Radonin ja Nikodymin lause

Niilo Auvinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: N. Auvinen, *Radonin ja Nikodymin lause* (engl. *Radon-Nikodym theorem*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 44 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019

Tässä tutkielmassa perehdytään merkkimittoihin ja niihin liittyviin hajotelmalauseisiin. Lisäksi päälauseena todistetaan mittateorian perustuloksiin kuuluva Radonin ja Nikodymin lause kolmessa eri tilanteessa: ensin kahden äärellisen mitan tapauksessa, sitten σ-äärellisten mittojen kanssa ja viimeisenä σ-äärellisen mitan ja merkkimitan tapauksessa.

Merkkimitat ovat mittateoriassa tutkittuja mittojen yleistyksiä. Ne voivat mitoista poiketen saada myös negatiivisia arvoja, mutta kuitenkin niin, ettei merkkimitta voi saavuttaa sekä positiivista että negatiivista ääretöntä. Tutkielmassa tutustutaan merkkimittojen absoluuttiseen jatkuvuuteen ja keskinäiseen singulaarisuuteen. Ensimmäinen viittaa merkkimittojen vahvaan riippuvuuteen toisistaan: joukon nollamittaisuus periytyy myös toiselle merkkimitalle. Singulaarisuus taas päinvastoin kertoo joukkofunktioiden täydellisestä riippumattomuudesta: ne saavat nollasta poikkeavia arvoja täysin eri osissa avaruutta.

Tutkielmassa todistetaan kolme hajotelmalausetta. Hahnin hajotelmalauseen nojalla mitta-avaruus voidaan jakaa merkkimitan suhteen kahteen pistevieraaseen osaan, joista toisessa merkkimitta saa vain positiivisia arvoja ja toisessa taas vain negatiivisia arvoja. Kyseisellä lauseella on oleellinen rooli Radonin ja Nikodymin lauseen todistuksessa. Jordanin hajotelmalauseessa todistetaan, miten jokainen merkkimitta voidaan palauttaa kahden mitan erotukseksi, ja viimeisenä Lebesguen hajotelmalause osoittaa, että kahta merkkimittaa tutkittaessa kumpi tahansa voidaan hajottaa toisen suhteen absoluuttisesti jatkuvaan ja singulaariseen osaan.

On helppoa osoittaa, että mitallista ei-negatiivista funktiota integroimalla saadaan luotua mitta. Ei ole myöskään haastavaa näyttää, että näin saatu mitta on absoluuttisesti jatkuva integroinnissa käytetyn mitan suhteen. Radonin ja Nikodymin lause todistaa, että sama pätee tietyillä lisäoletuksilla myös käänteisesti: Jos σ-äärellinen (merkki)mitta ν on absoluuttisesti jatkuva σ-äärellisen mitan μ suhteen, on olemassa mitallinen funktio f, jolle pätee, että jokaisen mitallisen joukon E ν-mitta on täsmälleen funktion f integraali mitan μ suhteen joukon E yli. Toisin sanoen Radonin ja Nikodymin lauseen avulla löydetään funktio f, jolla

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

kaikilla mitallisilla joukoilla E. Käy siis ilmi, että σ-äärellisten mittojen tapauksessa absoluuttinen jatkuvuus voidaan karakterisoida täysin mitallisten funktioiden integroinniksi.

Sisältö

Johdanto

Analyysin tuloksista tiedetään, että täsmälleen ne funktiot, jotka ovat absoluuttisesti jatkuvia, saadaan derivaattojensa integraaleina. Toisin sanoen funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain jos on olemassa Lebesgue-integroituva funktio $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jolle kaikilla $x \in [a,b]$ pätee

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\, dt.$$

Tällöin myös on $g = f'$ melkein kaikkialla. Funktioiden kohdalla absoluuttinen jatkuvuushan viittaa siihen, että funktion arvot heittelevät vähän, jos tarkastellaan pieniä muutoksia x-akselilla. Tarkasti sanottuna funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että aina kun erillisille väleille $[x_i, y_i] \subset [a,b]$, missä $i = 1, 2, \ldots, n$, pätee $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta$, niin tällöin myös $\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Itävaltalainen matemaattikko Johann Radon tutki 1900-luvun alussa niin sanottuja Lebesgue–Stieltjes-mittoja ja -integraaleja, joiden toiminta perustuu oleellisesti ei-vähenevien jatkuvien funktioiden päätearvosijoituksiin. Näin ollen niissä on samoja elementtejä kuin edellä esitellyssä funktioiden absoluuttisen jatkuvuuden määritelmässä. Vuonna 1913 Radon pystyi todistamaan, että absoluuttisesti jatkuvien funktioiden integrointiin liittyvä ominaisuus pätee tietyllä tavalla myös Lebesgue–Stieltjes-mitoille avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Hän osoitti, että absoluuttisesti jatkuvien Lebesgue–Stieltjes-mittojen tapauksessa löytyy funktio, jonka integraalina toinen mitoista pystytään esittämään. Nykyään tunnetun yleisen version väitteestä todisti puolalainen Otto Nikodym vuonna 1930. [**5**, s. 237], [**2**, s. 105] Lause kantaa nimeä Radonin ja Nikodymin lause ja kuuluu seuraavasti:

Lause 0.1. *Olkoot ν ja μ mitta-avaruudessa (X, Γ) σ-äärellisiä mittoja siten, että mitta ν on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen.*

Tällöin on olemassa oleellisesti yksikäsitteinen, mitallinen ja äärellinen funktio f, jolle kaikilla mitallisilla joukoilla E pätee

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Tietyllä tavalla ajateltuna Radonin ja Nikodymin lause näyttäytyy siis eräänlaisena analyysin peruslauseena mitoille.

Radonin ja Nikodymin lause on merkittävässä roolissa todennäköisyysteoriassa. Käy esimerkiksi ilmi, että todennäköisyysavaruudessa satunnaismuuttujan tiheysfunktio on täsmälleen Radonin ja Nikodymin lauseesta saatava funktio f. Toisaalta lauseen avulla voidaan myös määritellä tärkeä todennäköisyysteorian käsite, ehdollinen todennäköisyys. [**10**, s. 246] Lisäksi lausetta käytetään hyväksi myös talousmatematiikassa.

Tutkielmaa kirjoittaessa on oletettu, että lukijalla on perustiedot mitta- ja integraaliteorian alkeista. Lisäksi vaaditaan joukko-opin ja analyysin hallintaa. Tutkielma alkaa esitieto-osiolla, jossa käydään läpi mittateorian keskeisimmät käsitteet eli sigma-algebrat ja mitat sekä esitellään muutamia myöhemmin tarvittavia tuloksia. Sen jälkeen esitellään lyhyesti integraaliteorian perusteita, ja luvun lopuksi tutkitaan merkkimittoja ja tarkastellaan niiden yleisiä ominaisuuksia.

Merkkimitat ovat tutkielmassa melkoisen suuressa roolissa, sillä ne voidaan liittää kiinteästi Radonin ja Nikodymin lauseeseen. Kyseessä on eräänlainen mittojen yleistys, sillä merkkimittojen sallitaan saavan myös negatiivisia arvoja. Tämä luonnollisesti mutkistaa todistuksia mittoihin nähden ja esimerkiksi monotonisuudesta joudutaan mitoista poiketen merkkimittojen kohdalla jopa luopumaan. Näihin ongelmiin tosin saadaan helpotusta tutkielman toisessa luvussa.

Toisessa luvussa todistetaan kaksi tutkielman päälauseen kannalta oleellista hajotelmalausetta. Hahnin hajotelmalausetta varten määritellään uudet käsitteet positiivinen ja negatiivinen joukko. Näiden avulla saadaan muotoiltua lauseen väite, jonka mukaan mitta-avaruus voidaan jakaa merkkimitan suhteen kahteen pistevieraaseen joukkoon, joista toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen. Huomionarvoista lauseessa on, että kyseinen hajotelma on oleellisesti yksikäsitteinen. Merkkimittojen tutkimista helpottaa merkittävästi luvun toinen lause, Jordanin hajotelmalause. Sen mukaan jokainen merkkimitta voidaan hajottaa kahden mitan erotukseksi yksikäsitteisesti. Tulos on merkittävä, sillä sen avulla useat mittojen hyödylliset ominaisuudet saadaan siirrettyä myös merkkimittojen tarkasteluun.

Kolmannen luvun alussa esitellään merkkimittojen absoluuttinen jatkuvuus, johon tutkielman päälause vahvasti perustuu. Luvussa todistetaan esimerkiksi lause, jossa perustellaan käsitteen nimeä sekä myös useita absoluuttisen jatkuvuuden ominaisuuksia, joita käytetään tutkielman kahden viimeisen osion todistuksissa. Tutkielman viimeisenä hajotelmalauseena todistetaan Lebesguen hajotelmalause, joka liittyy läheisesti Radonin ja Nikodymin lauseeseen. Hajotelmalauseen mukaan merkkimitta voidaan hajottaa yksikäsitteisesti toisen merkkimitan suhteen absoluuttisesti jatkuvaan ja singulaariseen osaan. Lause todistetaan kahdella tavalla, ensin käyttämättä tutkielman päälausetta ja sitten Radonin ja Nikodymin lausetta käyttäen. Tutkielman päättää kolmen Radonin ja Nikodymin lauseen version todistukset, joista ensimmäinen eli äärellisten mittojen tapaus todistetaan kahdella eri tavalla. Kahden eri todistuksen tarkoituksena on eritellä todistusidean oleellisimmat osat. Seuraavat kaksi todistusta rakentuvat vahvasti ensimmäisen version varaan ja ovat siksi suoraviivaisempia.

Tutkielman merkittävimpinä lähteinä on käytetty Brucknerin, Brucknerin ja Thomsonin [**5**], Friedmanin [**8**] ja Cohnin [**6**] kirjoja. Kaksi viimeisintä toimivat lähteinä ja vertailupohjina monille tutkielman todistuksille, kirjan [**5**] rooli taas oli lähinnä toimia motivaattorina ja selittää pohdittuja ilmiöitä yleisemmässä kontekstissa.

LUKU 1

Esitietoja

1.1. Mitat

Mittateorian perustyökaluina toimivat mitat. Ne ovat joukkofunktioita, jotka sitovat avaruuden osajoukkoihin niiden "kokoon" liittyvän luvun eli mitan. Mittateorian kehittäjänä tunnettu Henri Lebesgue (1875 – 1941) halusi alkujaan euklidisen avaruuden mitalta seuraavat kolme intuition mukaista ominaisuutta: Ensinnäkin mitan olisi annettava mitta jokaiselle avaruuden osajoukolle eli jokaisen joukon tulisi olla niin sanotusti mitallinen. Toisekseen joukon orientaation ei tulisi vaikuttaa mittaan eli mitan olisi syytä olla siirto- ja kiertoinvariantti. Toisin sanoen samanmuotoisten joukkojen mitat olisivat yhtä suuret. Lisäksi hän halusi, että keskenään pistevieraiden joukkojen numeroituvan yhdisteen mitta saataisiin summaamalla joukkojen mitat yhteen (additiivisuus). Kävi kuitenkin ilmi, ettei ole olemassa mittaa, jolla olisi kaikki edellä mainitut ominaisuudet. Karsimalla tutkitun avaruuden osajoukkojen joukkoa Lebesgue pystyi lopulta konstruoimaan additiivisen ja geometrisesti intuitiivisen mitan, joka kantaa nykyään hänen nimeään.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon X joukko. Tällöin joukkoa $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ kutsutaan joukon X *potenssijoukoksi*.

Mittoja käytettäessä halutaan luonnollisesti, että mitallisia joukkoja on mahdollisimman paljon. Joukkojen mitallisuuksien suhteen olisi lisäksi otollista, että mitallisuus säilyisi perusjoukko-opillisissa operaatiossa eli yhdisteissä, leikkauksissa ja erotuksissa. Toisaalta tiedetään, ettei ole järkevää odottaa kaikkien joukkojen olevan mitallisia. Ratkaisuna toimivat tietyt avaruuden potenssijoukon osajoukot, niin sanotut sigma-algebrat (tai σ-algebrat).

MÄÄRITELMÄ 1.2 (Sigma-algebra). Olkoot X joukko ja $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, jolle pätee, että

(1) $\emptyset \in \Gamma$,
(2) jos $A \in \Gamma$, niin $A^C = X \setminus A \in \Gamma$, ja
(3) jos $A_i \in \Gamma$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Tällöin sanotaan, että Γ on *sigma-algebra* joukossa X.

Sigma-algebran määritelmän kolmen ehdon avulla voidaan päätellä halutusti, että sigma-algebraan kuuluvien joukkojen erotukset ja leikkaukset kuuluvat myös sigma-algebraan.

LAUSE 1.3. *Olkoot X joukko ja Γ sigma-algebra tuossa joukossa. Tällöin*

(1) $X \in \Gamma$,
(2) jos $A, B \in \Gamma$, niin $A \setminus B \in \Gamma$, ja
(3) jos $A_i \in \Gamma$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Seuraavaksi määritellään tarkasti mitta. Määrittelyssä on nyt oleellista, että mitta rajoitetaan sigma-algebraan Γ eikä koko potenssijoukkoon $\mathcal{P}(X)$. Lisäksi on huomautettava, että Lebesguen mitasta poiketen mitan ei yleisessä tapauksessa tarvitse olla siirto- tai kiertoinvariantti. Triviaalina esimerkkinä tästä toimii reaaliakselin $\mathbb{R}$ Diracin mitta δ_0, sillä $\delta_0([0,1]) = 1$, mutta $\delta_0([1,2]) = 0$.

Tutkielmassa käytetään usein merkintää $\overline{\mathbb{R}}$, jolla tarkoitetaan niin sanottua *laajennettua reaaliakselia* eli joukkoa $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

MÄÄRITELMÄ 1.4 (Mitta). Olkoot X joukko ja $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ sigma-algebra joukossa X. Tällöin sanotaan, että funktio $\mu\colon \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$ on *mitta*, jos

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) kaikille $A \in \Gamma$ pätee $\mu(A) \geq 0$ ja
(3) keskenään pistevieraille joukoille $A_i \in \Gamma$ pätee, että

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Tästä lähtien kolmikkoa (X, Γ, μ) kutsutaan *mitta-avaruudeksi*, jolla tarkoitetaan avaruuden X varustamista mitalla μ ja sigma-algebralla Γ. Sigma-algebran Γ alkioita kutsutaan Γ-*mitallisiksi*, tai joskus pelkästään *mitallisiksi*, joukoiksi.

Myöhemmin nähdään, kuinka mitallisia funktioita integroimalla saadaan konstruoitua mittoja (katso esimerkki 1.10).

MÄÄRITELMÄ 1.5 (Mitan äärellisyys). Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Tällöin sanotaan, että μ on *äärellinen mitta*, jos $\mu(X) < \infty$.

Jos taas $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ joillakin $E_k \in \Gamma$, joilla $\mu(E_k) < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin sanotaan, että μ on *σ-äärellinen mitta*.

Todistetaan sitten sisäkkäisiin mitallisiin joukkoihin liittyviä perustuloksia, joita tullaan käyttämään useasti edempänä:

LAUSE 1.6. *Olkoot $A, B \in \Gamma$ joukkoja mitta-avaruudessa (X, Γ, μ) siten, että $A \subset B$. Tällöin seuraavat pätevät:*

(1) $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(2) Jos $\mu(A) < \infty$, niin $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

TODISTUS. Kaikille joukoille A, B pätee

$$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A),$$

missä joukot $B \cap A$ ja $B \setminus A$ ovat selvästi keskenään pistevieraita. Koska oletuksen nojalla $A \subset B$, niin $B \cap A = A$. Näin ollen

$$B = A \cup (B \setminus A).$$

Nyt mitan additiivisuuden eli määritelmän 1.4 kohdan (3) nojalla

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.1}$$

Väitteen kohdan (1) todistamiseksi huomataan, että $\mu(B \setminus A) \geq 0$, koska mitta saa vain ei-negatiivisia arvoja. Täten yhtälöstä (1.1) saadaan, että

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A) + 0 = \mu(A).$$

Jos $\mu(A) < \infty$, voidaan se vähentää puolittain yhtälössä (1.1). Näin saadaan, että

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

ja väitteen kohta (2) pätee. $\square$

Seuraava lemma yksinkertaistaa kahden σ-äärellisen mitan tutkimista:

LEMMA 1.7. *Olkoot μ ja ν σ-äärellisiä mittoja avaruudessa (X, Γ). Tällöin on olemassa mitalliset joukot A_j, joille $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ja joille kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $\mu(A_k) < \infty$ ja $\nu(A_k) < \infty$.*

TODISTUS. Olkoot M_j ja N_j mitallisia joukkoja, joilla $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = X = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ ja joilla $\mu(M_k) < \infty$ ja $\nu(N_k) < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Asetetaan jokaisella $n \in \mathbb{N}$ joukot

$$A_n := \left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} N_i \right).$$

Tällöin mitan monotonisuuden (lauseen 1.6 kohta (1)) ja subadditiivisuuden nojalla kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A_n) \leq \mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(M_j) < \infty,$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että summattavia äärellisiä termejä on äärellinen määrä. Vastaavalla päättelyllä saadaan, että joukot A_n ovat äärellisiä myös mitan ν suhteen.

Olkoon sitten $x \in X$. Tällöin $x \in M_i$ ja $x \in N_j$ joillakin $i, j \in \mathbb{N}$. Olkoon sitten $I := \min\{i \in \mathbb{N} : x \in M_i\}$, ja määritellään J vastaavasti joukoille N_j. Näin valitsemalla saadaan, että

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\max(I,J)} M_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\max(I,J)} N_i \right) = A_{\max(I,J)},$$

ja täten $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Toisin sanoen $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, mistä taas tarkoittaa, että $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Näin ollen joukot A_n toteuttavat väitteen ominaisuudet. $\square$

LAUSE 1.8. *Olkoot (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $A_i \in \Gamma$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin seuraavat pätevät:*

(1) Jos $A_i \subset A_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.
(2) Jos $A_{i+1} \subset A_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\mu(A_j) < \infty$ jollakin $j \in \mathbb{N}$, niin $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

TODISTUS. Lause todistetaan esimerkiksi lähteessä [**6**, s. 10]. $\square$

MÄÄRITELMÄ 1.9 (μ-melkein kaikkialla). Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Olkoot lisäksi P ominaisuus ja $A \subset X$ joukko, jossa P pätee. Jos $\mu(X \setminus A) = 0$, niin sanotaan, että ominaisuus P pätee *μ-melkein kaikkialla joukossa* X (merkitään μ-m.k.).

1.2. Integraaliteoriaa

Olkoot (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $E \in \Gamma$ ja $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Merkitään, että funktio f^+ on funktion f positiiviosa ja vastaavasti f^- sen negatiiviosa. Tällöin määritellään, että funktion f integraali mitan μ suhteen yli joukon E on

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu,$$

jos $\int_E f^+\,d\mu < \infty$ tai $\int_E f^-\,d\mu < \infty$. Lisäksi sanotaan, että funktio f on integroituva joukossa E, jos $\int_E f^+\,d\mu < \infty$ ja $\int_E f^-\,d\mu < \infty$.

Seuraavassa esimerkissä osoitetaan, että mitallisia funktioita integroimalla saadaan luotua mittoja:

Esimerkki 1.10. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Jos $f\colon X \to [0, \infty]$ on mitallinen funktio ja $A \in \Gamma$, niin tällöin

$$\nu\colon \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \nu(E) := \int_{E\cap A} f\,d\mu$$

on mitta joukossa X.

Osoitetaan, että mitan ominaisuudet täyttyvät:

(1)
$$\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset\cap A} f\,d\mu = \int_{\emptyset} f\,d\mu = 0$$

(2) Koska funktio f saa vain ei-negatiivisia arvoja, niin selvästi myös
$$\nu(E) = \int_{E\cap A} f\,d\mu \geq 0$$
kaikilla $E \in \Gamma$.

(3) Olkoot $E_i \in \Gamma$ keskenään pistevieraita joukkoja. Tällöin integraalin perusominaisuuksien nojalla
$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \int_{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\cap A} f\,d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\cap A)} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i\cap A} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i),$$
sillä myös joukot $E_i \cap A$ ovat keskenään pistevieraita.

Täten ν on mitta.

Esitellään vielä muutama edempänä käytettävä integraaliteorian tulos:

Lause 1.11. *Olkoot (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $f\colon E \to [0, \infty]$ mitallinen funktio ja $E \in \Gamma$. Tällöin*

(1) $\int_E f\,d\mu = 0$, jos ja vain jos $f(x) = 0$ μ-melkein kaikkialla joukossa E.
(2) jos $\int_E f\,d\mu < \infty$, niin $f(x) < \infty$ μ-melkein kaikkialla joukossa E.

Lauseen 1.11 kohdassa (1) on oleellista, että funktio f on ei-negatiivinen, sillä esimerkiksi funktiolle $g(x) := \sin(x)$ pätee, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} g\,dm = 0,$$

mutta $g(x) \neq 0$ melkein kaikkialla välillä $[-\pi, \pi]$.

Seuraavaksi esiteltävää Lebesguen monotonisen konvergenssin lausetta käytetään tulevissa luvuissa tutkielman päätuloksien todistamiseen.

LAUSE 1.12 (Lebesguen monotonisen konvergenssin lause). *Olkoot* (X, Γ, μ) *mitta-avaruus ja* $f_j\colon E \to [0, \infty]$ *mitallisia funktioita siten, että funktiojono* $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ *on kasvava. Tällöin*

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j \, d\mu = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j \, d\mu.$$

1.3. Merkkimitat

Mitaksi määriteltiin edellä additiiviset joukkofunktiot, jotka saavat pelkästään ei-negatiivisia arvoja. Tämä on luonnollista siksi, että esimerkiksi Lebesguen mitan tapauksessa pyrkimyksenä oli saada kyseinen mitta yhtymään geometriseen janan pituuteen yksiulotteisessa, suorakulmion pinta-alaan kaksiulotteisessa ja särmiön tilavuuteen kolmiulotteisessa tilanteessa. Kyseisissä tapauksissa joukon mitta voidaan siis samaistaa noihin geometrisiin suureisiin, jotka eivät ole järkeviä negatiivisina.

Esimerkissä 1.10 huomattiin, että ei-negatiivista mitallisia funktioita integroimalla saadaan aikaan mittoja. Tämän vuoksi onkin luonnollista kysyä, millaisia joukkofunktioita syntyy, jos integroitavien funktioiden sallitaan saavan myös negatiivisia arvoja (katso esimerkki 1.14). Käy ilmi, että näin saadaan mittoja muistuttavia joukkofunktioita, joita kutsutaan merkkimitoiksi.

MÄÄRITELMÄ 1.13 (Merkkimitta). Olkoot X joukko ja $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ sigma-algebra joukossa X. Sanotaan, että funktio $\nu\colon \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$ on *merkkimitta* (engl. signed measure), jos

(1) $\nu(\emptyset) = 0$,
(2) funktio ν saavuttaa korkeintaan toisen arvoista ∞ ja $-\infty$, ja
(3) keskenään pistevieraille joukoille $A_i \in \Gamma$ pätee, että

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

Merkkimitan määritelmän kohdat (1) ja (3) ovat täsmälleen samat kuin mitan määritelmässä. Toisin sanoen merkkimitatkin kuvaavat tyhjän joukon nollaksi ja ovat additiivisia. Ero mittoihin tulee siis siitä, että merkkimittojen sallitaan saavan myös negatiivisia arvoja. Kuten määritelmän kohdasta (2) käy ilmi, ei niiden arvojoukko ole kuitenkaan koskaan koko $\overline{\mathbb{R}}$. Tällä rajoituksella vältetään mahdollisuus, että päädyttäisiin määrittelemättömään tilanteeseen, jossa lasketaan yhteen arvoja $-\infty$ ja ∞.

ESIMERKKI 1.14. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Jos $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on integroituva mitallinen funktio ja $A \in \Gamma$, niin tällöin

$$\nu\colon \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \nu(E) := \int_{E\cap A} f \, d\mu$$

on merkkimitta joukossa X.

Merkkimitan määritelmän kohdat (1) ja (3) voidaan perustella vastaavasti kuin mittojen tapauksessa (katso esimerkki 1.10). Kohta (2) taas seuraa siitä, että funktion f integroituvuus joukossa X takaa sen integraalin äärellisyyden. [**11**, s. 149]

Selvästi jokainen mitta on myös merkkimitta. Päinvastainen ei luonnollisesti välttämättä päde. On helppoa nähdä, että kahden mitan erotus on merkkimitta, kunhan ainakin toinen mitoista on äärellinen. Mielenkiintoinen ja erittäin hyödyllinen tulos, joka tullaan todistamaan edempänä, on, että jokainen merkkimitta voidaan hajottaa kahden mitan erotukseksi (katso Jordanin hajotelmalause 2.13).

Merkkimittojen äärellisyys ja σ-äärellisyys määritellään samaan tyyliin kuin mittojen tapauksessa:

MÄÄRITELMÄ 1.15 (Merkkimitan äärellisyys). Avaruuden (X, Γ) merkkimittaa ν sanotaan *äärelliseksi*, jos $|\nu(A)| < \infty$ kaikilla $A \in \Gamma$. Äärellinen merkkimitta ei näin ollen saavuta kumpaakaan arvoista ∞ ja $-\infty$.

Merkkimitan ν sanotaan olevan *σ-äärellinen*, jos on joukot $E_i \in \Gamma$ siten, että $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja $|\nu(E_k)| < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi esitetään lauseen 1.6 kohdan (2) versio merkkimitoille. Todistus on sama kuin mittojen tapauksessa.

LAUSE 1.16. *Olkoot $A, B \in \Gamma$ joukkoja ja ν merkkimitta mitta-avaruudessa (X, Γ) siten, että $A \subset B$ ja $|\nu(A)| < \infty$. Tällöin*

$$\nu(B \setminus A) = \nu(B) - \nu(A).$$

Syy siihen, miksei lauseen 1.6 kohtaa (1) yleistetty edellä koskemaan myös merkkimittoja on se, ettei väite sellaisenaan pitäisi paikkaansa. Merkkimitan mahdollinen negatiivisuus estää mittoja koskevan väitteen todistuksessa tehdyn arvioinnin, joten merkkimitat eivät ole monotonisia samassa mielessä kuin mitat. Tietynlainen monotonisuus kuitenkin saadaan pätemään rajoittumalla joukkoihin, jotka sisältävät vain samanmerkkisiä joukkoja (katso lemma 1.19). Määritelläänkin seuraavaksi *positiiviset* ja *negatiiviset* joukot, joilla on suuri merkitys merkkimittojen hajottamisessa mitoiksi:

MÄÄRITELMÄ 1.17 (Positiivinen ja negatiivinen joukko sekä nollajoukko). Olkoot (X, Γ) mitta-avaruus ja ν sen merkkimitta. Tällöin sanotaan, että joukko $A \in \Gamma$ on *positiivinen merkkimitan ν suhteen*, jos kaikille $E \in \Gamma$, $E \subset A$ pätee, että $\nu(E) \geq 0$.

Vastaavasti sanotaan, että joukko $B \in \Gamma$ on *negatiivinen merkkimitan ν suhteen*, jos kaikille $F \in \Gamma$, $F \subset B$ pätee, että $\nu(F) \leq 0$.

Jos kaikille $C \subset N$, missä $C, N \in \Gamma$, pätee, että $\nu(C) = 0$, niin joukkoa N sanotaan *nollajoukoksi merkkimitan ν suhteen* (englanniksi *null set*).

Määritelmän nojalla siis esimerkiksi positiivinen joukko on erityisesti itsekin mitaltaan ei-negatiivinen. Toisaalta jokainen mitaltaan ei-negatiivinen joukko ei välttämättä ole positiivinen joukko. Nollajoukon määritelmä vastaa tilannetta, jossa joukko on samaan aikaan sekä positiivinen että negatiivinen.

Kuten edellä mainittiin, merkkimitoilla ei ole samoja monotonisuusominaisuuksia kuin mitoilla. Seuraavaksi todistetaan kaksi merkkimittojen monotonisuuteen liittyvää tulosta. Ensinnäkin merkkimitan suhteen äärellisen joukon osajoukot ovat äärellisiä. Toisaalta monotonisuus saavutetaan rajoittumalla positiiviseen tai negatiiviseen joukkoon.

LEMMA 1.18. *Olkoot (X, Γ) mitta-avaruus ja ν merkkimitta tuossa avaruudessa. Olkoot lisäksi $A, B \in \Gamma$, $A \subset B$, siten, että $|\nu(B)| < \infty$. Tällöin myös $|\nu(A)| < \infty$.*

TODISTUS. Tiedetään (katso lause 1.6), että

$$\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A).$$

Tästä huomataan, että jos $\nu(B)$ on äärellinen, niin myös $\nu(A)+\nu(B\setminus A)$ on äärellinen. Täten $\nu(A)$ on äärellinen, sillä laajennetun reaaliakselin summa on äärellinen vain, jos kaikki summattavat ovat äärellisiä. □

LEMMA 1.19. *Olkoot (X, Γ) mitta-avaruus ja ν sen merkkimitta. Olkoot lisäksi $A, B \in \Gamma$, $A \subset B$, siten, että*

(1) B on positiivinen. Tällöin $\nu(A) \leq \nu(B)$.
(2) B on negatiivinen. Tällöin $\nu(A) \geq \nu(B)$.

TODISTUS. Alkuun todetaan, että $B \setminus A \in \Gamma$, $B \setminus A \subset B$.
Oletetaan ensin, että B on positiivinen. Koska tällöin $\nu(B \setminus A) \geq 0$, niin merkkimitan additiivisuuden nojalla

$$\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) \geq \nu(A) + 0 = \nu(A).$$

Vastaavasti jos B on negatiivinen, niin $\nu(B \setminus A) \leq 0$ ja täten

$$\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) \leq \nu(A).$$

□

Tutkitaan sitten joukon positiivisuuden (samoin kuin negatiivisuuden ja nollajoukkouden) säilymistä joukkojen erotuksessa ja numeroituvassa yhdisteessä. Näitä ominaisuuksia tullaan käyttämään avaruuden hajotelmissa merkkimitan suhteen.

LEMMA 1.20. *Olkoot (X, Γ) mitta-avaruus ja ν merkkimitta tuossa avaruudessa. Olkoot lisäksi $A, B \in \Gamma$ siten, että A on positiivinen joukko merkkimitan ν suhteen. Tällöin $A \setminus B \in \Gamma$ on positiivinen joukko.*

TODISTUS. Olkoon $P \in \Gamma$ siten, että $P \subset A\setminus B$. Tällöin selvästi $P \subset A$. Oletuksen nojalla $\nu(P) \geq 0$, joten $A \setminus B$ on positiivinen joukko. □

LEMMA 1.21. *Olkoot (X, Γ) mitta-avaruus ja ν merkkimitta tuossa avaruudessa, ja olkoot lisäksi $A_i \in \Gamma$ positiivisia joukkoja merkkimitan ν suhteen kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin myös $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on positiivinen joukko.*

TODISTUS. Todistus mukailee lähdettä [**13**, s. 198].
Osoitetaan, että positiivisten joukkojen numeroituvan yhdisteen mielivaltainen osajoukko on ν-mitaltaan ei-negatiivinen. Tällöin yhdiste itsessään on positiivinen joukko.
Olkoon siis $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $B \in \Gamma$. Asetetaan, että $B_1 := B \cap A_1$ ja että $B_k := B \cap \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$, kun $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Osoitetaan nyt, että

(1) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$
(2) joukot B_k ovat pareittain pistevieraita.

Todistetaan ensin ominaisuus (1): Olkoon $x \in B$. Koska $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, niin $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Täten on olemassa pienin $m \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in A_m$.

Jos $m = 1$, niin $x \in B \cap A_1 = B_1$, jolloin $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Jos $m > 1$, niin $x \in A_m$ ja kaikille $i < m$ pätee, että $x \notin A_i$. Täten x ei kuulu yhdisteeseen $\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$ ja näin ollen

$$x \in B \cap \left(A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \right) = B_m.$$

Tässäkin tapauksessa siis $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Olkoon sitten $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Tällöin on $j \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in B_j$. Näin ollen $x \in B \cap \left(A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right)$ ja täten x on joukon B alkio. Tästä seuraa, että

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Seuraavaksi todistetaan ominaisuus (2): Tehdään antiteesi, että on olemassa $m, n \in \mathbb{N}$, joilla $m \neq n$ mutta

$$B_m \cap B_n \neq \emptyset.$$

Voidaan olettaa, että $m > n$. Otetaan alkio x leikkauksesta $B_m \cap B_n$. Tällöin

$$x \in B_m = B \cap \left(A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \right),$$

joten x ei kuulu yhdisteeseen $\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$. Erityisesti $x \notin A_n$, sillä oletettiin, että $m > n$. Näin ollen

$$x \notin B_n = B \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right).$$

Tämä on ristiriita, joten on oltava, että joukot B_k ovat pareittain pistevieraita.

Selvästi kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee, että $B_k \subset A_k$. Koska joukot A_k oletettiin positiivisiksi merkkimitan ν suhteen, niin tällöin $\nu(B_k) \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tämän ja edellä todistettujen ominaisuuksien (1) ja (2) nojalla pätee, että

$$\nu(B) = \nu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) \geq 0,$$

missä toisessa yhtäsuuruudessa käytettiin merkkimitan additiivisuutta. Näin ollen $\nu(B) \geq 0$, joten $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on positiivinen joukko merkkimitan ν suhteen. □

Huomautus 1.22. Lemmat 1.20 ja 1.21 voidaan todistaa samalla tavalla myös negatiivisille joukoille sekä nollajoukoille. Lisäksi, koska $\emptyset \in \Gamma$ on määritelmällisesti sekä positiivinen että negatiivinen joukko (ja nollajoukko), niin lemma 1.21 pätee myös äärellisille yhdisteille.

LUKU 2

Hajotelmat merkkimitan suhteen

Tässä luvussa keskitytään kahteen tärkeään merkkimittoihin liittyvään hajotelmalauseeseen. Ensimmäinen on niin sanottu Hahnin hajotelmalause, jonka mukaan jokainen merkkimitalla varustettu mitta-avaruus voidaan hajottaa kahteen miltei yksikäsitteiseen pistevieraaseen joukkoon, joista toinen on positiivinen ja toinen taas negatiivinen. Toisena todistettava Jordanin hajotelmalause on melko suora seuraus Hahnin hajotelmalauseesta, ja sen nojalla jokainen merkkimitta voidaan hajottaa kahden mitan erotukseksi.

2.1. Hahnin hajotelmalause

LAUSE 2.1 (**Hahnin hajotelmalause**). *Olkoot* (X, Γ) *mitta-avaruus ja* ν *sen merkkimitta.*

Tällöin on olemassa merkkimitan ν *suhteen positiivinen joukko* $P \subset X$ *ja negatiivinen joukko* $N \subset X$ *siten, että* $P \cup N = X$ *ja* $P \cap N = \emptyset$.

TODISTUS. Todistus seuraa lähdettä [**8**, s. 25 – 27].

Riittää osoittaa väite tapauksessa, jossa merkkimitta ν ei saavuta arvoa $-\infty$. Tapauksessa, jossa ν saavuttaa arvon $-\infty$, muttei arvoa ∞, voitaisiin tutkia vastaavasti merkkimittaa $-\nu$.

Merkitään avaruuden (X, Γ) negatiivisten joukkojen joukkoa symbolilla $\mathcal{N}$. Toisin sanoen olkoon joukko $\mathcal{N} := \{A \in \Gamma : A \text{ on negatiivinen joukko}\}$. Asetetaan, että

$$\eta := \inf_{A \in \mathcal{N}} \nu(A).$$

Nyt täytyy olla, että $\eta > -\infty$, sillä jos näin ei olisi, voitaisiin kaikille $k \in \mathbb{N}$ valita negatiiviset joukot A_k siten, että $\nu(A_k) < -k$. Tuolloin siis $\nu(A_k) \to -\infty$. Kun asetettaisiin, että

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

niin huomautuksen 1.22 nojalla $N \in \mathcal{N}$, ja tällöin saataisiin, että $\nu(N) = \eta = -\infty$. Tämä kuitenkin olisi ristiriita, sillä oletettiin, ettei ν saavuta arvoa $-\infty$.

Asetettu luku η on suurempaa kuin $-\infty$. Näin ollen infimumin ominaisuuksien nojalla jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $A_k \in \mathcal{N}$, jolle

$$\nu(A_k) < \eta + \tfrac{1}{k}.$$

Tällä tavalla löydetään joukon $\mathcal{N}$ jono $(A_k)_{k=1}^{\infty}$, jolla selvästi $\lim_{k \to \infty} \nu(A_k) = \eta$.

Asetetaan taas, että $N := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Koska kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee, että $A_k \subset N$, niin lemman 1.19 nojalla $\nu(A_k) \geq \nu(N)$. Tästä seuraa, että myös

$$\eta \geq \nu(N).$$

Toisaalta luvun η määritelmän nojalla $\eta \leq \nu(N)$. Täten on oltava, että

$$\nu(N) = \eta.$$

Tutkitaan seuraavaksi joukkoa $N^C = X \setminus N =: P \in \Gamma$. Näytetään, että joukko P on positiivinen, jolloin on löydetty joukot $N, P \in \Gamma$, jotka selvästi ovat pistevieraat, joiden yhdiste on koko avaruus X ja joista toinen on negatiivinen ja toinen positiivinen merkkimitan ν suhteen. Tämä todistaa lauseen.

Tehdään antiteesi, että P ei olekaan positiivinen. Tällöin se sisältää joukon $B \in \Gamma$, jolle $\nu(B) < 0$. Koska $B \subset P = N^C$, niin $B \cap N = \emptyset$, ja näin ollen

$$\nu(B \cup N) = \nu(B) + \nu(N) = \nu(B) + \eta < \eta, \tag{2.1}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa aiemmasta havainnosta, että $\eta > -\infty$. Täten joukko B ei voi olla negatiivinen, koska huomautuksen 1.22 nojalla myös joukko $B \cup N$ olisi negatiivinen ja tällöin epäyhtälön (2.1) lisäksi pätisi infimumin määritelmän nojalla, että

$$\eta \leq \nu(B \cup N).$$

Tästä seuraisi ristiriita

$$\eta \leq \nu(B \cup N) < \eta.$$

Koska joukko B ei siis voi olla negatiivinen, on sillä oltava Γ-mitallinen, merkkimitaltaan positiivinen osajoukko B_1 eli $\nu(B_1) > 0$. Valitaan nyt, että n_1 on pienin sellainen luonnollinen luku, jolle on olemassa edellä mainitun kaltainen joukon B osajoukko $B_1 \in \Gamma$ siten, että $\nu(B_1) \geq \frac{1}{n_1}$. Aiemmin oletettiin, että $\nu(B) < 0$. Näin ollen, koska $B_1 \subset B$, lemman 1.18 nojalla myös $\nu(B_1) < \infty$. Lauseen 1.16 nojalla nyt pätee

$$\nu(B \setminus B_1) = \nu(B) - \nu(B_1) \leq \nu(B) - \frac{1}{n_1} < 0.$$

Samoilla perusteilla kuin joukon B tapauksessa ei nytkään voi joukko $B \setminus B_1$ olla negatiivinen. Siksi on oltava olemassa $B_2 \in \Gamma$, $B_2 \subset B \setminus B_1$, jolle $\nu(B_2) > 0$.

Valitaan seuraavaksi, että n_2 on pienin sellainen luonnollinen luku, jolle on olemassa joukon $B \setminus B_1 \in \Gamma$ osajoukko $B_2 \in \Gamma$ siten, että $\nu(B_2) \geq \frac{1}{n_2}$. Edellä tehdyillä päättelyillä päädytään tässäkin tapauksessa johtopäätökseen, että

$$\nu\left((B \setminus B_1) \setminus B_2\right) = \nu\left(B \setminus (B_1 \cup B_2)\right) < 0.$$

Näin jatkamalla päästään vaiheessa $p \in \mathbb{N}$ tilanteeseen, jossa on valittu pienin luonnollinen luku n_p, jolle pätee, että on olemassa joukon $B \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} B_i$ osajoukko $B_p \in \Gamma$ siten, että $\nu(B_p) \geq \frac{1}{n_p}$.

Koska $B_i \subset B$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin myös $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset B$. Täten lemman 1.18 nojalla $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) < \infty$. Nyt merkkimitan additiivisuuden nojalla

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) < \infty,$$

sillä joukot B_i ovat pareittain pistevieraita (vertaa lemman 1.21 todistukseen). Toisin sanoen positiiviterminen sarja $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i)$ suppenee, joten summattavien termien tulee supeta nollaan eli

$$\lim_{i \to \infty} \nu(B_i) = 0.$$

Koska jokaisella $i \in \mathbb{N}$ pätee $\nu(B_i) \geq \frac{1}{n_i} > 0$, on oltava myös, että

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} = 0$$

eli täten luvut n_i kasvavat rajatta, kun indeksi i kasvaa.

Olkoon sitten $C \in \Gamma$, $C \subset B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Osoitetaan, että tällöin kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee, että

$$\nu(C) \leq \frac{1}{n_j - 1}.$$

Jos tämä ei pätisi, niin olisi $l \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\nu(C) > \frac{1}{n_l - 1} > \frac{1}{n_l}.$$

Olkoon l_0 pienin tällainen luku, jolloin siis $\nu(C) > \frac{1}{n_{l_0}-1}$. Toisaalta luku n_{l_0} on määritelmällisesti pienin luonnollinen luku, jolle pätee, että on Γ-mitallinen joukko $D \subset B \setminus \bigcup_{i=1}^{l_0-1} B_i$, jolle $\nu(D) \geq \frac{1}{n_{l_0}}$. Kuitenkin selvästi

$$C \subset B \setminus \bigcup_{i=1}^{l_0-1} B_i$$

ja $n_{l_0} - 1 < n_{l_0}$, joten ei voi olla, että $\nu(C) > \frac{1}{n_{l_0}-1}$.

Nyt pätee, että

$$\nu(C) \leq \frac{1}{n_j - 1} \to 0,$$

sillä $n_j \to \infty$, kun $j \to \infty$. Näin ollen $\nu(C) \leq 0$, joten on oltava

$$B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{N},$$

sillä sen mielivaltainen Γ-mitallinen osajoukko on merkkimitaltaan ei-positiivinen. Tällöin myös $N \cup (B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \in \mathcal{N}$, jolloin

$$\nu\left(N \cup (B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\right) \geq \eta.$$

Toisaalta lauseen 1.16 nojalla pätee

$$\nu\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \nu(B) - \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

ja vielä

$$\nu(B) - \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) < \nu(B) < 0,$$

sillä $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) > 0$. Toisin sanoen $\nu\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) < 0$. Nyt on päätelty

$$\nu\left(N \cup (B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\right) = \nu(N) + \nu\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) < \nu(N) = \eta,$$

mistä seuraa, että

$$\eta \leq \nu\left(N \cup (B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\right) < \eta.$$

Tämä on ristiriita, joten antiteesi on epätotta ja on oltava, että $P := N^C$ on positiivinen joukko.

Nyt on löydetty joukot $N, P = N^C \in \Gamma$ siten, että $N \cup P = X$, $N \cap P = \emptyset$ ja N on negatiivinen ja P on positiivinen merkkimitan ν suhteen. Lause on siis todistettu. □

Hahnin hajotelmalauseen joukkoparia (N, P) kutsutaan *avaruuden X Hahnin hajotelmaksi merkkimitan ν suhteen* (englanniksi *Hahn decomposition*). Tämä hajotelma ei kuitenkaan ole täysin yksikäsitteinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 2.2. Olkoot μ mitta ja $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integroituva. Asetetaan kaikille mitallisille joukoille $A \subset [a,b]$, että

$$\nu(A) := \int_A f\,d\mu.$$

Tällöin tiedetään, että ν on merkkimitta. Lisäksi eräs avaruuden $[a,b]$ Hahnin hajotelma sen suhteen on (N, P), missä

$$N := \{x \in [a,b] : f(x) < 0\} \quad \text{ja} \quad P := \{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}.$$

Toisaalta myös jako $(\tilde{N}, \tilde{P})$, missä

$$\tilde{N} := \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\} \quad \text{ja} \quad \tilde{P} := \{x \in [a,b] : f(x) > 0\},$$

muodostaa avaruuden $[a,b]$ Hahnin hajotelman merkkimitan ν suhteen. [**13**, s. 202]

Esimerkin 2.2 tilanteessa esitetyt kaksi eri Hahnin hajotelmaa eroavat toisistaan siinä, kumpaan hajotelman joukoista luetaan mukaan funktion f nollakohdat. Merkitään funktion f nollakohdista koostuvaa joukkoa symbolilla $\mathcal{O}$. Tällöin lauseen 1.11 nojalla

$$\nu(\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{O}} f\,d\mu = 0.$$

Toisin sanoen Hahnin hajotelmat eroavat esimerkin 2.2 tapauksessa toisistaan nollamittaisen joukon verran. Käykin ilmi, että kyseinen joukko on aina nollajoukko (katso lause 2.5).

Ennen edellä mainitun ominaisuuden tarkkaa todistamista määritellään kahden joukon eroavaisuutta edustava joukko-operaatio, symmetrinen erotus:

Määritelmä 2.3 (Symmetrinen erotus). Olkoot A ja B joukkoja. Tällöin sanotaan, että joukko

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

on niiden *symmetrinen erotus* (englanniksi *symmetric difference*).

Huomataan, että joukkojen A ja B symmetrinen erotus sisältää täsmälleen ne alkiot, joiden osalta joukot eroavat toisistaan. Toisin sanoen $A = B$, jos ja vain jos $A \triangle B = \emptyset$.

LEMMA 2.4. *Olkoot* $A, B, \hat{A}, \hat{B} \subset X$ *joukkoja siten, että*

$$A \cup B = X = \hat{A} \cup \hat{B} \quad \text{ja} \quad A \cap B = \emptyset = \hat{A} \cap \hat{B}.$$

Tällöin

$$(A \cap \hat{B}) \cup (\hat{A} \cap B) = A \triangle \hat{A} = B \triangle \hat{B}.$$

TODISTUS. Osoitetaan, että $(A \cap \hat{B}) \cup (\hat{A} \cap B) = A \triangle \hat{A}$. Yhtäsuuruus joukon $B \triangle \hat{B}$ kanssa todistetaan vastaavasti.

Olkoon $x \in (A \cap \hat{B}) \cup (\hat{A} \cap B)$. Voidaan olettaa, että $x \in A \cap \hat{B}$. Tällöin $x \in A$ ja $x \in \hat{B}$. Koska $\hat{A} \cap \hat{B} = \emptyset$ ja $\hat{A} \cup \hat{B} = X$, niin alkio x ei voi kuulua joukkoon $\hat{A}$. Näin ollen $x \in A \setminus \hat{A}$, joten

$$x \in (A \setminus \hat{A}) \cup (\hat{A} \setminus A) = A \triangle \hat{A}.$$

Olkoon sitten $x \in A \triangle \hat{A}$, jolloin voidaan olettaa, että $x \in A \setminus \hat{A}$. Toisin sanoen $x \in A$ ja $x \notin \hat{A}$. Näin ollen pätee myös, että $x \in \hat{B}$, joten

$$x \in A \cap \hat{B}.$$

Tästä seuraa, että

$$x \in (A \cap \hat{B}) \cup (\hat{A} \cap B),$$

ja näin on osoitettu, että $(A \cap \hat{B}) \cup (\hat{A} \cap B) = A \triangle \hat{A}$. □

Nyt voidaan todistaa eri Hahnin hajotelmien eroavaisuuksiin liittyvä tulos, jonka mukaan ne eroavat toisistaan pelkästään nollajoukon verran:

LAUSE 2.5. *Olkoon* ν *merkkimitta mitta-avaruudessa* (X, Γ)*. Olkoot lisäksi parit* (N_1, P_1) *ja* (N_2, P_2) *avaruuden* X *Hahnin hajotelmia merkkimitan* ν *suhteen. Tällöin joukot*

$$N_1 \triangle N_2 \quad \text{ja} \quad P_1 \triangle P_2$$

ovat nollajoukkoja.

TODISTUS. Perustuu todistukseen lähteessä [**16**, s. 109].

Tulee siis näyttää, että jokaiselle $C, D \in \Gamma$, jolle $C \subset N_1 \triangle N_2$ ja $D \subset P_1 \triangle P_2$ pätee, että $\nu(C) = 0$ ja $\nu(D) = 0$.

Lemman 2.4 nojalla riittää osoittaa tämä tapauksessa $C \subset N_1 \triangle N_2$. Olkoon $C \in \Gamma$, $C \subset N_1 \triangle N_2$. Saman lemman nojalla

$$C \subset N_1 \triangle N_2 = (N_1 \cap P_2) \cup (N_2 \cap P_1).$$

Nyt selvästi

$$C = (C \cap (N_1 \cap P_2)) \cup (C \cap (N_2 \cap P_1)).$$

Koska joukot N_1 ja P_1 sekä N_2 ja P_2 ovat keskenään pistevieraita, myös joukot $C \cap (N_1 \cap P_2)$ ja $C \cap (N_2 \cap P_1)$ ovat pistevieraita. Näin ollen

$$\begin{aligned} \nu(C) &= \nu\big((C \cap (N_1 \cap P_2)) \cup (C \cap (N_2 \cap P_1))\big) \\ &= \nu(C \cap (N_1 \cap P_2)) + \nu(C \cap (N_2 \cap P_1)). \end{aligned}$$

Nyt $C \cap (N_1 \cap P_2) \subset N_1$ ja $C \cap (N_1 \cap P_2) \subset P_2$. Täten joukko $C \cap (N_1 \cap P_2)$ on sekä negatiivinen että positiivinen. Tämä tarkoittaa, että

$$\nu(C \cap (N_1 \cap P_2)) = 0.$$

Vastaavasti $\nu(C \cap (N_2 \cap P_1)) = 0$. Nyt voidaan päätellä, että

$$\nu(C) = \nu(C \cap (N_1 \cap P_2)) + \nu(C \cap (N_2 \cap P_1)) = 0 + 0 = 0.$$

Näytetään vielä, että $N_1 \triangle N_2 \in \Gamma$ ja $P_1 \triangle P_2 \in \Gamma$. Tällöin edellä todistetun nojalla $\nu(N_1 \triangle N_2) = 0$ ja $\nu(P_1 \triangle P_2) = 0$.

Koska $N_1, N_2 \in \Gamma$, niin myös $N_1 \setminus N_2 \in \Gamma$ ja $N_2 \setminus N_1 \in \Gamma$ ja näin ollen

$$(N_1 \setminus N_2) \cup (N_2 \setminus N_1) = N_1 \triangle N_2 \in \Gamma.$$

Vastaavasti voidaan näyttää, että $P_1 \triangle P_2 \in \Gamma$. □

Hahnin hajotelma ei siis ole täysin yksikäsitteinen, mutta lauseessa 2.5 todistetun ominaisuuden takia sanotaan, että Hahnin hajotelmat ovat *oleellisesti yksikäsitteiset* (englanniksi *essentially unique*) eli niitä voidaan pitää periaatteessa samoina.

2.2. Jordanin hajotelmalause

Hahnin hajotelmalauseen melko suorana seurauksena voidaan nyt osoittaa, että jokainen merkkimitta on kahden mitan erotus. Varsinaisen Jordanin hajotelmalauseen 2.13 väite on seuraavaa lausetta jonkin verran vahvempi.

SEURAUS 2.6 (Jordanin hajotelmalause). *Olkoot (X, Γ) mitta-avaruus ja ν sen merkkimitta.*

Tällöin on olemassa mitat λ ja η, joista ainakin toinen on äärellinen ja joille $\nu(A) = \lambda(A) - \eta(A)$ kaikilla $A \in \Gamma$.

TODISTUS. Olkoon (N, P) avaruuden X Hahnin hajotelma merkkimitan ν suhteen (katso Hahnin hajotelmalause 2.1). Asetetaan kaikille $A \in \Gamma$, että

$$\lambda(A) := \nu(P \cap A) \quad \text{ja} \quad \eta(A) := -\nu(N \cap A).$$

Osoitetaan, että asetetut λ ja η ovat todella mittoja:

(1) Selvästikin $\lambda(\emptyset) = 0 = \eta(\emptyset)$.
(2) Pätee, että $P \cap A \subset P$, joten $\lambda(A) := \nu(P \cap A) \geq 0$, koska P on positiivinen joukko.
   Toisaalta, koska vastaavasti $N \cap A \subset N$, niin $\nu(N \cap A) \leq 0$, sillä N on negatiivinen joukko. Täten $\eta(A) := -\nu(N \cap A) \geq 0$.
(3) Olkoot $A_i \in \Gamma$ pareittain pistevieraita joukkoja kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin myös joukot $P \cap A_i \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraita, samoin joukot $N \cap A_i \in \Gamma$. Näin ollen merkkimitan ν additiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \nu\left(P \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \\ &= \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(P \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(P \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).\end{aligned}$$

Vastaavasti päättelemällä saadaan, että

$$\begin{aligned}\eta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= -\nu\left(N \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)\\ &= -\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(N \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} -\nu(N \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta(A_i).\end{aligned}$$

Asetetut funktiot λ ja η ovat täten mittoja.

Olkoon nyt $A \in \Gamma$. Tällöin $A = (P \cap A) \cup (N \cap A)$, missä joukot $N \cap A$ ja $P \cap A$ ovat pistevieraita. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu\left((P \cap A) \cup (N \cap A)\right)\\ &= \nu(P \cap A) + \nu(N \cap A) = \nu(P \cap A) - (-\nu(N \cap A)) = \lambda(A) - \eta(A).\end{aligned}$$

Koska ν on merkkimitta, saavuttaa se korkeintaan toisen arvoista $-\infty$ ja ∞. Näin ollen ainakin toisen mitoista λ ja η tulee olla äärellinen. $\square$

Jordanin hajotelmalauseen kahden mitan erotusta $\lambda - \eta$ kutsutaan *merkkimitan ν Jordanin hajotelmaksi* (englanniksi *Jordan decomposition*). Usein merkkimitan Jordanin hajotelmaa merkitään $\nu_+ - \nu_-$. Hajotelman mittaa ν_+ kutsutaan merkkimitan ν positiiviosaksi ja vastaavasti mittaa ν_- sen negatiiviosaksi.

Jordanin hajotelmalause kertoo, että jokainen merkkimitta voidaan hajottaa kahden mitan erotukseksi. Lause osoittautuu edempänä todella hyödylliseksi, sillä sen nojalla useat merkkimittoja koskevat ongelmat voidaan palauttaa koskemaan helpommin käsiteltäviä mittoja.

Määritellään nyt mitaksi osoittautuva (katso lause 2.8) joukkofunktio, kokonaisheilahtelu, jota käytetään määriteltäessä ominaisuuksia merkkimitoille. Myöhemmin todistettavasta varsinaisesta Jordanin hajotelmalauseesta 2.13 seuraa, että kokonaisheilahtelu on funktiona hyvin määritelty.

MÄÄRITELMÄ 2.7 (Merkkimitan kokonaisheilahtelu). Olkoot $\nu\colon \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$ merkkimitta mitta-avaruudessa (X, Γ) ja $\nu_+ - \nu_-$ sen Jordanin hajotelma. Tällöin funktiota

$$|\nu|\colon \Gamma \to [0, \infty],\ \ |\nu|(A) := \nu_+(A) + \nu_-(A)$$

sanotaan *merkkimitan ν kokonaisheilahteluksi* (englanniksi *total variation*).

Muistetaan, että kahden mitan summa on myös aina mitta. Tämä pätee erityisesti myös merkkimitan kokonaisheilahtelulle:

LAUSE 2.8. *Merkkimitan kokonaisheilahtelu on mitta.*

HUOMAUTUS 2.9. Olkoot $A \in \Gamma$ mitta-avaruudessa (X, Γ) ja ν merkkimitta, jonka Jordanin hajotelma on

$$\nu = \nu_+ - \nu_-.$$

Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$|\nu(A)| = |\nu_+(A) - \nu_-(A)| \leq |\nu_+(A)| + |\nu_-(A)| = \nu_+(A) + \nu_-(A) = |\nu|(A).$$

Täten siis yleisesti merkkimitalle ν pätee

$$0 \leq |\nu(E)| \leq |\nu|(E)$$

kaikilla $E \in \Gamma$.

Koska joukkofunktiot ν_+ ja ν_- ovat mittoja, niin selvästi

$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$$

implikoi, että myös

$$\nu(A) = 0.$$

Käänteinen ei välttämättä päde.

Seuraavaksi määritellään merkkimittojen keskinäinen singulaarisuus, joka liittyy olennaisesti jo osaltaan todistettuun Jordanin hajotelmalauseeseen, kuten tullaan näkemään:

MÄÄRITELMÄ 2.10 (Merkkimittojen singulaarisuus). Olkoot ν ja μ merkkimittoja avaruudessa (X, Γ), ja olkoot olemassa joukot $A, B \in \Gamma$, joilla

$$A \cup B = X \quad \text{ja} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Jos kaikille Γ-mitallisille $C \subset A$ ja $D \subset B$ pätee $|\nu|(C) = 0$ ja $|\mu|(D) = 0$, niin sanotaan, että mitat ν ja μ ovat *keskenään singulaariset* (englanniksi *mutually singular*) ja merkitään

$$\nu \perp \mu.$$

Toisin sanoen kahden merkkimitan keskinäinen singulaarisuus kertoo, että merkkimittojen kokonaisheilahtelut antavat nollasta poikkeavia arvoja täysin päinvastaisissa avaruuden osissa. Joskus sanotaankin, että singulaariset merkkimitat ovat *keskittyneet* (englanniksi *concentrated*) avaruuden eri osiin.

HUOMAUTUS 2.11. Joissakin lähteissä merkkimittojen ν ja μ singulaarisuus määritellään siten, että $\nu \perp \mu$, jos on olemassa mitalliset, pistevieraat, avaruuden X täyttävät joukot A ja B, joilla $|\nu|(A) = 0$ ja $|\mu|(B) = 0$. Usein joukon B sijasta merkitään A^C. Tällaista määritelmää käytetään esimerkiksi lähteessä [**6**].

Määritelmästä 2.10 seuraa, että myös $|\nu|(A) = 0$ ja $|\mu|(B) = 0$, sillä $A, B \in \Gamma$.

Oletetaan sitten vaihtoehtoisen määritelmän tilanne todeksi, ja olkoot $C, D \in \Gamma$ siten, että $C \subset A$ ja $D \subset B$. Koska kokonaisheilahtelut $|\nu|$ ja $|\mu|$ ovat mittoja, niin ne ovat monotonisia, joten

$$|\nu|(C) \leq |\nu|(A) = 0$$

eli $|\nu|(C) = 0$. Vastaavasti pätee, että $|\mu|(D) = 0$.

Näin ollen esitetyt määritelmät ovat keskenään ekvivalentit.

ESIMERKKI 2.12. Olkoot m Lebesguen mitta ja δ_a Diracin mitta, jossa $a \in \mathbb{R}$, mitta-avaruudessa $(\mathbb{R}, \Gamma)$. Tällöin

$$(\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cup \{a\} = \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \emptyset.$$

Lisäksi kaikille $A \in \Gamma$, joille $A \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ pätee, että

$$|\delta_a|(A) = \delta_a(A) = 0,$$

koska $a \notin A$. Toisaalta kaikille $B \in \Gamma$, $B \subset \{a\}$ pätee

$$|m|(B) = m(B) \leq m(\{a\}) = 0,$$

koska $\{a\}$ on yksiönä numeroituva. Näin ollen Lebesguen ja Diracin mitat ovat keskenään singulaariset eli $m \perp \delta_a$.

Nyt voidaan esitellä varsinainen Jordanin hajotelmalause. Sen mukaan merkkimitan voi hajottaa kahden mitan erotukseksi, mutta lisäksi hajotelman mitat ovat yksikäsitteiset ja keskenään singulaariset.

LAUSE 2.13 (**Jordanin hajotelmalause**). *Olkoot* (X, Γ) *mitta-avaruus ja* ν *sen merkkimitta.*

Tällöin on olemassa yksikäsitteiset keskenään singulaariset mitat ν_+ *ja* ν_-*, joista ainakin toinen on äärellinen ja joille* $\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$ *kaikilla* $A \in \Gamma$.

TODISTUS. Riittää osoittaa mittojen yksikäsitteisyys ([**9**, s. 122]) ja keskinäinen singulaarisuus.

Olkoon $\nu_+ - \nu_-$ merkkimitan ν Jordanin hajotelma, joka on konstruoitu avaruuden X Hahnin hajotelman (N, P) avulla. Olkoot lisäksi $(\tilde{N}, \tilde{P})$ eräs toinen avaruuden X Hahnin hajotelma, ja $A \in \Gamma$. Tällöin selvästi $A \cap (N \setminus \tilde{N}) \subset A \cap N \subset N$, joten $A \cap (N \setminus \tilde{N})$ on negatiivinen joukko merkkimitan ν suhteen. Lisäksi $A \cap (N \setminus \tilde{N}) \subset A \cap \tilde{P} \subset \tilde{P}$, sillä $\tilde{N} \cup \tilde{P} = X$ ja $\tilde{N} \cap \tilde{P} = \emptyset$. Tästä seuraa, että $A \cap (N \setminus \tilde{N})$ on myös positiivinen joukko, joten on oltava, että

$$\nu\left(A \cap (N \setminus \tilde{N})\right) = 0.$$

Vastaavasti saadaan pääteltyä, että $\nu\left(A \cap (\tilde{N} \setminus N)\right) = 0$.

Näin ollen

$$\begin{aligned}\nu(A \cap N) &= \nu\left(A \cap [(N \setminus \tilde{N}) \cup (N \cap \tilde{N})]\right) = \nu\left(A \cap (N \setminus \tilde{N})\right) + \nu\left(A \cap (N \cap \tilde{N})\right) \\ &= 0 + \nu\left(A \cap (N \cap \tilde{N})\right) = \nu\left(A \cap (N \cap \tilde{N})\right).\end{aligned}$$

Samanlaisella päättelyllä

$$\nu(A \cap \tilde{N}) = \nu\left(A \cap (\tilde{N} \setminus N)\right) + \nu\left(A \cap (N \cap \tilde{N})\right) = \nu\left(A \cap (N \cap \tilde{N})\right).$$

Tästä seuraa yhtäsuuruus

$$\nu_-(A) = \nu(A \cap N) = \nu(A \cap \tilde{N})$$

kaikilla $A \in \Gamma$. Vastaavasti voidaan päätellä, että myös

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap P) = \nu(A \cap \tilde{P}).$$

Merkkimitan ν Jordanin hajotelma ei siis riipu käytetystä Hahnin hajotelmasta, joten se on yksikäsitteinen.

Olkoon Γ-mitallinen C siten, että $C \subset N$. Tällöin

$$\nu_+(C) = \nu(C \cap P) = \nu(\emptyset) = 0.$$

Vastaavasti, jos $D \in \Gamma$, $D \subset P$, niin $\nu_-(D) = 0$. Näin ollen $\nu_+ \perp \nu_-$. □

Edellä todistetusta Jordanin hajotelman yksikäsitteisyydestä seuraa, että aiemmin määritelty merkkimitan kokonaisheilahtelu on hyvin määritelty funktio.

ESIMERKKI 2.14. Esimerkissä 1.14 nähtiin, että integroituvan funktion integrointi antaa merkkimitan. Olkoot nyt (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integroituva funktio. Tällöin

$$\nu(E) := \int_E f \, d\mu$$

on merkkimitta, kun $E \in \Gamma$. Määritelmällisesti

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu := \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu.$$

Osoitetaan, että kyseessä on merkkimitan ν Jordanin hajotelma. On oikeastaan vain osoitettava, että mitat $\lambda(E) := \int_E f^+\,d\mu$ ja $\eta(E) := \int_E f^-\,d\mu$ ovat keskenään singulaariset. Avaruuden X eräs Hahnin hajotelma on (N, P), missä $N := \{x \in X : f(x) < 0\}$ ja $P := \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ (kuten esimerkissä 2.2). Tällöin selvästi $\lambda(E) := \int_E f^+\,d\mu$ häviää joukossa N ja $\eta(E) := \int_E f^-\,d\mu$ joukossa P. Näin ollen integraalin määritelmä antaa integroituvaa funktiota integroimalla saadun merkkimitan Jordanin hajotelman.

LUKU 3

Radonin ja Nikodymin lause

Tässä luvussa määritellään aluksi mittoihin ja merkkimittoihin liittyvä tärkeä käsite absoluuttinen jatkuvuus, sekä todistetaan siihen liittyviä ominaisuuksia. Sen jälkeen esitellään tutkielman kolmas hajotelmalause, Lebesguen hajotelmalause, jonka mukaan jokainen merkkimitta voidaan hajottaa toisen merkkimitan suhteen singulaariseen ja absoluuttisesti jatkuvaan osaan. Lopuksi todistetaan tutkielman päälauseena Radonin ja Nikodymin lause eri alkuoletuksilla.

3.1. Absoluuttinen jatkuvuus

Singulaarisuus merkitsi kahden mitan tapauksessa sitä, että ne niin sanotusti keskittyvät avaruuden eri osiin. Toisin sanoen avaruus voidaan hajottaa pistevieraisiin joukkoihin, joissa mitat vuorotellen häviävät. Seuraavaksi perehdytään tietyllä tavalla singulaarisuudelle vastakohtaiseen mittojen väliseen ominaisuuteen, absoluuttiseen jatkuvuuteen. Absoluuttisessa jatkuvuudessa nimittäin mitan häviäminen implikoi myös toisen mitan häviämisen, tosin ei molemminsuuntaisesti kuten singulaarisuuden tapauksessa.

MÄÄRITELMÄ 3.1 (Mittojen absoluuttinen jatkuvuus). Olkoot μ ja ν mittoja avaruudessa (X, Γ).

Tällöin sanotaan, että mitta ν on *absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen*, jos kaikille $A \in \Gamma$, joille $\mu(A) = 0$, pätee, että $\nu(A) = 0$.

Tällöin merkitään, että $\nu \ll \mu$.

Mitan ν absoluuttinen jatkuvuus mitan μ suhteen merkitsee sitä, että jokainen μ-nollamittainen mitallinen joukko on myös ν-nollamittainen. Kuten kappaleen alussa todettiin, ei absoluuttinen jatkuvuus ole symmetrinen ominaisuus. Toisin sanoen, jos $\nu \ll \mu$, niin $\nu(A) = 0$ ei välttämättä tarkoita, että olisi oltava $\mu(A) = 0$.

Esimerkissä 1.10 osoitettiin, että mitallista ei-negatiivista funktiota integroimalla mitan μ suhteen saadaan konstruoitua mitta ν. Tutkielman päälauseen kannalta huomionarvoista on, että saatu mitta ν on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen.

ESIMERKKI 3.2. Olkoot (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $f\colon X \to [0, \infty]$ mitallinen ja $A \in \Gamma$, ja olkoon mitta ν kuten esimerkissä 1.10 eli $\nu(E) = \int_{E \cap A} f \, d\mu$.

Olkoon nyt $E \in \Gamma$, jolle $\mu(E) = 0$. Koska $E \cap A \subset E$, niin mitan monotonisuuden nojalla $\mu(E \cap A) \leq \mu(E) = 0$, joten myös $\mu(E \cap A) = 0$. Täten

$$0 = \int_{E \cap A} f \, d\mu = \nu(E).$$

Näin ollen siis pätee, että $\nu \ll \mu$.

Absoluuttinen jatkuvuus voidaan karakterisoida äärellisille mitoille ε-δ-määrittelyllä. Tästä juontuu myös ominaisuuden nimitys.

LAUSE 3.3. *Olkoot* (X, Γ, μ) *mitta-avaruus ja* ν *äärellinen mitta tässä avaruudessa.*

Tällöin $\nu \ll \mu$, *jos ja vain jos kaikille* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten, että* $\nu(A) < \varepsilon$ *aina, kun* $A \in \Gamma$ *ja* $\mu(A) < \delta$.

TODISTUS. Todistus seuraa lähdettä [**6**, s. 122 – 123].

On suoraviivaista näyttää, että ε-δ-ominaisuudesta seuraa absoluuttinen jatkuvuus: Olkoon $E \in \Gamma$, jolle $\mu(E) = 0$. Tällöin kaikille $\delta > 0$ pätee, että $\mu(E) < \delta$. Oletuksen nojalla kaikille $\varepsilon > 0$ pätee, että $\nu(E) < \varepsilon$. Näin ollen on oltava, että $\nu(E) = 0$, joten $\nu \ll \mu$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\nu \ll \mu$. Tulee näyttää, että ε-δ-ominaisuus pätee mitoille ν ja μ. Tehdään antiteesi, jonka mukaan on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikille $\delta > 0$ pätee, että $\nu(A) \geq \varepsilon$ jollekin $A \in \Gamma$, jolle $\mu(A) < \delta$.

Täten jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ löytyy $A_k \in \Gamma$ siten, että $\mu(A_k) < 2^{-k}$ ja $\nu(A_k) \geq \varepsilon$. Asetetaan sitten, että $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ ja $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, jolloin huomataan, että $B_n \in \Gamma$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja myös $B \in \Gamma$. Nyt selvästi jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $B_{n+1} \subset B_n$ sekä

$$\mu(B) \leq \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k), \tag{3.1}$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seuraa mitan monotonisuudesta sekä siitä, että selvästi $B \subset B_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja toinen mitan subadditiivisuudesta.

Lisäksi saadaan, että

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-n},$$

joten $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \to 0$, kun $n \to \infty$. Täten epäyhtälön (3.1) nojalla on oltava, että $\mu(B) = 0$.

Koska triviaalisti $B_1 \subset X$, niin mitan ν monotonisuuden ja äärellisyyden nojalla $\nu(B_1) \leq \nu(X) < \infty$. Täten lauseen 1.8 kohdan (2) nojalla

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \varepsilon,$$

sillä $B_{n+1} \subset B_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Nyt siis $\nu(B) \geq \varepsilon > 0$, vaikka $\mu(B) = 0$ ja $B \in \Gamma$. Tämä on ristiriita, sillä oletettiin, että $\nu \ll \mu$.

Näin ollen ε-δ-ominaisuus pätee. □

Absoluuttinen jatkuvuus määritellään merkkimitoille seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 3.4 (Merkkimittojen absoluuttinen jatkuvuus). Olkoot μ ja ν merkkimittoja avaruudessa (X, Γ).

Tällöin sanotaan, että merkkimitta ν on *absoluuttisesti jatkuva merkkimitan* μ *suhteen*, jos kaikille $A \in \Gamma$, joille $|\mu|(A) = 0$, pätee, että $\nu(A) = 0$. [**8**]

Myös tällöin merkitään, että $\nu \ll \mu$.

HUOMAUTUS 3.5. Esimerkkiä 3.2 voidaan käyttää hyväksi perustellessa, että esimerkin 1.14 tilanteessa merkkimitta $\nu(E) := \int_E f \, d\mu$ on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen.

Seuraavaksi todistettava lause on hyödyllinen absoluuttisesti jatkuvia merkkimittoja tutkittaessa, sillä se antaa kolme ekvivalenttia karakterisointia tilanteelle.

LAUSE 3.6. *Olkoot ν ja μ merkkimittoja mitta-avaruudessa (X, Γ), ja olkoon $\nu_+ - \nu_-$ merkkimitan ν Jordanin hajotelma. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat keskenään yhtäpitäviä:*

$$(1)\quad \nu \ll \mu, \qquad (2)\quad \nu_+ \ll \mu \quad \textit{ja} \quad \nu_- \ll \mu, \qquad (3)\quad |\nu| \ll \mu.$$

TODISTUS. Todistus perustuu lähteeseen [**8**, s. 68].

Todistetaan ensin implikaatio (1) $\implies$ (2): Olkoot $A \in \Gamma$, jolle $|\mu|(A) = 0$, ja (N, P) avaruuden X Hahnin hajotelma merkkimitan ν suhteen. Lauseen 2.8 nojalla $|\mu|$ on mitta, joten se on monotoninen ja täten $|\mu|(N \cap A) = 0$, sillä $N \cap A \subset A$. Vastaavasti $|\mu|(P \cap A) = 0$. Tällöin oletuksen nojalla myös

$$\nu(N \cap A) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \nu(P \cap A) = 0.$$

Jordanin hajotelmalauseen nojalla

$$\nu_-(A) := \nu(N \cap A) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \nu_+(A) := \nu(P \cap A) = 0.$$

Näin ollen todella pätee

$$\nu_+ \ll \mu \qquad \text{ja} \qquad \nu_- \ll \mu.$$

Seuraavaksi osoitetaan, että (2) $\implies$ (3): Olkoon taas $A \in \Gamma$, jolle $|\mu|(A) = 0$. Tällöin oletuksen nojalla

$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0 + 0 = 0.$$

Viimeiseksi näytetään, että (3) $\implies$ (1): Jos on $A \in \Gamma$, jolla $|\mu|(A) = 0$, niin huomautuksen 2.9 nojalla

$$0 \leq |\nu(A)| \leq |\nu|(A) = 0.$$

Nyt siis $|\nu(A)| = 0$, joten myös $\nu(A) = 0$.

Täten lauseen kohdat ovat keskenään yhtäpitävät. □

Absoluuttisen jatkuvuuden ε-δ-karakterisointi onnistuu myös merkkimittojen tapauksessa.

LAUSE 3.7. *Lause 3.3 pätee myös merkkimitoille ν ja μ, joista ν on äärellinen.*

TODISTUS. Todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [**9**, s. 125 – 126]. Todistuksen periaate on sama kuin mittojen tapauksessa, mutta tilanne tulee käsitellä kokonaisheilahteluiden kautta. □

Seuraavat kaksi lemmaa, 3.8 ja 3.9, käsittelevät merkkimittojen välistä absoluuttista jatkuvuutta ja singulaarisuutta. Kyseisiä lemmoja tarvitaan edempänä Lebesguen hajotelmalauseen todistamiseen.

LEMMA 3.8. *Olkoot μ ja ν merkkimittoja avaruudessa (X, Γ). Tällöin pätee, että*

(1) jos $\nu \ll |\mu|$, niin $\nu \ll \mu$,
(2) jos $\nu \perp |\mu|$, niin $\nu \perp \mu$,
(3) jos $\nu \ll \mu$ ja $\nu \perp \mu$, niin $\nu \equiv 0$.

TODISTUS. (1) Seuraa suoraan määritelmästä.

(2) Seuraa myös suoraan määritelmästä, sillä selvästi mitan $|\nu| = \nu_+ + \nu_-$ kokonaisheilahtelu on tuo mitta itse.

(3) Olkoot nyt $A, B \in \Gamma$, joille $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, ja $|\nu|$ häviää kaikilla Γ-mitallisilla joukon A osajoukoilla ja vastaavasti $|\mu|$ häviää kaikilla Γ-mitallisilla joukon B osajoukoilla. Olkoon lisäksi $\mu_+ - \mu_-$ merkkimitan μ Jordanin hajotelma.

Olkoon $E \in \Gamma$. Tällöin se voidaan esittää muodossa
$$E = (E \cap A) \cup (E \cap B).$$
Nyt merkkimitan ν additiivisuuden nojalla
$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B).$$
Koska $\nu \perp \mu$ ja $E \cap A \subset A$, niin
$$|\nu|(E \cap A) = 0.$$
Täten on oltava (katso kohta (1)), että
$$\nu(E \cap A) = 0.$$
Koska $\nu \ll \mu$ ja singulaarisuuden nojalla $|\mu|(E \cap B) = 0$, niin
$$\nu(E \cap B) = 0.$$
Näin ollen kaikille $E \in \Gamma$ pätee, että
$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = 0 + 0 = 0.$$
Toisin sanoen merkkimitta ν häviää kaikilla joukoilla eli
$$\nu \equiv 0.$$
□

LEMMA 3.9. *Olkoot ν_1, ν_2 ja μ merkkimittoja avaruudessa (X, Γ). Tällöin seuraavat pätevät:*

(1) Jos $\nu_1 \ll \mu$ ja $\nu_2 \ll \mu$, niin
$$\nu_1 + \nu_2 \ll \mu.$$
(2) Jos merkkimitat ν_1, ν_2 ja μ ovat äärellisiä ja $\nu_1 \perp \mu$ sekä $\nu_2 \perp \mu$, niin
$$\nu_1 + \nu_2 \perp \mu.$$

TODISTUS. (1) Olkoon $E \in \Gamma$, jolle $|\mu|(E) = 0$. Tällöin oletuksen nojalla $\nu_1(E) = 0$ ja $\nu_2(E) = 0$. Näin ollen
$$(\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) = 0 + 0 = 0$$
eli todella $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(2) Todistus löytyy lähteestä [**1**, s. 69].
Merkkimitat oletetaan äärellisiksi pelkästään siksi, että joukkofunktio $\nu_1 + \nu_2$ olisi hyvin määritelty merkkimitta. Ilman oletusta olisi nimittäin mahdollista päätyä tilanteeseen, jossa lasketaan summaa $-\infty + \infty$, jonka arvoa ei ole määritelty. Lisäksi merkkimittojen summafunktio $\nu_1 + \nu_2$ saattaisi saada sekä arvon $-\infty$ että arvon ∞, joten kyseessä ei edes olisi merkkimitta.

□

3.2. Lebesguen hajotelmalause

Toisen luvun lopussa ja tämän alussa on esitelty kaksi merkkimittojen välisiin suhteisiin liittyvää ominaisuutta: keskinäinen singulaarisuus ja absoluuttinen jatkuvuus. Voidaan ajatella, että näistä ensimmäinen viittaa merkkimittojen väliseen täydelliseen riippumattomuuteen toisistaan; ne operoivat täysin eri osissa mitta-avaruutta. Jälkimmäinen taas kertoo vahvasta, tosin vain toispuoleisesta, riippuvuudesta; joukkojen nollamittaisuus periytyy absoluuttisen jatkuvuuden tapauksessa.

Käy ilmi, että kahta merkkimittaa tutkittaessa toinen niistä voidaan hajottaa toisen suhteen absoluuttisesti jatkuvaan ja singulaariseen osaan, jopa yksikäsitteisesti. Tämä tulos tunnetaan nimellä Lebesguen hajotelmalause, ja se todistetaan seuraavaksi kahdessa eri tapauksessa, mitoille ja merkkimitoille, käyttämättä tutkielman päätulosta Radonin ja Nikodymin lausetta. Tutkielman lopussa hajotelmalause todistetaan vielä mitoille edellä mainittua lausetta apuna käyttäen.

LAUSE 3.10 (Lebesguen hajotelmalause). *Olkoot μ ja ν mittoja avaruudessa (X, Γ) siten, että ν on σ-äärellinen. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset mitat ν_a ja ν_s, joille pätee, että*

(1) $\nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A)$ kaikilla $A \in \Gamma$,
(2) $\nu_a \ll \mu$, ja
(3) $\nu_s \perp \mu$.

TODISTUS. Todistus seuraa lähdettä [**11**, s. 153 – 154].

Koska ν on σ-äärellinen, niin avaruus X voidaan jakaa numeroituvaan yhdisteeseen ν-äärellisiä joukkoja $A_i \in \Gamma$. Nyt siis

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

sekä kaikilla $i \in \mathbb{N}$ pätee $\nu(A_i) < \infty$. Asetetaan kaikille $B \in \Gamma$ ja $i \in \mathbb{N}$, että

$$\nu_i(B) := \nu(B \cap A_i).$$

Huomataan, että koska kaikilla $i \in \mathbb{N}$ pätee $B \cap A_i \subset A_i$, niin mitan ν monotonisuuden nojalla mitat ν_i ovat äärellisiä. Asetetaan lisäksi, että

$$\Gamma_i := \{B \in \Gamma : B \subset A_i,\ \mu(B) = 0\} \quad \text{sekä} \quad \beta_i := \sup_{C \in \Gamma_i} \nu_i(C).$$

Nyt voidaan muodostaa jonot $(E_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ siten, että $E_{j,k} \in \Gamma_j$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja

$$\lim_{k \to \infty} \nu_j(E_{j,k}) = \beta_j.$$

Seuraavaksi merkitään, että

$$E_j := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}.$$

Nyt selvästi aina pätee $E_{j,k} \subset E_j$, joten mitan monotonisuuden nojalla

$$\nu_j(E_{j,k}) \leq \nu_j(E_j)$$

kaikilla $j, k \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$\beta_j = \lim_{k \to \infty} \nu_j(E_{j,k}) \leq \nu_j(E_j).$$

Lisäksi koska $E_{j,k} \in \Gamma_j$, niin pätee myös, että $E_j = \bigcup_{k=1}^\infty E_{j,k} \subset A_j$ ja

$$\mu(E_j) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(E_{j,k}) = 0$$

eli $\mu(E_j) = 0$. Toisin sanoen $E_j \in \Gamma_j$. Näin ollen erityisesti $\beta_j \geq \nu_j(E_j)$, ja yhdistämällä päätellyt epäyhtälöt saadaan, että

$$\nu_j(E_j) = \beta_j.$$

Asetetaan nyt joukkojen E_j yhdisteelle, että

$$E := \bigcup_{j=1}^\infty E_j$$

ja määritellään kaikille $B \in \Gamma$ mitat

$$\nu_a(B) := \nu(B \cap E^C) \quad \text{ja} \quad \nu_s(B) := \nu(B \cap E).$$

Olkoon nyt $V \in \Gamma$, $V \subset E$. Tällöin mitan subadditiivisuuden ja monotonisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mu(V) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (E_j \cap V)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty (E_{j,k} \cap V)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \mu(E_{j,k} \cap V) \leq \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \mu(E_{j,k}) = 0, \end{aligned}$$

koska $E_{j,k} \in \Gamma_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Täten $\mu(V) = 0$.

Olkoon sitten $W \in \Gamma$, $W \subset E^C$. Nyt mitan monotonisuuden nojalla

$$\nu_s(W) = \nu(W \cap E) \leq \nu(E^C \cap E) = \nu(\emptyset) = 0,$$

joten $\nu_s(W) = 0$. Täten pätee, että

$$\nu_s \perp \mu.$$

Olkoon sitten $B \in \Gamma$ siten, että $\mu(B) = 0$ ja $j \in \mathbb{N}$. Ensinnäkin määritelmällisesti $E_j \in \Gamma_j$. Lisäksi $A_j \cap B \cap E^C \subset A_j$ ja

$$\mu(A_j \cap B \cap E^C) \leq \mu(B) = 0,$$

joten selvästi myös

$$\mu(A_j \cap B \cap E^C) = 0.$$

Täten siis $A_j \cap B \cap E^C \in \Gamma_j$ ja näin ollen lisäksi

$$E_j \cup (A_j \cap B \cap E^C) \in \Gamma_j.$$

Tästä taas seuraa, että $\nu_j\left(E_j \cup (A_j \cap B \cap E^C)\right) \leq \beta_j$. Toisaalta pätee

$$\begin{aligned} \nu_j\left(E_j \cup (A_j \cap B \cap E^C)\right) &= \nu(E_j) + \nu_j(A_j \cap B \cap E^C) \\ &= \beta_j + \nu_j(A_j \cap B \cap E^C), \end{aligned}$$

sillä selvästi $E_j \cap E^C = \emptyset$. On näin ollen saatu pääteltyä, että

$$\beta_j \geq \nu_j\left(E_j \cup (A_j \cap B \cap E^C)\right) = \beta_j + \nu_j(A_j \cap B \cap E^C),$$

joten $\nu_j(A_j \cap B \cap E^C) \leq 0$, sillä β_j on äärellinen. Tästä seuraa, että

$$\nu_j(A_j \cap B \cap E^C) = 0.$$

Lopulta saadaan, että

$$\begin{aligned}\nu_a(B) &= \nu(B \cap E^C) = \nu(X \cap B \cap E^C) \\ &= \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B \cap E^C\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cap B \cap E^C)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j \cap B \cap E^C) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j(A_j \cap B \cap E^C) = 0,\end{aligned}$$

joten $\nu_a(B) = 0$. Näin ollen

$$\nu_a \ll \mu$$

eli haluttu hajotelma on aina olemassa.

Todistetaan vielä löydettyjen mittojen yksikäsitteisyys, kuten lähteessä [**6**, s. 130 – 131]. Olkoot

$$\nu_{1_a} + \nu_{1_s} = \nu = \nu_{2_a} + \nu_{2_s}$$

väitteen mukaisia mitan ν Lebesguen hajotelmia. Koska mitta ν oletettiin σ-äärelliseksi, niin selvästi sellaisia ovat myös hajotelmasta saatavat mitat. Rajoitutaan nyt joukkoon A_k jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin kaikki Γ-mitalliset joukon A_k osajoukot ovat äärellismittaisia mittojen $\nu_{1_a}, \nu_{1_s}, \nu_{2_a}$ ja ν_{2_s} suhteen. Tästä seuraa, että

$$\nu_{1_a} - \nu_{2_a} = \nu_{2_s} - \nu_{1_s}.$$

Jos $\nu_{2_a} \ll \mu$, niin selvästi myös $-\nu_{2_a} \ll \mu$. Samoin pätee, että $-\nu_{1_s} \perp \mu$. Tällöin lemman 3.9 nojalla

$$\nu_{1_a} - \nu_{2_a} \ll \mu$$

ja

$$\nu_{2_s} - \nu_{1_s} \perp \mu.$$

Koska $\nu_{1_a} - \nu_{2_a} = \nu_{2_s} - \nu_{1_s}$, niin lemman 3.8 kohdan (3) nojalla

$$\nu_{1_a} - \nu_{2_a} \equiv 0 \equiv \nu_{2_s} - \nu_{1_s}.$$

Näin ollen siis

$$\nu_{1_a} = \nu_{2_a} \qquad \text{ja} \qquad \nu_{1_s} = \nu_{2_s}.$$

Koska vastaava päättely pätee rajoittumalla mihin tahansa joukkoon A_i, $i \in \mathbb{N}$, se pätee myös yleisesti koko avaruuden tapauksessa, sillä $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Täten Lebesguen hajotelma on yksikäsitteinen. □

Juuri todistettu lause 3.10 käsittelee tapausta, jossa mitta ν on σ-äärellinen. Käyttämällä edellisen kappaleen lopun lemmoja voidaan se yleistää σ-äärelliselle merkkimitalle ν.

SEURAUS 3.11 (**Lebesguen hajotelmalause**). *Olkoot μ ja ν merkkimittoja avaruudessa (X, Γ) siten, että ν on σ-äärellinen. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset merkkimitat ν_a ja ν_s, joille pätee, että*

(1) $\nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A)$ *kaikilla* $A \in \Gamma$,
(2) $\nu_a \ll \mu$, *ja*
(3) $\nu_s \perp \mu$.

TODISTUS. Lauseen 2.8 nojalla $|\mu|$ on mitta. Olkoon $\nu_+ - \nu_-$ merkkimitan ν Jordanin hajotelma, missä ν_+ ja ν_- ovat selvästi σ-äärellisiä mittoja. Nyt lauseen 3.10 nojalla ne voidaan jakaa absoluuttisesti jatkuvaan osaan ja singulaariseen osaan mitan $|\mu|$ suhteen. Merkitään

$$\nu_+ = \nu_{+_a} + \nu_{+_s} \quad \text{ja} \quad \nu_- = \nu_{-_a} + \nu_{-_s},$$

missä $\nu_{+_a}, \nu_{-_a} \ll |\mu|$ sekä $\nu_{+_s}, \nu_{-_s} \perp |\mu|$. Nyt lemman 3.8 kohtien (1) ja (2) nojalla

$$\nu_{+_a}, \nu_{-_a} \ll \mu \quad \text{sekä} \quad \nu_{+_s}, \nu_{-_s} \perp \mu.$$

On selvää, että pätee myös

$$-\nu_{-_a} \ll \mu \quad \text{ja} \quad -\nu_{-_s} \perp \mu.$$

Täten lemman 3.9 nojalla ensinnäkin

$$\nu_{+_a} - \nu_{-_a} \ll \mu.$$

Toisekseen, jos rajoitutaan merkkimitan ν σ-äärellisyyden mukaan jaetun avaruuden X ν-äärellisiin osiin, niin tällöin saman lemman nojalla myös

$$\nu_{+_s} - \nu_{-_s} \perp \mu.$$

Nyt voidaankin päätellä, että

$$\begin{aligned}
\nu &= \nu_+ - \nu_- \\
&= \nu_{+_a} + \nu_{+_s} - \nu_{-_a} - \nu_{-_s} \\
&= (\nu_{+_a} - \nu_{-_a}) + (\nu_{+_s} - \nu_{-_s}) \\
&=: \nu_a + \nu_s
\end{aligned}$$

eli merkkimitta ν on saatu jaettua absoluuttisesti jatkuvaan ja singulaariseen osaan merkkimitan μ suhteen. Väite on todistettu. □

Lebesguen hajotelmalauseen mukaista merkkimitan ν hajotelmaa $\nu_a + \nu_s$ kutsutaan *merkkimitan ν Lebesguen hajotelmaksi.*

3.3. Radonin ja Nikodymin lause

Lebesguen hajotelmalauseen mielenkiintoisin seikka tutkielman aiheen kannalta on hajotelman absoluuttisesti jatkuva osa. Tutkielman päätulos, Radonin ja Nikodymin lause, kertoo tuon absoluuttisesti jatkuvan osan olevan aina muotoa

$$\nu_a(E) = \int_E f \, d\mu$$

jollakin funktiolla f, ainakin vähintään σ-äärellisten merkkimittojen ja mittojen tapauksissa. Huomautuksesta 3.5 taas tiedetään, että mitan μ suhteen integroituvaa funktiota integroimalla saatu merkkimitta ν on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen. Näin ollen siis (σ-)äärellisen merkkimitan ja mitan välinen absoluuttinen jatkuvuus voidaan karakterisoida integroituvien funktioiden integroimiseksi.

Todistetaan ensin Radonin ja Nikodymin lauseen todistuksessa käytettävä aputulos:

LEMMA 3.12. *Olkoot μ ja ν äärellisiä mittoja, jotka eivät ole keskenään singulaarisia. Tällöin on olemassa joukko $A \in \Gamma$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ siten, että*

$$\mu(A) > 0$$

ja kaikille $B \subset A$ pätee

$$\nu(B) \geq \varepsilon\mu(B).$$

TODISTUS. Todistetaan, kuten lähteessä [**4**, s. 376].

Koska μ ja ν ovat äärellisiä mittoja, niin kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee, että

$$\lambda_j := \nu - \tfrac{1}{j}\mu$$

on merkkimitta. Olkoot sitten (N_j, P_j) avaruuden X Hahnin hajotelmia merkkimittojen λ_j suhteen, ja asetetaan, että

$$\hat{P} = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j,$$

jolloin $\hat{N} := \hat{P}^C = \bigcap_{j=1}^{\infty} N_j$.

Olkoon sitten $k \in \mathbb{N}$. Tällöin N_k on negatiivinen joukko merkkimitan λ_k suhteen, joten koska $\hat{N} \subset N_k$, niin pätee

$$\lambda_k(\hat{N}) = \nu(\hat{N}) - \tfrac{1}{k}\mu(\hat{N}) \leq 0.$$

Tämä siis tarkoittaa, että

$$\nu(\hat{N}) \leq \tfrac{1}{k}\mu(\hat{N}).$$

Koska ν on mitta ja edellinen epäyhtälö pätee kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin on oltava, että

$$\nu(\hat{N}) = 0.$$

Oletettiin, etteivät μ ja ν ole keskenään singulaariset, joten $\mu(\hat{P}) = 0$ ei ole mahdollista. Tämän vuoksi täytyy olla, että $\mu(\hat{P}) > 0$. Näin ollen mitan subadditiivisuuden nojalla

$$0 < \mu(\hat{P}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j),$$

joten on oltava $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\mu(P_m) > 0$.

Asetetaan nyt, että

$$A := P_m \qquad \text{ja} \qquad \varepsilon := \frac{1}{m}.$$

Tällöin $\mu(A) > 0$ ja kaikille $B \subset A$ pätee, että

$$\lambda_m(B) \geq 0,$$

sillä P_m on positiivinen joukko merkkimitan λ_m suhteen. Toisin sanoen $\nu(B) - \frac{1}{m}\mu(B) \geq 0$ eli

$$\nu(B) \geq \tfrac{1}{m}\mu(B).$$

□

Aputuloksen jälkeen voidaan siirtyä todistamaan Radonin ja Nikodymin lauseen ensimmäinen versio, joka koskee äärellisiä mittoja. Tavoitteena on lopulta saada yleistettyä lause σ-äärellisen merkkimitan tapaukseen.

Lause 3.13 (Radonin ja Nikodymin lause). *Olkoot μ ja ν äärellisiä mittoja avaruudessa (X, Γ) siten, että $\nu \ll \mu$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Γ-mitallinen funktio $f\colon X \to [0, \infty[$, jolle*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

kaikilla $E \in \Gamma$.

Huomautus 3.14. Radonin ja Nikodymin lauseen 3.13 funktio on yksikäsitteinen siinä mielessä, että jos f ja g ovat kyseisiä funktioita, niin tällöin $f = g$ μ-melkein kaikkialla joukossa X. Sama pätee myös Radonin ja Nikodymin lauseen myöhemmissä versioissa.

Lauseen 3.13 todistus, tapa 1. Mukaillaan lähteen [**4**, s. 375 – 377] todistusta.

Asetetaan, että

$$\mathcal{F} := \left\{ \text{mitallinen } \phi\colon X \to [0, \infty] \,\middle|\, \int_A \phi \, d\mu \leq \nu(A) \text{ kaikilla } A \in \Gamma \right\},$$

joka on selvästi epätyhjä, sillä nollafunktio kuuluu siihen. Aloitetaan osoittamalla, että

(1) jos $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m \in \mathcal{F}$ jollakin $m \in \mathbb{N}$, niin myös $\max(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m) \in \mathcal{F}$,
(2) jos $(\psi_j)_{j=1}^{\infty}$ on kasvava jono joukon $\mathcal{F}$ funktioita, niin myös $\lim_{j\to\infty} \psi_j \in \mathcal{F}$.

Olkoot nyt $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ ja $A \in \Gamma$, ja merkitään, että $M_1 := \{x \in X : \phi_1(x) \geq \phi_2(x)\}$ ja $M_2 := \{x \in X : \phi_1(x) < \phi_2(x)\}$, jolloin $M_1, M_2 \in \Gamma$ [**12**, s. 27]. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_A \max(\phi_1, \phi_2) \, d\mu &= \int_{(A\cap M_1)\cup(A\cap M_2)} \max(\phi_1, \phi_2) \, d\mu \\
&= \int_{A\cap M_1} \phi_1 \, d\mu + \int_{A\cap M_2} \phi_2 \, d\mu \\
&\leq \nu(A \cap M_1) + \nu(A \cap M_2) \\
&= \nu(A).
\end{aligned}$$

Täten $\int_A \max(\phi_1, \phi_2) \, d\mu \leq \nu(A)$, joten myös

$$\max(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{F}.$$

Oletetaan nyt, että väite pätee luvulle $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\max(\phi_1, \ldots, \phi_k, \phi_{k+1}) = \max\big(\max(\phi_1, \ldots, \phi_k), \phi_{k+1}\big),$$

missä induktio-oletuksen nojalla $\max(\phi_1, \ldots, \phi_k) \in \mathcal{F}$ ja oletuksen nojalla taas $\phi_{k+1} \in \mathcal{F}$. Näin ollen aiemmin todistetun perusteella myös

$$\max(\phi_1, \ldots, \phi_k, \phi_{k+1}) \in \mathcal{F}.$$

Täten ominaisuus (1) pätee.

Olkoon sitten kasvava funktiojono $(\psi_j)_{j=1}^{\infty}$ siten, että $\psi_j \in \mathcal{F}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja merkitään, että

$$\lim_{j\to\infty} \psi_j =: \psi.$$

Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\nu(A) \geq \int_A \psi_k \, d\mu,$$

joten Lebesguen monotonisen konvergenssilauseen 1.12 nojalla

$$\nu(A) \geq \lim_{k\to\infty} \int_A \psi_k \, d\mu = \int_A \lim_{k\to\infty} \psi_k \, d\mu = \int_A \psi \, d\mu$$

eli $\lim_{k\to\infty} \psi_k \in \mathcal{F}$. Toisin sanoen ominaisuus (2) pätee.

Asetetaan seuraavaksi, että

$$\beta := \sup_{h\in\mathcal{F}} \int_X h \, d\mu,$$

joka on joukon $\mathcal{F}$ epätyhjyyden ansiosta hyvin määritelty. Nyt $\beta < \infty$, koska kaikille $h \in \mathcal{F}$ ja $A \in \Gamma$ pätee, että

$$\int_A h \, d\mu \leq \nu(A) \leq \nu(X) < \infty,$$

sillä ν oletettiin äärelliseksi. Tällöin kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee, että on $h_k \in \mathcal{F}$, jolle

$$\int_X h_k \, d\mu > \beta - \frac{1}{k}.$$

Asetetaan sitten, että

$$g_k := \max(h_1, h_2, \ldots, h_k),$$

jolloin ominaisuuden (1) nojalla $g_k \in \mathcal{F}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään vielä funktio

$$f := \lim_{k\to\infty} g_k.$$

Koska määritelmänsä perusteella jono $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ on selvästi kasvava, niin ominaisuuden (2) mukaan myös $f \in \mathcal{F}$.

Nyt ensinnäkin luvun β määritelmän nojalla pätee kaikille $k \in \mathbb{N}$, että $\beta \geq \int_X h_k \, d\mu$, joten myös

$$\beta \geq \lim_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu.$$

Toisaalta funktioiden h_k valinnan nojalla

$$\beta \leq \lim_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu.$$

Täten siis $\lim_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu = \beta$. Lisäksi selvästi $h_k \leq g_k$ kaikilla k, joten

$$\lim_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu.$$

Lebesguen monotonisen konvergenssin lauseen 1.12 nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Näin ollen

$$\beta \leq \int_X f \, d\mu$$

ja koska triviaalisti käänteinen epäyhtälö pätee myös, niin on oltava, että

$$\int_X f\, d\mu = \beta.$$

Seuraavaksi jaetaan mitta ν kahteen osaan. Asetetaan, että

$$\nu_1(A) := \int_A f\, d\mu \qquad \text{ja} \qquad \nu_2(A) := \nu(A) - \nu_1(A)$$

kaikilla $A \in \Gamma$. Nyt $\nu = \nu_1 + \nu_2$, missä sekä ν_1 että ν_2 ovat mittoja, sillä ν_1 on osoitettu mitaksi esimerkissä 1.10 ja ν_2 on erotus kahdesta mitasta, joille pätee $\nu_1(A) = \int_A f\, d\mu \leq \nu(A)$ kaikilla $A \in \Gamma$, sillä $f \in \mathcal{F}$. Lisäksi ν_1 on äärellinen, koska edellä osoitettiin, että

$$\nu_1(X) = \int_X f\, d\mu = \beta < \infty,$$

ja näin ollen myös ν_2 on äärellinen kahden äärellisen mitan erotuksena.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\nu_2 \perp \mu$. Tehdään antiteesi, jonka mukaan näin ei ole. Tällöin lemman 3.12 nojalla on joukko $E \in \Gamma$ ja $\varepsilon > 0$ siten, että $\mu(E) > 0$ ja $\varepsilon\mu(B) \leq \nu_2(B)$ kaikilla $B \in \Gamma$, $B \subset E$. Olkoon nyt $C \in \Gamma$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_C f + \varepsilon\chi_E\, d\mu &= \int_C f\, d\mu + \varepsilon \int_C \chi_E\, d\mu \\ &= \int_C f\, d\mu + \varepsilon\mu(C \cap E).\end{aligned}$$

Koska $C \cap E \subset E$, niin saadaan, että

$$\int_C f + \varepsilon\chi_E\, d\mu \leq \int_C f\, d\mu + \nu_2(C \cap E).$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}\int_C f\, d\mu + \nu_2(C \cap E) &= \int_{C\cap E} f\, d\mu + \int_{C\setminus E} f\, d\mu + \nu_2(C \cap E) \\ &= \left(\int_{C\cap E} f\, d\mu + \nu_2(C \cap E)\right) + \int_{C\setminus E} f\, d\mu \\ &= \nu(C \cap E) + \int_{C\setminus E} f\, d\mu \\ &\leq \nu(C \cap E) + \nu(C \setminus E) \\ &= \nu(C),\end{aligned}$$

missä toiseksi viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, miten mitat ν_1 ja ν_2 asetettiin, ja sitä seuraava epäyhtälö siitä, että $f \in \mathcal{F}$. Täten

$$\int_C f + \varepsilon\chi_E\, d\mu \leq \nu(C)$$

kaikilla $C \in \Gamma$, joten $f + \varepsilon\chi_E \in \mathcal{F}$, mutta silti

$$\int_X f + \varepsilon\chi_E\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \varepsilon\mu(E) = \beta + \varepsilon\mu(E) > \beta,$$

sillä oletettiin, että $\mu(E) > 0$. Tämä on ristiriita luvun β määritelmän kanssa.

Näin ollen ν_2 ja μ ovat keskenään singulaarisia, joten on olemassa joukko $D \in \Gamma$, jolle $\mu(D) = 0$ ja $\nu_2(D^C) = 0$. Koska oletettiin, että

$$\nu \ll \mu,$$

niin tällöin myös $\nu(D) = 0$. Nyt voidaan päätellä, että

$$0 = \nu_1(D) + \nu_2(D) = \int_D f\, d\mu + \nu_2(D) = 0 + \nu_2(D),$$

koska $\mu(D) = 0$. Tästä seuraa, että joukko D on nollamittainen myös mitan ν_2 suhteen eli $\nu_2(D) = 0$. Tämä taas tarkoittaa, että

$$\nu_2(X) = \nu_2(D) + \nu_2(D^C) = 0 + 0 = 0$$

eli mitta ν_2 häviää kokonaan,

$$\nu_2 \equiv 0.$$

Täten kaikille $E \in \Gamma$ pätee, että

$$\nu(E) = \nu_1(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Lisäksi koska mitta ν oletettiin äärelliseksi, niin pätee erityisesti, että $\int_X f\, d\mu = \nu(X) < \infty$. Näin ollen lauseen 1.11 kohdan (2) nojalla funktio f saa arvon ∞ korkeintaan nollamittaisessa joukossa eli $f(x) < \infty$ μ-melkein kaikkialla joukossa X. Koska nollamittaiset joukot eivät integroidessa vaikuta, voidaan funktion arvo asettaa noissa pisteissä esimerkiksi nollaksi, jolloin funktio saadaan halutusti äärelliseksi.

Todistetaan sitten löydetyn funktion f yksikäsitteisyys kuten lähteessä [**7**, s. 151]. Olkoot siis ei-negatiiviset mitalliset funktiot g ja h, jotka toteuttavat Radonin ja Nikodymin lauseen väitteen. Asetetaan nyt, että $M := \{x \in X : g(x) \geq h(x)\}$ ja $N := \{x \in X : g(x) \leq h(x)\}$, jotka täyttävät avaruuden X. Tällöin

$$\int_M g\, d\mu - \int_M h\, d\mu = \nu(M) - \nu(M) = 0,$$

missä $\nu(M) < \infty$ mitan äärellisyyden nojalla. Tästä seuraa myös, että funktiot g ja h ovat integroituvia, ja täten integraalin lineaarisuuden nojalla pätee, että

$$\int_M g - h\, d\mu = \int_M g\, d\mu - \int_M h\, d\mu = 0,$$

missä $g - h$ on ei-negatiivinen funktio joukossa M. Näin ollen lauseen 1.11 nojalla

$$g - h = 0$$

μ-melkein kaikkialla joukossa M. Vastaavalla päättelyllä saadaan myös, että μ-melkein kaikkialla joukossa N pätee $h - g = 0$, joten $g = h$ μ-melkein kaikkialla joukossa X. Näin ollen löydetty funktio f on yksikäsitteinen. $\square$

Seuraavaksi esitetään vaihtoehtoinen todistus Radonin ja Nikodymin lauseelle sekä perustellaan sen paikkansapitävyyttä lähteen [**5**, s. 237 – 239] avulla:

Lauseen 3.13 todistus, tapa 2. Seuraa lähdettä [**5**, s. 239 – 241].
Asetetaan aluksi jokaiselle $j, k \in \mathbb{N}$ merkkimitta

$$\lambda_{j,k} := \nu - \frac{j}{k}\mu.$$

Merkitään, että N_k^j on Hahnin hajotelman negatiivinen osa merkkimitan $\lambda_{j,k}$ suhteen. Asetetaan lisäksi, että

$$B := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} N_k^j \quad \text{ja} \quad \mathcal{O} := B^C,$$

jolloin De Morganin lain nojalla

$$\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(N_k^j\right)^C.$$

Kiinnitetään nyt $\tilde{j} \in \mathbb{N}$. Tällöin selvästi $\bigcap_{j=1}^{\infty} (N_k^j)^C \subset (N_k^{\tilde{j}})^C$ ja $(N_k^{\tilde{j}})^C$ on Hahnin hajotelman positiivinen osa merkkimitan $\lambda_{\tilde{j},k}$ suhteen. Näin ollen

$$\lambda_{\tilde{j},k}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (N_k^j)^C\right) \geq 0$$

eli

$$\nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (N_k^j)^C\right) \geq \frac{\tilde{j}}{k}\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (N_k^j)^C\right). \tag{3.2}$$

Mitan ν äärellisyydestä tiedetään, että $\nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (N_k^j)^C\right) < \infty$. Koska epäyhtälö (3.2) pätee kaikilla $\tilde{j} \in \mathbb{N}$, niin täten on oltava, että

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (N_k^j)^C\right) = 0$$

kaikille $k \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa mitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden nojalla, että

$$\mu(\mathcal{O}) = 0,$$

sillä

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(N_k^j\right)^C\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \left(N_k^j\right)^C\right) = 0.$$

Koska mitta ν oletettiin absoluuttisesti jatkuvaksi mitan μ suhteen, niin täten pätee myös

$$\nu(\mathcal{O}) = 0.$$

Asetetaan seuraavaksi joukot $B_k^1 := N_k^1$ ja

$$B_k^j := N_k^j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} N_k^i,$$

kun $j, k \in \mathbb{N}$. Näin saadaan pistevieraat joukot $(B_k^j)_{j=1}^{\infty}$, joille pätee

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} N_k^j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_k^j.$$

Edellä määriteltyjen joukkojen avulla konstruoidaan haluttu funktio. Asetetaan ensin jokaiselle j, $k \in \mathbb{N}$ funktio

$$g_k\colon \bigcup_{j=1}^{\infty} B_k^j \to [0,\infty[, \quad g_k(x) := \frac{j-1}{k}, \text{kun } x \in B_k^j.$$

Alussa määriteltiin joukko $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} N_k^j$ ja edellä saatiin, että $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_k^j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_k^j$. Nyt ensinnäkin

$$B := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_k^j$$

ja täten $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k_0}^j$ kaikilla $k_0 \in \mathbb{N}$. Näin ollen funktiot g_k ovat määritellyt myös joukossa B.

Määritellään funktiot $f_k\colon X \to [0,\infty[$,

$$f_k(x) := \begin{cases} \max_{i \le k} g_i(x), \text{ kun } x \in B \\ 0, \text{ kun } x \in \mathcal{O} \end{cases}$$

ja osoitetaan, että niiden rajafunktiolla $\lim_{k\to\infty} f_k$ on väitteen ominaisuus. Otetaan nyt Γ-mitallinen joukko $M \subset X$. Voidaan olettaa, että $M \subset B$, sillä kaikille Γ-mitallisille $C \subset \mathcal{O}$ pätee $\mu(C) = 0$. Näin ollen joukkoa $\mathcal{O}$ leikkaavat joukon M osat eivät vaikuta tuleviin arvioihin.

Olkoon $k_0 \in \mathbb{N}$. Asetetaan joukot $C_0 = \emptyset$ ja

$$C_i := (\{x \in X : g_i(x) = f_{k_0}(x)\} \cap M) \setminus C_{i-1},$$

kun $i \in \mathbb{N}$. Tällöin joukot C_i ovat pistevieraita ja $\bigcup_{i=1}^{k_0} C_i = M$. [**5**, s. 240] Näin ollen

$$\int_M f_{k_0}\, d\mu = \sum_{i=1}^{k_0} \int_{C_i} f_{k_0}\, d\mu = \sum_{i=1}^{k_0} \int_{C_i} g_i\, d\mu.$$

Lisäksi

$$\sum_{i=1}^{k_0} \int_{C_i} g_i\, d\mu = \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_i \cap B_i^j} g_i\, d\mu,$$

sillä joukot $(B_k^j)_{j=1}^{\infty}$ ovat pistevieraita ja kaikilla $i \in \mathbb{N}$ pätee, että $C_i \subset M \subset B \subset B_i^j$. Funktiot g_i ovat yksinkertaisia, joten

$$\sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_i \cap B_i^j} g_i\, d\mu = \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{i} \mu(C_i \cap B_i^j).$$

Nyt joukkojen B_i^j määrittelystä huomataan, että $B_i^j \subset \left(N_i^{j-1}\right)^C$, joka on Hahnin hajotelman positiivinen joukko merkkimitan

$$\lambda_{j-1,\,i} = \nu - \frac{j-1}{i}\mu$$

suhteen, sillä N_i^{j-1} on negatiivinen sen suhteen. Näin ollen $\nu(C_i \cap B_i^j) - \frac{j-1}{i}\mu(C_i \cap B_i^j) \ge 0$ eli

$$\nu(C_i \cap B_i^j) \ge \frac{j-1}{i}\mu(C_i \cap B_i^j).$$

Tästä seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j-1}{i}\mu(C_i\cap B_i^j)\leq\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{j=1}^{\infty}\nu(C_i\cap B_i^j)=\sum_{i=1}^{k_0}\nu(C_i)=\nu(M).$$

Lyhyesti sanottuna tällöin

$$\int_M f_{k_0}\,d\mu\leq\nu(M).$$

Toisaalta $B_i^j\subset N_i^j$, joka on negatiivinen merkkimitan $\nu-\frac{j}{i}\mu$ suhteen. Näin ollen funktion f_{k_0} integraalia voidaan arvioida myös alaspäin seuraavasti: Funktion f_i määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\int_M f_{k_0}\,d\mu\geq\int_M g_{k_0}\,d\mu&=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{M\cap B_{k_0}^j}g_{k_0}\,d\mu=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j-1}{k_0}\right)\mu(M\cap B_{k_0}^j)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(\frac{j}{k_0}\right)\mu(M\cap B_{k_0}^j)-\frac{1}{k_0}\mu(M\cap B_{k_0}^j)\right].\end{aligned}$$

Nyt käytetään tietoa, että $B_i^j\subset N_i^j$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(\frac{j}{k_0}\right)\mu(M\cap B_{k_0}^j)-\frac{1}{k_0}\mu(M\cap B_{k_0}^j)\right]&\geq\sum_{j=1}^{\infty}\left[\nu(M\cap B_{k_0}^j)-\frac{1}{k_0}\mu(M\cap B_{k_0}^j)\right]\\&=\nu(M)-\frac{1}{k_0}\mu(M).\end{aligned}$$

Näin ollen on saatu pääteltyä, että kaikille $k_0\in\mathbb{N}$ pätee

$$\nu(M)-\frac{1}{k_0}\mu(M)\leq\int_M f_{k_0}\,d\mu\leq\nu(M),$$

missä $\mu(M)<\infty$, koska μ oletettiin äärelliseksi. Funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ on selvästi kasvava, joten valitaan väitteen todistamiseksi funktio $f:=\lim_{k\to\infty}f_k$. Tällöin monotonisen konvergenssin lauseen 1.12 nojalla

$$\int_M f\,d\mu=\nu(M)$$

kaikilla $M\in\Gamma$, joten väite pätee. □

Yhteenvetona Radonin ja Nikodymin lauseen äärellisten mittojen version (lause 3.13) kahdesta todistuksesta voi sanoa, että molemmissa etsitään tapa maksimoida tietyllä tavalla konstruoidut funktiot siten, että saavutetaan haluttu ominaisuus. Todistuksen ensimmäisessä versiossa asetettiin funktioperhe, johon kuuluivat kaikki sellaiset mitalliset funktiot, joiden integraali kaikkien mitallisten joukkojen yli mitan μ suhteen on korkeintaan tuon joukon ν-mitta. Tämän joukkoperheen alkioista saatiin konstruoitua supremumin avulla funktio, jolle voitiin osoittaa pätevän, että kaikkien mitallisten joukkojen ν-mitta on tasan tuon funktion integraali mitan μ suhteen saman joukon yli. Tässä todistuksessa on lisäksi selkeitä viitteitä Lebesguen hajotelmalauseesta, kun todistuksen puolivälissä mitta ν hajotetaan kahteen osaan. Näistä osista ensimmäinen eli ν_1 on Radonin ja Nikodymin lauseessa etsitty muoto mitalle

ν, joka myös tiedetään absoluuttisesti jatkuvaksi sen kanssa. On siis Lebesguen hajotelmalauseen kannalta selvää, että tässä tilanteessa ν_2 eli singulaarinen osa häviää, koska alussa oletettiin, että $\nu \ll \mu$. Näin ollen mitassa ν ei tietenkään ole lainkaan mitan μ kanssa singulaarista osaa, ja mitan ν Lebesguen hajotelma typistyy pelkäksi Radonin ja Nikodymin lauseen hakemaksi muodoksi.

Jälkimmäistä todistusversiota voidaan selittää niin sanotun Lebesgue–Stieltjes-mitan [**5**, s. 136 – 141] avulla. Mitan täsmälliseen määrittelyyn ei mennä tarkemmin, mutta lyhyesti sanottuna se antaa jokaisen reaalilukuvälin mitaksi päätepistesijoituksen johonkin kasvavaan funktioon f. Toisin sanoen siis

$$\tau_f([a,b]) = f(b) - f(a),$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ ja f on kasvava funktio. Toisaalta tiedetään, että absoluuttisesti jatkuva funktio on derivaattansa integraali. Olkoon nyt siis F absoluuttisesti jatkuva funktio välillä $[a, b]$. Tällöin pätee, että

$$\tau_F([a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{d}{dx} F \, dx.$$

Koska yleisessä Radonin ja Nikodymin lauseen tilanteessa ei kuitenkaan ole funktiota F, täytyy tähän derivaatan integrointi -ajatteluun päästä käsiksi muulla tavalla, ilman derivointia itsessään. Tämän vuoksi aletaankin muodostaa joukkoja, jotka rajaavat funktion F derivaattaa yhä enemmän ja enemmän:

$$E_n^k = \left\{ x : \frac{k-1}{n} \leq \frac{d}{dx} F(x) \leq \frac{k}{n} \right\}.$$

Kun nyt määritellään funktiot $f_n(x) := \frac{k-1}{n}$, kun $x \in E_n^k$, niin monotonisen konvergenssin lauseella saadaan, että

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n \, dx = \int_A \frac{d}{dx} F \, dx.$$

Edellä selitettyä analogiaa käyttäen voidaan nyt tutkia lauseen 3.13 todistuksen toista versiota. Ideana on käyttää merkkimittoja $\lambda_{j,k} := \nu - \frac{j}{k}\mu$ ja näiden negatiivisia Hahnin hajotelman osia, jolloin

$$\nu(N_k^j) \leq \frac{j}{k} \mu(N_k^j).$$

Tämän jälkeen avaruus jaetaan "pieniin" osiin B_k^j (jotka koostuvat edellä määriteltyjen merkkimittojen Hahnin hajotelmien negatiiviosien tietynlaisista osajoukoista), mikä vertautuu funktion F derivaatan rajoittamiseen. Kun vielä määritellään funktiot $g_k(x) = \frac{j-1}{k}$, kun $x \in B_k^j$, saadaan Lebesgue-Stieltjes-mitan analogiaa vastaava tilanne, jossa jokaiselle mitalliselle joukolle E aletaan etsiä joukkoja B_k^j, joilla mitta $\frac{j}{k}\mu(E)$ saadaan mahdollisimman lähelle mittaa $\nu(E)$. Tämä johtaa lopulta siihen, että funktioiden g_k maksimien raja-arvon integraali yli joukon E mitan μ suhteen on tasan tuon joukon ν-mitta, kuten haluttiinkin.

Huomautus 3.15. Huomionarvoista Radonin ja Nikodymin lauseen muotoilussa on, ettei funktion f vaadita olevan integroituva. Nimittäin f on selvästi integroituva täsmälleen silloin, kun mitta (tai jatkossa merkkimitta) ν on äärellinen. [**9**, s. 129]

Radonin ja Nikodymin lauseessa löydetään mitallinen funktio f, jonka integraali mitan μ suhteen vastaa (merkki)mittaa ν. Kuten lauseen 3.13 todistusta tutkittaessa huomattiin, analyysin peruslauseen hengessä voidaan ajatella, että tuo funktio olisi jonkinlainen (merkki)mitan ν derivaatta. Tämän vuoksi funktiota f kutsutaan *(merkki)mitan ν Radonin ja Nikodymin derivaataksi mitan μ suhteen.* Joskus funktiota f jopa merkitään johdattelevalla tavalla $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Päälauseen äärellisten mittojen version melko suorana seurauksena saadaan tulos yleistettyä σ-äärellisille mitoille:

SEURAUS 3.16 (Radonin ja Nikodymin lause). *Olkoot μ ja ν σ-äärellisiä mittoja avaruudessa (X, Γ) siten, että $\nu \ll \mu$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Γ-mitallinen funktio $f\colon X \to [0, \infty[$, jolle*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

kaikilla $E \in \Gamma$.

TODISTUS. Perustuu lähteen [**11**, s. 154 – 156] todistukseen.

Lemman 1.7 nojalla on olemassa mitalliset joukot A_j, joilla $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ja joilla lisäksi $\mu(A_k) < \infty$ ja $\nu(A_k) < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Asettamalla, että $B_1 := A_1$ ja

$$B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$$

kaikille k, saadaan mittojen μ ja ν suhteen äärelliset, pistevieraat ja avaruuden X täyttävät mitalliset joukot B_j.

Määritellään nyt kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja $E \in \Gamma$ selvästi äärelliset mitat

$$\mu_k(E) := \mu(E \cap B_k) \qquad \text{ja} \qquad \nu_k(E) := \nu(E \cap B_k).$$

Koska oletettiin, että $\nu \ll \mu$, niin mittojen ν_k ja μ_k määritelmistä nähdään, että myös $\nu_k \ll \mu_k$. Näin ollen äärellisiä mittoja koskevan Radonin ja Nikodymin lauseen version 3.13 nojalla on olemassa mitalliset funktiot $f_k\colon X \to [0, \infty[$, joille

$$\nu_k(E) = \int_{E \cap B_k} f_k \, d\mu_k$$

kaikilla $E \in \Gamma$.

Asetetaan sitten funktiot $g_k\colon X \to [0, \infty[$,

$$g_k(x) := f_k(x) \cdot \chi_{B_k}(x)$$

sekä $f\colon X \to [0, \infty]$,

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Koska joukot B_j ovat pistevieraita, niin pätee

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap B_j) = \nu(E)$$

kaikilla $E \in \Gamma$.

Olkoon nyt $E \in \Gamma$. Huomataan, että funktiojono $(h_j)_{j=1}^{\infty}$, missä

$$h_j(x) = \sum_{k=1}^{j} g_k(x),$$

on kasvava. Huomataan myös, että

$$\begin{aligned}\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j(E) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E \cap B_j} f_j \, d\mu_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \cdot \chi_{B_j} \, d\mu,\end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että mitta μ_j on mitan μ rajoittuma joukkoon B_j. Nyt Lebesguen monotonisen konvergenssin lauseen 1.12 nojalla pätee

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \cdot \chi_{B_j} \, d\mu &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_E g_j \, d\mu \\ &= \int_E \sum_{j=1}^{\infty} g_j \, d\mu = \int_E f \, d\mu,\end{aligned}$$

joten $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ kaikilla $E \in \Gamma$.

Rajoitutaan joukkoon A_k jollakin $k \in \mathbb{N}$. Samanlaisella päättelyllä kuin lauseen 3.13 todistuksessa voidaan nytkin olettaa, että funktion f arvo karkaa äärettömään korkeintaan nollamittaisessa joukossa. Koska tämä pätee kaikilla $k \in \mathbb{N}$, saa funktio f myös koko avaruudessa X arvon ∞ korkeintaan nollamittaisessa joukossa. Tämä johtuu siitä, että mitan subadditiivisuuden nojalla nollamittaisten joukkojen numeroituvan yhdisteen mitta on myös nolla. Täten voidaan siis olettaa, että funktio f on äärellinen.

Funktion f yksikäsitteisyys seuraa rajoittamalla lauseen 3.13 yksikäsitteisyyspäättelyn joukkoihin B_k. $\square$

Radonin ja Nikodymin lauseen kannalta on oleellista, että mitta (tai merkkimitta) μ todellakin on σ-äärellinen [**5**]. Ilman tätä oletusta lauseen väite ei yleisesti päde. Tarkastellaan asiaa seuraavassa esimerkissä:

Esimerkki 3.17. Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ mitta-avaruus, missä $\mathcal{M}$ on Lebesgue-mitallisten joukkojen sigma-algebra ja m Lebesguen mitta. Olkoon lisäksi μ mitta, jolla $\mu(\emptyset) = 0$ ja $\mu(E) = \infty$ kaikilla epätyhjillä $E \in \mathcal{M}$. Nyt selvästikään μ ei ole σ-äärellinen. Myöskin selvästi $m \ll \mu$.

Kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee, että $m(\{x\}) = 0$, sillä yksiö on numeroituva joukko. Lisäksi, jos Radonin ja Nikodymin lauseen mukainen funktio f olisi olemassa, niin pätisi, että

$$0 = m(\{x\}) = \int_{\{x\}} f \, d\mu = \int_{\{x\}} f \cdot \chi_{\{x\}} \, d\mu = f(x) \cdot \mu(\{x\}) = f(x) \cdot \infty,$$

missä toiseksi viimeinen yhtäsuuruus johtuu siitä, että funktio $f \, \chi_{\{x\}}$ on yksinkertainen funktio. Näin ollen $f(x) \cdot \infty = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten $f \equiv 0$. Tästä seuraisi, että jokainen Lebesgue-mitallinen joukko E olisi nollamittainen, sillä

$$m(E) = \int_E 0 \, d\mu = 0.$$

Tämä ei tietenkään pidä paikkaansa, joten Radonin ja Nikodymin lauseen mukaista funktiota f ei voi tässä tilanteessa olla olemassa. [**17**]

Todistetaan seuraavaksi Lebesguen hajotelmalause σ-äärellisen mitan ν tapauksessa käyttämällä Radonin ja Nikodymin lausetta:

LAUSE 3.18 (Lebesguen hajotelmalause). *Olkoot μ ja ν σ-äärellisiä mittoja avaruudessa (X, Γ). Tällöin on olemassa yksikäsitteiset mitat ν_a ja ν_s, joille pätee, että*

(1) $\nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A)$ kaikilla $A \in \Gamma$,
(2) $\nu_a \ll \mu$, ja
(3) $\nu_s \perp \mu$.

TODISTUS. Seuraa todistusta lähteestä [**5**, s. 243 – 244].
Asetetaan aluksi, että

$$\mu + \nu =: \lambda$$

ja huomataan, että nyt $\mu \ll \lambda$ ja $\nu \ll \lambda$. Tämä johtuu siitä, että μ ja ν ovat mittoina ei-negatiivisia, jolloin selvästi $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E) = 0$ (kun $E \in \Gamma$) implikoisi, että $\mu(E) = 0$ ja $\nu(E) = 0$. Nyt Radonin ja Nikodymin lauseen 3.16 nojalla on olemassa ei-negatiiviset Γ-mitalliset funktiot f ja g, joille

$$\mu(A) = \int_A f \, d\lambda \qquad \text{ja} \qquad \nu(A) = \int_A g \, d\lambda$$

kaikille $A \in \Gamma$.
Asetetaan seuraavaksi, että

$$M := f^{-1}(]0, \infty]) \qquad \text{ja} \qquad N := f^{-1}(\{0\}),$$

jolloin selvästi pistevieraat joukot M ja N täyttävät avaruuden X. Asetetaan lisäksi kaikille $A \in \Gamma$ mitat

$$\nu_a(A) := \nu(A \cap M) \qquad \text{ja} \qquad \nu_s(A) := \nu(A \cap N).$$

Koska $M = N^C$, niin

$$\nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A).$$

Olkoon $B \in \Gamma$ siten, että $B \subset M$. Tällöin

$$\nu_s(B) = \nu(B \cap N) = \nu(\emptyset) = 0.$$

Jos taas on $C \in \Gamma$ siten, että $C \subset N$, niin

$$\mu(C) = \int_C f \, d\lambda = \int_C 0 \, d\lambda = 0.$$

Näin ollen mitat ν_s ja μ ovat singulaarisia eli

$$\nu_s \perp \mu.$$

Olkoon sitten $D \in \Gamma$, jolle $\mu(D) = 0$. Koska

$$\mu(D) = \int_D f \, d\lambda = 0,$$

niin lauseen 1.11 mukaan $f(x) = 0$ λ-melkein kaikkialla joukossa D. Toisin sanoen $\lambda(\{x \in D : f(x) > 0\}) = 0$, joten

$$\lambda(D \cap M) = 0.$$

Näin ollen saadaan, että

$$\nu_a(D) = \nu(D \cap M) = \int_{D \cap M} g \, d\lambda = 0,$$

ja tästä seuraa

$$\nu_a \ll \mu,$$

joten väite pätee. Yksikäsitteisyys voidaan todistaa vastaavasti kuin lauseessa 3.10. □

Viimeiseksi todistetaan tutkielman päälauseena Radonin ja Nikodymin lauseen versio σ-äärellisille mitalle μ ja merkkimitalle ν:

SEURAUS 3.19 (**Radonin ja Nikodymin lause**). *Olkoot μ σ-äärellinen mitta ja ν σ-äärellinen merkkimitta avaruudessa (X, Γ) siten, että $\nu \ll \mu$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Γ-mitallinen funktio $g\colon X \to \mathbb{R}$, jolle*

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu$$

kaikilla $E \in \Gamma$.

TODISTUS. Jordanin hajotelmalauseen 2.13 nojalla merkkimitta ν voidaan hajottaa muotoon

$$\nu = \nu_+ - \nu_-,$$

missä ν_+ ja ν_- ovat mittoja. Tällöin lemman 3.6 nojalla $\nu_+ \ll \mu$ ja $\nu_- \ll \mu$, ja lauseen 3.16 nojalla on olemassa funktiot $f_1\colon X \to [0, \infty[$ ja $f_2\colon X \to [0, \infty[$ siten, että

$$\nu_+(E) = \int_E f_1 \, d\mu \qquad \text{ja} \qquad \nu_-(E) = \int_E f_2 \, d\mu$$

kaikilla $E \in \Gamma$.

Asetetaan nyt, että $g\colon X \to \mathbb{R}$, $g(x) := f_1(x) - f_2(x)$, joka on funktioiden äärellisyyden nojalla hyvin määritelty. Osoitetaan seuraavaksi, että määritellyllä funktiolla on väitteen ominaisuus. Oletetaan, että merkkimitta ν saavuttaa arvon ∞, muttei arvoa $-\infty$. Päinvastainen tapaus perustellaan vastaavasti.

Jos nyt on $E \in \Gamma$, jolle $|\nu(E)| < \infty$, niin tällöin yhtäsuuruuksista

$$\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E) = \int_E f_1 \, d\mu - \int_E f_2 \, d\mu$$

seuraa, että molemmat integraalit ovat äärellisiä. Näin ollen positiiviarvoiset funktiot f_1 ja f_2 ovat integroituvia joukossa E, ja täten integroituvien funktioiden integraalin lineaarisuuden nojalla

$$\nu(E) = \int_E f_1 \, d\mu - \int_E f_2 \, d\mu = \int_E f_1 - f_2 \, d\mu = \int_E g \, d\mu,$$

kuten haluttiinkin.

Oletetaan sitten, että $\nu(E) = \infty$. Tällöin selvästi $\int_E f_1\, d\mu = \infty$ ja $\int_E f_2\, d\mu < \infty$, joten

$$\nu(E) = \int_E f_1\, d\mu - \int_E f_2\, d\mu$$

on hyvin määritelty. Kun vielä huomataan, että f_1 on funktion g positiiviosa g_+ ja vastaavasti f_2 sen negatiiviosa g_-, niin suoraan integraalin määritelmästä saadaan, että

$$\nu(E) = \int_E f_1\, d\mu - \int_E f_2\, d\mu = \int_E g_+\, d\mu - \int_E g_-\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

Täten väite pätee.

Funktion f yksikäsitteisyys todistetaan rajoittumalla σ-äärellisyydestä saataviin joukkoihin ja käyttämällä lauseen 3.13 todistuksen yksikäsitteisyysperustelua. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Robert B. Ash, Catherine A. Doléans-Dade. *Probability and Measure Theory.* Academic Press, 1999.

[2] Heinz Bauer. *Measure and Integration Theory.* Walter de Gruyter, 2001.

[3] Herbert S. Bear. *A Primer of Lebesgue Integration.* Academic Press, 2001.

[4] Patrick Billingsley. *Probability and Measure.* Wiley, 1979.

[5] Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner, Brian S. Thomson. *Real Analysis.* Prentice-Hall, 1997.

[6] Donald L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser, 2013.

[7] Joseph L. Doob. *Measure Theory.* Springer-Verlag, 1994.

[8] Avner Friedman. *Foundations of Modern Analysis.* Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.

[9] Paul R. Halmos. *Measure Theory.* Springer, 1974.

[10] Jean Jacod, Philip Protter. *Probability Essentials.* Springer, 2004.

[11] Augustus J. E. M. Janssen, Pleun van der Steen. *Integration Theory.* Springer-Verlag, 1984.

[12] Tero Kilpeläinen. *Mitta- ja integraaliteoria* (luentomoniste). Jyväskylän yliopisto, 2003.

[13] Gail S. Nelson. *A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration.* American Mathematical Society, 2015.

[14] Leonard F. Richardson. *Measure and Integration, A Concise Introduction to Real Analysis.* Wiley, 2009.

[15] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. *Real Analysis.* Princeton University Press, 2005.

[16] Michael E. Taylor. *Measure Theory and Integration.* American Mathematical Society, 2006.

[17] Yongheng Zhang. *The Radon-Nikodym Theorem.* https://www.math.purdue.edu/∼zhang24/RadonNikodym.pdf [luettu 10.9.2018]