

**Ensimmäisellä luokalla mitattujen lukujonotaitojen yhteys laskusujuvuuteen kolmannella luokalla**

Siiri Lonkila & Iida Törmänen

Erityispedagogiikan pro gradu -tutkielma

Kevätlukukausi 2019

Kasvatustieteiden laitos

Jyväskylän yliopisto

## TIIVISTELMÄ

**Lonkila, Siiri & Törmänen, Iida. 2019. Ensimmäisellä luokalla mitattujen lukujonotaitojen yhteys laskusujuvuuteen kolmannella luokalla. Erityispedagogiikan pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden laitos. 69 sivua.**

Matematiikan oppimisessa keskeinen tavoite on laskusujuvuuden saavuttaminen. Laskusujuvuudella tarkoitetaan nopeutta ja tarkkuutta peruslaskutoimituksia, kuten yhteen- ja vähennyslaskuja, laskettaessa. Aiemmissä tutkimuksissa lukujonotaitojen on havaittu ennustavan laskemisen sujuvuutta. Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, missä määrin ensimmäisellä luokalla mitatut lukujonotaidot ennustavat yhteen- ja vähennyslaskutaidon sujuvuutta kolmannella luokalla. Lukujonotaidon omavaikutuksen selvittämiseksi tutkimuksessa kontrolloitiin sukupuoli, työmuisti ja prosessointinopeus.

Tämän tutkimuksen aineisto on osa Jyväskylän yliopiston Lasten luku- ja laskutaidon sujuvuus -tutkimushanketta. Aineisto kerättiin Keski-Suomen alueen kouluilta vuosina 2016–2018. Tutkimusjoukkona olivat kaikki ensimmäisen luokan keväänä ja kolmannen luokan keväänä osallistuneet oppilaat. Analyysien jälkeen tähän tutkimukseen valikoitui 180 tutkittavaa, joista poikia oli 88 ja tyttöjä 92. Aineisto analysoitiin käyttäen askeleittain etenevää monimuuttujaista lineaarista regressioanalyysia. Analyysi toteutettiin ensin koko tutkittavien joukolla ja tulosten perusteella erikseen tytöille ja pojille.

Tutkimuksen tulokset osoittivat, että lukujonotaito selitti 13 % yhteenlaskun sujuvuudesta ja 10 % vähennyslaskun sujuvuudesta. Sukupuolittain tarkasteltuna lukujonotaidot ennustivat eri tavoin yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuutta. Lukujonotaidot selittivät yhteenlaskun sujuvuudesta pojilla 15 % ja tytöillä 12 %. Suurin ero sukupuolten välillä oli nähtävillä siinä, miten lukujonotaidot ennustivat vähennyslaskun sujuvuutta. Pojilla lukujonotaidot ennustivat vähennyslaskun sujuvuudesta 12 %, kun taas tytöillä 4 %. Tytöillä lukujonotaitojen lisäksi työmuistilla ja prosessointinopeudella oli tilastollisesti merkitsevä oma-vaikutus.

Tulokset replikoivat aikaisempia tutkimustuloksia, joissa lukujonon on havaittu ennustavan laskemisen sujuvuutta. Näin ollen opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota lukujonotaitoihin jo ensimmäisellä luokalla, ja tätä tarkoitusta varten tulisi kehittää opettajille suunnattuja menetelmiä lukujonotaitojen arviointiin. Lisäksi tulokset antavat viitteitä siitä, että eri kognitiiviset tekijät saattavat ennustaa eri tavoin tyttöjen ja poikien laskusujuvuutta. Jatkossa tulisi tutkia tarkemmin millaiset tekijät ovat yhteydessä sukupuolten välisiin eroihin matematiikassa.

Asiasanat: lukujonotaidot, laskusujuvuus, alkuopetus, matematiikka, sukupuolierot

# SISÄLTÖ

<b>TIIVISTELMÄ</b> .....	<b>2</b>
<b>SISÄLTÖ</b> .....	<b>3</b>
<b>1 JOHDANTO</b> .....	<b>4</b>
1.1 Matemaattisten taitojen kehitys.....	7
1.2 Laskusujuvuus .....	11
1.3 Sukupuolierot matematiikassa .....	13
1.4 Laskusujuvuutta ennustavat kognitiiviset tekijät .....	15
1.4.1 Lukujonotaidot.....	15
1.4.2 Työmuisti.....	17
1.4.3 Prosessointinopeus .....	19
1.5 Tutkimuskysymykset .....	21
<b>2 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN</b> .....	<b>23</b>
2.1 Tutkimuskonteksti ja tutkittavat .....	23
2.2 Tutkimusmenetelmät ja muuttujien mittaaminen .....	24
2.3 Aineiston analyysi.....	25
<b>3 TULOKSET</b> .....	<b>29</b>
<b>4 POHDINTA</b> .....	<b>37</b>
4.1 Tulosten tarkastelua.....	37
4.2 Tutkimuksen metodologista arviointia ja jatkotutkimushaasteet .....	41
4.3 Käytännön merkitys .....	48
<b>LÄHTEET</b> .....	<b>51</b>
<b>LIITTEET</b> .....	<b>65</b>

# 1 JOHDANTO

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaan alkuopetuksessa matematiikan tavoitteena on luoda vahva pohja laskutaidolle ja lukukäsitteen ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua. Yksi keskeisimmistä tavoitteista matematiikan oppimisessa on sujuvan peruslaskutaidon saavuttaminen. Peruslaskutaidolla tarkoitetaan sellaisia yhteen- ja vähennyslaskuja, joiden tulokseksi tulee alle 20 (Cowan ym., 2011). Sujuvuus voidaan määrittellä nopeudeksi ja tarkkuudeksi (Koponen ym., 2016) tai helppoudeksi ja tarkkuudeksi (Locuniak & Jordan, 2008) näitä peruslaskutoimituksia laskettaessa. Lisäksi sujuva laskeminen tarkoittaa tehokasta peruslaskutoimituksien ratkaisemista ilman apuvälineisiin tukeutumista (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Sujuvan laskutaidon on havaittu ennustavan myöhempää matematiikassa suoriutumista (Carr, Steiner, Kyser, & Biddlecomb, 2008). Sujuvan laskutaidon kehittyessä kognitiivisia resursseja vapautuu monimutkaisempiin strategioihin sekä tiedon palauttamiseen muistista (Aunio, Hannula, & Räsänen, 2004). Näin ollen sujuva laskutaito mahdollistaa matemaattisten taitojen kehittymisen. Lisäksi sujuva laskutaito tukee muiden oppiaineiden, kuten luonnontieteiden, oppimista (Koponen ym., 2016).

Tyypillinen piirre heikosti matematiikassa suoriutuville on vaikeus oppia aritmeettisia faktoja (Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004). Lisäksi heikosti matematiikassa suoriutuvien on havaittu käyttävän jopa viidenteen luokkaan asti heikkoja strategioita, kuten sormilla laskemista, useammin kuin tavanomaisesti matematiikassa suoriutuvat vertaiset (Geary, Hoard, Byrd-Craven, & DeSoto, 2004). Sujumaton laskutaito näyttäytyy myös luetteluun perustuvien strategioiden käyttämisenä (Koponen ym., 2016), jolloin laskeminen on hidasta. Sujumattomuuteen on tärkeä kiinnittää huomiota, koska matematiikan luonne on hierarkkinen ja kumuloituva. Toisin sanoen matematiikan taidot koostuvat eri osataidoista ja osataidot rakentuvat aikaisempien taitojen ja tietojen varaan (Ahoonen, Lamminmäki, Närhi, & Räsänen, 2008; Väisänen & Aunio, 2014).

Eri tutkimuksissa on havaittu matematiikan oppimisvaikeuksien olevan verrattain yleisiä. Esimerkiksi Gearyn (2011a) arvion mukaan 7 %:lla koululaisista on erityinen matematiikan oppimisvaikeus ja 10 % koululaisista suoriutuu jatkuvasti heikosti matematiikassa. Suomessa suoritustasoltaan heikkojen matematiikan osaajien määrä on kasvanut 7 prosentista 12 prosenttiin, kun verrattiin vuosien 2003 ja 2012 PISA-tutkimuksen tuloksia. Kyseisinä vuosina matematiikka oli PISA-tutkimuksen päätutkimusalue (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2013.) Matemaattiset vaikeudet näyttävät suhteellisen pysyvinä. Lasten väliset taitoerot eivät kuroudu ensimmäisten kouluvuosien aikana, vaan taitoerot kasvavat ylemmille luokille siirryttäessä (Aunola, Leskinen, Lerkkanen, & Nurmi, 2004). Myös Chongin ja Siegelin (2008) tutkimuksen mukaan sujuvuuden pulmat ovat pysyviä ja pulmien on havaittu liittyvän pysyviin kognitiivisiin puutteisiin työmuistissa, prosessointinopeudessa ja fonologisessa prosessoinnissa.

Pulmat matematiikassa tunnistetaan usein liian myöhään. Tällöin lapsi on jo taitotasoltaan jäljessä ikätovereihinsa verrattuna ja pulmat ovat kasaantuneet. Matemaattisten pulmien kasaantumisen ehkäisemiseksi on tärkeää tietää, mitkä tekijät ennustavat matematiikan taitoja. Lisäksi matematiikan taitojen taustalla olevien kognitiivisten valmiuksien tunnistaminen on tärkeää, jotta oppilaita pystytään tukemaan varhaisessa vaiheessa. Fuchsin ja kollegoiden (2006) mukaan on kuitenkin toistaiseksi suhteellisen vähän tietoa siitä, missä määrin ja miten eri matematiikan osa-alueisiin vaikuttavat kognitiiviset kyvyt ovat päällekkäisiä tai erillisiä.

Tutkimusten mukaan kognitiivisilla taidoilla, kuten prosessointinopeudella (esim. Fuchs ym., 2006; Cowan & Powell, 2014) ja työmuistilla (esim. Swanson & Kim, 2007; Andersson, 2008; Geary, 2011b) on havaittu olevan myönteinen yhteys matematiikan taitojen kehitykseen ja matematiikassa suoriutumiseen. Kuitenkaan kognitiivisten taitojen yksittäisellä harjoittamisella ei ole saatu myönteisiä vaikutuksia matematiikan taitojen osaamiseen. Melby-Lervåg ja Hulmen (2013) meta-analyysi osoitti, että työmuistiharjoittelu ei edistä matema-

tiikassa suoriutumista. Lisäksi Kanervan ja Kyttälän (2013) interventiotutkimuksessa työmuistin harjoittamisella ei saatu siirtovaikutusta matematiikan taitojen osaamiseen.

Yksi vahvimista ennustajista laskutaidolle näyttää olevan lukujonotaito. Tutkimusten mukaan esikoulussa mitattujen lukujonotaitojen on havaittu ennustavan myöhempää matemaattisten taitojen kehitystä (esim. Aunola ym., 2004; Mazzocco & Thompson, 2005) ja Koponen ja kollegat (2016; ks. myös Koponen, Salmi, Eklund, & Aro, 2013) ovat havainneet lukujonotaitojen ennustavan myöhempää laskemisen sujuvuutta. Myös Kanervan ja Kyttälän (2013) tutkimuksessa erityisesti lukujonotaitoja kehittävän intervention avulla saatiin myönteinen vaikutus matemaattisten taitojen kehitykseen (ks. myös Väisänen & Aunio, 2014).

Aiempien tutkimusten mukaan lukujonotaitojen yhteys laskusujuvuuteen voidaan osoittaa, mutta tutkimuksista huolimatta on epäselvää, missä määrin muut varhaiset kognitiiviset taidot ovat yhteydessä lukujonotaidon ennustavaan ominaisuuteen. Tutkimustietoa tarvitaan siitä, millainen on lukujonotaidon oma vaikutus ennustavana muuttujana vai onko laskusujuvuutta ennustava ominaisuus samankaltainen tai päällekkäinen muiden kognitiivisten ennustajien kanssa. Opetuksen kehittämisen ja oppimisen haasteiden näkökulmasta lukujonotaitojen luonteesta ja ennustavasta ominaisuudesta tarvitaan lisää tutkimustietoa. Lisäksi lukujonotaidot voisivat mahdollistaa helpon työkalun opettajille matematiikan taitojen seuraamiseen. Seuraamalla oppilaiden lukujonotaitojen automatisoitumista opettaja voi tunnistaa mahdollisia alkavia sujuvuuden pulmia. Näin ollen lukujonotaitojen osaamisen perusteella voitaisiin tunnistaa tukea tarvitsevat oppilaat.

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, missä määrin ensimmäisellä luokalla mitattu lukujonotaito ennustaa yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuutta kolmannella luokalla. Lukujonotaidon omavaikutuksen selvittämiseksi sukupuoli, työmuisti ja prosessointinopeus kontrolloitiin. Tämän tutkimuksen tavoitteena on antaa lisää tietoa lukujonotaitojen yhteydestä laskusujuvuuteen. Pyrkimyksenä on lisätä tietoa laskusujuvuuden taustalla olevista tekijöistä sekä luku-

jonotaidon roolista varhaisessa matemaattisten taitojen tunnistamisessa. Tavoitteena on myös selvittää, näyttäytykö sukupuolten välillä eroja laskusujuvuudessa.

Tutkimuksen johdannossa käsitellään matemaattisten taitojen kehitystä varhaisista taidoista kohti myöhemmin kehittyvää laskusujuvuutta. Lisäksi käsitellään laskusujuvuutta ennustavia kognitiivisia tekijöitä, joita tässä tutkimuksessa ovat lukujonotaidot, työmuisti ja prosessointinopeus. Myös sukupuolen yhteyttä laskusujuvuuteen käsitellään. Teorialuvun jälkeen esitellään tutkimuksen toteutus, käytetyt mittarit ja aineiston analyysimenetelmät. Metodiluvun jälkeen esitellään saadut tulokset lukujonotaitojen ennustavuudesta yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuteen. Lopuksi tarkastellaan tutkimuksesta saatuja tuloksia ja niiden merkitystä käytännössä, arvioidaan tutkimusta sekä pohditaan jatkotutkimushaasteita.

## **1.1 Matemaattisten taitojen kehitys**

Varhaislapsuudessa kehittyy tietoja ja taitoja matemaattisista käsitteistä, jotka luovat pohjan koulumatematiikan oppimiselle. Jo ennen kouluikää mitattujen varhaisten taitojen on todettu ennustavan vahvasti kouluikäisten matemaattista oppimista ja osaamista (Aunio & Niemivirta, 2010; Aunola ym., 2004; Jordan, Kaplan, Locuniak, & Ramineni, 2007; Jordan, Kaplan, Ramineni, & Locuniak, 2009).

Varhaisten matemaattisten taitojen kehittymisen jaottelemisen on haastavaa, koska eri osataidot nivoutuvat yhteen ja muodostavat yhdessä laajempia kokonaisuuksia. Matematiikan luonne on myös hierarkkinen ja kumuloituva, jossa uudet taidot rakentuvat aiempien taitojen varaan (Fuchs ym., 2006). Lisäksi lasten kehitykseen vaikuttavien tekijöiden, kuten lapsen spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin (Hannula & Lehtinen, 2005; Hannula, Lepola & Lehtinen, 2010; Hannula, Räsänen, Lehtinen, 2007), perheen sosioekonominen asema (Vettenranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka & Rautopuro, 2016; Crane, 1996; Koponen, Aunola, Ahonen, & Nurmi, 2007) sekä eri kognitiivisten tekijöiden (esim.

Hornung, Schiltz, Brunner, & Martin, 2014) on havaittu olevan yhteydessä matemaattisten taitojen kehitykseen ja myöhempään matemaattiseen osaamiseen.

Yksi tapa jaotella matemaattisia taitoja on jakaa taidot primaareihin eli synnynäisiin taitoihin ja sekundäärisiin taitoihin eli taitoihin, jotka edellyttävät harjoittelua ja oppimista (Geary, 2000; Wynn, 1998). Muita tapoja lähestyä matemaatiikan taitojen kehittymistä on jaottelu ikäkausittain sekä taitoalueittain kehittyviin taitoihin. Aunio ja Räsänen (2016) ovat jaotelleet matemaattisten taitojen kehityksen neljään taitoalueeseen. Jaotelma kuvaa niitä taitoja, jotka ovat keskeisiä esi- ja alkuopetusikäisten (5–8-vuotiaiden) lasten matematiikan kehityksessä. Näitä taitoalueita ovat lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot ja aritmeettiset perustaidot. (Aunio & Räsänen, 2016.) Tässä tutkimuksessa lähestytään matemaattisten taitojen kehitystä tämän jaotelman kautta.

Lukumääräisyyden tajulla tarkoitetaan synnynäistä kykyä hahmottaa lukumääriä ilman kieleen perustuvaa laskemista (Aunio, 2008). Jo vastasyntyneellä lapsella on havaittu olevan kyky erotella pieniä lukumääriä toisistaan (Antell & Keating, 1983). Tämä lukumäärien hahmottaminen jaotellaan pienten lukumäärien tarkkaan havaitsemiseen sekä epätarkkaan hahmottamiseen lukumäärän kasvaessa (Aunio ym., 2004). Lukumääräisyyden taju on kyky, jonka päälle matemaattinen taito rakentuu (Butterworth, 2005; Geary, 2013). Lukumääräisyyden tajun on myös todettu olevan yhteydessä myöhempään matemaattiseen osaamiseen (Hannula ym., 2007). Kasvatustieteellisissä ja neurotieteellisissä tutkimuksissa on yleistä määritellä lukumääräisyyden taju edellä määritellyn suppean määritelmän mukaisesti (Aunio & Räsänen, 2016). Kuitenkin joissain tutkimuksissa (esim. Jordan ym., 2007; Jordan, Kaplan, Nabors Oláh, & Locuniak, 2006) lukumääräisyyden tajusta käytetään myös laajempaa määritelmää, johon kuuluvat lukumäärien hahmottamisen lisäksi joukko muita varhaisia matemaattisia taitoja.

Matemaattisten suhteiden hallintaan kuuluvat matemaattisloogiset taidot, matemaattiset symbolit, aritmeettiset periaatteet sekä paikka-arvon ja kymmen-



järjestelmän ymmärtäminen (Aunio & Räsänen, 2016). Matemaattisloogisia taitoja ovat kyky sarjoittaa, vertailla ja luokitella (Aunio, 2008). Lisäksi matemaattisloogisiin taitoihin kuuluu yksi-yhteen -suhde, jolla tarkoitetaan kykyä ymmärtää lukusanan merkitsevän tiettyä lukumäärää (Gelman & Gallistel, 1978). Yksi-yhteen -suhdetta on tutkittu laajasti (esim. Muldoon, Lewis, & Freeman, 2003) ja sen hallintaa lapsi tarvitsee siihen, että laskeminen ylipäätään onnistuu. Matematiikan ymmärtämisen ja oppimisen kannalta on tärkeää, että lapsi ymmärtää ja osaa käyttää formaalin matematiikan symboleita (esim. vähemmän kuin  $<$ , yhtä suuri kuin  $=$ ; Aunio & Räsänen, 2016). Aritmeettisten periaatteiden, eli osakokonaisuus -suhteiden, ymmärtäminen on tärkeää erityisesti yhteenlaskutaidon ja laskustrategioiden kehittymisen kannalta (Canobi, Reeve, & Pattison, 2002). Pienillä lapsilla matemaattisten suhteiden hallinnalla tarkoitetaan kuitenkin lähinnä sarjoittamista, luokittelua ja vertailua sekä yksi-yhteen -suhdetta (Väisänen & Aunio, 2014). Gearyn (2011b) mukaan matemaattisten suhdetaitojen hallinnalla ennen kouluopeuksen alkamista on yhteys laskutaitojen kehitykseen ja edelleen yhteen- ja vähennyslaskujen osaamiseen.

Laskemisen taidot käsittävät lukujonon luettelemisen ja lukumäärän laskemisen taidon sekä numerosymbolien hallinnan (Väisänen & Aunio, 2014). Luettelemalla laskemisen oppiminen kehittyy vaiheittain noin neljässä vuodessa alkaen toisesta ikävuodesta (Butterworth, 2005). Luettelemalla laskemisen oppimista ohjaa Gelmanin ja Gallistelin (1978) mukaan viisi periaatetta. Ensimmäinen periaate on yksi-yhteen -suhde ja toinen järjestyksen pysyvyys, joka tarkoittaa sitä, että lukusanat ovat tietyssä järjestyksessä. Kolmantena periaatteena on kardinaalisuus, jolla tarkoitetaan viimeisen luvun merkitsevän laskettavien esineiden määrää. Jotta lapsi voisi ymmärtää kardinaalisuutta, täytyy hänen ymmärtää kaksi edellistä periaatetta. Neljäntenä periaatteena Gelman ja Gallistel (1978) mainitsevat abstraktioperiaatteen ja viidentenä järjestyksen riippumattomuuden periaatteen. Toisin sanoen minkä tahansa joukon määrä voidaan laskea ja laskettavien yksiköiden laskujärjestyksellä ei ole väliä. Näin ollen lorumaisesta lukujonon luettelusta kehittyy vaiheittain kyky lukumäärien laskemiseen ja kykyyn

ymmärtää lukujen hajotelmia. Nämä luovat pohjan yhteen- ja vähennyslaskun harjoitteluun. (Fuson, 1992; Aunio, 2008.)

Viimeisenä lapsille kehittyvät laskemisen taitojen pohjalta aritmeettiset perustaidot. Aritmeettisillä perustaidoilla tarkoitetaan neljää peruslaskutoimitusta, joita ovat yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku (Väisänen & Aunio, 2014). Aritmeettisten taitojen kehitystä kuvataan usein strategioiden kautta eli siirtymisenä konkreettisten apuvälineiden kautta (esim. sormet/ääneen luettelu) kohti muistista palauttamisen strategiaa (Baroody, 1984; Fuson, 1992; Murata, 2004). Laskujen ratkaiseminen edellyttää erilaisia yhtäaikaista toimintoja ja asioiden mielessä pitämistä, joten yhteen- ja vähennyslaskutaitojen kehittyminen on monivaiheinen suoritus (Baroody, 1984). Näiden taitojen pitäisi kuitenkin kehittyä alkuopetuksen aikana.

Lapsi ymmärtää yksinkertaisia yhteen- ja vähennyslaskuja esikouluikäisenä (Koponen, Mononen, & Räsänen, 2014). Lapsi oppii laskustrategioita kouluopetuksessa, mutta käyttää ja kokeilee niitä myös spontaanisti (Steinberg, 1985). Carpenterin ja Moserin (1984) mukaan yhteenlaskustrategia kehittyy siten, että lapsi aloittaa ensin laskemalla laskun kaikki luvut. Tämän jälkeen strategia kehittyy niin, että lapsi aloittaa laskemisen ensimmäiseksi mainitusta luvusta. Kehittyneimmillään lapsi osaa aloittaa laskemisen suurimmasta luvusta, jolloin laskeminen on myös nopeampaa. Myös Butterworthin (2005) ja Ostadin (1997) mukaan yhteenlaskustrategiat kehittyvät lukujen luettelusta kolmen vaiheen kautta, joita ovat kaiken laskeminen, ensimmäisestä luvusta laskeminen ja laskeminen suuremmasta luvusta alkaen.

Vastaavasti vähennyslaskustrategia kehittyy Carpenterin ja Moserin (1984) mukaan ensin niin, että lapsi aloittaa vähennyslaskun laskemalla vähennettävän luvun verran, jonka jälkeen lapsi laskee vähentäjän ja sitten lukujen erotuksen (ks. myös Ostad, 1999). Seuraavaksi strategiat kehittyvät siten, että lapsi aloittaa suuremmasta luvusta ja etenee vähennettävän luvun verran kohti vastausta. Tämän jälkeen kehittyy myös kyky täydentää vähennyslaskun pienempää lukua kohti suurempaa ja ymmärtää täydennettävien lukujen määrän olevan vastaus. Sekä yhteen- että vähennyslaskustrategiat kehittyvät toistojen ja onnistumisten

myötä kohti muistista palauttamisen strategiaa. Strategioiden kehittyminen tapahtuu kuitenkin siten, että useita strategioita voidaan käyttää samanaikaisesti (Butterworth, 2005).

Ensimmäisellä luokalla luettelemalla laskeminen on tyypillinen tapa ratkaista yksinumeroisia laskuja, mutta toisen ja kolmannen luokan aikana yksinumeroisilla luvuilla laskemisen pitäisi automatisoitua eli muuttua sujuvaksi. Perusopetuksen opetussuunnitelman (2014) mukaan kolmannella luokalla syvennetään ja vahvistetaan alkuopetuksen (1.–2. lk.) aikana saatuja matemaattisia tietoja ja taitoja. Kolmannella luokalla opetuksessa siirrytään moninumeroisiin laskuihin, vaativimpiin laskutapoihin sekä operoidaan laajemmalla lukualueella. Näin ollen aritmeettisten peruslaskutaitojen oletetaan olevan jo automatisoituja.

## 1.2 Laskusujuvuus

Laskusujuvuudella tarkoitetaan perusaritmeettisten laskujen ratkaisemista nopeasti ja tarkasti (Carr & Alexeev, 2011; Koponen ym., 2016) tai nopeasti ja tehokkaasti (Price, Mazzocco, & Ansari, 2013). Laskemisen sujuvuutta mitataan usein laskemisen nopeuden kautta. Laajasti tutkimuksissa käytössä oleva laskusujuvuuden mittaamistapa on ollut aikarajoitetut tehtävät, joissa lasketaan oikeiden vastausten lukumäärä. Tyypillinen aikaraja on ollut kolme minuuttia (esim. Fuchs ym., 2008; Chong & Siegel, 2008; Koponen ym., 2016) tai uudemmissa tutkimuksissa kaksi minuuttia (esim. Koponen ym., 2018).

Sujuvaa laskutaitoa tarvitaan erityisesti uusien ja monimutkaisempien matematiikan laskujen kannalta (Geary, 2011a). Jotta lapsi pystyisi ratkaisemaan matemaattisia ongelmia ilman suuria ponnisteluja, tulisi lapsen pystyä hakemaan muistista sujuvasti perusaritmeettisiä faktoja ja laskun osavastauksia (Koponen, 2012). Vastauksen muistaminen eli automatisoituminen on sujuvin ja nopein laskutapa (Rusanen & Räsänen, 2012; Koponen, 2012).

Vaikeus hallita lukualueen 0–20 yhteen- ja vähennyslaskuja ennakoii vaikeuksia moninumeroisten tehtävien ratkaisemisessa (Rusanen ja Räsänen, 2012)

ja pysyviä vaikeuksia matematiikan oppimisessa (Gersten, Jordan & Flojo, 2005; Vukovic, & Siegel, 2010). Koposen (2012) mukaan taidoiltaan heikot laskijat turvautuvat luettelemalla laskemiseen ja sormilla laskemiseen, koska heillä näyttää olevan vaikeuksia oppia muistamaan peruslaskujen vastauksia. Opetuksessa huomiota tulisi kiinnittää siihen, miten laskuja ratkaistaan sen sijaan, että huomio kiinnittyy vain oikeaan vastaukseen pääsemiseen (Garnett, 1992).

Ensimmäisellä luokalla lasta tulee tukea tehokkaiden luettelemalla laskeamisen strategioiden käyttöön eli harjoitella ottamaan lukumääriä suoraan yksitellen luetteluun sijaan ja ymmärtämään laskemisen vaihdannaisuutta (Koponen, 2012). Interventiotutkimuksissa on havaittu, että laskutoimitusten ymmärtämiseen ja strategiaharjoitteluun pohjautuva opetus kehittää laskutaidon sujuvuutta (Koponen, Aro & Ahonen, 2009; Koponen ym., 2018). Näin ollen mitä sujuvampi lapsen laskutaito oli, sitä vähemmän hänen täytyi turvautua heikkoihin strategioihin, kuten luetteluun ja sormilla laskemiseen (Aunio ym., 2004, 205; Meyer, Salimpoor, Wu, Geary, & Menon, 2010), ja näin laskeminen nopeutui ja sujuvoitui.

Laskemisen sujuvuutta on eri tutkimuksissa ennustettu sekä matematiikkaan liittyvillä valmiuksilla ja taidoilla että kognitiivisilla tekijöillä. Tutkimuksissa (esim. Koponen ym., 2013; Koponen ym., 2016) esi- ja alkuopetusiässä lukujonotaitojen on havaittu ennustavan myöhempää laskemisen sujuvuutta. Lisäksi Mazzoccon ja Thompsonin (2005) mukaan jo neljävuotiaiden lasten taidoista voidaan melko luotettavasti ennustaa ensimmäisten kouluvuosien laskemisen sujuvuuden oppimista ja oppimisvaikeuksia. Myös nopean nimeämisen (Rapid Automated Naming; RAN) on havaittu olevan yhteydessä laskemisen sujuvuuteen (Koponen ym., 2016; Cui, Georgiou, Zhang, Li, Shu, & Zhou, 2017). Koposen, Georgioun, Leskisen, Salmen ja Aron (2017) meta-analyysin mukaan nopea nimeäminen näyttää ennustavan enemmän myöhempää laskusujuvuutta kuin laskutarkkuutta sekä vahvemmin aritmeettisiä laskutaitoja kuin yleistä matemaattista suoriutumista. Työmuistikapasiteetille laskutaidon sujuvoitumisesta on hyötyä, koska tällöin ongelmanratkaisuun vapautuu enemmän työmuistin re-

sursseja (Vasileyva, Laski, & Shen, 2015). Laskemisessa ilmenevät sujuvuuspulmat kuormittavat enemmän työmuistia ja tarkkaavaisuutta, jolloin laskutehtävien ymmärtämiselle jää vähemmän resursseja (Binder, 1996).

On vähemmän tutkimustietoa, joissa olisi verrattu yhteen- ja vähennyslaskun kehittymistä tai niiden sujuvuuden kehittymistä. Tiedetään kuitenkin yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kehittyvän konkreettisista strategioista kohti abstraktimpia ja eri strategioiden kehittymisen vaiheet voivat olla myös päällekkäisiä (Butterworth, 2005; strategioiden kehittymisestä katso esim. Butterworth, 2005; Ostad 1997; Ostad, 1999; Carpenter & Moser, 1984). Kuitenkin Steinbergin (1985) mukaan vähennyslaskustrategioiden oppiminen on lapselle vaikeampaa kuin yhteenlaskustrategioiden, koska vähennyslaskuissa tulee käsitellä useampia vaiheita samanaikaisesti. Kamiin, Lewiksen ja Kirklandin (2001) tutkimuksen mukaan lapset päättelivät vastauksen usein yhteenlaskun kautta sen sijaan, että vähennyslaskun tulos olisi automatisoitunut muistiin. Näin ollen tämä antaa viitteitä siitä, että vähennyslaskun voidaan olettaa olevan haastavampaa ja vähemmän automatisoitunutta kuin yhteenlasku. Tästä johtuen myös tässä tutkimuksessa yhteen- ja vähennyslaskua tarkastellaan erillisinä malleina.

### **1.3 Sukupuolierot matematiikassa**

On olemassa vahvaa tutkimusnäyttöä sukupuolieroista myöhempinä ikävuosina (esim. kansainväliset vertailututkimukset: TIMMS & PISA; muita tutkimuksia: Gallagher ym., 2000; Felson & Trudeau, 1991; Hyden, Fenneman, & Lamonin meta-analyysi, 1990). Kuitenkin tutkimustieto sukupuolieroista matematiikan osaamisessa esi- ja alkuopetusaikana on melko ristiriitaista. Suomalaisessa tutkimuksessa tyttöjen on havaittu pärjäävän poikia paremmin varhaisissa matemaattisissa taidoissa jo päiväkotikässä (Aunio, Hautamäki, Heiskari, & Van Luit, 2006). Sen sijaan amerikkalaisten tutkimusten mukaan sukupuolieroja ilmeni poikien eduksi varhaisissa matemaattisissa taidoissa (Jordan ym., 2006; Jordan ym., 2007). On myös havaittu, ettei tyttöjen ja poikien välillä ole eroja matematiikassa esi- ja alkuopetuksikässä (Aunola ym., 2004; Walker & Brethelsen, 2016). Sen

sijaan Pennerin ja Paretin (2008) pitkittäistutkimuksen mukaan sukupuolierot kasvavat matematiikassa jo varhaiskasvatuksessa.

Carr ja Davis (2001) havaitsivat sukupuolieroja 7-vuotiailla laskustrategioiden käyttämisessä siten, että pojat käyttivät enemmän muistista palauttamisen strategiaa, kun taas tytöt laskivat useammin sormilla ja konkreettisilla apuvälineillä (ks. myös Carr & Jessup, 1997). Myös 8-vuotiaana pojat käyttivät tyttöjä enemmän abstrakteja strategioita, ja näin ollen poikien parempi laskustrategioiden käyttö saattaa johtaa laskutaidon nopeampaan kehittymiseen (Carr ym., 2008) ja sujuvampaan laskutaitoon. Fenneman, Carpenterin, Jacobsin, Franken ja Levin (1998) tutkimuksen mukaan alkuopetuksessa ei havaittu sukupuolieroja yhteen- ja vähennyslaskuissa, mutta poikien havaittiin käyttävän tyttöjä parempia laskustrategioita, jotka mahdollistivat pojille nopeamman laskemisen.

Laskusujuvuudessa poikien on havaittu pärjäävän tyttöjä paremmin 8-vuotiaana (Carr ym., 2008) sekä 8- ja 9-vuotiaana (Väisänen & Aunio, 2016). Lisäksi Carr, Taasoobshirazi, Stroud ja Royer (2011) havaitsivat tutkimuksessaan poikien hyötyvän laskusujuvuutta kehittävästä interventtiosta 8-vuotiaana enemmän kuin tytöt. Kuitenkin Royerin, Tronskyn, Chanin, Jacksonin ja Marchantin (1999) tutkimuksen mukaan ennen ikävuosia 10–11 ei ole havaittavissa sukupuolieroja laskusujuvuudessa.

Carrin ja kollegoiden (2008) mukaan sukupuolieroja matematiikassa voisi selittää lasten itsevarmuus matematiikassa. Heikompi itsevarmuus tytöillä heijastui parempaan tietoisuuteen omista matematiikan taidoista. Pojilla voimakas itsevarmuus oli negatiivisesti yhteydessä matematiikassa suoriutumiseen. Herbertin ja Stipekin (2005) tutkimuksen mukaan 9-vuotiaana tytöt arvioivat matemaattiset taitonsa alhaisemmaksi kuin pojat, vaikka taitotasoissa ei ollut eroja. Toisin sanoen tytöillä oli heikompi minäpystyvyys ja pojilla myönteisempi asenne matematiikkaan. Myös Wigfieldin ja kollegoiden (1997) 6–12-vuotiaiden pitkittäistutkimuksessa havaittiin tytöillä olevan poikiin verrattuna heikompi minäpystyvyys matematiikassa. Kuitenkaan tyttöjen ja poikien välillä ei ollut eroja matematiikan arvostuksessa eikä siinä, kuinka hyödylliseksi matematiikka koettiin.

## 1.4 Laskusujuvuutta ennustavat kognitiiviset tekijät

Yksilöiden välisiä eroja matemaattisissa taidoissa ennustavat erilaiset kognitiiviset valmiudet. Nämä valmiudet voidaan jaotella yleisiin kognitiivisiin valmiuksiin sekä matematiikalle spesifeihin valmiuksiin. Aunola ja Nurmi (2018) ovat jaotelleet kognitiiviset valmiudet yleisiin oppimisen valmiuksiin, kuten prosessointinopeuteen, työmuistiin ja tarkkaavaisuuteen, sekä matematiikalle spesifeihin valmiuksiin, joita ovat lukujonotaidot, lukumäärien vertailutaidot ja numerosymbolien hallinta. Hornung ja kollegat (2014) jaottelivat tutkimuksessaan taitoja yleisiin kognitiivisiin taitoihin, joita oli työmuisti ja älykkyys sekä numerospesifeihin taitoihin, johon kuuluivat lukujonotaidot ja lukumäärien vertailu. Sekä yleisten kognitiivisten valmiuksien että matematiikkaspesifisien valmiuksien on havaittu ennustavan myöhempää suoriutumista matematiikassa (Hornung ym., 2014).

Tähän tutkimukseen valittiin laskusujuvuutta selittämään yleisistä kognitiivisista valmiuksista työmuisti ja prosessointinopeus sekä matematiikkaspesifeistä valmiuksista lukujonotaito. Työmuisti ja prosessointinopeus kontrolloitiin lukujonotaidon omavaikutuksen selvittämiseksi. Seuraavaksi tarkastellaan näitä taitoja ja niiden yhteyttä matemaattisten suoriutumiseen ja laskusujuvuuteen.

### 1.4.1 Lukujonotaidot

Koposen ja kollegoiden (2013) mukaan lukujonotaidoilla tarkoitetaan vaiheittain kehittyvää kykyä, jossa lapsi luettelee lukuja eteenpäin, taaksepäin sekä säännömukaisesti (esimerkiksi kahden välein). Aunolan ja Nurmen (2018) mukaan lukujonotaito on tietämystä lukujen välisistä keskinäisistä yhteyksistä sekä taitoa laskea luettelemalla. Lukujonotaitojen hallinta on edellytys luettelemalla laske- miselle (Koponen, 2012) ja luettelemalla laskeminen edellyttää yksittäisten numeroiden nimien ja niiden oikean järjestyksen ymmärrystä (Ahonen ym., 2008).

Lukujonotaitojen kehityksen perusmallina voidaan pitää Fusonin, Richardsin ja Briarsin (1982) mallia, jossa lukujonotaitojen kehittyminen jaetaan kahteen erilliseen ja osittain päällekkäiseen vaiheeseen. Ensimmäisessä vaiheessa lapsen

luettelu on lorumaista eikä siinä välttämättä ole matemaattista sisältöä. Tässä vaiheessa lapsi ei ymmärrä lukujonon yksittäisiä lukuja itsenäisinä, vaan toistaa niitä ainoastaan lukujonon osana. Toisessa vaiheessa lapsi ymmärtää lukujen numeerisia arvoja ja kykenee tuottamaan lukuja järjestyksestä erillisinä (Fuson ym., 1982). Tässä vaiheessa lukujonojen osat eriytyvät ja vakiintuvat, ja lapsi ymmärtää lukusanojen välisiä suhteita (Fuson, 2012). Lisäksi kehityksessä ilmenee usein vaihe, jossa lapsi voi olla taitava laskija lukujonon alueella 0–20, mutta ei täysin ymmärrä lukualueen 20–100 matemaattista sisältöä. Tämä kertoo siitä, että lukujonojen eri osa-alueiden hallinta voi olla kehityksen eri vaiheissa samanaikaisesti. (Fuson ym., 1982.) Lukujonotaidon edistyneessä vaiheessa lukujonotaidot sekä yhteen- ja vähennyslaskutaidot tukevat toisiaan, ja lapsi kykenee liikkumaan lukujonossa eteen- ja taaksepäin sekä eri mittaisia askeleita käyttäen (Aunio ym., 2004).

Lukujonotaitoja tutkittaessa on käytetty erilaisia mittareita ja tutkimusten perusteella on tunnistettavissa viisi mittaamisstrategiaa: 1) lasta pyydettiin luettelemaan niin pitkälle kuin osaa kuitenkin pysäyttäen lukuun 31 (Koponen ym., 2013) tai lukuun 50 (Aunola, ym., 2004; Locuniak & Jordan, 2008), 2) lasta pyydettiin luettelemaan etuperin tai 3) takaperin alkaen eri aloituslukuista annetun ajan verran (Koponen ym., 2013; Aunola ym., 2004; Zhang ym., 2013) tai 4) säännön mukaan, kuten kahden tai kymmenen välein (Koponen ym., 2013). Lisäksi 5) lasta pyydettiin tunnistamaan luettelemalla laskemisen periaatteiden oikeellisuutta ja virheellisyyttä (Locuniak & Jordan, 2008; Geary, 2004). Lukujonotaitotehtävistä on tyypillisesti muodostettu summamuuttuja, kuten myös edellä mainituissa tutkimuksissa.

Esi- ja alkuopetuksessa mitattujen lukujonotaitojen on havaittu ennustavan myöhempää laskemisen sujuvuutta (Koponen ym., 2013,  $r = .51-.52$ ; Koponen ym., 2016,  $r = .38-.46$ ,  $p < .001$ ). Laskeminen helpottuu ja nopeutuu, kun lapsella on taito aloittaa lukujen luetteleminen mistä tahansa lukujonon kohdasta (Aunio ym., 2004; Koponen, 2012). Sujuva luettelemalla laskeminen vahvistaa matemaattisen ongelman ja vastauksen välistä yhteyttä, joka vähitellen mahdollistaa vastauksen palauttamisen suoraan muistista (Siegler & Shrager, 1984). Näin ollen



lukujonotaitojen oppimista voidaan pitää keskeisenä elementtinä lasten matemaattisen ajattelun ja laskutaidon kehityksessä (Aunio ym., 2004; Koponen ym., 2014). Lisäksi sujuvan lukujonotaidon on havaittu ennustavan aritmeettisten taitojen kehitystä (Aunola ym., 2004,  $r = .62-.74$ ,  $p < .001$ ) sekä tehokkaiden laskestrategioiden käyttöä (Johansson, 2005). Lukujonotaidoilla sekä luku- ja numerosymbolien tuntemisella on myös ennustettu matemaattisia oppimisvaikeuksia (Gersten ym., 2005).

#### 1.4.2 Työmuisti

Työmuistia on tutkittu kattavasti, ja siitä on erilaisia mallinnuksia. Tässä tutkimuksessa työmuistia lähestytään Baddeleyn kolmikomponenttimallin (ks. Baddeley, 2000; Baddeley, Allen, & Hitch, 2011) kautta, koska se on tutkituin ja tunnetuin kaikista työmuistin malleista. Baddeleyn (2000; 2010) mukaan kognitiivisen psykologian tutkimuksissa työmuisti on määritelty rajoitetun kapasiteetin järjestelmäksi. Tämä järjestelmä mahdollistaa väliaikaisen varastoinnin ja käsittelyn sellaiselle tiedolle, joka on välttämätöntä monimutkaisissa tehtävissä, kuten ymmärtämisessä, oppimisessa ja päättelyssä.

Baddeleyn (2000) mallissa työmuisti koostuu eri komponenteista, jotka ovat tietoa aktiivisesti käsitteleviä ja prosessoivia sekä passiivisesti varastoivia osia. Mallissa kielelliselle ja visuaaliselle tiedolle on omat varastonsa. Tiedon käsittelyä ohjaa keskusyksikkö, joka myös vastaa komponenttien välisestä vuorovaikutuksesta ja tiedonkäsittelystä episodisen puskurin avulla. (Baddeley, 2000.)

Työmuistin kapasiteetin on havaittu kasvavan iän myötä (Lehto, Juujärvi, Kooistra, & Pulkkinen, 2003; Nevo & Breznitz, 2013). Kuusivuotiaana lapsi voi säilöä muistissaan 3–4 yksikköä ja kahdeksanvuotiaana 4–5 yksikköä (Kail, 1997). Aikuisen kapasiteettitaso saavutetaan noin 15-vuotiaana (Siegel, 1994), jolloin työmuistikapasiteetti on noin 7 yksikön suuruinen (Kail, 1997). Näin ollen kyky pitää tietoa työmuistissa vaihtelee iän ja yksilön kehityksen mukaan. Työmuistin kehittyminen ei ole ainut selittäjä työmuistin kapasiteetin kasvulle. Myös aivojen kyky prosessoida tietoa kehittyy, lapsen tietomäärä kasvaa ja lapsi kykenee käyttämään erilaisia muististrategioita säilyttääkseen asioita mielessään (Kyttälä &

Kanerva, 2018). Fryn ja Halen (1996) tutkimuksen mukaan ikään liittyvät muutokset prosessointinopeudessa selittivät suurimman osan työmuistin kehityksestä.

Aritmeettiset tiedot, kuten peruslaskutoimitusten tulokset, tallentuvat pitkäkestoiseen muistiin. Kuitenkin matemaattiset tehtävät vaativat työmuistikapasiteettia, koska varsinainen matemaattisten ongelmien ratkaisu tapahtuu työmuistissa. (Service & Lehto, 2005.) Työmuistin rajallisuus vaikeuttaa matemaattisten tehtävien ratkaisemista, sillä muistissa säilytetään tehtävän aikana laskettavat luvut ja tehdään laskutoimitukset (Kyttälä & Kanerva, 2018).

Tutkimusten mukaan hyvän työmuistin on havaittu ennustavan parempaa ja sujuvampaa suoriutumista matematiikassa. Esimerkiksi Krajewski ja Schneider (2009) ovat havainneet ennen kouluikää mitatun työmuistin ennustavan sitä, millaista matemaattinen suoriutuminen on myöhemmin kouluikässä. Lisäksi De Smedtin ja kollegoiden (2009) tulosten mukaan ensimmäisen luokan alussa mitatun työmuistin todettiin olevan yhteydessä matemaattiseen suoriutumiseen sekä ensimmäisellä että toisella luokalla. Peng, Barnes, Namkung ja Sun (2015) havaitsivat meta-analyysissään työmuistin olevan vahvasti yhteydessä yksi- ja kaksinumeroisten lukujen peruslaskutoimituksiin sekä sanallisten tehtävien ratkaisemiseen.

Tämän lisäksi työmuistin on havaittu ennustavan laskemisen sujuvuutta (Locuniak & Jordan, 2008,  $r = .35$ ,  $p < .01$ ). Tutkimukset eivät kuitenkaan keskity yksittäin työmuistin laskusujuvuutta ennustavaan rooliin, mikä viittaa siihen, että työmuistin rooli laskusujuvuudessa ei ole yksiselitteinen. Laskemisen sujuvoituminen edellyttää siirtymistä hitaista ja heikoista strategioista kohti parempia ja tehokkaampia muistista palauttamisen strategioita (Geary, 2004). Laskustrategiat eivät kuitenkaan kehity kaikilla oppilailla nopeasti sujuviksi. Esimerkiksi Noël, Seron ja Trovarelli (2004) havaitsivat, että lapset, joilla oli heikko työmuistin kapasiteetti, käyttivät alkeellisempia strategioita ensimmäisellä luokalla yhteenlaskussa, muun muassa luettelua ja sormilla laskemista. Näin ollen työmuistin näkökulmasta peruslaskutoimitukset tulisi oppia ulkoa, koska tällöin

laskutoimitukset eivät kuormita työmuistia, ja siten työmuistin kapasiteettia vapautuu monimutkaisempiin prosesseihin (Kyttälä & Kanerva, 2018).

Myös matematiikan oppimisvaikeuksien yhteyttä työmuistitehtäviin on tutkittu. Esimerkiksi Passolunghi ja Siegel (2004) havaitsivat, että lapsilla, joilla oli matemaattisia oppimisvaikeuksia, oli myös vaikeuksia työmuistitehtävissä, jotka edellyttivät aktiivista numeerisen informaation prosessointia. Moll, Gobel, Gooch, Landerl ja Snowling (2016) havaitsivat esikouluikäisten lasten matematiikan oppimisvaikeuksien olevan yhteydessä heikkoon suoriutumiseen visuaalisissa työmuistitehtävissä. Myös McLean ja Hitch (1999) havaitsivat heikosti aritmetiikassa suoriutuvien lasten pärjäävän heikosti sekä visuaalista työmuistia että työmuistin keskusyksikköä mittaavissa tehtävissä. Fonologista silmukkaa tarvitaan lukujen luettelemisessa (Service & Lehto, 2005) ja vaativien päässä laskutehtävien ratkaisussa (Noël, Desert, Aubrun & Seron, 2001). Servicen ja Lehdon (2005) mukaan matemaattiseen suoritukseen osallistuvat kaikki työmuistin kolme tunnetuinta yksikköä, mutta niiden keskinäinen työnjako ei ole vielä tarkasti tiedossa.

Edellä esitettyjen tutkimusten mukaan työmuisti näyttäisi olevan tärkeä tekijä selitettäessä lasten yksilöllisiä eroja matemaattisessa suoriutumisessa. Kuitenkin Melby-Lervåg ja Hulmen (2013) laaja meta-analyysi osoitti, että työmuistiharjoittelu ei juuri edistä matemaattisissa tehtävissä suoriutumista. Lisäksi Kanervan ja Kyttälän (2013) interventiotutkimuksessa havaittiin, ettei työmuistin harjoittamisella saatu siirtovaikutusta matematiikan taitojen osaamiseen. Näin ollen työmuisti on keskeinen osa matematiikan oppimisen ydinvalmiuksia, mutta ei ratkaise matemaattisia ongelmia yksinään (Kyttälä & Kanerva, 2018).

### **1.4.3 Prosessointinopeus**

Prosessointinopeudelle ei ole yhtä vakiintunutta määritelmää tai testiä. Aiemmissa tutkimuksissa prosessointinopeuden mittarina on käytetty kielellistä prosessointinopeutta mittaavia tehtäviä, kuten nopeaa nimeämistä (Chong & Siegel, 2008; Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012) ja ei-kielellistä prosessointinopeutta

mittaavia tehtäviä, kuten merkkikoetta (Shanahan ym., 2006), merkin tunnistamista (Passolunghi, 2011) ja yliviiwaustehtäviä (Moll ym., 2016). Kail (1995) uskoo prosessointinopeuden olevan erityispiirre tiedonkäsittelyn mekanismin kehittymiselle, ja siten olevan vaikuttava tekijä informaation prosessoinnin nopeuteen. Conway, Cowan, Bunting, Therriault ja Minkoff (2002) määrittelevät prosessointinopeuden yleiseksi ominaisuudeksi, joka määrittää informaation koodausta, muuttamista ja muistista palauttamista. Näin ollen he määrittelevät prosessointinopeuden olevan sitä parempi, mitä enemmän informaatiota voidaan prosessoida tietyssä ajassa. Tässä tutkimuksessa prosessointinopeudella tarkoitetaan ei-kielellistä prosessointinopeutta mittaavaa kykyä. Olennaista on, miten paljon tietoa lapsi prosessoi virheettömästi aikarajallisessa tehtävässä.

Prosessointinopeuden yhteys matematiikkaan ei ole yksiselitteinen. Fuchsin ja kollegoiden (2006) mukaan prosessointinopeus näyttää olevan enemmän yhteydessä peruslaskutaitoihin kuin sanallisiin tehtäviin. Lisäksi kolmannella luokalla prosessointinopeus ennusti aritmeettista sujuvuutta (Fuchs ym., 2006). Passolunghin (2011) tutkimus osoitti, että neljännellä luokalla matematiikan oppimisvaikeuslapsilla oli heikompi prosessointinopeus kuin vertaisilla. Anderssonin (2010) mukaan prosessointinopeus selittää eroja matemaattisissa taidoissa työmuistista riippumatta.

Prosessointinopeudelle ei ole vakiintunutta mittaria, joten erilaiset mittaukset voivat olla yhteydessä eri tavoin matematiikkaan tai matematiikan eri osa-alueisiin. Kuitenkin laskemisen sujuvuudessa laskujen ratkaisunopeus on keskeistä, joten laskusujuvuutta voi selittää myös prosessointinopeus. Kaiken kaikkiaan on myös tutkimuksia, joissa eri tavoin mitattu prosessointinopeus on yhteydessä laskemisen sujuvuuteen (Cowan & Powell, 2014,  $r = .53$ ; Fuchs ym., 2006,  $r = .48$ ).

## 1.5 Tutkimuskysymykset

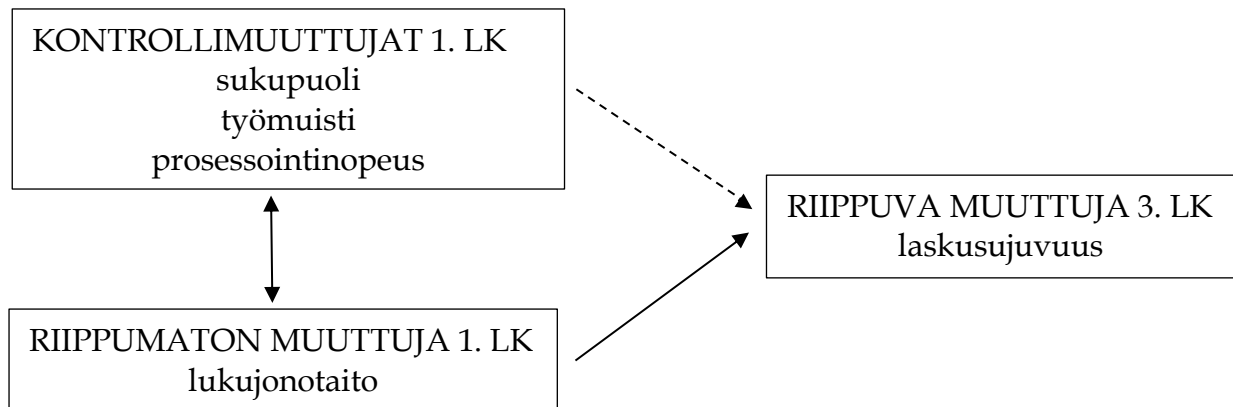
Laskusujuvuuden kehittymisen taustalla on erilaisia tekijöitä. Aikaisempien tutkimusten (Koponen ym., 2013; Koponen ym., 2016) perusteella lukujonotaitojen on havaittu ennustavan myöhempää laskusujuvuutta. Näin ollen myös matematiikan pulmien kasaantumisen ennaltaehkäisyyn vuoksi lukujonotaitojen yhteyttä laskemisen sujuvuuteen on syytä tarkastella jo ensimmäiseltä luokalta alkaen. Lisäksi työmuistin (Chong & Siegel, 2008; Locuniak & Jordan, 2008) ja prosessointinopeuden (Cowan & Powell, 2014; Fuchs ym., 2006) on havaittu olevan yhteydessä laskemisen sujuvuuteen. Kun tiedetään, mitkä tekijät ovat yhteydessä laskusujuvuuteen, osataan sujuvuuden kehittymiseen kiinnittää huomiota jo varhaisessa vaiheessa.

Laskusujuvuus pitää sisällään yhteen- ja vähennyslaskutaidot. Kuitenkin Kamiin ja kollegoiden (2001) sekä Steinbergin (1985) mukaan näiden taitojen voidaan olettaa kehittyvän eri tahtiin. Vähennyslasku on prosessina haastavampi, kun taas yhteenlaskutaidot sujuvoituvat aikaisemmin. Prosessien erilaisuuden vuoksi tässä tutkimuksessa tarkastellaan laskusujuvuutta erikseen yhteen- ja vähennyslaskun osalta.

Hyvin moninaisten ja ristiriitaistenkin tutkimustulosten vuoksi sukupuoli-erojen esiintyvyydestä matematiikassa ei voi tehdä suoria johtopäätöksiä. Tutkimuksissa pojat ovat menestyneet tyttöjä paremmin laskusujuvuudessa ja strategioiden käytössä (Carr & Davis, 2001; Carr & Jessup, 1997; Carr ym., 2008). Royerin ja kollegoiden (1999) mukaan laskusujuvuudessa ei ole havaittavissa eroja sukupuolten välillä. Koska tulokset ovat vaihtelevia, antaa se myös syyntä tarkastella sukupuolen roolia matematiikassa. Tässä tutkimuksessa tarkastellaan sukupuolen välisiä eroja laskusujuvuudessa, ja halutaan selvittää millaisena sukupuolierot näyttäytyvät kolmannella luokalla.

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, missä määrin ensimmäisen luokan lukujonotaidot ennustavat kolmannen luokan laskusujuvuutta. Lukujonotaitojen omavaikutuksen selvittämiseksi kontrolloitiin sukupuoli, työmuisti ja prosessointinopeus. Tutkimusasetelma on esitetty kuviossa 1. Tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

1. Missä määrin ensimmäisellä luokalla mitatut lukujonotaidot ennustavat kolmannen luokan yhteenlaskun sujuvuutta?
2. Missä määrin ensimmäisellä luokalla mitatut lukujonotaidot ennustavat kolmannen luokan vähennyslaskun sujuvuutta?



**Kuvio 1.** Tutkimusasetelma

## 2 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

### 2.1 Tutkimuskonteksti ja tutkittavat

Tämän tutkimuksen aineisto on osa Suomen Akatemian rahoittamaa Lasten luku- ja laskutaidon sujuvuus -hanketta (FLuency Arithmetic REading; lyhennettynä FLARE). Hanke oli kaksivuotinen pitkittäistutkimus, jonka tavoitteena oli saada tietoa lukemisen ja laskemisen sujuvuuden kehittymisestä sekä pulmien päällekkäistymisestä. Osallistujien lukemisen ja laskemisen sujuvuuden ja niihin liittyvien kognitiivisen ja motivationaalisten taitojen kehitystä seurattiin ensimmäiseltä luokalta kolmannelle luokalle. Aineisto kerättiin viiden lukukausittain järjestetyn mittapisteen aikana Keski-Suomen alueen peruskouluista vuosina 2016–2018. Hankkeen vastuullisena johtajana toimi professori Mikko Aro.

Tutkimukseen osallistui 207 oppilasta keskisuomalaisista peruskouluista. Oppilaat olivat kuudesta eri koulusta ja kahdeltatoista eri yleisopetuksen luokalta. Tutkimusjoukkona olivat kaikki tutkimukseen osallistuneet oppilaat ensimmäiseltä tutkimuskerralta keväällä 2016 ja viimeiseltä tutkimuskerralta keväällä 2018. Oppilaat olivat keväällä 2016 ensimmäisellä luokalla ja keväällä 2018 kolmannella luokalla. Analyysien jälkeen tähän tutkimukseen valikoitui 180 tutkittavaa, joista poikia oli 88 (49 %) ja tyttöjä 92 (51 %).

Tutkimukseen osallistuminen perustui vapaaehtoisuuteen ja oppilaiden huoltajilta pyydettiin tutkimusluvat. Osallistuminen oli myös mahdollista keskeyttää missä tahansa tutkimuksen vaiheessa. Jokaisen tutkittavan anonymiteetistä huolehdittiin siten, ettei yksittäisiä tutkittavia ollut mahdollista tunnistaa aineistosta ja aineistoa käsittelevät henkilöt tekivät vaitiololupauksen. Lisäksi tutkimuksen toteuttamisesta pyydettiin Jyväskylän yliopiston eettisen toimikunnan lausunto. Tutkimuseettiset toimenpiteet oli huolehdittu FLARE-hankkeen toimesta. Tämän tutkimuksen aikana aineiston dataa on käsitelty huolellisesti ja hyvää tieteellistä käytäntöä noudattaen. Tutkimusdataa on säilytetty asianmukaisesti ja tutkittavien yksityisyyttä kunnioittaen.

## 2.2 Tutkimusmenetelmät ja muuttujien mittaaminen

Tämän tutkimuksen aineisto on kerätty Lasten luku- ja laskutaidon sujuvuus -hankkeen ensimmäisen luokan kevään ja kolmannen luokan kevään mittapisteiltä. Tutkimuksen aineistona käytettiin sekä yksilö- että ryhmätilanteessa toteutettuja tehtäviä. Koulutetut tutkimusavustajat teettivät yksilötilanteessa tehtäviä kahden kesken oppilaan kanssa oppitunnin aikana. Ryhmätilanteessa tehtävät toteutettiin yhteisesti kaikille luokalta osallistuville oppilaille. Kaksi koulutettua tutkimusavustajaa ohjeisti ja valvoi ryhmätilanteessa itsenäisesti suoritettavia lomaketehtäviä. Tässä tutkimuksessa käytettiin ensimmäisen luokan kevään työmuistia, prosessointinopeutta ja lukujonotaitoa mittaavia tehtäviä sekä kolmannen luokan kevään laskusujuvuutta mittaavia tehtäviä. Seuraavaksi esitellään tutkimuksessa käytetyt mittarit.

**Työmuisti.** Työmuistia mitattiin numerosarjatehtävillä yksilötilanteessa tutkimusavustajan ohjaamana. Numerosarjatehtävä oli WISC-IV -testipatteristosta (Wechsler, 2010). Tehtävässä oppilaan täytyi toistaa päinvastaisessa järjestyksessä asteittain pidentyviä numerosarjoja. Numerosarjojen muistettavat yksiköt olivat yksilukuisia numeroita. Sarjat alkoivat kahden yksikön mittaisella ärsykkeellä, minkä jälkeen osiot pidentyivät yhdellä numerolla pisimmillään 7 ärsykeeseen asti. Jokaista eri pituista sarjaa oli osioissa kaksi kappaletta, joista toinen täytyi saada oikein päästäkseen eteenpäin. Tehtävä keskeytettiin kahden peräkkäisen virheellisesti toistetun yhtä pitkän sarjan jälkeen. Oikein toistetusta sarjasta sai yhden pisteen ja muuttuja muodostettiin laskemalla yhteen pisteiden määrä. Testin maksimipistemäärä oli 12.

**Prosessointinopeus.** Prosessointinopeutta mitattiin ryhmätilanteessa WISC-IV -testipatteriston merkintunnistustehtävällä (Wechsler, 2010). Tehtävässä oppilaan täytyi nopeasti ja tarkasti selvittää, onko toinen kohdemerkeistä (geometrinen) annetulla merkkirivistöllä. Oppilaan täytyi valita "kyllä" tai "ei" sen mukaan, löytyikö kohdemerkki muiden merkkien joukosta. Tehtävä oli paperilomakkeella ja aikaa tehtävän tekemiseen oli kaksi minuuttia. Muuttujana tehtävästä käytettiin oikein vastattujen tehtävien määrää kahdessa minuutissa.



**Lukujonotaidot.** Lukujonotaitoja mitattiin neljällä eri tehtävällä, jotka kehitettiin Lasten luku- ja laskutaidon sujuvuus -hanketta varten (mittari saatavissa erikseen pyydettäessä tutkimushankkeen johtajalta). Jokainen tehtävä sisälsi harjoitusosion, jonka avulla varmistettiin oppilaan kykenemistä varsinaiseen tehtävään. Tehtävätyyppejä oli neljä: eteenpäin luetteleminen 30 sekunnin ajan alkaen luvusta 17, eteenpäin luetteleminen 30 sekunnin ajan kahden välein alkaen luvusta 1, takaperin luetteleminen alkaen luvusta 20 lukuun 0 asti suoritusaikaa mitaten ja takaperin luettelu 30 sekunnin ajan alkaen luvusta 52. Jos oppilas kesken tehtävän vaihtoi tehtävän suuntaa tai vaihtoi tehtävän toiseen, ohjasi testaaaja oppilaan takaisin oikeaan. Kyseisessä tapauksessa oppilaalle annettiin lisäaikaa. Jokaisen erillisen lukujonotehtävän aika estimoitiin 30 sekuntiin ja tehtävästä laskettiin oikein lueteltujen lukujen määrä 30 sekunnissa. Lukujonotaitotehtävistä muodostettiin keskiarvosummamuuttuja jakaumiltaan muokatuilla muuttujilla, jonka Cronbachin alfa oli .79.

**Laskusujuvuus.** Laskusujuvuutta mitattiin ryhmätilanteessa toteutetulla itenäisellä lomaketehtävällä, joista toisessa osiossa oli 120 yhteenlaskua (Koponen & Mononen, 2010a) ja toisessa osiossa 120 vähennyslaskua (Koponen & Mononen, 2010b). Tehtävät olivat paperilomakkeella ja aikaa osion tekemiseen oli kaksi minuuttia. Laskut olivat lukualueelta 1–20 ja laskut olivat joko yksi- (esim.  $5+8$ ) tai kaksinumeroisia (esim.  $12+5$ ). Tehtävän muuttuja muodostettiin kuvaamaan oikein laskettujen tehtävien määrää minuutissa. Tässä tutkimuksessa yhteenlaskutehtävä ja vähennyslaskutehtävä olivat erillisinä muuttujina.

### 2.3 Aineiston analyysi

Aineisto analysoitiin IBM SPSS 24-ohjelmistolla. Tämän tutkimuksen riippuvina muuttujina olivat kolmannella luokalla mitatut yhteenlaskun ja vähennyslaskun sujuvuus ja ennustavina muuttujina olivat sukupuoli sekä ensimmäisellä luokalla mitatut työmuistin numerosarjat taaksepäin, prosessointinopeus sekä lukujonotaidot. Näiden muuttujien välisiä suhteita tarkasteltiin askeleittain etene-

vällä monimuuttujaisella lineaarisella regressioanalyysillä. Regressioanalyysi toteutettiin ensin koko tutkittavien joukolle ja tulosten perusteella vielä erikseen tytöille ja pojille.

Regressioanalyysille esitetään taustatiedoksi malliin otettujen muuttujien väliset Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimet liitteessä 1. Riippumattomien muuttujien väliset korrelaatiot olivat kohtalaisen korkeita, mistä johtuen multikollineaarisuutta tarkasteltiin tarkemmin. Muuttujien kuntoisuusindeksit olivat pienempiä kuin 30, jota voidaan Belsleyn, Kuhin ja Welschin (1980) mukaan pitää raja-arvona muuttujien välisestä kollineaarisuudesta. Tabachnickin ja Fidellin (2014) mukaan toleranssi arvojen tulisi olla suurempia kuin 0.50. Kaikkien muuttujien arvot olivat suurempia kuin 0.50. Tästä voidaan päätellä, että merkittävää multikollineaarisuutta ei ollut.

Regressiomallin perusoletuksena pidetään residuaalien normaalijakatuneisuutta ja hajonnan homoskedastisuutta (Metsämuuronen, 2008). Tabachnickin ja Fidellin (2014) mukaan mallin residuaalit eivät saisi olla yli itseisarvon kolme. Yhteen- ja vähennyslaskumallien residuaaleille havaittiin yli itseisarvon kolmen olevia arvoja koko tutkittavien joukossa sekä poikien mallissa. Tästä johtuen tarkasteltiin Mahalanobiksen ja Cook'sin etäisyyksien arvoja mahdollisten merkitsevien poikkeavien havaintojen löytämiseksi. Mahalanobiksen etäisyyden arvoja verrattiin khiin neliön jakauman raja-arvoon .001 (Tabachnick & Fidell, 2014, 10). Yhdenkään mallin osalta ei havaittu tilastollisesti merkitsevästi poikkeavia havaintoja. Myös Cook'sin etäisyyden arvot olivat alle raja-arvon 1 (Stevens, 2002). Näin ollen aineistosta ei poistettu yhtään äärihavaintoa.

Mallien residuaalit eivät jakautuneet normaalisti, joten jatkuvat muuttujat päädyttiin normalisoimaan kaksivaiheisella normalisointimentelmällä (A Two-Step Approach for Transforming Continuous Variables to Normal; Templeton, 2011). Menetelmän ensimmäisessä vaiheessa jokaiselle muuttujalle muodostettiin järjestykseen perustuva tasajakauma. Tämän jälkeen toisessa vaiheessa tasajakauma muunnettiin vastaamaan normaalijakaumaa siten, että muuttujan keskiarvo ja keskihajonta olivat samat kuin alkuperäisessä muuttujassa.

Regressioanalyysit toteutettiin sekä alkuperäisillä että normalisoiduilla muuttujilla ja muuttujien oletusten toteutumista verrattiin keskenään. Normalisoidujen muuttujien oletusten tarkastelussa ei havaittu poikkeavia havaintoja ja muuttujien residuaalit asettuivat raja-arvojen sisälle paremmin kuin alkuperäisten muuttujien regressioanalyysissä. Näin ollen tämän tutkimuksen regressioanalyysi päädyttiin raportoimaan normalisoiduilla muuttujilla. Liitteissä 1–7 esitetään alkuperäisten ja normalisoidujen muuttujien korrelaatiomatriisit sekä alkuperäisten muuttujien regressiomallit.

Regressioanalyysin riittävä otoskoko voidaan laskea Tabachnickin ja Fidellin (2014, 159) mukaan kaavalla  $n \geq 104 + m$  ( $m$  = selittävien muuttujien määrä). Tällä kaavalla koko tutkittavien joukon määrä tulisi olla vähintään 108 tutkittavaa. Tässä tutkimuksessa aineiston koko rajautui lopulta 180 tutkittavaan, joten tutkittavien määrää voidaan pitää riittävänä. Saman kaavan mukaan sukupuolittain tehdyissä malleissa tulisi olla 107 tutkittavaa. Näin ollen tässä tutkimuksessa sukupuolittain toteutetuissa analyyseissa otoskoko oli hieman suositusta pienempi.

Normalisointimenetelmässä keskiarvo ja -hajonta asetettiin samaksi kuin alkuperäisessä. Tästä huolimatta tuloksina ei esitetä regressiokertoimia, koska niiden tulkintaan liittyy normalisoinnin seurauksena epävarmuutta. Standardoitujen regressiokertoimien ( $\beta$ ) rinnalla esitetään osakorrelaatiokertoimet ( $sr$ ), jotka osoittavat vertailukelpoisesti riippumattomien muuttujien omat selitysosuudet (Tabachnick & Fidell, 2007, 146).

Regressioanalyysin tulokset osoittivat sukupuolen tilastollisesti merkitseväksi viimeisellä askeleella, joten oli syytä tarkastella sukupuolten malleja erikseen. Alkuperäisenä lähtökohtana oli tarkastella lukujonotaidon osatekijöitä, mutta analyysissä esiintyi klassista supressiota. Tämä aiheutti sen, että muutama  $\beta$ -kertoimet poikkesivat vastaavista tulomomenttikorrelaatiokertoimista. Toisin sanoen yhteydet muuttuivat riippumattomien muuttujien keskinäisen korreloitumisen seurauksena (eng. classical suppression; Kline, 2011, 27). Analyysiä tarkistettiin edelleen tekemällä lukujonotaidoista summamuuttuja. Sum-

mamuuttujan osatekijät normalisoitiin ja tämän jälkeen muodostettiin summamuuttuja koko tutkittavien joukolle sekä sukupuolittain. Summamamuuttujan Cronbachin alfa oli pojilla .85 ja tytöillä .71. Alkuperäisillä muuttujilla summamuuttujan Cronbachin alfat olivat samaa suuruusluokkaa. Tämän jälkeen normalisoiduilla muuttujilla tehtiin regressioanalyysi erikseen pojille ja tytöille, jossa oli riippumattomina muuttujina työmuisti, prosessointinopeus ja lukujonotaidot.

### 3 TULOKSET

Askeleittain etenevän monimuuttujaisen lineaarisen regressioanalyysin tulokset on esitetty taulukossa 1. Normalisoitujen muuttujien kuvailevat tunnusluvut sekä Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimet on esitetty liitteessä 3.

Regressiomallin ensimmäisellä askeleella sukupuoli ei selittänyt tilastollisesti merkitsevästi yhteenlaskun [ $F(1, 177) = 0.48, p = .489$ ] eikä vähennyslaskun sujuvuutta [ $F(1, 178) = 2.48, p = .117$ ]. Kun yhteenlaskun ja vähennyslaskun regressiomalleihin lisättiin toisella askeleella työmuisti, selitysaste kasvoi yhteenlaskun osalta 13 % [ $F(2, 176) = 13.86, p < .001$ ] ja vähennyslaskun osalta 11 % [ $F(2, 177) = 12.80, p < .001$ ]. Työmuistin omavaikutus yhteenlaskun ( $p < .001$ ) ja vähennyslaskun ( $p < .001$ ) sujuvuuteen oli toisella askeleella tilastollisesti erittäin merkitsevä. Toisin sanoen mitä parempi työmuisti oppilaalla oli, sitä sujuvampi hän oli sekä yhteen- että vähennyslaskuissa.

Kolmannella askeleella malliin lisättiin prosessointinopeus, jolloin selitysaste kasvoi sekä yhteenlaskun [ $F(3, 175) = 16.65, p < .001$ ] että vähennyslaskun [ $F(3, 176) = 16.09, p < .001$ ] osalta 9 %. Yhteenlaskun mallissa tilastollisesti erittäin merkitsevä omavaikutus oli työmuistilla ( $p < .001$ ) ja prosessointinopeudella ( $p < .001$ ). Vähennyslaskun mallissa tilastollisesti erittäin merkitsevä omavaikutus oli sekä työmuistilla ( $p < .001$ ) että prosessointinopeudella ( $p < .001$ ). Mitä paremmin oppilas suoriutui työmuisti- ja prosessointinopeuden tehtävistä, sitä sujuvampi hän oli sekä yhteen- että vähennyslaskuissa. Lisäksi vähennyslaskun mallissa sukupuolen omavaikutus oli tilastollisesti melkein merkitsevä ( $p = .022$ ). Toisin sanoen pojat pärjäsivät tyttöjä paremmin vähennyslaskuissa.

Viimeisellä askeleella malliin lisättiin lukujonotaidot. Mallin selitysaste kasvoi 13 % yhteenlaskun [ $F(4, 174) = 23.93, p < .001$ ] osalta ja 10 % vähennyslaskun [ $F(4, 175) = 20.24, p < .001$ ] osalta. Sukupuolella ( $p = .049$ ) oli tilastollisesti melkein merkitsevä omavaikutus vain vähennyslaskun mallissa. Toisin sanoen pojat

pärjäivät tyttöjä paremmin vähennyslaskuissa. Yhteenlaskun mallissa tilastollisesti merkitsevä omavaikutus oli työmuistilla ( $p = .004$ ) ja prosessointinopeudella ( $p = .002$ ). Myös vähennyslaskun mallissa työmuistilla ( $p = .009$ ) ja prosessointinopeudella ( $p = .001$ ) oli tilastollisesti merkitsevä omavaikutus. Lukujonotaidoilla ( $p < .001$ ) oli tilastollisesti erittäin merkitsevä omavaikutus molemmissa malleissa. Mitä paremmin oppilaat suoriutuivat lukujonotaitotehtävissä ensimmäisellä luokalla, sitä sujuvampia he olivat yhteen- ja vähennyslaskuissa kolmannella luokalla. Kokonaisuutena sukupuoli, työmuisti, prosessointinopeus ja lukujonotaidot selittivät 34 % yhteenlaskun sujuvuudesta ja 30 % vähennyslaskun sujuvuudesta. Yhteen- ja vähennyslaskun lopulliset mallit olivat tilastollisesti merkitseviä eli molemmat mallit sopivat aineistoon.

**Taulukko 1.**

Sukupuolen, kognitiivisten tekijöiden ja lukujonotaitojen yhteydet yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuteen normalisoiduilla muuttujilla.

	Yhteenlasku 3. lk					Vähennyslasku 3. lk				
	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr
<b>Selittävät muuttujat 1. lk</b>										
<b>Askel 1:</b>	.00	-.00	.00			.01	.01	.01		
Sukupuoli				-.05	-.05				-.12	-.12
<b>Askel 2:</b>	.14	.13	.13			.13	.12	.11		
Sukupuoli				-.05	-.05				-.12	-.12
Työmuisti				.37***	.37				.34***	.34
<b>Askel 3:</b>	.22	.21	.09			.22	.20	.09		
Sukupuoli				-.09	-.09				-.16*	-.15
Työmuisti				.30***	.30				.27***	.27
Prosessointinopeus				.30***	.29				.31***	.30
<b>Askel 4:</b>	.36	.34	.13			.32	.30	.10		
Sukupuoli				-.05	-.05				-.13*	-.12
Työmuisti				.19**	.18				.18**	.16
Prosessointinopeus				.21**	.20				.23**	.21
Lukujonotaidot				.40***	.36				.35***	.32
Lopullinen malli F(df)	(4, 174) = 23.93, p < .001					(4,175) = 20.24, p < .001				

Huom. Yhteenlaskumallissa N = 179 ja vähennyslaskumallissa N = 180. Sukupuoli: 0 = poika, 1 = tyttö. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < .05. R<sup>2</sup> = estimoidun mallin selitysaste, Korj. R<sup>2</sup> = korjattu estimoidun mallin selitysaste ΔR<sup>2</sup> = selitysasteen muutos, kun kaikki askeleen muuttujat ovat mukana, β = standardoitu regressiokerroin, sr = osakorrelaatiokerroin.

Yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuutta tarkasteltiin myös sukupuolittain, ja tulokset on kuvattu poikien osalta taulukossa 2 ja tyttöjen osalta taulukossa 3. Normalisoitujen muuttujien kuvailevat tunnusluvut sekä Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimet sukupuolittain on esitetty liitteessä 4. Molempien sukupuolten tulokset esitetään rinnakkain ensin yhteenlaskumallin osalta ja tämän jälkeen vähennyslaskumallin osalta.

Tarkastellessa poikien ja tyttöjen yhteenlaskun sujuvuutta regressiomallin ensimmäisellä askeleella työmuisti selitti poikien yhteenlaskua 16 % tilastollisesti merkitsevästi [ $F(1, 81) = 15.35, p < .001$ ] ja tyttöjen 11 % [ $F(1, 87) = 10.84, p = .001$ ]. Työmuistin omavaikutus oli pojilla tilastollisesti erittäin merkitsevä ( $p < .001$ ) ja tytöillä tilastollisesti merkitsevä ( $p = .001$ ). Mitä parempi työmuisti oppilaalla oli, sitä sujuvampi hän oli yhteenlaskuissa.

Kun malliin lisättiin toisella askeleella prosessointinopeus, yhteenlaskun sujuvuuden selitysasteen muutos oli pojilla 6 % [ $F(2, 80) = 11.24, p < .001$ ] ja tytöillä 10 % [ $F(2, 86) = 11.28, p < .001$ ]. Sekä pojilla ( $p = .003$ ) että tytöillä ( $p = .003$ ) työmuistin omavaikutus oli tilastollisesti merkitsevä. Prosessointinopeuden omavaikutus oli tilastollisesti melkein merkitsevä ( $p = .015$ ) poikien osalta ja tilastollisesti merkitsevä ( $p = .002$ ) tyttöjen osalta. Mitä parempi työmuisti ja prosessointinopeus oppilaalla oli, sitä sujuvampi hän oli yhteenlaskuissa.

Viimeisellä askeleella malliin lisättiin lukujonotaidot. Lukujonotaidot lisäsivät yhteenlaskumallin selitystasetta pojilla 15 % [ $F(3, 79) = 15.42, p < .001$ ] ja tytöillä 9 % [ $F(3, 85) = 11.88, p < .001$ ]. Lukujonotaidoilla oli poikien yhteenlaskun sujuvuuteen tilastollisesti erittäin merkitsevä omavaikutus ( $p < .001$ ), kun taas tyttöjen lukujonotaitojen omavaikutus yhteenlaskun sujuvuuteen oli tilastollisesti merkitsevä ( $p = .002$ ). Mitä paremmin oppilas suoriutui lukujonotaitotehtävissä ensimmäisellä luokalla, sitä sujuvampi hänen yhteenlaskutaitonsa oli kolmannella luokalla. Lisäksi tyttöjen mallissa työmuistilla oli tilastollisesti melkein merkitsevä omavaikutus ( $p = .016$ ) ja prosessointinopeudella tilastollisesti merkitsevä omavaikutus ( $p = .005$ ). Mitä parempi työmuisti ja prosessointinopeus tytöllä oli, sitä sujuvampi hän oli yhteenlaskuissa. Kokonaisuutena työmuisti, prosessointinopeus ja lukujonotaidot selittivät poikien yhteenlaskun sujuvuutta



35 % ja tyttöjen yhteenlaskun sujuvuutta 27 %. Tyttöjen ja poikien yhteenlaskun lopullisen mallit olivat tilastollisesti merkitseviä eli mallit sopivat aineistoon.

Vähennyslaskun regressiomallia tarkasteltaessa poikien ja tyttöjen osalta ensimmäisellä askeleella työmuisti selitti poikien vähennyslaskua 14 % tilastollisesti merkitsevästi [ $F(1, 82) = 13.57, p < .001$ ] ja tyttöjen 5 % [ $F(1, 86) = 4.74, p = .032$ ]. Työmuistin omavaikutus oli pojilla tilastollisesti erittäin merkitsevä ( $p < .001$ ), kun taas tytöillä työmuistin omavaikutus oli tilastollisesti melkein merkitsevä ( $p = .032$ ). Mitä parempi työmuisti oppilaalla oli, sitä sujuvampi hän oli vähennyslaskuissa.

Toisella askeleella malliin lisättiin prosessointinopeus, jolloin poikien vähennyslaskun selitysasteen muutos oli 4 % [ $F(2, 81) = 8.92, p < .001$ ] ja tyttöjen 11 % [ $F(2, 85) = 8.05, p = .001$ ]. Pojilla tilastollisesti merkitsevä omavaikutus oli työmuistilla ( $p = .004$ ), mutta prosessointinopeudella ei ollut tilastollisesti merkitsevää omavaikutusta. Sen sijaan tytöillä omavaikutus oli päinvastainen eli prosessointinopeuden omavaikutus oli tilastollisesti merkitsevä ( $p = .001$ ), mutta työmuistin omavaikutus ei ollut. Mitä parempi työmuisti pojalla oli, sitä sujuvampi hän oli vähennyslaskuissa. Tyttöjen osalta prosessointinopeus selitti vähennyslaskun sujuvuutta.

Viimeisellä askeleella malliin lisättiin lukujonotaidot. Lukujonotaidot lisäsivät vähennyslaskumallin selitystasetta pojilla 12 % [ $F(3, 80) = 11.62, p < .001$ ] ja tytöillä 4 % [ $F(3, 84) = 7.01, p < .001$ ]. Tyttöjen ja poikien vähennyslaskumallit erosivat toisistaan siten, että pojilla lukujonotaitojen omavaikutus oli tilastollisesti erittäin merkitsevä ( $p < .001$ ), kun taas tytöillä lukujonotaitojen omavaikutus oli tilastollisesti melkein merkitsevä ( $p = .041$ ). Mitä paremmin oppilas suoriutui lukujonotaitotehtävissä ensimmäisellä luokalla, sitä sujuvampi vähennyslaskutaito hänellä oli kolmannella luokalla. Lisäksi tyttöjen mallissa prosessointinopeudella oli tilastollisesti merkitsevä omavaikutus ( $p = .003$ ). Mitä parempi prosessointinopeus tytöllä oli, sitä sujuvampi hän oli vähennyslaskuissa. Kokonaisuuksena työmuisti, prosessointinopeus ja lukujonotaidot selittivät poikien vä-

hennyslaskun sujuvuutta 28 % ja tyttöjen vähennyslaskun sujuvuutta 17 %. Tyttöjen ja poikien vähennyslaskun lopulliset mallit olivat tilastollisesti merkitseviä eli mallit sopivat aineistoon.

**Taulukko 2.**

Poikien kognitiivisten tekijöiden ja lukujonotaitojen yhteydet yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuteen normalisoiduilla muuttujilla.

	Yhteenlasku 3. lk					Vähennyslasku 3. lk				
	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr
<b>Selittävät muuttujat 1. lk</b>										
<b>Askel 1:</b>	.16	.15	.16			.14	.13	.14		
Työmuisti				.40***	.40				.38***	.38
<b>Askel 2:</b>	.22	.20	.06			.18	.16	.04		
Työmuisti				.32**	.30				.31**	.29
Prosessointinopeus				.26*	.25				.21	.20
<b>Askel 3:</b>	.37	.35	.15			.30	.28	.12		
Työmuisti				.16	.14				.17	.15
Prosessointinopeus				.16	.15				.12	.11
Lukujonotaidot				.44***	.39				.40***	.35
Lopullinen malli F(df)	(3, 79) = 15.42, p < .001					(3, 80) = 11.62, p < .001				

Huom. Yhteenlaskumallissa N = 83 ja vähennyslaskumallissa N = 84. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < .05. R<sup>2</sup> = estimoidun mallin selitysaste, Korj. R<sup>2</sup> = korjattu estimoidun mallin selitysaste ΔR<sup>2</sup> = selitysasteen muutos, kun kaikki askeleen muuttujat ovat mukana, β = standardoitu regressiokerroin, sr = osakorrelaatiokerroin.

**Taulukko 3.**

Tyttöjen kognitiivisten tekijöiden ja lukujonotaitojen yhteydet yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuteen normalisoiduilla muuttujilla.

	Yhteenlasku 3. lk					Vähennyslasku 3. lk				
	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr
<b>Selittävät muuttujat 1. lk</b>										
<b>Askel 1:</b>	.11	.10	.11			.05	.04	.05		
Työmuisti				.33**	.33				.23*	.23
<b>Askel 2:</b>	.21	.19	.10			.16	.14	.11		
Työmuisti				.30**	.29				.19	.19
Prosessointinopeus				.31**	.31				.33**	.33
<b>Askel 3:</b>	.30	.27	.09			.20	.17	.04		
Työmuisti				.23*	.26				.15	.15
Prosessointinopeus				.27**	.27				.30**	.30
Lukujonotaidot				.31**	.27				.21*	.20
Lopullinen malli F(df)	(3, 85) = 11.88, p < .001					(3, 84) = 7.01, p < .001				

Huom. Yhteenlaskumallissa N = 91 ja vähennyslaskumallissa N = 90. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < .05. R<sup>2</sup> = estimoidun mallin selitysaste, Korj. R<sup>2</sup> = korjattu estimoidun mallin selitysaste ΔR<sup>2</sup> = selitysasteen muutos, kun kaikki askeleen muuttujat ovat mukana, β = standardoitu regressiokerroin, sr = osakorrelaatiokerroin.

## 4 POHDINTA

### 4.1 Tulosten tarkastelua

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, missä määrin ensimmäisellä luokalla mitatut lukujonotaidot ennustivat kolmannella luokalla laskemisen sujuvuutta, kun sukupuolen, työmuistin ja prosessointinopeuden omavaikutus kontrolloitiin. Tulokset osoittivat, että lukujonotaidot ennustivat sekä yhteen- että vähennyslaskun sujuvuutta tilastollisesti erittäin merkitsevästi. Lukujonotaito selitti 13 % yhteenlaskun ja 10 % vähennyslaskun sujuvuudesta, kun muut tekijät oli kontrolloitu. Tutkimustulos oli samankaltainen kuin Kopenen ja kollegoiden (2013; 2016) sekä Johanssonin (2005) tutkimuksissa, joissa lukujonotaidot ennustivat laskusujuvuutta. Näin ollen tämä tulos vahvistaa aikaisempien tutkimusten tuloksia. Lisäksi tässä tutkimuksessa lukujonotaitojen ja yhteen- sekä vähennyslaskun väliset korrelaatiot (ks. liite 3) olivat samansuuntaisia ja voimakkuuksiltaan yhtä suuria kuin aikaisemmissa tutkimuksissa saman ikäisillä lapsilla (Koponen, 2013; 2016).

Lukujonotaitojen ennustavaa ominaisuutta voidaan selittää laskutaidon sujuvuuden kehitykseen liittyvillä tekijöillä. Ensinnäkin Aunion ja kollegoiden (2004) mukaan taito aloittaa luettelu lukujonon eri kohdista on pohja laskutaidon kehitykselle. Toiseksi Fusonin (1992) mukaan kehittyneet lukujonotaidot luovat pohjan yhteen- ja vähennyslaskun harjoittelemiselle. Kolmanneksi Johanssonin (2005) mukaan lukujonotaidot ennustavat tehokkaiden laskustrategioiden käyttöä. Myös Sieglerin ja Shragerin (1984) mukaan sujuva lukusanojen luettelu tukee siirtymistä heikoimmista strategioista kohti muistista palauttamisen strategiaa. Näin ollen sujuva lukujen luettelu luo pohjan matemaattisille taidoille, jolloin sujuvammat strategiat pääsevät kehittymään, ja laskeminen muuttuu vähitellen sujuvammaksi. Siten lukujonotaidot voidaan nähdä tärkeänä osana laskusujuvuuden kehittymistä.

Yhteenlaskumallin selitystasetta tilastollisesti erittäin merkitsevästi lisäsivät toisella askeleella työmuisti, kolmannella askeleella prosessointinopeus ja viimeisellä askeleella lukujonotaidot. Kuitenkin viimeisellä askeleella standardoitu regressiokerroin osoitti, että lukujonotaidon omavaikutus yhteenlaskun sujuvuuteen oli työmuistia ja prosessointinopeutta voimakkaampi. Näin ollen lukujonotaidot olivat voimakkain ennustaja laskusujuvuudelle, mutta myös työmuisti ja prosessointinopeus näyttävät olevan laskusujuvuuteen yhteydessä olevia tekijöitä. Tätä tukevat aiemmat tutkimukset (Chong & Siegel, 2008; Cowan & Powell, 2014; Fuchs ym., 2006; Locuniak & Jordan, 2008). Lisäksi tätä tukee Melby-Lervåg ja Hulmen (2013) meta-analyysi sekä Kanervan ja Kyttälän (2013) interventiotutkimus, joissa havaittiin, ettei työmuistin harjoittelu siirry matematiikan osaamiseen. Näin ollen työmuistin ja prosessointinopeuden harjoittelun sijaan huomio tulisi kiinnittää lukujonotaitoihin, koska lukujonotaitojen harjoittelu saattaa parantaa laskusujuvuutta.

Tässä tutkimuksessa myös työmuistin ja laskusujuvuuden väliset korrelaatiot (ks. liite 3) olivat saman suuntaisia ja voimakkuuksiltaan saman suuruisia kuin Locuniakin ja Jordanin (2008) tutkimuksessa. Prosessointinopeuden ja laskusujuvuuden väliset korrelaatiot (ks. liite 3) olivat hieman matalampia, mutta kuitenkin saman suuntaisia ja voimakkuuksiltaan lähes saman suuruisia kuin aiemmissa tutkimuksissa (Cowan & Powell, 2014; Fuchs ym., 2006). Näin ollen korrelaatiot osoittavat työmuistin ja prosessointinopeuden yhteyden laskusujuvuuteen olevan tässä tutkimuksessa samankaltainen kuin aiemmissa tutkimuksissa.

Vähennyslaskun mallissa työmuisti, prosessointinopeus ja lukujonotaidot lisäsivät mallin selitystasetta tilastollisesti erittäin merkitsevästi. Myös vähennyslaskun mallissa standardoitu regressiokerroin osoitti lukujonotaitojen olevan voimakkain selittäjä. Prosessointinopeuden ja työmuistin yhteys oli samankaltainen kuin yhteenlaskun mallissa. Kuitenkin merkittävää oli se, että tässä mallissa sukupuoli sai tilastollisen merkitsevyyden standardoidun regressiokertoimen kautta. Tulos osoitti, että pojat suoriutuivat tyttöjä paremmin vähennyslaskun sujuvuudessa.

Sukupuolieroja ilmeni vasta, kun viimeisellä askeleella kaikki muuttajat oli lisätty malliin. Toisin sanoen sukupuolieroja ilmeni, koska sukupuolten väliset erot näyttivät olevan kognitiivisissa tekijöissä. Sukupuolieroja ilmeni vähennyslaskun mallissa, mikä viittaa siihen, että kognitiiviset tekijät ennustavat eri tavoin tyttöjen ja poikien vähennyslaskua. Sukupuolen tilastollinen merkitsevyys antoi syyntä tarkastella malleja erikseen tyttöjen ja poikien osalta.

Sukupuolittain tarkasteltuna lukujonotaidot ennustivat eri tavoin yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuutta tytöillä ja pojilla. Lukujonotaidot ennustivat yhteenlaskun sujuvuutta pojilla 15 % ja tytöillä 9 %. Suurin ero on nähtävillä tyttöjen ja poikien välillä vähennyslaskun sujuvuuden osalta. Poikien vähennyslaskua lukujonotaidot selittivät 12 %, kun taas tytöillä vastaava luku oli 4 %. Lisäksi kognitiiviset tekijät selittivät eri tavoin vähennyslaskun sujuvuutta. Tulosten mukaan lukujonotaito ennusti poikien vähennyslaskutaidon sujuvuutta parhaiten. Ne pojat, jotka menestyivät lukujonotaitotehtävissä ensimmäisellä luokalla, olivat sujuvampia vähennyslaskuissa kolmannella luokalla. Pojilla työmuisti ja prosessointinopeus eivät selittäneet vähennyslaskun sujuvuutta. Tytöillä sen sijaan vähennyslaskun sujuvuutta ennusti lukujonotaitojen sijaan voimakkaammin prosessointinopeus.

Tämän tutkimuksen mukaan lukujonotaidot ennustivat voimakkaammin poikien kuin tyttöjen laskusujuvuutta. On haastavaa selittää, mistä tällaiset sukupuolierot voivat johtua, sillä aiemmat tutkimustulokset sukupuolieroista ovat vaihtelevia. Kuitenkin aikaisempien tutkimuksien mukaan yksi selitys sukupuolieroihin voi olla tyttöjen ja poikien erilainen laskustrategioiden käyttö. Tutkimuksissa (Carr & Davis, 2001; Carr & Jessup, 1997; Carr ym., 2008) on havaittu tyttöjen käyttävän enemmän konkreettisia strategioita eli luettelemalla laskeamista, kun taas poikien käyttävän enemmän suoraan muistista palauttamisen strategiaa. Carrin ja Davisin (2001) mukaan pojat pystyvät muistista palauttamisen strategian lisäksi hyödyntämään aiemmin opittuja konkreettisia strategioita tehtävän niin vaatiessa. Näin ollen pojilla on käytössä laajemmat ja monipuolisemmat laskustrategiat.

Luettelemalla laskeminen on laskujen ratkaisemisessa strategiaa ennen tehokkaampien laskustrategioiden osaamista (Koponen, 2012). Tässä tutkimuksessa poikien vähennyslaskusujuvuus voi selittyä hyvillä lukujonotaidoilla. Poikien lukujonotaitojen voidaan olettaa olevan sujuvia ja tarkkoja, joten tämän myötä poikien laskustrategiat ovat kehittyneet tehokkaiksi. Laskun kohdatessa pojat pystyvät joustavasti käyttämään sekä luettelemalla laskemista eli konkreettisia strategioita ja suoraan muistista palauttamista. Sen sijaan tytöillä näyttää siltä, etteivät lukujonotaidot ole kehittyneet yhtä sujuviksi ja tarkkoiksi kuin pojilla, jolloin laskun ratkaiseminen onnistuneesti vaatii enemmän työmuistikapasiteettia ja prosessointinopeutta. Toisin sanoen tyttöjen heikommat strategiat viittaavat siihen, että työmuistin ja prosessointinopeuden kuormittuessa kognitiivisia resursseja ei vapaudu tehokkaampiin strategioihin ja tiedon muistista palauttamiseen (ks. Aunio ym., 2004). Näin ollen tämän tutkimuksen tulokset replikoivat aikaisempia tutkimuksia siitä, että sujuvat lukujonotaidot saattavat johtaa tehokkaampien laskustrategioiden käyttöön (ks. Johansson, 2005; Siegler & Shrager, 1984) ja sitä kautta parempaan laskusujuvuuteen.

Kaiken kaikkiaan sukupuoli, työmuisti, prosessointinopeus ja lukujonotaidot selittivät yhteensä 34 % yhteenlaskun sujuvuudesta sekä 30 % vähennyslaskun sujuvuudesta. Toisin sanoen malliin valitut muuttujat selittivät suhteellisen suuren osuuden sekä yhteen- että vähennyslaskun sujuvuuden vaihtelusta. Sukupuolittain tarkasteltuna työmuisti, prosessointinopeus ja lukujonotaidot selittivät eri tavoin tyttöjen ja poikien laskusujuvuutta. Tyttöjen mallissa muuttujat selittivät yhteenlaskun sujuvuudesta 27 % ja vähennyslaskun sujuvuudesta 17 %. Poikien mallissa muuttujat selittivät 35 % yhteenlaskun sujuvuudesta ja 28 % vähennyslaskun sujuvuudesta. Poikien vähennyslaskun sujuvuudesta muuttujat selittivät lähes kolmasosan, kun taas tyttöjen vähennyslaskun selitysaste jäi muita malleja matalammaksi. Toisin sanoen malliin valitut muuttujat selittivät paremmin poikien yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuutta kuin tyttöjen.



## 4.2 Tutkimuksen metodologista arviointia ja jatkotutkimus- haasteet

Malli rakennettiin teoreettisen taustatiedon perusteella siten, että sukupuoli, työmuisti ja prosessointinopeus kontrolloitiin lukujonotaitojen omavaikutuksen selvittämiseksi. Tässä tutkimuksessa lukujonotaidoilla oli voimakkain omavaikutus, mutta myös työmuistilla ja prosessointinopeudella oli tilastollisesti merkitsevä omavaikutus sekä yhteen- että vähennyslaskun mallissa. Toisin sanoen työmuisti ja prosessointinopeus ennustivat yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuutta tilastollisesti merkitsevästi huolimatta mallin muista muuttujista. Näin ollen myös työmuistin ja prosessointinopeuden havaittiin olevan itsenäisiä ennustajia laskusujuvuudelle. Mallien sukupuolittaisessa tarkastelussa muuttujat ennustivat eri tavoin laskusujuvuutta. Pojilla lukujonotaito näyttäytyi laskusujuvuutta ennustavana muuttujana, kun taas tytöillä kaikki muuttujat ennustivat itsenäisesti laskusujuvuutta.

Melko suuri osa laskusujuvuudesta selittyi malliin valituilla muuttujilla, koska valitut muuttujat selittivät noin kolmasosan sekä yhteen- että vähennyslaskun sujuvuudesta lukuun ottamatta tyttöjen vähennyslaskun mallia. Tämä myös lisäsi muodostettujen mallien luotettavuutta. Lisäksi lopulliset mallit sopivat aineistoon kaikkien tutkittavien osalta ja sukupuolittaisissa malleissa. Näin ollen valittujen muuttujien voidaan olettaa olevan hyviä valintoja tähän tutkimukseen. Yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuden vaihtelusta jäi kuitenkin selittämättä suurin osa valituilla muuttujilla. Näin ollen laskemisen sujuvuutta voi myös selittää tekijät, joita tässä tutkimuksessa ei huomioitu sekä valittujen muuttujien mittaamiseen liittyvät rajoitteet. Seuraavaksi tarkastellaan tutkimukseen valittuja muuttujia ja esitetään tämän tutkimuksen rajoituksia. Lisäksi esitellään jatkotutkimushaasteita sekä arvioidaan tutkimuksen luotettavuutta.

Tutkimuksessa käytetyt työmuistin ja prosessointinopeuden mittarit olivat laajalti käytettyjä ja normitettuja mittareita (Wechsler, 2010), mikä lisää niiden luotettavuutta. Mittareihin liittyi kuitenkin rajoitteita. Baddeleyn (2000) kolmi-komponenttimallissa työmuistilla on omat komponentit visuaaliselle ja kielelliselle tiedolle. Tässä tutkimuksessa käytetty työmuistimittari ei kuitenkaan mittaa

työmuistin eri komponenttien yhteyttä laskemisen sujuvuuteen, ja työmuistin mittaaminen ainoastaan yhdellä mittarilla ei välttämättä anna riittävän kattavaa kuvaa työmuistin kapasiteetista. Lisäksi Rosen ja Englen (1997) mukaan työmuistimittarina numerosarjat taaksepäin ei ole riittävän vaativa työmuistin mittaamiseen.

Myös prosessointinopeuden mittariin liittyi rajoitteita. Tässä tutkimuksessa prosessointinopeutta mitattiin ei-kielellisenä kykynä merkin tunnistamistehtävän avulla. Prosessointinopeutta voidaan kuitenkin mitata usealla eri tavalla, jolloin myös yhteydet laskutaidon sujuvuuteen voivat olla erilaisia. Yksi mahdollinen mittari prosessointinopeudelle on nopean nimeämisen (RAN) tehtävät (esim. Chong & Siegel, 2008; Geary ym., 2012). Tässä tutkimuksessa nopeaa nimeämistä ei huomioitu, vaikka sen yhteys matematiikkaan on aiemmista tutkimuksista osoitettavissa (esim. Koponen ym., 2016). Nopean nimeämisen kontrollointi olisi voinut tuoda lisää tietoa myös prosessointinopeuden näkökulmasta.

Laskusujuvuuden mittaamiseen aikarajoitteinen mittari loi rajoitteita, koska se ei kuvaa lapsen käyttämiä laskustrategioita. Laskusujuvuutta mitataan kuitenkin usein nopeuden kautta (Chong & Siegel, 2008; Fuchs ym., 2008; Koponen ym., 2016; Koponen ym., 2018), jolloin laskunopeus viittaa sujuvaan laskemiseen. Hyvä suoritus edellyttää laskunopeutta, joten voidaan olettaa, että lapsella on käytössä myös tehokkaita laskustrategioita.

Lukujonotaitomittari oli kehitetty vain tätä hanketta varten, joten sitä ei ollut normitettu. Lisäksi mittariin liittyi rajoitteita. Mittari vaati lapselta nopeaa suoriutumista hyviin tuloksiin päästäkseen. Näin ollen myös lapsen artikulaationopeus saattoi vaikuttaa tuloksiin. Hitaasti artikuloiva lapsi ei ehtinyt luetella lukuja yhtä paljon kuin nopeasti artikuloiva. Testi ei myöskään huomionut sanoiko lapsi lukusanan kieliopillisesti oikein vai lyhyemmin puhekielisesti (esim. kaksikymmentäkaksi vai kaakaa), joten se saattoi aiheuttaa eroja siinä, kuinka paljon lapsi ehti luetella lukuja. Tässä tutkimuksessa mitatuista lukujonotaidoista muodostettiin summamuuttuja, jonka sisäinen reliabiliteetti Cronbachin alfalla mitattuna oli korkea. Tämä lisäsi muuttujan luotettavuutta.

Tutkimustilanteeseen liittyi myös rajoitteita. Ryhmätilanteissa lapsen parasta mahdollista keskittymistä saattoi heikentää luokan muut oppilaat ja äänet, joten lapsen suoritus saattoi häiriintyä. Ryhmätilanteissa ei myöskään ollut mahdollista palata lapsen vastaukseen jälkikäteen, sillä tilanteita ei nauhoitettu. Sen sijaan yksilötilanteissa lapsen suoritusta pystyttiin tarkemmin seuraamaan ja arvioimaan. Lisäksi yksilötilanteissa lapsen suorituksiin oli mahdollista palata jälkeenpäin, koska lapsen suoritukset nauhoitettiin. Kuitenkin lapsen vireys ja motivaatio saattoivat vaihdella, koska yksilötilanteet toteutettiin koulupäivän aikana. Osa lapsista saattoi myös kokea testitilanteet kokeen kaltaisiksi arviointitilanteiksi, mikä saattoi aiheuttaa ahdistusta. Sorvon ja kollegoiden (2017) tutkimuksessa tuli ilmi, että osa lapsista koki matematiikka-ahdistusta silloin, kun ei pystynyt suoriutumaan annetuista matematiikan tehtävistä. Näin ollen lapset, joilla on matematiikka-ahdistusta, saattoivat kokea testitilanteen haastavana.

Lapsen tarkkaavaisuuden yhteyttä laskemisen sujuvuuteen ei huomioitu tässä tutkimuksessa. Fuchsin ja kollegoiden (2006) tutkimuksessa selvitettiin eri kognitiivisten taitojen yhteyttä kolmannen luokan aritmeettiseen taitoon, ja tulosten mukaan voimakkain yhteys matematiikkaan oli tarkkaavaisuudella. Tarkkaavaisuuden kontrollointi on oleellista niissä tilanteissa, kun tutkimustilanteet toteutetaan kouluympäristössä ja samanaikaisesti koko ryhmälle. Haasteet tarkkaavaisuudessa voivat olla yhteydessä lapsen heikompaan suoriutumiseen testitilanteessa. Myös tässä tutkimuksessa lapsen suoriutumista on saattanut heikentää vaikeus suunnata ja ylläpitää tarkkaavaisuutta. Näin ollen lapsi ei välttämättä ole suoriutunut todellisen taitotasonsa mukaisesti laskusujuvuutta mittaavissa tehtävissä. Jatkotutkimuksissa tarkkaavaisuuden yhteys laskusujuvuuteen tulisi kontrolloida etenkin kouluympäristöissä toteutetuissa tutkimustilanteissa. Lisäksi tarkkaavaisuuden kontrolloimisella voidaan saada tietoa siitä, miten tarkkaavaisuus selittää laskusujuvuudessa ilmeneviä haasteita.

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin ainoastaan laskemisen sujuvuutta, vaikka laskusujuvuuden pulmat päällekkäistyvät usein lukemisen pulmien kanssa (esim. Landerl & Moll, 2010). Väisäsen ja Aunion (2017) mukaan lapset, jotka oli-

vat sujumattomia vain laskemisessa tai lukemisessa, saavuttivat ikätasonsa keskimääräisen sujuvuuden tason viidennellä luokalla. Sen sijaan lapset, joilla sujuvuus oli heikkoa sekä laskemisessa että lukemisessa, eivät saavuttaneet ikätasonsa keskimääräisen sujuvuuden tasoa kummassakaan taidossa koko seurantajakson aikana (Väisänen & Aunio, 2017). Näin ollen sujuvuuspulmien esiintyminen sekä lukemisessa että laskemisessa on riskitekijä lapselle, koska komorbideettiryhmän kehitys näyttää eroavan muista ryhmistä. Lisäksi pulmat ovat usein luonteeltaan pysyviä (Chong & Siegel, 2008). Tässä tutkimuksessa luku- ja laskusujuvuutta ei huomioitu laskusujuvuuteen yhteydessä olevana tekijänä. Kuitenkin sen huomioiminen jatkotutkimuksissa olisi tärkeää, jotta saataisiin lisää tietoa laskusujuvuuteen yhteydessä olevista tekijöistä. Luku- ja laskusujuvuuden tutkiminen yhdessä olisi tärkeää, sillä pulmien päällekkäistyminen voi aiheuttaa haasteita sekä oppimisen että opettamisen näkökulmasta.

Aiemmat tutkimukset ja tämän tutkimuksen tulokset ovat osoittaneet lukujonotaitojen olevan laskusujuvuutta ennustava tekijä. Lukujonotaitojen on kuitenkin havaittu ennustavan myös lukusujuvuutta (esim. Koponen ym., 2016). Varhaisen puuttumisen näkökulmasta olisi hyvä tietää, miten lukujonotaidot ennustavat eri oppimisvaikeuksia tai vaikeuksien päällekkäistymistä. Luku- ja laskusujuvuuden tutkiminen yhdessä voisi antaa myös enemmän lisätietoa sujuvuuden taustalla vaikuttavista kognitiivisista tekijöistä.

Tulosten perusteella lukujonotaidot ennustivat hieman voimakkaammin yhteenlaskutaidon kuin vähennyslaskutaidon sujuvuutta. Steinbergin (1985) mukaan yhteen- ja vähennyslaskutaitoja voidaan pitää erillisinä taitoina sekä vähennyslaskun oppimista yhteenlaskua haastavampana. Siten yhteenlaskutaitoa voi pitää nopeammin automatisoituvana taitona kuin vähennyslaskutaitoa. Aunio ja kollegoiden (2004; Koponen, 2012) mukaan yhteen- ja vähennyslaskutaidon sujuvoitumisen edellytyksenä on sujuva lukujen luettelutaito ja taito aloittaa lukujen luettelu lukujonon eri vaiheista. Yhteenlaskun helppouden ja automatisoitumisen taustalla voi olla myös eteenpäin luettelon kehittyminen ja sen helppous. Taaksepäin luettelu ja vähennyslasku eivät välttämättä kehity yhtä luon-

taisesti ja varhain, vaan ne vaativat formaalia harjoittelua. Lukumäärien laskemisen kautta yhteenlaskutaito voi alkaa kehittyä aikaisemmin kuin vähennyslaskutaito. Näin ollen yhteen- ja vähennyslaskutaidon erikseen tarkastelun rinnalla tulisi jatkossa myös tarkastella lukujonotaitoja erillisinä taitoina. Näin saataisiin lisää tietoa siitä, ennustavatko eteenpäin ja taaksepäin luettelu eri tavalla yhteen- ja vähennyslaskutaitoa, ja siten sujuvuuden kehittymistä.

Tässä tutkimuksessa ei myöskään huomioitu perheen sosioekonomista asemaa, vaikka tutkimuksissa (esim. Crane, 1996; Koponen ym., 2007; Vettenranta ym., 2016) on havaittu sosioekonomisen aseman olevan yhteydessä matematiikan taitojen kehitykseen ja myöhempään osaamiseen matematiikassa. Näin ollen perheen sosioekonomista asemaa tulisi tarkastella, jotta saataisiin kokonaisvaltaisempi kuva laskusujuvuuteen yhteydessä olevista tekijöistä. Perheen sosioekonominen asema voi olla yhteydessä vanhemmilta saatuun koulunkäynnin tukeen, joka voi olla yhteydessä lapsen koulusuoriutumiseen. Jatkossa tulisi myös tarkastella sitä, onko vanhempien sosioekonominen asema yhteyksissä eri tavoin tyttöjen ja poikien koulusuoriutumiseen.

Tutkimuksen vahvuutena voidaan pitää sen pitkittäisastelemaa, koska pitkittäistutkimusten määrä Suomessa on verrattain vähäinen. Tämän tutkimuksen pitkittäisasetelmassa oppilaita seurattiin ensimmäiseltä luokalta kolmannelle luokalle. Tämä asetelma antoi selkeästi pidemmän aikavälin tuloksen lukujonotaitojen ennustavuudelle. Ensimmäisen ja kolmannen luokan matematiikan opetus myös eroaa selkeästi toisistaan, kun kolmannelle luokalle siirrytään pois alkuopetuksen sisällöistä ja tavoitteista. Aiemmissa tutkimuksissa ennustettavuutta on usein tarkasteltu lyhyempinä aikakausina, kuten saman lukuvuoden aikana. Tässä tutkimuksessa ei huomioitu oppilaiden saamaa erityisopetusta tai muuta oppimisen tukea eri mittapisteiden aikana, mikä saattaa vaikuttaa tuloksiin. Kuitenkin taitojen seuranta ensimmäiseltä kolmannelle luokalle antaa suhteellisen luotettavaa tietoa lapsen taitojen kehityksestä alkuopetuksen aikana.

Suuri otoskoko lisää tämän tutkimuksen tutkimustulosten luotettavuutta. Tabachnickin ja Fidellin (2014) mukaan 108 tutkittavaa olisi riittänyt tämän tut-

kimuksen kaltaiseen asetelmaan, joten metodologisesta näkökulmasta tutkittavien määrä oli riittävä. Sukupuolittain tarkasteltuna otoskoko oli hieman suositusta pienempi, mutta tutkittavien sukupuolijakauma oli melko tasainen.

Tutkittavien joukko ei valikoitunut satunnaisotannan perusteella, eikä tästä johtuen edusta kattavasti koko Suomea. Näin ollen tutkimuksen rajoituksena on sen yleistettävyys. TIMMS-tutkimuksen mukaan luokkien väliset erot ovat suurempia kuin koulujen väliset tai alueelliset erot (Vettenranta ym., 2016). Tässä tutkimuksessa luokkien välisiä eroja ei huomioitu. Tutkittavat olivat eri kouluista ja luokista, joten on mahdollista, että tutkimuksessa mukana olevat luokat eroavat toisistaan. Näin ollen tutkimuksen otannan näkökulmasta sisäkorrelaation tutkiminen olisi jatkotutkimuksissa tärkeää. Sisäkorrelaation avulla saadaan selville, minkä verran muuttujan vaihtelusta voidaan selittää ryhmätason ilmiöllä. Toisin sanoen saman ryhmän tutkittavilla kokemukset ovat lähempänä toisiaan kuin muiden ryhmien tutkittavien kokemuksia (Tabachnick & Fidell, 2007). On myös mahdollista, että muuttujien välinen yhteys on tilastollisesti merkitsevästi voimakkaampi tai heikompi jonkin tietyn luokan oppilailla (Tabachnick & Fidell, 2007). Näin ollen tämän tutkimuksen tulosten yleistettävyys on haastavaa. Lisäksi yleistettävyyttä heikentää tutkimuksen otanta ainoastaan Keski-Suomen alueelta. Tulokset antavat kuitenkin suuntaa suomenkielisten yleisopetuksessa opiskelevien lasten yhteen- ja vähennyslaskutaidon sujuvuuden kehityksestä.

Tässä tutkimuksessa ei huomioitu mahdollisia mediaattori- ja moderaattorivaikutuksia. Toisin sanoen tutkittaessa kahden muuttujan välistä yhteyttä, jokin kolmas muuttuja voi vaikuttaa suoraan tai epäsuorasti kyseiseen yhteyteen. Kahden muuttujan välinen yhteys voi voimistua tai muuttua suuntaa moderaattorivaikutuksen takia. Mediaattorivaikutuksessa kolmas muuttuja vaikuttaa välittävänä tekijänä eli mediaattorina riippumattoman ja riippuvan muuttujan välillä. (Hayes, 2013.) Eri muuttujien väliset yhteydet ovat voineet muuttua mediaattorien ja moderaattorien vaikutuksesta, ja siten vaikuttaa tämän tutkimuksen tuloksiin. Jotta saataisiin tarkempi ymmärrys laskusujuvuuteen vaikuttavista tekijöistä ja siitä, miten erilaiset vaikuttavat tekijät ovat yhteydessä toisiinsa, tulisi jatkossa tutkia myös erilaisten mediaattorien ja moderaattorien vaikutusta.

Tutkimuksen luotettavuutta voi myös heikentää aineiston analyysissä käytetty normalisointimenetelmä. Templetonin (2011) mukaan kaksivaiheisen normalisoinnin on tarkoitus tehostaa laskennallisen luottamusvälin soveltuvuutta ja lisäksi menetelmä parantaa jäännösten normaalisuutta lineaarisessa regressiossa. Menetelmä myös vähentää heteroskedastisuutta, mikä saattaa parantaa muuttujien omavaikutusta (Templeton, 2011). Beasley, Ericksonin ja Allisonin (2009) mukaan INT (Inverse normal transformation) -normalisointimenetelmää voidaan kritisoida sen tehottomuudesta ylläpitää tyyppin 1 virhekontrollia eli oikean nollahypoteesin hylkäämistä. Tästä johtuen menetelmä saattaa vähentää mallin tilastollista voimakkuutta joissakin olosuhteissa. Myös Rönkön ja Aguirre-Urretan (2018) mukaan kaksivaiheinen normalisointimenetelmä saattaa vääristää ja aiheuttaa epätarkkuutta regressioanalyysin tuloksissa verrattuna normalisomattomaan dataan. Rönkön ja Aguirre-Urretan (2018) mukaan on useita syitä, miksi muuttuja ei ole normaalisti jakautunut, ja harvoin nämä syyt ovat samoja kaikkien muuttujien osalta. Sen sijaan, että normalisoitaisiin muuttujia, tulisi perehtyä tutkittavaan ilmiöön ja keskittyä löytämään syyt sille, miksi muuttuja ei ole normaalisti jakautunut.

Rönkön ja Aguirre-Urretan (2018) mukaan poikkeava havainto muuttujassa saattaa olla datan syöttövirhe, jolloin ongelma voidaan ratkaista ilman muuttujan normalisointia. Tässä tutkimuksessa muuttujien tarkastelussa tilastollisesti merkitsevästi poikkeavia havaintoja ei löytynyt, mutta muuttujien residuaalit eivät olleet raja-arvojen mukaisia. Normalisoiduilla muuttujilla jäännökset jakautuivat myös tasaisemmin ja paremmin, joten oli perusteltua valita ne lopulliseen analyysiin. Lisäksi erot alkuperäisillä ja normalisoiduilla muuttujilla toteutetuissa regressiomalleissa eivät olleet suuria, joten voidaan olettaa, ettei normalisointimenetelmä ole muuttanut tuloksia merkittävästi.

### 4.3 Käytännön merkitys

Alkuopetuksen aikana lapsen tulisi oppia sujuva peruslaskutaito, jotta kolmannella luokalla voidaan siirtyä laajemman lukualueen tehtäviin sekä monimutkaisempiin laskuihin. Räsänen (2003) mukaan yhteen- ja vähennyslaskun oppimisvaikeuksia selvitettäessä tulisi huomiota kiinnittää ensimmäiseksi lukujonotaitojen hallintaan. Luettelemalla laskeminen edellyttää sujuvaa lukujonotaitoa ja laskustrategiat kehittyvät luettelemalla laskemisesta kohti muistista palauttamisen strategiaa. Näin ollen sujumaton lukujonotaito hidastaa laskustrategioiden kehittymistä sujuviksi ja tehokkaiksi, ja on sitä kautta yhteydessä yleisesti koko laskusujuvuuden kehittymiseen.

Tämän tutkimuksen tulokset antavat viitteitä siitä, että jo ensimmäisellä luokalla mitatuilla lukujonotaidoilla voidaan ennustaa myöhempää laskemisen sujuvuutta kolmannelle luokalle asti. Tämä on tärkeää tietoa oppimisen ja opetuksen kehittämisen näkökulmasta. Opettajien tulisi kiinnittää huomiota lukujonotaitojen automatisoitumiseen, koska niiden avulla voi olla mahdollista ennustaa myöhempää osaamista matematiikassa. Lisäksi opettajat tarvitsevat työhönsä arviointimateriaaleja, joiden avulla seurata oppilaiden oppimisen kehittymistä ja keinoja puuttua laskemisen hitauteen. Näin ollen tämän tutkimuksen tulos lukujonotaitojen yhteydestä laskusujuvuuteen antaa viitteitä siitä, että heikkoon laskusujuvuuteen lukujonotaitojen harjoittelu voi olla ratkaisu. Tätä tukee Kanervan ja Kyttälän (2013) interventiotutkimus, jossa lukujonotaitojen harjoittelulla saatiin myönteisiä vaikutuksia matematiikan taitojen kehittymiseen toisin kuin työmuistiharjoittelulla.

Lukujonotaidoilla laskusujuvuuden ennustaminen voisi toimia opettajan työkaluna varhaisessa vaiheessa taitojen kehityksen seuraamisessa. Varhaisessa vaiheessa oppilaille ei välttämättä ilmene selkeitä taitoeroja matematiikassa. On kuitenkin tärkeää löytää ne menetelmät, joilla voidaan tunnistaa koko yleisopetuksen joukosta ne oppilaat, joilla on riski, ettei laskeminen kehity sujuvaksi. Myös tämän tutkimuksen tulosten perusteella voidaan olettaa lukujonotaitojen



ennustavan laskusujuvuutta, joten lukujonotaidoista tulisi kehittää oppimista arvioiva normitettu mittari. Näin ollen olisi tärkeää kehittää opettajille suunnattuja menetelmiä lukujonotaitojen arviointiin.

Tämän tutkimuksen perusteella ilmeni sukupuolieroja laskusujuvuudessa. Aiemmissa tutkimuksissa sukupuolierot ovat olleet vaihtelevia osoittaen, ettei sukupuolten välillä ole eroja laskusujuvuudessa (esim. Hyde ym., 1990) tai poikien pärjäävän tyttöjä paremmin (esim. Carr ym., 2008; Carr & Davis, 2001; Carr & Jessup, 1997). Tämä tutkimus kuitenkin osoittaa sukupuolieroja olevan, joten opetuksen näkökulmasta niistä tulee olla tietoinen, ja on mietittävä keinoja niiden huomioimiseen.

Sukupuolierojen tarkempi tarkastelu osoitti, että pojilla lukujonotaidot ennustivat voimakkaammin yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuutta kuin tytöillä. Pojilla laskusujuvuutta ennustivat lukujonotaidot, kun taas tyttöjen laskusujuvuutta ennustivat lukujonotaitojen lisäksi työmuisti ja prosessointinopeus. Vaikka lukujonotaidoilla laskusujuvuuden ennustaminen voisi toimia hyvänä työkaluna varhaisessa vaiheessa, sukupuolittain tulos ei ole yhtä yksiselitteinen. Näin ollen pelkkä lukujonotaitojen käyttäminen vaikeuksien tunnistamiseen ja laskusujuvuuden kehittämiseen ei riitä, vaan rinnalle tarvitaan muiden laskusujuvuuden taustalla olevien kognitiivisten tekijöiden huomioimista. Lisäksi sukupuolierojen ilmeneminen antaa viitteitä siitä, että pojat ja tytöt saattavat hyötyä erilaisesta opetuksesta ja oppimisen tuesta. Tämän tutkimuksen perusteella näyttää siltä, että pojat hyötyisivät enemmän lukujonotaitoharjoittelusta, kun taas tyttöjen laskusujuvuutta täytyisi tukea lukujonotaitojen lisäksi muilla tavoin.

Kaiken kaikkiaan siihen, miten sukupuolierot tulisi ottaa huomioon opetuksessa, ei ole yksinkertaista vastausta. Yksi selitys sukupuolieroille on myös tyttöjen ja poikien erilaiset asenteet ja minäpystyvyys matematiikassa (esim. Herbert & Stipek, 2005; Wigfield ym., 1997). Näin ollen yksi keino tarkastella sukupuolieroja matematiikassa on kiinnittää huomiota oppilaiden asenteisiin ja motivaatioon. Olisi tärkeää, ettei tieto sukupuolieroista pääse vaikuttamaan opetta-

jien asenteisiin tai oppilaiden asenteisiin ja uskomuksiin omista kyvyistä. Toisaalta taas tieto sukupuolieroista on tärkeää opettajille, jotta he osaisivat kiinnittää huomiota mahdollisten pulmien ilmenemiseen.

Tässä tutkimuksessa lukujonotaitojen lisäksi kognitiivisista tekijöistä työmuisti ja prosessointinopeus ennustivat laskusujuvuutta, joten niiden huomioiminen on oleellista opetuksen näkökulmasta. Myös aikaisemmissa tutkimuksissa (Chong & Siegel, 2008; Locuniak & Jordan, 2008) on havaittu työmuistin yhteys laskemisen sujuvuuteen. Näin ollen työmuistin heikkoudet voivat olla merkki opettajalle siitä, että laskusujuvuuden kehittymisessä voi ilmetä pulmia. Vastavulnaisesti tässä tutkimuksessa prosessointinopeus ennusti laskusujuvuutta, ja myös aiemmissa tutkimuksissa sen on havaittu olevan yhteydessä laskusujuvuuteen (esim. Fuchs ym., 2006). Siten myös prosessointinopeuden heikkoudet vaativat opettajalta huomioimista laskusujuvuuden kehittymisen näkökulmasta. Toisaalta opettajalla ei välttämättä ole tietoa oppilaan työmuistin ja prosessointinopeuden heikkouksista, vaan niiden heikkoudet saattavat ilmetä pulmina matematiikassa. Opettajan olisi kuitenkin hyvä tiedostaa, että pulmat matematiikassa voivat johtua työmuistin ja prosessointinopeuden heikkoudesta. Tämän vuoksi oppilaan matematiikan opetus voi vaatia erityistä huomiota, jotta laskusujuvuus voi kehittyä eivätkä pulmat pääsisi kasaantumaan.

Tämän tutkimuksen perusteella jo ensimmäisellä luokalla mitatuilla lukujonotaidoilla voidaan ennustaa myöhempää laskusujuvuutta. Näin ollen laskusujuvuuden seuranta on mahdollista jo varhaisessa vaiheessa, kuten ensimmäiseltä luokalta tai mahdollisesti jo varhaiskasvatuksesta alkaen. Matemaattisten taitojen kehitystä tulisikin seurata säännöllisesti ja järjestelmällisesti kaikkien oppilaiden osalta. Systemaattisen seurannan ja näyttöön perustuvan tuen avulla myös ne oppilaat, joilla esiintyy mahdollisia sujuvuuden pulmia, voivat kehittyä alkuopetuksen aikana sujuviksi laskijoiksi.

## LÄHTEET

- Ahonen, T., Lamminmäki, T., Närhi, V., & Räsänen, P. (2008). Koulun aloittaminen ja varhaiset oppimisvaikeudet. Teoksessa P. Lyytinen, M. Korhonen, & H. Lyytinen (toim.), *Näkökulmia kehityspsykologiaan: kehitys kontekstissaan* (8. painos, s. 168–187). Porvoo: WSOY
- Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetical skills in children: The importance of central executive functions. *British Journal of Educational Psychology*, 78(2), 181–203.  
doi:10.1348/000709907X209854
- Andersson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 102(1), 115–134. doi:10.1037/a0016838
- Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-Bulletin*, 18(4), 63–74.
- Aunio, P., Hannula, M. M., & Räsänen, P. (2004). Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen, & P. Malinen (toim.), *Matematiikka –näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (2. uudistettu painos, s. 198–221). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Aunio, P., Hautamäki, J., Heiskari, P., & Van Luit, J. E. (2006). The early numeracy test in Finnish: Children's norms. *Scandinavian Journal of Psychology*, 47(5), 369–378. doi:10.1111/j.1467-9450.2006.00538.x
- Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20(5), 427–435. doi:10.1016/j.lindif.2010.06.003
- Aunio, P., & Räsänen, P. (2016). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684–704.  
doi:10.1080/1350293X.2014.996424

- Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54*(3), 695–701. doi:10.2307/1130057
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M-K., Nurmi, J-E., (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology, 96*(4), 699–713. doi:10.1037/0022-0663.96.4.699
- Aunola, K., & Nurmi, J-E., (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos, s. 54–69). Porvoo: Bookwell Oy.
- Baddeley, A. (2000). The episodic buffer: A new component of working memory?. *Trends in Cognitive Sciences, 4*(11), 417–423. doi:10.1016/s1364-6613(00)01538-2
- Baddeley, A. (2010). Working memory. *Current Biology, 20*(4), 136–140. doi:10.1016/j.cub.2009.12.014
- Baddeley, A. D., Allen, R. J., & Hitch, G. J. (2011). Binding in visual working memory: The role of the episodic buffer. *Neuropsychologia, 49*(6), 1393–1400. doi:10.1016/j.neuropsychologia.2010.12.042
- Baroody, A. (1984). Children's difficulties in subtraction: Some causes and questions. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(3), 203–213. doi:10.2307/748349
- Beasley, T. M., Erickson, S., & Allison, D. B. (2009). Rank-based inverse normal transformations are increasingly used, but are they merited?. *Behavior Genetics, 39*(5), 580–595. doi:10.1007/s10519-009-9281-0
- Binder, C. (1996). Behavioral fluency: Evolution of a new paradigm. *The Behavior Analyst, 19*(2), 163–197. doi:10.1007/bf03393163
- Belsley, D. A., Kuh, E., & Welsch, R. E. (1980). *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. New York: John Wiley & Sons.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3–18. doi:10.1111/j.1469-7610.2005.00374.x
- Canobi, K. H., Reeve, R. A., & Pattison, P. E. (2002). Young children's understanding of addition concepts. *Educational Psychology, 22*(5), 513–532. doi:10.1080/0144341022000023608

- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179–202. doi:10.2307/748348
- Carr, M., & Alexeev, N. (2011). Fluency, accuracy, and gender predict developmental trajectories of arithmetic strategies. *Journal of Educational Psychology*, 103(3), 617–631. doi:10.1037/a0023864
- Carr, M., & Davis, H. (2001). Gender differences in arithmetic strategy use: A function of skill and preference. *Contemporary Educational Psychology*, 26(3), 330–347. doi:10.1006/ceps.2000.1059
- Carr, M., & Jessup, D. L. (1997). Gender differences in first-grade mathematics strategy use: Social and metacognitive influences. *Journal of Educational Psychology*, 89(2), 318–328. doi:10.1037/0022-0663.89.2.318
- Carr, M., Steiner, H. H., Kyser, B., & Biddlecomb, B. (2008). A comparison of predictors of early emerging gender differences in mathematics competency. *Learning and Individual Differences*, 18(1), 61–75. doi:10.1016/j.lindif.2007.04.005
- Carr, M., Taasobshirazi, G., Stroud, R., & Royer, J. M. (2011). Combined fluency and cognitive strategies instruction improves mathematics achievement in early elementary school. *Contemporary Educational Psychology*, 36(4), 323–333. doi:10.1016/j.cedpsych.2011.04.002
- Chong, S. L., & Siegel, L. S. (2008). Stability of computational deficits in math learning disability from second through fifth grades. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 300–317. doi:10.1080/87565640801982387
- Conway, A. R., Cowan, N., Bunting, M. F., Therriault, D. J., & Minkoff, S. R. (2002). A latent variable analysis of working memory capacity, short-term memory capacity, processing speed, and general fluid intelligence. *Intelligence*, 30(2), 163–183. doi:10.1016/s0160-2896(01)00096-4
- Cowan, R., Donlan, C., Shepherd, D. L., Cole-Fletcher, R., Saxton, M., & Hurry, J. (2011). Basic calculation proficiency and mathematics achievement in elementary school children. *Journal of Educational Psychology*, 103(4), 786–803. doi:10.1037/a0024556

- Cowan, R., & Powell, D. (2014). The contributions of domain-general and numerical factors to third-grade arithmetic skills and mathematical learning disability. *Journal of Educational Psychology, 106*(1), 214–229. doi:10.1037/a0034097
- Crane, J. (1996). Effects of home environment, SES, and maternal test scores on mathematics achievement. *The Journal of Educational Research, 89*(5), 305–314. doi:10.1080/00220671.1996.9941332
- Cui, J., Georgiou, G. K., Zhang, Y., Li, Y., Shu, H., & Zhou, X. (2017). Examining the relationship between rapid automatized naming and arithmetic fluency in Chinese kindergarten children. *Journal of Experimental Child Psychology, 154*, 146–163. doi:10.1016/j.jecp.2016.10.008
- De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B., & Ghesquiére, P. (2009). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(2), 186–201. doi:10.1016/j.jecp.2009.01.004
- Felson, R. B., & Trudeau, L. (1991). Gender differences in mathematics performance. *Social Psychology Quarterly, 54*(2), 113–126. doi:10.2307/2786930
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Jacobs, V. R., Franke, M. L., & Levi, L. W. (1998). A longitudinal study of gender differences in young children's mathematical thinking. *Educational Researcher, 27*(5), 6–11. doi:10.3102/0013189x027005006
- Fry, A. F., & Hale, S. (1996). Processing speed, working memory, and fluid intelligence: Evidence for a developmental cascade. *Psychological Science, 7*(4), 237–241. doi:10.1111/j.1467-9280.1996.tb00366.x
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., ... & Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 98*(1), 29–43. doi:10.1037/0022-0663.98.1.29

- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Stuebing, K., Fletcher, J. M., Hamlett, C. L., & Lambert, W. (2008). Problem solving and computational skill: Are they shared or distinct aspects of mathematical cognition?. *Journal of Educational Psychology, 100*(1), 30–47. doi:10.1037/0022-0663.100.1.30
- Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. Teoksessa G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (toim.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (s. 53–187). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Fuson, K. C. (2012). *Children's Counting and Concepts of Number*. Springer Science & Business Media.
- Fuson, K. C., Richards, J., & Briars, D. J. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. Teoksessa C. J. Brainerd (toim.), *Children's Logical and Mathematical Cognition* (s. 33–92). New York: Springer.
- Gallagher, A. M., De Lisi, R., Holst, P. C., McGillicuddy-De Lisi, A. V., Morely, M., & Cahalan, C. (2000). Gender differences in advanced mathematical problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology, 75*(3), 165–190. doi:10.1006/jecp.1999.2532
- Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 7*(4), 210–216.
- Geary, D. C. (2000). From infancy to adulthood: The development of numerical abilities. *European child & Adolescent Psychiatry, 9*(2), 11–16. doi:10.1007/s007870070004
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37*(1), 4–15. doi:10.1177/00222194040370010201
- Geary, D. C. (2011a). Consequences, characteristics and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics, 32*(3), 250–263. doi:10.1037/a0025510

- Geary, D. C. (2011b). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology, 47*(6), 1539–1552. doi:10.1037/a0025510
- Geary, D. C. (2013). Early foundations for mathematics learning and their relations to learning disabilities. *Current Directions in Psychological Science, 22*(1), 23–27. doi:10.1177/0963721412469398
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 88*(2), 121–151. doi:10.1016/j.jecp.2004.03.002
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology, 104*(1), 206–223. doi:10.1037/a0025398
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Harvard University Press.
- Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 293–304. doi:10.1177/00222194050380040301
- Hannula, M. M., & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction, 15*(3), 237–256. doi:10.1016/j.learninstruc.2005.04.005
- Hannula, M. M., Lepola, J., & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 107*(4), 394–406. doi:10.1016/j.jecp.2010.06.004
- Hannula, M. M., Räsänen, P., & Lehtinen, E. (2007). Development of counting skills: Role of spontaneous focusing on numerosity and subitizing-based enumeration. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(1), 51–57. doi:10.1207/s15327833mtl0901\_4



- Hayes, A. F. (2013). *Introduction to Mediation, Moderation, and Conditional Process Analysis: A Regression-Based Approach*. New York: Guilford Press.
- Herbert, J., & Stipek, D. (2005). The emergence of gender differences in children's perceptions of their academic competence. *Journal of Applied Developmental Psychology, 26*(3), 276–295. doi:10.1016/j.appdev.2005.02.007.
- Hornung, C., Schiltz, C., Brunner, M., & Martin, R. (2014). Predicting first-grade mathematics achievement: The contributions of domain-general cognitive abilities, nonverbal number sense, and early number competence. *Frontiers in Psychology, 5*, 272. doi:10.3389/fpsyg.2014.00272
- Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin, 107*(2), 139–155. doi:10.1037/0033-2909.107.2.139
- Johansson, B. S. (2005). Number-word sequence skill and arithmetic performance. *Scandinavian Journal of Psychology, 46*(2), 157–167. doi:10.1111/j.1467-9450.2005.00445.x
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice, 22*(1), 36–46. doi:10.1111/j.1540-5826.2007.00229.x
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Nabors Oláh, L., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development, 77*(1), 153–175. doi:10.1111/j.1467-8624.2006.00862.x
- Jordan, N.C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M.N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology, 45*(3), 850–867. doi:10.1037/a0014939
- Kail, R. (1995). Processing speed, memory, and cognition. Teoksessa F. E. Weinert & W. Schneider (toim.), *Memory Performance and Competencies: Issues in Growth and Development* (s. 71–88). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Kamii, C., Lewis, B. A., & Kirkland, L. D. (2001). Fluency in subtraction compared with addition. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 33–42. doi:10.1016/s0732-3123(01)00060-8
- Kanerva, K., & Kyttälä, M. (2013). Varhaisten matemaattisten taitojen harjoittaminen: matematiikkaspesifiä vai yleistä kognitiivista harjoitusta?. *NMI-Bulletin*, 23(1), 12–22.
- Kline, R. B. (2011). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling* (3. painos). New York: The Guilford press.
- Koponen, T. (2012). Peruslaskutaito matematiikan kivijalkana. *NMI-Bulletin*, 2(2), 59–62.
- Koponen, T., Aro, T., & Ahonen, T. (2009). Conceptual knowledge-based strategy training in single-digit calculation: A single case intervention study. *European Journal of Special Needs Education*, 24(3), 259–275. doi:10.1080/08856250903016813
- Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T., & Nurmi, J. E. (2007). Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology*, 97(3), 220–241. doi:10.1016/j.jecp.2007.03.001
- Koponen, T., Georgiou, G., Salmi, P., Leskinen, M., & Aro, M. (2017). A meta-analysis of the relation between RAN and mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 109(7), 977–992. doi: 10.1037/edu0000182
- Koponen, T., & Mononen, R. (2010a). The 2-minute addition fluency test. Unpublished test material.
- Koponen, T., & Mononen, R. (2010b). The 2-minute subtraction fluency test. Unpublished test material.
- Koponen, T., Mononen, R., & Räsänen, P. (2014). Matemaattiset valmiudet. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro, T. Ahonen, & R. Ketonen (toim.), *Joko se puhuu? Kielenkehityksen vaikeudet varhaislapsuudessa* (4. uudistettu painos, s. 333–343). Opetus 2000. Jyväskylä: PS-Kustannus.

- Koponen, T., Salmi, P., Eklund, K., & Aro, T. (2013). Counting and RAN: Predictors of arithmetic calculation and reading fluency. *Journal of Educational Psychology, 105*(1), 162–175. doi:10.1037/a0029285
- Koponen, T., Salmi, P., Torppa, M., Eklund, K., Aro, T., Aro, M., Poikkeus, A.-M., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2016). Counting and rapid naming predict the fluency of arithmetic and reading skills. *Contemporary Educational Psychology, 44–45*, 83–94. doi:10.1016/j.cedpsych.2016.02.004
- Koponen, T., Sorvo, R., Dowker, A., Räikkönen, E., Viholainen, H., Aro, M., & Aro, T. (2018). Does multi-component strategy training improve calculation fluency among poor performing elementary school children?. *Frontiers in Psychology, 9*, 1187. doi:10.3389/fpsyg.2018.01187
- Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual-spatial working memory, and preschool quantity-number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(4), 516–531. doi:10.1016/j.jecp.2009.03.009
- Kyttälä, M., & Kanerva, K. (2018). Työmuisti ja matemaattiset taidot. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos, s. 220–239). Porvoo: Bookwell Oy.
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition, 93*(2), 99–125. doi:10.1016/s0010-0277(04)00014-9
- Landerl, K., & Moll, K. (2010). Comorbidity of learning disorders: prevalence and familial transmission. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 51*(3), 287–294. doi:10.1111/j.1469-7610.2009.02164.x
- Lehto, J. E., Juujärvi, P., Kooistra, L., & Pulkkinen, L. (2003). Dimensions of executive functioning: Evidence from children. *British Journal of Developmental Psychology, 21*(1), 59–80. doi:10.1348/026151003321164627
- Locuniak, M. N., & Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities, 41*(5), 451–459. doi:10.1177/0022219408321126

- Mazzocco, M. M., & Thompson, R. E. (2005). Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice, 20*(3), 142–155. doi:10.1111/j.1540-5826.2005.00129.x
- McLean, J. F., & Hitch, G. J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*(3), 240–260. doi:10.1006/jecp.1999.2516
- Melby-Lervåg, M., & Hulme, C. (2013). Is working memory training effective? A meta-analytic review. *Developmental Psychology, 49*(2), 270–291. doi:10.1037/a0028228
- Metsämuuronen, J. (2008). *Monimuuttujamenetelmien perusteet* (2. korjattu painos). Helsinki: International Methelp.
- Meyer, M.L., Salimpoor, V.N., Wu, S.S., Geary, D., & Menon, V. (2010). Differential contribution of specific working memory components to mathematical skills in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences, 20*(2), 101–109. doi:10.1016/j.lindif.2009.08.004
- Moll, K., Göbel, S. M., Gooch, D., Landerl, K. & Snowling, M. J. (2016). Cognitive risk factors for specific learning disorder: processing speed, temporal processing and working memory. *Journal of Learning Disabilities, 49*(3), 272–281. doi:10.1177/0022219414547221
- Muldoon, K., Lewis, C., & Freeman, N. H. (2003). Putting counting to work: Preschoolers' understanding of cardinal extension. *International Journal of Educational Research, 39*(7), 695–718. doi:10.1016/j.ijer.2004.10.006
- Murata, A. (2004). Paths to learning ten-structured understandings of teen sums: Addition solution methods of Japanese grade 1 students. *Cognition and Instruction, 22*(2), 185–218. doi:10.1207/s1532690xci2202\_2
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Nevo, E., & Breznitz, Z. (2013). The development of working memory from kindergarten to first grade in children with different decoding skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 114*(2), 217–228. doi:10.1016/j.jecp.2012.09.004

- Noël, M. P., Désert, M., Aubrun, A., & Seron, X. (2001). Involvement of short-term memory in complex mental calculation. *Memory & Cognition*, 29(1), 34–42. doi:10.3758/bf03195738
- Noël, M. P., Seron, X., & Trovarelli, F. (2003). Working memory as a predictor of addition skills and addition strategies in children. *Current Psychology of Cognition*, 22(1), 3–25.
- Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus.
- Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2013). PISA 2012: Suomalaisnuorten osaaminen laskussa. Luettu osoitteesta: [https://valtioneuvosto.fi/artikkeli/-/asset\\_publisher/pisa-2012-finlandska-ungas-kunskapsniva-har-sjunkit?\\_101\\_INSTANCE\\_3wyslLo1Z0ni\\_groupId=1410845](https://valtioneuvosto.fi/artikkeli/-/asset_publisher/pisa-2012-finlandska-ungas-kunskapsniva-har-sjunkit?_101_INSTANCE_3wyslLo1Z0ni_groupId=1410845)
- Ostad, S. A. (1997). Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, 67(3), 345–357. doi:10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x
- Ostad, S. A. (1999). Developmental progression of subtraction strategies: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *European Journal of Special Needs Education*, 14(1), 21–36. doi:10.1080/0885625990140103
- Passolunghi, M. C. (2011). Cognitive and emotional factors in children with mathematical learning disabilities. *International Journal of Disability, Development and Education*, 58(1), 61–73. doi:10.1080/1034912x.2011.547351
- Passolunghi, M. C., & Siegel, L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88(4), 348–367. doi:10.1080/1034912X.2011.547351
- Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., & Sun, C. (2016). A meta-analysis of mathematics and working memory: Moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. *Journal of Educational Psychology*, 108(4), 455–473. doi:10.1037/edu0000079

- Penner, A. M., & Paret, M. (2008). Gender differences in mathematics achievement: Exploring the early grades and the extremes. *Social Science Research, 37*(1), 239–253. doi:10.1016/j.ssresearch.2007.06.012
- Price, G. R., Mazzocco, M. M., & Ansari, D. (2013). Why mental arithmetic counts: Brain activation during single digit arithmetic predicts high school math scores. *Journal of Neuroscience, 33*(1), 156–163. doi:10.1523/jneurosci.2936-12.2013
- Rosen, V. M., & Engle, R. W. (1997). The role of working memory capacity in retrieval. *Journal of Experimental Psychology: General, 126*(3), 211–227.
- Royer, J. M., Tronsky, L. N., Chan, Y., Jackson, S. J., & Marchant III, H. (1999). Math-fact retrieval as the cognitive mechanism underlying gender differences in math test performance. *Contemporary Educational Psychology, 24*(3), 181–266. doi:10.1006/ceps.1999.1004
- Rusanen, E., & Räsänen, P. (2012). Matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioiden kehitys. *NMI-Bulletin 22*(3), 28–41.
- Räsänen, P. (2003). Matematiikan oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen & T. Aro (toim.), *Oppimisvaikeudet: Kuntoutus ja opetus yksilöllisen kehityksen tukena* (332–359). Juva: WS Bookwell Oy.
- Rönkkö, M., & Aguirre-Urreta, M. (2018). Cautionary note on the two-step transformation to normality. *Journal of Information Systems. doi:10.2308/isys-52255*
- Service, E., & Lehto, J. E. (2005). Muisti ja oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman, & T. Riita (toim.), *Oppimisvaikeudet. Neuropsykologinen näkökulma* (2.–3. painos, s. 235–290). Juva: WS Bookwell Oy.
- Shanahan, M. A., Pennington, B. F., Yerys, B. E., Scott, A., Boada, R., Willcutt, E. G., Olson, R. K., & DeFries, J. C. (2006). Processing speed deficits in attention deficit/hyperactivity disorder and reading disability. *Journal of Abnormal Child Psychology, 34*(5), 584–601. doi:10.1007/s10802-006-9037-8

- Siegel, L. S. (1994). Working memory and reading: A life-span perspective. *International Journal of Behavioral Development, 17*(1), 109–124.  
doi:10.1177/016502549401700107
- Siegler, R. S. & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do?. Teoksessa C. Sophian (toim.), *Origins of Cognitive Skills* (s. 229–293). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Sorvo, R., Koponen, T., Viholainen, H., Aro, T., Räikkönen, E., Peura, P., ... & Aro, M. (2017). Math anxiety and its relationship with basic arithmetic skills among primary school children. *British Journal of Educational Psychology, 87*(3), 309–327. doi:10.1111/bjep.12151
- Steinberg, R. M. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(5), 337–355.  
doi:10.2307/749356
- Stevens, J. P. (2002). *Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences* (4. painos). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates
- Swanson, L., & Kim, K. (2007). Working memory, short-term memory, and naming speed as predictors of children's mathematical performance. *Intelligence, 35*(2), 151–168. doi:10.1016/j.intell.2006.07.001
- Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2007). *Using Multivariate Statistics* (5. painos). New York: Allyn and Bacon.
- Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2014). *Using Multivariate Statistics* (6. painos). Harlow: Pearson.
- Templeton, G. F. (2011). A two-step approach for transforming continuous variables to normal: Implications and recommendations for IS research. *Communications of the Association for Information Systems, 28*(1), 41–58.  
doi:10.17705/1CAIS.02804
- Vasilyeva, M., Laski, E. V., & Shen, C. (2015). Computational fluency and strategy choice individual and cross-national differences in complex arithmetic. *Developmental Psychology, 51*(10), 1489–1500.  
doi:10.1037/dev0000045

- Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E., & Rautopuro, J. (2016). *Lapsuudesta eväät oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen*. Kansainvälinen TIMMS-tutkimus Suomessa. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino.
- Vukovic, R. K. & Siegel, L. S. (2010). Academic and cognitive characteristics of persistent mathematics difficulty from first through fourth grade. *Learning Disabilities Research & Practice* 25(1), 25–38. doi:10.1111/j.1540-5826.2009.00298.x
- Väisänen, E., & Aunio, P. (2014). Matematiikkainterventio heikkojen ensiluokkalaisten oppimisen tukena. *Journal of Early Childhood Education Research*, 3(2), 48–75.
- Väisänen, E., & Aunio, P. (2016). Laskemisen sujuvuus toiselta neljännelle luokalle sekä yhteys lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa. *Psykologia* 51(4), 244–261.
- Väisänen, E., & Aunio, P. (2017). Alakoululaisten laskemisen ja lukemisen sujuvuuden seuranta. *NMI-Bulletin*, 27(4), 32–50.
- Walker, S., & Berthelsen, D. C. (2016). Gender differences in early literacy and mathematics achievement and self-regulatory behaviours in the first year of school: An Australian study. *Australasian Journal of Early Childhood*, 42(1), 70–78. doi:10.23965/ajec.42.1.08
- Wechsler, D. (2010). Wechsler Intelligence Scale for Children – IV. Psykologien kustannus Oy, Helsinki.
- Wigfield, A., Eccles, J. S., Yoon, K. S., Harold, R. D., Arbreton, A. J., Freedman-Doan, C., & Blumenfeld, P. C. (1997). Change in children's competence beliefs and subjective task values across the elementary school years: A 3-year study. *Journal of Educational Psychology*, 89(3), 451–469. doi:10.1037/0022-0663.89.3.451
- Zhang, X., Koponen, T., Räsänen, P., Aunola, K., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2014). Linguistic and spatial skills predict early arithmetic development via counting sequence knowledge. *Child Development*, 85(3), 1091–1107. doi:10.1111/cdev.12173



## LIITTEET

**Liite 1.** Muuttujakohtaisten havaintojen tunnusluvut ja Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimet.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Sukupuoli						
2. Työmuisti 1. lk	-.01					
3. Prosessointinopeus 1. lk	.13	.21**				
4. Lukujonotaidot 1. lk	-.06	.31***	.32***			
5. Yhteenlasku 3. lk	-.09	.34***	.32***	.48***		
6. Vähennyslasku 3. lk	-.15*	.33***	.32***	.45***	.87***	
<i>Ka</i>	0.52	5.30	18.25	23.51	18.18	14.40
<i>Kh</i>	0.50	1.21	4.03	7.62	7.75	7.02
<i>vinous</i>	-	0.67	-0.60	0.42	0.75	0.79
<i>huipukkuus</i>	-	0.51	0.68	0.83	0.65	0.32

Huom. N = 183. Sukupuoli: 0 = poika, 1 = tyttö. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < 0.05.

**Liite 2.** Muuttujakohtaisten havaintojen tunnusluvut ja Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimet sukupuolittain.

	1.	2.	3.	4.	5.	<i>Ka</i>	<i>Kh</i>	<i>vinous</i>	<i>huipukkuus</i>
1. Työmuisti 1. lk		.12	.26*	.33**	.30**	5.34	1.24	0.74	0.69
2. Prosessointinopeus 1. lk	.31**		.26*	.34**	.34**	18.81	3.73	-0.55	0.29
3. Lukujonotaidot 1. lk	.35**	.39***		.42***	.32**	23.10	7.26	0.28	1.30
4. Yhteenlasku 3. lk	.35**	.34**	.52***		.84***	17.55	6.88	0.67	-0.01
5. Vähennyslasku 3. lk	.37***	.35**	.54***	.89***		13.44	5.88	0.87	0.62
<i>Ka</i>	5.25	17.66	23.95	18.97	15.55				
<i>Kh</i>	1.18	4.26	7.99	8.55	7.90				
<i>vinous</i>	0.59	-0.58	0.52	0.72	0.61				
<i>huipukkuus</i>	0.32	0.80	0.46	0.74	-0.14				

Huom. Matriisissa poikien (N = 89) kertoimet esitetty taulukon alareunassa ja tyttöjen (N = 94) kertoimet taulukon yläreunassa. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < 0.05.

**Liite 3.** Normalisoitujen muuttujakohtaisten havaintojen tunnusluvut ja Pearsonin tulo-momentti korrelaatiokertoimet.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Sukupuoli						
2. Työmuisti 1. lk	-.00					
3. Prosessointinopeus 1. lk	.12	.21**				
4. Lukujonotaidot 1. lk	-.06	.33***	.28***			
8. Yhteenlasku 3. lk	-.05	.37***	.35***	.52***		
9. Vähennyslasku 3. lk	-.11	.34***	.35***	.48***	.87***	
<i>Ka</i>	0.52	5.33	18.33	23.44	18.18	14.51
<i>Kh</i>	0.50	1.13	3.92	7.38	7.59	7.01
<i>vinous</i>	-	0.20	0.07	0.08	0.00	0.10
<i>huipukkuus</i>	-	-0.07	-0.08	0.18	-0.23	-0.08

Huom. N = 179. Sukupuoli: 0 = poika, 1 = tyttö. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < 0.05.

**Liite 4.** Normalisoitujen muuttujakohtaisten havaintojen tunnusluvut ja Pearsonin tulo-momenttikorrelaatiokertoimet sukupuolittain.

	1.	2.	3.	4.	5.	<i>Ka</i>	<i>Kh</i>	<i>vinous</i>	<i>huipukkuus</i>
1. Työmuisti 1. lk		.11	.20	.30**	.23*	5.39	5.13	0.26	-0.08
2. Prosessointinopeus 1. lk	.32**		.16	.34**	.35**	18.81	3.56	-0.03	-0.39
3. Lukujonotaidot 1. lk	.42***	.33**		.38***	.29**	22.83	6.65	0.02	0.09
4. Yhteenlasku 3. lk	.40***	.36**	.56***		.85***	17.75	6.87	0.14	-0.11
5. Vähennyslasku 3. lk	.39***	.32**	.52***	.87***		13.45	5.65	0.02	-0.37
<i>Ka</i>	5.26	17.65	23.63	18.98	15.80				
<i>Kh</i>	1.06	4.07	7.34	8.22	7.89				
<i>vinous</i>	0.09	-0.03	-0.10	0.00	0.15				
<i>huipukkuus</i>	-0.29	-0.36	-0.17	-0.33	-0.12				

Huom. Matriisissa poikien (N = 83) kertoimet esitetty taulukon alareunassa ja tyttöjen (N = 88) kertoimet taulukon yläreunassa. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < 0.05.

**Liite 5.** Sukupuolen, kognitiivisten taustataitojen ja lukujonotaitojen yhteydet yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuteen alkuperäisillä muuttujilla.

	Yhteenlasku 3. lk					Vähennyslasku 3. lk				
	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr
<b>Selittävät muuttujat 1. lk</b>										
<b>Askel 1:</b>	.01	.00	.01			.02	.02	.02		
Sukupuoli				-.09	-.09				-.15*	-.15
<b>Askel 2:</b>	.12	.11	.16			.13	.12	.11		
Sukupuoli				-.08	-.08				-.15*	-.15
Työmuisti				.34***	.34				.33***	.33
<b>Askel 3:</b>	.19	.18	.07			.21	.20	.08		
Sukupuoli				-.12	-.12				-.19**	-.19
Työmuisti				.28***	.27				.27***	.26
Prosessointinopeus				.28***	.27				.29***	.28
<b>Askel 4:</b>	.30	.29	.11			.29	.28	.08		
Sukupuoli				-.09	-.09				-.16*	-.16
Työmuisti				.19**	.18				.19**	.18
Prosessointinopeus				.18**	.17				.20**	.18
Lukujonotaidot				.36***	.33				.32***	.29
Lopullinen malli F(df)	(4, 178) = 19.14, p < .001					(4, 178) = 19.14, p < .001				

Huom. N = 183. Sukupuoli: 0 = poika, 1 = tyttö. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < .05. R<sup>2</sup> = estimoidun mallin selitysaste, Korj. R<sup>2</sup> = korjattu estimoidun mallin selitysaste ΔR<sup>2</sup> = selityksen muutos, kun kaikki askeleen muuttujat ovat mukana, β = standardoitu regressiokerroin, sr = osakorrelaatiokerroin.

**Liite 6.** Poikien kognitiivisten taustataitojen ja lukujonotaitojen yhteydet yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuteen alkuperäisillä muuttujilla.

	Yhteenlasku 3. lk					Vähennyslasku 3. lk				
	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr
<b>Selittävät muuttujat 1. lk</b>										
<b>Askel 1:</b>	.12	.11	.12			.14	.13	.14		
Työmuisti				.35**	.35				.37***	.37
<b>Askel 2:</b>	.18	.16	.06			.20	.18	.06		
Työmuisti				.28**	.26				.29**	.27
Prosessointinopeus				.25*	.24				.26*	.25
<b>Askel 3:</b>	.32	.29	.13			.34	.31	.14		
Työmuisti				.17	.16				.18	.17
Prosessointinopeus				.13	.11				.13	.12
Lukujonotaidot				.41***	.37				.42***	.37
Lopullinen malli F(df)	(3, 85) = 13.08, p < .001					(3, 85) = 14.44, p < .001				

Huom. N = 89. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < .05. R<sup>2</sup> = estimoidun mallin selitysaste, Korj. R<sup>2</sup> = korjattu estimoidun mallin selitysaste ΔR<sup>2</sup> = selitysasteen muutos, kun kaikki askeleen muuttujat ovat mukana, β = standardoitu regressiokerroin, sr = osakorrelaatiokerroin.

**Liite 7.** Tyttöjen kognitiivisten taustataitojen ja lukujonotaitojen yhteydet yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuteen alkuperäisillä muuttujilla.

	Yhteenlasku 3. lk					Vähennyslasku 3. lk				
	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr	R <sup>2</sup>	Korj. R <sup>2</sup>	ΔR <sup>2</sup>	β	sr
<b>Selittävät muuttujat 1. lk</b>										
<b>Askel 1:</b>	.11	.10	.11			.09	.08	.09		
Työmuisti				.33**	.33				.30**	.30
<b>Askel 2:</b>	.20	.18	.09			.19	.17	.09		
Työmuisti				.30**	.29				.27**	.27
Prosessointinopeus				.30**	.30				.31**	.31
<b>Askel 3:</b>	.28	.25	.08			.22	.19	.03		
Työmuisti				.23*	.22				.22*	.21
Prosessointinopeus				.23*	.22				.26**	.26
Lukujonotaidot				.30**	.28				.19	.18
Lopullinen malli F(df)	(3, 90) = 11.56, p < .001					(3, 90) = 8.36, p < .001				

Huom. N = 94. \*\*\*p < .001, \*\*p < .01 ja \*p < .05. R<sup>2</sup> = estimoidun mallin selitysaste, Korj. R<sup>2</sup> = korjattu estimoidun mallin selitysaste ΔR<sup>2</sup> = selitysasteen muutos, kun kaikki askeleen muuttujat ovat mukana, β = standardoitu regressiokerroin, sr = osakorrelaatiokerroin.