

KVANTTIMEKAANINEN IMPULSSIFLUKTUAATIO  
YDINVOIMAN SISÄALUETEORIASSA

Ilkka Lilja

Lisensiaattitutkielma  
Jyväskylän yliopisto  
1972

ISBN: 978-951-39-7614-9 (PDF)

URN:ISBN:978-951-39-7614-9

Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä 2018

# SISÄLTÖ

1	YLEISTÄ .....	1
1.1	Tausta.....	1
1.2	Schrödinger-yhtälö epälokaaliselle potentiaalille .....	3
2	JATKUVUUSYHTÄLÖ JA VIRTATIHEYD.....	7
2.1	Virtatiheyden jakautuminen kahteen peruskomponenttiin .....	7
2.2	Peruskaavojen johdot.....	9
3	IMPULSSIFLUKTUAATIO.....	13
3.1	Määritelmä .....	13
3.2	Peruskommutaattori .....	14
3.3	Sovellutus summasääntöön $S_{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ .....	15
4	FOTOHAJONNAN INTEGROITU VAIKUTUSALA.....	18
4.1	Yleistä .....	18
4.2	Fotohajonnan käsittely impulssifluktuaatiolla .....	19
LIITE 1	LAUSEKKEEN $\Psi^*V_2\Psi - \Psi V_2\Psi^*$ SIEVENNYS.....	22
VIITTEET	.....	23

## Lyhennelmä

Kvadraattisesti nopeudesta riippuva potentiaali johtaa kaksikomponenttiseen todennäköisyysvirtaan

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n,$$

missä  $\mathbf{j}_s$  voidaan tulkita "suprajohtavaksi" komponentiksi ja  $\mathbf{j}_n$  formaalisesti dissipatiiviseksi virraksi. Tarkasteltavalle nopeudesta riippuvalle potentiaalille

$$V = V_0(r) + \frac{\lambda}{m} (p^2 f(r) + f(r)p^2)$$

on voimassa relaatio

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mu \langle \dot{\mathbf{r}} \rangle - \lambda \langle \{p^2, f(r)\} \rangle,$$

jolloin voidaan määritellä impulssifluktuaatio

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mu \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mu i}{\hbar} [\mathbf{r}, V] = -\lambda \{ \mathbf{p}, f(r) \}.$$

Elektrodynamiikassa vastaava fluktuaatio voidaan lausua vektoripotentiaalilin  $\mathbf{A}$  avulla:

$$\delta \mathbf{p} = \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

Impulssifluktuaatiokäsittelyn avulla fotodyinreaktioissa sovelletuille summasäännöille saadaan uusi sisältö, joka mm. osoittaa, että tunnettu Siegertin teoreema on approksimaationa samaa kuin, että  $\delta \mathbf{p}$  valitaan nolllaksi. Tällöin ei myöskään yleistetyn TRK-summasäännön

$$S_1(x, x) = \frac{1}{2} \langle n | [x, [T, x]] | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n | [x, [V, x]] | n \rangle \quad (T = \text{kineettinen energia})$$

käyttö ole mahdollista ftohajonnan integroidun vaikutusalan laskun yhteydessä.

Osoitetaan, että epälokaalisuuden aiheuttamaksi korjaustermiksi yleisesti tulkittu integraali  $\langle n | [x, [V, x]] | n \rangle$  on täsmälleen sama suure kuin peruskommutaattorien  $[x, \mu \dot{x}]$  ja  $[x, p_x]$  suhteen odotusarvo tilassa  $|n\rangle$ . Koska  $[x, \mu \dot{x}] \neq [x, p_x]$  ( $= i\hbar$ ) vain silloin kun  $\delta \mathbf{p} \neq 0$ , ei epälokaalisuutta voida ottaa huomioon yleistetyn TRK-summasäännön avulla. Deuteronille sovitettua nopeudesta riippuvaa potentiaalia käyttämällä kommutaattorin  $[x, \mu \dot{x}]$  odotusarvoksi saadaan noin 1.1  $i\hbar$ .

# 1 YLEISTÄ

## 1.1 Tausta

Nopeudesta riippuvia epälokaalisia potentiaaleja on sovellettu ydinfysiikassa lähes 40 vuotta [GSS68, MM65]. Määritelmän mukaan epälokaalinen potentiaali pisteessä  $\mathbf{r}$  riippuu ympäristöpisteiden  $\mathbf{r}'$  todennäköisyysjakautumasta. Epälokaalisia vuorovaikutuksia syntyy esim. laskettaessa ydinvoiman sisäalueeseen liittyviä monen mesonin vaihdon sironta-amplitudeja kenttäteorian avulla. Nämä amplitudit ovat energian ja impulssivaihdon funktioita, jolloin johdetut bosonipotentiaalit sisältävät suhteellisesta impulssista riippuvia termejä [Won64, Bab66, GS65].

Ensimmäiset julkaisut ovat vuodelta 1936, jolloin Wheeler pyrki selittämään ydinmateriaan kyllästymisilmiön VDP-teorialla (VDP = Velocity Dependent Potential) [Whe36] ja Way tutki deutronin ftohajontaa [Way37]. Laajamittaisempi tutkimus alkoi kymmenisen vuotta sitten Bellin ja Peierlsin esitettyä [Bel62, Pei60], että nopeudesta riippuvalla (ei-singulaarisella) potentiaalilla voidaan simuloida ydinvoiman repulsiivista sisäaluetta, jota tavallisesti kuvataan äärettömän voimakkaalla ("hard-core") tai 2–3 GeV:n ("soft-core") potentiaalikyngyksellä. Bell osoitti mm., että kahden nukleonin sirontaprobleeman yhtälö, johon sisältyy singulaarinen keskeispotentiaali, voidaan muuntaa unitaarisella transformaatiolla yhtälöksi, jossa potentiaali riippuu nukleonien suhteellisesta impulssista.

Green sovelsi väitöskirjassaan (v. 1962) kvadraattisesti nopeudesta riippuvaa potentiaalia

$$V(r, p^2) = V_0(r) + \frac{\lambda}{m} \{p^2, f(r)\} \quad (\{, \} = \text{antikommutaattori}) \quad (1)$$

sironta-analyysiin ja ydinmaterialaskuihin [Gre62]. Greenin henkilökohtaisen kommentin mukaan saadut tulokset olivat tyydyttäviä. Vastaavan potentiaalilin ovat konstruoineet myös Rojo ja Srivastava väitöskirjoissaan [Kis69]. Potentiaalien nopeudesta riippuvat osat eroavat toisistaan epälokaalisuusvakion  $\lambda$  ja funktion

$f(r)$  suhteen: Greenillä  $f = e^{-ar^2}$  ( $a = \text{vakio}$ ), Rojolla ja Srivastavalla  $f = e^{-br}$  ( $b = \text{vakio}$ ).

1960-luvun puolessa välissä alettiin kiinnostua myös määrätyn epälokaalisen potentiaalin ekvivalenteista (impulssimomentista riippuvista) lokaalisista potentiaaleista. Ekvivalenttien potentiaalien on tuotettava samat energian ominaisarvot ja vaihesiirrot. Mm. Fiedelvey kehitti yleisen iteraatiomenetelmän ELP:n (ekvivalentin lokaalisen potentiaalin) laskemiseksi [Fie67] ja Cronström käytti väitöskirjassaan ei-singulaarisesti redusoitua Lippmannin-Schwingerin yhtälöä ELP:n muodostamiseksi [Cro67].

Merkittävä käänne VDP-teoriassa tapahtui v. 1968. Tuolloin Razavy huomautti Phys. Review'ssä, että potentiaalityyppi (1) on luonteeltaan dissipatiivinen, jolloin systeemin Hamiltonin operaattori  $H = T + V$  ei ole liikevakio [Raz68]. Lähes välittömästi Kiang, Nakazawa ja Sugano pystyivät kuitenkin osoittamaan, että funktion  $f$  ja sen derivaatan avulla lausuttavan funktion  $Z(r)$  lisääminen Hamiltonin operaattoriin palauttaa konsistenssin Lagrangen formalismin ja Hamiltonin energiaformalismin välille [KNS69]. Näin ollen on ajateltavissa, että lisäoperaattori  $Z$  sisältyy formaalisesti potentiaalin lokaaliseen osaan  $V_0(r)$ .

Suganon johtama japanilainen tutkijaryhmä on jatkanut työtään aktiivisesti kyseisen probleeman parissa [LLS70, Sug71, KS71, Kim71, Kaw72], sillä kvadraattisesti impulssista riippuvan potentiaalin sisältävän Hamiltonin operaattorin vastine Lagrangen formalismissa on epälineaarinen Lagrangen funktio, jollaisten kvantisoinnilla on aina ollut anomaalinen asema kvanttiteoriassa. Tästä työstä saadut tulokset koitunevat myös yleisen suhteellisuusteorian, epälineaaristen toisen lajin mittamuunnoksissa invariantteina säilyvien Lagrangen funktioiden (mm. pionikentät, jotka halutaan invariantteiksi  $SU(2) \times SU(2)$  chiral-muunnoksissa) teorian ja äärettömän impulssin koordinaatistossa tarkasteltavien systeemien teorian kvantisoinnin hyödyksi [Her70]. On selvää, että ilman menetelmää epälineaaristen ja pakkoehtoisten alaisten systeemien kvantisoimiseksi, kvanttiteoria on lähes yhtä köyhä kuin elektrodynamiikka ilman magneettikenttää ja vektoripotentiaalia, joiden avulla dissipatiiviset ilmiöt on helppo käsitellä.

Galogero ja Simonov ovat osoittaneet variaatiolaskulla, että epälokaalisen potentiaalin kehittäminen  $p^2$ :n avulla johtaa pohjattoman (alhaalta rajoittumattomaan) energiaspektriin, mikäli määrättyt positiivisuusehdot eivät toteudu [GS70a, GS70b]. Samalla kyseinen tutkimus tuomitsee lähes kaikki muutkin yleisesti käytetyt potentiaalityypit (Hamadan-Johnstonin, Yalen jne.), sillä johdetut positiivisuusehdot ovat hyvin rajoittavia. Kiangin mukaan nämä ehdot eivät ole tärkeitä suhteellisen pienillä energioilla [Kia71]. Myös epärelativistinen kvanttimekaniikka toimii hyvin vain matalilla energioilla, joten kyseiset ehdot voidaan katsoa perusteorian puutteellisuuden erääksi ilmentymäksi.

Suosittu tapa nopeudesta riippuvan potentiaalin testaamisessa on summääntötekniikan käyttö [Jac67, LH70]. Fotodyinreaktioiden energialla painotetut vaikutusalat (momentit)

$$\sigma_N = \int \sigma(E_\gamma) E_\gamma^N dE_\gamma \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

voidaan mitata tarkasti kokeellisesti. Teoreettisesti  $\sigma_N$ :lle voidaan häiriöteorian

avulla johtaa lauseke

$$\sigma_N = (2\pi)^2 \hbar c \sum_k (E_k - E_n)^{N-1} |\langle k|H'|n\rangle|^2, \quad (3)$$

missä  $H'$  on sähkömagneettinen häiriöoperaattori. Kaavassa (3) esiintyvä ääretön summa lopputilojen  $|k\rangle$  yli redusoituu summasääntömenetelmällä perustilamuotoon

$$S_a(B, A) = \sum_k (E_k - E_n)^a \langle n|B|k\rangle \langle k|A|n\rangle = \langle n|BA_a|n\rangle, \quad (4)$$

missä  $A_0 = A$ ,  $A_a = [H, A_{a-1}]$  ja  $a = 0$  tai positiivinen kokonaisluku. Jos  $a$  on negatiivinen kokonaisluku, ei summasääntötekniikka pysty antamaan käyttökelpoisia kaavoja, vaan on turvauduttava approksimaatioihin, joista käytännössä yleisin on Siegertin approksimaatio [Lev60, EG70]. Tällöin

$$S_{-1}(p_x, p_x) = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 S_1(x, x). \quad (5)$$

Siegertin teoreeman mukaan kaava (5) on tosi myös epälokaalisen potentiaalin sisältävälle Hamiltonin funktiolle  $H$ , joka toteuttaa ominaisarvoyhtälön  $H|j\rangle = E_j|j\rangle$ . Kaavan (5) käytöstä on muodostunut pikemminkin sääntö kuin poikkeus alan kirjallisuuteen, mutta käsillä olevassa työssä osoitetaan mm., että (5) ei voi pitää paikkaansa, jos  $[V, x] \neq 0$ .

## 1.2 Schrödinger-yhtälö epälokaaliselle potentiaalille

Kun vuorovaikutus on epälokaalinen, Schrödinger-yhtälön potentiaaliosa  $V\Psi(\mathbf{r})$  korvautuu integraalioperaattorilla

$$V\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \int d^3\mathbf{r}' W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \quad (6)$$

ja perusyhtälö on silloin

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r}' W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') = E\Psi(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Tämän ratkaisu suoritetaan tavallisesti impulssiavaruudessa, jolloin esim. sironta-analyysissä joudutaan ratkaisemaan toisen asteen differentiaaliyhtälöä huomattavasti hankalampi integraaliyhtälö kuten Lippmannin-Schwingerin yhtälö. Lokaaliselle potentiaalille

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8)$$

yhtälö (7) palautuu tavalliseksi Schrödinger-yhtälöksi. Jos epälokaalisuus on *separoituva*,

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = u(\mathbf{r})v(\mathbf{r}'), \quad (9)$$

ei myöskään synny suurempia vaikeuksia, koska integraali

$$\int d^3\mathbf{r}' u(\mathbf{r})v(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}') = u(r) \int d^3\mathbf{r}' v(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}') \quad (10)$$

voidaan tavallisesti laskea analyttisesti [GSS68, MM65].

Epälokaalisen potentiaalin yhteys nopeudesta riippuvaan potentiaaliin nähdään yksinkertaisimmin kehitettäessä  $\Psi(\mathbf{r}')$   $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ :n potensseina Taylorin kolmiulotteisella sarjalla:

$$I \equiv \int d^3\mathbf{r}' W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{r}' W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')e^{i(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\cdot\mathbf{p}/\hbar}\Psi(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Silloin

$$I = \int d^3\mathbf{r}' (W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + O(\mathbf{p}) + \dots)\Psi(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Ensimmäinen termi vastaa lokaalista potentiaalia:

$$V_0(r)\Psi(\mathbf{r}) = \int W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'\Psi(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Termit, joiden tekijänä on  $p^m$  ( $m =$  pariton kokonaisluku), voidaan hylätä fyysikaalisista syistä (invarianssi ajan palautuksessa) ja, jos oletetaan sarjan suppenevan riittävän nopeasti, potentiaali

$$V_2(r, p^2) = \{g(r), p^2\}, \quad (14)$$

joka riippuu kvadraattisesti suhteellisesta nopeudesta, on approksimaatio epälokaaliselle potentiaalille.

Potentiaaliytimen  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  on oltava reaalinen ja symmetrinen  $\mathbf{r}$ :n ja  $\mathbf{r}'$ :n vaihdon suhteen. Approksimatiivisissa lausekkeissa  $p^2$ :n ja  $r$ :n funktion  $f(r)$  tulo on esiinnyttävä antikommutaattorimuodossa hermiittisyyden säilyttämiseksi. Valitaan kvadraattisesti nopeudesta riippuvan potentiaalin perustyyppiksi lauseke

$$V(\mathbf{r}, p^2) = V_0(r) + \frac{\lambda}{2m}\{p^2, f(r)\}, \quad (15)$$

$$\lambda = \text{vakio}, \quad [V_0(r), r] = 0, \quad f'(r) \neq 0, \quad f''(r) \neq 0,$$

ja merkitään

$$s = (1 + 2\lambda f(r))^{1/2}. \quad (16)$$

Schrödinger-yhtälö on tällöin ( $2m$  korvattu redusoidulla massalla  $m$ )

$$\left[ -(\hbar^2/m)\nabla^2 + V_0(r) + \frac{\lambda}{m}\{p^2, f(r)\} \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}). \quad (17)$$

Sijoitetaan

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{rs} Y_{[s]}^m, \quad (18)$$



missä  $Y_{[s]}^m$  on spin-kulma-funktio. Radiaalinen osa  $u(r)$  toteuttaa yhtälön (ns. "radial wave-equation")

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{L(L+1)}{r^2 s^2} - V_{\text{eff}} \right) u(r) = 0, \quad (19)$$

missä efektiivinen potentiaali on

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{s^2} \left( \frac{m}{\hbar^2} V_0(r) + 2k^2 f(r) - \frac{(f'(r))^2}{s^2} \right), \quad (20)$$

$$k^2 = mE/\hbar^2, \quad m/\hbar^2 = 1/41.467 \text{ (MeV fm}^2\text{)}.$$

Todellinen (lokaalista potentiaalia vastaava) radiaalinen aaltofunktio  $v(r)$  liittyy funktioon  $u(r)$  kaavalla

$$u(r) = sv(r). \quad (21)$$

Hulthenin funktiot deutronin pallosymmetriselle  ${}^3S_1$ -tilalle ovat muotoa [HS57]

$$v(r) = N(e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}), \quad (22)$$

missä normitusvakio  $N$  lasketaan efektiivisen kantaman  $r_0$  avulla:

$$N^2 = \frac{2\alpha}{1 - \alpha r_0} = \begin{cases} 3.3047\alpha, & r_0 = 1.704 \text{ fm} \\ 3.3433\alpha, & r_0 = 1.734 \text{ fm}, \end{cases} \quad (23)$$

ja

$$\alpha = (2.225/41.467)^{1/2} = .2315 \text{ fm}^{-1} \quad (E = -2.225 \text{ MeV}),$$

$$\beta = \begin{cases} 1.3324 \text{ fm}^{-1}, & P(D) = 4\%, r_0 = 1.704 \text{ fm}, \\ 1.2816 \text{ fm}^{-1}, & P(D) = 5\%, r_0 = 1.734 \text{ fm}. \end{cases} \quad (24)$$

$P(D)$  on  $D$ -tilan prosentuaalinen osuus deutronin perustilasta. Laskettiin kuinka hyvin funktio (22) toteuttaa kaavaan (21) sijoitettuna yhtälön (19). Potentiaaliksi valittiin Srivastavan potentiaali [Kis69]

$$V(r, p^2) = -184e^{-1.25r} + \frac{1.1}{m} \{p^2, e^{-2r}\}, \quad (\text{MeV}) \quad (25)$$

$$s = (1 + 2.2e^{-2r})^{1/2}.$$

Tarkastelun tulos on esitetty taulukossa 1, missä  $d$  on kaavan (19) oikea puoli (tarkalle ratkaisulle  $d = 0$ ).

Kaikissa tapauksissa repulsiivisen keskuksen säde  $r_c = 0$ , jolloin Hulthenin funktiot pisteessä  $r = 0$  ovat myös nollia. Tapauksissa a ja b efektiivinen kantama on vastaavasti 1.704 ja 1.734 fm ( $P(D) = 4$  ja 5%). Tapaus c vastaa parasta sovitusta, joka saadaan vaihtelemalla vakiota  $\beta$ . Käytännössä tämä tapaus vastaa suurinta  $D$ -tilan osuutta ( $P(D) > 5\%$ ): tämä valinta osoittautui myös parhaaksi. Yhtälön (19) numeerinen ratkaisu voidaan suorittaa esimerkiksi Rungen-Kutan menetelmällä käyttämällä alkuehtoina asymptoottisesta ratkaisusta  $e^{-\alpha r}$  saatavia

TAULUKKO 1 Yhtälön (18) ratkaisujen tarkastelu

Tapaus	a	b	c
$\alpha$	0.2315	0.2315	0.2315
$\beta$	1.3324	1.2816	1.1460
$r$ [fm]	$d$	$d$	$d$
0.0	-.372	-.259	-.004
0.5	-.134	-.098	-.009
1.0	-.133	-.123	-.095
2.0	-.077	-.080	-.085
3.0	-.026	-.027	-.035
4.0	-.008	-.009	-.021
5.0	-.002	-.003	-.004
6.0	-.001	-.001	-.001
7.0	-.000	-.000	-.000

arvoja ja lähestymällä origoa oikealta. Osoittautui, että tarkat numeeriset ratkaisut eroavat vain mitättömän vähän tapauksesta c eikä suurta eroa ole myöskään muihin nähden yli fermin etäisyyksillä.

Suoritettua tarkastelua tullaan käyttämään hyväksi myöhemmin, jolloin lasketaan kommutaattorin  $[x, \mu \dot{x}]$  ( $\mu = m/2$ ) odotusarvo deuterotonin  ${}^3S_1$ -tilassa.

## 2 JATKUVUUSYHTÄLÖ JA VIRTATIHEYYS

### 2.1 Virtatiheyden jakautuminen kahteen peruskomponenttiin

Yleisesti hyväksytyjen, täydellisten teorioiden yhteinen piirre on virran (virtatiheyden, massavuontiheyden) jakautuminen kahteen peruskomponenttiin; nämä ovat normaali dissipatiivinen virta ja kitkaton suprajohtava virta. Keskeneräisissä teorioissa taas virta joudutaan jakamaan fenomenologisten tarpeiden mukaan riittävään määrään komponentteja, joille kullekin kiinnitetään oma tehtävänsä ja aliavaruutensa. Esimerkiksi Landaun formuloimassa helium II:n teoriassa virtatiheys

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \quad (26)$$

on puhtaasti normaalin tietyn lämpötilan yläpuolella ( $\lambda$ -piste), mutta jakautuu ko. lämpötilassa ja sen alapuolella kaksikomponenttiseksi; tällaisena se säilyy aina absoluuttiseen nolapisteeseen saakka, jossa virrasta tulee kitkaton [LL59]. Teoreettisesti heliumin tiheys on myös kaksiosainen,  $\rho = \rho_s + \rho_n$ , mutta  $\rho_n$  ja  $\rho_s$  eivät kuitenkaan ole vakioita vaan suhteellisen nopeuden  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  funktioita.

Toinen hyvä esimerkki saadaan sähköpista. Varauksen säilymisen ilmaisee jatkuvuusyhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (27)$$

josta saadaan stationaarisille virroille ehto

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (28)$$

Stationaariset virrat edellyttävät kuitenkin sähkömotorista voimaa  $\varepsilon$ ,

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{I} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{I} = \oint (\mathbf{j}/\sigma) \cdot d\mathbf{I}, \quad (29)$$

missä  $\sigma$  on aineen sähkönjohtavuus,  $\mathbf{E}$  sähkökentän konservatiivinen osa ( $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ) ja  $\mathbf{E}'$  ei-konservatiivinen kenttä, joka on  $\varepsilon$ :n lähde. Kokonaisvirtatiheys on summa

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2, \quad (30)$$

jonka jälkimmäinen osa liittyy vaihteleviin magneettikenttiin  $\mathbf{B}$  kaavalla

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{I} &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{pinta ajallisesti kiinteä}) \\ &= \int (\nabla \times \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{s}.\end{aligned}\tag{31}$$

Siis

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Tiedetään, että kenttää  $\mathbf{B}$  ei voida johtaa yleisesti yksiarvoisesta magneettisesta skalaaripotentialista, vaan on otettava käyttöön vektoripotentiali  $\mathbf{A}$  siten, että  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

Jos virta  $\mathbf{j}$  on kvasistationaarinen, jolloin magneettisia ilmiöitä ei tarvitse ottaa huomioon, saadaan jatkuvuusyhtälöksi [PP62]

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0, \quad (\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho),\tag{32}$$

jolloin stationaarinen virta on

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.\tag{33}$$

Alueilla, missä  $\mathbf{E}' = 0$ , pätee lineaariselle aineelle relaatio [PP62]

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{j},\tag{34}$$

missä  $\tau$  on ainevakio. Sijoittamalla (34) yhtälöön (33) saadaan ratkaisu

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_0 e^{-t/\tau},\tag{35}$$

jonka mukaan virta vaimenee ajan suhteen eksponentiaalisesti aikavakion ollessa  $\tau$ . Alkuhetkellä aineessa olevaa ei-stationaarista virtajakautumaa on merkitty  $\mathbf{j}_0$ :lla.

Voidaan perustellusti kysyä, onko edellisten esimerkkien kaltaiselle virran perusluonteiselle kahtiajakautumiselle kvanttimekaanista analogiaa. Täydellinen vastaus tähän kysymykseen edellyttäisi ainakin suhteellisuusteorian, virran säilymlain ja mesoniteorioiden huomioon ottamisen. Kuten seuraavassa luvussa osoitetaan, epälokaalisen potentiaalin sisältävä Schrödinger-yhtälö johtaa kaksi-komponenttiseen virtatiheyteen. Lorentz-invarianssi ei toteudu missään laskuissa, jotka perustuvat Schrödinger-yhtälöön. Toisaalta kuitenkin tiedetään, että vuorovaikuttavien hiukkasten paikka-, impulssi- ja spin-operaattoreita voidaan käyttää generoitaessa Poincarén ryhmän esityksiä [BT53, Fol61], ja ainakin sähkömagneettisissa vuorovaikutuksissa tarvittavat relativistiset korjaukset osataan laskea korrektisti [Os68, KF70]. Mesoniteoriat sisältyvät suoritettaviin laskuihin ja tuloksiin implisiittisesti, koska esimerkiksi yhden bosonin vaihtopotentiali sijoitetaan Schrödinger-yhtälöön VDP-tekniikalla (käytetään kaavaa (19)) [Kia67]. Tässä yhteydessä viitataan myös aikaisempaan keskusteluun kenttäteoreettisista potentiaaleista (sivu 1).

Täydennyksenä todettakoon, että Osborn ja Foldy ovat tarkastelleet epälokaalisen potentiaalin käytön aiheuttamia muutoksia kvanttimekaanisessa vaurastiheydessä ja virtatiheydessä siinä tapauksessa, että epälokaalisuus aiheutuu vaihtovoimista [OF50]. Käytetty metodiikka ei kuitenkaan sovellu nopeudesta riippuviin potentiaaleihin, minkä myös ko. tutkijat toteavat. Heller soveltaa kyseistä tutkimusta modernisti [Hel71] jarrutussäteilyyn kahden nukleonin vuorovaikutuksessa (vain toinen nukleoni on varattu; molemmat oletetaan spinittömiksi). Peruskaavoissa käytetään yhtälöitä

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi_f | \rho_1(\mathbf{x}) | \Psi_i \rangle + \nabla \cdot \langle \Psi_f | \mathbf{j}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) | \Psi_i \rangle = 0, \quad (36)$$

$$\langle \Psi_f | \rho_1(\mathbf{x}) | \Psi_i \rangle = e_1 \int d^3 \mathbf{r}_2 \Psi_f^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2) \Psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2), \quad (37)$$

$$\langle \Psi_f | \mathbf{j}_1(\mathbf{x}) | \Psi_i \rangle = -\frac{ie_1}{2m_1} \int d^3 \mathbf{r}_2 \Psi_f^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2) \overset{\leftrightarrow}{\nabla}_x \Psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2) \quad (38)$$

$$(A \overset{\leftrightarrow}{\nabla} B \equiv A \nabla B - B \nabla A)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) | \Psi_i \rangle = & i \iiint d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}'_1 d^3 \mathbf{r}'_2 \Psi_f^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \\ & \times e_1 \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1, \mathbf{x} - \mathbf{r}'_1) \Psi_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

(jos myös hiukkanen 2 on varattu, integrandissa on lisätekijä  $e_2 \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_2, \mathbf{x} - \mathbf{r}'_2)$ ).  
Jatkuvuusyhtälö (36) toteutuu, jos

$$\text{div}_x \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1, \mathbf{x} - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}'_1). \quad (40)$$

Epälokaalisuudesta aiheutuva virtatiheys  $\mathbf{j}_2$  on nolla lokaaliselle potentiaalille

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') f(r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

## 2.2 Peruskaavojen johdot

Tarkasteltava systeemi muodostuu kahdesta spinittömästä hiukkasesta, joiden välinen vuorovaikutus on epälokaalinen. Hiukkasten massat ovat yhtä suuret ( $m$ ), jolloin systeemin redusoitu massa on  $m/2$ . Johdetaan aluksi jatkuvuusyhtälö yleisessä tapauksessa ja tarkastellaan tämän jälkeen todennäköisyysvirtaa (virtatiheyttä)  $\mathbf{j}$  kvadraattisesti nopeudesta riippuvan potentiaalin tapauksessa.

Kerrotaan Schrödinger-yhtälö

$$-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + \int d^3 \mathbf{r}' W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial t} \quad (41)$$

vasemmalta  $\Psi^*(\mathbf{r})$ :llä ja konjugaattiyhtälö

$$-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 \Psi^*(\mathbf{r}) + \int d^3 \mathbf{r}' W^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi^*(\mathbf{r}') = i\hbar \frac{\partial \Psi^*(\mathbf{r})}{\partial t} \quad (42)$$

$\Psi(\mathbf{r})$ :llä sekä vähennetään saadut lausekkeet puolittain toisistaan. Invarianssi-vaatimukset edellyttävät, että potentiaaliydin on reaalinen,  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = W^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , ja symmetrinen,  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = W(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ . Kaavaa  $A\nabla^2 B = \nabla \cdot (A\nabla B) - \nabla A \cdot \nabla B$  soveltamalla päädytään tällöin yhtälöön

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_1 + E, \quad (43)$$

missä  $\mathbf{j}_1$  on tavallinen kvanttimekaaninen todennäköisyysvirta,

$$\mathbf{j}_1 = -\frac{i\hbar}{m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \quad (44)$$

ja  $E$  epälokaalisuuden aiheuttama lisätermi,

$$E = \frac{1}{i\hbar} \int d^3 \mathbf{r}' (\Psi^*(\mathbf{r})W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}') - \Psi(\mathbf{r})W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Psi^*(\mathbf{r}')). \quad (45)$$

Ennen kuin yhtälöä (43) voidaan nimittää jatkuvuusyhtälöksi, on  $E$  lausuttava vektorin divergenssinä. Formaalisesti voidaan siten yhtälöparia

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{j}_2 = -E, \\ \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2) \end{cases} \quad (46)$$

pitää probleemaan liittyvänä jatkuvuusepäyhtälönä. Eksaktiin tulokseen päästään soveltamalla  $E$ :n laskemiseen kaavoja (11)–(15), jolloin

$$E = \frac{1}{i\hbar} \sum_{j=0}^{\infty} E_{2j}, \quad (47)$$

missä

$$\begin{aligned} E_0 &= \Psi^*(\mathbf{r})V_0(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})V_0(\mathbf{r})\Psi^*(\mathbf{r}), \\ E_2 &= \Psi^*(\mathbf{r})V_2(\mathbf{r}, p^2)\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})V_2(\mathbf{r}, p^2)\Psi^*(\mathbf{r}), \\ &\vdots \\ E_{2k} &= \Psi^*(\mathbf{r})V_{2k}(\mathbf{r}, p^{2k})\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})V_{2k}(\mathbf{r}, p^{2k})\Psi^*(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Oletetaan, että summa  $E_0 + E_2$  on riittävän tarkka approksimaatio  $E$ :lle.  $V_0(r)$  on lokaalinen potentiaali, joka kommutoi  $\Psi$ :n kanssa, joten  $E_0 = 0$ .  $V_2(r, p^2)$  olkoon perustyyppiä

$$V_2(r, p^2) = \frac{\lambda}{m} \{p^2, f(r)\}, \quad (48)$$

jolloin systeemin potentiaali on muotoa (1). Kaavasta (43) saadaan tällöin yhtälö

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_1 + \frac{1}{i\hbar} \Psi^* V_2 \Psi - \Psi V_2 \Psi^*, \quad (49)$$

mikä voidaan esittää jatkuvuusyhtälönä

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\nabla \cdot (j_1 + 2\lambda f(r) \mathbf{j}_1) \quad (50)$$

kuten liitteessä 1 osoitetaan. Merkitään

$$\mathbf{j}_2 = 2\lambda f(r)\mathbf{j}_1, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2, \quad (51)$$

jolloin jatkuvuusyhtälö on

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (52)$$

Differentiaalisesta yhtälöstä (52) seuraa Greenin teoreeman perusteella, että alkuhetkellä valittu tilavektorin normitus säilyy vakiona myöhempinä ajanhetkinä. Siis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau \rightarrow \infty} |\Psi|^2 d\tau = -\frac{i\hbar}{m} \int_{S \rightarrow \infty} [(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \\ + 2\lambda(\Psi \nabla f \Psi^* - \Psi^* \nabla f \Psi)] \cdot \mathbf{n} dS \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (53)$$

mikäli oletetaan, että  $\Psi \rightarrow 0$  riittävän nopeasti äärettömydessä.

Tarkasteltava systeemi on kokonaisuudessaan konservatiivinen. Koska nopeudesta riippuvalla potentiaalilla simuloidaan ydinvoiman repulsiivista sisäaluetta (säde  $r_0 \approx 0.5$  fm), jota voidaan pitää alinukleonisessa mittakaavassa ei-konservatiivisena aliavaruutena, on ajateltavissa, että virtakomponentit  $\mathbf{j}_1$  ja  $\mathbf{j}_2$  käyttäytyvät  $r_0$ -pisteessä vastaavalla tavalla kuin esimerkiksi nestemäisen heliumin virtakomponentit  $\lambda$ -pisteessä. Koska kysymyksessä on abstrakti todennäköisyysvirta, on tämä analogia tietenkin nähtävä formaalisena.

Paikkaoperaattorin  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  odotusarvon aikaderivaatta johdetaan jatkuvuusyhtälön (52) avulla. Paikan  $x_i$ -komponentille saadaan kaava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_i \rangle &= \int x_i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 d\tau \\ &= - \int x_i \nabla \cdot \mathbf{j} d\tau \\ &= - \int \nabla \cdot (\mathbf{j} x_i) d\tau + \int \mathbf{j} \cdot \nabla x_i d\tau \\ &= \int j_i d\tau, \end{aligned} \quad (54)$$

eli

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \int \mathbf{j} d\tau, \quad (55)$$

missä divergenssitermi on asetettu nolllaksi olettamalla  $\Psi \rightarrow 0$  äärettömydessä. Integroimalla osittain (55):stä saadaan perusrelaatio

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \left\langle -\frac{i\hbar \nabla}{m/2} \right\rangle + \frac{\lambda}{m/2} \langle \{\mathbf{p}, f(\mathbf{r})\} \rangle, \quad (56)$$

eli

$$\mu \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = -\langle i\hbar \nabla \rangle + \lambda \langle \{\mathbf{p}, f(\mathbf{r})\} \rangle \quad (\mu = m/2). \quad (57)$$

Kaava (57) voidaan johtaa myös Heisenbergin yntälöstä

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{r}, H] \rangle, \quad (58)$$

missä

$$H = p^2/m + V_0(r) + \frac{\lambda}{m} \{p^2, f(r)\}. \quad (59)$$

Tällöin

$$[\mathbf{r}, H] = \frac{i\hbar}{\mu} (\mathbf{p} + \lambda \{\mathbf{p}, f\}), \quad (60)$$

mikä vahvistaa virtatiheyden avulla johdetun tuloksen (57) oikeaksi. Todetaan, että impulssioperaattori  $\mathbf{p}$  ei ole suoraan verrannollinen paikkaoperaattorin  $\mathbf{r}$  aikaderivaattaan. Tyypillisissä sovellutuksissa  $f$  on vähenevä eksponenttifunktio, joko  $e^{-ar}$  tai  $e^{-br^2}$ ; tällöin virtatiheys

$$\mathbf{j} = j_1 + 2\lambda f j_1 \quad (61)$$

käyttäytyy asympotoottisesti oikein, eli on verrannollinen nopeuteen. Lyhyillä kantamilla dominoivaa komponenttia  $j_2$  voidaan tietysti käsitellä myös cut-off-menetelmällä asettamalla raja, missä epälokaalisuusparametri muuttuu nolasta ääreliseksi:

$$\lambda = 0, \quad r > r_0, \quad \lambda = \lambda_1, \quad r < r_0.$$



### 3 IMPULSSIFLUKTUAATIO

#### 3.1 Määritelmä

Olkoot  $|k\rangle$  ja  $|n\rangle$  tarkasteltavan kaksihiukkassysteemin ortonormitettuja ominaisvektoreita,  $H = T + V$  Hamilton-operaattori (59) ja  $E_m$  energian reaalinen ominaisarvo:

$$\begin{aligned} H|m\rangle &= E_m|m\rangle, & E_m &= E_m^*, \\ \sum_k |k\rangle\langle k| &= I, & E_{kn} &\equiv E_k - E_n. \end{aligned} \quad (62)$$

Lasketaan matriisielementti  $\langle k|p_j|n\rangle$  ( $p_j = \hat{j} \cdot \mathbf{p}$ ,  $\hat{j} =$  yksikkövektori) yhtälöiden (57)–(60) avulla:

$$\begin{aligned} \langle k|p_j|n\rangle &= -\frac{\mu}{i\hbar} E_{kn} \langle k|x_j|n\rangle + \frac{\mu}{i\hbar} \langle k|[V, x_j]|n\rangle \\ &= -\frac{\mu}{i\hbar} E_{kn} \langle k|x_j|n\rangle - \lambda \langle k|\{p_j, f\}|n\rangle. \end{aligned} \quad (63)$$

Otetaan käyttöön suure

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mu\dot{\mathbf{r}}, \quad (64)$$

jota nimitetään impulssifluktuaatioksi. Kaavojen (57) ja (60) perusteella voidaan kirjoittaa

$$\delta p_j = \frac{\mu}{i\hbar} [V, r_j] = -\lambda \{p_j, f\}, \quad (65)$$

jolloin

$$\langle k|p_j|n\rangle = -\frac{\mu}{i\hbar} E_{kn} \langle k|x_j|n\rangle + \langle k|\delta p_j|n\rangle. \quad (66)$$

Vertaamalla kaavoja (60) ja (66) nähdään suhde

$$\frac{\langle k|\delta p_j|n\rangle}{\langle k|p_j|n\rangle} = -\frac{\langle k|[V, x_j]|n\rangle}{\langle k|[T, x_j]|n\rangle} \equiv \eta(k, n). \quad (67)$$

Kaavan (67) (tai (65)) mukaan nopeudesta kvadraattisesti riippuva potentiaali edellyttää nolasta eroavaa impulssifluktuaatiota. Tämä seuraa siitä, että

kvanttimekaaninen todennäköisyysvirran tiheys on kaksikomponenttinen. Ja kääntäen, jos potentiaali on lokaalinen, impulssifluktuaatio on nolla eli  $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ . Tämä vastaa sitä, että todennäköisyysvirta on "suprajohtava" ja muodostuu komponentista  $\mathbf{j}_1$ . Kaavaa (67) voidaan käyttää hyväksi summasääntölaskuissa (luku 4), jos relaation

$$|\eta(k, n)| < 1 \quad (68)$$

oletetaan toteutuvan jokaisessa tilassa  $(k, n)$ : fysikaalisin perustein tämä on todennäköistä ( $|\delta\mathbf{p}| < |\mathbf{p}|$ ).

### 3.2 Peruskommutaattori

Kommutaatioääntö  $[x_j, p_t] = i\hbar\delta_{jt}$  on puhdas matemaattinen tosiasia, joka seuraa kvanttimekaanisesta sijoituksesta  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ . Kommutaattorin  $[x_j, \mu\dot{x}_t]$  arvo sen sijaan kytkeytyy kokonaisaikaderivaatan  $\dot{x}_t$  kautta Heisenbergin yhtälöön. Mielenkiintoinen ja käyttökelpoinen yhteys kommutaattorien  $[x_j, p_j]$  ja  $[x_j, \mu\dot{x}_j]$  sekä painofunktion  $f(r)$  välille saadaan laskemalla kommutaattori  $[x_j, \delta p_j]$  kaavan (65) avulla:

$$\begin{aligned} [x_j, \delta p_j] &= [x_j, p_j] - [x_j, \mu\dot{x}_j] = i\hbar - [x_j, \mu\dot{x}_j] \\ &= -2i\hbar\lambda f(r) \end{aligned} \quad (69)$$

eli

$$\langle n|[x_j, \mu\dot{x}_t]|n\rangle = i\hbar\delta_{jt}(1 + 2\lambda\langle n|f|n\rangle). \quad (70)$$

Tulos voidaan esittää symmetrisesti muodossa

$$2\lambda\langle n|f|n\rangle = \left\langle n \left| \frac{[x_j, \mu\dot{x}_j]}{[x_j, p_j]} - 1 \right| n \right\rangle. \quad (71)$$

$[x_j, \mu\dot{x}_j]$  on siis q-luku, kun taas  $[x_j, p_j]$  on aina c-luku. (Tämä tilanne aiheuttaa suurimman probleeman Lagrangen ja Hamiltonin formalismien konsistenssitarkasteluissa [KNS69, LLS70, Sug71, KS71, Kim71, Kaw72].) Kaavasta (71) nähdään, että funktion  $f(r)$  odotusarvo tilassa  $|n\rangle$  riippuu impulssifluktuaation  $\delta p_j$  määrästä kyseisessä tilassa. Jos  $\delta p = 0$ , on myös odotusarvon  $\langle n|f|n\rangle$  oltava nolla, sillä  $[x_j, \mu\dot{x}_j]/[x_j, p_j] = 1$ .

Integraali (70) laskettiin deuteronille käyttämällä potentiaalina Srivastavan sovitamaa lauseketta pallosymmetriselle  ${}^3S_1$ -tilalle (kaava (25)). Tällöin  $\lambda f = 1.1e^{-2r}$  ja  $|n\rangle$  on tapaukseen c) liittyvä aaltofunktio taulukossa 1 (s. 6) kerrottuna normitusvakiolla ja tekijällä  $1/\sqrt{4\pi r}$ . Tulos on

$$2\lambda\langle n|f|n\rangle = 0.085. \quad (72)$$

Greenin käyttämällä potentiaalilla [Gre62] saavutetaan hieman korkeampi arvo  $2\lambda\langle n|e^{-br^2}|n\rangle = 0.141$ . Näin ollen

$$\langle n|[x_j, \mu\dot{x}_j]|n\rangle \approx 1.1i\hbar. \quad (73)$$

Koska poikkeama peruskommutaattorin  $[x_j, p_j]$  arvosta ei ole suuri, voidaan vakuuttaa, että kaavalla (68) kiinnitetty ehto  $|\eta(k, n)| < 1$  on oikeutettu.

### 3.3 Sovellutus summasääntöön $S_{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p})$

Kuten aikaisemmissa töissä on painotettu [Jac67, LH70, LH71], voidaan summille

$$S_{-a}(B, A) = \sum_k \frac{1}{E_{kn}^a} \langle n|B|k\rangle \langle k|A|n\rangle, \quad (74)$$

missä  $a$  on positiivinen kokonaisluku, kehittää vain formaalinen (käyttökelpoton) summasääntötekniikka. Summassa (74) tilavektorit muodostavat täydellisen joukon ortonormitettuja tiloja eli  $\sum_k |k\rangle \langle k| = I$ , missä summaus on Stieltjes-integraali. Summa

$$S_{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \sum_k \frac{1}{E_{kn}} |\langle k|\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}|n\rangle|^2 \quad (75)$$

esiintyy fotonireaktioiden integroitujen vaikutusalojen laskussa keskeisenä suurena ( $\hat{\varepsilon}$  = fotonin polarisaatiovektori). Lokaaliselle potentiaalille on voimassa relaatio

$$|\langle k|p_j|n\rangle|^2 = \left(\frac{\mu}{\hbar}\right) E_{kn}^2 |\langle k|x_j|n\rangle|^2, \quad (76)$$

koska  $\delta p_j = 0$ . Tällöin (75) voidaan helposti sieventää verrannolliseksi Thomasin-Reichen-Kuhnin summaan  $S_{-1}(x_j, x_j)$ ,

$$S_{-1}(p_x, p_x) = \frac{\mu^2}{\hbar^2} S_1(x, x) = \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{1}{2} \langle n|[x, [H, x]]|n\rangle \quad (\hat{\varepsilon} = \hat{x}), \quad (77)$$

missä  $H = T + V = p^2/m + V_0(r)$ . Siis

$$S_{-1}(p_x, p_x) = \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{1}{2} \langle n|[x, [p^2/m, x]]|n\rangle = \mu^2/m = m/4. \quad (78)$$

Kaava

$$S_{-1}(p_x, p_x) = \frac{m}{4} + \frac{1}{2} \langle n|[x, [V, x]]|n\rangle \quad (79)$$

ei kuitenkaan ole "yleistetty" summasääntö  $S_{-1}(p_x, p_x)$ , eikä sen oikean puolen jälkimmäinen tekijä ole "korjaustermi", koska potentiaalin oletetaan kaavan vasemmalla puolella kommutoivan paikkakoordinaatin kanssa, kuten yhtälö (77) edellyttää. Kaavaa (79) voidaan nimittää yleistetyksi TRK-summasäännöksi, mutta sitä ei voida millään yksinkertaisella tavalla liittää summaan  $S_{-1}(p_x, p_x)$ , jos  $[V, \mathbf{r}] \neq 0$ , mikä todetaan seuraavan tarkastelun yhteydessä.

Kirjoitetaan  $S_{-1}(p_x, p_x)$  muodossa

$$S_{-1}(p_x, p_x) = \sum_k \frac{1}{E_{kn}} \langle n|p_x|k\rangle \langle k|p_x|n\rangle \quad (80)$$

ja oletetaan systeemin Hamilton-operaattori samaksi, jota aikaisemmissa luvuissa on tarkasteltu (kaava (59)):  $E_k$  ja  $E_n$  ovat  $H$ :n reaalisia ominaisarvoja tiloissa  $|k\rangle$  ja  $|n\rangle$ . Lausutaan  $1/E_{kn}$  ( $k \neq n$ ) kaavan (63) avulla:

$$\frac{1}{E_{kn}} = -\frac{\mu}{i\hbar} \left( \frac{\langle k|x|n\rangle}{\langle k|p_x|n\rangle - \langle k|\delta p_x|n\rangle} \right), \quad (81)$$

jolloin laskettavalle summalle saadaan pelkistetympi esitys

$$S_{-1}(p_x, p_x) = -\frac{\mu}{i\hbar} \sum_k \frac{\langle n|p_x|k\rangle \langle k|x|n\rangle}{1 - \eta(k, n)} \quad (\eta(k, n) = \langle k|\delta p_x|n\rangle / \langle k|p_x|n\rangle). \quad (82)$$

Oletetaan relaatio  $|\eta(k, n)| < 1$  todeksi, jolloin  $(1 - \eta(k, n))^{-1}$  voidaan kehittää suppenevaksi sarjaksi. Näin saadaan eksakti tulos

$$S_{-1}(p_x, p_x) = \sum_{v=0}^{\infty} S_{-1}^{(v)}(p_x, p_x), \quad (83)$$

missä

$$S_{-1}^{(0)} = -\frac{\mu}{i\hbar} \sum_k \langle n|p_x|k\rangle \langle k|x|n\rangle = -\frac{\mu}{i\hbar} \langle n|p_x x|n\rangle \quad (84)$$

ja

$$S_{-1}^{(v)} = -\frac{\mu}{i\hbar} \sum_k \langle n|p_x|k\rangle \langle k|x|n\rangle \eta^v(k, n). \quad (85)$$

Jos  $|n\rangle$  on rotaatiosymmetrinen perustila (joka oletetaan reaaliseksi), on summan ensimmäinen termi vakio

$$S_{-1}^{(0)} = -\frac{\mu}{2i\hbar} \langle n|\{p_x, x\} + [p_x, x]|n\rangle = \frac{\mu}{2} = \frac{m}{4}, \quad (86)$$

sillä antikommutaattoritermi todetaan osittaisintegroinnilla nolllaksi. Näin saatu tulos on sama kuin se, minkä lokaalinen approksimaatio ( $\delta p = 0$ ) antaa tarkastettavalle summalle. Korkeammat termit sisältävät vuorovaikutuksen eksplisiittisesti – myös lokaalisen – kuten todetaan tarkasteltaessa esimerkiksi termiä  $v = 1$ :

$$\begin{aligned} S_{-1}^{(1)} &= -\frac{\mu}{i\hbar} \sum_k \langle n|p_x|k\rangle \langle k|x|n\rangle \left( 1 - \frac{\langle k|\mu\dot{x}|n\rangle}{\langle k|p_x|n\rangle} \right) \\ &= \frac{m}{4} + \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 \sum_k E_{kn} \frac{\langle n|p_x|k\rangle \langle k|x|n\rangle \langle k|x|n\rangle}{\langle k|p_x|n\rangle} \\ &= \frac{m}{4} - \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 \sum_k \frac{\langle n|[H, p_x]|k\rangle \langle k|x|n\rangle \langle k|x|n\rangle}{\langle k|p_x|n\rangle} \\ &= \frac{m}{4} - i \frac{\mu^2}{\hbar} \sum_k \frac{\langle n|\nabla_x V_0 + \frac{\lambda}{m} \{\nabla_x f, p^2\}|k\rangle \langle k|x|n\rangle \langle k|x|n\rangle}{\langle k|p_x|n\rangle}. \end{aligned} \quad (87)$$

Viimeisessä vaiheessa käytettiin ”voimakaavaa”

$$[H, p_x] = \left[ \frac{p^2}{m}, p_x \right] + \left[ V_0 + \frac{\lambda}{m} \{p^2, f\}, p_x \right] = -i\hbar \nabla_x V_0(r) + i\hbar \frac{\lambda}{m} \{\nabla_x, p^2\}. \quad (88)$$

Vain siinä tapauksessa, että lokaalinen potentiaali  $V_0$  on kuoppapotentiali (vakio), sillä ei ole osuutta summassa (87). Jos tämän lisäksi approksimoidaan painofunktiota  $f$  vakiolla, todetaan  $S_{-1}^{(1)}$ :n jälkimmäisen tekijän häviävän ja summan palautuvan vakioksi  $m/4$ , jolloin

$$S_{-1} \approx S_{-1}^{(0)} + S_{-1}^{(1)} = 2\frac{m}{4} = m/2. \quad (89)$$

Näin tehdyt oletukset vastaavat semimaksimaalista impulssifluktuaatiota ( $\delta p_j/p_j = 1/2$ ). Saatu arvo on liian suuri, sillä ftohajontakokeet tukevat arvoa  $S_{-1} = 1.4(m/4)$  (ks. seuraava luku). Ei ole mitään täsmällistä matemaattista tai fysikaalista perustetta, jonka mukaan sarjan termit  $\nu > 1$  voitaisiin asettaa nolliksi, mutta niitä voidaan pitää pieninä korjaustermeinä.

## 4 FOTOHAJONNAN INTEGROITU VAIKUTUSALA

### 4.1 Yleistä

Fotohajonnan kokonaisvaikutusalan  $\sigma(E)$  energiaintegraali

$$\sigma_0 \equiv \int_{E_1}^{E_2} \sigma(E_\gamma) dE_\gamma \quad (90)$$

on kokeellisesti mittauskelpoinen suure [DeB64, Lev60] ja, koska se voidaan dipoliapproksimaatiossa lausua summasääntönä

$$\sigma_0 = 240 \frac{NZ}{Am} S_{-1}(p_x, \rho_x), \quad (m = 938 \text{ MeV}) \quad (91)$$

( $A = N + Z =$  nukleoniluku), on systeemin Hamilton-operaattorin testaaminen periaatteessa mahdollista [LH70, Lev60]. Gell-Mannin-Goldbergerin-Thirringin (GGT) summasääntö

$$\sigma_0 = 60 \frac{NZ}{A} (1 + W), \quad (92)$$

missä epälokaalisuuskorjaukselle analoginen tekijä

$$W = \frac{mc}{2(\pi e)^2} \frac{A}{NZ\hbar} \int_{155}^{\infty} (Z\sigma_p + N\sigma_n - \sigma_A) dE_\gamma, \quad (93)$$

antaa integroidun vaikutusalan vapaille systeemeille  $n$ ,  $p$  ja  $A$  (neutroni, protoni, ydin), on puhtaasti dispersioteoreettinen kaava, jossa ei tehdä jakoa multipoleihin [GGT54, EG70]. Haluttaessa tutkia epälokaalisen potentiaalin osuutta integroidussa vaikutusalassa on käytettävä kaavaa (91), mikä edellyttää mallitietoa sidotusta NN-tilasta, deutronista.

Dipoliapproksimaatiossa oletetaan, että sähköiset E1-transitiot hallitsevat fotonin absorptiotapahtumaa ja että fotonin aallonpituus on paljon pienempi kuin ytimen halkaisija. E1-transitioon liittyvä häiriöoperaattori  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{p}$  korvautuu silloin impulssilla  $p_x$  (polarisaatio valittu  $\hat{x}$ -suuntaan). Kun fotonin energia on 40–200 MeV, on sen absorptiomekanismi ytimeen mahdollisesti toinen kuin matalilla energioilla (kvasideuteroniefekti [EG70]). Tällöin ei ole lainkaan varmaa, että

yksihiukkasoperaattori pystyy kuvaamaan tilannetta tyydyttävästi. Suorat las-  
kut osoittavat, että deuterotonin ftohajonnan kokonaisvaikutusalan merkittävin  
osuus muodostuu sähköisistä dipolitransitioista. Hulthen ja Sugawara esittävät  
taulukon, josta nähdään, että energia-alueella 50–200 MeV E1-siirtymät ovat nu-  
meerisesti 100–10 kertaa merkittävämpiä kuin muut sähköiset tai magneettiset  
multipoolitransitiot [HS57]. Sama johtopäätös voidaan tehdä myös GGT-summa-  
säännön avulla, koska se ei johda oleellisesti eri tuloksiin kuin dipoliapproksi-  
maatiassa laskettu klassinen summasääntölasku.

## 4.2 Ftohajonnan käsittely impulssifluktuaatiolla

Kaavaa

$$\sigma_0 = 60 \frac{NZ}{A} \left( 1 + \frac{m}{2\hbar^2} \langle n | [x, [V, x]] | n \rangle \right) \quad (94)$$

on käytetty vuosikausia ftohajonnan integroitua vaikutusala laskettaessa. Jos  
[V, x] ≠ 0, ei kaava (94) ole potentiaalitermin osalta oikea, koska yhtälöä (79)  
on sovellettu virheellisesti. Tällainen virhe on varsin helppo tehdä mm. siksi, et-  
tä oppikirjallisuudessa integroitu vaikutusala usein lausutaan atomifysiikan  
suureen, summatun oskillaattorivoimakkuuden

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= A_1 \sum_k f_{kn} = 60 \frac{m}{\hbar^2} \frac{NZ}{A} \left( \frac{1}{2} \langle n | [x, [T, x]] | n \rangle \right), \\ f_{kn} &= \frac{2m}{\hbar^2} E_{kn} |\langle k | x | n \rangle|^2, \end{aligned} \quad (95)$$

avulla [Lev60, EG70]. Atomifysiikassa potentiaalit ovat tavallisesti lokaalisia, jol-  
loin yleistetystä summatusta oskillaattorivoimakkuudesta

$$\sum_k f_{kn} = \frac{m}{\hbar^2} (\langle n | [x, [T, x]] | n \rangle + \langle n | [x, [V, x]] | n \rangle) \quad (96)$$

muodostui virheiden alkulähde, sillä ei selvitetty, mitä tämä yleistys (potentiaali-  
termin mukanaolo) aiheutti itse perusteorian rakenteessa. Käsillä olevassa työssä  
on todistettu, että kvadraattisesti nopeudesta riippuville potentiaaleille integroi-  
tu vaikutusala voidaan sähköisessä dipoliapproksimaatiassa lausua muodossa

$$\sigma_0 = 120 \frac{i}{\hbar} \frac{NZ}{A} \sum_k \frac{\langle n | p_x | k \rangle \langle k | x | n \rangle}{1 - \eta(k, n)} = 240 \frac{NZ}{Am} \sum_{\nu_0}^{\infty} S_{-1}^{(\nu)}, \quad (97)$$

missä tekijä  $\eta(k, n)$  sisältää nopeudesta riippuvan potentiaalin käytöstä aiheutu-  
van osuuden impulssifluktuaation muodossa. Kun  $\eta(k, n) = 0$ , on

$$\sigma_0 = 240 \frac{NZ}{Am} S_{-1}^{(0)} = 60NZ / A \text{ MeVmb.}$$

Deuteronille ( $N = Z = 1$ ) saadaan (94):stä kaava

$$\sigma_0 = 30(1 + 2\lambda \langle n | f | n \rangle), \quad (98)$$

jota on käytetty kaikissa kirjoittajan tuntemissa tutkimuksissa. Edellisessä luvussa johdetun kaavan (71) perusteella havaitaan, että korjausermi  $2\lambda\langle n|f|n\rangle$  on pelkästään impulssifluktuaation aiheuttama, eli (98) on ekvivalentti kaavalle

$$\sigma_0 = 30\langle n|[x, \mu\dot{x}]/[x, p_x]|n\rangle. \quad (99)$$

Koska kaava (94) on tosi vain silloin, kun sen oikean puolen potentiaalitermi oletetaan nolllaksi, ei myöskään kaava (99) voi antaa mitään muuta tulosta kuin  $\sigma_0 = 30$ . Esimerkiksi Kistler saa kaavan (98) avulla tuloksen  $\sigma_0 = 30(1.1)$ , mikä kaavan (73) perusteella todellakin pitää paikkansa [Kis69]. Oleellista on kuitenkin se, että näinkin laskettu suure ei ole  $\sigma_0$  vaan  $\sigma_2$ :een verrannollinen luku (ks. kaavaa (3)).

Kaavaa (94) on käytetty viime kuukausiin asti potentiaalien vertailuissa [LR68, RS71]. Vertailuja voidaan suorittaa kaavan (97) avulla, jos on olemassa luotettava arvio impulssifluktuaation suuruudesta. Deuteronille pätee kokeellinen tulos [LR68, RS71]

$$\sigma_0 = 41 = (30 + 11) \text{ MeVmb} = 1.365 \cdot 30, \quad (100)$$

jolloin kaavaan (97) sijoitettu arvio

$$|\eta(k, n)| = \frac{0.365}{1.365} = 0,27 = \left| \frac{\langle k|\delta p_x|n\rangle}{\langle k|p_x|n\rangle} \right| \quad (101)$$

johtaa kokeen kanssa yhtäläiseen tulokseen.

Aikaisemmassa työssä on summasääntölaskujen yhteydessä todettu epälokaalisen vuorovaikutuksen olevan kuvattavissa transiio-operaattorin fluktuaatioina [LH71]. Tällöin havaittiin yhteys

$$\tilde{S}_a(A^+, A) = S_a(A'^\top, A'), \quad (102)$$

missä  $S_a$  liittyy systeemiin, jossa vuorovaikutus on saatu epälokaaliseksi lokaalisen systeemin unitaarisilla muunnoksilla ja  $A' = \exp(-i\Omega)A \exp(i\Omega)$  on operaattori, jota on käytettävä alkuperäisen transiio-operaattorin  $A$  asemesta ekvivalentin lokaalisen systeemin summasääntölaskussa. Nyt on lisäksi voitu osoittaa, että operaattoreiden fluktuaatiot aiheutuvat kvanttimekaanisen virtatiheyden jakautumisesta kahteen komponenttiin siinä avaruuden osassa, jota epälokaalinen vuorovaikutus hallitsee.

Oskillaattorivoimakkuuden virheellinen yleistys ydinfysiikkaan ftohajontatutkimuksissa ei kuitenkaan ole täysin perusteeton, jos halutaan uskoa vanhaan Siegertin teoreemaan, jota selvitetään seikkaperäisesti mm. viitteessä [EG70]. Teoreema perustuu vektoripotentialin  $\mathbf{A}$  sähköisten multipoolien jakamiseen kahteen osaan, joista vain toinen voidaan kirjoittaa gradienttina. Se osa, jota ei voida esittää gradienttina, asetetaan tavallisesti nolllaksi, jolloin virtatiheyden matriisielementti saadaan suoraan verrannolliseksi varaustiheyden matriisielementtiin. Verrannollisuusvakio on säteilyn aaltovektorin itseisarvo, jolloin päädytään tulokseen, jonka mukaan kaava (94) on täysin korrekti. On osoitettu, että Siegertin approksimaatio on riittävän tarkka vain matalilla energioilla [HL70, JH71],



joten juuri sillä alueella, missä epälokaaliset efektit ovat voimakkaita, teoreema menettää arvonsa: kaava (94) ei siten ole perusteltu.

Impulssifluktuaatiokäsittely ei rajoitu yksinomaan sähköisessä dipoliaprossimaatioissa tehtäviin tarkasteluihin, joiden heikkoutena on rajoittuneisuus mataliin ja keskisuuriin fotonien energiisiin. Fotohajontaprobleeman tarkka ratkaisu – jos se ylipäänsä on mahdollinen – edellyttää kuitenkin radikaaleja muutoksia teoreettisissa menetelmissä.

Vaikka suoritettu tarkastelu on kohdistunut määrättyyn fenomenologisessa ydintutkimuksessa käyttökelpoiseen erikoistapaukseen, on klassiset analogiat huomioon ottaen todennäköistä, että kaksikomponenttista todennäköisyysvirtaa käyttävällä kvanttimekaniikalla saavutetaan täydellisempi ilmiökuvauksena kuin ”suprajohtavaa” virtaa käyttävällä teoriolla, mikä toimii hyvin atomiskaalassa. Jo se, että impulssifluktuaatioon perustuva epärelativistinen kvanttimatematiikka pystyy antamaan oleellisesti uuden sisällön ja ulkoasun vanhalle fotohajontaprobleemalle, osoittaa, että menetelmä soveltuu yhdeksi sillaksi klassisen, yksikomponenttista virtaa käyttävän kvanttimekaniikan ja relativistisen kvanttimekaniikan välille. Tällaisia siltoja joudutaan käyttämään niin kauan kuin yleisesti hyväksyttyä hitufysikaalista teoriaa ei ole olemassa.

## Kiitokset

Esitän parhaat kiitokseni apulaisprofessoreille C. Cronström ja R.M.K. Hämäläinen työn huolellisesta lukemisesta ja keskusteluista. Tohtori A.M. Greeniä kiitän keskusteluista ja alan viimeisimpien tutkimusten esiin tuomisesta.

Saamastani rahallisesta tuesta kiitän Rauno Hämäläistä (Valtion Luonnontieteellisen toimikunnan apuraha 1969–1971) sekä Oskar Öflundin säätiötä ja Jyväskylän yliopistoa tutkimusstipendeistä.

## LIITE 1 LAUSEKKEEN $\Psi^* V_2 \Psi - \Psi V_2 \Psi^*$ SIEVENNYS

$$\begin{aligned}
 & \Psi^*(\mathbf{r}) V_2(r, p^2) \Psi(r) - \Psi(r) V_2(r, p^2) \Psi^*(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\hbar^2 \lambda}{m} (\Psi^* f \nabla^2 \Psi + \Psi^* \nabla^2 f \Psi - \Psi f \nabla^2 \Psi^* - \Psi \nabla^2 f \Psi^*) \quad [f, \Psi] = 0 \\
 &= -\frac{\hbar^2 \lambda}{m} \left( f(r) (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) + (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) f(r) \right) \\
 &= -\hbar i \lambda (f \nabla \cdot \mathbf{j}_1) + \left[ \Psi^* f \nabla^2 \Psi - \Psi f \nabla^2 \Psi^* + 2\Psi^* \nabla \Psi \cdot \nabla f - 2\Psi \nabla \Psi^* \cdot \nabla f \right] \left( -\frac{\hbar^2 \lambda}{m} \right) \\
 &= -\hbar i \lambda f \nabla \cdot \mathbf{j}_1 - \frac{\hbar^2 \lambda}{m} \left[ f (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) + (2\Psi^* \nabla \Psi - 2\Psi \nabla \Psi^*) \cdot \nabla f \right] \\
 &= -2i\hbar \lambda (f \nabla \cdot \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1 \cdot \nabla f) \\
 &= -2i\hbar \lambda \nabla \cdot (\mathbf{j}_1 f).
 \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{1}{i\hbar} (\Psi^* V_2 \Psi - \Psi V_2 \Psi^*) = -2\lambda \nabla \cdot (f \mathbf{j}_1) \equiv E_2,$$

joten

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_1 - 2\lambda \nabla \cdot (f \mathbf{j}_1) = -\nabla \cdot (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2).$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_1 = -\frac{i\hbar}{m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \\ \mathbf{j}_2 = 2\lambda f \mathbf{j}_1 \end{pmatrix}$$

## VIITTEET

- [Bab66] V.V. Babikov. *Nucl. Phys.*, 76:665, 1966.
- [Bel62] J.S. Bell. In C. Fronsdal, editor, *The Many-Body Problem, Lecture Notes from the First Bergen International School of Physics 1961*, page 214. Benjamin, New York, 1962.
- [BT53] B. Bakamjian and L.H. Thomas. *Phys. Rev.*, 92:1300, 1953.
- [Cro67] C. Cronström. *Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, 35(13+14), 1967.
- [DeB64] S. DeBenedetti. *Nuclear Interactions*. John Wiley & Sons, New York, 1964.
- [EG70] J.M. Eisenberg and W. Greiner. *Nuclear Theory, Vol. 2: Excitation Mechanisms of the Nucleus*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [Fie67] H. Fiedeldey. *Nucl. Phys. A*, 96:463, 1967.
- [Fol61] L.L. Foldy. *Phys. Rev.*, 122:275, 1961.
- [GGT54] M. Gell-Mann, M.L. Goldberger, and W.E. Thirring. *Phys. Rev.*, 95:1612, 1954.
- [Gre62] A.M. Green. *Nucl. Phys.*, 33:218, 1962.
- [GS65] A.E.S. Green and R.D. Sharma. *Phys. Rev. Lett.*, 14:380, 1965.
- [GS70a] F. Galogero and Yu.A. Simonov. *Phys. Rev. Lett.*, 25:881, 1970.
- [GS70b] F. Galogero and Yu.A. Simonov. *Lett. Nuovo Cimento*, 4:219, 1970.
- [GSS68] A.E.S. Green, T. Sawada, and D.S. Saxon. *The Nuclear Independent Particle Model*. Academic Press, New York/London, 1968.
- [Hel71] L. Heller. Some basic questions in nucleon-nucleon bremsstrahlung. Preprint LA-DC-13108, Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico, 1971. (to be published in the proceedings of the Gull Lake Symposium on The Two-Body Force in Nuclei).
- [Her70] R. Hermann. *Lie Algebras and Quantum Mechanics*. Benjamin, New York, 1970.
- [HL70] R.M.K. Hämäläinen and I.A. Lilja. *Lett. Nuovo Cimento*, 4:947, 1970.
- [HS57] L. Hulthen and M. Sugawara. *Handbuch der Physik, Vol. 39*, pages 1–143. Springer, Berlin, 1957.
- [Jac67] R. Jackiw. *Phys. Rev.*, 157:1220, 1967.

- [JH71] I. Joenperä and R.M.K. Hämäläinen. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, VI*, No 380, 1971.
- [Kaw72] T. Kawai. Schwinger's variational principle in quantum mechanics with velocity dependent potential. I: One dimensional case. Technical report, Dalhousie University, Department of Physics, Halifax, Nova Scotia, 1972.
- [KF70] R.A. Krajcik and L.L. Foldy. *Phys. Rev. Lett.*, 24:545, 1970.
- [Kia67] D. Kiang. *Phys. Lett. B*, 24:132, 1967.
- [Kia71] D. Kiang. *Am. J. Phys.*, 39:996, 1971.
- [Kim71] T. Kimura. *Prog. Theor. Phys.*, 46:1261, 1971.
- [Kis69] S. Kistler. *Z. Phys.*, 223:447, 1969.
- [KNS69] D. Kiang, K. Nakazawa, and R. Sugano. *Phys. Rev.*, 181:1380, 1969.
- [KS71] T. Kimura and R. Sugano. On consistency between lagrangian and hamiltonian formalisms in quantum mechanics ii. Preprint, Hirosima University, Takehara, Hirosima-ken, 1971.
- [Lev60] J.S. Levinger. *Nuclear Photo-disintegration*. Oxford University Press, London, 1960.
- [LH70] I.A. Lilja and R.M.K. Hämäläinen. *Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math.*, 40:155, 1970.
- [LH71] I.A. Lilja and R.M.K. Hämäläinen. *Lett. Nuovo Cimento*, 1:229, 1971.
- [LL59] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1959.
- [LLS70] H.E. Lin, W.C. Lin, and R. Sugano. *Nucl. Phys. B*, 16:431, 1970.
- [LR68] J.G. Lucas and M.L. Rustgi. *Nucl. Phys. A*, 112:503, 1968.
- [MM65] N.F. Mott and H.S.W. Massey. *The Theory of Atomic Collision*. Clarendon Press, Oxford, 3rd edition, 1965.
- [OF50] R.K. Osborn and L.L. Foldy. *Phys. Rev.*, 79:795, 1950.
- [Osb68] H. Osborn. *Phys. Rev.*, 176:1514, 1968.
- [Pei60] R.E. Peierls. In D.A. Bromley and E.W. Vogt, editors, *Proc. Int. Conf. on Nuclear Structure*, page 12. University of Toronto Press, 1960.
- [PP62] W.K.H. Panofsky and M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.

- [Raz68] M. Razavy. *Phys. Rev.*, 171:1201, 1968.
- [RS71] S.S. Raghavan and B.K. Srivastava. *Canad. J. Phys.*, 49:2211, 1971.
- [Sug71] R. Sugano. *Prog. Theor. Phys.*, 46:297, 1971.
- [Way37] K. Way. *Phys. Rev.*, 51:552, 1937.
- [Whe36] J.A. Wheeler. *Phys. Rev.*, 50:643, 1936.
- [Won64] D.Y. Wong. *Nucl. Phys.*, 55:212, 1964.

