van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin minimointiongelma

Miikka Kuisma

Pro Gradu-tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Miikka Kuisma, *van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin minimointiongelma*, matematiikan pro gradu-tutkielma, 43 sivua, 1 liite (1 sivu), Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tässä tutkielmassa käsitellään van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalia, joka määritellään

$$J_\epsilon(u) = \int_\Omega \epsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u^2)^2\, dx,$$

missä $\epsilon > 0$ on pieni luku. Näistä energiafunktionaaleista muodostuu funktionaaliperhe, johon kuuluvat funktionaalit riippuvat parametrista ϵ. Tässä tutkielmassa tähän funktionaaliperheeseen kuuluvia funktioita minimoidaan avaruudessa, joka muodostuu $W^{1,2}-$funktioista, joiden keskiarvo alueessa Ω on välillä (-1,1). Tämä minimointiongelma on peräisin fysiikan tieteenalalle sijoittuvasta teoriasta, joka mallintaa faasitransitioita. Nyt lähestymistapa on kuitenkin puhtaasti matemaattinen.

Energiafunktionaalin minimointiongelma on modernin variaatiolaskennan piiriin kuuluva variaatio-ongelma, joten sen käsittelyssä voidaan hyödyntää tunnettuja variaatiolaskennan tuloksia. Lisäksi energiafunktionaalia minimoidaan Sobolev-avaruuden suljetussa ja konveksissa aliavaruudessa, joten myös Sobolev-avaruuksien teoriasta on apua tutkielman päätulosten todistamisessa. Minimointiongelman ratkaisun olemassaolo seuraa energiafunktionaalin ja Sobolev-avaruuksien ominaisuuksista. Tutkielman päätuloksen mukaan van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin arvojen infimum on äärellinen aiemmin määritellyssä minimointijoukossa.

Minimointiongelman ratkaisu toteuttaa välttämättä Euler-Lagrangen yhtälön sekä heikossa että vahvassa muodossa. Kun nämä yhtälöt kirjoitetaan auki, saadaan esiin varsin yksinkertaisia ehtoja, jotka minimointiongelman ratkaisuksi kelpaavan funktion on toteutettava. Variaatio-ongelman ratkaisujen tutkiminen ehdolla $\epsilon \to 0$ osoittautuu erittäin mielenkiintoiseksi. Tällöin energiaunktionaalin minimoivan funktion itseisarvofunktio suppenee nimittäin kohti vakiofunktiota 1. Lisäksi energiafunktionaalien ratkaisuista koostuvalla jonolla on osajono, joka suppenee kohti funktiota, joka saa ainoastaan arvoja 1 ja -1.

Toinen mielenkiintoinen erikoistapaus energiafunktionaalin minimointiongelmasta saadaan, kun syvennytään minimointiongelman yksiulotteiseen tapaukseen. Variaatio-ongelman ratkaisuksi kelpaavan funktion lauseke voidaan tällöin ratkaista eksplisiittisesti. Kun minimointiongelman ratkaisu tunnetaan, päästään luonnollisesti käsiksi myös energiafunktionaalin minimiarvoon. Yksiulotteisessa tapauksessa kyseinen arvo on $\frac{8}{3}$.

Avainsanat: van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaali, minimointiongelma, variaatiolaskenta, Sobolev-avaruus, funktionaali

Sisältö

1. Johdanto

van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaali määritellään

$$J_\epsilon(u) = \int_\Omega \epsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u^2)^2\,dx,$$

missä parametri $\epsilon > 0$ on pieni reaaliluku. Tässä tutkielmassa perehdytään funktionaaliperheeseen $\big(J_\epsilon(u)\big)_{\epsilon>0}$ kuuluvien funktionaalien minimointiin avaruudessa, joka koostuu sellaisista $W^{1,2}(\Omega)-$funktioista, joiden keskiarvo alueessa Ω on välillä $(-1,1)$. Jatkossa funktionaaliperheeseen $\big(J_\epsilon(u)\big)_{\epsilon>0}$ kuuluvia funktionaaleja kutsutaan *energiafunktionaaleiksi*. Kirjallisuudessa kyseisille funktionaaleille on useita eri nimiä, esimerkiksi "Modica-Mortola funktionaali" sekä "Ginzburg-Landau funktionaali". Tutkielman keskeisimmät tulokset liittyvät energiafunktionaalin minimoimiseen, kun sen lausekkeessa esiintyvälle parametrille ϵ pätee $\epsilon \to 0$. Tämä minimointiongelma on peräisin van der Waals-Cahn-Hilliard teoriasta, joka mallintaa faasitransitioita. Minimointiongelma on muotoiltu tässä tutkielmassa oleellisesti samalla tavalla kuin Modican artikkelissa [**1**], jonka keskeisintä tulosta myös tämän tutkielman päätulos mukailee.

Tämän tutkielman tavoitteena on esitellä van der Waals-Cahn-Hilliardin minimointiongelmaa, todistaa ratkaisun olemassaolo sekä tutkia tarkemmin minimointiongelman ratkaisuja kun $\epsilon \to 0$. Tutkielma on jaettu kolmeen lukuun. Ensimmäisessä luvussa käydään läpi pohjatietoja, joita tarvitaan tutkielman päätulosten esittämiseen ja ymmärtämiseen. Luku painottuu funktionaalianalyysin perusteisiin sekä Sobolev-avaruuksiin, joiden lisäksi se keskittyy esimerkiksi variaatiolaskennan perustuloksiin. Seuraavassa luvussa näita pohjatietoja sovelletaan van der Waals-Cahn-Hilliardin minimointiongelmaan, joka kuuluu modernin variaatiolaskennan aihepiiriin. Tutkielman toisessa luvussa osoitetaan, kuinka energiafunktionaalin minimointiongelman ratkaisun olemassaolo seuraa ensimmäisessä luvussa esitetyistä tuloksista. Tämän lisäksi toisessa luvussa johdetaan energiafunktionaalin variaatiointegraalia vastaavan Euler-Lagrangen yhtälön heikko ja vahva muoto. Nämä ovat ehtoja, jotka minimointiongelman ratkaisu välttämättä toteuttaa. Kahdessa ensimmäisessä luvussa käytetään useammassa kohdassa lähteenä Petri Juutisen kirjoittamaa variaatiolaskennan luentomonistetta [**2**].

Kolmannessa luvussa muotoillaan ja todistetaan tutkielman päätulos. Luvussa todistetaan, että van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin arvojen infimum on äärellinen aiemmin määritellyssä minimointijoukossa kaikilla parametrin ϵ pienillä positiivisilla arvoilla. Luvussa osoitetaan myös, että kun $\epsilon \to 0$, niin minimointiongelman ratkaisufunktion itseisarvo suppenee kohti vakiofunktiota 1 $L^1(\Omega)-$normin mielessä. Tämän lisäksi todistetaan, että funktionaalien $J_\epsilon(u)$ minimoijista koostuvalla jonolla on osajono, joka suppenee kohti karakteristista funktiota kun $\epsilon \to 0$. Karakteristisella funktiolla tarkoitetaan tässä yhteydessä funktiota, joka saa määrittelyjoukossaan ainoastaan arvoja 1 ja -1. Kaikkien tutkielman päätulosten osoitetaan olevan voimassa yleisesti $\mathbb{R}^n-$avaruuksissa. Kolmannen luvun lopussa syvennytään kuitenkin myös van der Waals-Cahn-Hilliardin minimointiongelman yksiulotteiseen tapaukseen. Luvussa löydetään eksplisiittinen esitys energiafunktionaalin minimoijalle kun $\Omega = (-1, 1)$ ja $\epsilon \to 0$. Tämän lisäksi määritetään energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimiarvo yksiulotteisessa tapauksessa, kun $\epsilon \to 0$. Kyseinen arvo on $\frac{8}{3}$.

Tutkielmassa on kyse variaatiolaskennan teorian soveltamisesta spesifiin minimointiongelmaan. Työ ei siis sisällä uusia yleisiä matemaattisia tuloksia, mutta se ei myöskään ole perinteinen kirjallisuustyö. Ensimmäisessä luvussa käytetään runsaasti lähdekirjallisuutta. Luvun on tarkoitus olla ymmärrettävissä vähäisin pohjatiedoin, ja esitystä on pyritty selkeyttämään esimerkkien avulla. Toinen ja kolmas luku koostuvat puolestaan ensimmäisessä luvussa esitettyjen tietojen soveltamisesta tutkimuksen kohteena olevaan van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin minimointiongelmaan. Näissä luvuissa lähdekirjallisuutta on käytetty niukasti, mutta osa todistuksista pohjautuu ideoihin, joita on sovellettu kirjallisuudessa muihin variaatio-ongelmiin. Tutkielman päätulos todistetaan oleellisilta osin Modican artikkelissa [**1**], mutta tässä tutkielmassa tulokselle esitetään selvästi erilainen todistus, jota en ole nähnyt kirjallisuudessa aiemmin. Sama pätee myös tutkielman viimeisessä kappaleessa esitettävälle tulokselle, joka sisältää esimerkiksi energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimiarvon määrittämisen yksiulotteisessa tapauksessa ehdolla $\epsilon \to 0$.

2. Pohjatietoja

van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin minimointiongelmaan syventyminen vaatii jonkin verran esitietoja. Tässä luvussa esitellään funktioihin, vektorikenttiin, funktionaalianalyysiin ja Sobolev-avaruuksiin liittyvää teoriaa, jonka tunteminen on välttämätöntä työn pääaiheena olevaan minimointiongelmaan liittyvien tulosten ymmärtämisen kannalta. Luvussa määritellään runsaasti käsitteitä, joita tarvitaan myöhemmin tutkielman päätulosten muotoiluun ja todistamiseen. Määritelmien lisäksi luku sisältää paljon analyysin perustuloksia sekä niiden todistuksia. Tutkielma on pyritty laatimaan niin, että sitä voi lukea varsin vähäisin esitiedoin. Pohjatietoja esittelevä luku on siis tarkoituksella laaja.

2.1. Analyysin perusteita. Tässä kappaleessa tutustutaan funktioihin sekä vektorikenttiin. Kappaleen tarkoitus on esitellä joitakin analyysiin liittyviä käsitteitä ja tuloksia, joita tarvitaan variaatio-ongelmien käsittelyssä. Perehdytään aluksi puolijatkuvuuteen sekä konveksisuuteen, jotka ovat funktioihin liittyviä käsitteitä.

Määritellään ensin funktion puolijatkuvuus, joka on tavallista jatkuvuutta heikompi ominaisuus.

Määritelmä 1. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä joukko. Funktio $f\colon G \to \mathbb{R}$ on alhaalta puolijatkuva pisteessä $x \in G$ jos $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$.

Funktiota f kutsutaan alhaalta puolijatkuvaksi, jos se on alhaalta puolijatkuva kaikissa pisteissä $x \in G$. Ylhäältä puolijatkuvuus määritellään vastaavasti; funktio $f\colon G \to \mathbb{R}$ on ylhäältä puolijatkuva jos $\limsup_{y \to x} f(y) \leq f(x)$ kaikilla $x \in G$.

Funktion f ylhäältä puolijatkuvuus on yhtäpitävää funktion $-f$ alhaalta puolijatkuvuuden kanssa. Lisäksi voidaan todeta, että funktio on jatkuva jos ja vain jos se on alhaalta ja ylhäältä puolijatkuva.

Määritelmissä olevat lim inf ja lim sup mahdollistavat puolijatkuvuuden tarkastelun myös sellaisissa pisteissä, joissa funktiolla ei ole raja-arvoa. Havainnollistetaan asiaa seuraavalla esimerkillä

Esimerkki 2. Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$,

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{kun } x \neq 0 \\ -1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Funktiolla g ei ole raja-arvoa nollassa. Määritelmästä nähdään kuitenkin, että funktio g on alhaalta puolijatkuva pisteessä $x = 0$.

Määritellään seuraavaksi konveksi joukko ja konveksi funktio.

Määritelmä 3. Joukko G on konveksi, jos ehdosta $x, y \in G$ seuraa, että $tx + (1-t)y \in G$ kaikilla $t \in [0, 1]$.

Jos $G \subset \mathbb{R}^n$ ja G on konveksi, niin kaikki joukkoon G kuuluvien pisteiden väliset janat sisältyvät myös joukkoon G.

MÄÄRITELMÄ 4. Olkoon $G \in \mathbb{R}^n$ konveksi joukko. Funktio $f \colon G \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \text{ kaikilla } t \in [0,1].$$

Konveksin funktion lokaali minimiarvo on aina myös kyseisen funktion globaali minimi. Tämän ominaisuuden takia konveksisuus on tärkeä käsite variaatio-ongelmien yhteydessä. Funktion konveksisuuden selvittäminen tapahtuu usein derivaatan avulla, seuraavaa lemmaa hyödyntäen.

LEMMA 5. *Olkoon Ω avoin sekä konveksi joukko, ja $f \in C^2(\Omega)$. Tällöin funktio f on konveksi jos ja vain jos sen toisen kertaluvun osittaisderivaatoista muodostuva $n \times n$-matriisi on positiivisesti semidefiniitti kaikille $x \in \Omega$.*

TODISTUS. Perustelu esitetään Petri Juutisen luentomonisteessa [**2**, s. 12-14]. □

Tapauksessa $n = 1$ lemman tulkinta on, että funktio f on konveksi jos ja vain jos $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \Omega$.

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan vektorikenttiä. Vektorikentällä tarkoitetaan kuvausta, joka kuvaa lähtöjoukon alkiot vektoreiksi. Annetaan seuraavaksi tarkka määritelmä kyseiselle käsitteelle.

MÄÄRITELMÄ 6. Olkoon $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kuvaus. Jos $m > 1$, niin kuvausta F kutsutaan vektorikentäksi.

Vektorikenttä voi olla yhden tai useamman muuttujan funktio, tämä riippuu luonnollisesti lähtöavaruuden dimensiosta.

ESIMERKKI 7. *a)* $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, F(t) = (\sin(t), \cos(t))$ on yhden muuttujan vektorikenttä.

b) $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, G(x,y,z) = (xy, -2xz^4)$ on kolmen muuttujan vektorikenttä.

Useamman muuttujan funktioille sekä vektoriarvoisille funktioille on määritelty operaattoreita, jotka voidaan tulkita reaalifunktioille määritellyn derivaatan yleistyksiksi. Luodaan seuraavaksi lyhyt katsaus tämän tutkielman kannalta keskeisimpiin operaattoreihin. Tässä yhteydessä ei perehdytä tarkemmin vektorikenttien derivoituvuuteen, ja myös osittaisderivaatan käsite oletetaan tunnetuksi. Nämä määritellään tarkasti kirjassa [**3**]. Tutustutaan sen sijaan gradientin ja divergenssin käsitteisiin, joita tarvitaan myöhemmin energiafunktionaalin minimointiongelmaan liittyvissä laskuissa.

MÄÄRITELMÄ 8. Olkoon joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon lisäksi funktiolla $f \colon U \to \mathbb{R}$ olemassa kaikki osittaisderivaatat pisteessä $x_0 \in U$. Tällöin funktion f gradientti pisteessä x_0 on $\nabla f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), ..., \partial_n f(x_0))$.

Gradientista käytetään kirjallisuudessa myös merkintää "grad", mutta tässä tutkielmassa funktion gradienttia merkitään symbolilla "∇". Kuten määritelmästäkin nähdään, funktion gradientti on vektori, jonka dimensio on sama kuin funktion lähtöavaruuden dimensio.

Esimerkki 9. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^{2x} - xy$. Tällöin funktion f gradientti on

$$\nabla f(x,y) = (2e^{2x} - y, -x).$$

Määritelmä 10. Olkoon joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti derivoituva vektorikenttä. Tällöin vektorikentän F divergenssi on $\mathrm{div} F = \nabla \cdot F = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + ... + \partial_n F_n$.

Divergenssi on siis skalaarisuure. Se kuvaa pisteeseen tulevan tai pisteestä lähtevän vektorivuon tiheyttä. Divergenssin käsite on keskeinen esimerkiksi fysiikan ilmiöiden mallintamisessa.

Esimerkki 11. Olkoon $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x,y,z) = (x, -y, \pi z)$. Tällöin kuvauksen F divergenssi on $\mathrm{div}(f) = 1 + (-1) + \pi = \pi$.

Määritellään vielä Laplacen operaattori. Se on skalaariarvoinen operaattori, jota voidaan soveltaa niin vektorikenttiin kuin funktioihinkin.

Määritelmä 12. Olkoon joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funktio, jolla on olemassa kaikki toisen asteen osittaisderivaatat pisteessä x_0. Tällöin funktion f Laplacen operaattori pisteessä x_0 on

$$\Delta f(x_0) = \nabla \cdot \nabla f(x_0) = \partial_1^2 f_1(x_0) + \partial_2^2 f_2(x_0) + ... + \partial_n^2 f_n(x_0).$$

Yllä määriteltyjä käsitteitä tarvitaan myöhemmin, kun tarkastellaan energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ ominaisuuksia. Tällöin on syytä tuntea myös joitakin vektorikenttien integraalilaskentaan liittyviä määritelmiä ja tuloksia. Määritellään ensin C^k-pinta.

Määritelmä 13. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä joukko, ja $\partial\Omega$ joukon Ω reuna. Joukko $\partial\Omega$ on C^k-pinta jos on olemassa funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten, että $f \in C^k(\mathbb{R}^n), \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ ja $\nabla f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \partial\Omega$.

C^k-pinnat ovat siis k kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden tasa-arvopintoja. Sileällä pinnalla tarkoitetaan jatkossa pintaa, joka on C^k-pinta jollakin $k \geq 1$.

Esimerkki 14. Joukko $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ eli yksikköpallon kuori on 2-ulotteinen sileä pinta. Vastaavasti neliulotteisen yksikköpallon kuori on 3-ulotteinen sileä pinta.

Pinnan yksikkönormaalilla tarkoitetaan vektoria, joka on pintaan nähden kohtisuorassa ja jonka pituus on 1. C^k-pinnalle voidaan määritellä kaksi keskenään vastakkaissuuntaista yksikkönormaalia. Toinen normaali osoittaa siis pinnasta ulospäin, ja toinen sisäänpäin. Määritelmän 13 mukaisen pinnan yksikkönormaaleille saadaan pinnan määrittelevän funktion f avulla seuraavat lausekkeet:

$$\vec{n}_1 = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \qquad \text{ja} \qquad \vec{n}_2 = -\vec{n}_1.$$

Pinnasta M tulee suunnistettu pinta, kun käyttöön otetaan jompikumpi kahdesta normaalivektorikentästä; $\vec{n}_1 \colon M \to \mathbb{R}^n$ tai $\vec{n}_2 \colon M \to \mathbb{R}^n$. Tässä tutkielmassa valitaan $\vec{n} = \vec{n}_1$.

Määritellään seuraavaksi vektorikentän pintaintegraali ja tutustutaan divergenssilauseeseen, joka on kätevä työkalu pintaintegraalien laskemiseen.

MÄÄRITELMÄ 15. Olkoon $M \subset \mathbb{R}^n$ sileä pinta, joka on suunnistettu normaalivektorikentällä $\vec{n}$. Tällöin vektorikentän $F \colon M \to \mathbb{R}^n$ pintaintegraali pinnan M yli normaalin $\vec{n}$ suuntaan on

$$\int_M F \cdot d\vec{n} = \int_M F \cdot \vec{n}\ dS^{n-1}.$$

Vektorikentän $F \colon M \to \mathbb{R}^n$ pintaintegraalia pinnan M yli normaalin $\vec{n}$ suuntaan kutsutaan myös vektorikentän F vuoksi pinnan M läpi vektorin $\vec{n}$ suuntaan.

LAUSE 16. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu ja yhtenäinen joukko, jonka reuna on sileä pinta, joka on suunnistettu ulkoisella yksikkönormaalilla $\vec{n}$. Tämän lisäksi olkoon $F \colon G \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä, joka on määritelty sellaisessa avoimessa joukossa G, että $\mathrm{cl}(\Omega) \subset G$. Tällöin pätee yhtälö*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{n} = \int_\Omega \mathrm{div} F.$$

TODISTUS. Lauseen todistus esitetään kirjassa [**4**, s. 164-165]. □

ESIMERKKI 17. Lasketaan vektorikentän $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$ vuo pallopinnan $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$ läpi, kun pinta on suunnistettu normaalilla, joka osoittaa pallon kuoresta ulospäin. Vuon laskemiseen kannattaa nyt soveltaa divergenssilausetta. Vektorikentän F divergenssi on $\mathrm{div} F = \nabla \cdot F = 1 + 2 + 3 = 6$. Vuoksi saadaan nyt

$$\int_{\partial V} F \cdot dn = \int_V \mathrm{div} F = 6 \int_V 1 = 6\|V\| = 6 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 4^3 = 512\pi.$$

Vuo saatiin laskettua divergenssilauseen avulla siis varsin helposti.

2.2. Funktionaali. Tämän tutkielman keskeisimmät tulokset liittyvät van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaaliin ja sen minimoijiin. Niiden ymmärtäminen vaatii hieman pohjatietoja funktionaalianalyysistä, joten perehdytään seuraavaksi lyhyesti funktionaaleihin ja normiavaruuksiin.

Normilla tarkoitetaan kuvausta, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden alkioon sitä vastaavan reaaliluvun, ja toteuttaa tietyt yksinkertaiset ehdot. Normia voidaan pitää reaalilukujen joukossa määritellyn tutun itseisarvon käsitteen yleistyksenä, ja sen avulla voidaan arvioida vektorien ”pituutta” tai ”suuruutta”. Normin käsite on hyvin tärkeä minimointiongelmien yhteydessä, sillä se mahdollistaa vektoriavaruuksien alkioiden keskinäisen vertailun. Tutustutaan aluksi normin tarkkaan määritelmään.

Määritelmä 18. Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathbb{R}$ avaruuden V kerroinkunta. Tällöin kuvaus $p\colon V \mapsto \mathbb{R}$ on normi avaruudessa V, jos se toteuttaa alla olevat ehdot:

1. $p(v) = 0$ jos ja vain jos $v = \overline{0}$ eli jos v on nollavektori avaruudessa V.
2. $p(v) \geq 0$ kaikilla $v \in V$
3. $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$ kaikilla $v \in V$ ja kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $p(v+u) \leq p(v) + p(u)$ kaikilla $v, u \in V$.

Ehtoa numero 4. kutsutaan yleensä kolmioepäyhtälöksi. Tutuimpia normeja ovat reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ määritelty itseisarvo sekä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritelty euklidinen normi; $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Tässä tutkielmassa käsitellään runsaasti sellaisia vektoriavaruuksia, joiden alkiot ovat funktioita. Niinpä tarvitaan normeja, joita voidaan soveltaa funktioavaruuksiin. Tällasia normeja ovat esimerkiksi sup-normi sekä L^p-normit, jotka määritellään hieman myöhemmin L^p-avaruuksien yhteydessä.

Esimerkki 19. Olkoon $L^\infty(\Omega)$ joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettujen funktioiden muodostama vektoriavaruus. Tällöin kuvaus $\|f\|_\infty = \sup |f|$ antaa normin avaruudessa $L^\infty(\Omega)$.

Todistus. Osoitetaan, että kuvaus toteuttaa kaikki normilta vaadittavat ehdot. Kohdat 1. ja 2. seuraavat suoraan itseisarvon ja supremumin määritelmästä ja ovat siten triviaaleja. Kohta 3. seuraa puolestaan suoraan funktion ja skalaarin tulon määritelmästä, joten riittää todistaa kohta 4.

Olkoot $f, g \in L^\infty(\Omega)$. Tällöin itseisarvon ja supremumin perusominaisuuksien nojalla pätee

$$\begin{aligned} &\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} \left(|f(x)| + |g(x)|\right) \leq \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x\in\Omega} |g(x)| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Siispä $\|f\|_\infty$ on normi rajoitettujen funktioiden avaruudessa. □

Kuvaus $\|f\|_\infty = \sup |f|$ määrittelee normin myös $C^k(\Omega)$ avaruuksiin.

Normiavaruus on pari $(V, \|\cdot\|)$, missä V on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|$ on normi avaruudessa V. Esimerkin 19 nojalla $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ on normiavaruus. Täydelliset normiavaruudet ovat normiavaruuksia, joissa jokainen Cauchy-jono suppenee. Täydellisiä normiavaruuksia kutsutaan Banach-avaruuksiksi. Banach-avaruus on keskeinen käsite funktionaalianalyysissä; tässäkin tutkielmassa funktionaaleja $J_\epsilon(u)$ minimoidaan avaruudessa, joka on Banach-avaruus.

Esimerkki 20. Avaruus $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ eli välillä $[a,b] \subset \mathbb{R}$ jatkuvien funktioiden muodostama avaruus varustettuna sup-normilla on Banach-avaruus. Sen sijaan avaruudet $(C^k([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ eivät ole Banach-avaruuksia, sillä k kertaa jatkuvasti derivoituvista funktioista muodostuva jono ei välttämättä suppene kohti k kertaa derivoituvaa funktiota.

LAUSE 21. *Olkoon* $(V, \|\cdot\|)$ *Banach-avaruus ja* X *avaruuden* V *suljettu aliavaruus. Tällöin* $(X, \|\cdot\|)$ *on Banach-avaruus.*

TODISTUS. $(X, \|\cdot\|)$ on selvästi normiavaruus. Osoitetaan, että se on lisäksi täydellinen. Olkoon $\{x_n\} \in X$ Cauchy-jono, jolle pätee $\{x_n\} \to x \in V$. Jono suppenee avaruudessa V, sillä $X \subset V$, ja V on täydellinen. Nyt on oltava $x \in X$ tai x on joukon X kasautumispiste. Joukko X on kuitenkin suljettu, joten se sisältää kaikki kasautumispisteensä. Niinpä Cauchy-jono $\{x_n\}$ suppenee avaruudessa X, mistä seuraa avaruuden X täydellisyys. Avaruus $(X, \|\cdot\|)$ on siten Banach-avaruus. $\square$

Perehdytään seuraavaksi tarkemmin Banach-avaruuksiin liittyviin käsitteisiin.

MÄÄRITELMÄ 22. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ Banach-avaruus. Määritellään Banach-avaruuden duaali V^* seuraavasti: $v^* \in V^*$ jos $v^* \colon V \mapsto \mathbb{R}$ on rajoitettu sekä lineaarinen.

Duaalin alkiot ovat siis rajoitettuja lineaarikuvauksia Banach-avaruudelta. Havainnollistetaan asiaa yksinkertaisella esimerkillä

ESIMERKKI 23. Kuvaus $\mathcal{J} \colon C([0,1]) \to \mathbb{R}, \mathcal{J}f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx$ kuuluu Banach-avaruuden $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ duaaliin Riemann-integraalin lineaarisuuden nojalla.

Määritellään seuraavaksi heikko suppeneminen, joka on tärkeä suppenemiskäsite variaatiolaskennassa.

MÄÄRITELMÄ 24. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ Banach-avaruus, ja f_j jono funktioita. Tällöin jono f_j suppenee heikosti kohti alkiota $f \in V$ jos ja vain jos $v^*(f_j) \to v^*(f)$ kaikilla $v^* \in V^*$.

Heikkoa suppenemista merkitään symbolilla ” $\rightharpoonup$ ”, siis $f_j \rightharpoonup f$ tarkoittaa, että jono f_j suppenee heikosti kohti alkiota f. Heikko suppeneminen on nimensä mukaisesti heikompi ehto kuin suppeneminen normin mielessä. Toisin sanoen normin mielessä suppeneva jono suppenee aina myös heikosti, mutta käänteinen implikaatio ei aina päde. Heikko ja vahva suppeneminen eivät eroa toisistaan $\mathbb{R}^n$-avaruuksissa. Sen sijaan esimerkiksi hieman myöhemmin määriteltävissä L^p-avaruuksissa kaikki heikosti suppenevat jonot eivät suppene vahvasti.

Heikon suppenemisen avulla voidaan määritellä heikko topologia Banach-avaruudelle $(V, \|\cdot\|)$. Heikkoon topologiaan liittyvät keskeisesti heikon suljettuuden, heikon jonokompaktiuden sekä heikon puolijatkuvuuden käsitteet.

MÄÄRITELMÄ 25. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ Banach-avaruus ja $G \subset V$. Tällöin

i) Joukko G on heikosti suljettu, jos seuraava ehto pätee: Olkoon $f_n \in G$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $f_n \rightharpoonup f$. Tällöin $f \in G$.

ii) Joukko $G \subset V$ on heikosti jonokompakti, jos jokaisella jonolla $f_n \in G$ on osajono, joka suppenee heikosti joukossa G.

iii) Funktio $f\colon G \to \mathbb{R}$ on heikosti alhaalta puolijatkuva jos kaikilla $x \in G$ pätee ehto: jos $x_j \in G$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $x_j \rightharpoonup x$, niin $f(x) \le \liminf_{j\to\infty} f(x_j)$.

Koska heikko suppeneminen ja suppeneminen ovat ekvivalentit käsitteet $\mathbb{R}^n-$ avaruuksissa, eivät yllä määritellyt käsitteet eroa vahvemmista versioistaan $\mathbb{R}^n-$avaruuksissa. Sen sijaan ääretönulotteisissa avaruuksissa, joita siirrytään käsittelemään hieman myöhemmin, heikon topologian käsite on tärkeä.

Määritellään seuraavaksi refleksiivinen Banach-avaruus. Tämä on hyödyllinen käsite, sillä refleksiivisissä Banach-avaruuksissa heikkoon topologiaan sisältyvät käsitteet toteuttavat joitakin tärkeitä ehtoja.

Määritelmä 26. Banach-avaruus $(V, \|\cdot\|)$ on refleksiivinen, jos $(V^*)^*$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden V kanssa.

Refleksiivisiä avaruuksia käsitellään tarkemmin kirjassa [**5**]. Tässä yhteydessä esitellään ainoastaan seuraavat tulokset, joiden tunteminen on välttämätöntä tutkielman päätulosten todistamisen kannalta.

Lause 27. *Olkoon X Banach-avaruus. Avaruus X on refleksiivinen jos ja vain jos suljettu yksikköpallo on heikosti jonokompakti avaruudessa X.*

Todistus. Lause todistetaan kirjassa [**5**, s. 75]. □

Lause 28. *Olkoon V refleksiivinen Banach-avaruus. Jos joukko $K \subset V$ on suljettu ja konveksi, niin K on heikosti suljettu*

Todistus. Lause todistetaan Juutisen luentomonisteessa [**2**, s. 21-22].Todistuksessa hyödynnetään Mazurin lemmaa, joka esitellään sekä todistetaan kirjassa [**6**]. □

Hyödyntämällä lauseita 27 ja 28 saadaan seuraava tulos.

Seuraus 29. *Olkoon V refleksiivinen Banach-avaruus. Jos joukko $K \subset V$ on suljettu, konveksi ja rajoitettu, niin joukko K on heikosti jonokompakti.*

Todistus. Lauseen 28 nojalla suljettu ja konveksi joukko K on heikosti suljettu. Koska K on myös rajoitettu, se sisältyy suljettuun joukkoon $rB(0,1)$ jollakin $r \in \mathbb{R}$. Lauseesta 27 seuraa, että joukko $rB(0,1)$ on heikosti jonokompakti avaruudessa V, sillä V on refleksiivinen Banach-avaruus. Nyt K on heikosti jonokompaktin joukon heikosti suljettuna osajoukkona heikosti jonokompakti. □

Siirrytään seuraavaksi käsittelemään funktionaaleja. Funktionaalille löytyy kirjallisuudesta erilaisia määritelmiä, mutta tässä tutkielmassa funktionaali määritellään seuraavasti:

Määritelmä 30. Olkoon V vektoriavaruus. Funktionaali on kuvaus $I\colon V \mapsto \mathbb{R}$.

Esimerkki 31. Esimerkissä 23 määritelty kuvaus $\mathcal{J}$ on funktionaali, joka kuvaa funktion reaaliluvuksi.

Tyypillinen variaatiolaskennan ongelma on löytää funktio, joka minimoi halutun funktionaalin määrätyssä joukossa. Tämän tyyppisillä ongelmilla on runsaasti käytännön sovelluksia, kyse voi olla esimerkiksi kustannusten tai energiankulutuksen minimoinnista. Määritellään seuraavaksi funktionaalin koersiivisuus, joka on keskeinen ominaisuus funktionaalin minimoijan olemassaolon kannalta.

MÄÄRITELMÄ 32. Olkoon $I\colon (V, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ funktionaali. Funktionaali I on koersiivinen, jos pätee: $I(v) \to \infty$, kun $\|v\| \to \infty$.

Funktionaalin koersiivisuus riippuu siis funktionaalin lausekkeen lisäksi käytössä olevasta normista.

2.3. Sobolev-avaruudet. Tässä kappaleessa luodaan lyhyt ja ytimekäs katsaus L^p-avaruuksiin sekä Sobolev-avaruuksiin. Avaruuksien määritelmien lisäksi kappaleessa käydään läpi keskeisimpiä Sobolev-avaruuksiin liittyviä tuloksia. Määritellään aluksi L^p-normi.

MÄÄRITELMÄ 33. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \pm\infty$. Nyt funktion f $L^p(\Omega)$-normi on luku

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}},$$

missä m on Lebesguen mitta. Hieman myöhemmin todistetaan, että $L^p(\Omega)-$normi todella on normi.

L^p-avaruudet määritellään siten, että ne koostuvat Lebesgue-mitallisista funktioista, joiden L^p-normi on äärellinen. Siis

$$L^p(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \pm\infty : \ f \text{ on mitallinen ja } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Yllä olevissa määritelmissä on samaistettu funktiot, jotka saavat samat arvot m.k. joukossa Ω. Siis $f = g$ jos ja vain jos joukko $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ on nollamittainen Lebesguen mitan suhteen. L^p-avaruudet ovat siis funktioiden ekvivalenssiluokkien kokoelmia. Jatkossa näitä ekvivalenssiluokkia käsitellään samoin kuin tavallisia funktioita. Jos $f(x) = g(x)$ m.k $x \in \Omega$, niin funktiot f ja g ovat sama funktio alueessa Ω.

ESIMERKKI 34. Olkoon $\Omega =]0,1[$ ja $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 10^9, & \text{kun } x = \frac{1}{5} \\ 1, & \text{kun } x \in]0,1[\setminus \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Funktiolla $f(x)$ on jatkuva edustaja $g(x) = 1$, joten funktio f on jatkuva. Lisäksi $f \in L^p(\Omega)$ kaikilla $1 \leq p < \infty$, sillä

$$\left(\int_{\Omega} |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 1 \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = 1^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

kaikilla $1 \leq p < \infty$. Huomattavaa on, että funktioiden f ja g $L^p(\Omega)$ normit ovat samat kaikilla $1 \leq p < \infty$.

LAUSE 35. *Olkoon Ω mitallinen joukko. Tällöin avaruus $L^p(\Omega)$ on refleksiivinen jos ja vain jos $1 < p < \infty$.*

TODISTUS. Lause todistetaan kirjassa [**7**, s. 49]. □

L^p-avaruuksien yhteydessä tarvitaan usein Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöitä, joihin perehdytään seuraavaksi.

LAUSE 36 (Hölderin epäyhtälö). *Olkoot $p, q \in [1, \infty[$ lukuja, joille pätee $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin kaikille mitallisille funktioille f ja g on voimassa epäyhtälö*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

HUOMAUTUS 37. Tärkeä erikoistapaus Hölderin epäyhtälöstä saadaan valitsemalla $p = q = 2$, jolloin pätee

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Tämä epäyhtälö tunnetaan myös Cauchy-Schwarzin epäyhtälönä.

LAUSE 38 (Minkowskin epäyhtälö). *Olkoon Ω mitallinen joukko ja $1 \leq p < \infty$. Olkoot $u, v \in L^p(\Omega)$. Tällöin on voimassa epäyhtälö*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Hölderin sekä Minkowskin epäyhtälöiden todistukset löytyvät kirjasta [**8**].

L^p-avaruuksien määrittelyn yhteydessä todettiin, että ne ovat normiavaruuksia. Todistetaan seuraavaksi vahvempi tulos ja osoitetaan, että avaruudet $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ovat Banach-avaruuksia. Oletetaan jatkossa, että Ω on avoin ja mitallinen joukko, jos ei toisin mainita.

LAUSE 39. *Avaruus $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ on Banach-avaruus kaikilla $1 \leq p < \infty$.*

TODISTUS. Osoitetaan, että $\|\cdot\|_p$ määrittelee normin avaruudessa $L^p(\Omega)$. On siis osoitettava, että kuvaus $\|\cdot\|_p \colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ toteuttaa määritelmässä 18 esitetyt ehdot.

1. $\|f\|_p = 0$ jos ja vain jos $f(x) = 0$ m.k $x \in \Omega$. Nollafunktio on tällaisen funktion f edustaja, joten ehto (1) toteutuu.

2. Ehdon toteutuminen on itseisarvon määritelmän nojalla triviaalia.

3. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_\Omega |\lambda f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\lambda|^p |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p.$$

4. Ehto toteutuu Minkowskin epäyhtälön nojalla.

Nyt on osoitettu, että avaruus $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus kaikilla $1 \leq p < \infty$. Avaruuksien $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ täydellisyyttä ei todisteta tässä tutkielmassa. Kyseinen todistus on kirjassa [**9**]. Banach-avaruudet ovat täydellisiä normiavaruuksia, joten väite seuraa tästä. □

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan Sobolev-avaruuksia. Tämän tutkielman keskeisin osa on variaatio-ongelma, jossa funktionaalin minimoivaa funktiota etsitään Sobolev-funktioiden joukosta. Niinpä Sobolev-avaruuksien määritelmien ja perustulosten tunteminen on jatkon kannalta välttämätöntä. Sobolev-avaruksille käytetään tavallisesti kahta ekvivalenttia määritelmää. Molemmissa määritelmissä Sobolev gradientin (heikko gradientti) käsite on keskeinen.

Tutustutaan ensin Sobolev-normiin perustuvaan määritelmään. Määritellään tätä varten normiavaruus $(C^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$, missä

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p = \left(\int |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |\nabla u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Määritelmä 40. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $1 \leq p < \infty$. Nyt Sobolev-avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ määritellään joukon $\{\psi \in C^\infty(\Omega) : \|\psi\|_{1,p} < \infty\}$ täydentymänä normin $\|\psi\|_{1,p}$ suhteen.

Siis, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos $u \in L^p(\Omega)$ ja on olemassa funktio $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ siten, että jollekin jonolle $\psi_j \in C^\infty(\Omega)$ pätee seuraava: $\|u - \psi_j\|_p \to 0$ ja $\|v - \nabla\psi_j\|_p \to 0$. Tällöin funktiota v kutsutaan funktion u heikoksi gradientiksi tai Sobolev-gradientiksi.

Huomautus 41. Tässä tutkielmassa operoidaan poikkeuksetta Sobolev-avaruudessa $W^{1,2}(\Omega)$, jolloin käytetään normia $\|u\|_{1,2} = \left(\int |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int |\nabla u(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Sobolev-avaruudet voidaan määritellä myös osittaisintegrointikaavan avulla. Esitetään osittaisintegrointikaava ensin välttämättömänä ja riittävänä ehtona heikon gradientin olemassaololle.

Lause 42. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $1 \leq p < \infty$. Tällöin funktio $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ on funktion u heikko gradientti jos ja vain jos*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \psi dx$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, 2, ..., n.$

Osittaisintegrointikaavan avulla Sobolev-avaruuksille $W^{1,p}(\Omega)$ saadaan vaihtoehtoinen määritelmä:

MÄÄRITELMÄ 43. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin $u \in W^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos $u \in L^p(\Omega)$, ja funktiolla u on heikko gradientti $v \in L^p(\Omega)$.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan lähinnä Sobolev-avaruutta $W^{1,2}(\Omega)$. Lauseen 42 nojalla tähän avaruuteen kuuluvien funktioiden heikot gradientit ovat $L^2(\Omega)$-funktioita.

Mikäli $W^{1,p}$-funktio on derivoituva, sen heikko gradientti on sama kuin funktion tavallinen gradientti. Funktio voi olla kuitenkin heikosti derivoituva, vaikka se ei olisikaan derivoituva. Tarkastellaan seuraavaksi asiaa havainnollistavia esimerkkejä.

ESIMERKKI 44. Olkoon $\Omega =]-100, 100[$ ja

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x \leq 0 \\ x & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Osoitetaan, että $u \in W^{1,p}$ kaikilla $1 \leq p < \infty$ ja funktion u heikko derivaatta on

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x \leq 0 \\ 1 & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Todetaan ensin, että $u, v \in L^p$ kaikilla $1 \leq p < \infty$. Olkoon $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nyt osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u\psi'(x)dx = \int_0^{100} x\psi'(x)dx = \Big[x\psi(x)\Big]_0^{100} - \int_0^{100} \psi(x)dx \\ &= -\int_0^{100} \psi(x)dx = -\int_\Omega v\psi(x)dx. \end{aligned}$$

Funktio u on siis heikosti derivoituva, vaikka se ei ole derivoituva nollassa.

Osoitetaan seuraavaksi, että Sobolev-avaruudet ovat Banach-avaruuksia ja esitellään Sobolev-avaruuksien refleksiivisyyteen liittyvä tulos.

LAUSE 45. *Avaruus* $W^{1,p}(\Omega)$ *on Banach-avaruus kaikilla* $1 \leq p < \infty$.

TODISTUS. Todistetaan ensin, että $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ on normiavaruus kaikilla $1 \leq p < \infty$. Kuvaus $\|\cdot\|_p \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ toteuttaa selvästi normilta vaaditut ehdot 1-3. Tämä perustuu aiemmin esitettyyn vastaavaan todistukseen $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)-$avaruuksille. Osoitetaan, että kuvaus toteuttaa myös kolmioepäyhtälön.

Olkoot $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin on voimassa

$$\|u + v\|_{1,p} = \|u + v\|_p + \|\nabla u + \nabla v\|_p$$

$$
\begin{aligned}
&\leq_{i)} \|u\|_p + \|v\|_p + \|\nabla u\|_p + \|\nabla v\|_p \\
&= \|u\|_p + \|\nabla u\|_p + \|v\|_p + \|\nabla v\|_p \\
&= \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}.
\end{aligned}
$$

Päättelyn kohta $i)$ seuraa Minkowskin epäyhtälöstä.

Osoitetaan vielä, että avaruudet $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ovat täydellisiä kaikilla $1 \leq p < \infty$. Olkoon $\{u_n\} \in W^{1,p}(\Omega)$ Cauchy-jono. Tästä seuraa avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ määritelmän nojalla, että jonot $\{\nabla u_n\}$ sekä $\{u_n\}$ ovat Cauchy-jonoja avaruudessa $L^p(\Omega)$. Lauseen 39 nojalla $L^p(\Omega)-$avaruudet ovat täydellisiä. Niinpä on olemassa funktiot $u, w \in L^p(\Omega)$ siten, että $\|u_n - u\|_p \to 0$ ja $\|\nabla u_n - w\|_p \to 0$ kun $n \to \infty$. Siispä on olemassa funktio u siten, että $\{u_n\} \to u$. Täydellisyyttä varten on vielä osoitettava, että $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Tämä on totta jos funktio w on funktion u heikko gradientti. Osoitetaan, että näin myös on.

Olkoon $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Koska $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin osittaisintegrointikaavan nojalla kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$
\int_\Omega u_n \, \nabla\psi dx = -\int_\Omega \nabla u_n \psi dx. \tag{1}
$$

Hölderin epäyhtälöä soveltamalla saadaan puolestaan arvio

$$
\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega u_n \nabla\psi \; dx - \int_\Omega u \nabla\psi \; dx \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(u_n - u)\nabla\psi| dx \leq \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p \|\nabla\psi\|_q, \tag{2}
$$

missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Koska $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, niin funktioiden ψ ja $\nabla\psi$ $L^q(\Omega)-$ normit ovat äärelliset. Aiemmin todettiin myös, että $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p = 0$. Niinpä arvion (2) nojalla pätee

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \nabla\psi \; dx = \int_\Omega u \nabla\psi \; dx. \tag{3}
$$

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että myös

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u_n \psi \; dx = \int_\Omega w\psi \; dx.
$$

Kun nämä tulokset sijoitetaan yhtälöön (1), saadaan

$$
\int_\Omega u \, \nabla\psi dx = -\int_\Omega w\psi dx.
$$

Niinpä funktio w on funktion u heikko gradientti, joten $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nyt on osoitettu, että jokainen Cauchy-jono suppenee avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Väite seuraa tästä. $\square$

LAUSE 46. *Avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ on refleksiivinen kaikilla $1 < p < \infty$.*

TODISTUS. Määritellään kuvaus $I \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega), I(u) = (u, \nabla u)$. Kuvaus I on selvästi isometria. Niinpä joukko $I(W^{1,p}(\Omega))$ on avaruuden $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ suljettu aliavaruus. Avaruus $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ on refleksiivinen jos ja vain jos $1 < p < \infty$. Lisäksi kirjassa [**10**] todistetaan, että refleksiivisen avaruuden suljettu aliavaruus on refleksiivinen. Tästä seuraa, että avaruus $I(W^{1,p}(\Omega))$ on refleksiivisen avaruuden suljettuna aliavaruutena refleksiivinen kaikilla $1 < p < \infty$. Koska avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ on isometrinen avaruuden $I(W^{1,p}(\Omega))$ kanssa, myös se on refleksiivinen avaruus kaikilla $1 < p < \infty$. $\square$

On syytä huomata, että avaruus $W^{1,1}(\Omega)$ ei ole refleksiivinen.

Määritellään seuraavaksi kaksi avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ aliavaruutta, jotka liittyvät Sobolev-funktioiden reuna-arvoihin.

MÄÄRITELMÄ 47. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $1 \le p < \infty$. Nyt Sobolev-avaruus $W_0^{1,p}$ määritellään joukon $\{\psi \in C_0^\infty(\Omega) : \|\psi\|_{1,p} < \infty\}$ täydentymänä normin $\|\psi\|_{1,p}$ suhteen.

Avaruuden $W_0^{1,p}(\Omega)$ voi intuitiivisesti ajatella koostuvan $W^{1,p}(\Omega)-$funktioista, jotka häviävät joukon Ω reunalla. Ehdosta $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ei kuitenkaan seuraa, että $u(x) = 0$ jos $x \in \partial\Omega$. $W_0^{1,p}(\Omega)-$funktiot häviävät kuitenkin Sobolev-mielessä joukon Ω reunalla. Aihetta käsitellään enemmän luentomonisteissa [**11**] ja [**2**].

MÄÄRITELMÄ 48. Olkoon Ω avoin joukko ja $g \in W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin $u \in W_g^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Avaruuden $W_g^{1,p}(\Omega)$ funktioiden voidaan ajatella olevan $W^{1,p}(\Omega)-$funktioita, joiden reuna-arvot on kiinnitetty funktion $g \in W^{1,p}(\Omega)$ avulla. Avaruudet $W_g^{1,p}(\Omega)$ ovat Banach-avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ suljettuina aliavaruuksina Banach-avaruuksia. Lisäksi joukot $W_g^{1,p}(\Omega)$ ovat suljettuja ja konvekseja, joten ne ovat heikosti suljettuja.

Sobolev-avaruuksien teoriaan liittyyvistä lauseista tässä tutkielmassa tarvitaan erityisesti Poincarén epäyhtälöä ja Rellich-Kondrachovin lausetta, joihin syvennytään pian. Poincarén epäyhtälön todistuksessa käytetään variaatiolaskennan peruslausetta, joten muotoillaan se ensin.

LAUSE 49 (Variaatiolaskennan peruslause). *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $\omega(x) \in L^1(\Omega)$. Tällöin jos $\int_\Omega \omega(x)\psi(x)dx = 0$ kaikilla $\psi \in C^\infty(\Omega)$, niin $\omega(x) = 0$ m.k $x \in \Omega$.*

TODISTUS. Todistus on luentomonisteessa [**11**, s. 22-23]. $\square$

Variaatiolaskennan peruslause on erittäin tärkeä tulos, jota hyödynnetään tässäkin tutkielmassa useamman kerran. Lähestytään seuraavaksi Rellich-Kondrachovin lausetta määrittelemällä ensin Sobolev-eksponentti.

Määritelmä 50. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Sobolev-avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ Sobolev-eksponentti p^* määritellään seuraavasti:

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-p}, & \text{kun } p < n \\ \infty, & \text{kun } p \geq n \end{cases}$$

Lause 51 (Rellich-Kondrachovin lause). *Olkoon $U \in \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko, jolla on C^1-reuna. Tällöin on voimassa:*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

kaikilla $1 \leq q < p*$.

Ylläoleva merkintä tarkoitaa, että avaruus $W^{1,p}(U)$ uppoaa kompaktisti avaruuteen $L^q(U)$. Toisin sanoen, jokaisella Sobolev-avaruuden $W^{1,p}(U)$ rajoitetulla jonolla on osajono, joka suppenee avaruudessa $L^q(U)$.

Todistus. Lause todistetaan kirjassa [**12**, s. 272-274]. □

Huomautus 52. Kompaktin upotuksen määritelmässä vaadittiin, että Sobolev-avaruuden $W^{1,p}(U)$ rajoitetulla jonolla $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ on osajono $\{u_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, joka suppenee avaruudessa $L^q(U)$. Tässä määritelmässä suppenemisella tarkoitetaan luonnollisesti suppenemista $\|\cdot\|_{L^q(U)}$−normin mielessä.

Seuraus 53. *Koska $p = \frac{np}{n} < \frac{np}{n-p} = p^*$ kaikilla $1 \leq p < n$, niin*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

kaikilla $1 \leq p < \infty$, $1 \leq n < \infty$.

Otetaan käyttöön merkintä $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx$. Nyt päästään käsiksi Poincarén epäyhtälöön, joka esitellään ja todistetaan seuraavaksi. Poincarén epäyhtälö todistetaan kirjassa [**12**, s. 275-276]. Tässä tutkielmassa kyseinen todistus esitetään hieman runsaammin välivaihein.

Lause 54 (Poincarén epäyhtälö). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu ja yhtenäinen joukko, jonka reuna ∂U on C^1-reuna. Olkoon lisäksi $1 \leq p < \infty$. Tällöin on olemassa vakio $C > 0$ siten, että*

$$\left(\int_U |u - u_U|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_U |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

kaikilla Sobolev-funktioilla $u \in W^{1,p}(U)$.

Todistus. Oletetaan, että väite ei ole totta ja osoitetaan, että tästä seuraa ristiriita. Jos oletetaan, ettei väite päde, löytyy jokaista positiivista kokonaislukua m kohti jokin funktio $u_m \in W^{1,p}(U)$, joka toteuttaa ehdon

$$\left(\int_U |u_m - (u_m)_U|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} > m \left(\int_U |\nabla u_m|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Kirjoitetaan yllä oleva epäyhtälö vielä L^p-normia käyttäen, jolloin se saadaan muotoon

$$\|u_m - (u_m)_U\|_{L^p(U)} > m\|\nabla u_m\|_{L^p(U)}. \tag{4}$$

Normitetaan seuraavaksi funktioita u_m määrittelemällä

$$v_m = \frac{u_m - (u_m)_U}{\|u_m - (u_m)_U\|_{L^p(U)}}.$$

Funktion u_m ja sen keskiarvon erotuksen keskiarvon on oltava nolla, minkä nojalla voidaan todeta $(v_m)_U = 0$. Lisäksi pätee $\|v_m\|_{L^p(U)} = 1$, sillä v_m määriteltiin jakamalla funktio omalla normillaan.

Sijoitetaan seuraavaksi funktion v_m lauseke epäyhtälöön (4). Näin saadaan

$$\|u_m - (u_m)_U\|_{L^p(U)}\|v_m\|_{L^p(U)} > m\|u_m - (u_m)_U\|_{L^p(U)}\|\nabla v_m\|_{L^p(U)}.$$

Kun tähän epäyhtälöön sijoitetaan $\|v_m\|_{L^p(U)} = 1$, saadaan edelleen

$$\frac{1}{m} > \|\nabla v_m\|_{L^p(U)}, \tag{5}$$

missä $m \in \mathbb{Z}$. Tästä seuraa, että funktiot v_m ovat rajoitettuja Sobolev-avaruudessa $W^{1,p}(U)$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$.

Rellich-Kondrachovin lauseen nojalla on olemassa jonon $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ osajono $\{v_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sekä funktio $v \in L^p(U)$ siten, että $v_{m_k} \to v$ avaruudessa $L^p(U)$.

Aiemmin todettiin, että $(v_m)_U = 0$ ja $\|v_m\|_{L^p(U)} = 1$. Nyt suppenemisen määritelmästä seuraa, että $(v)_U = 0$ ja $\|v\|_{L^p(U)} = 1$.

Toisaalta epäyhtälön (5) nojalla funktioiden ∇v_m $L^p(U)$ normit ovat mielivaltaisen pieniä. Niinpä pätee

$$\lim_{m_k \to \infty} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^p(U)} = 0.$$

Koska funktiot ∇v_{m_k} ovat funktioiden v_{m_k} gradientteja, ne ovat myös näiden funktioiden heikkoja gradientteja. Nyt voidaan hyödyntää Sobolev-funktioiden osittaisintegrointikaavaa, jonka nojalla kaikilla $i = 1, ..., n$ ja kaikilla testifunktioilla $\psi \in C_0^{\infty}$

on voimassa

$$\int_U v \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = \lim_{m_k \to \infty} \int_U v_{m_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = - \lim_{m_k \to \infty} \int_U \frac{\partial v_{m_k}}{\partial x_i} \psi\, dx = 0.$$

Tästä seuraa, että $v \in W^{1,p}$. Lisäksi variaatiolaskennan peruslauseen nojalla $\nabla v = 0$ melkein kaikkialla joukossa U. Tästä puolestaan seuraa, että funktio v on vakiofunktio yhtenäisessä joukossa U.

Aiemmin todettiin, että funktion v keskiarvo joukossa U on nolla. Koska v osoitettiin lisäksi vakiofunktioksi, seuraa tästä, että $v \equiv 0$. Tällöin on oltava $\|v\|_{L^p(U)} = 0$. Aikaisemmin kuitenkin pääteltiin, että $\|v\|_{L^p(U)} = 1$. Nyt on päädytty ristiriitaan, joka osoittaa, että todistuksen alussa asetettu vastaväite ei voi pitää paikkaansa. Alkuperäinen väite on siis tosi. □

2.4. Variaatiolaskentaa. Tässä kappaleessa perehdytään joihinkin variaatiolaskennan perustuloksiin, joita sovelletaan jatkossa energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimointiin liittyvään variaatio-ongelmaan. Tulokset esitetään yleisinä tuloksina. Kappaleen keskeisin käsite on Euler-Lagrangen yhtälö, jonka toteutuminen on tiettyjen ehtojen vallitessa välttämätön ehto variaatio-ongelman ratkaisulle.

Aiemmin määritelty heikko puolijatkuvuus on tärkeä käsite variaatiointegraalin minimoimisen kannalta. Myöhemmin todistetaan, että van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin minimointiongelmalla on ratkaisu. Todistuksessa hyödynnetään tietoa, että energiafunktionaalit $J_\epsilon(u)$ ovat heikosti alhaalta puolijatkuvia. Tämän osoittaminen määritelmää käyttäen on työlästä, joten seuraava lause on hyvin hyödyllinen.

LAUSE 55. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sellainen kuvaus, että se toteuttaa ehdon*

$$F(x, s, \xi) \geq \alpha \|\xi\|^2 - \beta$$

joillakin $\alpha, \beta > 0$. Olkoon lisäksi $F \in C^1$ ja kuvaus $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ konveksi kaikille $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Tällöin $I(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u) dx$ on heikosti alhaalta puolijatkuva.

TODISTUS. Tämänkin lauseen todistus on luentomonisteessa [**2**, s. 45-47]. □

Perehdytään seuraavaksi Euler-Lagrangen yhtälöön, jonka toteutuminen on välttämätön ehto minimointiongelman ratkaisulle. Niinpä Euler-Lagrangen yhtälön avulla voidaan tutkia, millaisia ominaisuuksia variaatio-ongelman ratkaisuksi kelpaavalla funktiolla on. Yksinkertaisten ongelmien tapauksessa Euler-Lagrangen yhtälö voidaan ratkaista eksplisiittisesti, jolloin päästään käsiksi funktionaalin minimoijan lausekkeeseen. Esitellään aluksi Euler-Lagrangen yhtälön perinteisempi muoto, jota käsitellään enemmän Juutisen luentomonisteessa [**2**].

Määritelmä 56. Olkoon $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, missä $1 < p < \infty$. Funktio u toteuttaa funktionaalia $I(u)$ vastaavan Euler-Lagrangen yhtälön heikossa muodossa, jos

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), Du(x)) \cdot \psi(x) + \nabla_\xi F(x, u(x), Du(x)) \cdot D\psi(x) \right) dx = 0$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Huomautus 57. Tämän tutkielman aiheena olevan minimointiongelman tapauksessa Euler-Lagrangen yhtälön testifunktiot $\psi(x)$ määritellään hieman eri tavalla. Aiheeseen palataan tarkemmin seuraavassa luvussa.

Aiemmin todettiin, että Euler-Lagrangen yhtälön toteutuminen on välttämätön ehto minimointiongelman ratkaisuksi kelpaavalle funktionaalille. Muotoillaan tämä formaaliksi lauseeksi. Tällöin tarvitaan seuraavaa osittaisderivaattoihin liittyvää rajoitetta.

$$|\frac{\partial F}{\partial s}(x, s, \xi)|, |\nabla_\xi F(x, s, \xi)| \leq C(1 + |s|^p + |\xi|^p), \tag{6}$$

missä $C > 0$.

Tätä ehtoa soveltamalla saadaan seuraava lause, joka kytkee funktionaalin minimoivan funktion ja Euler-Lagrangen yhtälön toisiinsa

Lause 58. *Merkitään $I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja $g \in W^{1,p}(\Omega)$, missä $1 < p < \infty$. Olkoon $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega)$ siten, että $I(u_0) \leq I(u)$ kaikilla $u \in W_g^{1,p}(\Omega)$. Jos $I(u) \in \mathbb{R}$ kaikilla $u \in W_g^{1,p}(\Omega)$, ja jos on olemassa vakio $C > 0$ siten, että osittaisderivaatat $\frac{\partial F}{\partial s}$ ja $\nabla_\xi F$ toteuttavat ehdon* (6), *niin u_0 toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön heikossa muodossa.*

Todistus. Olkoon $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega)$ funktio, joka minimoi variaatiointegraalin $I(u)$ joukossa $W_g^{1,p}(\Omega)$. Olkoon $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ mielivaltainen. Otetaan käyttöön merkintä $u_t = u_0 + t\psi$, missä $t \in \mathbb{R}$. Osoitetaan seuraavaksi, että $u_t \in W_g^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Tämä on avaruuden $W_g^{1,p}(\Omega)$ määritelmän nojalla yhtäpitävää ehdon $u_t - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$ kanssa. Koska $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega)$, niin $u_0 - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Lisäksi $t\psi \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Tästä seuraa, että $u_t - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$, sillä joukko $W_0^{1,p}(\Omega)$ on avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ suljettu aliavaruus. Niinpä $u_t \in W_g^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Koska u_0 minimoi funktionaalin $I(u)$ joukossa $W_g^{1,p}(\Omega)$, epäyhtälö $I(u_0) \leq I(u_t)$ on voimassa kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Muodostetaan seuraavaksi funktio $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(t) = I(u_t)$. Edellisen epäyhtälön nojalla funktio $h(t)$ saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä

$t = 0$. Siten pisteen $t = 0$ on oltava derivaattafunktion $h'(t)$ nollakohta, mistä saadaan

$$\begin{aligned} 0 = h'(0) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega F\left(x, u_0(x) + t\psi(x), Du_0 + t(D\psi(x)\right)\, dx \quad |_{t=0} \\ &= \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial s}(x, u_0, Du_0)(\psi(x)) + \nabla_\xi F(x, u_0, Du_0) D\psi(x)\, dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Tämä todistaa väitteen. Viimeinen yhtäsuuruus seuraa derivoinnin ketjusäännöstä ja dominoidun konvergenssin lauseesta, jonka nojalla derivoinnin ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa. Dominoidun konvergenssin lausetta käsitellään kirjassa [**13**]. Lauseen soveltaminen edellyttää, että erotusosamäärällä $\frac{h(t)-h(0)}{t}$ on yhteinen integroituva majorantti kaikilla riittävän pienillä $t \in \mathbb{R}$. Tämä seuraa kasvuehdosta (6). Yhtälöiden (7) voimassaolo perustellaan tarkemmin luentomonisteessa [**2**, s. 58]. □

Huomautus 59. Kasvuehtoa (6) tarvittiin todistuksessa vain, jotta dominoidun konvergenssin lausetta voitiin soveltaa. Kasvuehdon toteutuminen ei siis ole välttämätöntä, mutta se on yleispätevä perustelu dominoidun konvergenssin lauseen soveltamiselle. Dominoidun konvergenssin lauseen käyttö voidaan kuitenkin perustella myös muilla tavoin, joten lausetta 58 voidaan soveltaa, vaikka kasvuehdon toteutuminen ei olisikaan tiedossa. Seuraavassa luvussa vastaava lause todistetaan energiafunktionaaleille $J_\epsilon(u)$. Tällöin kasvuehto (6) ei edes toteudu, mutta erotusosamäärälle $\frac{h(t)-h(0)}{t}$ löydetään toisenlaisella päättelyllä yhteinen integroituva majorantti kaikilla pienillä $t \in \mathbb{R}$. Tämä mahdollistaa dominoidun konvergenssin lauseen soveltamisen, vaikka kasvuehto (6) ei toteudukaan.

Huomautus 60. Lauseen 58 nojalla voidaan ainoastaan todeta, että funktio toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön heikon muodon, jos se minimoi variaatiointegraalin J joukossa K. Käänteinen päättely ei sen sijaan aina päde. Funktio voi toteuttaa variaatiointegraalia vastaavan Euler-Lagrangen yhtälön, vaikka se ei minimoisikaan kyseistä variaatiointegraalia. Euler-Lagrangen yhtälön heikon muodon toteuttavia funktioita kutsutaan yleisesti sitä vastaavan variaatiointegraalin ekstremaaleiksi. Minimoijat ovat aina myös ekstremaaleja, mutta kaikki ekstremaalit eivät minimoi niitä vastaavia variaatiointegraaleja. Tässä mielessä variaatiointegraalin ekstremaalit vastaavat reaalifunktioiden kriittisiä pisteitä, sillä derivaatan häviaminen on välttämäton mutta ei riittävä ehto sille, että funktio saavuttaa minimiarvonsa.

3. Energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimointiongelma

3.1. Ratkaisun olemassaolo. Tässä alakappaleessa todistetaan, että tutkimuksen kohteena olevalla minimointiongelmalla on ratkaisu. Kuten aiemmin on jo todettu, kyseinen variaatio-ongelma keskittyy funktionaalien

$$J_\epsilon(u) = \int_\Omega \epsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u^2)^2\,dx \tag{8}$$

muodostamaan funktionaaliperheeseen $\big(J_\epsilon(u)\big)_{\epsilon>0}$, johon kuuluvia funktionaaleja minimoidaan joukossa $K_m = \Big\{u \in W^{1,2} : \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx = m\Big\}$, missä $m \in (-1,1)$, ja Ω on rajoitettu alue. Funktionaalin minimoivaa alkiota etsitään siis sellaisista Sobolev-funktioista, joiden keskiarvo alueessa Ω on jokin kiinnitetty luku $m \in (-1,1)$. Joukko $K_m \subset W^{1,2}(\Omega)$ on heikosti suljettu kaikilla $m \in (-1,1)$, sillä se on refleksiivisen Banach-avaruuden suljettu ja konveksi aliavaruus. On syytä huomata, että funktionaali $J_\epsilon(u)$ riippuu parametrista $\epsilon > 0$, mistä seuraa, että myös funktionaalin minimoiva funktio riippuu luvusta ϵ. Parametrin ϵ oletetaan olevan pieni luku, mutta tätä "pienuutta" ei tarvitse työn tulosten kannalta sen tarkemmin määritellä. Tutkielman päätulokset käsittelevät kuitenkin minimointiongelman ratkaisua ehdolla $\epsilon \to 0$.

Lause 61. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alue siten, että $\partial\Omega$ on C^1-pinta. Tällöin funktionaalilla $J_\epsilon(u)$ on minimoija joukossa K_m. Toisin sanoen* $\inf_{u\in K_m} J_\epsilon(u) < \infty$, *ja on olemassa $u_0 \in K_m$ siten, että $J_\epsilon(u_0) = \inf_{u\in K_m} J_\epsilon(u)$.*

Todistus. Aloitetaan ratkaisun olemassaolon todistaminen osoittamalla joitakin funktionaalin $J_\epsilon(u)$ ominaisuuksia. Osoitetaan ensin, että $J_\epsilon(u)$ toteuttaa lauseessa 55 esitetyn kasvuehdon.

Huomataan, että

$$F(x,s,\xi) = \epsilon|\xi|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-s^2)^2 \geq \epsilon|\xi|^2 - 0 = \alpha|\xi|^2 - \beta. \tag{9}$$

Siis kasvuehto $F(x,s,\xi) \geq \alpha|\xi|^2 - \beta$ pätee, kun valitaan $\alpha = \epsilon$ ja $\beta = 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että funktionaali $J_\epsilon(u)$ on koersiivinen. Näin on mikäli ehdosta $\|u\|_{1,2} \to \infty$ seuraa $J_\epsilon(u) \to \infty$. $W^{1,2}$-normin määritelmän nojalla $\|u\|_{1,2}$ kasvaa rajatta jos ja vain jos $\|u\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ tai $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Oletetaan ensin, että $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Koska ehto (9) toteutuu, saadaan funktionaalin $J_\epsilon(u)$ arvolle arvio

$$J_\epsilon(u) \geq \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta|\Omega| = \epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2\Omega}.$$

Tämän arvion nojalla $J_\epsilon(u) \to \infty$ kun $\|\nabla u\|_{L^2\Omega} \to \infty$.

Oletetaan sitten, että $\|u\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Nyt Poincarén epäyhtälön soveltaminen antaa arvion

$$J_\epsilon(u) \geq \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \epsilon \left(\frac{1}{C} \|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 = \frac{\epsilon}{C^2} \|u - u_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)},$$

missä C on jokin positiivinen vakio. Koska funktionaalia minimoidaan joukossa K_m, missä $m \in (-1, 1)$, niin on oltava $-1 < u_\Omega < 1$. Niinpä $\|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ kun $\|u\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Tästä seuraa myös, että $J_\epsilon(u) \to \infty$ kun $\|u\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Näiden päättelyiden nojalla funktionaali $J_\epsilon(u)$ on koersiivinen.

Todetaan lisäksi, että kuvaus $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ on konveksi kaikilla $(x, s) \in (\Omega \times \mathbb{R})$. Tämä nähdään helposti, sillä kuvaus on muotoa $h \colon \xi \mapsto \epsilon|\xi|^2 + c$, missä c on vakio. Tämän funktion toiselle derivaatalle pätee $D^2 h(\xi) = 2\epsilon I$, missä I on identtinen matriisi. Niinpä $D^2 h(\xi)$ on positiivisesti semidefiniitti matriisi, joten konveksisuus seuraa lemmasta 5. Koska funtionaali $J_\epsilon(u)$ toteuttaa ehdon (9) ja kuvaus $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ on konveksi, seuraa Lauseesta 55, että $J_\epsilon(u)$ on heikosti alhaalta puolijatkuva $W^{1,2}(\Omega)$:ssa.

Seuraavaksi todistetaan, että minimoivan alkion olemassaolo seuraa edellä osoitetuista funktionaalin $J_\epsilon(u)$ ominaisuuksista. Todistus on hyvin samankaltainen kuin Juutisen luentomonisteessa [**2**, s. 50-51] esitetty todistus. Lähemmin tarkasteltuna todistukset kuitenkin eroavat toisistaan joltain osin, sillä Juutisen monisteessa funktionaaleja minimoidaan eri avaruudessa kuin tässä tutkielmassa.

Todetaan ensin, että $\inf_{u \in K_m} J_\epsilon(u) \leq J_\epsilon(m) = \int_\Omega \epsilon|0|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1 - m^2)^2 \, dx < \int_\Omega \frac{1}{\epsilon} < \infty$. Valitaan sitten jono funktioita $u_k \in K_m$ siten, että $J_\epsilon(u_k) \to \inf_{u \in K_m} J_\epsilon(u)$. Tällaisen funktiojonon olemassaolo seuraa suoraan infimumin määritelmästä. Funktionaalin $J_\epsilon(u)$ koersiivisuudesta voidaan päätellä, että on olemassa positiivinen vakio M siten, että $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq M$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tämä nähdään helposti antiteesin avulla: Oletetaan, että $\|u_k\|_{L^2(\Omega)}$ ei olekaan rajoitettu. Tällöin löytyy jonon u_k osajono u_{k_n} siten, että $\|u_{k_n}\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, että $J_\epsilon(u_{k_n}) \to \infty$, sillä funktionaali $J_\epsilon(u)$ on koersiivinen. Tämä on ristiriita, sillä $J_\epsilon(u_{k_n}) \to \inf_{u \in K_m} J_\epsilon(u)$, ja aiemmin todettiin, että $\inf_{u \in K} J_\epsilon(u) < \infty$. Niinpä jonon u_k täytyy olla rajoitettu.

Koska $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq M < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joukko $\overline{B(0, M)} = \{ v \in K_m : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq M \}$ on rajoitettu. Suljetut pallot ovat konvekseja kaikissa normiavaruuksissa, joten joukko $\overline{B(0, M)}$ on suljettu, rajoitettu sekä konveksi. Nyt lauseesta 29 seuraa, että kyseinen joukko on heikosti jonokompakti, sillä joukko K_m on refleksiivisen avaruuden suljettuna aliavaruutena refleksiivinen. Koska $\overline{B(0, M)}$ on heikosti jonokompakti, on olemassa jonon u_k osajono u_{k_n} ja alkio $u_0 \in K_m \cap \overline{B(0, M)}$ siten, että $u_{k_n} \rightharpoonup u_0$. Aiemmin on todettu, että J_ϵ on heikosti alhaalta puolijatkuva, joten täman nojalla saadaan

$$J_\epsilon(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J_\epsilon(u_{k_n}) = \inf_{u\in K_m} J_\epsilon(u).$$

Nyt on osoitettu, että on olemassa funktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimoiva alkio $u_0 \in K_m$. Tällöin siis ehto $J_\epsilon(u_0) \leq J_\epsilon(u)$ pätee kaikille funktioille $u \in K_m$. □

3.2. Euler-Lagrangen yhtälön heikko muoto. Energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimointiongelma on tyypillinen variaatiolaskennan ongelma, sillä tavoitteena on minimoida variaatiointegraalia halutussa joukossa. Edellisessä kappaleessa todistettiin, että funktionaalilla $J_\epsilon(u)$ on minimoija joukoissa

$$K_m = \left\{ u \in W^{1,2} : \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx = m \in (-1,1) \right\}.$$

Minimoijasta ei kuitenkaan tiedetä olemassaolon lisäksi vielä mitään muuta, joten seuraavaksi on luonnollista tutkia tarkemmin funktionaalia $J_\epsilon(u)$ sekä sen minimoijia. Ensimmäinen askel on muodostaa variaatio-ongelmaa vastaava Euler-Lagrangen yhtälö. Lauseen 58 nojalla funktionaalin avaruudessa $W_g^{1,p}(\Omega)$ minimoiva alkio toteuttaa Euler-Lagrangen heikon muodon. Nyt funktionaalia minimoidaan kuitenkin joukossa K_m. Koska $K_m \subset W^{1,2}(\Omega)$ kaikilla $m \in (-1,1)$, voidaan lausetta 58 soveltaa todistuksineen tähänkin ongelmaan, kunhan sitä muokataan hieman. Näin variaatio-ongelman ratkaisulle saadaan seuraava välttämätön ehto.

Lause 62. *Olkoon $u_0 \in K_m$ funktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimoija. Tällöin u_0 toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön heikossa muodossa, eli $u = u_0$ toteuttaa ehdon*

$$\int_\Omega \epsilon \nabla u \cdot \nabla\psi(x)\,dx + \int_\Omega \left(\frac{4}{\epsilon}(u^3-u) - \lambda\right)\psi(x)\,dx = 0. \tag{10}$$

kaikilla $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Euler-Lagrangen yhtälön heikon muodon lausekkeessa esiintyvä luku λ on minimoijasta riippuva reaaliluku, jota kutsutaan Lagrangen kertoimeksi.

Todistus. Otetaan käyttöön merkintä $\bar\psi = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi(x)\,dx$. $\bar\psi$ on siis funktion ψ keskiarvo alueessa Ω. Funktion u keskiarvolle alueessa Ω käytetään tässä tutkielmassa myös merkintää u_Ω. Testifunktioiden $\psi(x)$ keskiarvolle on valittu kuitenkin erilainen merkintätapa, koska sitä käytetään yleisemmin kirjallisuudessa testifunktioista puhuttaessa. Testifunktiot määritellään nyt hieman eri tavalla kuin yleisemmässä Euler-Lagrangen yhtälöön liittyvässä määritelmässä 56, sillä funktionaalia minimoidaan nyt avaruudessa $K_m \in W^{1,2}(\Omega)$ avaruuden $W_g^{1,p}$ sijaan. Niinpä testifunktiolle asetettavat ehdot liittyvät nyt niiden keskiarvoon eivätkä reuna-arvoihin. Testifunktiot ovat muotoa $\tilde\psi(x) = \psi(x) - \bar\psi$, missä $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$. Tällöin testifunktioiden $\tilde\psi(x)$ keskiarvo alueessa Ω on 0.

Todetaan seuraavaksi, että väite seuraa aiemmin esitetystä lauseen 58 todistuksesta, vaikka testifunktiot ovatkin nyt eri muotoa. Olkoon $u_0 \in K_m$ variaatio-ongelman ratkaisu. Merkitään $u_t = u_0 + t\tilde{\psi}(x)$, missä $t \in \mathbb{R}$ ja määritellään funktio $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(t) = J_\epsilon(u_t)$. Koska selvästi $u_t \in K_m$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ väite voidaan todistaa lauseen 58 todistuksessa käytetyllä päättelyllä jos erotusosamäärille $\frac{h(t)-h(0)}{t}$ löydetään yhteinen integroituva majorantti kaikilla riittävän pienillä $t \in \mathbb{R}$. Lauseen 58 todistuksessa majorantin olemassaolo perustellaan kasvuehdon (6) toteutumisella. Energiafunktionaalit $J_\epsilon(u)$ eivät kuitenkaan toteuta kyseistä kasvuehtoa, joten yhteisen integroituvan majorantin olemassaolo on perusteltava muilla tavoin. Seuraavaksi esitetään perustelu tällaisen majorantin olemassaololle.

Otetaan selkeyden vuoksi käyttöön merkintä $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \bar{\psi}$. Kun erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitetaan funktionaalin $J_\epsilon(u)$ lauseke, se saadaan muotoon

$$\frac{h(t)-h(0)}{t} = \frac{F(x, u_0 + t\tilde{\psi}(x), Du_0 + tD\tilde{\psi}(x)) - F(x, u_0, Du_0)}{t}$$

$$= \frac{\epsilon|\nabla u_0 + t\nabla\tilde{\psi}(x)|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-(u_0+t\tilde{\psi}(x))^2)^2 - \left(\epsilon|\nabla u_0|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u_0^2)^2\right)}{t}$$

$$= \frac{\frac{1}{\epsilon}\left(t\tilde{\psi}(x)(-t^2\tilde{\psi}^2(x) - 2tu_0\tilde{\psi}(x) - 2u_0^2 + 2)(-t\tilde{\psi}(x) - 2u_0)\right)}{t}$$

$$+ \frac{\epsilon\left(t(t\nabla\tilde{\psi}^2(x) + 2\nabla u_0 \nabla\tilde{\psi}(x))\right)}{t}$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\tilde{\psi}(x)(-t^2\tilde{\psi}^2(x) - 2tu_0\tilde{\psi}(x) - 2u_0^2 + 2)(-t\tilde{\psi}(x) - 2u_0) + \epsilon\nabla\tilde{\psi}(x)(t\nabla\tilde{\psi}(x) + 2\nabla u_0).$$

Yllä oleva lauseke näyttää varsin monimutkaiselta. Majorantin täytyy kuitenkin olla olemassa vain, kun parametrin t arvo on hyvin lähellä nollaa, jolloin riittää tarkastella termejä $-2u_0^2 \cdot (-2u_0) = 4u_0^3$, $2 \cdot (-2u_0) = -4u_0$ ja $2\nabla u_0$. Nämä ovat nimittäin lausekkeen ainoat termit, jotka eivät riipu luvusta t. Funktio u_0 on selvästi integroituva ja rajoitettu, sillä oletuksen nojalla $u_0 \in K_m$, jolloin siis $\int_\Omega u_0\,dx = m$. Lisäksi termin ∇u_0 täytyy olla rajoitettu, sillä $J_\epsilon(u_0) < \infty$. Niinpä integroituvan majorantin etsiminen palautuu funktion u_0^3 majoroimiseen. Kyseinen funktio voidaan majoroida esimerkiksi käyttämällä funktiota u_0^4 sekä vakiofunktiota 1. Nyt täytyy siis osoittaa, että u_0^4 on integroituva. Tämän osoittamiseen tarvitaan Youngin epäyhtälöä 67, johon perehdytään tarkemmin liitteessä A.

Koska u_0 minimoi funktionaalin J, pätee kaikilla $u \in K_m$ seuraava epäyhtälö:

$$\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (u_0^2-1)^2 dx \le J_\epsilon(u_0) \le J_\epsilon(u).$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa siitä, että variaatiointegraalin molemmat termit saavat vain positiivisia arvoja. Kun funktioksi valitaan funktio $u = m$, saadaan tämän epäyhtälön avulla arvio:

$$\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (u_0^2-1)^2\,dx \le J_\epsilon(m) = \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (1-m^2)^2\,dx \le \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega 1^2\,dx = \frac{1}{\epsilon}\cdot|\Omega|. \tag{11}$$

Tästä seuraa edelleen

$$\int_\Omega (u_0^2-1)^2 dx \le |\Omega|.$$

Erityisesti $\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (u_0^2-1)^2\,dx$ on rajoitettu.

Youngin epäyhtälöstä saadaan puolestaan arvio

$$2ab = 2\cdot\frac{a}{2}\cdot 2b \le 2\cdot\left(\frac{(\frac{a}{2})^2}{2}+\frac{(2b)^2}{2}\right) = \frac{a^2}{4}+4b^2$$

Nyt valitsemalla $a = u_0^2$ ja $b = 1$ saadaan epäyhtälö

$$2u_0^2 \le \frac{u_0^4}{4}+4.$$

Kun tätä päättelyä sovelletaan aiemmin tehtyyn arvioon (11), saadaan epäyhtälö

$$\int_\Omega \frac{3u_0^4}{4} - 3\,dx = \int_\Omega u_0^4 - \left(\frac{u_0^4}{4}+4\right)+1\,dx \le \int_\Omega u_0^4 - 2u_0^2 + 1\,dx = \int_\Omega (u_0^2-1)^2\,dx \le |\Omega|.$$

Yllä olevan päättelyn nojalla u_0^4 on integroituva, mikä puolestaan osoittaa aiemman päättelyn nojalla, että erotusosamäärille $\frac{h(t)-h(0)}{h(t)}$ löytyy integroituva majorantti, kun t on riittävän pieni. Nyt on todistettu, että energiafunktionaalin minimointiongelman ratkaisu toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön heikon muodon, joka on esitetty Määritelmässä 56. Osoitetaan vielä, että tämä Euler-Lagrangen yhtälön heikko muoto on yhtälö (10)

Sijoitetaan $F(x,s,\xi) = \epsilon|\xi|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-s^2)^2$ aiemmin johdettuun Euler-Lagrangen yhtälöön. Yhtälössä esiintyviksi osittaisderivaatoiksi saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{\epsilon}(4s^3 - 4s) = \frac{4}{\epsilon}(s^3 - s) \qquad \text{ja} \qquad \nabla_\xi F(x,s,\xi) = 2\epsilon\xi.$$

Niinpä funktionaalia $J_\epsilon(u)$ vastaavan Euler-Lagrangen yhtälön heikko muoto on.

$$\int_\Omega 2\epsilon\nabla u \cdot \nabla(\psi(x) - \bar{\psi}) + \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)(\psi(x) - \bar{\psi})\,dx = 0.$$

joka on siis totta kaikilla $\psi \in C^\infty(\Omega)$ jos u on variaatiointegraalin $J_\epsilon(u)$ ekstremaali. Yhtälön vasenta puolta voidaan vielä hieman sieventää. Integraalin lineaarisuuden nojalla pätee

$$\int_\Omega 2\epsilon\nabla u \cdot \nabla(\psi(x) - \bar{\psi})\,dx + \int_\Omega \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)(\psi(x) - \bar{\psi})\,dx = 0.$$

Funktion derivaatta ei muutu, mikäli funktiosta vähennetään jokin vakio. Siten $\nabla\psi(x) = \nabla(\psi(x) - \bar{\psi})$ kaikilla $\psi(x) \in C^\infty$. Niinpä Euler-Lagrangen yhtälön heikko muoto saadaan muotoon

$$\int_\Omega 2\epsilon\nabla u \cdot \nabla\psi(x)\,dx + \int_\Omega \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)\psi(x)\,dx - \bar{\psi}\int_\Omega \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)\,dx = 0.$$

Nyt yhtälössa on sellaisia termejä, jotka eivät riipu lainkaan testifunktiosta $\psi(x)$. Merkitään näitä termejä muuttujalla λ. Testifunktion valinnasta riippumatonta muuttujaa λ kutsutaan Lagrangen kertoimeksi ja sen arvo riippuu ainoastaan funktiosta u. Lagrangen kertoimelle saadaan nyt lauseke

$$\lambda = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)\,dx$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\bar{\psi}\int_\Omega \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)\,dx = \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_\Omega \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)\,dx\right)$$

$$= \left(\int_\Omega \psi(x)\,dx\right) \cdot \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u)\,dx\right) = \lambda\int_\Omega \psi(x)\,dx = \int_\Omega \lambda\psi(x)\,dx.$$

Tämän avulla Euler-Lagrangen yhtälön heikko muoto saadaan voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_\Omega 2\epsilon \nabla u \cdot \nabla \psi(x)\, dx + \int_\Omega \left(\frac{4}{\epsilon}(u^3 - u) - \lambda \right) \psi(x)\, dx = 0.$$

□

3.3. Euler-Lagrangen yhtälön vahva muoto. Tässä kappaleessa muotoillaan energiafunktionaalin minimointiongelmaa vastaavan Euler-Lagrangen yhtälön vahva muoto. Näin saadaan lisää ehtoja, jotka minimointiongelman ratkaisu välttämättä toteuttaa. Ennen Euler-Lagrangen yhtälön vahvaan muotoon perehtymistä on todettava, että van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin minimoivalle funktiolle $u_0 \in K_m(\Omega)$ pätee itseasiassa $u_0 \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.Tätä säännöllisyysteoriaan liittyvää tulosta ei todisteta tässä tutkielmassa. Tulos voidaan perusteella samalla tavalla kuin kirjassa [**12**, s. 316]. Tarkkaan ottaen minimoijan säännöllisyys ei seuraa tästä kirjassa [**12**] esitetystä tuloksesta, mutta todistus on aivan samanlainen kuin kyseisen lauseen todistus.

Lause 63. *Olkoon Ω avoin joukko siten, että $\partial\Omega$ on C^2-pinta. Olkoon lisäksi $u_0 \in K_m \subset W^{1,2}(\Omega)$ energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimointiongelman ratkaisu. Tällöin $u = u_0$ toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön vahvassa muodossa, eli*

$$\begin{cases} -2\epsilon\Delta u + \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u) - \lambda = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \Omega. \\ \\ \nabla u \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Todistus. Aiemmin on todistettu, että variaatiointegraalin minimoija toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön heikossa muodossa. Muokataan seuraavaksi Euler-Lagrangen yhtälön heikkoa muotoa (10). Huomataan ensin, että tulon derivointisäännön nojalla pätee

$$\operatorname{div}(\nabla u \cdot \psi(x)) = \Delta u \cdot \psi(x) + \nabla u \cdot \nabla \psi(x).$$

Tämän tuloksen soveltaminen yhdessä divergenssilauseen kanssa antaa yhtälön

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u \cdot \psi(x))\, dx = \int_\Omega \Delta u \cdot \psi(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) \psi(x)\, dS.$$

Tästä seuraa, että

$$2\epsilon \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi(x)\, dx = 2\epsilon \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) \psi(x)\, dS - 2\epsilon \int_\Omega \Delta u \cdot \psi(x)\, dx.$$

Kun tämä sijoitetaan Euler-Lagrangen yhtälön heikkoon muotoon, saadaan yhtälö

$$\int_\Omega \left(-2\epsilon\Delta u + \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u) - \lambda \right) \psi(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} 2\epsilon (\nabla u \cdot \vec{n}) \psi(x)\, dS = 0, \tag{13}$$

jonka funktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimoija toteuttaa kaikilla $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Valitaan nyt $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tällöin

$$\int_{\partial\Omega} 2\epsilon(\nabla u \cdot \vec{n})\psi(x)\, dS = 0,$$

jolloin yhtälöstä (13) seuraa variaatiolaskennan peruslauseen nojalla, että

$$-2\epsilon\Delta u + \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u) - \lambda = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \Omega.$$

Nyt minimoija u_0 on differentiaaliyhtälön $-2\epsilon\Delta u + \frac{4}{\epsilon}(u^3 - u) - \lambda = 0$ ratkaisu. Niinpä yhtälö (13) yksinkertaistuu muotoon

$$2\epsilon \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n})\psi(x)\, dS = 0.$$

Variaatiolaskennan peruslauseen nojalla tämä on totta kaikilla $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$ jos ja vain jos $\nabla u \cdot \vec{n} = 0$ kaikilla $x \in \partial\Omega$. Nyt on osoitettu, että energiafunktionaalin minimoija u_0 toteuttaa väitteessä esitetyt ehdot. $\square$

4. Minimointiongelman ratkaisut

Edellisessä kappaleessa osoitettiin, että van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalien perheeseen kuuluvilla funktionaaleilla $J_\epsilon(u)$ on minimoiva alkio joukossa

$$K_m(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u\, dx = m\},$$

missä $m \in (-1, 1)$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu alue. Seuraavaksi onkin luontevaa siirtyä pohtimaan, millaiset funktiot antavat energiafunktionaaleille pieniä arvoja. Myös minimiarvojen suuruutta olisi tarpeellista pystyä arvioimaan.

Tässä kappaleessa pureudutaan tarkemmin variaatio-ongelman ratkaisuiksi kelpaaviin funktioihin. Vaikka minimoijafunktioiden lausekkeita ei voidakaan esittää eksplisiittisesti yleisessä tapauksessa, niiden voidaan osoittaa toteuttavan muitakin mielenkiintoisia ehtoja kuin edellisessä kappaleessa esitetyt Euler-Lagrangen yhtälöt. Seuraava lause on tämän tutkielman päätulos. Lause asettaa ehtoja funktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimoijille, kun $\epsilon \to 0$. Näiden ehtojen valossa minimointiongelman ratkaisufunktioista tiedetään jo paljon enemmän kuin edellisessä luvussa esitettyjen Euler-Lagrangen yhtälöiden perusteella tiedettiin.

Lause 64. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue siten, että $\partial\Omega$ on C^1-pinta. Tällöin kaikille $\epsilon > 0$ on voimassa*

$$\inf_{u \in K_m} \left(\int_\Omega \epsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1 - u^2)^2\, dx \right) \leq C$$

jollakin $C \in \mathbb{R}$.

Erityisesti, jos $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ on perhe siten, että u_ϵ on funktionaalia $J_\epsilon(u)$ vastaavan minimointiongelman ratkaisu, niin seuraavat ehdot pätevät

i) $\lim_{\epsilon \to 0} |u_\epsilon(x)| \to 1$ $L^1(\Omega)-$*normin mielessä.*

ii) *Olkoon $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^\infty$ jono siten, että $\epsilon \to 0$ kun $k \to \infty$. Tällöin on olemassa jonon $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^\infty$ $L^1(\Omega)-$normin mielessä suppeneva osajono $(u_{\epsilon_{k_n}})_{n=1}^\infty \to u_0(x)$ siten, että*

$$u_0(x) = \chi_E - \chi_{\Omega \setminus E}$$

missä $E \subset \Omega$ on mitallinen joukko.

Lauseen todistus on tämän tutkielman keskeisin tulos. Todistus on varsin pitkä ja syvällinen, joten se esitetään omassa kappaleessaan hieman myöhemmin. Perehdytään sitä ennen hieman yksinkertaisempaan erikoistapaukseen, joka toimii hyvänä johdatteluna Lauseen 64 todistukseen.

4.1. Johdattelua Lauseen 64 todistukseen. Tässä kappaleessa tarkastellaan erästä energiafunktionaalin minimointiongelman erikoistapausta. Oletetaan, että

$\Omega = (-1,1)$ ja $K = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega u\,dx = 0\}$. Pian osoitetaan, että tämän variaatio-ongelman minimiarvolle löydetään yksiulotteisessa tapauksessa luvusta ϵ riippumaton yläraja. Tämän jälkeen on helpompi syventyä yleiseen tapaukseen, johon sovelletaan samankaltaisia menetelmiä hieman monimutkaisemmin.

Yritetään seuraavaksi löytää funktio, joka kuuluu joukkoon K sekä antaa energiafunktionaaleja vastaaville variaatiointegraaleille mahdollisimman pieniä arvoja. Päättelyn tavoitteena ei ole ratkaista minimointiongelmaa vaan pohtia, mitä ominaisuuksia ratkaisuksi kelpaavalla funktiolla täytyy olla. Näin minimiarvolle saadaan myös yläraja.

Ensimmäinen ehdokas energiafunktionaaleille pieniä arvoja antavaksi funktioksi voisi olla funktio

$$u^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in (-1,0] \\ -1, & \text{kun } x \in (0,1). \end{cases}$$

Funktiolla on epäjatkuvuuskohta origossa, mutta muualla selvästi

$$|\nabla u^*|^2 = (1-u^2)^2 = 0.$$

Funktio $u^*(x)$ ei kuitenkaan ole $W^{1,2}\left((-1,1)\right)$-funktio. Osoitetaan tämä antiteesin avulla:

Olkoon $\psi(x) \in C_0^\infty((-1,1))$. Tällöin

$$\int_{(-1,1)} \psi'(x)u^*(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-1)\,\cdot\,\psi'(x)\,dx + \int_0^1 1\,\cdot\,\psi'(x)\,dx$$

$$= -\psi(0) + \psi(-1) + \psi(1) - \psi(0) = -2\psi(0).$$

Koska oletettiin, että $u^* \in W^{1,2}((-1,1))$, niin Lauseen 42 nojalla on olemassa funktio $v \in L^p((-1,1))$, joka toteuttaa ehdon

$$\int_{(-1,1)} \psi(x)v(x)\,dx = -\int_{(-1,1)} \psi'(x)u^*(x)dx = 2\psi(0)$$

kaikilla $\psi(x) \in C_0^\infty((-1,1))$. Tällöin funktio v on funktion u^* Sobolev-gradientti välillä $(-1,1)$.

Konstruoidaan seuraavaksi jono $\psi_n(x) \to \psi(x)$ sileitä funktioita siten, että
$0 \le \psi_n(x) \le 1$ kaikilla $x \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{N}$ sekä $\psi_n(x) \to 0$ kaikilla $x \neq 0$ kun $n \to \infty$.

Olkoon lisäksi $\psi_n(0) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$2 = 2\psi_n(0) = \int_{-1}^{1} \psi_n(x)v(x)\,dx$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriita, sillä aiemmin oletettiin, että $\psi_n(x) \to 0$ kaikilla $x \neq 0$ kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \psi_n(x)v(x)\,dx = 0 \neq 2.$$

Niinpä $u^*(x)$ ei ole $W^{1,2}((-1,1))-$funktio.

Pyritään nyt löytämään $W^{1,2}((-1,1))-$funktio, joka yhtyy origon ulkopuolella funktioon u^*. Asetetaan $\alpha < 1$ ja konstruoidaan funktio v_α seuraavasti:

Olkoon $v_\alpha\colon (-1,1) \to (-1,1)$,

$$v_\alpha(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x \in (-1,-\alpha] \\ \frac{x}{\alpha}, & \text{kun } x \in (-\alpha,\alpha] \\ 1, & \text{kun } x \in (\alpha,1). \end{cases}$$

Osoitetaan ensin, että $v_\alpha(x) \in K$. Funktio v_α on selvästi pariton funktio, joten $\int_{-1}^{1} v_\alpha dx = 0$. Riittää siis osoittaa, että $v_\alpha \in W^{1,2}((-1,1))$.

Osoitetaan suoralla laskulla, että funktio v_α on $W^{1,2}((-1,1))-$funktio, jonka Sobolev-derivaatta on

$$v'_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in (-1,-\alpha] \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{kun } x \in (-\alpha,\alpha] \\ 0, & \text{kun } x \in (\alpha,1). \end{cases}$$

Havaitaan ensin, että $v'_\alpha(x)$ on $L^2((-1,1))-$funktio. Olkoon $\psi(x) \in C_0^\infty((-1,1))$. Tällöin on voimassa

$$\int_{(-1,1)} v_\alpha(x)\psi'(x)\,dx = \int_{-1}^{-\alpha} -\psi'(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x}{\alpha}\psi'(x)\,dx + \int_{\alpha}^{1} \psi'(x)\,dx$$

$$= -\psi(-\alpha) + \psi(-1) + \left[\frac{x}{\alpha}\psi(x)\right]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi(x)\cdot\frac{1}{\alpha}\,dx + \psi(1) - \psi(\alpha)$$

$$= -\psi(-\alpha) + \psi(-1) + \psi(\alpha) - (-\psi(-\alpha)) - \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi(x) \cdot \frac{1}{\alpha}\, dx + \psi(1) - \psi(\alpha)$$

$$= -\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi(x) \cdot \frac{1}{\alpha}\, dx + \underbrace{\psi(-1)}_{=0} + \underbrace{\psi(1)}_{=0} = -\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi(x) \cdot \frac{1}{\alpha}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{-\alpha} 0 \cdot \psi(x)\, dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\alpha}\psi(x)\, dx + \int_{\alpha}^{1} 0 \cdot \psi(x)\, dx = -\int_{(-1,1)} v'_\alpha(x)\psi(x)\, dx.$$

Niinpä $v_\alpha(x)$ on Lauseen 42 nojalla $W^{1,2}((-1,1))-$funktio. Siispä $v_\alpha(x) \in K$.

Energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ lausekkeessa oleva parametri $\epsilon > 0$ asettaa funktionaalin termeille eräänlaiset painokertoimet. Tämän vuoksi myös variaatio-ongelman ratkaisu riippuu parametrin ϵ arvosta. Funktion $v_\alpha(x)$ avulla löydetään kuitenkin sellainen yläraja energiafunktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimiarvolle joukossa K, ettei se riipu parametrin ϵ valinnasta. Osoitetaan tämä valitsemalla $u = v_\alpha$. Huomataan ensin, että

$$J_\epsilon(v_\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \epsilon|\nabla v_\alpha|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1 - v_\alpha^2)^2 dx,$$

sillä $\epsilon|\nabla v_\alpha|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1 - v_\alpha^2)^2 = 0$, kun $x \in (-1, -\alpha] \cup (\alpha, 1)$.

Kun $x \in (-\alpha, \alpha)$, niin $|\nabla v_\alpha| = \frac{1}{\alpha}$. Siten

$$\int_{-1}^{1} \epsilon|\nabla v_\alpha|^2 dx = \epsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\alpha^2} = \epsilon \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2} = \frac{2\epsilon}{\alpha}.$$

Lasketaan myös variaatiointegraalin toisen termin arvo kun $u = v_\alpha$. Tulokseksi saadaan

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\epsilon}(1 - v_\alpha^2)^2 dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\alpha}^{\alpha} 1 - 2v_\alpha^2 + v_\alpha^4 dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\alpha}^{\alpha} 1 - \frac{2x^2}{\alpha^2} + \frac{x^4}{\alpha^4}$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \left[x - \frac{2x^3}{3\alpha^2} + \frac{x^5}{5\alpha^4} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{16\alpha}{15\epsilon}$$

Integraalin lineaarisuuden nojalla yllä olevista laskuista seuraa, että

$$J_\epsilon(v_\alpha) = \frac{2\epsilon}{\alpha} + \frac{16\alpha}{15\epsilon}.$$

Kun nyt valitaan $\alpha = \epsilon$, niin

$$J_\epsilon(v_\alpha) = \frac{2\epsilon}{\epsilon} + \frac{16\epsilon}{15\epsilon} = 3 + \frac{1}{15}.$$

Niinpä $C = 3 + \frac{1}{15}$ kelpaa ylärajaksi funktionaalin minimiarvolle kaikilla $\epsilon > 0$.

HUOMAUTUS 65. Edellä olevasta päättelystä ei seuraa, että funktio v_α olisi variaatio-ongelman ratkaisu. Ratkaisun täytyy kuitenkin minimoida funktionaalin $J_\epsilon(u)$ arvo joukossa K, joten funktionaalin minimiarvo voi päättelyn nojalla olla korkeintaan $3 + \frac{1}{15}$ kaikilla $\epsilon > 0$.

4.2. Lauseen 64 todistus. Palataan nyt Lauseeseen 64, ja esitetään sille todistus, jossa hyödynnetään myös edellisessä kappaleessa esiettyjä päättelyitä.

TODISTUS. Todistetaan aluksi Lauseen 64 ensimmäinen väite. Osoitetaan, että kaikilla $\epsilon > 0$ on voimassa

$$\inf_{u \in K_m} \left(\int_\Omega \epsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1 - u^2)^2 dx \right) \leq C$$

jollakin $C \in \mathbb{R}$.

Todistus perustuu samaan ideaan kuin edellisen kappaleen johdatteleva esimerkki. Olkoon $\omega \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektori, siis $|\omega| = 1$. Määritellään kaikille luvuille $t \in \mathbb{R}$ funktio $u_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$u_t(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x \cdot \omega \leq t - \epsilon \\ \frac{x \cdot \omega - t}{\epsilon}, & \text{kun } t - \epsilon < x \cdot \omega < t + \epsilon \\ 1, & \text{kun } x \cdot \omega \geq t + \epsilon, \end{cases}$$

missä $\epsilon > 0$.

Funktion $u_t(x)$ lausekkeesta nähdään helposti, että se on jatkuva kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Funktion voidaan osoittaa olevan myös $W^{1,2}(\Omega)-$funktio, jonka heikko derivaatta on

$$\nabla u_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \cdot \omega \leq t - \epsilon \\ \frac{\omega}{\epsilon}, & \text{kun } t - \epsilon < x \cdot \omega < t + \epsilon \\ 0, & \text{kun } x \cdot \omega \geq t + \epsilon. \end{cases}$$

Tämä osoitetaan samalla tavalla kuin edellisessä kappaleessa todistettiin, että $v_\alpha \in W^{1,2}(\Omega)$.

Koska Ω on rajoitettu joukko, niin kaikille pisteille $x \in \Omega$ pätee $x \cdot \omega \leq t - \epsilon$ kun $t \to \infty$.

Niinpä $u_t(x) = -1$ kaikilla $x \in \Omega$ kun $t \to \infty$. Tällöin myös $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_t(x)\,dx = -1$.

Vastaavasti päätellään, että kun $t \to -\infty$, niin $x \cdot \omega \geq t + \epsilon$ kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin $u_t(x) = 1$ kaikille $x \in \Omega$, joten $\frac{1}{\Omega}\int_\Omega u_t(x)\,dx = 1$.

Kuvaus $I(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_t(x)dx$ on selvästi jatkuva. Lisäksi on osoitettu, että $I(t) \to -1$ kun $t \to \infty$ ja $I(t) \to 1$ kun $t \to -\infty$. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen nojalla funktio $I(t)$ saavuttaa reaaliakselilla kaikki arvot väliltä $(-1, 1)$. Niinpä kaikille $m \in (-1, 1)$ on olemassa luku $t_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $I(t_0) = m$. Tämä tarkoittaa, että kaikille $m \in (-1, 1)$ on olemassa funktio u_{t_m}, jonka keskiarvo alueessa Ω on m. Koska $u_t \in W^{1,2}(\Omega)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin kaikille $m \in (-1, 1)$ on funktio $u_{t_m} \in K_m$.

Koska joukko Ω on rajoitettu, se sisältyy johonkin n-ulotteiseen kuutioon, siis $\Omega \subset Q_R = [-R, R]^n$ jollakin $R \in \mathbb{R}$. Tämän nojalla saadaan seuraava arvio liittyen joukon, jossa $\nabla u_t(x) \neq 0$, mittaan.

$$A = |\Omega \cap \{t - \epsilon \leq x \cdot \omega \leq t + \epsilon\}| \leq |Q_R \cap \{t - \epsilon \leq x \cdot \omega \leq t + \epsilon\}| \leq CR^{n-1}\epsilon \leq C_1\epsilon.$$

Arviota soveltamalla saadaan

$$\int_\Omega \epsilon|\nabla u_{t_m}(x)|^2\,dx = \int_A \epsilon \cdot \frac{w^2}{\epsilon^2}\,dx = \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon^2} \cdot |\Omega \cap \{t - \epsilon \leq x \cdot \omega \leq t + \epsilon\}| \leq \frac{\epsilon}{\epsilon^2} \cdot C_1\epsilon = C_1.$$

Nyt on osoitettu, että kaikille $m \in (-1, 1)$ on olemassa $W^{1,2}(\Omega)-$ funktio $u_{t_m}(x)$, jonka keskiarvo alueessa Ω on m, ja jolle integraali $\int_\Omega |\nabla u_{t_m}(x)|^2 dx$ on rajoitettu.

Kun tarkastellaan integraalia $\int_\Omega (1 - u_{t_m}^2)^2 dx$, huomataan, että integrandi on 0 kaikilla $x \in \Omega \setminus A$, sillä tällöin $u_t(x) = \pm 1$. Helposti nähdään myös, että $(1 - u_{t_m}^2)^2 \leq 1$ kaikilla $x \in A$. Niinpä saadaan arvio

$$\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (1 - u_{t_m}^2)^2\,dx \leq \frac{1}{\epsilon}\int_A 1\,dx = \frac{1}{\epsilon}|A| \leq C_1$$

kaikilla $\epsilon > 0$.

Näiden päättelyiden nojalla kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$\inf_{u \in K_m}\left(\int_\Omega \epsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1 - u^2)^2\,dx\right) \leq \int_\Omega \epsilon\nabla u_{t_m} + \frac{1}{\epsilon}(1 - u_{t_m}^2)^2\,dx \leq 2C_1,$$

mistä väite seuraa.

Otetaan seuraavaksi käsittelyyn Lauseen 64 toinen puoli ja todistetaan seuraavat väitteet:

Jos $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ on perhe siten, että u_ϵ on funktionaalia $J_\epsilon(u)$ vastaavan minimointiongelman ratkaisu, niin

i) $\lim_{\epsilon\to 0}|u_\epsilon(x)| \to 1$ $L^1(\Omega)-$normin mielessä.

ii) Olkoon $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^{\infty}$ jono siten, että $\epsilon \to 0$ kun $k \to \infty$. Tällöin on olemassa jonon $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^{\infty}$ $L^1(\Omega)-$normin mielessä suppeneva osajono $(u_{\epsilon_{kn}})_{n=1}^{\infty} \to u_0(x)$ siten, että $u_0(x) = \chi_E - \chi_{\Omega\setminus E}$, missä $E \subset \Omega$ on mitallinen joukko.

Olkoon $u_\epsilon \in K_m$ funktio, joka minimoi variaatiointegraalin $J_\epsilon(u)$ arvon joukossa K_m. Aiemmin on osoitettu, että tällainen funktio on aina olemassa. Lauseen ensimmäisen väitteen nojalla jollain $C \in \mathbb{R}$ pätee

$$\int_\Omega \frac{1}{\epsilon}(1-u_\epsilon^2)^2\,dx \le \int_\Omega \epsilon|\nabla u_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u_\epsilon^2)^2\,dx \le C.$$

Koska

$$\int_\Omega \frac{1}{\epsilon}(1-u_\epsilon^2)^2\,dx \le C, \text{ niin } \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega (1-u_\epsilon^2)^2\,dx = 0.$$

Tästä seuraa, että $u_\epsilon^2 \to 1$ $L^2(\Omega)-$normin mielessä. Toisin sanoen

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|u_\epsilon^2 - 1\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Nyt Hölderin epäyhtälön nojalla pätee

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|u_\epsilon^2 - 1\|_{L^1(\Omega)} \le \lim_{\epsilon\to 0}\|1\|_{L^2(\Omega)}\ \|u_\epsilon^2 - 1\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{|\Omega|}\cdot 0 = 0.$$

Niinpä $u_\epsilon^2 \to 1$ $L^1(\Omega)-$normin mielessä, kun $\epsilon \to 0$. Tästä puolestaan seuraa, että $|u_\epsilon| \to 1$ $L^1(\Omega)-$normin mielessä kun $\epsilon \to 0$. Väite i) on nyt todistettu.

Väitteen ii) todistusta varten konstruoidaan jono $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^{\infty}$ variaatio-ongelman ratkaisuja siten, että $\epsilon \to 0$ kun $k \to \infty$. Osoitetaan seuraavaksi, että tämä jono on rajoitettu $W^{1,1}(\Omega)-$normin mielessä. Käytetään apuna niin sanottua leikkurifunktiota, joka voidaan konstruoida seuraavasti:

$\Upsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } x \geq \frac{1}{2} \\ x, & \text{kun } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \text{kun } x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Otetaan käyttöön merkintä $\breve{u}_{\epsilon_k}(x) = \Upsilon(u_{\epsilon_k}(x))$. Huomataan, että $\nabla \breve{u}_{\epsilon_k}(x) = 0$ kun $x \in \{x \in \Omega : |u_{\epsilon_k}(x)| > \frac{1}{2}\}$, sillä funktio on tässä joukossa vakio. Muualla puolestaan $\breve{u}_{\epsilon_k}^2 \leq \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$. Nyt saadaan arvio

$$C \geq 2\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon_k}| \cdot |1 - u_{\epsilon_k}^2|\, dx \;\geq\; 2\int_\Omega |\nabla \breve{u}_{\epsilon_k}| \cdot |1 - \breve{u}_{\epsilon_k}^2|\, dx$$

$$\geq 2\int_\Omega \frac{3}{4}|\nabla \breve{u_{\epsilon_k}}(x)|\, dx \;\geq\; \frac{3}{2}\int_\Omega |\nabla \breve{u_{\epsilon_k}}(x)|\, dx.$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa Youngin epäyhtälön erikoistapauksesta 68 ja tiedosta, että $J(u_\epsilon)$ on rajoitettu. Ylläolevan epäyhtälön nojalla voidaan nyt todeta, että funktiot $\nabla \breve{u}_{\epsilon_k}$ ovat rajoitettuja $\|\cdot\|_1-$normin mielessä kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Lisäksi Poincarén epäyhtälöstä seuraa, että ehto

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{C_1}\int_\Omega |\breve{u}_{\epsilon_k} - \breve{u}_{\epsilon_k \Omega}|\, dx \leq \int_\Omega |\nabla \breve{u}_{\epsilon_k}|\, dx \leq C_0$$

on voimassa joillakin $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$.

Koska funktioiden $\breve{u}_{\epsilon_k}$ keskiarvojen on oltava välillä $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, niin yhtälöstä (14) seuraa, että funktiot $\breve{u}_{\epsilon_k}$ ovat rajoitettuja $\|\cdot\|_1-$ normin mielessä. Tästä puolestaan seuraa, että funktiojono $(\breve{u}_{\epsilon_k})_{k=1}^\infty$ on rajoitettu normin $\|\cdot\|_{1,1}$ suhteen. Nyt Rellich-Kondrachovin lauseesta seuraa, että jonolla $(\breve{u}_{\epsilon_k})_{k=1}^\infty$ on osajono $(\breve{u}_{\epsilon_{k_n}})_{n=1}^\infty$, joka suppenee avaruudessa $L^1(\Omega)$ kohti funktiota $\breve{u}_0$. Lisäksi voidaan olettaa, että $\lim_{k\to\infty} \breve{u}_{\epsilon_k}(x) = \breve{u}_0$ m.k $x \in \Omega$.

Funktion Υ määritelmän nojalla pätee

$$|\breve{u}_{\epsilon_k}(x)| = |\Upsilon(u_{\epsilon_k}(x))| = \Upsilon(|u_{\epsilon_k}(x)|).$$

Koska Υ on jatkuva funktio ja $|u_\epsilon| \to 1$ kun $\epsilon \to 0$, niin

$$\lim_{k\to\infty} |\breve{u}_{\epsilon_k}(x)| = \lim_{k\to\infty} \Upsilon(|u_{\epsilon_k}(x)|) = \Upsilon(1) = \frac{1}{2}.$$

Tällöin

$$\breve{u}_0(x) = \frac{1}{2}\chi_E(x) - \frac{1}{2}\chi_{\Omega\setminus E}(x)$$

jollekin mitallisella joukolle $E \subset \Omega$.

Koska $|u_{\epsilon_k}| \to 1$ kun $k \to \infty$, niin rajafunktion $\breve{u}_0(x)$ esityksestä seuraa, että jonolla $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^{\infty}$ on osajono, joka suppenee kohti rajafunktiota

$$u_0(x) = \chi_E(x) - \chi_{\Omega\setminus E}(x),$$

missä $E \subset \Omega$ on mitallinen joukko. Nyt Lauseen 64 kaikki kohdat on todistettu. $\square$

4.3. Tarkempi arvio 1-ulotteiseen tapaukseen. Palataan van der Waals-Cahn-Hilliardin energiafunktionaalin minimointiongelman yksiulotteisen tapauksen pariin. Pyritään siis minimoimaan funktionaalia

$$J_\epsilon(u) = \int_{-1}^{1} \epsilon u'^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u^2)^2 \, dx$$

avaruudessa $K_m((-1,1)) = \{u \in W^{1,2}((-1,1)) : \int_{-1}^{1} u \, dx = m\}$, missä $m \in (-1,1)$. Kappaleessa "Johdattelua Lauseen 64 todistukseen" löydettiin yläraja funktionaalin $J_\epsilon(u)$ minimiarvolle joukossa $K = \{u \in W^{1,2}((-1,1)) : \int_{-1}^{1} u = 0\}$. Kyseinen yläraja oli $3 + \frac{1}{15}$, ja sen osoitettiin olevan voimassa kaikilla $\epsilon > 0$.

Seuraava lause määrittää energiafunktionaalin minimiarvon joukossa K_m kun $\epsilon \to 0$.

LAUSE 66. *Olkoon* $K_m((-1,1)) = \{u \in W^{1,2}((-1,1)) : \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u = m\}$, *missä* $m \in (-1,1)$. *Tällöin*

$$\inf_{u\in K_m(-1,1)} \left(\int_{-1}^{1} \epsilon u'^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u^2)^2 dx \right) \to \frac{8}{3}$$

kun $\epsilon \to 0$. *Minimoijille on lisäksi voimassa seuraava ehto:*

Olkoon $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^{\infty}$ *jono siten, että* $\epsilon \to 0$ *kun* $k \to \infty$. *Tällöin on olemassa jonon* $(u_{\epsilon_k})_{k=1}^{\infty}$ $L^1((-1,1))$*−normin mielessä suppeneva osajono* $(u_{\epsilon_{k_n}})_{n=1}^{\infty} \to u_0(x)$ *siten, että*

$$u_0(x) = \chi_I - \chi_{(-1,1)\setminus I}$$

missä $I \subset (-1,1)$ *on väli.*

TODISTUS. Ratkaistaan aluksi differentiaaliyhtälö

$$u' = \frac{1}{\epsilon}(1 - u^2). \tag{15}$$

Kyseinen differentiaaliyhtälö saadaan helposti muokattua muotoon

$$\frac{\epsilon \cdot u'}{1 - u^2} = 1.$$

Kyseessä on siis separoituva differentiaaliyhtälö, johon voidaan soveltaa yleistä ratkaisumenetelmää. Tietoa separoituvista differentiaaliyhtälöistä sekä niiden ratkaisumenetelmästä löytyy kirjasta [**14**]. Separoituvan differentiaaliyhtälön (15) ratkaisu toteuttaa yleisen separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaisukaavan nojalla yhtälön

$$\epsilon \int \frac{1}{1 - u^2}\, du = \int 1\, dx. \tag{16}$$

Vasemmanpuoleinen integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int \frac{1}{1 - u^2}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u - 1}\, du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u + 1}\, du,$$

joka voidaan helpohkosti laskea sijoitusmenetelmällä. Kun integraalit lasketaan, yhtälö (16) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon}{2}\left(\ln|u+1| - \ln|u-1|\right) = x + C. \\ \iff \qquad & \left|\frac{u+1}{u-1}\right| = \exp\left(\frac{2}{\epsilon} \cdot (x + C)\right). \end{aligned}$$

Tämän yhtälön ratkaisu on

$$w_\epsilon(x) = \frac{\exp\left(\frac{2}{\epsilon}(x + C)\right) - 1}{\exp\left(\frac{2}{\epsilon}(x + C)\right) + 1}.$$

Funktio $w_\epsilon(x)$ on aidosti kasvava, joten $w_\epsilon' > 0$ kaikilla $x \in (-1, 1)$. Lisäksi $1 - w_\epsilon^2 > 0$ kaikilla $x \in (-1, 1)$, sillä $w_\epsilon(x) \in (-1, 1)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitaan seuraavaksi $b = w_\epsilon'$ ja $a = 1 - w_\epsilon^2$. Koska w_ϵ on differentiaaliyhtälön (15) ratkaisu, niin $b = \frac{a}{\epsilon}$. Tällöin

Liitteessä A esitetty epäyhtälö 68 on yhtälö, mistä seuraa, että

$$\int_{-1}^{1} \epsilon w_\epsilon'^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-w_\epsilon^2)^2 \, dx = 2\int_{-1}^{1} w_\epsilon'(1-w_\epsilon)\, dx. \tag{17}$$

Tehdään seuraavaksi muuttujanvaihto $y = w_\epsilon(x)$. Nyt integraali (17) yksinkertaistuu muotoon

$$2\int_{w_\epsilon(-1)}^{w_\epsilon(1)} (1-y^2)dy = 2\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{w_\epsilon(-1)}^{w_\epsilon(1)}.$$

Kun $\epsilon \to 0$, niin $w_\epsilon(1) \to 1$ ja $w_\epsilon(-1) \to -1$. Niinpä

$$\int_{-1}^{1} \epsilon w_\epsilon'^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-w_\epsilon^2)\, dx \to 2\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{8}{3}.$$

Funktio $w_\epsilon(x)$ on $W^{1,2}-$ funktio. Kun funktion $w_\epsilon(x)$ lausekkeessa olevalle vakiolle C annetaan sopiva luvusta m riippuva arvo, saadaan funktio $w_m(x)$, jonka keskiarvo välin $(-1,1)$ yli on $m \in (-1,1)$. Tällainen vakio C löytyy kaikille $m \in (-1,1)$, sillä vakion C arvon muuttuminen on kuvauksena ainoastaan siirto x-akselin suunnassa. Funktiot $w_m(x)$ kuuluvat siten avaruuksiin K_m. Kun $\epsilon \to 0$ niin $w_m(1) \to 1$ ja $w_m(-1) \to -1$. Niinpä variaatiointegraalin arvo funktioille $w_m(x)$ lähestyy lukua $\frac{8}{3}$ kun $\epsilon \to 0$. Tästä seuraa, että

$$\inf_{K_m}\left(\int_{-1}^{1} \epsilon u'^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u^2)^2 dx\right) \le \frac{8}{3}$$

kun $\epsilon \to 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\frac{8}{3}$ on myös pienin mahdollinen yläraja variaatiointegraalien minimiarvolle. Olkoon $u_\epsilon(x)$ funktionaalia $J_\epsilon(u)$ vastaavan minimointiongelman ratkaisu. Aiemmin osoitettiin, että kun $\epsilon \to 0$, niin $u_\epsilon^2(x) \to 1$ L^1-normin mielessä. Tämän nojalla löydetään $a, b \in (-1,1)$ siten, että kaikille $\delta > 0$ on olemassa $\epsilon > 0$, joka toteuttaa ehdot $u_\epsilon(a) < -1 + \delta$ ja $u_\epsilon(b) < 1 - \delta$. Toisin sanoen, kun $\epsilon \to 0$, niin arvot $u_\epsilon(a)$ ja $u_\epsilon(b)$ ovat mielivaltaisen lähellä lukuja -1 ja 1. Nyt Lauseen 68 avulla saadaan

$$\int_{-1}^{1} \epsilon {u_\epsilon'}^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u_\epsilon^2)^2\, dx \ge \int_{a}^{b} \epsilon {u_\epsilon'}^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u_\epsilon^2)^2\, dx \ge 2\int_{a}^{b} |1-u_\epsilon^2||u_\epsilon'|\, dx.$$

Huomataan seuraavaksi, että $|1-u_\epsilon^2||u_\epsilon'| = |v'|$, missä $v = u_\epsilon - \frac{u_\epsilon^3}{3}$. Niinpä analyysin peruslauseen nojalla saadaan

$$
\begin{aligned}
(18)\quad &\int_{-1}^{1} \epsilon {u_\epsilon'}^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u_\epsilon^2)^2\,dx \geq 2\int_a^b |1-u_\epsilon^2||u_\epsilon'|\,dx = 2\int_{v(a)}^{v(b)} |v'|\,dx \geq 2\int_{v(a)}^{v(b)} v'\,dx \\
&= 2\big((v(b)-v(a)\big) \geq 2\big((v(1)-v(-1)\big) - \tilde{\delta} = 2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) - \tilde{\delta} = \frac{8}{3} - \tilde{\delta},
\end{aligned}
$$

missä $\tilde{\delta}$ riippuu ainoastaan luvusta δ. Kun $\epsilon \to 0$, niin $u_\epsilon(a) < -1+\delta$ ja $u_\epsilon(b) > 1-\delta$ mielivaltaisen pienillä luvun δ arvoilla. Niinpä $\tilde{\delta} \to 0$ kun $\epsilon \to 0$. Niinpä

$$
\inf_{K_m}\left(\int_{-1}^{1} \epsilon {u'}^2 + \frac{1}{\epsilon}(1-u^2)^2\,dx\right) \geq \frac{8}{3}.
$$

Koska aiemmin osoitettiin, että $\frac{8}{3}$ on myös yläraja kyseiselle infimumin arvolle, ensimmäinen väite seuraa tästä.

Osoitetaan vielä toinenkin väite todeksi. Lauseesta 64 seuraa, että funktionaaleja $J_\epsilon(u)$ vastaavista minimoijista konstruoidulla jonolla on osajono, joka suppenee L^1-normin mielessä kohti funktiota $u_0(x) = \chi_E - \chi_{(-1,1)\setminus E}$, missä $E \subset (-1,1)$ on mitallinen joukko. Täytyy siis osoittaa, että joukko E on yhtenäinen, jolloin se on väli. Yhtälöstä (18) seuraa, että funktionaalin $J_\epsilon(u)_{\epsilon\to 0}$ arvo kasvaa vähintään $\frac{8}{3}$:lla aina, kun funktion u arvo kasvaa luvusta -1 lukuun 1 tai vähenee luvusta 1 lukuun -1. Niinpä funktio u_0 voi "hypätä" arvojen -1 ja 1 välillä vain kerran, sillä minimointiongelman ratkaisun on osoitettu olevan $\frac{8}{3}$. Tästä seuraa, että rajafunktion u_0 lausekkeessa olevan mitallisen joukon E on oltava väli, mistä väite seuraa. Koska rajafunktio u_0 vaihtaa arvoaan vain kerran ja sen keskiarvon on oltava m, niin välin I on lisäksi oltava muotoa $(-m,1)$ tai $(-1,m)$. $\square$

Liite A. Youngin epäyhtälö

Tässä liitteessä perehdytään Youngin epäyhtälöön, joka on tärkeä työkalu esimerkiksi variaatiointegraalien arvioimisessa. Youngin epäyhtälön perusmuodon lisäksi liitteessä esitellään eräs erikoistapaus, jota sovelletaan tässä tutkielmassa useamman kerran.

LAUSE 67 (Youngin epäyhtälö). *Olkoot $a, b \in [0, \infty)$ ja olkoot $p > 1$ ja $q < \infty$ lukuja siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin on voimassa*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

TODISTUS. Youngin epäyhtälö todistetaan kirjassa [**8**]. □

Seuraavaa erikoistapausta Youngin epäyhtälöstä kutsutaan myös Peter-Paulin epäyhtälöksi.

LAUSE 68. *Olkoot $a, b \in [0, \infty)$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin on voimassa*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa jos $b = \frac{a}{\epsilon}$.

TODISTUS. Lause seuraa Youngin epäyhtälöstä. Valitaan $p = q = 2$, ja $a' = \frac{a}{\sqrt{\epsilon}}$ sekä $b' = \sqrt{\epsilon}b$, missä $\epsilon > 0$. Nyt Youngin epäyhtälön nojalla pätee

$$ab = \frac{a}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \sqrt{\epsilon}b = a'b' \leq \frac{a'^2}{2} + \frac{b'^2}{2} = \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}.$$

Osoitetaan vielä, että Peter-Paulin epäyhtälö on yhtälö, jos $b = \frac{a}{\epsilon}$. Oletetaan, että $b = \frac{a}{\epsilon}$. Tällöin pätee

$$ab = \frac{a^2}{\epsilon} = \frac{2a^2}{2\epsilon} = \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{a^2}{2\epsilon} = \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon(\frac{a}{\epsilon})^2}{2} = \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}, \tag{19}$$

mikä osoittaa väitteen todeksi. □

Viitteet

[1] L. Modica: *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion.* Università di Pisa, 1986.

[2] P. Juutinen: *Variaatiolaskenta.* Luentomoniste, versio 25.10.2005. Matematiikan laitos, Jyväskylän yliopisto; 2005.

[3] A. Galbis, M. Maestre: *Vector Analysis Versus Vector Calculus.* Springer, 2012.

[4] W.F. Pfeffer: *The Divergence Theorem and Sets of Finite Perimeter.* CRC Press, 2012, s. 22.

[5] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler: *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* Springer-Verlag New York, 2001.

[6] I. Ekeland, R. Temam: *Convex Analysis and Variational Problems.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1999, s. 6.

[7] R. Adams, J.F. Fournier: *Sobolev Spaces.* Department of Mathematics, The University of British Colombia, Academic Press, 2003.

[8] Z. Cvetkovski: *Inequalities: Theories, Techniques and Selected Problems.* Springer, 2012.

[9] W. Rudin: *Real and Complex analysis* 3rd ed. McGraw-Hill, 1987, s. 67-68.

[10] T. Bühler, D.A. Salamon: *Functional Analysis* American Mathematical Society, 2018, s. 81-82.

[11] T. Kilpeläinen: *Sobolev-avaruudet.* Luentomoniste, versio 3.6.2007. Matematiikan laitos, Jyväskylän yliopisto; 2007.

[12] L.C. Evans: *Partial Differential Equations* Vol. 19. American Mathematical Society, 1998

[13] H.L. Royden, P.M. Fitzpatrick: *Real Analysis* 4th ed. China Machine Press, 2010, s. 88.

[14] N.M. Kapoor: *A Text Book of Differential Equations* 11th ed. Pitambar Publishin Company, 2002, s. 23-24.