde on 1.

Yksikköpallon Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on luvussa 3.2 määritelty ω_n, ja todistamme seuraavassa esimerkissä tapaukset $n = 1, 2, 3$.

ESIMERKKI 3.18. (1) Olkoon $B(0,1)$ yksikköpallo avaruudessa $\mathbb{R}$. Tällöin kyseessä on jana, jonka pituus on 2. Selvästi siis tällöin

$$m_1(B(0,1)) = 2.$$

(2) Approksimoidaan käyrän $y = \sqrt{1-x^2}$ ja x-akselin välistä pinta-alaa sisältä päin erillisillä, vierekkäisillä suorakulmioilla. Tällöin näiden suorakulmioiden yhteenlaskettua summaa kutsutaan funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ alasummaksi. Toisaalta, jos approksimointi tapahtuu ulkopuolelta, kutsutaan summaa funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ yläsummaksi. Selvästi funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ ja x-akselin väliin jäävän alueen Lebesguen mitta on suurempi kuin funktion alasumma ja toisaalta pienempi kuin yläsumma. Koska $y = \sqrt{1-x^2}$ on Riemann-integroituva funktio, pätee

$$\text{funktion alasumma} = \text{funktion yläsumma}.$$

Täten funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ ja x-akselin väliin jäävän alueen Lebesguen mitta on sama kuin funktion Riemann-integraali. Kun integraali kerrotaan kahdella, saadaan koko yksikkökiekon Lebesguen mitta:

$$m_2(B(0,1)) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Integraalia ei kuitenkaan ole helppo laskea, joten teemme muuttujanvaihdon. Olkoon $x = \sin(u)$, jolloin $dx = \cos(u)du$. Tällöin

$$\begin{aligned}
2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\ du \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\ du \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2u)}{2}\right) du \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1du + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)\ du \\
&= \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\sin(\pi)}{2} - \left(-\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right) \\
&= \pi.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Täten $m_2(B(0,1)) = \pi$.

(3) Olkoon $B(0,1)$ yksikköpallo avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tällöin kyseessä on pallo, jonka säde on 1. Lasketaan myös tässä Lebesguen mitta integroimalla. Selvästi yksikköpallon poikkileikkaus on integroituva kohdan (2) perusteella, joten voidaan soveltaa tähän Fubinin lausetta, joka sanoo, että tilavuus on sama kuin 2-ulotteisen poikkileikkauksen integraali välin $[-1,1]$ yli. Yksikköpallon poikkileikkaukset ovat kiekkoja, joiden säde on $\sqrt{1-x^2}$. Täten kiekon pinta-ala on $\pi(1-x^2)$, ja yksikköpallon Lebesguen mitta on

$$\begin{aligned}
m_3(B(0,1)) &= \int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)\ dx \\
&= \pi\left(\left(1 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right)\right) \\
&= \pi\left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Huomataan, että saadaan tulokseksi samat arvot kuin Esimerkissä 3.13. Yksikköpallon Lebesguen mitan laskeminen on siis melko yksinkertainen tehtävä, kun taas sen Hausdorffin mitan laskeminen on haastavampaa. Ambrosio ja Tilli [**4**] ovat todistaneet, että Hausdorffin ja Lebesguen n-ulotteiset mitat ovat yhtä suuret, (Theorem 2.3.4.). Koska mitat ovat samat, ja Määritelmästä 3.11 nähdään suoraan, että Hausdorffin mitta on kiertoinvariantti, voidaan Lebesguen mitan kiertoinvarianttisuus todeta myös sitä kautta.

Kirjallisuutta

[1] Bruce D. Craven: *Lebesgue measure and integral.* Pitman Publishing Inc., 1982.

[2] Gerald B. Folland: *Real analysis. Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, Inc., 1984.

[3] Lawrence Craig Evans: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1991.

[4] Luigi Ambrosio, Paolo Tilli: *Topics on Analysis in Metric Spaces.* Oxford University Press, 2004.

[5] Tero Kilpeläinen: *Mitta- ja integraaliteoria*, Jyväskylän yliopisto, luentomoniste, Jyväskylä, 2003.