Näkökulmia jatkuvuuteen

Tuomas Huhtala

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Tuomas Huhtala, *Näkökulmia jatkuvuuteen* (engl. *Aspects of continuity*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 30 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä kaksi erilaista jatkuvuuden määritelmää ja tarjota mahdollisuus näiden määritelmien käytön vertailuun. Lisäksi pohditaan jatkuvuuden käsitettä lukio-opetuksessa. Ensin on kuitenkin määriteltävä tiettyjä käsitteitä, että päästään käsiksi jatkuvuuteen. Aluksi annetaan virallinen määritelmä välille ja lisäksi määritellään avoin joukko ja esitellään näiden tärkeimpiä ominaisuuksia.

Jatkuvuutta tarkastellaan ensin aidosti monotonisten funktioiden avulla, ja pikkuhiljaa määritelmää kehitetään laajemmaksi. Lopulta jatkuvuus määritellään avointen joukkojen avulla. Avointen joukkojen avulla määritelty jatkuvuus käsittelee funktion jatkuvuutta joukossa. Toinen esitelty jatkuvuuden määritelmä käsittelee pisteittäistä jatkuvuutta. Tutkielmassa kuitenkin näytetään näiden kahden jatkuvuuden määritelmän yhtäpitävyys. Lisäksi esitellään jatkuvien funktioiden erilaisia ominaisuuksia ja nämä todistetaan kahden eri jatkuvuuden määritelmän avulla. Tietyn ominaisuuden todistukset kahdella eri tavalla on asetettu peräkkäin, joten lukijalla on mahdollisuus vertailla määritelmiä ja niiden käyttöä.

Tutkielmassa myös tarkastellaan avointen joukkojen ominaisuuksia ja niiden pohjalta esitellään kaksi tärkeää matemaattista lausetta. Näiden lauseiden avulla voidaan todistaa, että jatkuva funktio kuvaa suljetun välin suljetuksi ja rajoitetuksi väliksi. Lopuksi käydään läpi lukion opetusmateriaaleja eri kirjasarjojen avulla. Erityisesti tarkastellaan, miten kirjasarjat esittelevät, määrittelevät ja opettavat jatkuvuuden käsitteen. Lisäksi pohditaan, voisiko jatkuvuuden opetustapaa muuttaa ja löytyisikö tämän tutkielman esittelemistä jatkuvuuden määritelmistä apua tähän. Lopuksi kirjataan ylös ajatuksia opettajan mahdollisista opetuksen työkaluista ja eriyttämisen keinoista tämän hetken lukion matematiikan opetuksessa.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Väli 3

Luku 2. Jatkuvuuden määrittely 7

Luku 3. Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia 13

Luku 4. Jatkuvuus ja avoimet joukot 21

Luku 5. Jatkuvuus lukio-opetuksessa 26

Kirjallisuutta 30

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on avata jatkuvuuden käsitettä ja esitellä kaksi jatkuvuuden määritelmää. Lisäksi halutaan tarjota jatkuvien funktioiden ominaisuuksien todistuksia kahden eri jatkuvuuden määritelmän avulla, jolloin on mahdollista vertailla niiden eroja ja yhtäläisyyksiä käytössä. Jotta päästään käsiksi varsinaiseen jatkuvuuteen, täytyy määritellä erilaisia joukkoja ja niiden ominaisuuksia. Tutkielma on pyritty tekemään niin, että suurempia analyysin esitietoja ei tarvita. Yleensä jatkuvuus on totuttu määrittelemään lukujen ε ja δ avulla, mutta tässä työssä esitellään myös jatkuvuuden määritelmä, jonka pohjana ovat avoimet joukot.

Tutkielmassa tarkastellaan pääasiassa Mauden Mathematical Analysis -kirjan [**10**] määritelmiä, tuloksia ja todistuksia. Asioita käydään läpi hieman eri järjestyksessä, koska halutaan käsitellä aluksi hieman helpompia tuloksia ja päästä mahdollisimman nopeasti käsiksi jatkuvuuden käsitteeseen. Tarkoitus on myös säästää matemaattisesti vaativammat tulokset tutkielman loppupuolelle. Todistukset ja pohdinnat, jotka liittyvät jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmään, seuraavat melko tarkasti Thompsonin Real Elementary Analysis -kirjan [**12**] sekä Kilpeläisen Analyysi 1 -luentomonisteen [**9**] teoriaa ja tuloksia. Apuna ja tukena on kuitenkin käytetty myös Spivakin Calculus-kirjan [**11**] teoriaa ja todistuksia.

Aluksi määritellään hieman itsestäänselviä, mutta kuitenkin tärkeitä käsitteitä, kuten mitä tarkoitetaan luvun välissäololla ja miten määritellään väli ja sen päätepisteet. Luvussa 1 esitellään myös joukkojen ja erityisesti välien tärkeitä ominaisuuksia ja tuloksia. Lisäksi määritellään joukkojen summa ja tulo ja niihin liittyvät erikoistapaukset ja näytetään, että kahden välin summa on väli. Luvussa 1 esitellään vielä täydellisyysaksiooma hieman erilaisessa muodossa, kuin missä se on totuttu näkemään.

Kappaleessa 2 tutustutaan jatkuvuuden käsitteeseen ja määrittelemiseen. Jatkuvuuden tarkastelu aloitetaan aidosti monotonisista funktioista ja niiden ominaisuuksista. Ensin määritellään monotonisen funktion jatkuvuus ja tämän jälkeen pyritään yleistämään jatkuvuuden määritelmää. Huomataan, että avoimia joukkoja tarvitaan jatkuvuutta määriteltäessä ja tämän vuoksi esitellään avoin joukko ja joitain niiden ominaisuuksista. Luvussa esitellään jatkuvuudelle kaksi määritelmää, joista toinen on tutumpi $\varepsilon - \delta$-määritelmä ja toinen Mauden käyttämä avointen joukkojen avulla tehty jatkuvuuden määritelmä. Lopuksi näytetään, että nämä kaksi määritelmää ovat yhtäpitäviä.

Seuraavaksi kappaleessa 3 otetaan edellisessä kappaleessa esitellyt jatkuvuuden määritelmät käyttöön. Tarkoituksena on esitellä jatkuvien funktioiden ominaisuuksia ja tarjota niille kaksi erilaista todistusta kahden eri määritelmän avulla. Kappaleessa todistetaan yhdistetyn funktion, summafunktion, tulofunktion ja osamääräfunktion jatkuvuudet. Joihinkin todistuksiin tarvitaan sinällään tärkeitä aputuloksia ja myös nämä esitellään ja todistetaan tässä kappaleessa. Lisäksi näytetään muutamien tuttujen funktioiden jatkuvuus ja todistetaan, että vakiolla kerrottu jatkuva funktio on myös jatkuva. Näytetään myös, että jatkuva funktio on rajoitettu lokaalisti. Saman ominaisuuden todistukset on asetettu lähes aina peräkkäin, jotta niiden vertailu helpottuu. Tarkoituksena on huomata todistusten erot ja yhtäläisyydet ja tarjota myös mahdollisuus selvittää kumman määritelmän käyttö on selkeämpää tai helpompaa.

Luvussa 4 palataan hiukan taakse päin. Aletaan tarkastella taas avoimia joukkoja ja niiden ominaisuuksia. Tässä kappaleessa esitellään kaksi tärkeää lausetta, jotka ovat Heine-Borellin lause ja jatkuvien funktioiden väliarvolause. Näiden lauseiden avulla voidaan näyttää, että jos funktio f on jatkuva avoimella välillä J siten, että $[a, b] \subset J$, niin tällöin $f([a, b])$ on suljettu ja rajoitettu väli. Lisäksi saadaan perusteltua, miksi jatkuvuuden määritelmää laajennettiin siten, että lähtöjoukon ei tarvitse olla avoin väli.

Viimeisessä kappaleessa perehdytään jatkuvuuteen opettajan näkökulmasta ja valitaan vertailuun neljä eri lukion pitkän matematiikan kirjasarjaa. Tarkasteluun otetaan Pyramidi-kirjasarjan kurssit 7 Derivaatta [**7**] ja 13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi [**8**]. Lisäksi tutkitaan Matematiikan taito 7 Derivaatta [**1**] ja 13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi [**2**] -kirjoja. Kaksi muuta kirjasarjaa olivat melko uusi Juuri-kirjasarja, josta tarkastellaan kirjoja 6 Derivaatta [**3**] ja 13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi [**4**] sekä Lukion Calculus -sarjan kirjat Calculus 4 [**5**] ja Calculus 13 [**6**]. Tarkoituksena on pohtia, miten kirjasarja pohjustaa jatkuvuuden käsitteeseen siirtymistä ja missä järjestyksessä se esittelee jatkuvuuden määrittelyn kannalta oleelliset asiat. Lisäksi tutkitaan, mitä eri jatkuvien funktioiden ominaisuuksia ja tuloksia kirjasarjat nostavat esille. Vertailtavana kohteena on myös kirjojen tarjoamat tehtävät ja niiden laajuus ja monipuolisuus. Lopuksi mietitään vielä tutkielmassa esiteltyjen määritelmien mahdollista käyttöä lukio-opetuksessa verrattuna kirjasarjoissa käytettyyn raja-arvon avulla määriteltyyn jatkuvuuteen ja pohditaan matematiikan opettajan työtapoja ja työkaluja jatkuvuuden opettamiseen tämän hetken koulumaailmassa.

LUKU 1

Väli

Reaalilukujoukko, jolle pätee, että joukon jokaisen kahden luvun välissä oleva luku kuuluu myös joukkoon, on väli. Välejä ja niiden ominaisuuksia tarvitaan etenkin käsiteltäessä avoimia joukkoja, joita tarkastellaan myöhemmin. Tässä kappaleessa määritellään väli ja esitellään väleille tärkeitä ominaisuuksia. Nämä määrittelyt ja ominaisuudet seuraavat melko tarkasti Mauden Mathematical Analysis [**10**] -kirjan kappaleessa 2 esiteltyjä tuloksia. Näitä ominaisuuksia voidaan käyttää hyväksi myöhemmissä todistuksissa. Määritellään ensin, mitä tarkoitetaan luvun välissäololla.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoot luvut a, b ja c siten, että $a, b, c \in \mathbb{R}$. Luvun c sanotaan olevan lukujen a ja b välissä, jos jompi kumpi seuraavista epäyhtälöpareista pätee:

(1) $a > c$ ja $b < c$, jolloin $a < c < b$
(2) $a < c$ ja $b > c$, jolloin $b < c < a$.

Koska edellisen määritelmän perusteella tiedetään, mitä tarkoittaa lukujen välissäolo, voidaan sen pohjalta antaa virallinen määritelmä välille.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Joukko $I \subset \mathbb{R}$ on väli jos ja vain jos kaikille $\alpha, \beta \in I$ pätee, että jos luku x on lukujen α ja β välissä, niin tällöin $x \in I$.

Välejä on monen tyyppisiä. On olemassa suljettuja, avoimia ja puoliavoimia välejä. Näissä eri tapauksissa välin päätepisteet voivat kuulua väliin tai sitten eivät. Esimerkiksi olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. Joukko $I_1 = [a, b]$ on suljettu väli. Joukko $I_2 =]a, b[$ on avoin väli, jota voidaan merkitä myös (a, b). Joukko $I_3 = [a, b[$ on puoliavoin väli. Näissä esimerkeissä välien päätepisteet esitellään lukujen a ja b avulla, mutta annetaan seuraavaksi päätepisteille ja erilaisille väleille viralliset määritelmät.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Olkoon joukko I väli siten, että $c \in I$. Piste a on välin päätepiste, jos siitä että a on pisteiden c ja x välissä seuraa, että $x \notin I$, ja toisaalta kaikille x, jotka ovat pisteiden c ja a välissä pätee, että $x \in I$. Jos $a \leq c$, niin a on välin I vasemmanpuoleinen päätepiste, ja jos $c \leq a$, niin a on välin I oikeanpuoleinen päätepiste.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ pisteitä siten, että $a < b$.

(a) Avoin väli on muotoa $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$, missä välin päätepisteet eivät kuulu joukkoon $]a, b[$.
(b) Suljettu väli on muotoa $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$, missä välin päätepisteet kuuluvat joukkoon $[a, b]$.
(c) Puoliavoin väli on esimerkiksi muotoa $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$, missä oikeanpuoleinen päätepiste b ei kuulu joukkoon $[a, b[$. Vastaavasti voi olla tilanne, missä oikeanpuoleinen päätepiste b kuuluu joukkoon $]a, b]$ ja vasemmanpuoleinen päätepiste a ei kuulu joukkoon $]a, b]$.

Välin päätepistettä ei aina ole olemassa, sillä on myös välejä, joissa toista päätepistettä ei voida määritellä. Esimerkiksi joukko

$$]-\infty, b] = \{x \in A \mid x \leq b\}$$

on tällainen. Seuraavaksi herää varmasti kysymys, että entä jos kumpaakaan päätepistettä ei voida määritellä. Tarkastellaan joukkoa $]-\infty,\infty[$ ja huomataan, että se on koko reaaliakseli. Jos täytyy saada tietää, onko jokin joukko väli, niin todistamiseen voidaan käyttää välin määritelmää. Voidaan myös käyttää apuna ehtoa, jonka seuraava lause tarjoaa.

Lause 1.5. *Epätyhjä reaalilukuja sisältävä joukko I on väli jos ja vain jos on olemassa piste $c \in I$ siten, että jokaiselle $\gamma \in I$ pätee, että jos $c < x < \gamma$ tai $\gamma < x < c$, niin tällöin $x \in I$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että I on väli. Olkoot pisteet $c, \gamma \in I$. Välin määritelmän nojalla, jos piste x on pisteiden c ja γ välissä, niin tällöin $x \in I$.

Oletetaan nyt, että on olemassa piste $c \in I$ siten, että jos $\gamma \in I$ ja x on pisteiden c ja γ välissä, niin tällöin $x \in I$. Täytyy osoittaa, että I on väli. Olkoot pisteet $a, d \in I$ ja lisäksi piste b näiden välissä. Tällöin piste b voidaan esittää muodossa

$$b = a + t(d-a),$$

missä $t \in]0,1[$. Edelleen lauseke voidaa saattaa muotoon

$$(b-a)(1-t) = (d-b)t.$$

Koska $1-t > 0$ ja $t > 0$, niin $a-b$ ja $d-b$ ovat erimerkkisiä. Koska $a-b$ ja $d-b$ ovat erimerkkisiä, niin tällöin $a-b$ tai $d-b$ on samanmerkkinen luvun $b-c$ kanssa, paitsi jos $b = c$. Määritellään τ seuraavasti:

$$\tau = \begin{cases} (b-c)/(a-c) & \text{jos} \quad (a-b)(b-c) > 0 \\ (b-c)/(d-c) & \text{jos} \quad (d-b)(b-c) > 0 \end{cases}.$$

Edelleen lauseketta muokkaamalla saadaan se muotoon

$$(b-c)(1-\tau) = \begin{cases} (a-b)\tau & \text{jos} \quad (a-b)(b-c) > 0 \\ (d-b)\tau & \text{jos} \quad (d-b)(b-c) > 0 \end{cases}.$$

Tällöin $1-\tau$ ja τ ovat samanmerkkisiä. Jos $1-\tau$ ja τ olisivat negatiivisia, niin tällöin $1 < \tau < 0$, mikä ei voi pitää paikkaansa. Siispä $1-\tau > 0$ ja $\tau > 0$ ja näin ollen $0 < \tau < 1$. Tällöin pisteelle b pätee joko

$$b = c + \tau(a-c)$$

tai

$$b = c + \tau(d-c),$$

missä $0 < \tau < 1$. Tämä tarkoittaa siis, että piste b on pisteiden a ja c välissä tai pisteiden d ja c välissä. Tai voi myös olla, että $b = c$. Kaikissa näissä tapauksissa kuitenkin oletuksen nojalla $b \in I$, jonka perusteella I siis on väli. □

Välejä voidaan yhdistää siten, että saadaan edelleen väli. Seuraavassa lauseessa näytetään, miten se on mahdollista tehdä.

LAUSE 1.6. *Olkoon* $\{I_\alpha\}$ *epätyhjä joukko välejä siten, että on olemassa piste* c*, joka sisältyy jokaiseen joukon* $\{I_\alpha\}$ *väliin. Tällöin* $\bigcup_\alpha I_\alpha$ *on väli, joka sisältää pisteen* c*.*

TODISTUS. Mille tahansa luvulle $\gamma \in \bigcup_\alpha I_\alpha$ on olemassa yhdisteen määritelmän mukaan indeksi a, jolle $\gamma \in I_a$. Joten välin määritelmän perusteella, jos x on pisteiden c ja γ välissä, niin $x \in I_a$ ja siispä $x \in \bigcup_\alpha I_\alpha$. Tällöin lauseen 1.5 perusteella $\bigcup_\alpha I_\alpha$ on väli. Nyt siis $c \in \bigcup_\alpha I_\alpha$, koska $c \in I_\alpha$ ainakin yhdellä indeksillä α, sillä $\{I_\alpha\}$ sisältää ainakin yhden välin. $\square$

LAUSE 1.7. *Jos* $\{I_\alpha\}$ *on mikä tahansa joukko välejä, niin tällöin* $\bigcap_\alpha I_\alpha$ *on väli.*

TODISTUS. Jos luvut $\gamma, \delta \in \bigcap_\alpha I_\alpha$, niin tällöin $\gamma, \delta \in I_\alpha$ kaikilla α. Koska jokainen I_α on väli, niin välin määritelmän mukaan, jos $\gamma < x < \delta$, niin $x \in I_\alpha$ kaikilla α. Siispä $x \in \bigcap_\alpha I_\alpha$. Joten jos sekä $\gamma, \delta \in \bigcap_\alpha I_\alpha$ että $\gamma < x < \delta$, niin $x \in \bigcap_\alpha I_\alpha$. Siispä $\bigcap_\alpha I_\alpha$ on väli. $\square$

Seuraavaksi voidaan määritellä kaksi tapaa, joilla mitkä tahansa kaksi joukkoa voidaan yhdistää. Joukot voidaan yhdistää summaamalla tai kertomalla ne keskenään.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoot X ja Y mitä tahansa reaalilukujoukkoja. Tällöin joukot $X + Y$ ja $X \cdot Y$ määritellään seuraavasti:

(a) $X + Y = \{z \,|\, z = x + y, \quad \text{missä} \quad x \in X \quad \text{ja} \quad y \in Y\}$
(b) $X \cdot Y = \{z \,|\, z = x \cdot y, \quad \text{missä} \quad x \in X \quad \text{ja} \quad y \in Y\}$

Seuraavat joukot A ja B ovat määritelmän 1.8 joukkojen erityistapauksia. Määritellään joukko
$$A = \{a\} + I = \{a + i \,|\, i \in I\}$$
ja joukko
$$B = \{a\} \cdot I = \{a \cdot i \,|\, i \in I\}.$$
Tämän jälkeen voidaan todistaa, että jos I on väli, niin myös joukot A ja B ovat välejä.

LAUSE 1.9. *Jos reaalilukuja sisältävä joukko* I *on väli ja* $a \in \mathbb{R}$*, niin tällöin* $\{a\}+I$ *ja* $\{a\} \cdot I$ *ovat välejä.*

TODISTUS. Jos $x, y \in \{a\} + I$ ja $x < y$, niin $x - a$, $y - a \in I$ ja $x - a < y - a$. Siispä mille tahansa z, jolle $x < z < y$, pätee
$$x - a < z - a < y - a$$
ja koska I on väli, niin $z - a \in I$. Koska $z - a \in I$, niin $z = a + (z - a) \in \{a\} + I$ joukon $\{a\} + I$ määritelmän perusteella. Siispä $\{a\} + I$ on väli.

Oletetaan, että $a \neq 0$. Jos $x, y \in \{a\} \cdot I$ ja oletetaan, että $x < y$, niin tällöin x/a, $y/a \in I$. Tällöin myös mille tahansa z, jolle $x < z < y$, pätee, että z/a on pisteiden x/a ja y/a välissä. Jos $a > 0$, niin
$$x/a < z/a < y/a$$
ja jos $a < 0$, niin
$$y/a < z/a < x/a.$$

Koska I on väli niin $z/a \in I$, ja siten $z \in \{a\} \cdot I$. Siispä $\{a\} \cdot I$ on väli. Jäljelle jääneessä tapauksessa, missä $a = 0$ pätee $\{a\} \cdot I = \{0\} = [0, 0]$, paitsi jos $I = \emptyset$, jolloin myös $\{a\} \cdot I = \emptyset$. $\square$

Oletetaan, että määritelmän 1.8 (a) joukot ovat välejä. Todistetaan, että myös kahden välin summa on väli.

Lause 1.10. *Jos I ja J ovat välejä, niin myös joukko $I + J$ on väli.*

Todistus. Jos joko I tai J on tyhjä joukko, niin tällöin myös $I+J$ on tyhjä joukko ja tyhjä joukko on väli. Oletetaan, että molemmat joukot I ja J sisältävät lukuja. Lauseen 1.9 nojalla voidaan yksinkertaistaa todistusta siten, että valitaan välit, jotka molemmat sisältävät luvun 0. Olkoot $x \in I$ ja $y \in J$. Merkitään $I^{'} = I - \{x\}$ ja $J^{'} = J - \{y\}$. Tällöin

$$I^{'} + J^{'} = I + J - \{x + y\}.$$

Olkoon $z \in I^{'} + J^{'}$, joka voidaan kirjoittaa muodossa $z = x^{'} + y^{'}$, missä $x^{'} \in I^{'}$ ja $y^{'} \in J^{'}$. Edelleen z voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = x_1 - x + y_1 - y = x_1 + y_1 - (x + y),$$

missä $x_1 \in I$ ja $y_1 \in J$. Lauseen 1.9 mukaan $I^{'}$ ja $J^{'}$ ovat välejä. Täytyy todistaa, että $I^{'} + J^{'}$ on väli, jolloin $I + J = I^{'} + J^{'} + \{x + y\}$ on väli. Koska $0 \in I^{'}$ ja $0 \in J^{'}$ niin $0 \in I^{'} + J^{'}$. Olkoon $w \in I^{'} + J^{'}$. Tällöin on olemassa luvut $u \in I^{'}$ ja $v \in J^{'}$ siten, että $w = u + v$. Oletetaan, että s on lukujen 0 ja w välissä. Täytyy siis näyttää, että $s \in I^{'} + J^{'}$. Nyt $s = su/w + sv/w$, ja $0 < s/w < 1$. Siispä $(s/w)u$ on lukujen 0 ja u välissä ja vastaavasti $(s/w)v$ on lukujen 0 ja v välissä. Siispä $su/w \in I^{'}$ ja $sv/w \in J^{'}$, joten $s \in I^{'} + J^{'}$. Tällöin $I^{'} + J^{'}$ on väli. $\square$

Seuraava aksiooma takaa, ettei reaaliakselilla ole aukkoja tai puuttuvia pisteitä. Tämä aksiooma tunnetaan paremmin nimellä täydellisyysaksiooma.

Aksiooma 1.11. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja olkoot pisteet c ja d siten, että $c \in I$ ja $d \notin I$. Tällöin on olemassa päätepiste $a \in I$, joka on pisteiden c ja d välissä.

Tämä on yksi muoto, miten täydellisyysaksiooma voidaan esitellä ja tätä muotoa myös käytetään todistuksissa. Tutumpi muoto sanoo, että jos $A \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu joukko, niin tällöin on olemassa $\sup A$.

Lause 1.12. *Olkoon I epätyhjä avoin väli. Lisäksi olkoot myös J ja K epätyhjiä avoimia välejä siten, että $J \cap K = \emptyset$. Tällöin $I \neq J \cup K$.*

Todistus. Tehdään vastaväite, että olisikin $I = J \cup K$. On olemassa luvut $a \in J$ ja $b \in K$ siten, että $b \notin J$. Lisäksi aksiooman 1.11 nojalla on olemassa välin J päätepiste c, joka on lukujen a ja b välissä. Koska J on avoin väli, niin $c \notin J$. Toisaalta oletuksen nojalla on oltava, että $c \in I$, koska c on lukujen a ja b välissä. Koska $c \notin J$, niin täytyy olla, että $c \in K$, että vastaoletus olisi totta. Oletetaan, että $a > c$. Nyt koska K on avoin väli, c ei ole päätepiste, joten on olemassa luku $\beta \in K$, jolle pätee $c < \beta < a$. Jos taas $a < c$, niin vastaavasti löytyy $\alpha \in K$ siten, että $a < \alpha < c$. Tästä seuraa ristiriita, sillä vastaoletuksen nojalla kaikkien pisteiden pisteiden a ja c väliltä piti kuulua joukkoon J, mutta löytyikin piste α tai β pisteiden a ja c väliltä siten, että $\alpha, \beta \in K$. Siispä alkuperäinen väite pätee. $\square$

LUKU 2

Jatkuvuuden määrittely

Tässä kappaleessa tutustutaan jatkuvuuden käsitteeseen ja sen määrittelemiseen. Aloitetaan tarkastelu monotonisista funktioista ja täydennetään määritelmää edettäessä. Määritellään myös, mitä tarkoitetaan avoimella joukolla ja esitellään niihin liittyviä tuloksia. Huomataan, että avoimet joukot liittyvät oleellisesti funktion jatkuvuuteen. Jatkuvuudelle esitellään kaksi määritelmää ja lopuksi myös näytetään, että nämä määritelmät ovat yhtäpitävät. Tässä kappaleessa on käytetty Mauden Mathematical Analysis [**10**] -kirjan kappaleita 3 ja 5 sekä Elementary Real Analysis [**12**] -kirjan kappaletta 5. Jatkuvuus on yksi analyysin tärkeimmistä asioista. Sen tärkeys havaitaan, kun huomataan mitä tuloksia jatkuvuuden määritelmästä seuraa ja mitä kaikkia sovelluksia näillä tuloksilla on. Aluksi termi jatkuva funktio saattaa herättää mielikuvan, että se on funktio, jonka graafi ei katkea tai siinä ei ole hyppyjä. Tämä selitys kuullaan usein ainakin lukiossa. Tämä selitys liittyy kyllä oleellisesti jatkuvuuteen, mutta ei kerro lainkaan riittävästi, mitä jatkuvalta funktiolta vaaditaan. Jatkuvuuden käsite on paljon monimutkaisempi.

Aloitetaan siihen syventyminen tarkastelemalla ensin monotonisia funktioita ja niiden yhteyttä funktion jatkuvuuteen. Osoitetaan ensin, että aidosti monotonisella funktiolla on olemassa käänteisfunktio. Tämä on yksi aidosti monotonisen funktion tärkeimmistä ominaisuuksista.

LAUSE 2.1. *Jos funktio $f : E \to F$, missä $E, F \subset \mathbb{R}$ ja $F = f(E)$, on aidosti monotoninen joukossa E, niin sille on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : F \to E$.*

TODISTUS. Oletetaan, että luvut $x, y \in E$ ja $f(x) = f(y)$. Jos olisi, että $x < y$ tai $x > y$, niin $f(x) \neq f(y)$. Tällöin täytyy olla, että myös $x = y$. Siispä jokaiselle $z \in F$ on olemassa yksi vastaava luku x joukossa E siten, että $f(x) = z$. Tällöin siis $f^{-1}(z) = x$, joten funktio $f^{-1} : F \to E$ on funktion f käänteisfunktio. □

Seuraavasta lauseesta saadaan aidosti monotonisen funktion ominaisuus, joka antaa jollekin luvulle, joka on joidenkin kahden luvun välissä, hyödyllisen ehdon.

LAUSE 2.2. *Olkoon $f : E \to \mathbb{R}$ aidosti monotoninen funktio joukossa E, ja olkoot pisteet a, b ja c siten, että $a, b, c \in E$. Tällöin luku b on lukujen a ja c välissä jos ja vain jos luku $f(b)$ on lukujen $f(a)$ ja $f(c)$ välissä. Toisin sanoen*

$$(a-b)(b-c) > 0 \text{ jos ja vain jos} (f(a)-f(b))(f(b)-f(c)) > 0.$$

TODISTUS. Oletetaan, että funktio f on aidosti kasvava. Tällöin kaikille $a, b \in E$ pätee, että $a < b$ jos ja vain jos $f(a) < f(b)$. Siispä $f(a) - f(b)$ on samanmerkkinen kuin $a - b$. Lisäksi myös kaikille $b, c \in E$ pätee, että $f(b) - f(c)$ on samanmerkkinen kuin $b - c$. Siispä $(f(a) - f(b))(f(b) - f(c))$ on samanmerkkinen kuin $(a - b)(b - c)$. Oletetaan nyt, että funktio f on aidosti vähenevä. Tällöin kaikille $a, b \in E$ pätee, että $a < b$ jos ja vain jos $f(a) > f(b)$. Siispä $(-1)(f(a) - f(b))$ on samanmerkkinen kuin

$a-b$. Lisäksi myös kaikille $b, c \in E$ pätee, että $(-1)(f(b)-f(c))$ on samanmerkkinen kuin $b-c$. Siispä myös tässä tapauksessa $(f(a)-f(b))(f(b)-f(c))$ on samanmerkkinen kuin $(a-b)(b-c)$. □

Aidosti monotonisuus on vahva ominaisuus, mutta se ei tarkoita, että selviäisimme kaikista aidosti monotonisista funktioista ilman päänvaivaa. Olkoon g funktio siten, että

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos} \quad x > 1 \\ x, & \text{jos} \quad x \leq 1 \end{cases}.$$

Nyt, jos valitaan mitkä tahansa pisteet x_1 ja x_2, niin ne voivat olla todella lähellä toisiaan, mutta silti voisi olla, että $x_1 < 1 < x_2$. Tällöin $g(x_1) < 1$ ja $g(x_2) > 2$, joten pisteet, jotka näyttivät olevan lähes samat lähtöpisteinä ovatkin tarkasteltaessa funktion g arvoa aivan erit. Täytyy siis huomoida funktiot, joiden arvojoukossa on aukkoja, kuten funktiolla g on arvojoukossaan aukko lukujen 1 ja 2 välillä. Määritellään seuraavaksi monotonisen funktion jatkuvuuden ehto.

Määritelmä 2.3. Olkoon funktio f aidosti monotoninen avoimella välillä J. Funktio f on jatkuva joukossa J jos ja vain jos funktion f kuva mistä tahansa avoimesta välistä $I \subset J$ on avoin väli $f(I)$.

Voidaan siis valita jokin avoin väli I aidosti monotonisen funktion f lähtöjoukosta. Sen jälkeen tutkitaan, miten $f(I)$ käyttäytyy. Jos huomataan, että $f(I)$ koostuu kahdesta erillisestä avoimesta välistä yhden avoimen välin sijaan, niin voidaan päätellä, että f ei ole jatkuva. Epäjatkuvuus seuraa myös, jos $f(I)$ ei ole avoin väli. Graafisesti tämä voi havainnollistaa etenkin epäjatkuvuutta selkeämmin ja konkreettisemmin. Aidosti monotonisten funktioiden tarkastelu antaa hyvän pohjan jatkuvuuden määrittelylle, ja tästä on hyvä alkaa kehittämään määritelmää.

Seuraava lause takaa, että aiemmin mainitun funktion g esimerkkitapauksen kaltaisia aukko-tilanteita ei synny myöskään alkukuvien suhteen.

Lause 2.4. *Olkoon $f : J \to F$, missä J on avoin väli ja $F \subset \mathbb{R}$, aidosti monotoninen funktio. Funktio f on jatkuva jos ja vain jos jokaiselle avoimelle välille I pätee, että $f^{-1}(I)$ on avoin väli.*

Todistus. Jos funktio f on jatkuva, niin $f(J)$ on avoin väli. Nyt

$$f^{-1}(I) = f^{-1}(I \cap f(J)),$$

joten voidaan olettaa, että $I \subset f(J)$. Olkoot $\alpha, \beta \in f^{-1}(I)$ luvut siten, että $f(\alpha), f(\beta) \in I$. Mille tahansa luvulle x, joka on lukujen α ja β välissä pätee, että

$$(\alpha - x)(x - \beta) > 0,$$

joten lauseen 2.2 nojalla myös

$$(f(\alpha) - f(x))(f(x) - f(\beta)) > 0.$$

Koska I on väli, niin $f(x) \in I$ ja etenkin $x \in f^{-1}(I)$. Siispä $f^{-1}(I)$ on väli. Olkoon $\alpha \in f^{-1}(I)$ mikä tahansa luku. Koska I on avoin väli, on olemassa luvut $a, b \in I$ siten, että $a < f(\alpha) < b$. Tällöin $f^{-1}(a), f^{-1}(b) \in f^{-1}(I)$ ja luku α on lukujen $f^{-1}(a)$ ja $f^{-1}(b)$ välissä. Siispä α ei ole välin $f^{-1}(I)$ päätepiste, joten $f^{-1}(I)$ on avoin väli.

Oletetaan nyt, että jokaiselle avoimelle välille I pätee, että $f^{-1}(I)$ on avoin väli. Täytyy siis osoittaa, että funktio f on jatkuva. Olkoon $U \subset J$ avoin väli ja oletetaan, että $\alpha, \beta \in U$. Olkoon y_0 luku lukujen $f(\alpha)$ ja $f(\beta)$ välissä. Jos $y_0 \notin f(U)$, niin olisi

$$f(U) = f(U) \cap ((-\infty, y_0) \cup (y_0, \infty)),$$

missä $(-\infty, y_0) \cup (y_0, \infty) = \mathbb{R} \backslash \{y_0\}$. Tästä taas saadaan, että

$$U = U \cap (f^{-1}((-\infty, y_0)) \cup f^{-1}((y_0, \infty))).$$

Funktion f oletusten nojalla $U \cap (f^{-1}((-\infty, y_0)$ ja $U \cap f^{-1}((y_0, \infty))$ ovat kuitenkin avoimia välejä. Koska $f^{-1}(y_0)$ on lukujen α ja β välissä funktion f monotonisuuden nojalla, niin luku α on toisessa näistä edellä mainituista avoimista väleistä ja β on toisessa. Lisäksi

$$(-\infty, y_0) \cap (y_0, \infty) = \emptyset,$$

jolloin myös

$$(U \cap f^{-1}((-\infty, y_0))) \cap (U \cap f^{-1}((y_0, \infty))) = \emptyset.$$

Tällöin tämä on ristiriidassa lauseen 1.12 kanssa, joten $y_0 \in f(U)$, jolloin siis $f(U)$ on väli. Nyt kaikille $y_1 \in f(U)$ pätee, että $f^{-1}(y_1) \in U$, missä U on avoin väli. On siis olemassa luvut $a, b \in U$ siten, että $a < f^{-1}(y_1) < b$, mikä tarkoittaa siis, että luku $f^{-1}(y_1)$ on lukujen a ja b välissä. Muistetaan, että $f(a), f(b) \in f(U)$, joten y_1 ei voi olla välin $f(U)$ päätepiste. Tällöin $f(U)$ on avoin väli. □

Lauseen 2.4 avulla saadaan näytettyä, että avoimella välillä aidosti monotonisen ja jatkuvan funktion käänteisfunktio on myös aidosti monotoninen ja jatkuva.

LAUSE 2.5. *Olkoon funktio f aidosti monotoninen ja jatkuva avoimella välillä I. Tällöin funktio f^{-1} on aidosti monotoninen ja jatkuva avoimella välillä $f(I)$.*

TODISTUS. Tiedetään, että funktio f on aidosti monotoninen joukossa I. Tällöin pätee, että

$$(a-b)(f(a)-f(b))$$

on samanmerkkinen kaikilla $a, b \in I$, eli yhtäpitävästi

$$(f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(\beta))(\alpha - \beta)$$

on samanmerkkinen kaikilla $\alpha, \beta \in f(I)$. Tällöin siis funktio f^{-1} on aidosti monotoninen välillä $f(I)$. Jatkuvuuden määritelmän perusteella funktio f^{-1} on jatkuva välillä $f(I)$ jos ja vain jos kaikille avoimille väleille $J \subset f(I)$ pätee, että $f^{-1}(J)$ on avoin väli. Siispä koska funktio f on jatkuva välillä I, niin lauseen 2.4 nojalla myös funktio f^{-1} on jatkuva välillä $f(I)$. □

Määritellään seuraavaksi avoin joukko ja esitellään joitain avoimien joukkojen ominaisuuksia.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Joukko $U \subset \mathbb{R}$ on avoin joukko jos ja vain jos on avointen välien kokoelma $\{I_\alpha\}$ siten, että $U = \bigcup_\alpha I_\alpha$.

Seuraava lause on ikään kuin vaihtoehtoinen määritelmä avoimelle joukolle. Usein onkin helpompi käyttää tätä lausetta, kuin varsinaista avoimen joukon määritelmää esimerkiksi todistuksissa.

LAUSE 2.7. *Joukko $U \subset \mathbb{R}$ on avoin joukko jos ja vain jos kaikille $x \in U$ pätee, että $x \in I_x \subset U$, missä I_x on avoin väli.*

TODISTUS. Koska U on avoin joukko, niin U on yhdiste avointen välien kokoelmasta $\{I_\alpha\}$. Joten $x \in U$ jos ja vain jos $x \in I_a$ jollakin a, missä $I_a \subset U$.
Olkoon $x \in U$. Tälllöin on olemassa avoin väli I_x siten, että $x \in I_x \subset U$. Tällöin

$$U \subset \bigcup_{x \in U} I_x \subset U \quad \text{eli} \quad U = \bigcup_{x \in U} I_x.$$

Siispä U on avoin joukko. $\square$

Esitellään seuraavaksi merkintätapa

$$B(x,\delta) =]x - \delta, x + \delta[.$$

Yhtäpitävästi määritelmän 2.6 kanssa, joukko U on avoin, jos kaikille $x \in U$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $B(x,\delta) \subset U$.

Näytetään, että avointen joukkojen kokoelman yhdiste on avoin joukko. Myös minkä tahansa avointen joukkojen äärellisen kokoelman leikkaus on avoin joukko, mutta tätä tulosta ei todisteta.

LAUSE 2.8. *Avointen joukkojen kokoelman yhdiste on avoin joukko.*

TODISTUS. Olkoon $\{U_\alpha\}$, missä $\alpha \in \Omega$, kokoelma avoimia joukkoja. Kaikille

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$$

on yhdisteen määritelmän nojalla olemassa $a \in \Omega$ siten, että $x \in U_a$. Siispä lauseen 2.7 nojalla on olemassa avoin väli I, jolle pätee, että $x \in I \subset U_\alpha$, joten

$$x \in I \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha.$$

Lauseen 2.7 nojalla $\bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$ on avoin joukko. $\square$

Aiemmin esiteltiin jatkuvuuden määritelmä, kun käsiteltiin aidosti monotonisia funktioita. Nyt määritelmää halutaan laajentaa siten, että kyseessä ei tarvitse olla ainoastaan aidosti monotoniset funktiot. Määritelmän laajentamisessa täytyy tarkastella avointen välien alkukuvia. Avoimet joukot määritellään avointen välien yhdisteinä ja jatkuville funktioille alkukuvat avoimista väleistä ovat avoimia joukkoja. Määritellään nyt funktion jatkuvuus siten, että funktion lähtöjoukkona on oltava avoin väli.

MÄÄRITELMÄ 2.9. Olkoon $f : J \to \mathbb{R}$ funktio siten, että $J \subset \mathbb{R}$ on avoin väli. Funktio f on jatkuva jos ja vain jos jokaiselle avoimelle välille I, $f^{-1}(I)$ on avoin joukko.

Siispä monotoninen funktio, joka oli jatkuva määritelmän 2.3 nojalla, on myös jatkuva yllä mainitun määritelmän nojalla. Lisäksi lauseen 2.2 nojalla, jos funktio f on aidosti monotoninen ja I on väli, niin $f^{-1}(I)$ on väli. Tällöin ei ole olemassa määritelmän 2.3 nojalla olevia epäjatkuvia aidosti monotonisia funktioita, jotka olisivatkin jatkuvia määritelmän 2.9 nojalla. Saatetaan jatkuvuuden määritelmä lopulta seuraavanlaiseen muotoon.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Funktio $f : E \to \mathbb{R}$ on jatkuva joukossa E jos ja vain jos jokaiselle avoimelle välille I, $f^{-1}(I)$ on jonkin avoimen joukon ja joukon E leikkaus, eli toisin sanoen $f^{-1}(I)$ on avoin joukossa E.

Haluttiin siis laajentaa funktion f lähtöjoukko miksi tahansa joukoksi E. Se, miten tähän laajennukseen päädyttiin, perustellaan tarkemmin kappaleessa 4 lauseen 4.8 jälkeen.

Nyt on määritelty jatkuvuus avointen joukkojen avulla. Esitellään seuraavaksi tutumpi määritelmä jatkuvuudelle, joka tunnetaan myös nimellä jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmä. Huomataan, että määritelmä 2.10 käsittelee jatkuvuutta joukossa E, kun taas seuraava määritelmä tarkastelee jatkuvuutta aluksi pisteessä x_0.

MÄÄRITELMÄ 2.11. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ ja $x_0 \in E$. Funktio $f : E \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, kun $|x - x_0| < \delta$ ja $x \in E$. Funktio f on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in E$.

Määritelmän 2.11 ehto voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$f(B(x_0, \delta) \cap E) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

tai muodossa

$$B(x_0, \delta) \cap E \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)).$$

Määritellään vielä, mitä tarkoitetaan pisteen ympäristöllä.

MÄÄRITELMÄ 2.12. Joukkoa V sanotaan pisteen x_0 ympäristöksi, jos on olemassa avoin joukko U siten, että $x_0 \in U \subset V$.

Yhtäpitävästi V on pisteen x_0 ympäristö, jos $B(x_0, r) \subset V$ jollakin r. Seuraavista lauseista selviää, että määritelmät 2.10 ja 2.11 ovat yhtäpitäviä jatkuvuudelle joukossa E.

LAUSE 2.13. *Olkoon funktio $f : E \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in E$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(a) *funktio f on jatkuva pisteessä x_0.*
(b) *Jokaista pisteen $f(x_0)$ ympäristöä V kohti on olemassa pisteen x_0 ympäristö U siten, että $f(U \cap E) \subset V$.*
(c) *Jokaista pisteen $f(x_0)$ ympäristöä V kohti on olemassa pisteen x_0 ympäristö U siten, että $U \cap E \subset f^{-1}(V)$.*

TODISTUS. Osoitetaan ensiksi, että $(a) \Rightarrow (b)$. Olkoon V pisteen $f(x_0)$ ympäristö. Tällöin on $\varepsilon > 0$ siten, että $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Koska f on jatkuva pisteessä x_0, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(B(x_0, \delta) \cap E) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset V.$$

Siis $U = B(x_0, \delta)$ on vaadittu pisteen x_0 ympäristö.

Osoitetaan seuraavaksi, että $(b) \Rightarrow (c)$. Ehdosta $f(U \cap E) \subset V$ seuraa, että $U \cap E \subset f^{-1}(V)$, koska jos $x \in U \cap E$, niin $f(x) \in f(U \cap E) \subset V$. Siispä $x \in f^{-1}(V)$.

Viimeisenä näytetään, että $(c) \Rightarrow (a)$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $V = B(f(x_0), \varepsilon)$ on pisteen $f(x_0)$ ympäristö. Tiedetään, että on olemassa pisteen x ympäristö U siten, että $U \cap E \subset f^{-1}(V)$. On siis olemassa $\delta > 0$, jolle pätee, että $B(x_0, \delta) \subset U$. Tällöin

$$B(x_0, \delta) \cap E \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)).$$

Siispä f on jatkuva pisteessä x_0. □

Edellinen lause käsitteli pisteittäistä jatkuvuutta, ja seuraava lause käsittelee jatkuvuutta joukossa E.

LAUSE 2.14. *Olkoon $f : E \to \mathbb{R}$ funktio. Funktio f on jatkuva $\epsilon - \delta$-määritelmän mukaan jos ja vain jos jokaiselle avoimelle joukolle V pätee, että joukko $f^{-1}(V)$ on avoin joukossa E.*

TODISTUS. Oletetaan, että f on jatkuva. Olkoon V avoin joukko ja $x_0 \in f^{-1}(V)$. Valitaan luvut α ja β, missä $\alpha < \beta$, siten, että $]\alpha, \beta[\subset V$ ja lisäksi $x_0 \in f^{-1}\big(]\alpha, \beta[\big)$. Tällöin $\alpha < f(x_0) < \beta$. Halutaan löytää luvun x_0 ympäristö U siten, että $\alpha < f(x) < \beta$ pätee kaikilla $x \in U \cap E$. Olkoon $\varepsilon = \min(\beta - f(x_0), f(x_0) - \alpha)$. Funktion f jatkuvuuden nojalla on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että jos

$$x \in E \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

niin

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon.$$

Tällöin

$$f(x) - f(x_0) < \beta - f(x_0),$$

ja edelleen $f(x) < \beta$. Vastaavasti

$$f(x) - f(x_0) > \alpha - f(x_0),$$

siis samalla päättelyllä $f(x) > \alpha$. Siispä

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap E \subset f^{-1}\big(]\alpha, \beta[\big) \subset f^{-1}(V) \quad \text{eli} \quad U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Koska tämä pätee kaikille $x_0 \in f^{-1}(V)$, on $f^{-1}(V)$ avoin joukossa E. (Vertaa lauseeseen 2.7)

Oletetaan, että jokaiselle avoimelle välille $]\alpha, \beta[$, missä $\alpha < \beta$, pätee, että $f^{-1}\big(]\alpha, \beta[\big)$ on avoin joukossa E. Olkoon $x_0 \in E$. Täytyy siis näyttää, että funkto f on jatkuva pisteessä x_0. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lisäksi olkoot $\beta = f(x_0) + \varepsilon$ ja $\alpha = f(x_0) - \varepsilon$. Oletuksen nojalla $f^{-1}\big(]\alpha, \beta[\big)$ on avoin joukossa E. Siispä

$$f^{-1}\big(]\alpha, \beta[\big) = \bigcup]a_i, b_i[\cap E,$$

missä yhdiste on pareittain erillisten avointen välien äärellinen yhdiste. Yksi näistä väleistä sisältää pisteen x_0. Olkoon se väli $]a_j, b_j[$. Olkoon

$$\delta = \min(x_0 - a_j, b_j - x_0).$$

Kun $| x - x_0 | < \delta$ ja $x \in E$, niin $x_0 \in]a_j, b_j[\cap E$, ja siten $\alpha < f(x) < \beta$. Koska $\beta = f(x_0) + \varepsilon$ ja $\alpha = f(x_0) - \varepsilon$, niin täytyy olla, että $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$, joten funktio f on jatkuva pisteessä x_0. □

Siispä huomataan, että jatkuvuuden määritelmät ovat yhtäpitäviä ja seuraavassa kappaleessa näytetään, miten molempia määritelmiä voidaan käyttää todistettaessa jatkuvien funktioiden tärkeimpiä ominaisuuksia.

LUKU 3

Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia

Jatkuvilla funktioilla on useita eri ominaisuuksia. Tässä kappaleessa esitellään näitä ominaisuuksia ja todistuksia niille. Todistukset tai niiden ideat, joissa käytetään apuna määritelmää 2.11 seuraavat Elementary Real Analysis -kirjan [**12**] tuloksia ja teoriaa, joita esitellään kyseisen kirjan kappaleessa 5.4. Lisäksi näissä todistuksissa on käytetty apuna Kilpeläisen Analyysi 1 -luentomonisteen [**9**] todistusideoita ja teoriaa. Määritelmän 2.10 pohjalta tehdyt todistukset seuraavat melko tarkasti Mauden Mathematical Analysis -kirjan [**10**] kappaleessa 5 esiteltyjä todistuksia. Useat tulokset todistetaan siis kahdella eri tavalla käyttäen apuna jatkuvuuden määritelmiä. Tarkoituksena on huomata, mitä eri pohjatietoja todistukseen tarvitaan riippuen määritelmästä, jota käytetään. Lisäksi peräkkäin asetetut todistukset antavat mahdollisuuden vertailla todistuksia, jolloin voidaan kiinnittää huomiota todistustapojen ongelmakohtiin sekä hyviin ja huonoihin puoliin.

Aloitetaan todistamalla kahden jatkuvan funktion yhdistetyn funktion jatkuvuus kahta eri määritelmää käyttäen.

Lause 3.1. *Jos funktio f on jatkuva joukossa E ja funktio g on jatkuva joukossa F siten, että $f(E) \subset F$, niin tällöin funktio $g \circ f$ on jatkuva joukossa E.*

Todistus. Huomataan, että

$$(g \circ f)^{-1}(I) = f^{-1}(g^{-1}(I)).$$

Jotta löydetään $(g \circ f)^{-1}(I)$ avoimille väleille I, täytyy huomata, että $U = g^{-1}(I) \cap F$ on avoin joukossa F. Tästä syystä $U = (\bigcup_\Omega I_\alpha) \cap F$, missä I_α on avoin väli kaikilla $\alpha \in \Omega$. Koska f on jatkuva joukossa E, jokaiselle $\alpha \in \Omega$ pätee, että $f^{-1}(I_\alpha)$ on avoin joukossa E. Siten $f^{-1}(U) = \bigcup_\Omega f^{-1}(I_\alpha)$ on avoin joukossa E. Näin ollen

$$(g \circ f)^{-1}(I) = f^{-1} \circ g^{-1}(I) = f^{-1}(g^{-1}(I)) = f^{-1}(U)$$

on avoin joukossa E, joten $g \circ f$ on jatkuva joukossa E. □

Edellisen lauseen todistukseen käytettiin jatkuuvuden määritelmää, jossa tarkastellaan avoimia joukkoja. Todistetaan vastaava tulos pisteittäiselle jatkuvuudelle käyttäen apuna jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmää.

Lause 3.2. *Olkoon $f : E \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä x_0 ja $g : F \to \mathbb{R}$ jatkuva pistessä $f(x_0) \in F$ siten, että joukoille E ja F pätee $f(E) \subset F$. Tällöin funktio $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska g on jatkuva pisteessä $f(x_0)$, on olemassa $\delta_g > 0$ siten, että

$$\mid g(y) - g(f(x_0)) \mid < \varepsilon,$$

jos $| y - f(x_0) | < \delta_g$ ja $y \in F$. Koska f on jatkuva pisteessä x_0, on olemassa luku $\delta_f > 0$ siten, että

$$| f(x) - f(x_0) | < \delta_g,$$

jos $| x - x_0 | < \delta_f$ ja $x \in E$. Eli kun $| x - x_0 | < \delta_f$ ja $x \in E$, on

$$| (g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) | = | g(f(x)) - g(f(x_0)) | < \varepsilon,$$

koska $f(x) \in F$ ja $| f(x) - f(x_0) | < \delta_g$. □

Todistetaan, että kahden jatkuvan funktion summa on myös jatkuva funktio. Tämän lauseen todistukset eri määritelmien avulla seuraavat samaa ideaa. Kun käytetään määritelmää 2.11, avuksi tarvitaan vain itse määritelmää ja kolmioepäyhtälöä. Tällöin lause saadaan todistettua melko suoraan ja kohtuullisen vaivattomasti. Näytetään siis ensin, että kahden jatkuvan funktion summa on jatkuva käyttäen $\varepsilon - \delta$-määritelmää.

LAUSE 3.3. *Olkoot $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in E$. Olkoot f ja g pisteessä x_0 jatkuvia funktioita. Tällöin myös funktio $f + g$ on jatkuva pisteessä x_0.*

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Voidaan arvioida kolmioepäyhtälön avulla, jolloin

$$| f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0)) | \leq | f(x) - f(x_0) | + | g(x) - g(x_0) | .$$

Nyt funktion f jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta_1 > 0$, jolle $| f(x) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{2}$, kun $| x - x_0 | < \delta_1$ ja $x \in E$. Edelleen funktion g jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta_2 > 0$, jolle $| g(x) - g(x_0) | < \frac{\varepsilon}{2}$, kun $| x - x_0 | < \delta_2$ ja $x \in E$. Nyt siis

$$| f(x) - f(x_0) | + | g(x) - g(x_0) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kun $| x - x_0 | < \min(\delta_1, \delta_2)$ ja $x \in E$. □

Määritelmää 2.10 käytettäessä tarkastellaan avoimen välin I alkukuvan jokaista pistettä y ja näytetään, että on olemassa pisteen y ympäristö U, jonka leikkaus funktion f lähtöjoukon kanssa kuuluu alkukuvaan $f^{-1}(I)$. Voidaan siis määritelmän lisäksi käyttää apuna lausetta 2.7. Edellä mainittua väitettä voidaan yksinkertaistaa siten, että on tarpeen tarkastella välejä, jotka ovat pisteen y ympäristöjä, eli välejä $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[= B(y, \varepsilon)$, missä $\varepsilon > 0$. Jos $I =]a, b[$ ja $y \in I$, niin valitaan $\varepsilon = \min(y - a, b - y)$, ja saadaan $B(y, \varepsilon) \subset I$. Joten mille tahansa avoimelle välille J, jolle $x \in J$ ja $f(x) = y$, pätee, että jos $f(J) \subset B(y, \varepsilon)$ niin myös $f(J) \subset I$.

LAUSE 3.4. *Olkoot $f : E \to \mathbb{R}$ ja $g : E \to \mathbb{R}$, missä $E \subset \mathbb{R}$, jatkuvia funktioita joukossa E. Tällöin funktio $f + g$ on jatkuva joukossa E.*

TODISTUS. Olkoon $y \in (f + g)(E)$ ja olkoon $B(y, \varepsilon) =]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$, missä $\varepsilon > 0$, pisteen y ympäristö. Olkoon lisäksi $x_0 \in E$ siten, että $(f + g)(x_0) = y$. Koska oletettiin, että $y \in (f + g)(E)$, niin tiedetään, että yhtälöllä $(f + g)(x_0) = y$ on olemassa ainakin yksi ratkaisu. Nyt

$$\big] f(x_0) - \varepsilon/2, f(x_0) + \varepsilon/2 \big[\; + \; \big] g(x_0) - \varepsilon/2, g(x_0) + \varepsilon/2 \big[\; =]y - \varepsilon, y + \varepsilon[.$$

Toisin sanoen tämä tarkoittaa, että

$$B(f(x_0), \varepsilon/2) + B(g(x_0), \varepsilon/2) = B(y, \varepsilon).$$

Koska tiedetään lauseen 1.10 nojalla, että kahden välin summa on myös väli, niin riittää, että tarkastellaan välien päätepisteitä. Funktion f jatkuvuuden nojalla tiedetään, että
$$f^{-1}\big(B(f(x_0),\varepsilon/2)\big) = U_f$$
on avoin joukossa E ja vastaavasti, koska funktio g on jatkuva, niin
$$g^{-1}\big(B(g(x_0),\varepsilon/2)\big) = U_g$$
on myös avoin joukossa E. Lisäksi $x_0 \in U_f$ ja $x_0 \in U_g$, joten on olemassa avoin väli U, joka on pisteen x_0 ympäristö siten, että
$$x_0 \in U \cap E \subset U_f \cap U_g.$$
Nyt mille tahansa avoimelle välille I ja pisteelle $y \in (f+g)(E)$ löydetään pisteen y ympäristö $B(y,\varepsilon) \subset I$. Siispä jokaiselle pisteelle $x \in (f+g)^{-1}(I) \cap E$ löytyy pisteen x ympäristö U siten, että
$$U \cap E \subset (f+g)^{-1}\big(B(y,\varepsilon)\big).$$
Lauseen 2.7 nojalla $(f+g)^{-1}(I)$ on avoin joukossa E ja siten funktio $f+g$ on jatkuva joukossa E. □

Tarkastellaan tilannetta, missä jatkuvaa funktiota kerrotaan reaaliluvulla. Tutkitaan, että onko tällainen tulofunktio myös jatkuva. Esitellään kaksi erilaista todistusta. Ensimmäisessä todistuksessa käytetään jatkuvuuden perinteistä määritelmää apuna ja tarkastellaan jatkuvuutta pisteessä x_0, kun taas toisessa todistuksessa tarkastellaan jatkuvuutta joukossa E.

LAUSE 3.5. (a) *Olkoot $f : E \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in E$. Olkoon f jatkuva pisteessä x_0. Tällöin myös funktio λf, missä $\lambda \in \mathbb{R}$, on jatkuva.*
(b) *Olkoot funktio $f : E \to \mathbb{R}$ jatkuva joukossa E ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin myös funktio λf on jatkuva joukossa E.*

TODISTUS. (a) Jos $\lambda = 0$, niin tulofunktio on 0, joka on vakiofunktio ja tunnetusti jatkuva. Oletetaan siis, että $\lambda \neq 0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt
$$| \lambda f(x) - \lambda f(x_0) | = | \lambda(f(x) - f(x_0)) | = | \lambda || f(x) - f(x_0) | .$$
Funktion f jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$, jolle $| f(x) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, kun $| x - x_0 | < \delta$ ja $x \in E$. Siispä kun $| x - x_0 | < \delta$, niin
$$| \lambda f(x) - \lambda f(x_0) | = | \lambda(f(x) - f(x_0)) | = | \lambda || f(x) - f(x_0) | < | \lambda | \frac{\varepsilon}{| \lambda |} = \varepsilon.$$

(b) Jos $\lambda = 0$, niin jokaiselle avoimelle välille I on olemassa alkukuva
$$(\lambda f)^{-1}(I) = \begin{cases} E, & \text{jos } 0 \in I \\ \emptyset, & \text{jos } 0 \notin I \end{cases},$$
missä $\lambda f(x) = 0$ kaikilla $x \in E$. Nyt $E =]-\infty, \infty[\cap E$ ja $\emptyset = \emptyset \cap E$ ovat avoimia joukossa E.

Jos $\lambda \neq 0$, niin jokaiselle avoimelle välille I pätee
$$(\lambda f)^{-1}(I) = (f)^{-1}(\tfrac{1}{\lambda} \cdot I).$$

Nyt, koska funktio f on jatkuva joukossa E, niin $(f)^{-1}(\frac{1}{\lambda} \cdot I)$ on avoin joukossa E, koska $\frac{1}{\lambda} \cdot I$ on väli lauseen 1.9 nojalla, eikä se voi myöskään sisältää päätepisteitään.

□

Osoitetaan, että kahden jatkuvan funktion tulo on jatkuva funktio. Tätä ennen todistetaan kuitenkin muutamien tuttujen funktioiden jatkuvuus.

LAUSE 3.6. *Olkoot f, g ja h funktioita siten, että $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ ja $h(x) = 1/x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nämä funktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan.*

TODISTUS. (a) Funktio f on jatkuva, sillä mille tahansa joukolle E pätee $f^{-1}(E) = E$. Joten erityisesti mille tahansa avoimelle välille I, $f^{-1}(I) = I$ on avoin väli.

(b) Tarkastellaan rajoitettuja avoimia välejä (a, b). Nyt

$$g^{-1}((a,b)) = \{x | a < x^2 < b\} = \begin{cases} (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b}), & (0 \le a) \\ (-\sqrt{b}, \sqrt{b}), & (a < 0 \le b) \\ \emptyset, & (a \le b < 0). \end{cases}$$

Kaikissa tapauksissa $g^{-1}((a,b))$ on avoin joukko ja tällöin funktio g on jatkuva.

(c) Edelleen tarkastellaan rajoitettuja avoimia välejä (a, b). Funktio h on jatkuva, sillä

$$h^{-1}((a,b)) = \begin{cases} (1/b, 1/a), & (a, b > 0) \\ (-\infty, 1/a) \cup (1/b, \infty), & (a < 0 < b) \\ (1/b, 1/a) & (a, b < 0) \end{cases}$$

on avoin joukko jokaisessa tapauksessa. Kun a lähestyy lukua 0 negatiiviselta puolelta niin $1/a \to -\infty$ ja kun a lähestyy lukua 0 positiiselta puolelta, niin $1/a \to \infty$. Samoin käy luvulle b, kun $b \to 0$.

□

Nyt voidaan näyttää aiempien tulosten perusteella, että kahden jatkuvan funktion tulo on myös jatkuva.

LAUSE 3.7. *Olkoot f ja g jatkuvia funktioita joukossa E. Tällöin funktio $f \cdot g$ on jatkuva joukossa E.*

TODISTUS. Huomataan, että funktio $f \cdot g$ saadaan muokattua muotoon

$$f \cdot g = \tfrac{1}{2}((f+g)^2 - (f^2 + g^2)).$$

Nyt tiedetään, että $f + g$ on jatkuva joukossa E lauseen 3.4 nojalla. Lisäksi $(f+g)^2$, f^2 ja g^2 ovat jatkuvia joukossa E lauseiden 3.1 ja 3.6 perusteella. Koska siis $f^2 + g^2$ on jatkuva joukossa E lauseen 3.4 perusteella ja edelleen $-(f^2+g^2) = (-1)(f^2+g^2)$ on jatkuva joukossa E lauseen 3.5 perusteella, niin myös $(f+g)^2 + (-1)(f^2+g^2)$ on jatkuva joukossa E lauseen 3.4 mukaan. Tällöin $f \cdot g$ on jatkuva joukossa E lauseen 3.5 perusteella.

□

Todistetaan, että jatkuva funktio on lokaalisti rajoitettu.

Lause 3.8. *Olkoon $f : E \to \mathbb{R}$ funktio, joka on jatkuva pisteessä $x_0 \in E$. Tällöin f on rajoitettu pisteen x_0 ympäristössä, eli on olemassa luvut $M > 0$ ja $\delta > 0$ siten, että*

$$\mid f(x) \mid \leq M, \text{ kun } \mid x - x_0 \mid < \delta \quad \text{ja} \quad x \in E.$$

Todistus. Valitaan $\varepsilon = 1$. Koska f on jatkuva pisteessä x_0, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon = 1,$$

kunhan $\mid x - x_0 \mid < \delta$.
Nyt

$$\mid f(x) \mid = \mid f(x) + f(x_0) - f(x_0) \mid \leq \mid f(x_0) \mid + \mid f(x) - f(x_0) \mid \leq f(x_0) + 1.$$

Siispä voidaan valita $M = f(x_0) + 1$. □

Tämä tulos saatiin melko helposti todistettua. Myöhemmin huomataan, että on huomattavasti haastavampaa todistaa, että jatkuva funktio on rajoitettu suljetuilla ja rajoitetuilla väleillä. Se vaatii jo useamman aputuloksen ja syvempää tarkastelua. Seuraavassa esimerkissä todistetaan tutun funktion jatkuvuus käyttäen jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$ -määritelmää.

Esimerkki 3.9. Olkoon funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = x^2$. Todistetaan, että g on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Nyt pätee

$$\mid g(x) - g(x_0) \mid = \mid x^2 - {x_0}^2 \mid = \mid (x - x_0)(x + x_0) \mid .$$

Halutaan, että

$$\mid (x - x_0)(x + x_0) \mid < \varepsilon.$$

Olkoon

$$\mid x - x_0 \mid < \delta \leq 1,$$

jolloin

$$\mid x + x_0 \mid = \mid 2x_0 + x - x_0 \mid \leq \mid 2x_0 \mid + \mid x - x_0 \mid \leq \mid 2x_0 \mid +1 < \mid 2x_0 \mid +2.$$

Nyt

$$\mid (x - x_0)(x + x_0) \mid < \varepsilon, \text{ jos } \mid x - x_0 \mid < \frac{\varepsilon}{\mid 2x_0 \mid +2} \text{ ja } \mid x + x_0 \mid < \mid 2x_0 \mid +2.$$

Valitaan

$$\delta = \min\Big(1, \frac{\varepsilon}{\mid 2x_0 \mid +2}\Big).$$

Tällöin aina, kun $\mid x - x_0 \mid < \delta$, on $\mid x + x_0 \mid \leq \mid 2x_0 \mid +2$, sillä $\mid x - x_0 \mid < 1$. Tällöin

$$\mid x^2 - {x_0}^2 \mid = \mid (x - x_0)(x + x_0) \mid < \frac{\varepsilon}{\mid 2x_0 \mid +2} \cdot (\mid 2x_0 \mid +2) = \varepsilon.$$

Siis funktio g on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Edellisen esimerkin funktion jatkuvuus todistettiin jo lauseessa 3.6 tarkastellen rajoitettuja avoimia välejä, jolloin todistus oli huomattavasti lyhyempi. Seuraavaksi voidaan esimerkin 3.9 ideaa hyödyntäen todistaa kahden jatkuvan funktion tulon jatkuvuus käyttäen hyväksi jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmää.

LAUSE 3.10. *Olkoot* $f : E \to \mathbb{R}$ *ja* $g : E \to \mathbb{R}$ *jatkuvia funktioita pisteessä* $x_0 \in E$. *Tällöin myös funktio* fg *on jatkuva pisteessä* x_0.

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Huomataan, että lauseke $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)$ voidaan muokata muotoon $f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla pätee, että

$$| f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) | \leq | f(x) || g(x) - g(x_0) | + | g(x_0) || f(x) - f(x_0) | .$$

Lauseen 3.8 mukaan on olemassa $M > 0$ ja $\delta_1 > 0$ siten, että $| f(x) | \leq M$, kun $| x - x_0 | < \delta_1$ ja $x \in E$. Tällöin

$$| f(x) || g(x) - g(x_0) | \leq M | g(x) - g(x_0) | < M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $| x - x_0 | < \delta_1$ ja $| x - x_0 | < \delta_2$ ja $x \in E$. Tässä δ_2 on funktion g jatkuvuuden määritelmästä saatua lukua $\frac{\varepsilon}{2M}$ vastaava δ. Toisaalta on olemassa $\delta_3 > 0$ siten, että,

$$| f(x) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{2 | g(x_0) | + 2},$$

kun $| x - x_0 | < \delta_3$ ja $x \in E$. Tällöin

$$| g(x_0) || f(x) - f(x_0) | \leq | g(x_0) | \frac{\varepsilon}{2(| g(x_0) | + 1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $| x - x_0 | < \delta_3$ ja $x \in E$. Tässä δ_3 on funktion f jatkuvuuden määritelmästä saatua lukua $\frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+1)}$ vastaava δ. Yhdistetään nyt kaikki läpikäydyt tilanteet. Ne ovat voimassa, kun kaikki ehdot

$$| x - x_0 | < \delta_1, | x - x_0 | < \delta_2 \text{ ja } | x - x_0 | < \delta_3$$

täyttyvät. Tämä tapahtuu, kun valitaan $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ja $| x - x_0 | < \delta$ ja $x \in E$. Nyt siis

$$\begin{aligned} | f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) | &\leq | f(x) || g(x) - g(x_0) | + | g(x_0) || f(x) - f(x_0) | \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Määritelmän 2.10 avulla todistettu kahden jatkuvan funktion tulofunktion jatkuvuus onnistuttiin todistamaan aiempiin tuloksiin viittaamalla, kunhan tehtiin lausekkeeseen vain pieni muokkaus. Myös $\varepsilon - \delta$-määritelmää käytettäessä todistus alkaa lausekkeen muokkauksella, jonka jälkeen voidaan käyttää kolmioepäyhtälöä ja lausetta 3.8. Tässä todistuksessa joudutaan kuitenkin myös varsinaisesti määrittämään sopivat luvut δ_1, δ_2 ja δ_3 toisin kuin määritelmää 2.10 käytettäessä.

Näytetään vielä, että kahden jatkuvan funktion osamäärä on jatkuva funktio. Esitellään tähänkin kaksi tapaa, joilla osamääräfunktion jatkuvuuden voi todistaa.

LAUSE 3.11. *Olkoot funktiot* $f : E \to \mathbb{R}$ *ja* $g : E \to \mathbb{R}$ *jatkuvia ja lisäksi* $g(x) \neq 0$ *kaikilla* $x \in E$. *Tällöin funktio* $f/g : E \to \mathbb{R}$ *on myös jatkuva.*

TODISTUS. Näytetään, että funktio $1/g$ on jatkuva, jolloin lauseen 3.7 nojalla myös funktio $f \cdot 1/g = f/g$ on jatkuva. Olkoon $h(x) = 1/x$, joka on jatkuva lauseen 3.6 c)-kohdan nojalla, kun $x \neq 0$. Nyt funktio $h \circ g = h(g(x)) = 1/g(x)$ on jatkuva lauseen 3.1 mukaan ja tällöin myös funktio f/g on jatkuva.

□

Toiseen todistustapaan tarvitaan apulause, joka esitellään ja todistetaan seuraavaksi.

LAUSE 3.12. *Olkoon funktio $f : E \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $x_0 \in E$. Jos $f(x_0) > 0$, niin on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ kaikilla $x \in E$, joille pätee $|x - x_0| < \delta$.*

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon = f(x_0)/2$ ja $x \in E$, jolloin funktion f jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$| f(x) - f(x_0) | < f(x_0)/2 = \varepsilon,$$

kun $| x - x_0 | < \delta$. Tällöin kaikille $x \in]x_0 - \delta, x - \delta[\cap E$ pätee, että

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \geq f(x_0) - | f(x) - f(x_0) | \\ &> f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - f(x_0)/2 = f(x_0)/2 > 0. \end{aligned}$$

□

Nyt aputulosta ja jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmää käyttäen voidaan todistaa, että osamääräfunktio on jatkuva.

LAUSE 3.13. *Olkoot funktiot $f : E \to \mathbb{R}$ ja $g : E \to \mathbb{R}$ jatkuvia pisteessä $x_0 \in E$. Tällöin myös funktio f/g on jatkuva pisteessä x_0, jos $g(x_0) \neq 0$.*

TODISTUS. Apulauseen 3.12 nojalla $g(x) \neq 0$ kaikilla pisteillä x pisteen x_0 ympäristössä. Riittää näyttää, että funktio $1/g$ on jatkuva pisteessä x_0, sillä tulofunktion jatkuvuuden nojalla funktio $f \cdot 1/g = f/g$ on jatkuva pisteessä x_0. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt

$$| 1/g(x) - 1/g(x_0) | = \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)} \right| = \frac{1}{| g(x) || g(x_0) |} \cdot | g(x) - g(x_0) | .$$

Apulauseen 3.12 nojalla on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$| g(x) | > \frac{| g(x_0) |}{2},$$

kun $| x - x_0 | < \delta_1$ ja $x \in E$. Tällöin

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)} \right| \leq \frac{2 | g(x) - g(x_0) |}{(g(x_0))^2}.$$

Koska funktio g on jatkuva, niin on olemassa lukua $\frac{\varepsilon g(x_0)^2}{2} > 0$ vastaava luku $\delta_2 > 0$ siten, että kun $| x - x_0 | < \delta_2$ ja $x \in E$, niin $| g(x) - g(x_0) | < \frac{\varepsilon g(x_0)^2}{2}$. Siispä tällaisilla x pätee

$$\frac{2 | g(x) - g(x_0) |}{(g(x_0))^2} < \frac{2}{g(x_0)^2} \cdot \frac{\varepsilon g(x_0)^2}{2} = \varepsilon,$$

joten

$$| 1/g(x) - 1/g(x_0) | \leq \frac{2 | g(x) - g(x_0) |}{(g(x_0))^2} < \varepsilon,$$

kun $| x - x_0 | < \delta$ ja $x \in E$. Tämä tapahtuu, kun valitaan $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Siispä funktio $1/g$ on jatkuva pisteessä x_0 ja tulofunktion jatkuvuuden perusteella $f \cdot 1/g = f/g$ on jatkuva pisteessä x_0. □

Molemmissa todistuksissa tehdään aluksi huomio, että riittää todistaa funktion $1/g$ jatkuvuus. Todistettaessa osamääräfunktion jatkuvuutta määritelmän 2.10 avulla käytetään hyväksi yhdistetyn funktion jatkuvuutta ja tietoa funktion $1/x$ jatkuvuudesta. Määritelmää 2.11 käytettäessä tarvitaan apulausetta, jonka avulla todistus on melko suoraviivainen.

Yhteenvetona määritelmää 2.10 käytettäessä monet todistukset pohjaavat aiempiin tuloksiin, jolloin jatkuvuus käsitteenä jää irralliseksi ja ei tule niin selvästi esille. Lisäksi avoimia joukkoja on vaikeampi hahmottaa, jolloin tilanteen visualisointi esimerkiksi omassa mielessä voi olla haastavaa. Todistukset, joissa käytetään $\varepsilon - \delta$-menetelmää tarjoavat selkeämmän mahdollisuuden tilanteen visualisointiin. Lisäksi lähes jokainen todistus konkreettisesti tehdään etsien sopivat luvut ε ja δ, jolloin todistusten samankaltaisuus auttaa myös ymmärtämään jatkuvuuden käsitettä ja aikaisemmista todistuksista voi saada jopa apukeinoja tai ideoita myöhempiin todistuksiin.

LUKU 4

Jatkuvuus ja avoimet joukot

Tässä kappaleessa käydään läpi tärkeitä avoimiin joukkoihin liittyviä tuloksia ja lisäksi tarkastellaan, miten jatkuvuus ja avoimet joukot liittyvät toisiinsa. Erityisesti esitellään kaksi tärkeää tulosta, jotka tunnetaan paremmin nimillä Heine-Borellin lause ja jatkuvien funktioiden väliarvolause. Näiden lauseiden avulla voidaan näyttää, että jos funktio f on jatkuva avoimella välillä J ja $[a, b] \subset J$, niin tällöin $f([a, b])$ on suljettu ja rajoitettu väli. Tässä kappaleessa esitellyt tulokset ja todistukset seuraavat Mauden kirjan Mathematical Analysis [**10**] kappaleissa 4 ja 5 esitettyjä tuloksia ja todistuksia.

Seuraavan lauseen avulla nähdään, että avoimen joukon muodostavat välit voidaan valita erillisiksi.

LAUSE 4.1. *Joukko $U \subset \mathbb{R}$ on avoin jos ja vain jos on olemassa kokoelma avoimia välejä $\{I_\alpha\}$ siten, että $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$, jos $\alpha \neq \beta$, ja $U = \bigcup_\alpha I_\alpha$.*

TODISTUS. Avoimen joukon määritelmän nojalla joukon U avoimuuden näyttämiseksi riittää, että on olemassa kokoelma avoimia välejä $\{I_\alpha\}$ siten, että $U = \bigcup_\alpha I_\alpha$. Lauseessa esiintyvää eritysehtoa $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$ ei tarvitse huomioida, sillä se ei vaikuta lopputulemaan millään tavalla.

Täytyy todistaa vielä, että jos U on avoin joukko, niin löytyy tällainen kokoelma erillisiä avoimia välejä $\{I_\alpha\}$ siten, että $U = \bigcup_\alpha I_\alpha$. Olkoon piste $x \in U$. Lauseen 2.7 nojalla on olemassa avoin väli $I \subset U$ siten, että $x \in I$. Olkoon A_x tälläisten välien yhdiste. Tällöin lauseen 1.6 nojalla A_x on väli ja $x \in A_x$. Lisäksi lauseen 2.8 nojalla A_x on avoin joukko, joten A_x on siis avoin väli. Nyt jos kahdelle tällaiselle joukolle A_x ja A_y pätee, että $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, niin tarkastellaan pistettä $z \in A_x \cap A_y$. Koska A_x ja A_y ovat avoimia välejä ja $z \in A_x$ ja $z \in A_y$, niin tällöin $A_x \subset A_z$ ja $A_y \subset A_z$. Koska A_z on avoin väli ja $x, y \in A_z$, niin siitä seuraa, että $A_z \subset A_x$ ja $A_z \subset A_y$. Siispä $A_x = A_y = A_z$. Välien joukko $\{A_x\}$ voidaan esittää yhden indeksin avulla, kuten joukko $\{I_\alpha\}$, jolloin voidaan merkitä, että $A_x = I_\alpha$ kaikille $x \in I_\alpha$. Tällöin joukko $\{I_\alpha\}$ on tarvittava kokoelma avoimia välejä.

□

HUOMAUTUS 4.2. Lauseen 4.1 joukkoja I_α sanotaan joukon U komponenteiksi.

LAUSE 4.3. *Jos I_α on avoimen joukon U komponentti ja piste a on välin I_α päätepiste, niin tällöin $a \notin U$.*

TODISTUS. Koska I_α on avoin väli, niin $a \notin I_\alpha$. Oletetaan, että on olemassa joukon U komponentti I_β, jolle pätee, että $a \in I_\beta$. Tällöin koska $\{a\} \cup I_\alpha$ on väli, niin myös $(\{a\} \cup I_\alpha) \cup I_\beta$ on väli. Koska $a \in I_\beta$, niin

$$(\{a\} \cup I_\alpha) \cup I_\beta = I_\alpha \cup I_\beta,$$

joka on avoin. Koska I_α on joukon U komponentti, niin mille tahansa avoimelle välille J pätee, että jos $I_\alpha \subset J \subset U$, niin $J = I_\alpha$. Siispä $a \in I_\alpha \cup I_\beta = I_\alpha$. Tämä on ristiriita. Siispä ei ole olemassa komponenttia I_β, jolle pätee, että $a \in I_\beta$ ja tällä perusteella $a \notin U$. □

Seuraava lause näyttää, että suljetun ja rajoitetun välin peittämiseen riittää äärellinen määrä avoimia välejä tai joukkoja. Tämä lause tunnetaan paremmin nimellä Heine-Borellin lause.

Lause 4.4. *Jos $\{U_\alpha\}$ on kokoelma avoimia joukkoja joukossa $\mathbb{R}$ ja $[a,b] \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, missä $a \leq b$, niin on olemassa äärellinen määrä avoimia joukkoja $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ siten, että*

$$[a,b] \subset \bigcup_{r=1}^{n} U_{\alpha_r}.$$

Todistus. Olkoon $I_x = [a,x]$, missä $a \leq x \leq b$ siten, että on olemassa joku äärellinen kokoelma avoimia joukkoja $\{U_{\beta_1}, ..., U_{\beta_k}\} \subset \{U_\alpha\}$, jolle pätee

$$I_x \subset \bigcup_{l=1}^{k} U_{\beta_l},$$

missä $x \in [a,b]$. Olkoon A niiden pisteiden joukko, joilla on yllä mainittu ominaisuus. Koska $a \in U_\alpha$ jollakin α ja $I_a = \{a\}$ on yksi väleistä, niin $a \in A$. Siispä A ei ole tyhjä joukko. Olkoon

$$I = \bigcup_{x \in A} I_x.$$

Tällöin $a \in I_x$ kaikilla $x \in A$. Siispä lauseen 1.6 nojalla I on väli ja $a \in I$ paitsi, jos $I = \emptyset$. Selvästi $I_x \subset [a,b]$ kaikilla $x \in A$ ja tällöin myös $I \subset [a,b]$ kaikilla $x \in A$. Tämän ja aksiooman 1.11 perusteella voidaan sanoa, että joukolla I on olemassa päätepiste c. Nyt $c \in [a,b] \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, joten on olemassa joukko U_γ siten, että $c \in U_\gamma$. Koska U_γ on avoin joukko, niin on olemassa luku y_0 siten, että $a \leq y_0 \leq c$ ja $y_0 \in U_\gamma \cap I$. Täten $y_0 \in I$ ja on olemassa luku $x_0 \in A$ siten, että $y_0 \in [a, x_0]$. Täten on olemassa kokoelma

$$\{U_{\beta_l}, ..., U_{\beta_k}\} \subset \{U_\alpha\},$$

siten, että

$$[a, x_0] \subset \bigcup_{l=1}^{k} U_{\beta_l}.$$

Muodostetaan yhdiste joukon U_γ kanssa ja saadaan

$$[a,c] \subset U_\gamma \cup \bigcup_{l=1}^{k} U_{\beta_l}.$$

Väli I sisältyy siis joukkojen U_α äärelliseen yhdisteeseen. Tällöin $I = [a,c]$, koska $c \in A$ ja $[a,c] \subset I$ siten, että I on suurin väleistä I_x, missä $x \in A$. Lisäksi $c = b$, sillä jos $c < b$, niin U_γ sisältää pisteen x_1 siten, että $c < x_1 < b$ ja siten

$$[a, x_1] \subset U_\gamma \cup \bigcup_{l=1}^{k} U_{\beta_l}$$

ja $c < x_1 \in I$, mikä on ristiriita sen kanssa, että c on joukon I päätepiste. Täten

$$[a,b] \subset U_\gamma \cup \bigcup_{l=1}^{k} U_{\beta_l}.$$

Siispä välin täyttämiseen vaadittu kokoelma on joukko $\{U_{\beta_l}, ..., U_{\beta_k}, U_\gamma\}$. □

Seuraavaksi todistetaan jatkuvien funktioiden väliarvolause, joka takaa jatkuvuuden nojalla tiettyjen yhtälöiden ratkaisujen olemassaolon.

Lause 4.5. *Jos funktio f on jatkuva avoimella välillä J ja $[a,b] \subset J$, niin jokaiselle luvulle d, joka on lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä, on olemassa vähintään yksi luku $c \in]a,b[$ siten, että $f(c) = d$.*

Todistus. Joukko $]-\infty,\infty[\setminus\{d\}$ on kahden erillisen avoimen välin $]-\infty, d[,]d, \infty[$ yhdiste. Koska d on lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä, niin täytyy päteä, että luku $f(a)$ kuuluu toiseen edellä mainituista erillisistä avoimista väleistä ja luku $f(b)$ kuuluu toiseen erilliseen avoimeen väliin. Olkoon I_a se väli, jolle $f(a) \in I_a$ ja olkoon I_b toinen väli siten, että $f(b) \in I_b$. Koska funktio f on jatkuva, niin joukko $f^{-1}(I_a)$ on avoin ja $a \in f^{-1}(I_a)$. Edelleen funktion f jatkuvuuden nojalla myös joukko $f^{-1}(I_b)$ on avoin ja $b \in f^{-1}(I_b)$. Lisäksi koska $]-\infty, d[\cap]d, \infty[= \emptyset$, niin tällöin myös $f^{-1}(I_a) \cap f^{-1}(I_b) = \emptyset$. Nyt lauseen 4.1 nojalla on olemassa joukon $f^{-1}(I_a)$ komponentti J siten, että $a \in J$. Lisäksi $b \notin f^{-1}(I_a)$ eli $b \notin J$. Täydellisyysaksiooman nojalla on siis olemassa joukon J päätepiste c siten, että $a < c < b$. Lauseen 4.3 nojalla $c \notin f^{-1}(I_a)$. Lisäksi jos J_0 on joukon $f^{-1}(I_b)$ komponentti, niin $J \cap J_0 = \emptyset$ eli J ja J_0 ovat joukon $J \cup J_0$ komponentteja ja lauseen 4.3 nojalla $c \notin J_0$, joten $c \notin f^{-1}(I_b)$. Siispä $c \notin f^{-1}(I_a) \cup f^{-1}(I_b)$ eli $f(c) \notin I_a \cup I_b =]-\infty, \infty[\setminus\{d\}$, joten täytyy olla $f(c) = d$. □

Vaikka ratkaisuja yhtälölle $f(c) = d$ voi olla useita, niin tässä todistuksessa riittää löytää yksi ratkaisu. Jos funktio f olisi monotoninen, niin yhtälöllä voisi olla vain yksi ratkaisu. Tässä todistuksessa luku c on pienin luku väliltä $[a,b]$, jolle $f(c) = d$. Edellisen lauseen seurauksena saadaan Bolzanon lause, joka on siis jatkuvien funktioiden väliarvolauseen erikoistapaus ja lisäksi saadaan tieto, että jatkuvan funktion alkukuva välistä on itsessään väli. Tämä tilanne käydään läpi seuraavaksi.

Lause 4.6. *Jos funktio f on jatkuva avoimella välillä J ja I on mikä tahansa väli siten, että $I \subset J$, niin tällöin $f(I)$ on väli.*

Todistus. Olkoot $\alpha, \beta \in f(I)$. Oletetaan, että $f(a) = \alpha$ ja $f(b) = \beta$. Tällöin jatkuvien funktioiden väliarvolauseen nojalla mille tahansa luvulle d, joka on pisteiden α ja β välissä, on olemassa luku c pisteiden a ja b välissä siten, että $f(c) = d$. Siispä $d \in f(I)$, joten $f(I)$ on väli. □

Seuraavaksi herää varmasti kysymys, että onko rajoitetun välin kuvajoukko rajoitettu väli tai onko suljetun välin kuvajoukko suljettu väli. Todistetaan sitten lauseen 4.4 avulla seuraavat tulokset jatkuvan funktion f kuvajoukolle suljetusta välistä $[a,b]$.

Lause 4.7. *Jos funktio f on jatkuva avoimella välillä J ja $[a,b] \subset J$, niin tällöin $f([a,b])$ on rajoitettu.*

Todistus. Välien kokoelma $\{]-n,n[| n \in \mathbb{N}\}$ on jokaisen reaalilukujoukon avoin peite, koska $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[=]-\infty,\infty[$. Erityisesti se on joukon $f([a,b])$ avoin peite.

Siispä joukkojen $f^{-1}\big(]-n,n[\big)$, jotka ovat avoimia funktion f jatkuvuuden nojalla, kokoelma $\big\{f^{-1}\big(]-n,n[\big)|n\in\mathbb{N}\big\}$ on joukon $[a,b]$ avoin peite. Lauseen 4.4 nojalla on olemassa äärellinen osapeite

$$f^{-1}\big(]-n_1,n_1[\big),...,f^{-1}\big(]-n_k,n_k[\big).$$

Koska

$$[a,b]\subset\bigcup_{l=1}^{k}f^{-1}\big(]-n_l,n_l[\big),$$

niin tällöin

$$f([a,b])\subset\bigcup_{l=1}^{k}]-n_l,n_l[=]-N,N[,$$

missä $N=\max\{n_l|l=1,...,k\}$. Väli $]-N,N[$ on rajoitettu väli, joten $f([a,b])$ on rajoitettu. □

Nyt koska tiedetään, että $f([a,b])$ on rajoitettu, niin voidaan valita tarkemmin sopiva peite ja todistaa, että $f([a,b])$ on myös suljettu.

Lause 4.8. *Jos funktio f on jatkuva avoimella välillä J ja $[a,b]\subset J$, niin joukko $f([a,b])$ on suljettu väli.*

Todistus. Lauseiden 4.6 ja 4.7 avulla tiedetään, että $f([a,b])$ on rajoitettu väli. Oletetaan, että välin päätepisteet ovat m ja M. Tällöin mahdolliset välit ovat muotoa

$$]m,M[,\,[m,M[,\,]m,M]\text{ tai }[m,M].$$

Jos $M\notin f([a,b])$, niin välien kokoelma

$$\big\{]m-x,M-x[|x>0\big\}$$

olisi joukon $f([a,b])$ avoin peite. Koska funktio f on jatkuva, niin

$$\big\{f^{-1}\big(]m-x,M-x[\big)|x>0\big\}$$

olisi joukon $[a,b]$ avoin peite. Lauseen 4.4 nojalla olisi joukon $[a,b]$ äärellinen osapeite. Olkoon se osapeite

$$\big\{f^{-1}\big(]m-x_1,M-x_1[\big),f^{-1}\big(]m-x_2,M-x_2[\big),...,f^{-1}\big(]m-x_k,M-x_k[\big)\big\}.$$

Siispä

$$f([a,b])\subset\bigcup_{l=1}^{k}]m-x_l,M-x_l[$$

ja joukon oikeanpuoleinen päätepiste olisi pienempi tai yhtäsuuri kuin suurin luvuista $M-x_1,...,M-x_k$. Mutta koska $x_1,...,x_k>0$, niin M ei voi olla joukon $f([a,b])$ päätepiste, mikä on ristiriita. Siispä $M\in f([a,b])$. Samanlainen päättely voidaan tehdä vasemmanpuoleiselle päätepisteelle. Jos $m\notin f([a,b])$, niin välien kokoelma $\big\{]m+y,M+y[|y>0\big\}$ olisi joukon $f([a,b])$ avoin peite. Funktion f jatkuvuuden nojalla

$$\big\{f^{-1}\big(]m+y,M+y[\big)|y>0\big\}$$

olisi joukon $[a, b]$ avoin peite ja lauseen 4.4 nojalla olisi olemassa joukon $[a, b]$ äärellinen osapeite. On siis olemassa joukko $\{y_1, ..., y_k\}$ siten, että

$$f([a, b]) \subset \bigcup_{l=1}^{k'}]m + y_l, M + y_l[,$$

joten m ei voi olla joukon $f([a, b])$ alaraja. Siispä $m, M \in f([a, b])$ ja $f([a, b]) = [m, M]$. □

Kun tarkastellaan lauseiden 4.5, 4.6, 4.7 ja 4.8 lopputuloksia, niin huomataan, että ne koskevat niitä funktion arvoja $f(x)$, joille $x \in [a, b]$. Jos määritellään funktio g välillä $[a, b]$ siten, että $g(x) = f(x)$ jos ja vain jos $x \in [a, b]$, niin edellä mainitut lauseiden lopputulokset pätevät myös funktiolle g. Siispä esimerkiksi $g([a, b])$ on suljettu väli. Täytyy myös olla, että funktion g alkukuva mistä tahansa avoimesta välistä I, $g^{-1}(I)$, on oltava avoimen joukon leikkaus välin $[a, b]$ kanssa. Tällöin on perusteltua laajentaa jatkuvuuden käsitettä määritelmässä 2.10 esitettyyn muotoon.

Lause 4.9. *Jos funktio $f : [a, b] \to A, A \subset \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[a, b]$, niin $f([a, b])$ on suljettu ja rajoitettu väli.*

Todistus. Todistus seuraa lähes kokonaan lauseiden 4.5, 4.6, 4.7 ja 4.8 todistuksia, joten todistuksen yksityiskohtia ei käydä läpi. Nyt täytyy vain ottaa huomioon, että tarkasteltaessa avoimien välien

$$(-n, n), (m - x, M - x) \text{ ja } (m + y, M + y)$$

alkukuvia tarvitaan eräs lisäys, että päästään käsiksi avoimiin joukkoihin. Olkoon I avoin väli, jolloin $f^{-1}(I) = [a, b] \cap U$, missä U on avoin joukko. Nyt aiempien todistusten avoimet peitteet voidaan korvata tällaisilla välin $[a, b]$ suhteen avoimilla peitteillä ja voidaan taas käyttää lausetta 4.4 samalla tavalla kuin aiemminkin. Tästä saadaan, että $f([a, b])$ on suljettu ja rajoitettu väli. □

LUKU 5

Jatkuvuus lukio-opetuksessa

Tässä kappaleessa tarkastellaan jatkuvuuden käsitettä lukio-opetuksessa. Tutkitaan, miten jatkuvuus esitellään ja miten monipuolisesti sitä käydään läpi. Tarkasteluun otetaan muutama lukion pitkässä matematiikassa käytettävä kirjasarja, joiden välisiä eroja ja yhtäläisyyksiä pohditaan. Lisäksi otetaan huomioon, miten jatkuvuus käsitellään peruskurssilla ja miten sen käsittely muuttuu, kun siirrytään syventävälle kurssille. Tarkasteltavat kirjasarjat ovat Pyramidi, Lukion Calculus, Juuri ja Matematiikan taito. Kyseisistä kirjasarjoista tutkitaan kurssien MAA7 Derivaatta ([**7**],[**5**],[**3**], [**1**]) ja MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi ([**8**],[**6**],[**4**], [**2**]) tapoja esitellä ja käsitellä funktion jatkuvuutta. Lisäksi tarkastellaan minkälaisia ja minkä tasoisia tehtäviä eri kirjasarjat tarjoavat. Tarkoituksena on myös pohtia, löytyisikö tässä työssä aiemmin esitellyistä jatkuvuuden määritelmistä apua, tukea tai vaihtoehtoisia tapoja jatkuvuuden ymmärtämiseen ja opettamiseen.

Kaikissa tarkastelluissa lukiotason oppikirjoissa jatkuvuus määritellään raja-arvokäsitteen kautta, ja koska raja-arvoa ei ole tässä tutkielmassa määritelty, niin määritellään raja-arvo toispuoleisten raja-arvojen avulla. Funktion f raja-arvo on $a \in \mathbb{R}$, jos

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = a \quad \text{eli} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Kirjoissa käydään ensin läpi, mitä raja-arvolla tarkoitetaan. Tämän jälkeen on luonnollista edetä jatkuvuuden määrittelyyn raja-arvokäsitteen avulla. Esitellään seuraavaksi jatkuvuuden raja-arvomääritelmä.

Oletetaan, että funktio f on määritelty välillä $]a, b[$ siten, että $x_0 \in]a, b[$. Funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0),$$

tai toisin sanoen, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tutkitaan nyt, miten eri kirjasarjat pohjustavat jatkuvuuden käsitettä Derivaattakurssilla. Pyramidi-kirja aloittaa käytännön esimerkein, missä tarkastellaan erilaisia kuvaajia luonnonilmiöistä pankkitilin saldoon. Nämä kuvaajat tarjoavat esimerkkejä niin jatkuvasta kuin epäjatkuvastakin funktiosta ja lisäksi esitellään havainnollistava esimerkki määrittelyjoukon vaikutuksesta. Varsinainen määrittely aloitetaan toispuoleisesta jatkuvuudesta ja käydään läpi sekä jatkuvuus vasemmalta että jatkuvuus oikealta havainnollistavien graafien kera. Juuri-kirja aloittaa pohtivalla esimerkillä, jossa tarkastellaan, mikä vakion b arvo tulisi valita, jotta funktion kuvaaja olisi katkeamaton. Lisäksi tarjolla on digijohdanto, jossa tehtävänä on niin ikään tehdä kuvaajasta katkeamaton. Tämän johdannon jälkeen määritellään jatkuvuus annetussa kohdassa suoraan raja-arvomääritelmän avulla. Myös Matematiikan taidossa päätellään ensin kuvaajista raja-arvoja ja niiden olemassaoloja. Funktion jatkuvuus annetussa kohdassa määritellään raja-arvon avulla sanallisessa muodossa, eikä niin formaalisti kuin Juuri-kirjassa. Lukion Calculus aloittaa kertomalla, että funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos sen kuvaaja on tässä kohtaa yhtenäinen, katkeamaton käyrä. Kirja kuitenkin heti perään huomauttaa, että vaikka tämä on hyvin havainnollistava mielikuva, niin se ei ole sopiva jatkuvuuden määritelmäksi. Myös tässä kirjassa määritellään seuraavaksi jatkuvuus raja-arvon kautta ja tämän jälkeen ohimennen myös mainitaan toispuoleisesta jatkuvuudesta. Selkeästi pohtivat esimerkit ja havainnollistavat kuvat ovat hyvä aloitus jatkuvuutta lähestyttäessä.

Seuraavaksi tarkastellaan, mitä jatkuvuuden ominaisuuksia ja tärkeitä tuloksia eri kirjasarjat nostavat esille. Pyramidi-sarjan kirja Derivaatta määrittelee pohjustuksen jälkeen jatkuvuuden välillä ja joukossa, kuten voisi olettaakin. Tämän jälkeen kirja listaa jatkuvan funktion tärkeimmät ominaisuudet, joista moni todistettiin myös tämän tutkielman luvussa 3. Kirja kertoo, että näiden ominaisuuksien avulla voidaan todistaa alkeisfunktioiden jatkuvuus. Seuraavaksi kirjassa tehdään jatkuvuustarkasteluja ja esitellään graafisen tarkastuksen mahdollisuus. Pyramidi käy jatkuvuutta läpi laajasti ja seuraavassa kappaleessa esitellään jatkuvia funktioita koskevia lauseita. Kirjassa todetaan, että jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa ja kaikki arvot niiden väliltä. Lisäksi kirjassa esitellään Bolzanon lause. Pyramidi käy jatkuvuutta Derivaatta-kirjassa läpi niin tarkasti ja monipuolisesti, että Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssilla jatkuvuuteen viitataan vain derivaatan yhteydessä, eikä sitä käydä enää uudestaan sen tarkemmin läpi.

Lukion Calculus 4 Derivaatta -kirja esittelee jatkuvuuden määrittelyn jälkeen jatkuvuuden välillä. Alkeisfunktioiden jatkuvuutta ei perustella, vaan annetaan sääntö, jonka mukaan alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan. Tämän jälkeen esitellään jatkuvien funktioiden tärkeimpiä ominaisuuksia ja positiivista on, että yksi ominaisuuksista todistetaan määritelmän avulla seuraavalla tavalla. Olkoot funktiot f ja g jatkuvia kohdassa x_0. Tällöin summafunktio $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ on jatkuva pisteessä x_0. Nyt

$$\lim_{x\to x_0} f(x+g)(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$= f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

Tämä siis tarkoittaa jatkuvuuden raja-arvomääritelmän nojalla, että summafunktio $f+g$ on jatkuva pisteessä x_0. Lukion Calculuksen Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi ei teorian puolesta tarjoa jatkuvuudesta muuta kuin kertausta ja hieman erilaisia tehtäviä.

Juuri-sarja määrittelee myös Derivaatta-kirjassa jatkuvuuden raja-arvomääritelmän jälkeen jatkuvuuden välillä ja antaa siihen myös hyvän esimerkin, jossa tutkitaan funktion $f(x) = 1/x$ jatkuvuutta eri väleillä ja funktion määrittelyjoukossa. Tämän jälkeen esitellään Bolzanon lause. Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia ei käydä läpi, mutta tekstin seassa mainitaan, että polynomifunktiot ja rationaalifunktiot ovat jatkuvia. Tässä kirjasarjassa jatkokurssilla jatkuvuuden teoriaan ei käytetä paljon aikaa, mutta kerrataan määritelmä ja ilmoitetaan, että alkeisfunktiot ja niiden yhdistelmät ovat jatkuvia.

Matematiikan taito 7 etenee jatkuvuudesta pisteessä suoraan jatkuvuuteen välillä. Tämän jälkeen käydään läpi jatkuvuuden säilyminen laskutoimituksissa. Lisäksi määritellään mitä tarkoittaa, että funktio on jatkuva kaikkialla. Kirjasarjan jatkokurssi tarjoaa selkeän kertauksen jatkuvuuden määritelmästä ja lisäksi määritellään mitä tarkoittaa jatkuvuus joukossa. Näytetään nyt, miten kirja todistaa itseisarvofunktion jatkuvuuden. Määritellään funktion f itseisarvofunktio $\mid f \mid$ yhtälöllä $\mid f \mid (x) = \mid f(x) \mid$. Olkoon x_0 funktion f määrittelyjoukon piste. On osoitettava, että

$$\lim_{x \to x_0} \mid f(x) \mid = \mid f(x_0) \mid .$$

Kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$\mid\mid f(x) \mid - \mid f(x_0) \mid\mid \leq \mid f(x) - f(x_0) \mid .$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon,$$

aina kun $\mid x - x_0 \mid < \delta$. Mutta nyt edellisistä epäyhtälöistä saadaan, että

$$\mid\mid f(x) \mid - \mid f(x_0) \mid\mid < \varepsilon,$$

joten väitös seuraa raja-arvon määritelmästä. Samantapainen todistus tehdään yhdistetyn funktion jatkuvuudelle ja tämä avaa jo jatkuvuuden käsitettä ihan uudelle tasolle. Tässä yhteydessä voisi hyvin esitellä myös virallisesti jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmän.

Pyramidi-kirjasarja tarjoaa monipuolisesti tehtäviä ja tehtävät ovat aseteltu sopivasti teoriakappaleen alaotsikoiden alle, jolloin on helppo palata katsomaan vinkkejä tehtäviin esimerkeistä. Ensimmäisissä tehtävissä tutkitaan kuvaajia ja jatkuvuutta niiden avulla. Kuvan tutkiminen on hyvä aloitustapa, koska se ei ole niin teoreettinen. Seuraava kappale käsittelee jatkuvuustarkasteluja ja oleellisesti myös tehtävissä tutkitaan erilaisten funktioiden jatkuvuutta. Viimeisenä esitellään erilaisia tuloksia liittyen jatkuviin funktioihin ja tehtävissä täytyy osata käyttää esimerkiksi Bolzanon lausetta apuna.

Matematiikan taito tarjoaa perustehtäviä ja syventäviä tehtäviä. Tämä kirjasarja on melko teoreettinen ja antaakin ehkä parhaat lähtökohdat, jos ajatellaan aitoa matematiikan ymmärtämistä. Jatkokurssin tehtävät ovat lähes pelkästään osoittamistehtäviä ja osa tehtävistä on haastavuudeltaan jo melko vaikeita. Jatkokurssilla myös todistetaan harjoitustehtävinä aidosti monotonisen funktion käänteisfunktion olemassaolo ja jatkuvan monotonisen funktion käänteisfunktion jatkuvuus, jotka todistettiin myös tässä tutkielmassa. Lukion Calculus tarjoaa perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä, mutta niitä on muihin verrattuna määrällisesti vähän. Tämä kirjasarja on kuitenkin ainoa, joka tarjoaa myös käytännönläheisiä tehtäviä, missä esimerkiksi tulee piirtää taulukon pohjalta postimaksu kirjeen painon funktiona, ja tutkittava tämän graafin jatkuvuutta. Ajatus on hyvä, mutta ehkä tutkittava taulukko voisi olla hieman enemmän lukiolaista kiinnostavasta aiheesta.

Viimeisenä tarkastellaan Juuri-kirjasarjan tehtävätarjontaa. Kirjasarja jaottelee tehtävät kätevästi kolmeen alaotsikkoon: ydintehtävät, vahvistavat tehtävät ja syventävät tehtävät. Opettajan näkökulmasta tämä on todella hyödyllistä, sillä tehtävät on jo ikään kuin valmiiksi eriytetty, jolloin tehtävien valinta eritasoisille oppijoille on helpompaa. Kirja tarjoaa myös teknologian kehityksen huomioon ottaen tehtäviä, joita voi tehdä appletilla. Paras ominaisuus, jota ei löytynyt mistään muusta kirjasta, on kuitenkin takasivulle tehty niin sanottu vinkkiosio. Sieltä löytyy moniin tehtäviin pieni vinkki, joka voi auttaa tehtävän aloittamisessa tai ongelmakohdasta etenemisessä. Yleensä kirjan takana on ainoastaan vastaus ja pieni selitys, mikä vie oivaltamisen ja onnistumisen riemun, mutta nyt vinkkiosion ansiosta oppilas voi vihjeen avulla ratkaista tehtävän itse ja saada siten iloa ja itseluottamusta. Tämän kirjasarjan jatkokurssi tarjoaa samoin selkein alaotsikoin runsaasti monipuolisia tehtäviä.

Tutkittuani neljää kirjasarjaa mielestäni selkein tapa johdattaa oppilas jatkuvuuden määritelmään on edelleen raja-arvokäsitteen kautta. Se on selkeä askel juuri opitusta aiheesta ikään kuin sen sovellukseen. Jatkuvuutta on helpoin havainnollistaa kuvien ja graafien avulla, ja lähes kaikki oppikirjat niitä käyttävätkin runsaasti. Mielestäni peruskurssilla riittää, että määritellään jatkuvuus raja-arvon avulla, sillä jatkuvuus on vaikeasti ymmärrettävä asia ja erittäin tärkeä käsite. Vaihtoehtoiset määritelmät saattaisivat vain hämmentää oppilaita. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi syventävänä kurssina tarjoaa kuitenkin mahdollisuudet vaihtoehtoisten määritelmien esittelyyn ja käyttöön. Näin tehdään Matematiikan taito -kirjassa ottamalla käyttöön luvut ε ja δ. Tästä voisi helposti esitellä jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmän formaalisti ja antaa pari todistustehtävää, joissa käytetään kyseistä määritelmää. Lisäksi Matematiikan taito -kirjassa todistetaan aidosti monotonisten jatkuvien funktioiden ominaisuuksia, joten tässä olisi mahdollisuus sivuta myös Mauden, Mathematical Analysis -kirjassa, esittelemää jatkuvuuden määritelmää - ainakin koskien monotonisia funktioita ja mahdollisesti syvemminkin. Avoimet joukot ja niiden ominaisuuksien ymmärtäminen vaativat mielestäni kuitenkin aika paljon matemaattista ajattelua. Sen ymmärtämiseen ei välttämättä riitä kuvien ja graafien tarkastelu. Jos opettaja haluaa esitellä vaihtoehtoisen määritelmän, on mielestäni parempi valita $\varepsilon - \delta$-määritelmä, koska se on helpommin ymmärrettävissä, kunhan erikoisia, uusia merkintöjä ei vierasta liikaa. Etenkin matematiikassa eriyttäminen on todella iso asia, joten on elintärkeää, että opettajat käyttävät useita saatavilla olevia oppimateriaaleja. Monien eri kirjasarjojen käyttäminen palvelee sekä oppilaita että opettajaa. Opettaja pystyy tarjoamaan monipuolisempia ja eritasoisia tehtäviä. Niille, joille matematiikka on haastavaa, on mahdollisuus tarjota enemmän perustehtäviä ja matemaattisesti lahjakkaammille erilaisia syventäviä tehtäviä. Vaikka jatkuvuus on määritelty jo pitkän aikaa samalla tavalla, opetustavat ja oppilaiden oppimistavat kehittyvät koko ajan ja siksi on tärkeää, että opettajalla on käytössään mahdollisimman monta erilaista työkalua ja työtapaa.

Kirjallisuutta

[1] Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoki, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli, Timo Sankilampi: *Matematiikan taito 7, MAA7, Derivaatta.* WSOY oppimateriaalit OY, 2007

[2] Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoki, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli, Timo Sankilampi: *Matematiikan taito 13, MAA13, Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* WSOY oppimateriaalit OY, 2007

[3] Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-aho, Terhi Raittila, Tommi Tikka: *Juuri 6, MAA6, Derivaatta.* Otava, 2015

[4] Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-aho, Terhi Raittila, Tommi Tikka: *Juuri 13, MAA13, Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Otava, 2015

[5] Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen, Matti Räsänen: *Lukion Calculus 4, MAA7 Derivaatta, MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot.* Otava, 2005

[6] Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen, Matti Räsänen: *Lukion Calculus MAA13, Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Otava, 2005

[7] Pekka Kontkanen, Jukka Lehtonen, Riitta Liira, Kerkko Luosto, Anja Ronkainen: *Pyramidi 7, MAA7, Derivaatta.* Tammi, 2009

[8] Pekka Kontkanen, Jukka Lehtonen, Riitta Liira, Kerkko Luosto, Anja Ronkainen: *Pyramidi 13, MAA13, Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Tammi, 2009

[9] Tero Kilpeläinen: *Analyysi 1, luentomoniste.* Jyväskylän yliopisto, 2002

[10] Ronald Maude: *Mathematical Analysis.* Edward Arnold, 1986.

[11] Michael Spivak: *Calculus.* Third edition, Cambridge University Press, 1994.

[12] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner, Andrew M. Bruckner: *Elementary Real Analysis.* Second edition, Prentice-Hall, 2001.