Polynomiyhtälön ratkaiseminen

Anna-Mari Auvinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2018

Tiivistelmä: Anna-Mari Auvinen, *Polynomiyhtälön ratkaiseminen* (engl. *Solving polynomial equations*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 50 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2018.

Tämän tutkielman tarkoituksena on näyttää, kuinka eri asteisia polynomiyhtälöitä ratkaistaan. Todistetaan toisen ja kolmannen asteen yhtälöiden ratkaisukaavat, mutta näytetään myös tietyissä erikoistapauksissa toimivia tapoja ratkaista yhtälöitä. Kolmannen asteen yhtälöiden ratkaisukaavaan perehdytään tarkimmin.

Ennen kuin tarkastellaan polynomiyhtälöiden ratkaisutapoja, kerrataan kompleksilukujen ominaisuuksia. Erityisesti täytyy hallita De Moivren kaava, jota käytetään esimerkiksi laskettaessa kompleksilukujen juuria. Tämä tuotti vaikeuksia kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavassa, kun kompleksiluvusta täytyy ottaa kuutiojuuri. Tätä kutsutaan Casus irreducibilis-tilanteeksi. Tutkielmassa näytetään myös tapa, jolla juurenotto vältetään kosinin kolminkertaisen kulman kaavan avulla.

Toisen asteen yhtälöä tarkastellaan ensiksi reaalikertoimisena. De Moivren kaavasta nähdään, että jokaisella kompleksiluvulla on kaksi neliöjuurta. Näin ollen reaalikertoiminen toisen asteen yhtälön ratkaisukaava voidaan yleistää kompleksikertoimisen yhtälön tapaukseen, jossa se tuottaa (kertaluku huomioiden) aina kaksi ratkaisua. Toisen asteen yhtälön, niin kuin myös muidenkin n-asteisien polynomien, kertoimilla on yhteys sen juuriin. Näitä kutsutaan Vietan kaavoiksi.

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavat, Cardanon kaavat, saadaan johdettua muuttujanvaihdon, toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan ja Vietan kaavoja avulla. Cardanon kaavat pätevät kolmannen asteen yhtälön supistettuun muotoon $x^3 + px + q = 0$. Jokainen kolmannen asteen yhtälö saadaan tähän muotoon sijoituksen avulla. Cardanon kaavat antavat juuret supistetulle muodolle ja alkuperäisen yhtälön juuret saadaan selville sijoituksen avulla. Kolmannen asteen yhtälön juuret saadaan selville myös determinanttimenetelmän avulla. Siinä käytetään hyväksi determinantteja sekä tietoa toisen asteen yhtälön tekijöitymisestä tai kuutioon täydentämistä.

Toisen ja kolmannen asteen yhtälöiden ratkaisukaavat sisältävät diskriminantin, jolla pystytään määrittämään polynomiyhtälön juurten laatu sekä määrä. Juurien arvoa sillä ei saa selville. Tutkielmassa diskriminantti on määritetty toisellakin tapaa, polynomin juurien avulla. Tällöin diskriminantti saadaan laskettua polynomin kertoimien avulla.

Kaiken pohjan eri asteisien polynomiyhtälöiden ratkaisuille luo Algebran peruslause, joka sanoo, että jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla on ainakin yksi kompleksinen juuri. Algebran peruslauseen seuraus sanoo, että jokaisella n-asteisella polynomilla on kertaluvut huomioiden täsmälleen n kompleksista juurta. Lisäksi polynomi voidaan esittää juuriensa avulla.

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa esitellään, kuinka eri asteisia polynomiyhtälöitä voidaan ratkaista. Pääosassa ovat kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavat, Cardanon kaavat. Ennen kuin tutustutaan toisen ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavoihin käydään läpi helppoja ratkaisutapoja, joita ovat muun muassa arvaaminen ja ryhmittely. Jos nämä keinot eivät riitä, saadaan yhtälön juuret ratkaisukaavojen avulla.

Aluksi palautetaan mieleen kompleksiluvut ja niiden ominaisuudet, joita tarvitaan polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa. Esimerkiksi silloin, kun negatiivisesta luvusta täytyy ottaa neliöjuuri. Koulumaailmassa sanotaan, että toisen asteen yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua, kun diskriminantti on negatiivinen. Ratkaisuja on, mutta ei reaalilukujen joukossa vaan kompleksilukujen, sillä $\sqrt{-1} = i$. Lukua i kutsutaan imaginaariyksiköksi. Entäpä jos juurrettavana on kompleksiluku? Silloin kompleksiluku täytyy muuttaa polaarimuotoon. Tällöin voidaan käyttää De Moivren kaavaa juurien löytämisessä. De Moivren kaava sanoo, että jokaisella kompleksiluvulla on n:s juuri ja juuria on tasan n kappaletta. Näin ollen toisen ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavat saadaan toimiviksi olipa juurrettavana reaali- tai kompleksiluku. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavojen johtamisessa tullaan tarvitsemaan ykkösen kolmansia juuria eli yhtälön $z^3 = 1$ ratkaisuja.

Ratkaisukaavoista palautetaan ensiksi mieleen kaikille jo lukiosta tuttu toisen asteen yhtälön ratkaisukaava, jota tullaan tarvitsemaan Cardanon kaavojen johtamisessa. Ensiksi tarkastellaan reaalikertoimista toisen asteen polynomiyhtälöä, mutta nähdään, että jokaisella kompleksiluvulla on kaksi neliöjuurta. Näin ollen ratkaisukaava voidaan yleistää kompleksikertoimisen yhtälön tapaukseen. (Reaali- ja kompleksilukukertoimisen) toisen asteen yhtälön juurilla on yhteys sen kertoimiin. Juurten tulolle ja summalle saadaan todistettua kaavat, joita kutsutaan Vietan kaavoiksi. Niitä tullaan tarvitsemaan myös Cardanon kaavojen johtamisessa.

Cardanon kaavat toimivat suoraan kaikille muotoa $x^3 + px + q = 0$ oleville kolmannen asteen yhtälöille. Jokainen kolmannen asteen yhtälö voidaan saattaa tähän supistettuun muotoon sijoituksen avulla. Cardanon kaavat saadaan johdettua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan ja sen ominaisuuksien avulla. Siinä kolmannen asteen yhtälö saadaan Vietan kaavojen avulla muutettua toisen asteen yhtälöksi, jonka juuret saadaan ratkaistua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla. Sen jälkeen tiettyjen ehtojen avulla saadaan ratkaistua supistetun muodon juuret. Alkuperäisen yhtälön juuret saadaan selville ensimmäisen sijoituksen avulla.

Toisen asteen polynomiyhtälöllä ei ole välttämättä yhtään reaalista ratkaisua. Sen sijaan kolmannen asteen polynomiyhtälöllä on ainakin yksi reaalinen ratkaisu. Jos kolmannen asteen yhtälöllä on kolme reaalista ratkaisua, päädytään Cardanon kaavoja käytettäessä ns. Casus irreducibilis-tapaukseen. Se tarkoittaa jakautumatonta tapausta. Siinä kompleksiluvusta täytyy ottaa kuutiojuuri. Juuret saadaan selville De Moivren kaavan avulla. Tutkielmassa näytetään myös tapa, jolla kuutiojuurenotto kompleksiluvusta vältetään. Siinä käytetään hyödyksi kosinin kolminkertaisen kulman kaavaa. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisutavoista esitellään myös determinanttimenetelmä, jossa juuret saadaan selville determinanttien ja kuutioksi täydentämisen avulla.

Myös neljännen asteen yhtälölle on olemassa ratkaisukaava, jonka johtaminen menee vastaavalla tavalla kuin kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan johtaminen. Siinä muuttujanvaihdolla asteluku saadaan yhden pienemmäksi. Näin ollen voidaan käyttää kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavaa hyväksi ja saadaan neljännen asteen polynomin ratkaisut selville. Neljännen asteen yhtälön ratkaisukaava alkaa olemaan sen verran monimutkaisempi, että yleensä turvaudutaan ratkaisemaan juuret graafisesti tai numeerisesti, jolloin on tyydyttyvä likiarvoihin. Tässä tutkielmassa ei neljännen asteen yhtälöön perehdytä tämän tarkemmin.

Entäpä korkeampi asteisilla yhtälöillä? Viidennen ja sitä korkeampi asteisien yhtälöiden ratkaisuun ei ole olemassa yleisiä ratkaisukaavoja, mutta joihinkin erikoistapauksiin löytyy ratkaisuja. Silloin yhtälöistä yleensä puuttuu kertoimia, jolloin se on supistunut yksinkertaisempaan muotoon ja juuret löytyvät helposti. Yleensä korkeampi asteisien polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa käytetään numeerisia keinoja selvittämään juurten likimääräiset ratkaisut. Yksi keinoista on muun muassa Newtonin menetelmä, jossa nollakohdat etsitään funktion ensimmäisen derivaatan avulla, mutta siihen ei tutkielmassani perehdytä.

Toisen ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavoihin liittyy diskriminantti, joka kertoo juurten määrän ja laadun. On muistettava, että se ei kuitenkaan kerro juurten arvoa. Kolmannen asteen yhtälön tapauksessa diskriminantti on määritetty ensiksi yhtälön supistetulle muodolle. Tutkielmassa näytetään toinenkin tapa määrittää diskriminantti. Siinä diskriminantti saadaan määritettyä juurten erotuksien neliöiden tulona. Tällöin diskriminantti saadaan laskettua polynomin kertoimien avulla. Tämä määritelmä mahdollistaa yleistyksen n-asteisille polynomeille.

Kaiken pohjan eri asteisten polynomiyhtälöiden ratkaisuille luo Algebran peruslause sekä sen seuraukset. Algebran peruslause sanoo, että jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla on ainakin yksi kompleksinen juuri. Nähdään, että juuria on itse asiassa polynomin korkeimman potenssin verran. Ne voivat tietenkin olla monikertoja eli sama juuri esiintyy useamman kerran. Polynomi voidaan esittää juuriensa avulla olivatpa juuret reaalisia tai kompleksisia.

LUKU 1

Kompleksiluvut

Tässä luvussa kerrataan kompleksilukujen ominaisuuksia, joita tullaan tarvitsemaan eriasteisien yhtälöiden ratkaisukaavoissa. Palautetaan mieleen, kuinka kompleksiluvut voidaan ilmaista trigonometristen funktioiden avulla ja näin ollen niistä saadaan helposti otettua juuria.

1.1. Johdatus kompleksilukuihin

Toisen asteen yhtälön ratkaisemisessa kaikki menee hyvin, jos diskriminantti on positiivinen tai nolla, mutta mitä sitten, jos se on negatiivinen esim. $\sqrt{-1}$? Reaaliluvuista ei löydy enää vastausta, joten täytyy siirtyä kompleksilukujen joukkoon. Kompleksilukujen joukossa on luku i, jolle $i^2 = -1$ eli $i = \sqrt{-1}$. Tätä lukua kutsutaan imaginääriyksiköksi. Kompleksiluvuilla on tiettyjä ominaisuuksia, jotka kerrataan kappaleessa lyhyesti. Näin saadaan työkaluja polynomiyhtälöiden ratkaisemiseen. Varsinkin kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavassa kompleksilukujen ominaisuudet ovat tärkeitä ja hyödyllisiä. Ensiksi palautetaan mieleen kompleksilukujen määritelmä ja se, kuinka niitä voidaan esimerkiksi laskea yhteen ja kertoa keskenään.

Määritelmä 1.1. Kompleksiluvut ovat muotoa

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Kompleksilukujen joukkoa merkitään

$$\mathbb{C} = \{x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Määritelmä 1.2. Olkoon $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$. Tällöin

$$x = Re(z) = \text{luvun } z \text{ reaaliosa}$$

ja

$$y = Im(z) = \text{luvun } z \text{ imaginääriosa}.$$

Jos $x = 0$, kompleksiluku supistuu pelkäksi imaginääriseksi luvuksi. Jos taas $y = 0$, niin kompleksiluku supistuu reaaliluvuksi ja näin ollen saadaan, että reaaliluvut kuuluvat kompleksilukujen joukkoon.

Määritelmä 1.3. Olkoon $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$ ja $w = a + bi$. Kompleksilukujen yhteenlasku ja kertolasku määritetään seuraavasti:

$$z + w = (x + a) + (y + b)i$$

ja

$$zw = (xa - yb) + (xb + ya)i.$$

Esimerkki 1.4. Laske kompleksilukujen $1+2i$ ja $5+3i$ summa ja tulo. Summaksi saadaan

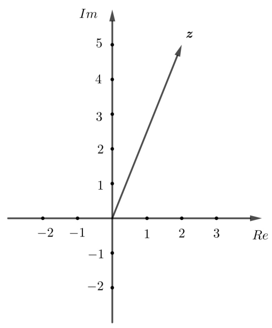
$$(1+2i)+(5+3i)=(1+5)+(2+3)i=6+5i$$

ja tuloksi

$$(1+2i)(5+3i)=(1\cdot 5-2\cdot 3)+(1\cdot 3+2\cdot 5)i=-1+13i.$$

Kompleksilukuku $z\in\mathbb{C}$, $z=a+bi$ voidaan samaistaa xy-tason pisteen (a,b) kanssa. Luvun z reaaliosa on $Re(z)$ on siis pisteen x-koordinaatti ja imaginääriosa $Im(z)$ sen y-koordinaatti. Tällöin kompleksiluvun hahmottaminen on selvempää ja kompleksiluvun pituus saa geometrisen tulkinnan.

Esimerkki 1.5. Piirrä kompleksiluku $z=2+5i$ xy-koordinaatistoon.



Kuva 1.1. Kompleksiluku $z=2+5i$ xy-koordinaatistossa.

Kompleksiluvun pituus saadaan laskettua tutun Pythagoraan lauseen avulla.

Määritelmä 1.6. Luvun $z=x+yi\in\mathbb{C}$ moduli eli itseisarvo (pituus) on

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Esimerkki 1.7. Kompleksiluvun $3+4i$ moduli eli pituus on

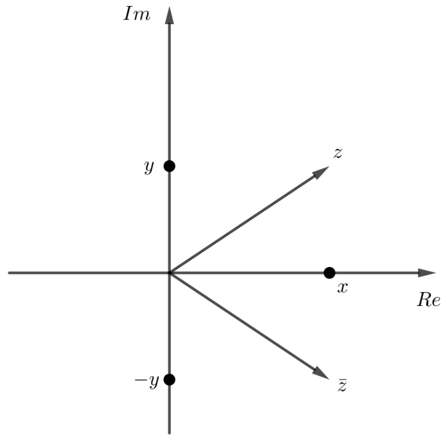
$$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

Seuraavaksi määritellään, mikä on kompleksikonjugaatti eli liittoluku. Kompleksiluku ja sen liittoluku poikkeavat toisistaan imaginaariosan osalta. Imaginääriosa on muuten sama, mutta vain erimerkkinen $Im(z)=-Im(\bar{z})$. Liittolukuihin törmätään polynomiyhtälöitä ratkaistaessa. Esimerkiksi toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan diskriminantin ollessa pienempää kuin nolla, yhtälön ratkaisuksi saadaan kompleksiluku ja sen liittoluku. Tähän palataan myöhemmin tarkemmin.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Luvun $z = x + yi \in \mathbb{C}$ kompleksikonjugaatti eli liittoluku on kompleksiluku

$$\bar{z} = x - yi \in \mathbb{C}.$$

Kompleksiluku ja sen kompleksikonjugaatti ovat koordinaatistossa toistensa peilikuvia x-akselin suhteen.



KUVA 1.2. Kompleksilukukonjugaatit xy-koordinaatistossa.

Huom! Kuten kuvasta näkyy kompleksiluvun ja sen kompleksikonjugaatin modulit ovat yhtäsuuret, $|z| = |\bar{z}|$.

ESIMERKKI 1.9. Lukujen $z = 3 + 2i$ sekä $w = -9i$ kompleksikonjugaatti ovat $\bar{z} = 3 - 2i$ ja $\bar{w} = 9i$. Kompleksiluvun w ja sen kompleksikonjugaatin $|\bar{w}|$ modulit ovat $|w| = 9$ ja $|\bar{w}| = 9$.

Seuraava lause on hyödyllinen esimerkiksi kompleksilukujen osamäärän selvittämisessä.

LAUSE 1.10. *Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja $\bar{z}$ sen kompleksikonjugaatti. Tällöin*

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

TODISTUS.

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2.$$

□

Esimerkki 1.11. Kompleksilukujen $1+2i$ ja $5+3i$ osamäärä on

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{5+3i} &= \frac{(1+2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} \\ &= \frac{-1+13i}{5^2-(3i)^2} \\ &= \frac{-1+13i}{34} \\ &= -\frac{1}{34}+\frac{13}{34}i.\end{aligned}$$

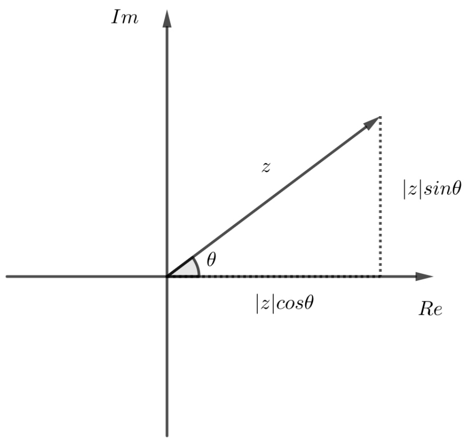
Kompleksiluvut voidaan ilmoittaa napakoordinaattien avulla ja esitystä kutsutaan luvun z polaariesitykseksi. Tätä hyödyntäen kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen onnistuu.

Lause 1.12. *Olkoon $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Tällöin on olemassa $\theta \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ts.

$$x = |z|\cos\theta \text{ ja } y = |z|\sin\theta$$



Kuva 1.3. Kompleksiluvun polaariesitys.

Kuinka saadaan selville kulman θ suuruus? Edellä olevasta lauseesta kävi ilmi se, mitä luvut x ja y vastaavat. Täytyy löytää siis sellainen kulma, joka täyttää molemmat ehdot. Kulman suuruus saadaan selville arkusfunktioiden avulla.

Määritelmä 1.13. Kompleksiluvun $z \neq 0$ argumentti $arg(z)$ on reaaliluku $\theta \in]-\pi, \pi]$, jolle

$$x = |z|\cos\theta \text{ ja } y = |z|\sin\theta$$

ts.

$$\theta = arg(z) = \arccos \frac{x}{|z|} = \arcsin \frac{y}{|z|}$$

Huom! Saatu argumenttikulma on yksikäsitteinen 2π:n monikertoja vaille.

Esimerkki 1.14. Etsitään luvulle $z = 2 - \sqrt{12}i$ sen polaariesitys. Luvun z pituus on

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{12})^2} = 4.$$

Seuraavaksi täytyy selvittää, minkä suuruisen kulman kompleksiluku muodostaa x-akselin kanssa. Kulman θ täytyy toteuttaa yhtälöt

$$\theta = \arccos \frac{2}{4} = \arcsin \frac{-\sqrt{12}}{4}.$$

Ratkaistaan ensin yhtälö

$$\theta = \arccos \frac{2}{4} = \arccos \frac{1}{2},$$

josta saadaan

$$\theta = \tfrac{\pi}{3} + n2\pi \text{ tai } \theta = -\tfrac{\pi}{3} + n2\pi,$$

missä $n \in \mathbb{N}$.Vastaavasti toinen yhtälö

$$\theta = \arcsin \frac{-\sqrt{12}}{4} = \arcsin \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

josta saadaan

$$\theta = -\tfrac{4\pi}{3} + n2\pi \text{ tai } \theta = -\tfrac{\pi}{3} + n2\pi,$$

missä $n \in \mathbb{N}$. Koska molempien yhtälöiden tulee olla voimassa, polaariesitykseksi saadaan

$$z = 4\left(\cos(-\tfrac{\pi}{3} + n2\pi) + i\sin(-\tfrac{\pi}{3} + n2\pi)\right).$$

Seuraavaa lemmaa, sinin ja kosinin summakaavoja, tarvitaan napakoordinaattimuodossa olevien kompleksilukujen kertolaskun todistuksessa sekä myöhemmin vielä kolmannen asteen yhtälön Casus irreducibilis-tilanteessa.

Lemma 1.15. *Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

ja

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Todistus. Todistus löytyy lähteestä [**5**] □

LAUSE 1.16. *Olkoon* $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Olkoon* $\theta_j \in arg(z_j), j = 1, 2$, *ts.*

$$z_j = |z_j|(\cos\theta_j + i\sin\theta_j).$$

Tällöin

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

TODISTUS. Trigonometristen funktioiden summakaavoja käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

□

Edellisestä lauseesta saadaan tutut de Moivren kaavat, joita tullaan tarvitsemaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavassa. Siinä kompleksiluku on kerrottu itsensä kanssa n kertaa.

LAUSE 1.17. *Olkoon* $\theta \in \mathbb{R}$. *Kun* $n \in \mathbb{N}$ *ja* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, *on voimassa*

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

De Moivren kaavan avulla saadaan selville, kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $w^n = z$,missä z on annettu luku. Niitä on tasan n kappaletta. Seuraava lause kertoo, miten ratkaisut löydetään helposti.

LAUSE 1.18. *Olkoon* $z \in \mathbb{C}, z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), z \neq 0$ *ja* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Tällöin yhtälölle*

$$w^n = z$$

on täsmälleen n *eri ratkaisua*

$$w = w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{\theta+2k\pi}{n})),$$

missä $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

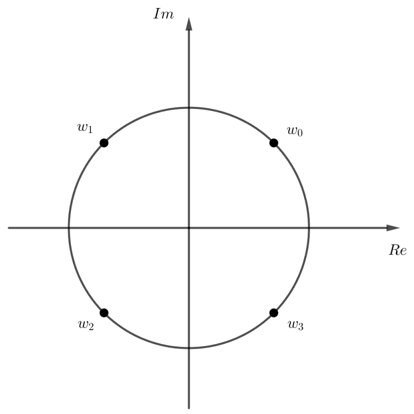
ESIMERKKI 1.19. Ratkaise yhtälön $w^4 + 16 = 0$ juuret. Nyt $w^4 = -16$, joten $\sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{|16|} = 2$ sekä $\theta = \pi$. Juuret ovat täten muotoa

$$w_k = 2(\cos(\tfrac{\pi+2k\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi+2k\pi}{4})),$$

missä $k = 0, 1, 2, 3$. Tällöin juuriksi saadaan

$$\begin{aligned} w_0 &= 2(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ w_1 &= 2(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ w_2 &= 2(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ w_3 &= 2(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Juuret sijaitsevat tasaisin välein origokeskeisen, 2-säteisen ympyrän kehällä.



Kuva 1.4. Yhtälön $w^4 + 16 = 0$ juuret ympyrän kehällä.

Seuraava esimerkki on vastaavanlainen kuin edellinen esimerkki, mutta sen yksi juurista on oleellinen kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan todistuksessa.

Esimerkki 1.20. Ratkaise yhtälön $w^3 - 1 = 0$ juuret. Nyt $w^3 = 1$, joten $\sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{|1|} = 1$ sekä $\theta = 0$. Juuret ovat täten muotoa

$$w_k = (\cos(\tfrac{2k\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2k\pi}{3})),$$

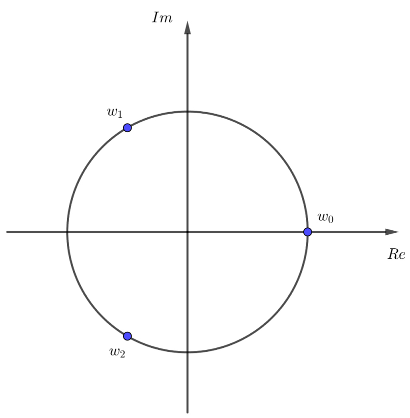
missä $k = 0, 1, 2$. Tällöin juuriksi saadaan

$$w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$w_1 = \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Juuret sijaitsevat tasaisin välein origokeskeisen, 1-säteisen ympyrän kehällä.



Kuva 1.5. Yhtälön $w^3 - 1 = 0$ juuret ympyrän kehällä.

Huom! Jatkossa tullaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavoissa tarvitsemaan lukua $\zeta \in \mathbb{C}$, joka on eräs ykkösen kolmas juuri. Merkitään sitä

$$\zeta = \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} = \tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

1.2. Trigonometriset summakaavat

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavoissa päädytään tilanteeseen, jossa kompleksiluvusta täytyy ottaa kuutiojuuri. Tätä kutsutaan Casus irreducibilis-tilanteeksi. Kuutiojuurenotto voidaan välttää kosinin kolminkertaisen kulman kaavan avulla.

LAUSE 1.21. *Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

TODISTUS. Todistus saadaan käyttämällä kosinin summakaavaa ja tietoa, että $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ ja $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ sekä $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Nyt

$$\cos(3x) = \cos(x+2x) = \cos x(2\cos^2 - 1) - \sin x(2\sin x\cos x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

$\square$

LUKU 2

Toisen asteen yhtälö

Tässä luvussa tarkastellaan, kuinka toisen asteen reaali- ja kompleksikertoimisia yhtälöitä voidaan ratkaista. Ensiksi käydään läpi reaalikertoiminen toisen asteen yhtälö, kunnes toisen asteen yhtälön ratkaisukaava voidaan yleistää kompleksikertoimisen yhtälön tapaukseen. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava sisältää diskriminantin, joka kertoo, kuinka monta reaalista ja kompleksista ratkaisua toisen asteen yhtälöllä on. Muistettavaa on se, että se ei kerro ratkaisuja vaan vain ratkaisujen määrän ja laadun. Toisen asteen polynomin juurilla ja kertoimilla on yhteys, joita kutsutaan Vietan kaavoiksi.

2.1. Reaalikertoiminen toisen asteen yhtälö

Reaalikertoimisen toisen asteen yhtälön ratkaisukaava on jokaiselle lukiolaiselle tuttu tai pitäisi ainakin olla. Se esiintyy monien eri aihepiirien yhteydessä ja on hyödyllinen muistaa. Toisen asteen yhtälöt voivat tietenkin joissakin erikoistapauksissa ratketa helposti ilman ratkaisukaavaa, muun muassa jonkin juuren ollessa helposti arvattavissa tai yhtälön ollessa vaillinainen. Palautetaan mieleen myös toisen asteen yhtälön diskriminantin ominaisuudet. Vaikka tässä kappaleessa yhtälö onkin reaalikertoiminen, saattavat sen ratkaisut olla kompleksisia.

Määritelmä 2.1. Toisen asteen reaalikertoiminen polynomiyhtälö on muotoa

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

missä $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$.

Näytetään seuraavan esimerkin avulla, kuinka toisen asteen yhtälön ratkaisut saadaan selville ilman ratkaisukaavaa. Tätä tapaa kutsutaan arvaamiseksi.

Esimerkki 2.2. Ratkaise toisen asteen yhtälön $x^2 + 2x - 3 = 0$ juuret. Arvataan, että eräs ratkaisu on $x = 1$. Se on yhtälön yksi juuri, koska sijoittamalla $x = 1$ yhtälöön yhtälö toteutuu. Tällöin toisen asteen polynomi on jaollinen binomilla $(x - 1)$, mikä seuraa Algebran peruslauseesta. Algebran peruslause on tarkemmin esitelty luvussa 4. Jakamalla toisen asteen yhtälö tällä binomilla, saadaan

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) = 0.$$

Näin ollen yhtälön juuret ovat $x = 1$ ja $x = -3$.

Joskus saattaa olla hieman hankalaa arvata oikein yhtälön jokin juuri, joten apuna voi käyttää jo lukiosta tuttua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

LAUSE 2.3. *Jos* $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$, *niin toisen asteen polynomiyhtälön*

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

ratkaisut ovat

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \text{ ja } x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Huom! Toisen asteen asteen yhtälön ratkaisut voivat olla joko reaalisia tai kompleksisia.

Ratkaistaan edellisen esimerkin yhtälö ratkaisukaavojen avulle.

ESIMERKKI 2.4. Ratkaise yhtälön $x^2 + 2x - 3 = 0$ juuret. Tehdään sijoitus toisen asteen yhtälön kaavoihin. Saadaan, että

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = 1$$

ja

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = -3.$$

Ratkaisukaavojen avulla juuret saadaan mekaanisesti ratkaistua ilman, että täytyy arvata jokin juuri. Joissakin tapauksissa on järkevämpää jättää käyttämättä ratkaisukaavoja kuten esimerkiksi silloin kun toisen asteen yhtälö on vaillinainen. Esimerkiksi jos $a_1 = 0$, niin yhtälö supistuu muotoon $a_2x^2 + a_0 = 0$ ja toisen asteen yhtälö saadaan helposti ratkaistua ilman ratkaisukaavaa.

ESIMERKKI 2.5. Ratkaise yhtälön $x^2 - 4 = 0$ juuret.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Yhtälön juuret ovat siis 2 ja -2.

Toisen asteen polynomi voidaan jakaa tekijöihin ryhmittelemällä tai nollakohtien avulla. Tämä seuraa Algebran peruslauseesta:

LAUSE 2.6. *Olkoon* $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *toisen asteen polynomi. Täsmälleen yksi seuraavista kohdista pitää paikkansa*

- *Polynomilla on kaksi eri suurta reaalista juurta* x_1 *ja* x_2. *Tällöin polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti*

$$f(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2).$$

- *Polynomilla on vain yksi juuri a. Tällöin yhtälö voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti*
$$f(x) = a_2(x - a_1)^2.$$
- *Polynomilla on kaksi erisuurta kompleksista juurta r ja $\bar{r}$. Tällöin yhtälö voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti*
$$f(x) = a_2(x - r)(x - \bar{r}).$$

Huom! Toisen asteen yhtälölle ei siis välttämättä ole yhtään (reaalista) juurta x.

Esimerkki 2.7. Toisen asteen yhtälön $x^2+2x-3 = 0$ tapauksessa yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^2 + 2x - 3 = 1(x - 1)(x - (-3)) = (x - 1)(x + 3),$$

kun 1 ja -3 ovat yhtälön juuret.

Nyt olemme nähneet toisen asteen yhtälön erilaisia ratkaisutapoja ja seuraavaksi palautetaan mieleen, mikä on diskriminantti ja mitä se kertoo toisen asteen yhtälöstä.

Määritelmä 2.8. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavassa neliöjuuren alla olevaa lauseketta $D = a_1^2 - 4a_2a_0$ kutsutaan diskriminantiksi.

Diskriminantti kertoo toisen asteen yhtälön juurten laadun. Kun

- $D > 0$: Yhtälöllä on kaksi reaalista juurta.
- $D = 0$: Yhtälöllä on tasan yksi reaalinen juuri.
- $D < 0$: Yhtälöllä on kaksi kompleksista juurta ja ne ovat toistensa kompleksikonjugaatteja eli liittolukuja.

Esimerkki 2.9. Toisen asteen yhtälöllä $-2x^2 + 2x - 3 = 0$ on kaksi kompleksista juurta, koska

$$\begin{aligned} D &= a_1^2 - 4a_2a_0 \\ &= 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) \\ &= -20 < 0. \end{aligned}$$

Yhtälön juuret ovat

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2 + \sqrt{-20}}{-4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}$$

ja

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2 - \sqrt{-20}}{-4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Juuriksi saatiin kaksi kompleksilukua ja ne ovat toistensa liittoluvut niinkuin kuuluukin olla.

Toisen asteen yhtälön diskriminantti D voidaan esittää juurien avulla. Merkataan tätä $\triangle$.

Lause 2.10. *Olkoon a_1 ja a_0 reaalilukuja ja r_1 ja r_2 toisen asteen yhtälön $x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (reaaliset tai kompleksiset) juuret. Tällöin diskriminantti*

$$\triangle = (r_1 - r_2)^2.$$

Todistus. Nyt r_1 ja r_2 ovat toisen asteen yhtälön $x^2 + a_1x + a_0 = 0$ juuret. Tällöin voidaan kirjoittaa, että

$$\begin{aligned} x^2 + a_1x + a_0 &= (x - r_1)(x - r_2) \\ &= x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2 \\ &= x^2 + x(-(r_1 + r_2)) + r_1r_2 = 0. \end{aligned}$$

Tästä saadaan, että

$$a_1 = -(r_1 + r_2) \text{ ja } a_0 = r_1r_2.$$

Nyt

$$\begin{aligned} (r_1 - r_2)^2 &= r_1^2 - 2r_1r_2 - r_2^2 \\ &= (r_1 - r_2)^2 - 2r_1r_2 - 2r_1r_2 \\ &= (r_1 - r_2)^2 - 4r_1r_2 \\ &= a_1^2 - 4a_0. \end{aligned}$$

Saatiin siis diskriminantti D. □

Löydettiin siis diskriminantille kaksi eri määritelmää. Määritelmistä jälkimmäinen on helppo yleistää korkeamman asteen polynomiyhtälölle. Luvussa 4 määritelläänkin n-asteisen polynomin diskriminantti.

2.2. Kompleksilukukertoiminen toisen asteen yhtälö

Edellä on tarkasteltu toisen asteen yhtälöä, jonka kertoimet ovat reaalisia. Mutta entäpä, jos toisen asteen yhtälön kertoimet ovatkin kompleksisia? Millaisia ovat silloin sen ratkaisut? Tässä kappaleessa tarkastellaan toisen asteen yhtälöä, jonka kertoimet ovat kompleksisia ja sen ominaisuuksia.

Määritelmä 2.11. Toisen asteen kompleksilukukertoiminen polynomiyhtälö on muotoa

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

missä $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}, a_2 \neq 0$.

Ensimmäisessä kappaleessa selvisi, että jokaiselle kompleksiluvulla on n.juuri ja juuria on tasan n kappaletta. Näin ollen jokaiselle nollasta eroavalla kompleksiluvulla on kaksi kompleksista neliöjuurta.

Lause 2.12. *Jos $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, niin on olemassa kompleksiluku w siten, että $w^2 = z$, ts. jokaisella kompleksiluvulla on kompleksinen neliöjuuri. Näitä on kaksi kappaletta, w ja $-w$.*

Nyt voidaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaava yleistää kompleksikertoimisen yhtälön tapaukseen.

LAUSE 2.13. *Jokaisella kompleksikertoimisella toisen asteen polynomiyhtälöllä $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_2 \neq 0$ on juuri kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$ ja juuret saadaan kaavalla*

$$x = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Huom! Neliöjuurenotto kompleksiluvusta antaa kaksi juurta, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja.

TODISTUS. Täydennetään toisen asteen polynomi neliöksi ja ratkaistaan yhtälö sen avulla.

$$\begin{aligned}
a_2x^2 + a_1x + a_0 &= 0 \\
a_2x^2 + a_1x &= -a_0 \\
4a_2^2x^2 + 4a_2a_1x &= -4a_2a_0 \\
4a_2^2x^2 + 4a_2a_1x + a_1^2 &= a_1^2 - 4a_2a_0 \\
(2a_2x + a_1)^2 &= a_1^2 - 4a_2a_0 \\
2a_2x + a_1 &= \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} \\
2a_2x &= -a_1\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} \\
x &= \frac{-a_1\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.
\end{aligned}$$

□

Kompleksikertoiminen toisen asteen polynomi voidaan kirjoittaa juuriensa avulla seuraavanlaisesti.

LAUSE 2.14. *Olkoon b ja c kompleksilukuja. Tällöin on olemassa kompleksiluvut z_1 ja z_2 siten, että*

$$x^2 + bx + c = (x - z_1)(x - z_2).$$

ESIMERKKI 2.15. Kompleksikertoimisen polynomiyhtälön $x^2 - 5ix - 6 = 0$ juuret ovat

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-(-5i) + \sqrt{(-5i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{5i + \sqrt{25i^2 - 24}}{2} \\
&= \frac{5i + \sqrt{-25 + 24}}{2} \\
&= \frac{5i + \sqrt{-1}}{2} \\
&= \frac{5i + i}{2} = 3i
\end{aligned}$$

ja toiseksi ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5i - i}{2} \\ &= 2i. \end{aligned}$$

Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $x^2 - 5ix - 6 = (x - 3i)(x - 2i) = 0$.

Edellisessä esimerkissä kävi hyvin, kun diskriminantista tuli reaalinen, mutta entäpä jos diskriminantti on kompleksinen?

Esimerkki 2.16. Ratkaise polynomin $f(x) = x^2 + 2x + \sqrt{3}i$ juuret. Nyt

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}i}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 + \sqrt{4 - 4\sqrt{3}i}}{2} \\ &= \frac{-2 + \sqrt{4(1 - \sqrt{3}i)}}{2} \\ &= \frac{-2 + 2\sqrt{(1 - \sqrt{3}i)}}{2} \\ &= -1 + \sqrt{1 - \sqrt{3}i}. \end{aligned}$$

Nyt täytyy kompleksiluvusta $z = 1 - \sqrt{3}i$ ottaa neliöjuuri, joten täytyy käyttää De Moivren kaavaa. Moduliksi saadaan $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ ja argumentiksi

$$\theta = \arccos \frac{1}{2},$$

joten arkuskosinia vastaava kulma on

$$\theta = \frac{\pi}{3} + n2\pi \text{ tai } \theta = -\frac{\pi}{3} + n2\pi.$$

Lasketaan arkussiniä vastaava kulma vastaavasti

$$\theta = \arcsin \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

joten arkusiniä vastaavat kulma on

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + n2\pi \text{ tai } \theta = \frac{4\pi}{3} + n2\pi.$$

Nyt siis $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ja polaariesitykseksi saadaan

$$z = 2(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{3})).$$

Juuret ovat täten muotoa

$$w_k = \sqrt{|2|}(\cos(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}) + \sin(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2})), \text{ missä } k = 0, 1.$$

Juuret ovat

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{|2|}(\cos(\tfrac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\pi}{2})) \\ &= \sqrt{|2|}(\cos(\tfrac{-\frac{\pi}{3}}{2}) + i\sin(\tfrac{-\frac{\pi}{3}}{2})) \\ &= \sqrt{|2|}(\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{6})) \\ &= \sqrt{|2|}(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i) \\ &= \tfrac{\sqrt{6}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{|2|}(\cos(\tfrac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\pi}{2}) + \sin(\tfrac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\pi}{2})) \\ &= \sqrt{|2|}(\cos(\tfrac{5\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{5\pi}{6})) \\ &= \sqrt{|2|}(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i) \\ &= -\tfrac{\sqrt{6}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i. \end{aligned}$$

Polynomiyhtälön juuriksi saadaan

$$x_1 = -1 + (\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = (-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

ja

$$x_2 = -1 + (-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = (-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Jos polynomissa kaikki kertoimet ovat imaginaariset, voidaan yhteiseksi tekijäksi ottaa i. Tällöin juuret saadaan ratkaistua ratkaisukaavalla.

Esimerkki 2.17. Ratkaise polynomin $f(x) = 2ix^2 - ix - i$ juuret. Nyt

$$f(x) = 2ix^2 - ix - i = i(2x^2 - x - 1) = 0.$$

Yhtälö toteutuu, kun $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 1$.

(Reaali- ja kompleksilukukertoimisen) toisen asteen yhtälön juurilla on yhteys sen kertoimiin, sillä juurten tulolle ja summalle pätevät seuraavat kaavat, joita kutsutaan Vietan kaavoiksi. Niitä tullaan tarvitsemaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisemisessa.

Lause 2.18. *Olkoot $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ polynomin $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ juuret, silloin*

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

ja

$$x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Todistus. Olkoon x_1 ja x_2 toisen asteen yhtälön $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ ratkaisut. Nyt

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} + \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \\ &= \frac{-a_1 - a_1}{2a_2} = \frac{-2a_1}{2a_2} = -\frac{a_1}{a_2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}\right) \cdot \left(\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}\right) \\ &= \frac{(-a_1)^2 - (\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0})^2}{4a_2^2} \\ &= \frac{(-a_1)^2 - (a_1^2 - 4a_2a_0)}{4a_2^2} \\ &= \frac{a_1^2 - a_1^2 + 4a_2a_0}{4a_2^2} = \frac{4a_2a_0}{4a_2^2} = \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.19. Ratkaise toisen asteen yhtälön $x^2 - 9x + 20 = 0$ juuret Vietan kaavojen avulla.

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön kertoimet Vietan kaavaan ja saadaan näin ollen yhtälöpari:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{-9}{1} = 9 \\ x_1x_2 &= \frac{20}{1} = 20. \end{aligned}$$

Vietan kaavoista "nähdään" selvästi, että juuret ovat $x_1 = 4$ ja $x_2 = 5$. Ne tosiaan ovat oikeat, koska sijoitettaessa ne toisen asteen yhtälöön, yhtälö toteutuu.

Edellisessä esimerkissä kävi hyvin ja juuret nähtiin helposti, mutta näin ei aina käy. Vietan kaavat eivät ole juurien ratkaisemiseen paras mahdollinen keino, koska ratkaistaessa juuria se palautuu toisen asteen yhtälöksi. Tällöin täytyisi käyttää toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Miksi sitä ei tekisi sitten heti aluksi? Parempi keino käyttää Vietan kaavoja on esimerkiksi ratkaista polynomi, jonka juuret ovat tiedossa. Tähänkin löytyy parempia keinoja, mutta tässä tutkielmassa niitä ei tarvita.

Esimerkki 2.20. Muodosta Vietan kaavojen avulla polynomi, jonka juuret ovat 1 ja -3. Haetaan polynomia muodossa $x^2 + a_1x + a_0$ eli $a_2 = 1$, jolloin Vietan kaavat supistuvat yksinkertaisempaan muotoon. Nyt

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a_1 \\ x_1x_2 &= a_0. \end{aligned}$$

Kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned} a_1 &= -(1 + (-3)) = 2 \\ a_0 &= 1 \cdot (-3) = -3. \end{aligned}$$

Polynomiksi saadaan $x^2 + 2x - 3$.

LUKU 3

Kolmannen asteen yhtälö

Tässä luvussa tutustutaan erilaisiin keinoihin ratkaista kolmannen asteen yhtälön juuret. Lukiossa kolmannen asteen yhtälöitä ratkotaan arvaamalla ensimmäinen juuri ja käyttämällä sen jälkeen jakokulmaa. Tällöin vaillinaiseksi osamääräksi saadaan toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut saadaan ratkaisukaavalla. Arvaaminen saattaa kuitenkin osoittautua hieman hankalaksi ja tarvitaan muita keinoja. Tällöin kolmannen asteen yhtälö voidaan ratkaista kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, Cardanon kaavoilla. Myös Cardanon kaavat sisältävät diskriminantin, jonka arvosta saadaan selville juurien määrä ja laatu. Diskriminantin ollessa negatiivinen päädytään Casus irreducibilis-tilanteeseen, jossa kompleksiluvusta täytyy ottaa kuutiojuuri. Tämä onnistuu tutulla De Moivren kaavalla. Kuutiojuurenotto voidaan kyllä välttää käyttämällä hyväksi kosinin kolminkertaisen kulman kaavaa. Tässä luvussa esitellään myös eräs vähemmin tunnettu tapa, jolla saadaan kolmannen asteen yhtälö ratkaistua. Sitä voidaan kutsua determinanttimenetelmäksi.

3.1. Kolmannen asteen yhtälön helppoja ratkaisutapoja

Tässä kappaleessa näytetään kuinka kolmannen asteen yhtälöitä voidaan ratkaista erikoistapauksissa sekä kuinka juuret saadaan selville arvaamalla. Määritellään ensiksi kolmannen asteen polynomiyhtälö ja katsotaan sen muutama ominaisuus.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Kolmannen asteen polynomiyhtälö on muotoa

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

missä $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0$.

Toisen asteen polynomiyhtälöllä ei välttämättä ole yhtään reaalista juurta, mutta kolmannen asteen polynomilla on ainakin yksi reaalijuuri.

LAUSE 3.2. *Olkoon f(x) kolmannen asteen polynomi. Tällöin löytyy aina reaaliluku a siten, että $f(a) = 0$.*

TODISTUS. Tarkastellaan yhtälöä $f(x) = 0$ eli $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Ilman yleisyyden menetystä voidaan olettaa, että $a_3 > 0$ (jos $a_3 < 0$, päättely menee oleellisesti samalla tavalla). Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

ja

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Koska f on jatkuva, niin Bolzanon lauseen ja edellä laskettujen raja-arvojen perusteella sillä on ainakin yksi nollakohta. □

Koska kolmannen asteen polynomille löytyy aina yksi reaalinen juuri a, niin tällöin jaettaessa polynomi binomilla $(x-a)$ saadaan jakojäännökseksi alkuperäistä polynomia yksi aste alempi polynomi eli toisen asteen polynomi. Täten kolmannen asteen polynomi voidaan aina esittää ensimmäisen ja toisen asteen polynomin avulla. Loput juuret ratkeavat helposti toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

LAUSE 3.3. *Olkoon* $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *kolmannen asteen polynomi ja* a *sen reaalijuuri. Tällöin* $f(x)$ *voidaan esittää muodossa*

$$f(x) = (x-a)(b_2x^2 + b_1x + b_0),$$

missä $b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{R}, b_2 \neq 0$.

TODISTUS. Lauseen 3.2 nojalla on olemassa reaaliluku a ja Algebran peruslauseen nojalla polynomi f on jaollinen binomilla $(x-a)$. Tällöin polynomien jakoyhtälöstä saadaan

$$\frac{f(x)}{x-a} = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x-a} = (b_2x^2 + b_1x + b_0).$$

□

Seuraavaksi esimerkki tästä ratkaisutavasta.

ESIMERKKI 3.4. Kolmannen asteen polynomiyhtälön $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ yksi juuri on 1. Polynomi voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2 - 2x - 1).$$

Toisen asteen yhtälön juuriksi saadaan

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1} = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

ja

$$x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1} = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

Kolmannen asteen polynomiyhtälön juuret ovat 1, $1+\sqrt{2}$ ja $1-\sqrt{2}$.

Kolmannen asteen polynomi voidaan esittää juuriensa avulla.

LAUSE 3.5. *Olkoon* $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *kolmannen asteen polynomi. Täsmälleen yksi seuraavista kohdista pitää paikkansa*

- *Polynomilla on yksi kolminkertainen reaalinen juuri* x_1. *Tällöin polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti*

$$f(x) = a_3(x-x_1)^3.$$

- *Polynomilla on kaksi erisuurta reaalista juurta* x_1 *ja* x_2, *joista* x_2 *on kaksinkertainen juuri. Tällöin polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti*

$$f(x) = a_3(x-x_1)(x-x_2)^2.$$

- *Polynomilla on kolme erisuurta reaalista juurta x_1, x_2 ja x_3. Tällöin polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti*

$$f(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

- *Polynomilla on yksinkertainen reaalijuuri x_1. Tällöin polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti*

$$f(x) = a_3(x - x_1)s(x)$$

missä $s(x)$ on toisen asteen polynomi, jolla ei ole reaalisia nollakohtia.

Huom! Tällöin juurina on x_1 ja kompleksikonjugaatit z ja $\bar{z}$.

$$f(x) = a_3(x - x_1)(x - z)(x - \bar{z})$$

Kolmannen asteen yhtälöllä on täsmälleen kolme kompleksista juurta ja polynomi voidaan esittää tulomuodossa juuriensa avulla.

Lause 3.6. *Olkoon $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ kolmannen asteen polynomin $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ juuria. Tällöin*

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Edellä on nähty, kuinka polynomiyhtälö voidaan ratkaista arvaamalla. Näytetään seuraavaksi, kuinka kolmannen asteen polynomiyhtälö voidaan ratkaista ryhmittelemällä tekijät.

Esimerkki 3.7. Ratkaise yhtälön $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ juuret ryhmittelemällä. Huomataan, että kahdesta ensimmäisestä termistä voidaan ottaa tekijäksi x^2 ja lopuista luku 4. Saadaan, että

$$x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0.$$

Nyt voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi $(x + 1)$ ja saadaan polynomi muotoon

$$(x^2 - 4)(x + 1) = 0.$$

Polynomiyhtälö toteutuu, kun $x = -1$ tai $x = \pm 2$. Polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä seuraavanlaisesti

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x + 2)(x - 2).$$

Tähän mennessä kolmannen asteen yhtälö on saatu ratkaistua ryhmittelemällä tekijät sekä arvaamalla. Kolmannen asteen yhtälö voi olla vaillinainen eli joku sen kertoimista voi olla nolla, mutta tietenkin $a_3 \neq 0$. Katsotaan ensiksi tapaus, jossa kolmannen asteen yhtälössä $a_2, a_1 = 0$. Yhtälö supistuu tällöin muotoon $a_3x^3 + a_0 = 0$, joka on vastaavanlaisesti ratkaistavissa kuin toisen asteen yhtälö Esimerkissä 2.5, mutta ratkaisuun tarvitaan neliöjuuren sijaan kuutiojuurta.

Esimerkki 3.8. Ratkaise kolmannen asteen yhtälön $x^3 - 8 = 0$ juuret.

$$\begin{aligned}x^3 - 8 &= 0\\ x^3 &= 8\\ x &= \sqrt[3]{8}\\ x &= 2\end{aligned}$$

Yhtälön kolminkertainen juuri on 2. Polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä

$$x^3 - 8 = (x-2)^3 = 0.$$

Jos kolmannen asteen yhtälössä $a_0 = 0$, yhtälö supistuu muotoon $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = 0$. Tällöin tekijäksi voidaan ottaa x, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = x(a_3x^2 + a_2x + a_1) = 0.$$

Polynomiyhtälö totetutuu silloin kun $x = 0$ tai $(a_3x^2 + a_2x + a_1) = 0$. Toisen asteen yhtälön juuret saadaan ratkaistua ratkaisukaavalla.

Esimerkki 3.9. Ratkaistaan kolmannen asteen polynomin $x^3 + 2x^2 - 3x$ juuret. Kolmannen asteen polynomi voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3).$$

Esimerkin 2.4 avulla nähtiin, että toisen asteen yhtälön juuret ovat 1 ja -3. Kolmannen asteen polynomin juuret ovat siis 1, -3 ja 0. Polynomi voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^3 + 2x^2 - 3x = (x-0)(x-1)(x-3) = x(x-1)(x-3).$$

Edellisestä kappaleesta tutut Vietan kaavat pätevät myös kolmannen asteen yhtälöön. Seuraava lause kertoo kolmannen asteen yhtälön juurien yhteyden yhtälön kertoimiin.

Lause 3.10. *Olkoot $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ polynomin $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ nollakohdat eli juuret, silloin*

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3) &= -\frac{a_2}{a_3},\\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{a_1}{a_3}\end{aligned}$$

ja

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Todistus. Olkoon x_1, x_2 ja x_3 kolmannen asteen yhtälön $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ juuret. Tällöin

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) &= (x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)(x - x_3)\\ &= x^3 - x^2x_2 - x^2x_1 + x_1x_2x - x^2x_3 + xx_2x_3 + xx_1x_3 - x_1x_2x_3\\ &= x^3 + x^2(-x_1 - x_2 - x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Nyt

$$x^3 + x^2(-x_1 - x_2 - x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 = x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3},$$

josta saadaan, että

$$(x_1 + x_2 + x_3) = -\frac{a_2}{a_3},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_1}{a_3}$$

ja

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

□

Edellisessä luvussa huomattiin, että Vietan kaavat eivät ole paras mahdollinen keino etsiä yhtälön juuria. Seuraavaksi esimerkki, jossa täytyy määrittää kolmannen asteen polynomi, kun juuret tiedetään.

Esimerkki 3.11. Etsi kolmannen asteen polynomi $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, jonka juuret ovat $-3, 2$ ja 7. Valitaan $a_3 = 1$, jolloin Vietan kaavat supistuvat yksinkertaisempaan muotoon. Siten polynomin kertoimiksi saadaan

$$a_2 = -(-3 + 2 + 7) = -6,$$

$$a_1 = -3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 7 \cdot (-3) = -13$$

ja

$$a_0 = -(-3) \cdot 2 \cdot 7 = 42.$$

Kolmannen asteen polynomi on $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$.

Edellä on esitetty muutamia erilaisia tapoja ratkaista kolmannen asteen yhtälön juuret, mutta aina ei päästä näin helpolla. Silloin on otettava käyttöön toisenlaiset ratkaisukeinot. Seuraavaksi päästään tutustumaan Cardanon kaavoihin, joiden avulla jokainen kolmannen asteen polynomiyhtälö voidaan ratkaista.

3.2. Cardanon kaavat

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavojen historia on mielenkiintoinen. Vaikka ratkaisukaavoja kutsutaan Cardanon kaavoiksi, Cardano ei itse keksinyt niitä. Hän kylläkin kehitti ratkaisukaavoja ja ratkaisi apulaisensa, Ferrarin, kanssa neljännen asteen yhtälön ratkaisukaavatkin. Näitä kutsutaan Ferrarin kaavoiksi, mutta niihin ei tässä tutkielmassa perehdytä.

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan takana on Fontano, joka luovutti ratkaisukaavan runomuodossa Cardanolle paremman työpaikan toivossa. Cardano lupasi olla paljastamatta ratkaisua kenellekään. Cardano huomasi kaavojen ongelman, jossa negatiivisesta luvusta täytyy ottaa neliöjuuri. Cardano kysyi neuvoa Fontanolta, mutta tämä vastasi vaikeaselkoisesti, koska halusi harhauttaa Cardanoa. Hän kuitenkin onnistui päättelemään, kuinka ongelma ratkaistaan.

Lupauksesta piittaamatta Cardano julkaisi kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan omassa teoksessaan, jolloin Fontano raivostui. Hän kirjoitti loukkaavia kommentteja Cardanosta, jolloin Ferrari suuttui. Hän haastoi Fontanon "kaksintaisteluun", jossa täytyi ratkaista kolmannen ja neljännen asteen yhtälöitä. Fontano kieltäytyi tästä halutessaan haastaa vain Cardanon. Kuitenkin kuullessaan hyvästä työpaikasta Bresciassa Fontano ajatteli näyttää taitonsa suostumalla Ferrarin haasteeseen.

Fontano huomasi ensimmäisenä haastepäivänä, että Ferrari osasi ratkaista yhtälöitä paremmin kuin hän itse. Niinpä hän häpeän pelossa poistui paikalta salaa yön aikana. Vaikka Fontano oli alun perin kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan keksijä, hän joutui elämään loppuelämänsä köyhyydessä. Haasteeseen osallistumisen takia hänelle ei enää ensimmäisen vuoden jälkeen maksettu Bresciassa palkkaa. Cardano sen sijaan oli arvostettu matemaatikko ja lääkäri.

Fontano esitti kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan runona.

Kun kuutio ja asiat yhdessä
Ovat yhtä kuin jokin hienovarainen luku,
Etsi kaksi muuta lukua, jotka eroavat siitä.
Sitten otat tavaksesi
Että niiden tulo on aina sama
Kuin kolmannen asian kuutio.
Loput ovat sitten aina
Vähennettyinä kuutiojuuristaan
Saman suuruisia kuin tärkein asia
Näistä näytöksissä toisessa,
Ja kun kuutio on yksin,
Huomaat nämä muut yhtäläisyydet:
Jaat heti luvun kahteen osaan
Niin että yksi kerrottuna toisella tuottaa selvästi
Täsmälleen kolmannen asian kuution.
Sitten näistä kahdesta osasta
Otetaan kuutiojuuret ja lasketaan yhteen,
Ja tämä summa on ajatuksesi.
Kolmas näistä laskuistamme
Ratkeaa toisen avulla jos olet huolellinen,
Sillä ne vastaavat melkein toisiaan luonnostaan.
Nämä asiat sain tietää, enkä laiskoin askelin,
Vuonna tuhat viisisataa kolmekymmentä ja neljä.
Vahvoin ja tukevin perustein
Meren vyöttämässä kaupungissa.

Selvyyden vuoksi johdetaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavat matemaattisesti.

Lähdetään tarkastelemaan yhtälöä $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0, a_3 \neq 0$. Voimme olettaa, että $a_3 = 1$. Voimme jakaa sillä yhtälön molemmat puolet ja näin ollen yhtälö muotoutuu yksinkertaisempaan muotoon. Sijoittamalla yhtälöön $z = x - \frac{a_2}{3}$ saadaan eliminoitua toisen asteen termi. Nyt

$$\begin{aligned}
a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 &= (x - \frac{a_2}{3})^3 + a_2(x - \frac{a_2}{3})^2 + a_1(x - \frac{a_2}{3}) + a_0 \\
&= (x - \frac{a_2}{3})(x^2 - \frac{2xa_2}{3} + \frac{a_2^2}{9}) + a_2(x^2 - \frac{2xa_2}{3} + \frac{a_2^2}{9}) \\
&\quad + a_1(x - \frac{a_2}{3}) + a_0 \\
&= x^3 - \frac{2x^2a_2}{3} + \frac{xa_2^2}{9} - \frac{x^2a_2}{3} + \frac{2xa_2^2}{9} - \frac{a_2^3}{27} \\
&\quad + a_2x^2 - \frac{2xa_2^2}{3} + \frac{a_2^3}{9} + a_1x - \frac{a_1a_2}{3} + a_0 \\
&= x^3 + x(a_1 - \frac{a_2^2}{3}) + a_0 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2a_2^3}{27}.
\end{aligned}$$

Yksinkertaistetaan muotoa merkkaamalla kertoimiksi

$$p = a_1 - \frac{a_2^2}{3} \text{ ja } q = a_0 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2a_2^3}{27}.$$

Alkuperäinen yhtälö saadaan supistettuun muotoon, jossa ei ole enää toisen asteen termiä

$$x^3 + px + q = 0.$$

Sijoitetaan tämän jälkeen yhtälöön $x = u + v$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
x^3 + px + q &= (u + v)^3 + p(u + v) + q \\
&= (u + v)(u^2 + 2uv + v^2) + pu + pv + q \\
&= u^3 + 2u^2v + uv^2 + u^2v + 2v^2u + v^3 + pu + pv + q \\
&= (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.
\end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu ainakin, jos

$$u^3 + v^3 = -q \text{ ja } uv = -\frac{p}{3}.$$

Oikeanpuoleinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $u^3v^3 = (-\frac{p}{3})^3$, jolloin Vietan kaavojen nojalla u^3 ja v^3 ovat toisen asteen yhtälön

$$w^2 + qw - (\frac{p}{3})^3 = 0$$

ratkaisuja. Tästä eteenpäin yhtälö osataan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavoja käyttäen. Saadaan, että

$$w_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4(\frac{p}{3})^3}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ja

$$w_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4(\frac{p}{3})^3}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat siis u^3 ja v^3 eli $u^3 = w_1$ sekä $v^3 = w_2$, joten

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ja

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Niinpä

$$u^3 + v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -q$$

ja

$$u^3v^3 = \Big(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\Big) \cdot \Big(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\Big) = -\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Siispä $u+v$ on yksi yhtälön $x^3+px+q=0$ ratkaisu. Onko yhtälöllä muita ratkaisuja? Kompleksilukujen ominaisuuksista selvisi, että yhtälöllä $w^n = z$ on täsmälleen n eri ratkaisua kompleksilukujen joukossa, joten molemmille muuttujille u sekä v saadaan kolme ratkaisua $u, \zeta u, \zeta^2 u$ ja $v, \zeta v, \zeta^2 v$, missä ζ on eräs ykkösen kolmas juuri ($\zeta^3 = 1$, $\zeta = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.). Tällöin jos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

niin myöskin

$$(\zeta u)^3 = \zeta^3 u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{ja}$$
$$(\zeta^2 u)^3 = \zeta^6 u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Täten ehdon $u^3v^3 = -(\frac{p}{3})^3$ toteuttavia ratkaisupareja (u, v) on yhdeksän. On muistettava, että lisäksi halutaan, että $uv = -\frac{p}{3}$. Jos nyt (u_0, v) on jokin ratkaisu, niin se täyttää ehdon

$$(u_0 v)^3 = (-\frac{p}{3})^3$$

ja jonkin tuloista

$$u_0 v\,, u_0(\zeta v) \text{ tai } u_0(\zeta^2 v)$$

täytyy toteuttaa ehto $uv = -\frac{p}{3}$. Oletetaan, että toinen tulon tekijöistä on v_0. Nyt ensimmäiseksi ratkaisuksi saadaan

$$z_1 = u_0 + v_0.$$

Muut ehdon täyttävät ratkaisuparit ovat $(\zeta u_0, \zeta^2 v_0)$ ja $(\zeta^2 u_0, \zeta v_0)$, joista saadaan loput ratkaisut eli

$$z_2 = \zeta u_0 + \zeta^2 v_0 \text{ ja } z_3 = \zeta^2 u_0 + \zeta v_0.$$

Esimerkiksi ratkaisupariksi ei käy $(\zeta^2 u, \zeta^2 v)$, koska niiden tulossa on ylimääräinen ζ

$$\zeta^2 u \zeta^2 v = \zeta^4 uv = \zeta^4(-\frac{p}{3}) = \zeta\zeta^3(-\frac{p}{3}) = \zeta\zeta^3(-\frac{p}{3}) = \zeta(-\frac{p}{3}).$$

Ratkaisut voivat tietenkin olla samoja, jolloin saadaan kaksinkertainen tai kolminkertainen juuri.

Huom! Alkuperäisen yhtälön $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0, a_3 \neq 0$ ratkaisut saadaan ensimmäisen sijoituksen $z = x - \frac{a_2}{3}$ avulla.

Lause 3.12. *(Cardanon kaavat) Yhtälön*

$$z^3 + pz + q = 0, \;\; p, q \in \mathbb{C}$$

ratkaisut ovat kompleksiluvut

$$z_1 = u_0 + v_0, \;\; z_2 = \zeta u_0 + \zeta^2 v_0 \;\; ja \;\; z_3 = \zeta^2 u_0 + \zeta v_0,$$

missä

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ja

$$v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ja kuutiojuurten arvojen täytyy täyttää ehto

$$u_0 v_0 = -\frac{p}{3}.$$

Todistus. Kolmannen asteen yhtälöllä on maksimissaan kolme ratkaisua, jotka edellisellä johtamisella löydettiin eli näin ollen Cardanon kaavaa ei tässä tutkielmassa enää sen kummemmin todisteta. $\square$

Esimerkki 3.13. Ratkaise yhtälö $x^3 - 2x + 4 = 0$ Cardanon kaavojen avulla.

Nyt $p = -2$ ja $q = 4$, joten

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[3]{-\tfrac{4}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{4}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-2}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{\tfrac{100}{27}}} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt[3]{-\tfrac{4}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{4}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-2}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-2 - \sqrt{\tfrac{100}{27}}}. \end{aligned}$$

Vaadittava ehto täyttyy eli $u_0v_0 = \frac{2}{3}$. Yhtälön ratkaisuja ovat siis

$$z_1 = \sqrt[3]{-2+\sqrt{\tfrac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{\tfrac{100}{27}}} = -2,$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-2+\sqrt{\tfrac{100}{27}}} + \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt[3]{-2-\sqrt{\tfrac{100}{27}}} \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-2+\sqrt{\tfrac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{\tfrac{100}{27}}}\right) + \\
&\quad + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-2+\sqrt{\tfrac{100}{27}}} - \sqrt[3]{-2-\sqrt{\tfrac{100}{27}}}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\cdot(-2) + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1+i
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
z_3 &= \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt[3]{-2+\sqrt{\tfrac{100}{27}}} + \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-2-\sqrt{\tfrac{100}{27}}}. \\
&= 1-i.
\end{aligned}$$

Yhtälön juuret ovat siis -2, $1+i$ ja $1-i$.

MÄÄRITELMÄ 3.14. Kolmannen asteen yhtälön supistettu muoto on

$$x^3 + px + q = 0,$$

missä $p, q \in \mathbb{C}$.

Kaikki kolmannen asteen (reaali- ja) kompleksikertoimiset yhtälöt voidaan palauttaa supistettuun muotoon muuttujanvaihdon avulla. Näin ollen saadaan ratkaistua juuret Cardanon kaavojen avulla.

LAUSE 3.15. *Olkoon $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ kolmannen asteen polynomi. Muuttujanvaihdolla $x = y - \frac{a_2}{3}$ saadaan sievennettyä polynomi supistettuun muotoon*

$$x^3 + px + q,$$

missä $p = a_1 - \frac{a_2^2}{3}$ ja $q = a_0 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2a_2^3}{27}$.

Huom! Alkuperäisen polynomin juuret saadaan selville lisäämällä $-\frac{a_2}{3}$ supistetun muodon juuriin.

Esimerkki 3.16. Ratkaise yhtälön $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ juuret. Nyt $a_2 = -4$, $a_1 = 6$ ja $a_0 = -4$, joten

$$p = 6 - \frac{(-4)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

ja

$$q = -4 - \frac{(6)(-4)}{3} + \frac{2(-4)^3}{27} = -\frac{20}{27}.$$

Tällöin yhtälön supistettu muoto on

$$x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{20}{27} = 0.$$

Ratkaistaan tämä yhtälö Cardanon kaavojen avulla, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[3]{-\frac{(-\frac{20}{27})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-\frac{20}{27})}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{2}{3}}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{10}{27} + \sqrt{\frac{4}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{10}{27} + \frac{2}{3\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt[3]{-\frac{(-\frac{20}{27})}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-\frac{20}{27})}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{2}{3}}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \sqrt{\frac{4}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

ja ehto $u_0v_0 = -\frac{\frac{2}{3}}{3} = -\frac{2}{9}$ täyttyy. Supistetun yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$z_1 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{\tfrac{10}{27} + \tfrac{2}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\tfrac{10}{27} - \tfrac{2}{3\sqrt{3}}} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \zeta u_0 + \zeta^2 v_0 = \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\tfrac{10}{27} + \tfrac{2}{3\sqrt{3}}} + \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt[3]{\tfrac{10}{27} - \tfrac{2}{3\sqrt{3}}} \\ &= -\frac{1}{3} + i \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} z_3 &= \zeta u_0 + \zeta^2 v_0 = \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt[3]{\tfrac{10}{27} + \tfrac{2}{3\sqrt{3}}} + \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\tfrac{10}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}}} \\ &= -\frac{1}{3} - i. \end{aligned}$$

Alkuperäisen yhtälön juuret ovat

$$x_1 = z_1 + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2,$$

$$x_2 = z_2 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} + i + \frac{4}{3} = 1 + i$$

ja

$$x_3 = z_3 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} - i + \frac{4}{3} = 1 - i.$$

3.3. Casus irreducibilis

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisemissa Cardanolle tuli ongelmia, kun kompleksiluvusta piti ottaa kuutiojuuri. Tätä kutsutaan Casus irreducibilikseksi, joka tarkoittaa jakautumatonta tapausta. De Moivren kaavan avulla saadaan otettua kompleksiluvuista kolmas juuri trigonometriasta tuttujen kaavojen avulla. Näin ollen Cardanon kaavat säilyvät toimivina.

Seuraavassa esimerkissä näytetään, kuinka Casus irreducibilis-tilanne saadaan ratkaistua. Siinä kompleksiluvusta otetaan kuutiojuuri ensimmäisestä luvusta tuttua De Moivren kaavaa käyttämällä.

Esimerkki 3.17. Ratkaise yhtälön $x^3 - 7x + 6 = 0$ juuret. Nyt $p = -7$ ja $q = 6$, joten

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}i}. \end{aligned}$$

ja

$$v_0 = \sqrt[3]{-3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}i}.$$

Muutetaan kompleksiluvut $z_1 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}i$ ja $z_2 = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}i$ polaarimuotoon. Kompleksiluvun z_1 moduli on

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{10}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^3}.$$

Lasketaan luvun z_1 argumentti eli kulma θ. Määritelmän 1.13 mukaan kulman θ pitää toteuttaa yhtälö

$$\theta_1 = \arccos \frac{-3}{\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^3}},$$

joten $\theta_1 \approx 147,3$ tai $2\pi - \theta_1 \approx 212,7$. Kulman θ tulee toteuttaa myös yhtälö

$$\theta_2 = \arcsin \frac{\frac{10}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^3}} = \frac{10}{\sqrt{343}},$$

joten $\theta_2 \approx 32,7$ tai $(\pi - \theta_2) \approx 147,3$. Argumenttikulma on siis $\theta \approx 147,3$. Kompleksiluvun z_1 polaariesitys on

$$z_1 = \sqrt{\frac{7^3}{3^3}}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Juuret ovat täten muotoa

$$w_k = \sqrt{\frac{7}{3}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)\right), \text{ missä } k = 0, 1, 2.$$

Koska z_2 ja z_1 ovat kompleksikonjugaatteja, niin $|z_1| = |z_2|$ ja $arg(z_2) = -arg(z_1)$. Tällöin kompleksiluvun z_2 polaariesitys on

$$z_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

Juuret ovat täten muotoa

$$q_k = \sqrt{\frac{7}{3}}\left(\cos\left(\frac{-\theta + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\theta + 2k\pi}{3}\right)\right), \text{ missä } k = 0, 1, 2.$$

Kuutiojuurten arvojen täytyy täyttää ehto $uv = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3}$. Ehdon täyttävät luvut ovat w_0 ja q_0, koska

$$\begin{aligned}
w_0 q_0 &= \sqrt{\tfrac{7}{3}}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta}{3}\right)\right)\sqrt{\tfrac{7}{3}}\left(\cos\left(-\tfrac{\theta}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\theta}{3}\right)\right)\\
&= (\sqrt{\tfrac{7}{3}})^2(\cos(\tfrac{\theta}{3} + (-\tfrac{\theta}{3})) + i\sin(\tfrac{\theta}{3} + (-\tfrac{\theta}{3}))\\
&= (\sqrt{\tfrac{7}{3}})^2(\cos 0 + i\sin 0)\\
&= \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{aligned}
x_1 &= w_1 + q_1 = 2\\
x_2 &= \zeta w_1 + \zeta^2 q_1 = -3\\
x_3 &= \zeta^2 w_1 + \zeta q_1 = 1.
\end{aligned}$$

3.4. Diskriminantti

Luvussa 2 palautettiin mieleen diskriminantti. Myös Cardanon kaavoissa neliöjuuren alla olevaa lauseketta kutsutaan diskriminantiksi ja sen arvon perusteella saadaan tietoon ratkaisujen määrä ja laatu. Määritellään seuraavaksi kolmannen asteen yhtälön supistetun muodon diskriminantti.

Määritelmä 3.18. Olkoon $x^3+px+q=0, p, q \in \mathbb{C}$. Yhtälön diskriminantti on

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Diskriminantin arvosta nähdään, kuinka monta reaalista ja kompleksista juurta on yhtälöllä.

Lause 3.19. *Olkoon D kolmannen asteen yhtälön $x^3+px+q=0$ diskriminantti. Jos*

- $D > 0$*: Yhtälöllä on yksi reaalinen juuri ja kaksi kompleksista juurta, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja eli liittolukuja.*
- $D = 0$*: Yhtälöllä on kaksi reaalista juurta.*
- $D < 0$*: Yhtälöllä on kolme reaalista juurta.*

Todistus. Tapaus $D > 0$: Kun

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0,$$

Cardanon kaavojen avulla ensimmäiseksi juureksi $z_1 = u_0 + v_0$ tulee reaalinen. Koska $D > 0$, neliöjuuresta tulee reaalinen luku, joten kuutiojuuren alle tulee myöskin reaaliluku. Toinen juuri saadaan kaavalla

$$\begin{aligned}
z_2 &= \zeta\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \zeta^2\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \left(\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}}\right) \\
&\quad + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}}\right).
\end{aligned}$$

Kolmanneksi juureksi saadaan

$$\begin{aligned}
z_3 &= \zeta^2 \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \zeta \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \left(\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \left(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \\
&= -\tfrac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \right) \\
&\quad - i\tfrac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \right).
\end{aligned}$$

Huomataan, että z_2 ja z_3 ovat toistensa liittolukuja, imaginaariosa on nollasta eroava. Tällöin ne ovat todella kaksi toisistaan eroavaa kompleksista ratkaisua. Juuriksi saatiin yksi reaalinen juuri ja kaksi kompleksista juurta, jotka ovat toistensa liittolukuja.

Tapaus $D = 0$: Diskriminantin ollessa nolla, täytyy olla $p < 0$ tai $p = 0$ ja $q = 0$. Jos $p < 0$, Cardanon kaava antaa

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

ja

$$v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Tällöin juuret ovat

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \zeta \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \zeta^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\
&= (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\
&= (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + (\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{q}{2}}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} z_3 &= \zeta^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \zeta \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\ &= (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\ &= (\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Nähdään, että z_2 ja z_3 ovat samat. Saatiin ratkaisuiksi 2 reaalista juurta ja toinen niistä on kaksinkertainen juuri. Ja jos $p = 0$ ja $q = 0$, niin silloin yhtälöllä on kolminkertainen juuri $z = 0$.

Tapaus $D < 0$: Tällöin $p < 0$. Kirjoitetaan u_0 ja v_0 muotoon

$$u_0^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ja

$$v_0^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Huomataan, että nyt u_0 ja v_0 ovat kompleksikonjugaatteja, koska diskriminantti on negatiivista. Näin ollen kaavan neliöjuuri on puhtaasti imaginaarinen. Diskriminantti voidaan kirjoittaa kompleksilukujen ominaisuuksien takia muotoon $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$, kun $D < 0$. Täten

$$u_0^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}$$

ja

$$v_0^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D}.$$

Kompleksiluvuista $-\frac{q}{2} + i\sqrt{-((\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3)}$ ja $-\frac{q}{2} - i\sqrt{-((\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3)}$ täytyy ottaa kuutiojuuri, joten muodostetaan niiden polaariesitykset $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Moduliksi saadaan

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-((\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(-((\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3)\right)} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - (\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3} \\ &= \sqrt{-(\frac{p}{3})^3} \\ &= (\sqrt{-\frac{p}{3}})^3. \end{aligned}$$

Nyt

$$\cos\theta = \frac{\frac{q}{2}}{r} = \frac{\frac{q}{2}}{(\sqrt{-\frac{p}{3}})^3},$$

joten

$$\theta = \arccos \frac{\frac{q}{2}}{(\sqrt{-\frac{p}{3}})^3}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt[3]{(\sqrt{-\frac{p}{3}})^3}\Big(\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})\Big) \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})\Big) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v_k &= \sqrt[3]{(\sqrt{-\frac{p}{3}})^3}\Big(\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}) - i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})\Big) \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}) - i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})\Big), \end{aligned}$$

missä $k = 0, 1, 2$. Ehto $u_k v_l = -\frac{p}{3}$ pätee, kun $k = l$ ja u_k ja v_k ovat toistensa kompleksikonjugaatit, joten $u_k v_k = u_k \bar{u}_k = |u_k|^2 = -\frac{p}{3}$. Supistetun muodon ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} z_1 &= u_0 + v_0 \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos\tfrac{\theta}{3} + i\sin\tfrac{\theta}{3}\Big) + \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos\tfrac{\theta}{3} - i\sin\tfrac{\theta}{3}\Big) \\ &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= u_1 + v_1 \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3})\Big) + \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3}) - i\sin(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3})\Big) \\ &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3})\Big) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} z_3 &= u_2 + v_2 \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3})\Big) + \sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3}) - i\sin(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3})\Big) \\ &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big(\cos(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3})\Big). \end{aligned}$$

Kun $p < 0$, kaikki juuret ovat tällöin reaaliset ja eri suuruiset. Näin ollen saatiin kolme eri ratkaisua. □

Esimerkki 3.20. Yhtälöllä $x^3 - 2x + 4 = 0$ on yksi reaalinen juuri ja kaksi kompleksista juurta, koska

$$D = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{100}{27} > 0.$$

Lauseen 3.19 todistuksessa huomataan, että diskriminantin ollessa tiedossa kolmannen asteen yhtälön juuret supistuivat yksinkertaisimpiin muotoihin. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan tilannetta, jossa diskriminantti on positiivinen.

Esimerkki 3.21. Ratkaise yhtälön $x^3 - 2x + 4 = 0$ juuret. Edellisestä esimerkistä nähdään, että $D = \frac{100}{27} > 0$. Tällöin yhtälön juuret ovat

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{100}{27}}} = -2,$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{116}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{D}}) \\ &\quad + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{D}}) \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} z_3 &= -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{D}}) \\ &\quad - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{D}}) \\ &= 1 - i. \end{aligned}$$

Edellä on nähty, kuinka Casus irreducibilis saadaan ratkaistua De Moivren kaavaa käyttäen, mutta esitellään toinenkin tapa ratkaista se. Siinä käytetään kosinin kolminkertaisen kulman kaavaa ja näin ollen vältetään kuutiojuurenotto kompleksiluvusta.

Silloin kun $D < 0$, täytyy $p < 0$. Tehdään kolmannen asteen yhtälön supistettuun muotoon sijoitus $x = 2y\sqrt{\frac{-p}{3}}$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
x^3 + px + q &= (2y\sqrt{\frac{-p}{3}})^3 + p(2y\sqrt{\frac{-p}{3}}) + q \\
&= 8y^3(\frac{-p}{3})^{\frac{3}{2}} + 2yp\sqrt{\frac{-p}{3}} + q \\
&= 8y^3(\frac{-p^3}{3^3})^{\frac{1}{2}} + 2y(\frac{-p^3}{3})^{\frac{1}{2}} + q \\
&= 2(\frac{-p}{3})^{\frac{3}{2}}(4y^3 - 3y - q') = 0,
\end{aligned}$$

missä $q' = -\frac{\frac{q}{2}}{(\frac{-p}{3})^{\frac{3}{2}}}$. Yhtälö $x^3 + px + q = 0$ toteutuu siis täsmälleen silloin kun

$$4y^3 - 3y = q'.$$

Sijoitetaan saatuun yhtälöön $y = \cos(t)$ ja $q' = \cos(\phi)$, missä $\phi = \arccos(q') = \arccos(-\frac{\frac{q}{2}}{(\frac{-p}{3})^{\frac{3}{2}}})$. Tämä on mahdollista tapauksessa $D < 0$, koska $|q'| < 1$. Tällöin myös $|y| < 1$, koska muulloin lausekkeen $|4y^3 - 3y|>1$. Yhtälö saadaan muotoon

$$4\cos^3(t) - 3\cos(t) = \cos(\phi).$$

Luvusta 1 tuttua kosinin kolminkertaisen kulman summakaavaa $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$ käyttäen saadaan yhtälö muotoon $\cos(\phi) = \cos(3t)$. Yhtälö toteutuu, kun

$$t = \{\pm\frac{\phi}{3}, \pm(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}), \pm(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3})\}.$$

Koska $\cos(u) = \cos(-u)$, niin voidaan valita

$$t = \{\frac{\phi}{3}, (\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}), (\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3})\}.$$

Tällöin juuret ovat

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3}),$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3})$$

ja

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}),$$

missä $\phi = \arccos(-\frac{\frac{q}{2}}{(-\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}})$.

Nähdään, että viimeisin tapa oli selvästi lyhyempi ja vaati vain muistutusta kosinin kolminkertaisen kulman summakaavasta. Seuraava lause tiivistää edellisen johtamisen tuloksen.

LAUSE 3.22. *Jos $D < 0$, niin yhtälön $x^3 + px + q = 0$ juuret ovat*

$$2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3})\ ,\ \ 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3})\ \textit{ja}\ 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}),$$

missä $\phi = \arccos(-\frac{\frac{q}{2}}{(-\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}})$.

Ratkaistaan Esimerkki 3.17 edellisen lauseen avulla.

ESIMERKKI 3.23. Ratkaise yhtälön $x^3 - 7x + 6 = 0$ juuret. Nyt $p = -7$ ja $q = 6$ sekä

$$\phi = \arccos\Big(- \frac{\frac{6}{2}}{(\frac{-(-7)}{3})^{\frac{3}{2}}}\Big) = \arccos\Big(- \frac{3}{(\frac{7}{3})^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

Yhtälön juuret ovat

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-(-7)}{3}}\cos\frac{\phi}{3} = 2$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-(-7)}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = -3$$

sekä

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-(-7)}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}) = 1.$$

Kuten toisen asteen yhtälön tapauksessa myös kolmannen asteen yhtälön diskriminantti D voidaan ilmaistaa juurien avulla ja saadaan diskriminantille toinen määritelmä $\triangle$.

MÄÄRITELMÄ 3.24. Olkoon r_1, r_2, r_3 kolmannen asteen yhtälön $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ juuret. Tällöin diskriminantti $\triangle$ on

$$\triangle = (r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2$$

Seuraava lause kertoo, kuinka kolmannen asteen polynomiyhtälön diskriminantti voidaan ilmaista polynomin kertoimien avulla.

LAUSE 3.25. *Olkoon a_2, a_1, a_0 reaalilukuja. Kolmannen asteen polynomin $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ diskriminantti*

$$\triangle = 18a_2a_1a_0 - 4a_2^3a_0 + a_2^2a_1^2 - 4a_1^3 - 27a_0^2.$$

TODISTUS. Vastaavasti kuin toisen asteen yhtälön tapauksessa. Nyt

$$\begin{aligned} x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\ &= x^3 + x(-r_1 - r_2 - r_3) + x(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) - r_1r_2r_3. \end{aligned}$$

Tästä saadaan, että $a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3)$, $a_1 = (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)$ ja $a_0 = -r_1r_2r_3$. Nyt

$$(r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2 = 18a_2a_1a_0 - 4a_2^3a_0 + a_2^2a_1^2 - 4a_1^3 - 27a_0^2.$$

□

LAUSE 3.26. *Olkoon △ kolmannen asteen polynomin diskriminantti. Jos*

- $\triangle < 0$*: Yhtälöllä on yksi reaalinen juuri ja kaksi kompleksista juurta, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja.*
- $\triangle = 0$*: Yhtälöllä on kaksi reaalista juurta.*
- $\triangle > 0$*: Yhtälöllä on kolme reaalista juurta.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. □

Esimerkissä 3.20 ratkaistiin polynomin juurien määrä ja laatu supistetun muodon diskriminantin avulla. Ratkaistaan nyt saman polynomin juuret Lauseen 3.25 avulla.

ESIMERKKI 3.27. Määritä kolmannen asteen yhtälön $x^3 - 2x + 4 = 0$ juurien laatu ja määrä. Nyt $a_2 = 0$, $a_1 = -2$ ja $a_0 = 4$, joten

$$\triangle = 18 \cdot 0 \cdot (-2) \cdot 4 - 4 \cdot 0^3 \cdot 4 + (0)^2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2)^3 - 27 \cdot (4)^2 = -400 < 0$$

Polynomilla on yksi reaalinen juuri ja kaksi kompleksista juurta, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja.

3.5. Ratkaisu determinantin avulla

Lopuksi esitellään vielä eräs tapa ratkaista kolmannen asteen yhtälöitä. Se on determinanttimenetelmä. Siinä käytetään avuksi determinantteja sekä teoriaa toisen asteen yhtälön tekijöitymisestä tai kuutioon täydentämistä. Determinanttimenetelmässä ratkaisut jaetaan kolmeen erilaiseen tapaukseen ja tutkitaan ne erikseen.

Lähdetään liikkeelle siitä, että jokainen kolmannen asteen polynomiyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Tarkastellaan toisen asteen apuyhtälöä

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Kehittelemällä determinantti ylimmän rivinsä suhteen saadaan toisen asteen yhtälö

$$Az^2 + Bz + C = 0,$$

missä

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix} = b - a^2,$$

$$B = \begin{vmatrix} b & 1 \\ c & a \end{vmatrix} = ab - c$$

ja

$$C = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2.$$

Apuyhtälöstä saadaan toisen asteen ratkaisukaavaa käyttäen tietoon, että sen diskriminantti on $D = B^2 - 4AC$. Diskriminantin D ja apuyhtälön termin kertoimen A avulla saadaan tietoon ratkaisut ja ne voidaan jakaa kolmeen tapaukseen.

- $A = 0$: apuyhtälö on lineaarinen ja varsinaisella yhtälöllä on kolme eri ratkaisua.
- $A \neq 0$ ja $D = 0$: Yhtälöllä on yksi kaksinkertainen juuri.
- $A \neq 0$ ja $D \neq 0$: Yhtälöllä on kaksi erillistä ratkaisua.

Tutkitaan ensiksi tapausta, missä $A = 0$. Tällöin $b = a^2$, jolloin alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} x^3 + 3ax^2 + 3bx + c &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + c \\ &= x + 2ax^2 + a^2x + ax^2 + 2a^2x + a^3 + c - a^3 \\ &= (x+a)(x^2 + 2ax + a^2) + c - a^3 \\ &= (x+a)(x+a)^2 + c - a^3 \\ &= (x+a)^3 + c - a^3 = 0. \end{aligned}$$

Ottamalla yhtälöstä $(x+a)^3 = a^3 - c$ puolittain kuutiojuuri saadaan selville yhtälön ratkaisut:

$$x = -a + (a^3 - c)^{\frac{1}{3}}\zeta^k,$$

missä $k = 0, 1, 2$ ja ζ on ykkösen kuutiojuuri.

Seuraavaksi tarkastellaan tapausta, missä $A \neq 0$ ja $D = 0$. Nyt alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} x^3 + 3ax^2 + 3bx + c &= x^3 + \frac{Bx}{A} + 3ax^3 - \frac{Bx^2}{A} - \frac{B^2x}{A^2} - \frac{3Bax}{A} + \frac{B^2x}{4A^2} + \frac{B^3}{4A^3} + \frac{3aB^2}{4A^2} \\ &= x^3 + \frac{Bx}{A} + 3ax^3 - \frac{Bx^2}{A} - \frac{B^2x}{A^2} - \frac{3Bax}{A} + \frac{B^2x}{4A^2} + \frac{B^3}{4A^3} + \frac{3aB^2}{4A^2} \\ &= \left(x^2 - \frac{Bx}{A} + \frac{B^2}{4A^2}\right)\left(x + \frac{B}{A} + 3a\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{Bx}{A} + \frac{B^2}{4A^2}\right)\left(x + \frac{B}{A} + \frac{3aA}{A}\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{Bx}{A} + \frac{B^2}{4A^2}\right)\left(x + \frac{B + 3aA}{A}\right) \\ &= \left(x - \frac{B}{2A}\right)^2\left(x + \frac{B + 3aA}{A}\right) = 0. \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisut ovat siis

$$x_1 = \frac{B}{2A}$$

ja

$$x_2 = -\frac{B + 3aA}{A}.$$

Kun toisen asteen apuyhtälöllä on kaksinkertainen juuri $-\frac{B}{2A}$, niin sen vastaluku $\frac{B}{2A}$ on kaksinkertainen juuri alkuperäiselle yhtälölle.

Viimeisenä tarkastetaan tapaus, missä $A \neq 0$ ja $D \neq 0$. Tämä on tyypillinen tapaus, jossa toisen asteen apuyhtälöllä on kaksi erisuurta juurta. Olkoon ne α ja β, jolloin saadaan Vietan kaavojen avulla, että

$$\alpha + \beta = -\frac{B}{A} = \frac{c - ab}{b - a^2} \text{ ja } \alpha\beta = \frac{C}{A} = \frac{ac - b^2}{b - a^2}.$$

Nähdään, että käyttämällä juuria α ja β saadaan alkuperäinen yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} x^3 + 3ax^2 + 3bx + c &= x^3 + 3ax^2 + 3\left(a\left(\tfrac{c-ab}{b-a^2}\right) - \tfrac{ac-b^2}{b-a^2}\right)x \\ &\quad + a\left(\left(\tfrac{c-ab}{b-a^2}\right)^2 - \tfrac{ac-b^2}{b-a^2}\right) - \tfrac{ac-b^2}{b-a^2}\left(\tfrac{c-ab}{b-a^2}\right) \\ &= (\alpha - \beta)(x^3 + 3ax^2 + 3(a(\alpha+\beta) - \alpha\beta)x \\ &\quad + a((\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta) - \alpha\beta(\alpha+\beta)) \\ &= (a - \beta)(x + \alpha)^3 - (a - \alpha)(x + \beta)^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siispä jos $\alpha \neq \beta$, niin alkuperäinen yhtälö saadaan muotoon

$$(a - \beta)(x + \alpha)^3 = (a - \alpha)(x + \beta)^3.$$

Yhtälön juuret löydetään ottamalla uuden yhtälön molemmista puolista kuutiojuuret, joka antaa kolme lineaarista yhtälöä muuttujalle:

$$t_2(x + \alpha) = t_1(x + \beta)\zeta^k, \;\; k = 0, 1, 2,$$

missä $t_1 = (a - \alpha)^{\frac{1}{3}}$ ja $t_2 = (a - \beta)^{\frac{1}{3}}$ ovat mitä tahansa kuutiojuuren erikoisvalintoja ja ζ on ykkösen kuutiojuuri. Tästä seuraa, että

$$x = -\frac{\beta t_1 \zeta^k - \alpha t_2}{t_1 \zeta^k - t_2}.$$

Se supistuu muotoon

$$x = -a - t_1 t_2 (t_1 \zeta^2 k + t_2 \zeta^k),$$

kun nimittäjä ja osoittaja kerrotaan lausekkeella $t_1^2 \zeta^{2k} + t_1 t_2 \zeta^k + t_2^2$.

Jos toisen asteen apuyhtälöllä on kaksi eri suurta juurta, niin Vietan kaavoja hyväksi käyttäen voidaan alkuperäinen yhtälö esittää muodossa, josta on helppo ratkaista alkuperäisen yhtälön juuret ottamalla yhtälön molemmista puolista kuutiojuuri.

LEMMA 3.28. *Kun α ja β ovat apuyhtälön $Az^2 + Bz + C = 0$ kaksi erillistä ratkaisua, voidaan yhtälö $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ esittää muodossa*

$$(a - \beta)(x + \alpha)^3 = (a - \alpha)(x + \beta)^3.$$

ESIMERKKI 3.29. Ratkaise kolmannen asteen yhtälö $x^3 - 12x^2 - 6x - 10 = 0$ determinanttimenetelmän avulla.

Nyt $a = -4$, $b = -2$ ja $c = -10$ sekä apuyhtälö on muotoa

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

Kehittelemällä determinantti ylimmän rivinsä suhteen saadaan toisen asteen apuyhtälö $z^2 - z - 2 = 0$. Apuyhtälön juuret ovat -1 ja 2. Nyt alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$-6(x - 1)^3 = -3(x + 2)^3.$$

Sieventämällä ja ottamalla molemmista puolista kuutiojuuret saadaan kolme lineaarista yhtälöä eli $x + 2 = 2^{\frac{1}{3}}\zeta^k(x - 1)$, $k = 0, 1, 2$. Saadaan, että

$$x_k = \frac{2^{\frac{1}{3}}\zeta^k + 2}{2^{\frac{1}{3}}\zeta^k + 1}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Yhtäpitävästi voidaan kirjoittaa, että $x = 4 - (-3)^{\frac{1}{3}}(-6)^{\frac{1}{3}}[(-3)^{\frac{1}{3}}\zeta^{2k} + (-6)^{\frac{1}{3}}\zeta^k]$. Juuriksi saadaan

$$\begin{aligned} x_0 &= 4 - (-3)^{\frac{1}{3}}(-6)^{\frac{1}{3}}[(-3)^{\frac{1}{3}}(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^0 + (-6)^{\frac{1}{3}}(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^0] \\ &= 4 + 3(\sqrt[3]{2} + 2^{\frac{2}{3}}) \\ &\approx 12,54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - (-3)^{\frac{1}{3}}(-6)^{\frac{1}{3}}[(-3)^{\frac{1}{3}}(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2 + (-6)^{\frac{1}{3}}(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^1] \\ &= 4 - \frac{3(1 + i\sqrt{3})}{2^{\frac{2}{3}}} + \frac{3i(\sqrt{3} + i)}{\sqrt[3]{2}} \\ &\approx -0,27 + 0,85i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 4 - (-3)^{\frac{1}{3}}(-6)^{\frac{1}{3}}[(-3)^{\frac{1}{3}}(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^4 + (-6)^{\frac{1}{3}}(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2] \\ &= 4 - \frac{3(1 + i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3i(\sqrt{3} + i)}{2^{\frac{2}{3}}} \\ &\approx -0,27 - 0,85i. \end{aligned}$$

Juuriksi saatiin yksi reaaliluku ja kaksi kompleksilukua, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja.

Determinanttimenetelmän diskriminantti saadaan toisen asteen apuyhtälöstä. Jos kertoimet a, b ja c ovat kaikki reaalisia ja

- $D < 0$: Yhtälöllä on kolme reaalista juurta,
- $D = 0$: Yhtälöllä on kaksi erillistä ratkaisua.
- $D > 0$: Yhtälöllä on on yksi reaalinen juuri ja kaksi kompleksijuurta, jotka ovat toistensa kompleksikonjukaatteja

Esimerkki 3.30. Ratkaise millaisia ovat kolmannen asteen yhtälön $x^3 + 3x^2 + 6x + 5 = 0$ juuret. Kolmannen asteen yhtälön kertoimet ovat $a = 1$, $b = 2$ ja $c = 5$. Apuyhtälön $Az^2 + Bz + C = 0$ kertoimiksi saadaan

$$A = b - a^2 = 2 - 1^2 = 1,$$

$$B = ab - c = 1 \cdot 2 - 5 = -3$$

ja

$$C = ac - b^2 = 1 \cdot 5 - 2^2 = 1.$$

Tällöin

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0.$$

Yhtälöllä on yksi reaalinen juuri ja kaksi kompleksijuurta, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja.

LUKU 4

n-asteinen yhtälö

Tässä luvussa tarkastellaan polynomia yleisesti ja sitä, mikä mahdollistaa polynomin juurien löytämisen ja olemassaolon. Määritellään kompleksikertoiminen n-asteinen polynomi ja mitä polynomin juuri tarkoittaa. Algebran peruslause kertoo, että jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla on ainakin yksi kompleksinen juuri. Ja Algebran peruslauseen seurauksesta nähdään, että n-asteisella polynomilla on juuria n kappaletta. Ne voivat tietenkin olla monikertoja. Reaalikertoiminen n-asteinen polynomi voidaan esittää aina ensimmäisen ja toisen asteen polynomien avulla, kun taas kompleksikertoiminen voidaan esittää ensimmäisen asteen polynomien tulona. Lopuksi vielä Vietan kaavat sekä diskriminantti n-asteiselle polynomille.

4.1. Algebran peruslause

Määritellään ensiksi n-asteinen kompleksikertoiminen polynomiyhtälö sekä se, mitä tarkoittaa, jos jokin luku on polynomin juuri.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Astetta n oleva kompleksilukukertoiminen polynomi $P(x) \in \mathbb{C}$ on muotoa

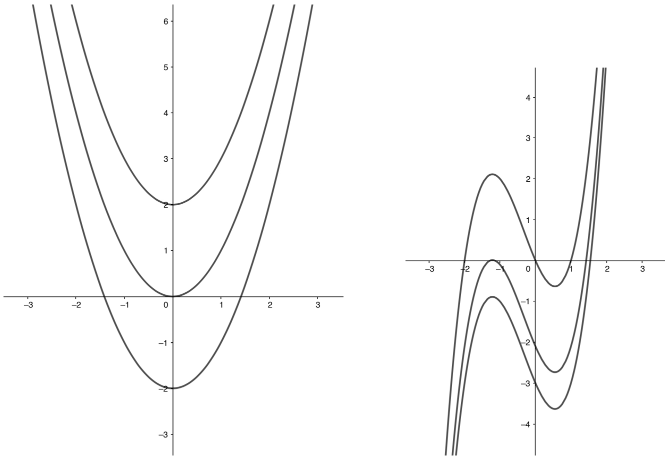
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

missä kertoimet $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

Polynomin juuret ovat ne muuttujan x arvot, joilla polynomi saa arvon nolla.

MÄÄRITELMÄ 4.2. Jos $P(x) = 0$ niin silloin x on polynomin nollakohta eli juuri.

Luvussa 3 kerrottiin, että kolmannen asteen polynomilla on ainakin yksi reaalinen juuri. Sen kuvaaja leikkaa aina x-akselin jossakin pisteessä. Toisen asteen polynomin tapauksessa tälläistä ei välttämättä ole. Tähän ei perehdytä sen tarkemmin, mutta seuraavat kuvat hahmottavat polynomien reaalisia juuria. Kuvien polynomit poikkeavat toisistaan vakiolla. Toisen asteen yhtälöllä tapauksessa reaalisia juuria on joko yksi, kaksi tai ei yhtään. Kolmannen asteen yhtälön tapauksessa reaalisia juuria on ainakin yksi, kaksi tai kolme.



KUVA 4.1. Toisen asteen polynomeja (vasemmalla) ja kolmannen asteen polynomeja (oikealla).

Seuraava lause kertoo yleisesti, milloin polynomilla on aina reaalinen juuri.

LAUSE 4.3. *n-asteisella polynomilla $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ on korkeintaan n kappaletta reaalisia juuria.*

- *Jos n on pariton, reaalisia nollakohtia on aina vähintään yksi.*
- *Jos n on parillinen, reaalisia nollakohtia ei välttämättä ole yhtään.*

Jos jokin luku a on polynomin juuri, niin silloin polynomi on jaollinen polynomilla $(x - a)$. Tämä edesauttaa meitä löytämään jossakin tapauksissa lisää polynomin juuria.

LAUSE 4.4. *Luku a on polynomin p juuri jos ja vain jos p on jaollinen binomilla $x - a$.*

TODISTUS. Todistusta ei tutkielmassa näytetä, mutta se perustuu polynomien jakoyhtälöön, joka sanoo, että jos luku c on polynomin $P(x)$ juuri, polynomi on jaollinen binomilla $(x - c)$ ja tällöin jakojäännökseksi saadaan polynomia $P(x)$ yhtä astetta alempi polynomi $Q(x)$. □

Algebran peruslauseen todistus pohjautuu pitkälti edistyneempään analyysiin ja sitä varten tarvitaan seuraavaa analyysin lemmaa, joka on kaksiuloitteinen versio jatkuvan funktion ääriarvojen selvittämiseksi jollakin tietyllä välillä.

LEMMA 4.5. *Jos $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $D \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja rajoitettu (kompakti), niin silloin funktio $f(x, y)$ saavuttaa pienimmän ja suurimman arvonsa joukossa D.*

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä Euklidiset avaruudet □

Ennen kuin päästään Algebran peruslauseeseen ja sen todistukseen, tarvitaan vielä muutama lemma.

LEMMA 4.6. *Olkoon $f(x)$ kompleksikertoiminen n-asteinen polynomi. Silloin funktion itseisarvo $|f(x)|$ saavuttaa pienimmän arvonsa jossakin pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$.*

TODISTUS. Olkoon $s = |f(0)|$. Koska $|f(x)|$ kasvaa rajatta, kun $|x|$ kasvaa rajatta, on olemassa $r > 0$ niin, että $|f(x)| > s$, kun $|x| \geq r$. Jatkuva funktio $|f|$ saa suljetussa pallossa $B = \{x : |x| \leq r\}$ (joka on kompakti) pienimmän arvonsa $m = |f(z_0)|$. Tämä arvo on funktion $|f|$ pienin arvo koko kompleksitasossa. □

LEMMA 4.7. *Oletetaan, että $f(x)$ on kompleksikertoiminen polynomi ja $f(x)$ ei ole vakio. Jos $f(x_0)$ ei ole nolla, silloin funktion itseisarvo $|f(x_0)|$ ei ole funktion itseisarvon $|f(x)|$ pienin arvo.*

TODISTUS. Olkoon $f(x)$ kompleksikertoiminen polynomi ja $f(x)$ ei ole vakio. Oletetaan, että pisteessä x_0 funktio ei ole nolla. Tehdään muuttujanvaihdos $x + x_0$, joka muuttaa pisteen x_0 origoon. Nyt voimme olettaa, että $f(0) \neq 0$. Seuraavaksi kerrotaan funktio $f(x)$ luvulla $\frac{1}{f(0)}$, jolloin $f(0) = 1$. Täytyy osoittaa, että 1 ei ole $|f(x)|$ minimiarvo.

Olkoon $k \neq 0$ funktion matalin nollasta eroava potenssin arvo. Tällöin voidaan olettaa, että

$$f(x) = 1 + ax^k + \text{termit, jotka ovat asteluvultaan} > k.$$

Olkoon α luvun $-\frac{1}{a}$ k. juuri, mikä saadaan De Moivren kaavan avulla. Tehdään muuttujalle x lopullinen muuttujan vaihto, αx. Funktio saadaan muotoon

$$f(x) = 1 - x^k + x^{k+1}g(x),$$

missä $g(x)$ jokin polynomi. Kun x on positiivinen reaaliluku, saadaan kolmioepäyhtälön perusteella

$$|f(x)| \leq |1 - x^k| + x^{k+1}|g(x)|.$$

Mutta $x^k < 1$ pienillä x reaaliarvoilla, joten saadaan, että

$$|f(x)| \leq 1 - x^k + x^{k+1}|g(x)| = 1 - x^k(1 - x|g(x)|).$$

Pienillä reaaliarvoilla $x|g(x)|$ on pieni, jolloin x_0 voidaan valita siten, että $x_0|g(x_0)| < 1$. Tästä seuraa, että $x_0^k(1 - x_0|g(x_0)|) > 0$, joten $|f(x_0)| < 1 = |f(0)|$. □

Yhdistämällä nyt Lemmat 4.6 ja 4.7 saadaan todistettua Algebran peruslause, joka sanoo että jokaiselle kompleksilukukertoimiselle polynomille, joka ei ole vakio löytyy kompleksinen juuri.

LAUSE 4.8 (Algebran peruslause). *Jos $f(x)$ on kompleksilukukertoiminen polynomi ja $f(x)$ ei ole vakio, niin silloin funktiolla $f(x)$ on vähintään yksi kompleksinen juuri.*

TODISTUS. Olkoon $f(x)$ kompleksinen polynomi ja se ei ole vakio. Lemma 4.6 sanoo, että funktiolla $|f(x)|$ on minimi arvo jossakin pisteessä $x_0 \in \mathbb{C}$. Lemmasta 4.7 seuraa, että $|f(x_0)| = 0$ ja näin ollen $f(x_0) = 0$ koska muutoin se ei olisi minimi arvo. Siksi funktiolla $f(x)$ on kompleksinen juuri. □

Nyt tiedetään, että jokaiselle polynomille löytyy kompleksinen juuri. Juuria on itseasissa niin monta, kuin polynomi on asteluvultaan.

SEURAUS 4.9 (Algebran peruslauseen seuraus). *Olkoon $f(x)$ reaaliluku- tai kompleksilukukertoiminen polynomi ja $n > 0$. Polynomilla on nyt kompleksinen juuri ja juuria on tasan n kappaletta. Polynomi voidaan kirjoittaa muodossa*

$$f(x) = a_n(x - r_1) \ldots (x - r_n),$$

missä $r_1, \ldots, r_n$ ovat polynomin $f(x)$ kompleksisia juuria ja a_n korkeimman asteluvun kerroin.

TODISTUS. Algebran peruslauseesta seuraa, että jos funktio f_n on n:nnen asteen polynomi, niin sillä on kompleksinen juuri r_n. Tällöin f_n voidaan jakaa termillä $(x-r_n)$ ja tulokseksi saadaan $(n-1)$-asteinen polynomi f_{n-1}, ts.

$$f_n(x) = (x - r_n)f_{n-1} \text{ kaikilla } x \in \mathbb{C}.$$

Nyt myös polynomilla f_{n-1} on kompleksinen nollakohta r_{n-1} (mikäli $n > 1$). Tällöin löytyy $(n-2)$-asteinen polynomi f_{n-2} siten, että

$$f_n(x) = (x - r_n)(x - r_{n-1})f_{n-2} \text{ kaikilla } x \in \mathbb{C}.$$

Tätä jatketaan niin kauan, kunnes osamääräksi saadaan binomi. Tällöin

$$f(x) = a_n(x - r_1) \ldots (x - r_n).$$

□

Luvussa 2 nähtiin, että jos toisen asteen reaalikertoimisen yhtälön juuri on kompleksiluku, niin myös sen kompleksikonjugaatti on toinen juuri.

LAUSE 4.10. *Jos reaalikertoimisen polynomin $f(x)$ juuri on $z \in \mathbb{C}$, silloin myös $\bar{z}$ on juuri.*

TODISTUS. Löytyy lähteestä [**1**] □

Reaalikertoiminen polynomi voidaan kirjoittaa ensimmäisen ja toisen asteen polynomien tulona.

LAUSE 4.11. *Olkoon $f(x)$ reaalikertoiminen polynomi ja $n > 0$. Polynomi voidaan kirjoittaa muodossa*

$$f(x) = (x - r_1) \ldots (x - r_j)(x^2 + b_1x + c_1) \ldots (x^2 + b_kx + c_k),$$

missä $r_1, \ldots, r_j$ ovat reaalijuuria ja jokainen juuri esiintyy niin monta kertaa kuinka moninkertainen juuri se on ja toisen asteen yhtälö on kompleksikonjukaattien muodostama.

TODISTUS. Oletaan, että $f(x)$ on reaalikertoiminen polynomi ja $x_1, \ldots, x_n$ ovat sen reaalisia tai kompleksisia juuria, jolloin

$$f(x) = a_n(x - x_1) \ldots (x - x_n),$$

missä a_n on funktion $f(x)$ korkeimman potenssin kerroin.

Jos x_i on reaalinen, $(x - x_i)$ on reaalinen tekijä. Jos taas x_i on kompleksinen, niin silloin sen kompleksikonjugaatti $\bar{x}_i$ on myöskin juuri. Tällöin $(x-x_i)(x-\bar{x}_i)$ on toisen asteen tekijä $(x^2+b_ix+c_i)$. □

Esimerkki 4.12. Reaalikertoiminen funktio $f(x)=x^5-x^4+4x-4$, jonka juuret ovat 1, $1+i$,$1-i$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x)=(x-1)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

Algebran peruslauseen seuraus sanoo, että n-asteisella polynomilla on tasan n kappaletta juuria. Juuret eivät välttämättä ole erisuuria vaan ne voivat olla monikertoja.

Lause 4.13. *Olkoon $f(x)$ reaaliluku- tai kompleksilukukertoiminen polynomi ja $n>0$. Olkoon sillä täsmälleen k määrä erisuuria juuria $x_1,x_2,\ldots,x_k$ ja m_i, missä $1\leq i\leq k$ on funktion juurien monikertoja. Tällöin*

$$f(x)=a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_k)^{m_k}$$

Esimerkin 4.12 funktiolla oli kompleksisia juuria, joten nyt toisen asteen yhtälö voidaan jakaa vielä tekijöihinsä ja näin ollen funktio voidaan ilmaista lineaaristen funktioiden avulla.

Esimerkki 4.14. Kompleksikertoiminen funktio $f(x)=x^5-x^4+4x-4$, jonka juuret ovat 1, $1+i$ ja $1-i$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x)=(x-1)(x-(1+i))^2(x-(1-i))^2.$$

Aiemmista luvuista on nähty polynomin kertoimien ja juurien yhteys. Vietan kaavat pätevät myös n-asteisille polynomeille. Seuraava lause kertoo yhteyden yleisesti n-asteisille polynomeille.

Lause 4.15. *Olkoot $x_1,x_2,\ldots,x_n$ n-asteisen polynomin*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

missä $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{C}$ ja $a_n\neq 0$ juuret. Silloin

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n)+(x_2x_3+x_2x_4+\cdots+x_2x_n)+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Todistus. Löytyy lähteestä [**2**] □

Lopuksi vielä diskriminantti juurien avulla ilmaistuna n-asteiselle polynomille.

Määritelmä 4.16. n-asteinen polynomiyhtälön $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ diskriminantti $\triangle$ saadaan

$$\triangle(r_1,\ldots,r_n)=\prod_{1\leq i\leq j\leq n}(r_i-r_j)^2$$

Kirjallisuutta

[1] Benjamin Fine ja Gerhard Rosenberger: *The Fundamental Theorem of Algebra.* Toinen laitos, Springer-Verlag, 1997.

[2] Ron Irving: *Beyond the Quadratic Formula.* The Mathematical Association of America, 2013.

[3] Peter J. Bentley: *NUMEROT kuinka matematiikka muutti maailman.* Ajatus Kirjat Gummerus Kustannus Oy, Kiina 2009.

[4] Tero Kilpeläinen: *Kompleksianalyysi. Luentomuistiinpanoja keväälle 2005..*

[5] Tero Kilpeläinen: *Analyysi1. Luentomuistiinpanoja 2000/2002.*

[6] J. Lehrbäck ja J.Parkkonen: *Lukualueet. Luentomuistiinpanoja 2006-2008.*

[7] Eero Saksman: *Matematiikkalehti Solmu. Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa, 1/2000-2001.*

[8] Robert Y. Suen: *Roots of Cubics via Determinants.* Mathematical Association of America, 1994