Pelurin pelikirja

Eemil Boström

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Eemil Boström, *Pelurin pelikirja* (engl. *Players playbook*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 9. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella erilaisia uhkapelaajan strategioita niin kutsutussa $puna - musta$ -pelissä pelinjärjestäjää vastaan. Tutkielmassa määritellään $puna - musta$ -peli siten, että peli koostuu yksittäisistä kierroksista, jotka voivat päättyä vain ja ainoastaan pelaajan voittoon tai häviöön. Voittaessaan kierroksen pelaaja saa asettamansa panoksen suuruisen varallisuuden pelinjärjestäjältä ja hävitessään menettää kierroksen panoksen. Pelaaja pelaa kunnes hän on saavuttanut aiemmin asettamansa tavoitteen tai hänen varansa ovat loppuvat.

Yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyyden perusteella pelit voidaan luokitella pelaajan kannalta suotuisiksi, epäsuotuisiksi tai neutraaleiksi. Erilaisille peleille erilaiset strategiat toimivat eri tavalla. Strategiaa, jolla pelaajan todennäköisyys saavuttaa asettamansa tavoite on suurin, kutsutaan optimaaliseksi strategiaksi. Tutkimuksen merkittävimpiä tuloksia onkin optimaaliset strategiat yksittäisen kierroksen eri voittotodennäköisyyksille.

Tutkielmassa keskitytään kahteen erilaiseen pelaajan strategiaan. Strategiat ovat nimetty pelkurin strategiaksi ja rohkeaksi strategiaksi. Strategioiden merkittävin ero on tapa, jolla kierroksittainen panos valitaan. Pelkurin strategian keskeinen idea on pelata mahdollisimman pienellä kierrospanoksella, kun taas rohkeassa strategiassa panos valitaan mahdollisimman suureksi. Tutkielmassa perehdytään kierrosten lukumäärän odotusarvoon ja todennäköisyyksiin saavuttaa tavoitevarallisuus edellä mainituilla strategioilla. Tutkielman lopussa käsitellään muutamaa vaihtoehtoista pelaajan strategiaa.

Suotuisassa pelissä, jossa pelinjärjestäjä on asettanut minimipanoksen, on pelaajan kannattavinta pelata mahdollisimman pienellä kierroksittaisella panoksella. Suotuisassa pelissä, jossa pelinjärjestäjä ei ole rajoittanut peliä minimipanoksella, on pelaajan suotuisaa pienentää panosta loputtomiin. Pienempi panos tuottaa jatkuvasti paremman todennäköisyyden onnistua. Yleisesti suotuisista peleistä voidaan todeta, että pienet kierroksittaiset panokset lisäävät pelaajan todennäköisyyttä saavuttaa tavoite. Suotuisassa pelissä kierroksittaiset todennäköisyydet ovat pelaajan puolella ja siten mitä enemmän suotuisia kierroksia, sitä suurempi todennäköisyys saavuttaa tavoite. Optimaalinen strategia on siis pelkurin strategia.

Epäsuotuisissa peleissä on onnistumisen todennäköisyyden kannalta kannattavaa pyrkiä saavuttamaan tavoite mahdollisimman nopeasti. Kierroksittainen voiton todennäköisyys on pelinjärjestäjän puolella ja ylimääräisiä kierroksia on syytä välttää, mikäli pelaaja haluaa saavuttaa tavoitteen suuremmalla todennäköisyydellä. Optimaalinen strategia on siis rohkea strategia. Strategian heikkoutena tavalliselle viihdepelaajalle voidaan kuitenkin pitää kierrosten odotusarvon pientä määrää. Vaikka todennäköisyys onnistua on suuri, pelit päättyvät todennäköisesti muutaman kierroksen jälkeen.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Pelin luonne 3
- 1.1. Perustapaus ja satunnaisuus 3
- 1.2. Pelaajan strategia 4
- 1.3. Pelaajan lopetusehto 5

Luku 2. Pelkurin strategia 7
- 2.1. Tavoitteen saavuttamisen todennäköisyys pelkurin strategialla 7
- 2.2. Kierrosten odotusarvo pelkurin strategialla 11
- 2.3. Panoksen vaikutus 14

Luku 3. Rohkea strategia 17
- 3.1. Tavoitteen saavuttamisen todennäköisyys rohkealla strategialla 17
- 3.2. Binäärimuoto 18
- 3.3. Kierrosten odotusarvo rohkealla strategialla 21

Luku 4. Optimaalinen strategia 27
- 4.1. Ehto strategian optimaaliudelle 27
- 4.2. Suotuisat pelit minimipanoksella 28
- 4.3. Suotuisat pelit ilman minimipanosta 29
- 4.4. Epäsuotuisat pelit 30

Luku 5. Muita strategioita 35
- 5.1. Rohkean strategian variaatiot 35
- 5.2. Martingale-strategia 36

Lähdeluettelo 39

Johdanto

Tässä työssä tutkitaan kahta erilaista pelistrategiaa pelaajan ja pelinjärjestäjän välisessä $puna - musta$ -pelissä. Strategioista tutkitaan erityisesti kierrosten lukumäärän odotusarvoa ja todennäköisyyttä saavuttaa pelaajan tavoittelema pääoma ennen varojen loppumista. Peliä tutkitaan pelaajan näkökulmasta, jossa yksittäinen kierros voi päättyä joko voittoon tai häviöön. Vastaavasti kierrosten satunnaiskulusta koostuva peli voi päättyä joko onnistumiseen, jolloin pelaaja saavuttaa haluamansa varallisuuden tai epäonnistumiseen, jolloin hänen varansa loppuvat. Tässä työssä käsiteltävä $puna - musta$ -peli on yksinkertainen, mutta myös hyvin yleinen uhkapelaamisen muoto. Pelit joissa tapahtumat voivat päättyä kahdella mahdollisella tavalla voidaan yleistää $puna - musta$ -peliksi. Esimerkkejä $puna - musta$ -peleistä, joihin tutkimuksen strategioita on mahdollista soveltaa, ovat muun muassa yhdet maailman tunnetuimmista casinopeleistä kuten Ruletti ja Craps.

Eri strategioiden hyödyt ja haitat riippuvat usein siitä mitä pelaaja peliltään haluaa. Tavallinen viihdepelaaja haluaa usein peliltä sekä viihdettä että voittoa, joka on uhkapelissä pelinjärjestäjää vastaan melko haastava yhdistelmä. Valitsemalla strategiansa oikein voi pelaaja maksimoida todennäköisyyden saavuttaa tavoite joko mahdollisimman nopeasti tai mahdollisimman varmasti. Voittoa tavoitteleva pelaaja valitsee luultavasti strategian, jossa todennäköisyys saavuttaa tavoitevarallisuus on kaikkein suurin. Pelit jaetaan tässä tutkimuksessa karkeasti suotuisiin ilman minimipanosta, suotuisiin minimipanoksella, neutraaleihin ja epäsuotuisiin. Tässä tutkimuksessa selvitämmekin, mikä strategia pelaajan kannattaa valita, jotta todennäköisyys saavuttaa tavoitevarallisuus ennen varojen loppumista olisi mahdollisimman suuri eli toisin sanoen mikä on optimaalinen strategia.

Vaikka tutkielmassa käsitellään tarkemmin vain kahta strategiaa, on muistettava että mahdollisia strategioita on olemassa lukematon määrä ja muutama niistä esitellään pääpiirteittäin tutkielman lopussa. Tutkimuksessa keskitytään strategian tutkimiseen ja asetetaan tietyt oletukset pelinjärjestäjälle. Pelinjärjestäjä ei tutkimuksessa voi asettaa panokselle ylärajaa eikä pelinjärjestäjän varat voi loppua. Todellisuudessa kaikki tutkimuksen oletukset eivät ole voimassa, sillä esimerkiksi panoksen ylärajalla voidaan rajoittaa tiettyjen strategioiden toimivuuttaa. Esimerkiksi Martingale-strategia, jota käsitellään pääpiirteittäin tutkielman lopussa muuttuu merkittävästi, jos panokselle on asetettu yläraja.

Tutkielman todistukset perustuvat vahvasti diskreettiin matematiikkaan. Eri strategioiden tutkiminen suoritetaan toisiaan muistuttavalla kaavalla. Strategiat toisistaan erottava tekijä on tapa valita kierrosten panos, jota kutsutaan panostusfunktioksi.

Panostusfunktion kautta tarkastellaan varallisuuden kehittymistä pelaajan voittaessa tai hävitessä seuraavan kierroksen. Tätä kautta päästään käsiksi funktioon, joka kuvaa pelaajan varallisuutta suhteessa tavoitevarallisuuteen. Kyseisiä funktioita kutsutaan tässä tutkimuksessa onnistumisfunktioiksi ja ne ovat eri strategioiden optimaalisuuden kannalta merkittävimpiä mittareita. Tämä tutkimus perustuu Lester E. Dubins ja Leonard J. Savagen vuonna 1965 julkaisemaan *How to gamble if you must* -kirjaan [**4**], ja erityisesti sen luvusta *Red and Black* kertovaan teokseen [**7**].

LUKU 1

Pelin luonne

Tässä tutkielmassa keskitymme tarkastelemaan erilaisia pelistrategioita uhkapelaamisessa. Pelistrategioilla tarkoitetaan pelaajan tekemiä taktisia valintoja, jotka käytännössä tarkoittavat kierroksittaisen panoksen suuruutta. Eri strategioissa pelaaja valitsee asettamansa panoksen erilaisen panostusfunktion avulla. Pelimuotona tapauksissa on yksinkertainen malli, jossa on kaksi osallistujaa, pelaaja sekä pelinjärjestäjä. Pelaaja asettaa itselleen tavoitevarallisuuden, johon yrittää päästä ennen varojen loppumista. Jos pelaaja saavuttaa tavoitevarallisuuden ennen varojen loppumista, pelaajan voidaan sanoa onnistuneen pelissä. Tavoitevarallisuutta ja varojen loppumista pidetään lopetuspisteinä, sillä tällöin pelaaja lopettaa pelaamisen. Itse peli koostuu kierroksista, jotka voivat päättyä kahdella mahdollisella tavalla. Pelaaja joko voittaa tai häviää. Pelinjärjestäjä ei aseta rajoituksia yksittäisten kierrosten panokselle, pelaajan lopetuspisteelle eikä pelin järjestäjän varat voi loppua. Kaikki valta on siten itse pelaajalla ja pelaajan onnistumisen todennäköisyys riippuu matemaattisesti pelaajan valitsemasta strategiasta. Näihin erilaisiin strategioihin ja niiden todennäköisiin seurauksiin tutustumme tässä tutkielmassa.

1.1. Perustapaus ja satunnaisuus

Pelaajalla on käytössä alkuvarallisuus, josta pelaaja asettaa ennen kierrosta strategiansa mukaisen panoksen. Voittamalla kierroksen pelaaja ansaitsee panostamansa varallisuuden kokoisen voiton ja häviöllä menettää asetetun panoksen. Neutraalissa pelissä yksittäisen kierroksen voiton ja häviön todennäköisyydet ovat yhtä suuret. Pelit voivat kuitenkin olla myös pelaajan kannalta suotuisia, jolloin yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys on yli $\frac{1}{2}$ tai vastaavasti epäsuotuisia, jolloin yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys on alle $\frac{1}{2}$. Yksittäiset kierrokset valitussa pelissä ovat toisistaan riippumattomia ja identtisiä tapahtumia. Varallisuus $X = X_0, X_1, ..., X_n$ voidaan ajatella Markovin ketjuna.

Määritelmä 1.1. Markovin ketju
Jono $X_0, X_1, ...$ satunnaismuuttujia on Markovin ketju, jos

$$\mathbb{P}\left(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}\right)$$

kaikille satunnaismuuttujien mahdollisille arvoille.

Markovin ketjun jono $X_0, X_1, ..., X_n$ kuvaa tapahtuminen historiaa tapaukseen n asti. Satunnaismuuttujan X_n arvo riippuu vain sitä edeltävän muuttujan X_{n-1} arvosta. Markovin ketjun tulevaisuuden arvot tunnetusta hetkestä eteenpäin ovat ehdollisesti riippumattomia ketjun menneistä arvoista. Matemaattisesti n:nnen kierroksen tulosta voidaan kuvata satunnaismuuttujalla I_n, jonka mahdollisia arvoja ovat 0 ja

1. Jos pelaaja voittaa n:nnen kierroksen, niin merkitään $I_n = 1$ ja vastaavasti jos pelaaja häviää, niin merkitään $I_n = 0$. Jos $p \in [0, 1]$ on yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys, niin pätee

$$\mathbb{P}(I_n = 1) = p \qquad \text{ja} \qquad \mathbb{P}(I_n = 0) = 1 - p.$$

Kun $p = 0$ pelaaja häviää varmasti ja kun $p = 1$ pelaaja voittaa varmasti. Tapaukset ovat vedonlyönnin kannalta harvinaisia ja matemaattisesti selviä. Vedonlyönnissä tarkasteltava pelaajan voiton todennäköisyys p kuuluu usein välille $]0, 1[$. Tarkasteltaessa vedonlyöntiä erilaisia pelintarjoajia vastaan, kuten vedonlyöntiyhtiöt tai casinot, todennäköisyys on yleensä $0 < p < \frac{1}{2}$. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että yksittäistä kierrosta tarkasteltaessa pelintarjoaja voittaa pelaajaa todennäköisemmin.

Pelaajan varallisuus tietyllä hetkellä riippuu Markovin ketjun mukaisesti edeltävästä kierroksesta. Olkoon pelaajan varallisuus lähtötilanteessa X_0 ja n:nnen pelin jälkeen X_n. Satunnaismuuttujan X_n arvoon vaikuttaa edellisen kierroksen jälkeinen varallisuus X_{n-1}, kierroksella n käytetty panos Y_n ja kierroksen lopputulos I_n. Tarkasteltavan n:nnen kierroksen mahdollinen voitto tai häviö on muotoa $(2I_n - 1)\, Y_n$. Tällöin n:nnen kierroksen ollessa pelaajan kannalta tappiollinen eli $I_n = 0$ pelaajan varallisuus X_n on

$$X_n = X_{n-1} + 2(I_n - 1)Y_n = X_{n-1} + (2 \cdot 0 - 1)Y_n = X_{n-1} - Y_n.$$

Pelaajan varallisuus on siis edellisellä kierroksella asetetun panoksen verran pienempi kuin ennen kyseistä kierrrosta. Vastaavasti jos n:s kierros on pelaajalle voitollinen eli $I_n = 1$, niin

$$X_n = X_{n-1} + 2(I_n - 1)Y_n = X_{n-1} + (2 \cdot 1 - 1)Y_n = X_{n-1} + 2Y_n.$$

Pelaajan varallisuus n:nen kierroksen jälkeen on kasvanut kaksi kertaa edellisen kierroksen panoksen suuruisella varallisuudella. Voidaan siis todeta, että pelaajan varallisuus n kierroksen jälkeen on

$$X_n = X_{n-1} + (2I_n - 1)Y_n. \tag{1.1}$$

1.2. Pelaajan strategia

Pelaajalla on useita erilaisia mahdollisia strategioita. Erilaisissa strategioissa kierroksittainen panos valitaan eri tavoilla. Koska pelaajan asettama tavoitevarallisuus ja yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys pysyvät pelissä samoina, on ainoastaan tavalla valita panos vaikutus onnistumisen todennäköisyyteen. Tapaa valita panos kutsutaan panostusfunktioksi ja eri strategioilla on erilaiset panostusfunktiot. Pelaajat pyrkivät useimmiten mahdollisimman suureen todennäköisyyteen saavuttaa tavoittelemansa varallisuus. Tutkimuksessa pyritään tarkastelemaan mikä olisi pelaajan kannalta optimaalinen strategia, että todennäköisyys saavuttaa haluttu varallisuus olisi mahdollisimman suuri.

Pelaajan varallisuuden odotusarvo n pelin jälkeen on $\mathbb{E}(X_n)$. Kaavan (1.1) nojalla siis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(X_{n-1}) + (2I_n - 1)Y_n) \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}) + \mathbb{E}((2I_n - 1)Y_n) \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}) + (2p - 1)\mathbb{E}(Y_n),
\end{aligned}$$

missä $p \in [0,1]$ on pelaajan todennäköisyys voittaa yksittäinen kierros ja $\mathbb{E}(I_n) = p * 1 + (1-p) * 0 = p$. Jos $p < \frac{1}{2}$, niin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(X_{n-1}) + (2p-1)\mathbb{E}(Y_n) \\ &< \mathbb{E}(X_{n-1}).\end{aligned}$$

Jos $p > \frac{1}{2}$, niin epäyhtälön merkki kääntyy ja $\mathbb{E}(X_n) > \mathbb{E}(X_{n-1})$. Jos $p = \frac{1}{2}$, niin epäyhtälöstä tulee yhtälö ja $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1})$. Edellisten tulosten nojalla on siis selvää, että pelaajan varallisuuden odotusarvo kasvaa edelliseen kierrokseen nähden jos voiton todennäköisyys on suurempaa kuin $\frac{1}{2}$, pienenee jos todennäköisyys on pienempää kuin $\frac{1}{2}$ ja säilyy samana jos todennäköisyys on $\frac{1}{2}$.

1.3. Pelaajan lopetusehto

Pelaajan on mahdollista määrittää itselleen lopetusehto varallisuuden ja tavoittelemansa varallisuuden avulla. Lopetusehdoksi kutsutaan varallisuutta, jonka saavutettuaan pelaaja lopettaa pelaamisen ellei varat ole loppuneet aikaisemmin. Merkitään tavoitevarallisuutta a. Ajatellaan pelaajan jatkavan pelaamista kunnes hänen varallisuutensa X_n loppuu tai hän saavuttaa haluamansa tavoitevarallisuuden a. Tällöin voidaan määrittää pelaajan varallisuuteen liittyvä lopetusaika N siten, että

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0 \quad \text{tai} \quad X_n = a\},$$

missä lopetusaika N voidaan ajatella myös pelattujen pelien määränä ennen lopetusehdon saavuttamista. Varallisuuden odotusarvo lopetusehdon täytyttyä lopetusajassa N voidaan laskea diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvoa hyödyntäen, kun $X_N = 0$ tai $X_N = a$. Pelaajan asettama panos on positiivinen luku, joka ei voi olla suurempi kuin tavoitevarallisuus, sillä muuten pelaaja olisi jo saavuttanut tavoitteen. Pelaaja ei saa myöskään asettaa panosta siten, että voittaessa varallisuus kasvaisi yli tavoitellun varallisuuden. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_N) &= 0\mathbb{P}(X_N = 0) + a\mathbb{P}(X_N = a) \\ &= a\mathbb{P}(X_N = a).\end{aligned}$$

LUKU 2

Pelkurin strategia

Pelkurin strategiassa pelaaja asettaa jokaiselle kierrokselle pienen vakiopanoksen. Pelaaja pelaa niin kauan kunnes lopetusehto toteutuu. Oletetaan pelaajan asettamaksi panokseksi 1 €. Tällöin jokaisella kierroksella pelaajan varallisuus joko kasvaa yhdellä tai pienenee yhdellä kunnes lopetusehto toteutuu. Tällöin pelaajan varallisuus $(X_0, X_1, ...)$ on Markovin ketju, joka saa arvoja joukosta $\{0, 1, ..., a\}$, kun a on pelaajan tavoittelemana varallisuuden päämääränä positiivinen luku. Varallisuus on Markovin ketjun mukainen satunnaiskulku, jonka arvo n:nnen kierroksen jälkeen riippuu edellisen kierroksen varallisuudesta ja n:nnen kierroksen panoksesta ja tuloksesta.

2.1. Tavoitteen saavuttamisen todennäköisyys pelkurin strategialla

Pelaaja onnistuu tehtävässään, mikäli hän saavuttaa tavoittelemansa varallisuuden a. Muodostetaan pelaajan onnistumistodennäköisyyttä kuvaava funktio siten, että x on pelaajan varallisuus ja a on pelaajan tavoittelema varallisuus. Ajatellaan sekä varallisuus, että tavoiteltu varallisuus muuttujina.

Lause 2.1. *Jos x on pelaajan alkuvarallisuus ja a tavoitevarallisuus, niin pelaajan onnistumistodennäköisyysfunktiolle $f(x, a) = \mathbb{P}(X_N = a | X_0 = x)$ pätee*

$$f(x, a) = (1 - p)f(x + 1, a) + pf(x - 1, a), \qquad x \in \{1, 2, ..., a - 1\}.$$

Todistus. Yksittäiset kierrokset ovat toisistaan riippumattomia. Merkitään todennäköisyyttä voittaa kierros p:llä ja hävitä $(1 - p)$:llä. Jos pelaaja häviää ensimmäisen kierroksen ja menettää yhden € varojaan, on tämän jälkeen todennäköisyys saavuttaa tavoiteltu varallisuus $\mathbb{P}(X_N = a | X_0 = x - 1)$. Jos pelaaja voittaa ensimmäisen kierroksen, on todennäköisyys vastaavasti $\mathbb{P}(X_N = a | X_0 = x + 1)$. Tällöin todennäköisyyden laskusääntöjen mukaan

$$\mathbb{P}(X_N = a | X_0 = x) = p\mathbb{P}(X_N = a | X_0 = x + 1) + (1 - p)\mathbb{P}(X_N = a | X_0 = x - 1)$$

eli onnistumisfunktiolle pätee

$$f(x, a) = pf(x + 1, a) + (1 - p)f(x - 1, a)$$

kaikille $x \in \{1, 2, ..., a - 1\}$. □

Jos pelaajan varallisuus $x = 0$, niin pelaaja on saavuttanut lopetusehdon mukaisen lopetuspisteen varojen loputtua ja epäonnistunut saavuttamaan asettamansa tavoitevarallisuuden. Tällöin onnistumisfunktiolle pätee $f(0, a) = 0$. Jos pelaajan varallisuus $x = a$, niin vastaavasti lopetusehto täyttyy ja pelaaja on onnistunut saavuttamaan asettamansa tavoitevarallisuuden. Tällöin onnistumisfunktiolle pätee $f(a, a) = 1$. Lauseen 2.1 nojalla funktio $f(x, a)$ toteuttaa toisen kertaluvun lineaarisen differenssiyhtälön. Sijoitetaan funktioon muuttujan x paikalle $x+1$, jolloin funktio saadaan muotoon

$$f(x+1,a) = pf(x+2,a) + (1-p)f(x,a)$$

eli

$$f(x+2,a) - \frac{f(x+1,a)}{p} + \frac{1-p}{p}f(x,a) = 0.$$

Funktio f toteuttaa yhtälön $y_{k+2} - \frac{1}{p}y_{k+1} + \frac{1-p}{p}y_k = 0$, jonka karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 - \frac{1}{p}\lambda + \frac{1-p}{p} = 0$$

eli

$$p\lambda^2 - \lambda + q = 0, \tag{2.1}$$

kun $q = 1-p$. Käsitellään ensin tapaus $p \neq \frac{1}{2}$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan karakteristiselle yhtälölle kaksi reaalista ratkaisua, sillä diskriminantti $D = 1 - 4pq$ on positiivinen oletuksen $p \neq \frac{1}{2}$ perusteella.

Lause 2.2. *Toisen kertaluvun homogeenisen differenssiyhtälön*

$$y_{k+2} + ay_{k+1} + by_k = 0$$

ratkaisu on

$$y_k = C_1 r_1^k + C_2 r_2^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

jos $r_1 \neq r_2$ ovat karakteristisen yhtälön kaksi erisuurta reaalijuurta. Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen juuri eli $r_1 = r_2$, niin ratkaisu on muotoa

$$y_k = C_1 r_1^k + C_2 k r_2^k.$$

Lause on diskreetin matematiikan keskeisiä tuloksia. Lause on esitetty esimerkiksi lähteessä [**3**]. Ratkaistaan yhtälöstä (2.1) toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla juuret λ_1 ja λ_2. Tällöin

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4pq}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{4p^2 - 4p + 1}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{(1-2p)^2}}{2p},$$

jolloin karakteristisellä yhtälöllä on kaksi ratkaisua. Kun $p \neq \frac{1}{2}$, niin erityisesti $\frac{q}{p} \neq 1$ ja ratkaisut karakteristiselle yhtälölle ovat

$$\lambda_1 = \frac{1}{2p} + \frac{1-2p}{2p} = \frac{q}{p}$$

ja

$$\lambda_2 = \frac{1}{2p} - \frac{1-2p}{2p} = 1.$$

Tällöin yleinen ratkaisu toisen kertaluvun lineaariselle ja homogeeniselle differenssiyhtälölle on lauseen 2.2 mukaan

$$f(x,a) = C_1 1^x + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Funktiolle $f(x,a)$ pätee $f(0,a)=0$ ja $f(a,a)=1$, joten

$$f(0,a)=C_1+C_2=0$$

ja

$$f(a,a)=C_1+C_2\left(\frac{q}{p}\right)^a=1.$$

Ratkaistaan edellisten avulla C_1 ja C_2, jolloin

$$C_1=-\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1} \qquad \text{ja} \qquad C_2=\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}.$$

Tällöin onnistumistodennäköisyysfunktiolle pätee

$$f(x,a)=-\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}1^x+\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}\left(\frac{q}{p}\right)^x=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}, \tag{2.2}$$

kun $x\in\{0,1,...,a\}$. Tämä ei selvästi päde kun $p=\frac{1}{2}$. Tutkitaan seuraavaksi erikoistapausta, jossa yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys $p=\frac{1}{2}$. Tällöin karakteristisen yhtälön diskriminantti on 0 ja kaavan (2.1) juuret ovat nyt

$$\lambda_1=\frac{1}{2p}=1$$

ja

$$\lambda_2=\frac{1}{2p}=1.$$

Juuret ovat yhtä suuret ja yleinen ratkaisu on muotoa

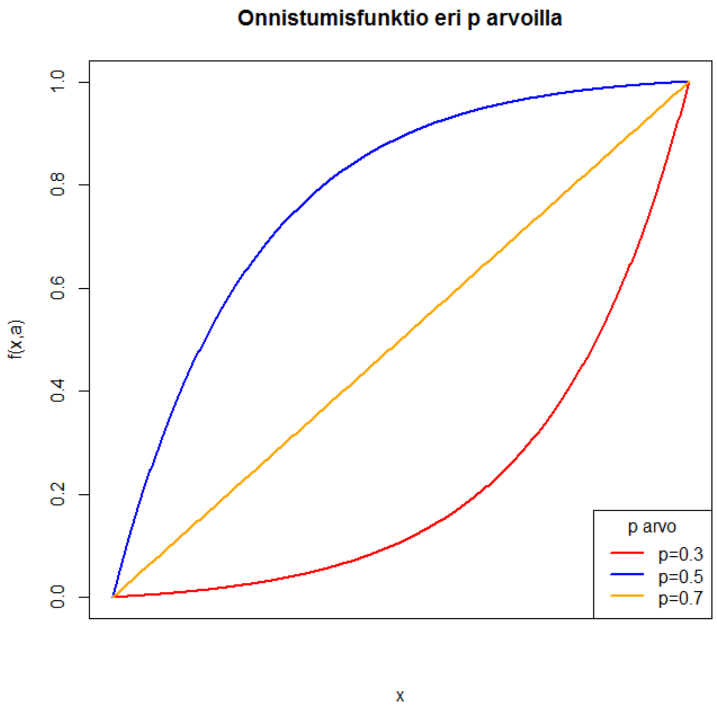
$$f(x,a)=C_1x1^x+C_21^x=C_1x+C_2,$$

joten $0=f(0,a)=C_2$ ja vastaavasti $1=f(a,a)=C_1a+C_2$. Siten $C_1=\frac{1}{a}$ ja yleiselle ratkaisulle pätee

$$f(x,a)=x\frac{1}{a}=\frac{x}{a}, \qquad x\in\{0,1,...,a\}. \tag{2.3}$$

Kuvassa 2.1 on onnistumisfunktion kuvaaja yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyyden p esimerkkiarvoilla. Funktion $f(x,a)$ arvo lähestyy 1, kun varallisuus x lähestyy tavoitevarallisuutta a. Yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyyden ollessa $p>\frac{1}{2}$, on funktio konkaavi. Kun $p<\frac{1}{2}$, on funktio konveksi. Kun $p=\frac{1}{2}$, on funktio lineaarinen. Konkaaveista ja konvekseista funktiosta lisää tietoa löytyy esimerkiksi lähteestä [**8**].

Esimerkki 2.3. Pelaaja astuu kasinon rulettipöytään. Pelaajan alkuvarallisuus x on 100 € ja hän päättää pelata vain yhden euron panoksella valitsemaansa väriä. Tällöin voiton todennäköisyys $p=\frac{18}{37}$ ja häviön vastaavasti $q=\frac{19}{37}$. Pelaaja lopettaa



KUVA 2.1. Onnistumisfunktion kuvaaja kun p saa esimerkkiarvoja 0.7, 0.5 ja 0.3 ja $x \in [0, a]$.

pelaamisen jos hänen varansa loppuvat tai hän saavuttaa asettamansa tavoitevarallisuuden $a = 150$. Kaavan (2.2) mukaan

$$f(100, 150) = \frac{\left(\frac{\frac{19}{37}}{\frac{18}{37}}\right)^{100} - 1}{\left(\frac{\frac{19}{37}}{\frac{18}{37}}\right)^{150} - 1} \sim 0.067.$$

Pelaajan todennäköisyys saavuttaa tavoitevarallisuus a on siis noin 6.7%.

ESIMERKKI 2.4. Häviöstään suuttunut pelaaja haastaa kaverinsa vastaavaan uhkapeliin, jossa jokaisella kierroksella toinen pelaajista voittaa 1 € suuruisen panoksen ja toinen vastaavasti häviää. Pelissä kierroksen voiton todennäköisyys $p = \frac{1}{2}$. Tavoitteenaan pelaajalla on saavuttaa tavoitevarallisuus $a = 150$, kun alkuvarallisuus $x = 100$. Tällöin todennäköisyys saavuttaa tavoitevarallisuus on kaavan (2.3) mukaan

$$f(x, a) = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}.$$

Pelaajan todennäköisyys saavuttaa tavoitevarallisuus a on siis noin 67%.

Esimerkissä 2.3 yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys on hyvin lähellä reilua, mutta siitä huolimatta tavoitevarallisuuden saavuttamisen todennäköisyys on pieni. Esimerkissä 2.4 peli on yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyydeltä reilu ja pelaajan todennäköisyys saavuttaa tavoitevarallisuus on merkittävästi esimerkkiä 2.3 suurempi. Mielenkiintoisen tilanteesta tekee se, että yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys on ainoastaan $\frac{1}{74}$ suurempi esimerkissä 2.4, mutta tavoitteen saavuttamisen todennäköisyydessä on suuri ero.

2.2. Kierrosten odotusarvo pelkurin strategialla

Tutkitaan seuraavaksi kuinka monta kierrosta pelaajan voidaan olettaa pelaavan pelkurinstrategialla.

LAUSE 2.5. *Pelaajan alkuvarallisuuden ollessa x pelattavien kierrosten odotusarvo $g(x,a) = \mathbb{E}(N|X_0 = x)$ toteuttaa differenssiyhtälön*

$$g(x,a) = qg(x-1,a) + pg(x+1,a) + 1, \qquad x \in \{1, 2, ..., a-1\}.$$

TODISTUS. Jos pelaaja voittaa ensimmäisen kierroksen hänen varallisuutensa kasvaa yhdellä € ja tällöin pelaajan varallisuus on $x+1$. Tällöin kierrosten odotusarvo on $1 + \mathbb{E}(N|X_0 = x+1)$, missä $\mathbb{E}(N|X_0 = x+1)$ vastaa pelattavien kierrosten odotusarvoa varallisuudella $x+1$. Vastaavasti hävittäessä varallisuus pienenee yhdellä € ja kierrosten odotusarvo on $1+\mathbb{E}(N|X_0 = x-1)$. Siten kierrosten odotusarvolle pätee

$$\mathbb{E}(N|X_0 = x) = p(1 + \mathbb{E}(N|X_0 = x+1)) + q(1 + \mathbb{E}(N|X_0 = x-1))$$
$$\mathbb{E}(N|X_0 = x) = p\mathbb{E}(N|X_0 = x+1) + q\mathbb{E}(N|X_0 = x-1) + 1$$

eli

$$g(x,a) = qg(x-1,a) + pg(x+1,a) + 1,$$

missä $x \in \{1, 2, ..., a-1\}$. □

Kierrosten odotusarvolle pätee $g(0,a) = 0$, sillä pelaajan varat ovat tällöin loppu ja lopetusehto toteutuu varojen loputtua. Vastaavasti $g(a,a) = 0$, sillä pelaaja on saavuttanut tavoitevarallisuuden ja lopetusehto toteutuu. Funktio $g(x,a)$ toteuttaa toisen kertaluvun lineaarisen epähomogeenisen differenssiyhtälön. Epähomogeenisuus johtuu yhtälön vakiotermistä 1.

LAUSE 2.6. *Toisen kertaluvun epähomogeenisen differenssiyhtälön*

$$C_1 y_{k+2} + C_2 y_{k+1} + y_k = r,$$

missä $r \neq 0$, yleinen ratkaisu y_n on kaksiosainen. Ratkaisu koostuu vastaavan homogeenisen differenssiyhtälön ratkaisusta y_k ja eräästä yhtälön ratkaisusta y_t. Tällöin epähomogeenisen differenssiyhtälön ratkaisu on muotoa

$$y_n = y_k + y_t.$$

Lause 2.6 on vastaavasti kuin lause 2.2 diskreetin matematiikan keskeisiä tuloksia. Tulos on esitetty myös lähteessä [**3**]. Tutkitaan ensin tapausta, jossa $p \neq \frac{1}{2}$. Tällöin $y_t(x) = \frac{x}{q-p}$ on differenssiyhtälön eräs ratkaisu ja vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on $y_k(x) = C_1 \left(\frac{q}{p}\right)^x + C_2$. Siten kierrosten lukumäärän odotusarvo $g(x,a)$ on muotoa

$$g(x,a) = \frac{x}{q-p} + C_1 \left(\frac{q}{p}\right)^x + C_2,$$

missä yhtälöistä $g(0,a)=0$ ja $g(a,a)=0$ seuraa

$$C_1+C_2=0 \qquad \text{ja} \qquad C_1\left(\frac{q}{p}\right)^x+C_2=-\frac{a}{q-p}.$$

Yhtälöstä $g(0,a)=g(a,a)$ ratkaistaan C_1 ja C_2, jolloin

$$C_1+C_2=C_1\left(\frac{q}{p}\right)^a+C_2$$

$$C_2=\frac{a}{(q-p)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a-1\right)}$$

ja

$$C_1=-\frac{a}{(q-p)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a-1\right)}.$$

Tällöin kierrosten lukumäärän odotusarvo on

$$\begin{aligned}
g(x,a)&=\frac{x}{q-p}-\frac{a}{(q-p)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a-1\right)}\left(\frac{q}{p}\right)^x+\frac{a}{(q-p)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a-1\right)}\\
&=\frac{x}{q-p}-\frac{a}{q-p}\left(\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}-\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}\right)\\
&=\frac{x}{q-p}-\frac{a}{q-p}\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}\\
&=\frac{x}{q-p}-\frac{a}{q-p}f(x,a),
\end{aligned}$$

missä $x\in\{0,1,...,a\}$.

Tutkitaan seuraavaksi tapausta, jossa $p=\frac{1}{2}$. Tällöin homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on $y_h(x)=C_1x+C_2$. Karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen juuri 1. Haetaan epähomogeenisen yhtälön erästä ratkaisua muodossa $y_p(x)=ax^2+bx+c$, joka toimii kun $a=-1$ ja $b=c=0$. Tällöin yleinen ratkaisu

$$g(x,a)=C_1+C_2x-x^2.$$

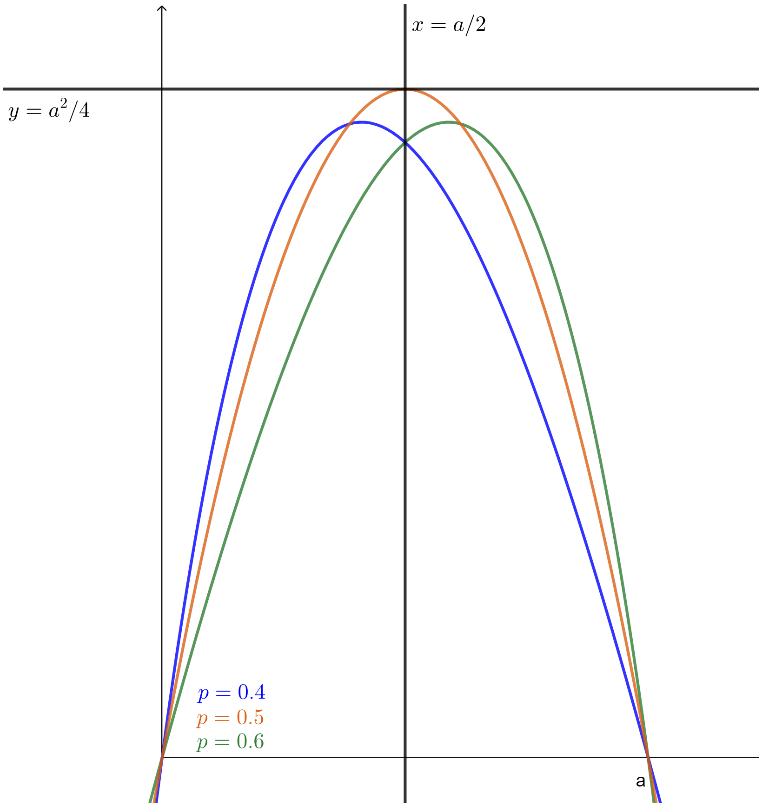
Yhtälöistä $g(0,a)=0=C_2$ ja $g(a,a)=0=C_1a-a^2$ seuraa, että funktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$g(x,a)=ax-x^2=x(a-x).$$

Kuten kuvasta 2.2 nähdään, yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyydellä on vaikutusta kierrosten lukumäärän odotusarvoon. Funktio g saavuttaa suurimman mahdollisen arvonsa $\frac{a^2}{4}$, kun pelaajan varallisuus $x=\frac{a}{2}$ ja yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys $p=\frac{1}{2}$.

Valitsemalla $a=x+m$, on funktio muotoa $g(x,a)=(x+m)x-x^2$ eli

$$g(x,a)=xm, \qquad x\in\{1,2,...,a\} \text{ ja } m\in\mathbb{R}.$$



KUVA 2.2. Kierrosten lukumäärän odotusarvon kuvaaja pelkurin strategialla eri yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyyksille.

Tästä seuraa, että

$$\lim_{m\to\infty} g(x,a) = \infty.$$

Kierrosten lukumäärän odotusarvo $g(x,a)$ kasvaa siis rajatta, kun $m \to \infty$ ja varallisuus x säilyy vakiona. Mielenkiintoista tuloksesta tekee se, että vaikka pelaajan varallisuus olisi ennen kierrosta 1, ja pelit voivat mahdollisesti päättyä yhden pelatun kierroksen jälkeen, kasvaa kierrosten lukumäärän odotusarvo silti rajatta lähestyen ääretöntä, kun $m \to \infty$.

ESIMERKKI 2.7. Pelaaja pelaa rulettia, jossa yksittäisen kierroksen todennäköisyys voittoon on $p = \frac{18}{37}$. Pelaajan varallisuus on $x = 100$ € ja tavoitevarallisuus $a = 150$ €. Peli loppuu jos pelaajan varat loppuvat tai hän saavuttaa asettamansa tavoitevarallisuuden. Tällöin pelattavien kierrosten odotusarvo on

$$g(100,150) = \frac{100}{\frac{19}{37} - \frac{18}{37}} - \frac{150}{\frac{19}{37} - \frac{18}{37}} \times \frac{\left(\frac{\frac{19}{37}}{\frac{18}{37}}\right)^{100} - 1}{\left(\frac{\frac{19}{37}}{\frac{18}{37}}\right)^{150} - 1} \sim 3330.$$

Kierrosten lukumääärän odotusarvo on 3330 vaikka esimerkin 2.3 mukaan pelaajan todennäköisyys saavuttaa asettamansa tavoitevarallisuus on $6,7\%$. Odotusarvoltaan pitkästä pelistä seuraa siis todennäköisesti pelaajan kannalta epämieluisa tulos.

Esimerkki 2.8. Pelaaja pelaa peliä, jossa yksittäisen kierroksen todennäköisyys voittoon on $p = \frac{1}{2}$. Pelaajan varallisuus on $x = 1$ € ja tavoitevarallisuus on $a = 100$ €. Peli loppuu jos pelaajan varat loppuvat tai hän saavuttaa asettamansa tavoitevarallisuuden. Tällöin pelattavien kierrosten odotusarvo on

$$g(1, 100) = 1(100 - 1) = 99.$$

Kierroksia tullaan odotusarvon perusteella pelaamaan 99.

2.3. Panoksen vaikutus

Pelaajan varallisuus ja tavoitevarallisuus voivat erota merkittävästi toisistaan. Tutkitaan seuraavaksi kuinka panoksen pienentäminen vaikuttaa pelaajan tavoitevarallisuuden saavuttamisen todennäköisyyteen pelkurin strategialla. Jos pelaaja puolittaa kierroksittaisen panoksen, se vastaa käytännössä tilannetta jossa panos säilyisi samana, mutta alkuvarallisuus ja tavoitevarallisuus kaksinkertaistettaisiin. Tällöin siis pelaajan alkuvarallisuus on $2x$, tavoitevarallisuus $2a$ ja panos kullakin kierroksella 1 €. Tällöin sijoittamalla tavoitevarallisuus ja alkuvarallisuus funktioon (2.2) pätee

$$f(2x, 2a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2x} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{2a} - 1} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} - 1} \times \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} + 1} = f(x, a)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} + 1}. \tag{2.4}$$

Käsitellään kolme tapausta, jotka eroavat yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyydeltä. Jos $p < \frac{1}{2}$, niin $\frac{q}{p} > 1$ ja funktiolle f pätee

$$f(2x, 2a) = f(x, a)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} + 1} < f(x, a)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} + 1} = f(x, a).$$

Jos $p > \frac{1}{2}$, niin $\frac{q}{p} < 1$ ja funktiolle f pätee

$$f(2x, 2a) = f(x, a)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} + 1} > f(x, a)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} + 1} = f(x, a).$$

Jos $p = \frac{1}{2}$, niin $\frac{q}{p} = 1$ ja selvästi $f(2x, 2a) = f(x, a)$. Edellä mainitut tulokset osoittavat, että pelattaessa pelkurin strategialla, pelaajan kannalta viisaampaa on pelata suurilla panoksilla mikäli yksittäisen kierroksen todennäköisyys voittoon on alle puoli. Vastaavasti on viisaampaa pelata pienemmillä panoksilla jos p on yli puoli. Jos p on tasan puoli, ei panoksen suuruudella ole vaikutusta tavoitevarallisuuden saavuttamisen todennäköisyyteen.

Esimerkki 2.9. Yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys $p = \frac{18}{37}$. Pelaajan alkuvarallisuus $x = 100$ € ja tavoitevarallisuus $a = 150$ €. Jos pelaaja valitsee panokseksi yhden € esimerkin 2.7 mukaan voiton todennäköisyys on noin $6,7\%$. Jos pelaaja päättää pelata peliä puolet pienemmällä panoksella voiton todennäköisyys on

$$f(2x, 2a) = f(100, 150)\frac{\left(\frac{\frac{19}{37}}{\frac{18}{37}}\right)^{100} + 1}{\left(\frac{\frac{19}{37}}{\frac{18}{37}}\right)^{150} + 1} \sim 0,004.$$

Pelaaminen $0,5$ € panoksella laskee tavoitevarallisuuden saavuttamisen todennäköisyyden noin $0,4\%$.

LUKU 3

Rohkea strategia

Rohkeassa strategiassa pelaaja yrittää saavuttaa tavoitevarallisuuden mahdollisimman nopeasti. Pelaaja asettaa kierroksen panokseksi pienimmän mahdollisen pääoman, jolla hän voi saavuttaa tavoitevarallisuuden tai kaikki varansa, jotka hänellä on jäljellä. Pelaajan varallisuus on pelin alussa pienempi kuin hänen tavoittelemansa päämäärä eli $x < a$. Seuraavaksi tutkitaan pelaajan todennäköisyyttä saavuttaa tavoitevarallisuus rohkean pelaajan strategialla. Tässä strategiassa merkittävä vaikutus on pelaajan varallisuudella pelin alussa.

Laskujen yksinkertaistamiseksi oletetaan, että pelaajan tavoitevarallisuus $a = 1$ ja alkuvarallisuus $0 < x < 1$. Tähän tilanteeseen päästään kertomalla alkuperäiset satunnaismuuttujat X_n ja Y_n luvulla $\frac{1}{a}$. Tämä skaalaus ei vaikuta n:nnen kierroksen varallisuutta kuvaavaan yhtälöön (1.1) eli se pätee myös uusille, skaalatuille satunnaismuuttujille.

Rohkeassa strategiassa pelaaja pyrkii jokaisella kierroksella pääsemään mahdollisimman lähelle tavoiteltua varallisuutta sitä kuitenkaan ylittämättä. Alkuvarallisuus $x \in [0, 1]$ ja pelaajan voittaessa kierroksen pelaajan varallisuus kasvaa kierroksen panoksen suuruisella määrällä. Jos pelaajan varallisuus $x \in [0, \frac{1}{2}]$, niin pelaaja asettaa panokseksi kaiken jäljellä olevan varallisuutensa ja panokselle pätee $S = x$. Jos pelaajan varallisuus $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, niin pelaaja asettaa panokseksi summan, jolla voittaessaan saavuttaa tavoitteen sitä kuitenkaan ylittämättä. Tällöin pelaajan asettamalle panokselle pätee $S = 1 - x$. Panos valitaan siten funktiolla

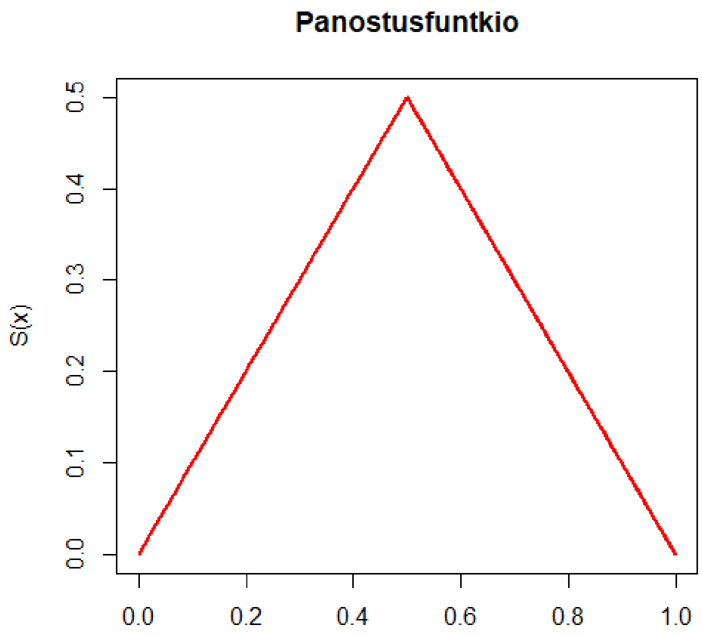
$$S = \min(x, 1 - x) = \begin{cases} x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{3.1}$$

Panostusfunktio kuvaaja on esitetty kuvassa 3.1. Kuvasta voidaan havaita panoksen olevan enintään $\frac{1}{2}$, kun tavoitevarallisuus on 1.

3.1. Tavoitteen saavuttamisen todennäköisyys rohkealla strategialla

Oletetaan että pelaajan tavoitevarallisuus on $a = 1$, kun pelaajan varallisuus ennen peliä on $x \in [0, 1]$. Olkoon $F(x)$ todennäköisyys saavuttaa tavoite alkuvarallisuudella x. Tutkitaan pelaajan todennäköisyyttä saavuttaa tavoittelemansa lopetusehdon mukainen lopetuspiste $a = 1$ pelaajan eri varallisuuksilla. Kun $x \in [0, \frac{1}{2}]$, pelaaja asettaa panokseksi kaikki varansa panostusfunktion (3.1) mukaan. Voittaessaan kierroksen pelaajan varallisuus on $2x$ ja hävitessä 0. Koska todennäköisyys voittaa kierros on p ja hävitä on $1 - p = q$, niin onnistumisfunktio F toteuttaa yhtälön

$$F(x) = pF(2x) + qF(0) = pF(2x),$$



KUVA 3.1. Rohkean strategian panostusfunktion kuvaaja

missä $F(0) = 0$. Jos $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, niin pelaajan asettama panos on $1 - x$ ja tällöin $F(x)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$F(x) = pF(1) + qF(x - (1 - x)) = p + qF(2x - 1),$$

missä $F(1) = 1$. Siispä onnistumisfunktio rohkealla strategialla on

$$F(x) = \begin{cases} pF(2x) & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ p + qF(2x - 1) & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{3.2}$$

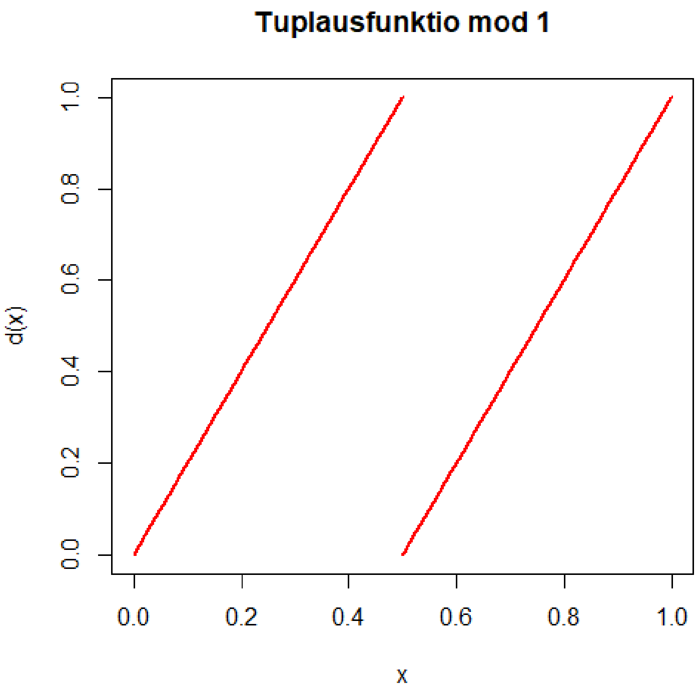
Onnistumistodennäköisyysfunktio ei tällöin toteuta lineaarista differenssiyhtälöä. Jotta pelit jatkuvat, on pelaajan voitettava kierros varallisuuden kuuluessa välille $]0, \frac{1}{2}[$ ja vastaavasti hävittävä, kun varallisuus kuuluu $]\frac{1}{2}, 1[$. Pelaajan onnistumista kuvataan kuitenkin usein funktiolla d, joka on

$$d : [0, 1] \to [0, 1], d(x) = 2x - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - 1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{3.3}$$

Funktiota voidaan kutsua tuplausfunktioksi, joka on yhtenevä funktion $d(x) = 2x \bmod 1$ kanssa. Funktio d vastaa varallisuuden muodostamaa jonoa $x, d(x), d(d(x)), \ldots$. Kuvassa 3.2 on tuplausfunktion d kuvaaja. Kuvaaja esittää pelaajan varallisuutta ennen pelin lopettavaa kierrosta.

3.2. Binäärimuoto

Pelaajan varallisuuden kehittymisen tarkastelua varten alkuvarallisuus x voidaan esittää binäärimuodossa.



KUVA 3.2. Tuplausfunktion d kuvaaja

MÄÄRITELMÄ 3.1. Luku $x \in [0,1]$ voidaan esittää muodossa

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},$$

jossa $x_n = \{0,1\}$. Tällöin luku x voidaan kirjoittaa muodossa $0.x_1x_2....$ Termit x_k ovat luvun x bittejä, kun $k \in \mathbb{N}$.

ESIMERKKI 3.2. Esimerkiksi luku 0.1234_{10} voidaan kirjoittaa binäärimuodossa $0.00011111100..._2$. Tällöin

$$\begin{aligned} 0.1234_{10} &= \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{0}{2^{10}} + \frac{0}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + ... \\ &= 0.000111111001..._2. \end{aligned}$$

Luku on tällöin muotoa $0.x_1x_2...$, joka koostuu biteistä x_k.

Merkitään varallisuuden binäärimuotoa

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

missä $x_i \in \{0,1\}$ kaikille $i \in \mathbb{N}_+$. Edellä mainittu esitys varallisuudelle on yksikäsitteinen, kun x ei ole dyadisesti rationaalinen luku. Dyadisesti rationaalisella luvulla tarkoitetaan tässä varallisuuden muotoa $x = \frac{k}{2^n}$, missä $n \in \mathbb{N}_+$ ja $k \in \{1,3,...,2^n-1\}$. Pienintä mahdollista n arvoa kutsutaan tässä x:n asteeksi. Dyaadisesti rationaaliselle luvulle x, jonka aste on n, käytetään jatkossa binääriesitystä, jossa $x_n = 1$ ja $x_i = 0$ kaikilla $i > n$.

Tarkastellaan seuraavaksi pelin kulkua varallisuuden binäärimuodon ja sen bittien avulla. Kun $x \in [0,1]$ ja $x_i = \{x_1, x_2, ..., \}$ voidaan varallisuus esittää binäärimuodossa, jossa bitit x_i saavat arvoja 0 tai 1. Tällöin

$$d(x) = 2x \pmod 1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2\frac{x_i}{2^i} \pmod 1 = x_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i-1}} \pmod 1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i-1}}.$$

Sijoitetaan nyt edelliseen $j = i - 1$. Tällöin kun $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$ pätee

$$d(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i-1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{j+1}}{2^j} = (x_1.x_2x_3...) = \{x_{i+1}\}.$$

Siten tuplausfunktiolle pätee $d(x)_i = x_{i+1}$, kun $x \in [0,1[$. Tämä osoittaa, että pelin kulkua rohkealla strategialla voidaan kuvata tarkastelemalla kierroksittain bittejä, jotka kuvaavat pelaajan varallisuutta ja vertaamalla niitä bitteihin, jotka kuvaavat yksittäisten kierrosten lopputuloksen I_i satunnaiskulkua.

Rohkean strategian sääntöjen mukaan on selvää, että pelaaja saavuttaa tavoitteensa todennäköisyydellä p, jos pelaajan sen hetkinen varallisuus kuuluu välille $[\frac{1}{2}, 1]$. Jos pelaajan varallisuus kuuluu välille $[0, \frac{1}{2}]$, on pelaajan voitettava kierros, jotta varat eivät loppuisi. Voittaessaan kierroksia pelaajan hetkellinen varallisuus kasvaa jälleen välille $[\frac{1}{2}, 1]$. Näin voidaan päätellä, että rohkealla strategialla pelaajan kierrokset jatkuvat niin kauan kun pelaaja voittaa kierroksen varallisuuden kuuluessa $[0, \frac{1}{2}]$ ja häviää kierroksen varallisuuden kuuluessa välille $[\frac{1}{2}, 1]$. Esitetään onnistumisfunktiolle $F(x)$ muoto, jota hyödynnetään jatkossa esimerkiksi tulevien pelien lukumäärän odotusarvon laskemisessa. Kun merkitään $p_0 = p$ ja $p_1 = q = 1 - p$, voidaan onnistumisfunktio kirjoittaa muotoon

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{x_1} ... p_{x_{n-1}} p x_n. \tag{3.4}$$

Summan termeistä nollasta eroavia ovat siis vain ne, joita vastaava bitti x_n on 1. Dyaadisille rationaaliluvuille x summassa on siis aina vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä, kun taas irrationaaliluvuille nollasta eroavia termejä on äärettömän monta.

Oletetaan, että pelaajan varallisuus $x \in [0,1]$. Rohkean strategian mukaisesti pelaajan kierrokset jatkuvat niin kauan kun pelaaja voittaa kierroksen varallisuudella $x \in]0, \frac{1}{2}[$ ja häviää kierroksen varallisuudella $x \in]\frac{1}{2}, 1[$. Merkitään kierrosten jatkumista $I_j = 1 - x_j$ kun $j \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Jos peli loppuu kierroksella k, niin pätee $I_j = 1 - x_j$ kun $j \in \{1, 2, ..., k-1\}$ ja $I_k = x_k$. Jos $I_k = x_k = 0$, peli loppuu rahojen loppumiseen ja jos $I_k = x_k = 1$, niin pelaaja saavuttaa tavoitteensa. Kierroksen k varallisuutta vastaava bitti x_k vastaa tällöin kyseisen kierroksen tulosta. Pelin loppuminen voidaan todeta tapahtuvan kolmella mahdollisella tavalla.

Tapaus 1: Pelaajan varallisuus $x = \frac{1}{2}$, jolloin pelaaja saavuttaa sekä voitolla että häviöllä lopetuspisteen. Jos kierros k on viimeinen kierros, niin $I_k = x_k$. Jos pelaaja häviää kierroksen, niin $I_k = 0 = x_k$. Jos pelaaja voittaa, niin $I_k = 1 = x_k$.
Tapaus 2: Pelaajan varallisuus $x \in]0, \frac{1}{2}[$ ja pelaaja häviää seuraavan kierroksen. Tällöin pätee $I_k = 0 = x_k$

Tapaus 3: Pelaajan varallisuus $x \in]\frac{1}{2}, 1[$ ja pelaaja voittaa seuraavan kierroksen. Tällöin pätee $I_k = 1 = x_k$

Esimerkki 3.3. Pelaajan tavoitevarallisuus on 1 ja pelaaja käyttää rohkeaa strategiaa saavuttaakseen tavoitevarallisuuden ennen kuin hänen varansa loppuvat. Rohkean strategian onnistumisfunktion (3.2) mukaan lasketaan

$$\begin{aligned}
F\left(\tfrac{1}{2}\right) &= pF(1) = p \\
F\left(\tfrac{1}{4}\right) &= pF\left(\tfrac{1}{2}\right) = p^2 \\
F\left(\tfrac{3}{4}\right) &= p + qF\left(\tfrac{1}{2}\right) = p + qpF(1) = p + pq
\end{aligned}$$

Kun tunnetaan funktion F arvot pisteissä 0, $\frac{1}{2}$ ja 1, saadaan laskettua arvot myös pisteissä $\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$. Seuraavaksi lasketaan arvot niille dyaadisille rationaaliluvuille, joissa jakajana on $2^3 = 8$. Tällöin $x = \frac{k}{2^n}$, kun $n = 2$ ja $k \in \{1, 3, 5, 7\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
F\left(\tfrac{1}{8}\right) &= pF\left(\tfrac{2}{8}\right) = p^3 \\
F\left(\tfrac{3}{8}\right) &= pF\left(\tfrac{6}{8}\right) = p^2(1+q) \\
F\left(\tfrac{5}{8}\right) &= p + qF\left(\tfrac{2}{8}\right) = p + qp^2 \\
F\left(\tfrac{7}{8}\right) &= p + qF\left(\tfrac{6}{8}\right) = 2p + qF(\tfrac{4}{8}) = 2p + qp(1+q) = p(q^2+q+1) = p + pq + pq^2.
\end{aligned}$$

Vastaavaan päädytään kaavan (3.4) ja varallisuuden binäärimuodon avulla, kun merkitään $p_0 = p$ ja $p_1 = q$. Tällöin

$$\begin{aligned}
F\left(\tfrac{1}{8}\right) &= F(0.001_2) = p_{x_1}p_{x_2}px_3 = p_0p_0px_3 = p^3 \\
F\left(\tfrac{3}{8}\right) &= F(0.011_2) = p_{x_1}px_2 + p_{x_1}p_{x_2}px_3 = p_0p + p_0p_1p = p^2 + p^2q \\
F\left(\tfrac{5}{8}\right) &= F(0.101_2) = px_1 + p_{x_1}p_{x_2}px_3 = p + p_1p_0p = p + qp^2 \\
F\left(\tfrac{7}{8}\right) &= F(0.111_2) = px_1 + p_{x_1}px_2 + p_{x_1}p_{x_2}px_3 = p + p_1p + p_1p_1p = p + pq + pq^2
\end{aligned}$$

Rohkean strategian onnistumisfunktion (3.2) ja varallisuuden binäärimuotoa hyödyntävän kaavan (3.4) avulla saadut onnistumistodennäköisyydet vastaavat siis toisiaan. Vastaavasti voitaisiin laskea arvot, kun $x = \frac{k}{2^4}$ ja sen jälkeen myös suuremmille muotoa 2^n oleville jakajille.

3.3. Kierrosten odotusarvo rohkealla strategialla

Olkoon kierrosten lukumäärän odotusarvo $G(x) = \mathbb{E}(N|X_0 = x)$, missä varallisuus $x \in [0, 1]$. Kuten tuloksen (3.4) yhteydessä todettiin, pelaajan kierrokset jatkuvat niin kauan kun hän voittaa kierroksen varallisuuden kuuluessa välille $]0, \frac{1}{2}[$ ja häviää varallisuuden kuuluessa välille $]\frac{1}{2}, 1[$. Voimme siis kuvata kuvata kierrosten lukumäärään odotusarvoa funktiolla

$$G(x) = \begin{cases} 1 + pG(2x), & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + qG(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}, \tag{3.5}$$

Kun pelaajan varallisuus x on 0, niin $G(0) = 0$. Vastaavasti jos varallisuus x on 1, niin $G(1) = 0$. Pelaajan varallisuus on tällöin joko loppu tai pelaaja on saavuttanut tavoitteen ja uusia kierroksia ei siten tule.

Olkoon $r(x)$ luvun x aste. Jos x on dyaadisesti irrationaalinen, niin $r(x) = \infty$. Oletetaan että pelaajan varallisuus $x \in [0,1]$ ja merkitään tällöin

$$N = \min \{k \in \mathbb{N}_+ : I_k = x_k \text{ } tai \text{ } k = r(x)\}.$$

Oletetaan että x on dyaadisesti rationaalinen ja sen aste on $r(x)$. Peli jatkuu kunnes jonkin kierroksen k tulos I_k on sama kuin luvun x k:s bitti x_k tai varallisuus saavuttaa arvon $\frac{1}{2}$. Jos pelaajan varallisuus panosta asetettaessa on $\frac{1}{2}$, pelaaja saavuttaa tavoitevarallisuuden tai menettää kaikki varansa riippumatta kierroksen voitosta tai häviöstä. Varallisuus voi saavuttaa arvon $\frac{1}{2}$, kun kierroksia on pelattu $r(x) - 1$ kappaletta. Esimerkiksi jos alkuvarallisuus x on muotoa $\frac{m}{8} = \frac{m}{2^3}$, niin $r(x) = 3$ ja peli loppuu viimeistään kolmannen kierroksen jälkeen, sillä varallisuuden asteluku pienenee jokaisella kierroksella vähintään yhdellä. Voittamalla kaksi seuraavaa kierrosta varallisuus on muotoa $\frac{m}{2}$ ja kierros on viimeinen riippumatta kierroksen voitosta tai häviöstä.

Jos x on dyaadisesti irrationaali luku, kierroksia pelataan niin kauan kunnes kierroksen tulos I_k vastaa kierroksen varallisuutta x_k. Kierrosten lukumäärän odotusarvolle pätee

$$\begin{aligned} G(x) &= E(N|X_0 = x) \\ &= 1 * P(N = 1) + 2 * P(N = 2) + 3 * P(N = 3) + ... + k * P(N = k) + ... \\ &= P(N \geq 1) + P(N \geq 2) + P(N \geq 3) + ... \end{aligned}$$

Jos $N \geq k$, niin pelit eivät lopu ennen $N = k$ kierrosta. Tällöin todennäköisyys $P(N \geq k)$ vastaa todennäköisyyttä, jossa pelit eivät lopu ensimmäisellä, toisella eikä vielä k:nnella kierroksella. Kierrokset ovat keskenään riippumattomia ja tällöin $P(N \geq k) = p_{x_1}...p_{x_n}$. Siten kierrosten lukumäärään odotusarvolle pätee

$$G(x) = \sum_{n=0}^{r(x)-1} p_{x_1}...p_{x_n}, \tag{3.6}$$

kun $p_0 = p, p_1 = q = 1 - p$ ja $x \in [0,1]$ on pelaajan varallisuus binäärimuodossa. Kun $n = 0$, niin summan ensimmäisen termin sovitaan olevan 1. Valinta selittyy sillä, että kun $x \in]0,1[$, pelissä pelataan varmuudella ainakin yksi kierros. Summassa on äärellinen määrä termejä, kun x on dyaadisesti rationaalinen ja ääretön jos x on dyaadisesti irrationaalinen luku.

Esimerkki 3.4. Lasketaan kierrosten lukumäärän odotusarvo varallisuudella $x = \{\frac{i}{8} : \ i = 1, ..., 7\}$ kaavan (3.5) avulla. Tällöin

$$
\begin{aligned}
G\left(\frac{1}{8}\right) &= 1 + pG\left(\frac{2}{8}\right) = 1 + p + p^2 G\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + p + p^2 \\
G\left(\frac{2}{8}\right) &= 1 + pG\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + p \\
G\left(\frac{3}{8}\right) &= 1 + pG\left(\frac{3}{4}\right) = 1 + p + pq\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + p + pq \\
G\left(\frac{4}{8}\right) &= 1 \\
G\left(\frac{5}{8}\right) &= 1 + qG\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + q + pq \\
G\left(\frac{6}{8}\right) &= 1 + qG\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + q \\
G\left(\frac{7}{8}\right) &= 1 + qG\left(\frac{3}{4}\right) = 1 + q + q^2
\end{aligned}
$$

Vastaavasti kaavan (3.6) mukaan

$$
\begin{aligned}
G\left(\frac{1}{8}\right) &= G(0.001_2) = 1 + p_{x_1} + p_{x_1}p_{x_2} = 1 + p_0 + p_0 p_0 = p^2 = 1 + p + p^2 \\
G\left(\frac{2}{8}\right) &= G(0.01_2) = 1 + p_{x_1} = 1 + p_0 = 1 + p \\
G\left(\frac{3}{8}\right) &= G(0.011_2) = 1 + p_{x_1} + p_{x_1}p_{x_2} = 1 + p_0 + p_0 p_1 = 1 + p + pq \\
G\left(\frac{4}{8}\right) &= G(0.1_2) = 1 \\
G\left(\frac{5}{8}\right) &= G(0.101_2) = 1 + p_{x_1} + p_{x_1}p_{x_2} = 1 + p_1 + p_1 p_0 = 1 + q + pq \\
G\left(\frac{6}{8}\right) &= G(0.11_2) = 1 + p_{x_1} = 1 + p_1 = 1 + q \\
G\left(\frac{7}{8}\right) &= G(0.111_2) = 1 + p_{x_1} + p_{x_1}p_{x_2} = 1 + p_1 + p_1 p_1 = 1 + q + q^2
\end{aligned}
$$

Kierrosten lukumäärän odotusarvon kaavan (3.5) ja varallisuuden binäärimuotoa hyödyntävän kaavan (3.6) avulla saadut kierrosten lukumäärän odotusarvot vastaavat toisiaan. Vastaavasti voitaisiin laskea arvot, kun $x = \frac{k}{2^4}$ ja sen jälkeen myös suuremmille muotoa 2^n oleville jakajille.

Tutkitaan seuraavaksi kierrosten lukumäärän odostusarvoa neutraalissa pelissä. Jos yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys $p = \frac{1}{2}$, niin

$$G(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2^{r(x)-1}}, & x \text{ on dyaadisesti rationaalinen} \\ 2, & x \text{ on dyaadisesti irrationaalinen} \end{cases}$$

Tämä seuraa kaavasta (3.6). Kun x on dyaadisesti irrationaalinen luku, on summassa ääretön määrä termejä eli $r(x) = \infty$. Kun $p = \frac{1}{2}$, niin $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ ja siksi

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{x_1}...p_{x_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 2.$$

Dyaadisesti irrationaalisille luvuille kierrosten lukumäärän odotusarvo on siis $G(x) = 2$.

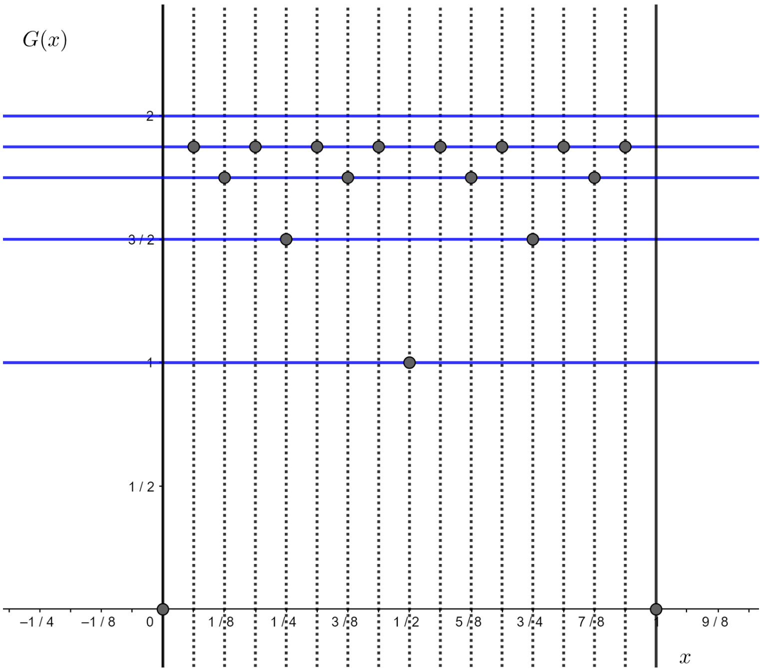
Kun x on dyaadisesti rationaalinen, summassa on äärellinen määrä termejä. Kun $p = \frac{1}{2}$, niin $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ ja siksi

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{r(x)-1} p_{x_1}...p_{x_n} \\ &= \sum_{n=0}^{r(x)-1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{r(x)}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{r(x)}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 2 - \frac{1}{2^{r(x)-1}}. \end{aligned}$$

Dyaadisesti rationaalisille luvuille kierrosten lukumäärän odotusarvo on siis

$$G(x) = 2 - \frac{1}{2^{r(x)-1}}.$$

Kuvassa 3.3 on jakauma kierrosten odotusarvosta $G(x)$, kun varallisuus $x = \{\frac{k}{8} : k = 0, 1, ..., 8\}$ on dyaadisesti rationaalinen luku.



KUVA 3.3. Rohkean strategian kierrosten lukumäärän odotusarvon jakauma, kun $p = \frac{1}{2}$.

LUKU 4

Optimaalinen strategia

Optimaalisella strategialla tarkoitetaan pelaajan strategiaa, jolla todennäköisyys saavuttamaa tavoite ennen varojen loppumista on suurin. Strategiat toimivat erilaisissa peleissä eri tavalla, joten luokittelemme pelit kolmeen eri luokkaan. Yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyyden kannalta pelit voivat olla epäsuotuisia, suotuisia minimipanoksella tai suotuisia ilman minipanosta.

Merkitään pelaajan mahdollisten varallisuuksien joukkoa kirjaimella A ja mahdollisten panosten joukkoa B_x. Joukko A koostuu pelkurin strategialla luvuista $0, 1, ..., a$ ja vastaavasti rohkealla strategialla luvuista $[0, 1]$. Pelaaja asettaa panoksensa aina siten, että panoksen suuruus ei voi ylittää pelaajan varallisuutta. Lisäksi pelaaja asettaa maksimissaan panoksen, jolla saavuttaa tavoitevarallisuuden. Pelaaja ei siis voi saavuttaa suurempaa varallisuutta kuin on tavoitevarallisuudekseen asettanut. Tällöin rohkeaa strategiaa käytettäessä panos asetetaan panostusfunktion (3.1) mukaan eli

$$S = \min(x, 1 - x), \qquad x \in A.$$

Onnistumisfunktioina käytetään aikaisemmin osoitettuja funktioita (2.2) ja (3.2), jotka kertovat todennäköisyyden saavuttaa tavoitevarallisuus ennen varojen loppumista. Strategia on optimaalinen, jos sen onnistumistodennäköisyysfunktiolle $V(x)$ pätee

$$U(x) \le V(x) \tag{4.1}$$

kaikilla $x \in A$, kun $U(x)$ on mikä tahansa johonkin toiseen strategiaan liittyvä onnistumistodennäköisyysfunktio.

4.1. Ehto strategian optimaaliudelle

Todistetaan seuraavaksi lause, jonka avulla strategioiden optimaaliutta voidaan tarkastella erilaisissa peleissä. Lauseen avulla todistetaan tämän tutkimuksen tärkeimmät päätulokset seuraavissa kappaleissa.

LAUSE 4.1. *Strategia S, jonka onnistumisfunktio on V on pelaajan kannalta optimaalinen jos*

$$pV(x + y) + qV(x - y) \le V(x), \qquad \text{kun } x \in A \text{ ja } y \in B_x \tag{4.2}$$

TODISTUS. Olkoon T mikä tahansa strategia ja U siihen liittyvä onnistumistodennäköisyysfunktio. Muodostetaan T:n ja S:n avulla uusi strategia seuraavasti: n ensimmäistä kierrosta pelataan strategialla T ja sen jälkeen jatketaan strategian S mukaisesti. Tämän uuden strategian mukainen onnistumistodennäköisyys on $V(X_n)$, kun $(X_0, X_1, X_2, ...)$ on strategian T mukainen varallisuuksien jono. Varallisuuden odotusarvolle pätee siis

$$\mathbb{E}[V(X_n)|X_0 = x] = \mathbb{E}[pV(X_{n-1} + Y_n) + qV(X_{n-1} - Y_n)|X_0 = x]$$

ja ehdon (4.2) mukaan

$$\mathbb{E}[V(X_n)|X_0 = x] \leq \mathbb{E}[V(X_{n-1})|X_0 = x], \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in A.$$

Toistamalla päättely n kertaa nähdään, että $\mathbb{E}[V(X_n)|X_0 = x] \leq V(x)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in A$. Merkitään strategian T lopetusehdon mukaista lopetushetkeä N. Tällöin pätee

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V(X_n)|X_0 = x] = \mathbb{E}[V(X_N)|X_0 = x] \leq V(x), \qquad x \in A.$$

Toisaalta strategian T onnistumisfunktiolle pätee $U(x) = \mathbb{E}[V(X_N)|X_0 = x]$ ja siten

$$U(x) \leq V(x), \qquad x \in A.$$

Siispä strategia S on optimaalinen strategia. □

Optimaaliseen strategiaan vaikuttaa pelaajan varallisuutta merkittävästi enemmän yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys p. Tähän tutustutaan enemmän seuraavissa kappaleissa.

4.2. Suotuisat pelit minimipanoksella

Pelinjärjestäjiä vastaan pelattavissa peleissä panokset ovat usein rajattu minimi- ja maksimipanoksella. Erityisesti minimipanoksen merkitys korostuu suotuisia pelejä tarkasteltaessa. Tässä kappaleessa käsitelläänkin optimaalista strategiaa suotuisessa pelissä, kun minimipanos on asetettu.

Oletetaan yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys pelaajan kannalta suotuisaksi tai vähintäänkin neutraaliksi eli $p \geq \frac{1}{2}$. Olkoon yksittäisen kierroksen panos € tai sen monikerta k€, missä $k \in \mathbb{N}$. Pelaajan varallisuus $A = \{0, 1, ..., a\}$ ja panos $B_x = \{0, 1, ..., min\{x, a - x\}\}$.

Lause 4.2. *Pelkurin strategia on optimaalinen strategia, kun yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys* $p \geq \frac{1}{2}$.

Todistus. Pelkurin strategian onnistumisfunktio (2.2) on

$$f(x, a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}, \qquad x \in \{0, 1, ..., a\},$$

kun $p > \frac{1}{2}$. Kun $p = \frac{1}{2}$, kaavan (2.3) mukaan pätee

$$f(x, a) = \frac{x}{a}, \qquad x \in \{0, 1, ..., a\}.$$

Jos $p = \frac{1}{2}$, niin funktiolle f pätee

$$U(x) = pf(x + y) + qf(x - y) = \frac{x + y}{2a} + \frac{x - y}{2a} = \frac{2x}{2a} = \frac{x}{a} = f(x, a) = V(x)$$

ja siten strategia on optimaalinen. Jos $p > \frac{1}{2}$, niin

$$\begin{aligned} & p\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x+y}-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a}-1}+q\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x-y}-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a}-1} \leq \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a}-1} \\ \Longleftrightarrow & p\left(\frac{q}{p}\right)^{x+y}+q\left(\frac{q}{p}\right)^{x-y} \geq \left(\frac{q}{p}\right)^{x} \\ \Longleftrightarrow & p\left(\frac{q}{p}\right)^{y}+q\left(\frac{q}{p}\right)^{-y} \geq 1, \end{aligned}$$

koska $\left(\frac{q}{p}\right)^{a}-1 \leq 0$. Funktio $f(x) = x^y$ on konveksi funktio, kun $0 \leq x < \infty$ ja $y \geq 1$, jolloin pätee

$$pf\left(\frac{q}{p}\right)+qf\left(\frac{p}{q}\right) \geq f\left(p\frac{q}{p}+q\frac{p}{q}\right) = f(1) = 1.$$

□

Pelkurin strategia on siis optimaalinen strategia suotuisissa peleissä ilman minimipanosta. Pelintarjoajia vastaan pelattavissa uhkapeleissä suotuisten pelien löytäminen on kuitenkin hyvin harvinaista, sillä pelit tehdään usein pelintarjoajille tuottoisiksi.

4.3. Suotuisat pelit ilman minimipanosta

Suotuisat pelit minipanoksella ovat teoreettinen tilanne suotuisista peleistä, sillä todellisuudessa panoksen valitseminen rajattoman pieneksi ei ole mahdollista. Kappaleessa kuitenkin näytetään kuinka panosta pienentämällä rajattomasti pelaajan on mahdollista onnistua saavuttamaan tavoite varmasti.

Oletetaan nyt, että yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys $p > \frac{1}{2}$. Pelissä on mahdollista panostaa myös rajattoman pienillä panoksilla. Pelaajan varallisuus on nyt $A = [0, 1]$ ja panos $x \in A$ on $B_x = [0, \min\{x, 1-x\}]$. Seuraavissa tuloksissa hyödynnetään pelkurin strategian tuloksia ja onnistumisfunktio (2.2) on muotoa $f(j, a)$, missä a on tavoitevarallisuus ja pelaajan varallisuus $j \in [0, a]$.

Lause 4.3. *Suotuisassa pelissä ilman minimipanosta optimaalisen strategian onnistumisfunktiolle V pätee*

$$V(x) = 1, \qquad \textit{kaikilla } x \in]0, 1].$$

Todistus. Oletetaan että pelaajan alkuvarallisuus on rationaaliluku $x = \frac{k}{n}$ väliltä $[0, 1]$. Kun $m \in \mathbb{N}$, olkoon pelaajan valitsema panos $\frac{1}{mn}$. Tämä vastaa tuloksen (2.4) mukaan sitä, että pelaaja tavoittelee mk varallisuudella tavoitevarallisuutta mn, kun tavoitevarallisuus alunperin on $a = 1$. Tällöin pelkurin strategian mukaiselle onnistumisfunktiolle pätee

$$f\left(\frac{mn \times k}{n}, mn\right) = f(mk, mn) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{mk}-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{mn}-1}, \qquad x \in [0, 1].$$

Kun $m \to \infty$,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} f(mk, mn) &= \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{mk} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{mn} - 1} \\ &= \frac{\lim_{m\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{mk} - 1}{\lim_{m\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{mn} - 1} \to \frac{-1}{-1} = 1,\end{aligned}$$

koska $\frac{q}{p} < \frac{1}{2}$ ja tällöin $\lim_{m\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{mk} \to 0$. Vastaavasti $\lim_{m\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{mn} \to 0$ kaikilla $k, n > 0$. Voidaan siis löytää jono strategioita S_i siten, että niiden onnistumisfunktioille V_i pätee $V_i(x) \to 1$ ja siten

$$V(x) = 1, \qquad x \in]0, 1].$$

Jos oletetaan alkuvarallisuuden x olevan irrationaaliluku, niin onnistumisfunktion V jatkuvuuden avulla voidaan todistaa edellisen kappaleen tulos $V(x) = 1$. Todistuksen osaa irrationaalisille alkuvarallisuuksille ei kuitenkaan esitetä tässä tutkimuksessa, mutta todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [**2**]. □

Suotuisissa peleissä ilman minimipanosta optimaalista strategiaa ei siis ole sillä, kun $m \to \infty$ pelkurin strategian mukainen panos pienenee loputtomiin ja pienempi panos tuottaa aina aikaisempaa paremman onnistumisfunktion. Todennäköisintä onnistumista tavoittelevan pelaajan tulee siis pelata pelkurin strategian mukaisesti äärettömän pienellä panoksella. Tällöin pelaaja saavuttaa tavoitteensa varmasti. Tämän strategian toteuttaminen on tietysti mahdotonta todellisia pelinjärjestäjiä vastaan, sillä äärettömän pieni panos on ennemminkin kielikuva tai matemaattinen malli, jota on mahdoton asettaa todellisessa pelissä.

4.4. Epäsuotuisat pelit

Epäsuotuisat pelit ovat uhkapeleistä kaikista yleisimpiä. Epäsuotuisiksi peleiksi voidaan laskea käytännössä kaikki pelinjärjestäjää vastaan käytävät uhkapelit. Pelaajat ovatkin jo pitkään pyrkinyt keksimään strategian, jolla todennäköinen tappio voitaisiin kääntää onnistumiseksi. Tässä kappaleessa ei esitetä strategiaa varmaan onnistumiseen, mutta sen sijaan näytetään, että rohkealla strategialla päästään todennäköisimpään onnistumiseen.

Oletetaan, että yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys on pelaajan kannalta epäsuotuisa tai neutraali eli $p \leq \frac{1}{2}$. Rajataan edelleen pelaajan varallisuus siten, että $A = [0, 1]$. Pelaajan asettaa panokset omista varoistaan, jolloin $x \in A$ ja panos on $B_x = [0, \min\{x, 1 - x\}]$.

Lause 4.4. *Pelaajan kannalta optimaalinen strategia on rohkea strategia, kun yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys on pelaajan kannalta epäsuotuisa.*

Todistus. Merkitään rohkean strategian onnistumisfunktiota F, jolle $F(0) = 0$ ja $F(1) = 1$. Rohkea strategia on optimaalinen jos ehdon (4.2) mukaan pätee

$$\begin{aligned}pF(s + t) + qF(s - t) &\leq F(s) \\ 0 &\leq F(s) - [pF(s + t) + qF(s - t)],\end{aligned}$$

kun $s \in A$ ja $t \in B_x$. Merkitään nyt $s = \frac{x+y}{2}$ ja $t = \frac{y-x}{2}$. Oletetaan että luvuille x ja y pätee $0 \leq x \leq y \leq 1$, jolloin edellinen epäyhtälö saa muodon

$$0 \leq F\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left[pF\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\right) + qF\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}\right)\right]$$

$$0 \leq F\left(\frac{x+y}{2}\right) - [pF(y) + qF(x)]. \tag{4.3}$$

Merkitään epäyhtälön oikeaa puolta

$$D(x,y) = F\left(\frac{x+y}{2}\right) - [pF(y) + qF(x)]$$

ja todistetaan, että $D(x,y) \geq 0$, kun x ja y ovat dyaadisia rationaalilukuja. Epäyhtälö $D(x,y) \geq 0$ todistetaan käyttämällä induktiota lukujen x ja y asteen suhteen. Tapaukset, joissa x ja y saavat arvoja joukosta $\{0,1\}$, muodostavat induktiotodistuksen alkuaskeleen, sillä lukujen x ja y aste on tällöin 0.

Käsitellään ensin ääritapaukset, jossa x ja y saavat arvoja $\{0,1\}$. Jos $x = 0$ ja $y = 0$, niin

$$D(0,0) = F(0) - [pF(0) + qF(0)] = 0.$$

Jos $x = 0$ ja $y = 1$, niin

$$D(0,1) = F\left(\frac{1}{2}\right) - [pF(1) + qF(0)] = pF(1) - pF(1) - qF(0) = 0.$$

Jos $x = 1$ ja $y = 1$, niin

$$D(1,1) = F(1) - [pF(1) + qF(1)] = 1 - p - q = 1 - (p+q) = 0$$

ja siten kaikille luvuille x ja y, joille $0 \leq x \leq y \leq 1$ ja lukujen aste on 0 pätee $D(x,y) \geq 0$.

Seuraavaksi esitetään induktioaskel dyaadisesti rationaalisten lukujen x ja y asteen ollessa m. Induktioaskeleesta seuraa, että väite pätee myös dyaadisesti rationaalisien lukujen asteille $m+1$. Kuten aikaisemmin esitettiin, rohkean strategian onnistumisfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} pF(2x) & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ p + qF(2x-1) & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Luvut x ja y ovat dyaadisesti rationaalisia, jolloin erilaisia tapauksia on neljä kappaletta.

(1) Jos $x \leq y \leq \frac{1}{2}$, niin myös $\frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2}$. Tällöin

$$\begin{aligned} D(x,y) &= pF(x+y) - [p^2F(2y) + qpF(2x)] \\ &= p\,[F(x+y) - [pF(2y) + qF(2x)]] \\ &= pD(2x,2y). \end{aligned}$$

Jos x ja y ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on $m+1$, niin $2x$ ja $2y$ ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on m. Tämä seuraa siitä, että dyaadiselle luvulle x pätee

$$x = \tfrac{k}{2^{(m+1)}} \Leftrightarrow 2x = \tfrac{k}{2^m}$$

ja vastaavasti dyaadiselle luvulle y. Niinpä jos oletetaan, että väite pätee korkeintaan astetta m oleville luvuille, saadaan $D(2x, 2y) \geq 0$, josta laskun perusteella seuraa $D(x, y) \geq 0$.

(2) Jos $\frac{1}{2} \leq x \leq y$, niin myös $\frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= p + qF\left(x+y-1\right) - \left[p^2 + pqF(2y-1) + qp + q^2F(2x-1)\right] \\
&= q\left[F\left(x+y-1\right) - \left[pF(2y-1) + qF(2x-1)\right]\right] + p(1-p-q) \\
&= qD(2x-1, 2y-1),
\end{aligned}$$

koska $1 - p = q$. Jos x ja y ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on $m+1$, niin $2x-1$ ja $2y-1$ ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on m. Tämä seuraa siitä, että dyaadiselle luvulle x pätee

$$x = \tfrac{k}{2^{(m+1)}} \Leftrightarrow 2x - 1 = \tfrac{k-2^m}{2^m}$$

ja vastaavasti dyaadiselle luvulle y. Niinpä jos oletetaan, että väite pätee korkeintaan astetta m oleville luvuille, saadaan

$$D(2x-1, 2y-1) \geq 0,$$

josta laskun perusteella seuraa $D(x, y) \geq 0$.

(3) Jos $x \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2} \leq y$, niin

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= pF\left(x+y\right) - p\left[p + qF(2y-1)\right] - q\left[pF(2x)\right] \\
&= p^2 + pqF(2x+2y-1) - \left[p^2 + pqF(2y-1) + qpF(2x)\right] \\
&= p^2 + qF\left(x+y-\frac{1}{2}\right) + q^2F(2x) - \left[p^2 + pqF(2y-1) + qpF(2x) + q^2F(2x)\right] \\
&= q\left[F\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - pF(2y-1) - qF(2x)\right] - pqF(2x) + q^2F(2x) \\
&= qD\left(2x, 2y-1\right) - pqF(2x) + q^2F(2x).
\end{aligned}$$

Jos x ja y ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on $m+1$, niin $2x$ ja $2y-1$ ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on m kuten edellisissä tapauksissa. Jos oletetaan, että väite pätee korkeintaan astetta m oleville luvuille, saadaan

$$D(2x, 2y-1) \geq 0.$$

Lisäksi $q^2 > pq$, kun $q > p$ ja tällöin erityisesti

$$q^2F(2x) - pqF(2x) \geq 0.$$

Edellisestä laskusta seuraa siis $D(x, y) \geq 0$.

(4) Jos $x \leq \frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$, niin

$$\begin{aligned} D(x,y) &= p + qF(x+y-1) - [p^2 + pqF(2y-1) + qpF(2x)] \\ &= p + pF(x+y-\frac{1}{2}) - p^2 - [p^2 + pqF(2y-1) + qpF(2x)] \\ &= p\left[1 + F(x+y-\frac{1}{2}) - p - [p + qF(2y-1) + qF(2x)]\right] \\ &= p\left[1 - 2p + F(x+y-\frac{1}{2}) - [qF(2y-1) + qF(2x)]\right] \\ &= p\left[q - p + F(x+y-\frac{1}{2}) - [qF(2y-1) + qF(2x)]\right]. \end{aligned}$$

Edellinen lasku seuraa siitä, että $F(x+y-1) = pF(2x+2y-2)$ ja $F(x+y-\frac{1}{2}) = p + qF(2x+2y-2)$, jolloin

$$qF(x+y-1) = pF(x+y-\frac{1}{2}) - p^2.$$

Lisäksi $1 - 2p = q - p$, kun $q + p = 1$.

Jos nyt $2y - 1 \leq 2x$, niin

$$\begin{aligned} D(x,y) &= p\left[q - p + F(x+y-\frac{1}{2}) - pF(2x) - [qF(2y-1) + qF(2x) - pF(2x)]\right] \\ &= p\left[q - p + F(x+y-\frac{1}{2}) - pF(2x) - qF(2y-1) - qF(2x) + pF(2x)\right] \\ &= p\,[q - p - qF(2x) + pF(2x)] + pD(2y-1, 2x) \\ &= p(q-p)[1 - F(2x)] + pD(2y-1, 2x). \end{aligned}$$

Jos x ja y ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on $m+1$, niin $2x$ ja $2y-1$ ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on m kuten edellisissä tapauksissa. Jos oletetaan, että väite pätee korkeintaan astetta m oleville luvuille, saadaan

$$D(2y-1, 2x) \geq 0.$$

Lisäksi $pq > p^2$, kun $q > p$ ja tällöin erityisesti

$$(pq - p^2)[1 - F(2x)] \geq 0.$$

Edellisestä laskusta seuraa siis $D(x,y) \geq 0$.

Jos kuitenkin $2x \leq 2y - 1$, niin

$$\begin{aligned} D(x,y) &= p\left[q - p + F(x+y-\frac{1}{2}) - pF(2y-1) - [qF(2y-1) + qF(2x) - pF(2y-1)]\right] \\ &= p\left[q - p + F(x+y-\frac{1}{2}) - pF(2y-1) - qF(2x) - qF(2y-1) + pF(2y-1)\right] \\ &= p\,[q - p - qF(2y-1) + pF(2y-1)] + pD(2x, 2y-1) \\ &= p(q-p)[1 - F(2y-1)] + pD(2x, 2y-1). \end{aligned}$$

Jos x ja y ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on $m+1$, niin $2x$ ja $2y-1$ ovat dyaadisia lukuja, joiden aste on m kuten edellisissä tapauksissa. Jos oletetaan, että väite pätee korkeintaan astetta m oleville luvuille, saadaan

$$D(2x, 2y-1) \geq 0.$$

Lisäksi $pq > p^2$, kun $q > p$ ja tällöin erityisesti

$$(pq - p^2)[1 - F(2y-1)] \geq 0.$$

Edellisestä laskusta seuraa siis $D(x, y) \geq 0$.

Tällöin kaikille dyaadisesti rationaalisille luvuille x ja y pätee $D(x, y) \geq 0$. Irrationaalisille luvuille x ja y epäyhtälö seuraa funktion F jatkuvuudesta. Tässä tutkimuksessa funktion F jatkuvuutta ei todisteta, mutta todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [**1**]. Siten yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyyden ollessa pelaajan kannalta epäsuotuisa, on induktion nojalla rohkea strategia optimaalinen strategia. □

Epäsuotuisissa peleissä suurin todennäköisyys saavuttaa tavoite ennen varojen loppumista on siis rohkealla strategialla. Viihdepelaajien kannalta tämä ei kuitenkaan ole hyvä uutinen, sillä jännitys tiivistyy todennäköisesti usein ainoastaan muutamiin kierroksiin. Olettaen, että pelinjärjestäjää vastaan pelattavat uhkapelit ovat lähes poikkeuksetta epäsuotuisia, voidaan siis yleistää rohkean strategian olevan pelaajalle onnistumisen kannalta paras mahdollinen strategia.

LUKU 5

Muita strategioita

Tässä kappaleessa tutustutaan pääpiirteittäin muutamiin vaihtoehtoisiin strategioihin ja niiden tuloksiin. Pelatessa kasinoa tai muuta pelinjärjestäjää vastaan on hyvin todennäköistä, että yksittäisen kierroksen voiton todennäköisyys $p \leq \frac{1}{2}$. Edellisessä kappaleessa todistettiin, että rohkea strategia on optimaali tälläisessa tilanteessa. On olemassa kuitenkin muitakin optimaalisia strategioita.

5.1. Rohkean strategian variaatiot

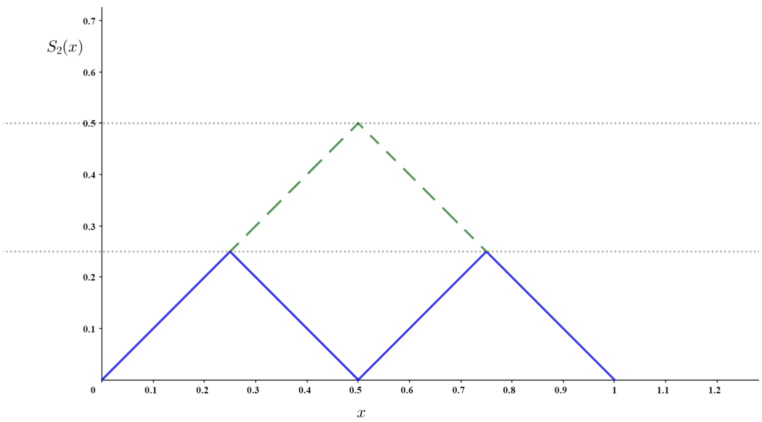
Rohkeassa strategiassa panos valittiin panostusfunktion (3.1) mukaan, jolloin

$$S = \min(x, 1-x) = \begin{cases} x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Rohkeaa strategiaa voidaan kuitenkin muokata valitsemalla kierroksittainen panos erilaisella kaavalla. Panos voidaan valita esimerkiksi kaksihuippuisella panosfunktiolla

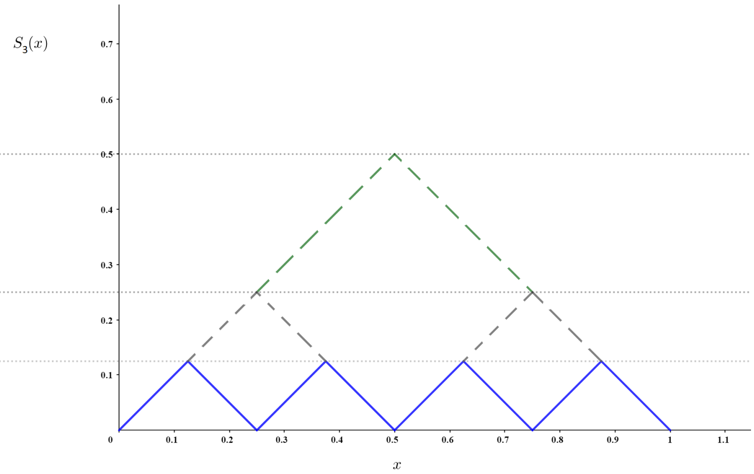
$$S_2(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - x, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \\ 1 - x, & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

jonka kierroksittaista panosta esittävä kuvaaja on kuvassa 5.1. Strategiaa voidaan



Kuva 5.1. Kuvaaja panostusfunktiosta $S_2(x)$.

soveltaa myös nelihuippuiselle panostusfunktiolle, jonka kuvaaja on kuvassa 5.2, kun $x \in [0, 1]$. Vastaavalla tavalla kuin $S_2(x)$ ja $S_3(x)$ panostusfunktioden tapauksessa



KUVA 5.2. Kuvaaja panostusfunktiosta $S_3(x)$.

voidaan kehitellä myös n asteen panostusfunktio

$$S_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}S_n(2x), & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}S_n(2x-1), & x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Panostusfunktioiden S_2, S_3,...,S_n mukaiset rohkeat strategiat ovat myös optimaalisia strategioita, kun kyseessä on neutraali tai pelaajan kannalta epäsuotuisa peli. Todistukset kyseisille strategoille löytyy esimerkiksi lähteestä [**6**]

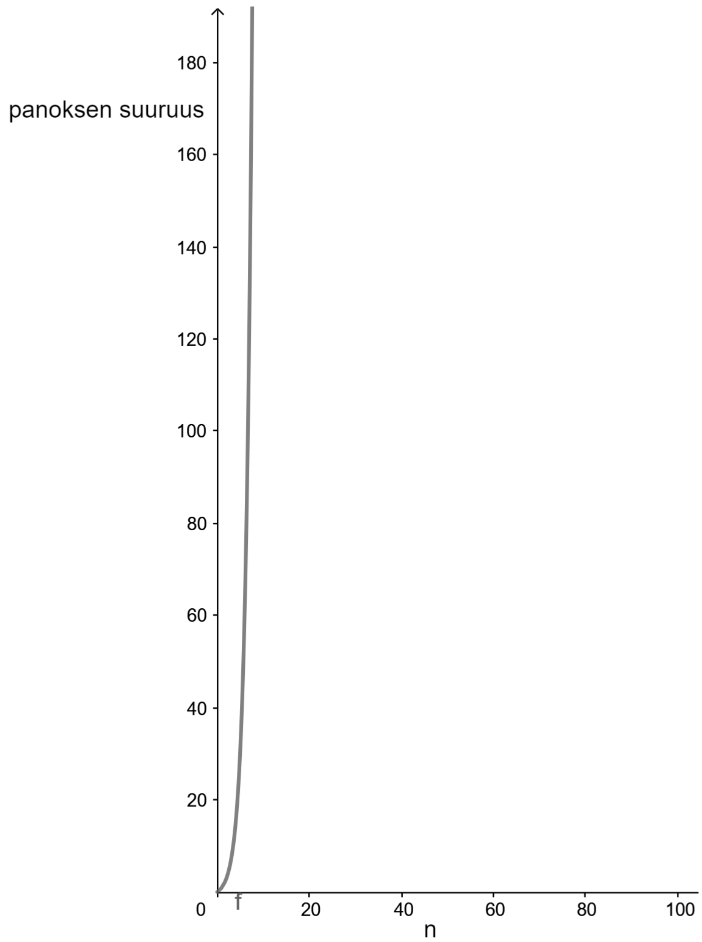
5.2. Martingale-strategia

Martingale-strategiaa pidetään strategiana, jolla pelaajan on mahdollista kasvattaa varallisuuttaan varmasti. Strategiassa ideana on, että kierroksittainen panos kaksinkertaistetaan jokaisen hävityn kierroksen jälkeen. Tällöin hävitessä kierroksen pelaaja menettää panoksen, mutta seuraavan kerran voittaessaan saavuttaa varallisuuden huipun ennen kierrosten häviämistä. Voittaessaan kierroksen pelaaja aloittaa strategian toteuttamisen alusta pienimmällä panoksella eli alkupanoksellaan. Jos pelaaja voittaa useamman kierroksen putkeen, niin pelaajan varallisuuden huippu kasvaa entisestään. Strategia kuulostaa varmalta tavalta ansaita varallisuutta. Sitä se käytännössä onkin ilman rajoitetteita kierrosten lukumäärälle, pelaajan varallisuudelle ja panoksen suuruudelle. Pelinjärjestäjät ovat esimerkiksi reagoineet tämän kaltaisiin strategioihin asettamalla panokselle ylärajan.

Oletetaan, että ennen voittoa on ollut n häviöllistä kierrosta, kun pelaajan aloituspanos on B. Todennäköisyys n peräkkäiselle häviölle on q^n. Pelaaja on menettänyt tällöin varojaan

$$\sum_{i=1}^{n} B2^{i-1} = B(2^n - 1).$$

Pelaajan hävitessä monta peräkkäistä kierrosta sekä panos että hävittyjen varojen määrä kasvaa hyvin nopeasti kuten kuvasta 5.3 voidaan havaita.



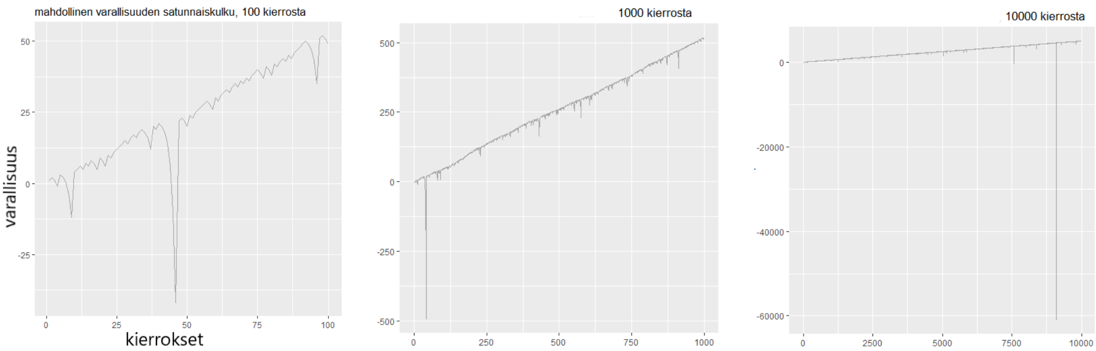
KUVA 5.3. Martingale-strategian kierroksittaisen panoksen kuvaaja, kun n on peräkkäisten hävittyjen kierrosten lukumäärä

Jos todennäköisyys n peräkkäiselle häviölle on q^n, niin todennäköisyys että pelaaja ei häviä kaikki kierroksia on $1 - q^n$. Tällöin yksittäisen kierroksen varallisuuden odotusarvo on

$$(1 - q^n)B - q^n B(2^n - 1) = B - Bq^n - 2^n Bq^n + Bq^n = B(1 - (2q)^n).$$

Jos $p < \frac{1}{2}$, niin $1 - (2q)^n < 0$ ja siten varallisuuden odotusarvo on negatiivinen. Tällöin pelattaessa Martingale-strategialla varallisuuden odotusarvon perusteella pelaaja menettää keskimäärin enemmän varojaan kuin voittaa. Panoksen B kasvattaminen ei myöskään muuta odotusarvon etumerkkiä positiiviseksi, kuten jotkut strategiaan uskovat luulevat vaan ainoastaan nopeuttaa odotusarvon mukaista varallisuuden vähenemistä.[**5**]

Martingale-strategian suosio ja vahvuudet perustuvat käytännössä siihen, että pelaajan varojen ja panoksen ylärajan salliessa pelaajalla on aina mahdollista päästä takaisin varallisuuden huipulle. Kohdattaessa monta peräkkäistä häviötä kierroksen



(A) (B) (C)

Kuva 5.4. Simulaatiot pelaajan varallisuuden kehittymisestä Martingale-strategialla, kun rajoittavia tekijöitä ei ole.

panos kuitenkin kasvaa nopeasti ja saattaa tuottaa ongelmia pelaajalle. Jos pelaajan varallisuus ei riitä tai pelinjärjestäjä ei salli Martingale-strategian mukaista suurta panosta, on pelaajalla suuri riski hävitä osa varoistaan. Kuvassa 5.4 on kolme simulaatiota pelaajan varallisuuden kehittymisestä Martingale-strategialla. Kuvan kohdassa (A) on pelattu 100, (B):ssä 1000 ja (C):ssä 10000 kierrosta. Simulaatiossa ei ole käytetty rajoittavia tekijöitä. Toisin sanoen pelaajan varallisuus ei voi loppua eikä panokselle ole asetettu ylärajaa. Tällöin simulaatioista voidaan nähdä pelaajan varallisuuden kasvavan pitkällä aikavälillä jatkuvasti. Voidaan kuitenkin havaita, että pitkällä aikavälillä sarjoissa esiintyy usean häviön sarjoja, jotka koituvat usein pelaajan ja kyseisen strategian kohtaloksi ilman pelaajan loputtomia varoja.

Lähdeluettelo

[1] Billingsley, Patrick: *Probability and Measure* Wiley, New York; kolmas painos, 1995.

[2] Breiman, Leo: *Optimal Gambling Systems for Favorable Games* Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Proba.bility, ensimmäinen painos: Contributions to the Theory of Statistics, 65–78, University of California Press, Berkeley, 1961.

[3] Grimaldi, Ralph: *Discrete Mathematics and Its Applications.* Chapman and Hall/CRC, 1999.

[4] Lester E. Dubins ja Leonard J. Savage: *How to gamble if you must.* McGraw-Hill, 1965.

[5] Mitzenmacher, Michael ja Upfal, Eli: *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis* Cambridge University Press, 2005.

[6] Pendergrass, Marcus ja Siegrist, Kyle: *"Generalizations of bold play in red and black" Stochastic Processes and their Applications* Department of Mathematical Sciences University of Alabama in Huntsville, 2001.

[7] Siegrist, Kyle: *How to Gamble If You Must: Red and Black* Department of Mathematical Sciences University of Alabama in Huntsville.

[8] Vladimir A. Zorich: *Mathematical Analysis I: Part 1 of Mathematical Analysis.* Springer Science and Business Media, 2004.