

Denis Zhidkikh

**Matematiikan kirjoittaminen
verkko-oppimisympäristöissä: erilaisia menetelmiä**

Tietotekniikan kandidaatintutkielma

18. joulukuuta 2018

Jyväskylän yliopisto

Informaatioteknologian tiedekunta

Tekijä: Denis Zhidkikh

Yhteystiedot: denis.d.zhidkikh@student.jyu.fi

Ohjaaja: Sanna Juutinen

Työn nimi: Matematiikan kirjoittaminen verkko-oppimisympäristöissä: erilaisia menetelmiä

Title in English: Writing mathematics in virtual learning environments: different techniques

Työ: Kandidaatintutkielma

Sivumäärä: 24+0

Tiivistelmä: Verkko-oppimisympäristöjen integrointi matematiikan opetukseen on aihe, jota tarkasteltu laajasti. Eräs aiheeseen liittyvä ongelma on matemaattisen tekstin ja matematiikan kirjoittamisen sähköistäminen opetuksen kannalta järkevällä tavalla.

Tutkielmassa tarkastellaan eri verkko-oppimisympäristöihin sopivia notaatiomenetelmiä. Matematiikan kirjoittamiseen voidaan käyttää symbolista tai lineaarista notaatiota, mutta vaihtoehtoisesti kirjoittamista voidaan pyrkiä välttää. Matemaattisen argumentoinnin sähköistäminen onnistuu formaalilla argumentointikielillä, kuten rakenteisilla päättelyketjuilla.

Avainsanat: matematiikka, verkko-oppimisympäristö, kirjoittaminen, formaalit argumentointikieliset

Abstract: Integration of virtual learning environments into mathematics education is a topic that has been looked into a lot. One of the problems in said topic is digitalising the writing and argumentation processes in a sensible way from the perspective of education.

In this thesis, different writing methods suitable for VLEs are considered. Symbolic and linear notations can be used, but alternatively one can attempt to avoid writing mathematics altogether. Digitalising mathematical argumentation is possible with formal argumentation languages, such as structured calculational proofs.

Keywords: mathematics, virtual learning environments, writing, formal argumentation languages

Kuviot

Kuvio 1. Esimerkki Digiabi-projektin kaavaeditorista, jossa käytetään symbolista notaatiota. Vasemmalla on käyttäjän rakentama kaava ja oikealla editorin tuottama \LaTeX -koodi. (Digiabi 2018.)	8
Kuvio 2. Esimerkki lineaarisesta notaatiosta. Kuvassa Maxima-kieli ja vastaava symbolisen notaation tuloste.	9
Kuvio 3. Esimerkki yhtälön $7x^2 - 6x = 0$ ratkaisemisesta käyttäen rakenteisia päätelyketjuja. (Back 2008, 20.)	14

Sisältö

1	JOHDANTO	1
2	TEOREETTISET LÄHTÖKOHDAT	3
2.1	Verkko-oppimisympäristöjen määrittelmä	3
2.2	Matemaattisen ajattelun kehittäminen opetuksen lähtökohtana	4
2.3	Tietotekniikan soveltaminen matemaattisissa aineissa	5
3	MATEMATIIKAN KIRJOITTAMINEN TIETOKONEELLA.....	7
3.1	Matematiikan symbolinen esitys	7
3.2	Matematiikan lineaarinen esitys	9
3.3	Muut matematiikan esitystavat	10
3.4	Matemaattisen argumentoinnin esittäminen	12
3.5	Rakenteiset päättelyketjut.....	13
4	YHTEENVETO.....	16
	LÄHTEET	18

1 Johdanto

Pedagogiikalla on vahva ja pitkä perinne, joka perustuu vahvasti oppikirjamaisuuteen ja tehtävien tekoon. Viimeisten muutaman vuosikymmenen aikana perinteestä on kuitenkin pyritty pääsemään irti, ja opetusta on viety enemmän kohti yhteistoiminnallisuutta sekä elinikäistä oppimista. (esim. Rauste-von Wright, Wright ja Soini 2003.) Samalla teknologian ja internetin kehitys muuttivat koulutuksen merkitystä yhteiskunnassa: koska oppiminen ei enää rajoittunut vain koulutuslaitoksiin, jokainen sai mahdollisuuden oppia mitä tahansa milloin tahansa (Antikainen 2013, 319). Koulutuksesta siis tuli omanlainen hyödyke.

Koulutuksen muuttuminen saatavammaksi syntyivät erilaiset massiiviset avoimet verkkokurssit (*MOOC*, Massive Open Online Course), joissa saattoi olla tuhansia samanaikaisia opiskelijoita. Tarve kehittää oppimista verkossa sai aikaan verkko-oppimisen (*e-learning*) teorian. Lisäksi tarvittiin verkkoalustat, joita oppilas käyttää kurssin aikana. Tällaisia oppimisen eri elementtejä yhdistäviä järjestelmiä alettiin kutusta verkko-oppimisympäristöiksi. Nykyään verkko-oppimisympäristöt näkyvät laajasti kaikenkokoisilla kursseilla, ja ne ovat tärkeä väline opetuksen sähköistämässä.

Verkko-oppimisympäristöjen yleisyydestä huolimatta niiden integrointia matematiikan opetukseen Suomessa on ollut melko hidasta. Sähköistämistä on kokeiltu pääosin vain yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa (esim. Nieminen 2008; Blåfield 2009; Tiitu 2017); saman ongelman tarkastelu peruskouluissa on jäänyt vähemmälle (esim. Sallasmaa, Liimatainen ym. 2011). Tästä huolimatta viime vuosina kynnys sähköistää matematiikan opetusta peruskoulutuksessa on laskenut kiivaasti: ylioppilastutkintoa on sähköistetty jo vuodesta 2016 (OKM 2016, 36), ja tieto- ja viestintätaitojen merkitys on vahvasti näkyvissä peruskoulutuksen ohjeissa (esim. Opetushallitus 2014, 23; 2015, 14–15). Siispä voidaan sanoa, että matematiikan opetuksen sähköistäminen on yhä ajankohtaisempi aihe.

Matematiikan opetuksen sähköistäminen ei kuitenkaan ole yksinkertaista. Eräs olennaisimmista ongelmista on matematiikan kirjoittamisen sähköistäminen. Syynä ongelmaan on matematiikan tarkka, mutta toisaalta monipuolinen kieli: esimerkiksi merkintä $a + b$ voi kontekstista riippuen tarkoittaa yhteenlaskua, loogista operaattoria tai vaikkapa vektorien välistä

laskutoimitusta. Toisaalta itse argumentointiakaan ei ole helppoa sähköistää, sillä perinteinen matematiikan todistus tai tehtävän ratkaisu edellyttää tavallisen kirjakielen sekä matematiikan notaation sekoittamista.

Vaikka itse matematiikan notaation sähköistämisiongelmaan on olemassa ratkaisuja, kuten L^AT_EX-ladontajärjestelmä, ongelma on omanlaatuinen verkko-oppimisympäristöjen ja opetuksen kannalta. Tämä johtuu oppimiseen liittyvistä lisäehdoista: hyvin sähköistettyä notatiota pitää kyetä muun muassa tarkistamaan automaattisesti, sillä tavallinen tarkastustapa on miltei mahdoton tuhansien ihmisten kokoisilla MOOC-kursseilla. Lisäksi notaation pitää olla oppijoille helposti omaksuttavissa: pääpainohan on matematiikan oppimisessa, eikä sen latomisessa.

Matematiikan kirjoittamista verkko-oppimisympäristöjen kontekstissa ei ole tutkittu erityisen laajasti. Tämän tutkielman tavoitteena onkin selvittää, mitä eri matematiikan kirjoittamisen menetelmiä voidaan käyttää verkko-oppimisympäristössä. Asiaa pohditaan seuraavien apukysymyksien kautta:

- Millä eri tavoilla matematiikkaa voidaan kirjoittaa verkko-oppimisympäristössä?
- Mitä hyötyjä ja haittoja on näillä eri menetelmillä?
- Voidaanko matematiikan avoimet argumentaatiotehtävät sähköistää? Miten?

Tutkielman aihe tarkastellaan kirjallisuuskatsauksena käyttäen erilaisia tutkimuksia, joissa verkko-oppimisympäristöjä on kokeiltu integroida matematiikan opetukseen. Tämä työ jakautuu kahteen osaan: Luvussa 2 tarkastellaan aineiston kannalta välttämättömät käsitteet, kuten verkko-oppimisympäristö sekä matematiikan didaktiikka. Sen jälkeen luvussa 3 esitellään kirjallisuuskatsauksen avulla löydettyjä tuloksia.

2 Teoreettiset lähtökohdat

Ennen varsinaista aineiston analysointia on tarkasteltava aiheeseen liittyvät käsitteet. Koska työn tavoite on tarkastella matematiikan kirjoittamista verkko-oppimisympäristöissä, on avattava tarkemmin, mitä verkko-oppimisympäristöt ovat ja mikä on niiden merkitys matematiikassa. Tässä luvussa avataan lyhyesti verkko-oppimisympäristön sekä matematiikan didaktiikan määritelmät ja tarkastellaan, kuinka tietotekniikkaa on ajan saatossa sovellettu matematiikan opetuksessa.

2.1 Verkko-oppimisympäristöjen määritelmä

Verkko-oppimisympäristöjä on ajan saatossa tutkittu laajasti, ja niitä käytetään useissa koulu-laitoksissa. Pelkästään Suomen yliopistoissa käytetään noin 19 erilaista sähköistä oppimisa-lustaa (Tikkanen 2016). Siispä pystyäkseen tarkastelemaan eri verkko-oppimisympäristöjen elementtejä on selvitettävä, mitä verkko-oppimisympäristöt ylipäätään ovat.

Verkko-oppimisympäristöjä voidaan määritellä usealla eri tavalla käyttötarkoituksesta riip-puen. Aleven ym. (2003) nimeää *interaktiiviseksi oppimisympäristöksi* (interactive learning environment) sellaiset tietokonepohjaiset järjestelmät, joissa on mahdollista lukea materi-aalia ja tehdä tehtäviä. Lisäksi interaktiivisessa oppimisympäristössä on ajattelua sekä teh-tävien tekoa helpottavia ominaisuuksia, kuten automatisoituja vihjeitä, visualisointia sekä lisätietoja aiheesta. Puolestaan Nevgi ja Tirri (2003, 20) antavat löyhemmän määritelmän: verkko-oppimisympäristö on verkkosivusto, joka tarjoaa opettajalle ja opiskelijoille yhtei-sen virtuaalisen opiskelutilan. Nykyään suuressa suosiossa ovat myös edellä mainittuja omi-naisuuksia yhdistävät *oppimisen hallintajärjestelmät* (learning management system). Oppi-misen hallintajärjestelmissä materiaalin jakamisen ja tehtävien teon lisäksi löytyvät koko oppimisprosessia hallinnoivat ominaisuudet, kuten luokkien, opiskelijoiden, arvosanojen ja tapahtumien hallinta (Watson ja Watson 2007).

Edellisiä nimityksiä käytetään vahvasti sekaisin. Esimerkiksi Weller (2007, 2–5) nostaa esil-le, että oppimisen hallintajärjestelmiä usein kutsutaan myös nimillä *virtuaalinen oppimi-sympäristö* (virtual learning environment), *hallittu oppimisympäristö* (managed learning en-

vironment) sekä *kurssien hallintajärjestelmä* (course management system). Weller (2007) kuitenkin mainitsee, että hallitulla oppimisympäristöllä tarkoitetaan usein suurempaa järjestelmää, joka tuo yhteen verkko-oppimisympäristöjä sekä muita opiskelun oheisjärjestelmiä. Kaiken kaikkiaan on sopivaa olettaa, että kaikki edelliset termit viittaavat yleisesti suomenkieliseen termiin *verkko-oppimisympäristö*.

Matematiikan sähköistäminen ei kuitenkaan edellytä koko oppimisen hallintajärjestelmän käyttöä: esimerkiksi jo pelkästään tehtävien tai materiaalin sähköistäminen onnistuu interaktiivisella oppimisympäristöllä. Puolestaan koko oppimista muokkaavien elementtien, kuten kommunikoinnin ja arvioinnin, sähköistäminen edellyttää jo oppimisen hallintajärjestelmää. Tämän lisäksi edellisten määritelmien pohjalta eri verkko-oppimisympäristöistä löytyvät samanlaiset piirteet. Näin ollen on sopivaa olettaa, että tietty matematiikan sähköistämisen ongelma pätee useammalle verkko-oppimisympäristön tyypille. Tässä työssä ei täten rajoiteta tarkastelua vain tiettyyn verkko-oppimisympäristöön, vaan pääpaino on itse sähköistämisen haasteissa ja mahdollisuuksissa.

2.2 Matemaattisen ajattelun kehittäminen opetuksen lähtökohtana

Pelkästään verkko-oppimisympäristöjen tarkastelu ei riitä, mikäli halutaan ymmärtää niiden käyttöä tietyssä oppiaineessa. Sen sijaan on myös ymmärrettävä, miten kyseistä ainetta opetetaan: on siis tarkasteltava aineen didaktiikkaa. Ainedidaktiikalla tarkoitetaan sitä pedagogiikan osa-aluetta, joka käsittelee pedagogiikan teorian soveltamista tietyn aineen opetukseen (Rauste-von Wright, Wright ja Soini 2003, 18).

Matematiikan didaktiikassa korostetaan, että matematiikan opetuksen päätavoite on matemaattisen ajattelun kehittäminen. Matemaattiselle ajattelulle voidaan esittää useita eri määritelmiä, mutta yleensä sillä tarkoitetaan ajattelua matematiikan avulla. (Pehkonen ja Rossi 2018, 58.) Matemaattisen ajattelun kehittämisen merkitys näkyykin vahvasti esimerkiksi perusopetuksen tavoitteissa (mm. Opetushallitus 2015, 129; 2014, 130, 237, 377).

Vaikka matemaattista ajattelua on helppoa määritellä, käytännössä sen kehittäminen ja arviointi ei ole yksinkertaista. Tämä johtuu siitä, että oppija todellisesti soveltaa matemaattista ajattelua yleensä vain uusien asioiden oppimisen sekä todellisen ongelmaratkaisun yhtey-

dessä (Pehkonen ja Rossi 2018, 60). Pehkonen ja Rossi (2018, 63) nostavat esille, että on olemassa kolme päävälinettä opettaa ja tarkastella oppilaan matemaattista ajattelua: avoimet ongelmanratkaisutehtävät, ajatuskartat sekä matematiikan kielentäminen.

Näistä kolmesta tavasta matematiikan kielentäminen tarkoittaa, että puhtaan laskemisen sijaan tarkastelun kohteena on se, kuinka oppija ilmaisee – eli kielentää – päättelyään. Tällöin arvioinnin kohteena on myös itse ajatteluprosessi pelkästään loppuvastauksen sijaan. Matemaattinen kielentäminen onkin yksi tärkeimmistä ja tehokkaimmista tavoista kehittää sekä seurata oppijan matemaattista ajattelua (Pehkonen ja Rossi 2018, 64). Siispä hyvään matematiikan opetukseen kuuluvat aina avoimet, oman ajattelun esittämistä ja pohtimista vaativat tehtävät. Voidaan täten myös sanoa, että matematiikan opetuksen onnistunut sähköistäminen edellyttää tapoja kirjoittaa matematiikkaa tietokoneella.

2.3 Tietotekniikan soveltaminen matemaattisissa aineissa

Tietotekniikan käyttäminen matematiikassa ei ole sinänsä uusi aihe: jo 1960-luvulla tietoteknisiä välineitä käytettiin matematiikan opetuksessa. Alussa tietoteknisten välineiden käyttö rajoittui pääosin vain esitysvälineisiin (kuten projektoreihin sekä esitysgrafiikkaan). Tietotekniikkaa käytettiin myös itse opetuksessa, mutta se rajoittui vain yksilölliseen työskentelyyn. Tietoteknisten välineiden käyttö on ajan mukaan laajentunut matematiikasta, ja puhtaasta yksilöllisestä työskentelystä luovuttiin kritisoidulla se “ohjelmoivaksi opettamiseksi” sekä “työurakka-pedagogiikaksi”. (Pehkonen ja Rossi 2018, 20, 22, 72.) Nykyään tietotekniikan käyttö opetuksessa on laajasti tutkittu aihe, ja opetusta pyritään digitalisoimaan aktiivisesti eri aineissa.

Vaikka ajan saatossa on tapahtunut useita muutoksia opetuskäytänteissä, suomalainen matematiikan opetuskulttuuri on edelleen melko perinteinen: yleisimmät tavat opettaa matematiikkaa ovat melkein aina olleet luentomainen esittävä opetus sekä yksilöllinen työskentely. Yrityksiä sähköistää matematiikan opetusta vaikeuttaa myös se, että itse opettajat kokevat innovatiiviset opetustavat usein "opetusviihteenä". Tästä huolimatta oppimistulokset ovat aina olleet hyvät, ja oppilaat ovat olleet usein erittäin aktiiviset oppijat. (Patrikainen 2012, 79.) Tätä opetustapojen perinteisyyttä voidaan perustella osin tietotekniikan roolilla matemati-

kassa: kuten edellä todettiin, alussa tietotekniikan käyttö on ollut hyvin rajoitettua. Tämän lisäksi, koska opettajat näkevät uudet opetusmenetelmät turhina, tietoteknisten välineiden käytölle ei nähty mitään syytä matematiikan opetuksessa.

Perinteisyydestä huolimatta opettajien suhtautuminen tietoteknisten välineiden käyttöönottoon opetuksessa on viime aikoina nopeasti muuttunut: viimeaikaisten kyselyjen perusteella yhä useampi opettaja suhtautuu positiivisesti opetuksen sähköistymiseen (Tanhua-Piironen ym. 2016). Tätä “sähköistämishuumaa” on koettu myös matematiikan opetuksessa. Matematiikkaa varten on ajan saatossa kehitetty laaja valikoima tietoteknisiä työkaluja, kuten symbolisia laskentaohjelmistoja, dynaamisen geometrian ohjelmistoja sekä sähköisiä opetusmateriaaleja (Pehkonen ja Rossi 2018, 74). Lisäksi useiden testien, kuten PISA-tutkimuksien sekä ylioppilaskokeiden sähköistyminen on mahdollisesti ajanut opettajia sähköistämään opetustaan yhä enemmän. Tällaisiin välineisiin kuuluvat myös menetelmät esittää matemaattista tekstiä sähköisesti. Seuraavaksi tarkastellaankin, millaisia matematiikan esitysvälineitä on ajan saatossa kehitetty ja kuinka niitä voidaan käyttää hyväkseen matematiikan opetuksessa.

3 Matematiikan kirjoittaminen tietokoneella

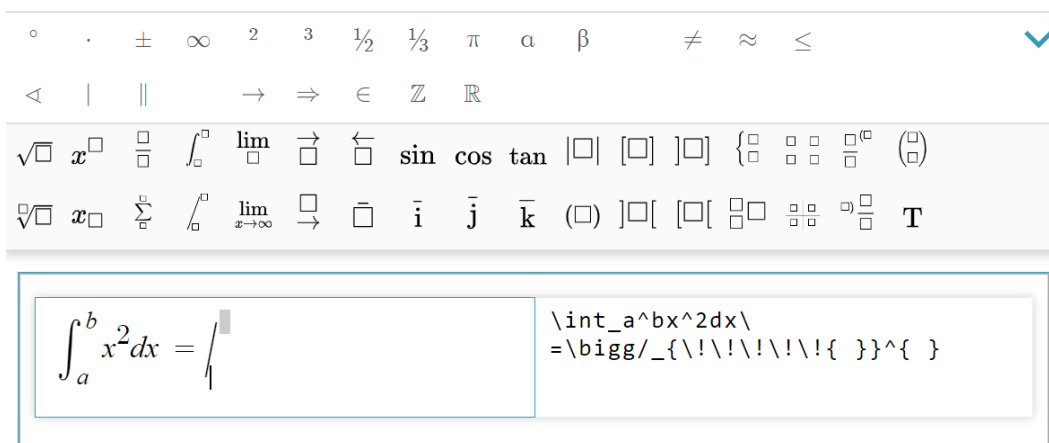
Matematiikka on kirjoitustavaltaan hyvin ainutlaatuinen: tavallisen kielen sijaan käytetään formaaleja symboleja, kuvioita ja rakenteita, joiden määritelmät ja notaatiot saattavat erota riippuen matematiikan osa-alueesta. Nykyään matematiikkaa kirjoitetaan edelleen pääosin kynällä ja paperilla. Tämä voidaan perustella sillä, että vaikka matematiikan tietokoneavusteiseen kirjoittamiseen on useita työkaluja, mikään niistä ei ole oppilaan kannalta erittäin helposti käytettävissä (Sallasmaa, Mannila ym. 2011). Toisaalta on mahdotonta siirtää matematiikan opetusta verkko-oppimisympäristöihin, mikäli kommunikaatioon ja matematiikan kielentämisen kannalta hyödyllisten tehtävien tekoon tarvittavat matematiikan kirjoittamistyökalut puuttuvat. Täten, mikäli verkko-oppimisympäristöä halutaan käyttää hyödyllisten tehtävien tekoon sekä kommunikointiin, on oltava jokin tapa kirjoittaa matematiikkaa tietokoneella.

Tässä luvussa tarkastellaan eri tapoja esittää matemaattista tekstiä verkko-oppimisympäristöissä. Pohjana käytetään tutkimuksia ja raportteja, jossa matematiikan opetuksessa on hyödynnetty verkko-oppimisympäristöjä. Avuksi käytetään edellisessä luvussa esiteltyt viitekehukset ja teoriat verkko-oppimisympäristöjen piirteistä sekä matematiikan didaktiikasta.

3.1 Matematiikan symbolinen esitys

Matematiikan esittäminen symbolisesti tarkoittaa symbolien latomiseen perustuvien työkalujen käyttöä. Tällöin matematiikkaa nähdään siis symbolien kokoelmana, eikä erikseen syvennyttä notaation järkevyyteen. Tämän ansiosta uusikin, täysin tuntematon notaatio voidaan aina esittää tietokoneella ongelmitta.

Katsastuksessaan Sallasmaa, Mannila ym. (2011) tarkastelevat matemaattisen tekstin lukemisen ja kirjoittamisen ongelmia matematiikan sähköistämisen kannalta. He tarkastelevat, kuinka symbolien latomiseen perustuva \LaTeX -ladontaohjelmaa voidaan soveltaa matematiikan opetuksessa. Katsastuksessaan he huomasivat, että \LaTeX ia voidaan käyttää matematiikan opetuksessa. He kuitenkin nostavat esille, että \LaTeX in sekä vastaavien ladontaohjelmien käyttö voi viedä oppijoilta keskittymisen itse ladontaan tehtävien ratkaisemisen sijaan. Siis-



Kuvio 1. Esimerkki Digiabi-projektin kaavaeditorista, jossa käytetään symbolista notaatiota. Vasemmalla on käyttäjän rakentama kaava ja oikealla editorin tuottama \LaTeX -koodi. (Digiabi 2018.)

pä matematiikan latominen voi pahimmillaan kasvattaa oppijan kognitiivista kuormitusta, kun tämä yrittää vastata tehtävänantoon. Kognitiivisen kuormituksen vähentämiseksi Sallasmaa, Mannila ym. (2011) ehdottavat käyttämään kaavaeditoreja, jossa käyttäjä rakentaa matemaattisen tekstin esitehdyistä elementeistä. Esimerkki tällaisesta editorista on kuviossa 1.

Jatkotutkimuksessa Sallasmaa, Liimatainen ym. (2011) suorittivat kokeilun, jossa 7. luokan oppilaiden matematiikan opintoja järjestettiin yhden kurssin ajan täysin Moodle-oppimisen hallintajärjestelmässä. Kokeiluun liittyivät avoimet ongelmaratkaisutehtävät, joita oppilaat latosivat \LaTeX illa käyttäen avuksi kaavaeditorilla varustettua LyX-editoria. Matemaattisia kaavoja ja lausekkeita kirjoitettiin siis symbolisesti käyttäen kaavaeditoria apuna.

Eräänä mielenkiintoisena tuloksena saatiin, että oppilaiden motivaatio matematiikan kirjoittamiseen tietokoneella laski. Lisäksi, automatisoidun tarkastusjärjestelmän puuteen takia opettaja joutui tarkistamaan kaikkien oppilaiden avoimet vastaukset käsin. Tutkimuksen tuloksista voidaankin päätellä, että symbolinen esitystapa vaikeuttaa tehtävien automaattista tarkastelua, jolloin verkko-oppimisympäristö ei voi tarjota välitöntä palautetta oppilaalle. Välittömän palautteen ja avun puute voikin siis olla yksi tekijä edellä mainittuun motivaation laskuun. Siispä symbolista menetelmää käytettäessä suurin haaste on välittömän palautteen tuottaminen. Joka tapauksessa symbolisen esitystavan käyttö opetuksessa on mahdollista,

(%i1)	$a + b / c + d;$
(%o1)	$d + \frac{b}{c} + a$
(%i2)	$(a + b) / (c + d);$
(%o2)	$\frac{b+a}{d+c}$
⌈ (%i3)	$\text{integrate}(x^2, x);$
⌊ (%o3)	$\frac{x^3}{3}$

Kuvio 2. Esimerkki lineaarisesta notaatiosta. Kuvassa Maxima-kieli ja vastaava symbolisen notaation tuloste.

kunhan apuna on visuaalinen kaavaeditori. Kaikista ongelmista huolimatta symbolista esitystapaa käytetäänkin laajasti Internetissä ja verkko-oppimisympäristöissä: esimerkiksi jopa YTL aikoo käyttää \LaTeX iin perustuvaa kaavaeditoria matematiikan sähköisissä ylioppilas-kirjoituksissa (Ylioppilastutkintolautakunta 2017, 5).

3.2 Matematiikan lineaarinen esitys

Matematiikan notaation linearisointi tarkoittaa matematiikan lausekkeiden esittämistä yhdellä rivillä (Tiitu 2017, 41). Tällöin esimerkiksi “päällekkäinen” murtolukulauseke $\frac{x}{y}$ esitetään yhdellä rivillä muodossa x/y . Siinä tapauksessa matematiikan kirjoittaminen muistuttaa vahvasti ohjelmointia – matematiikkaa nähdään siis syntaksina, jota tietokone voi lukea ja käsitellä. Tällöin matematiikan kirjoittaminen ei tapahdu latomalla symboleja tai käyttämällä kaavaeditoria vaan yhdistelemällä näppäimistöllä olevia symboleja peräkkäin. Esimerkki lineaarisesta notaatiosta ja vastaavasta symbolisesta tulosteesta on esitetty kuvassa 2.

Lineaarisen esitystavan selvät hyödyt symboliseen verrattuna ovat muun muassa erinomaiset mahdollisuudet vastauksien oikeellisuuden ja virheettömyyden tarkistukseen sekä mahdollisuudet muuntaa lineaarinen syöte symboliseen muotoon. Asiaa tarkastelee tarkemmin Tiitu (2017) diplomityössään. Työssä tarkastellaan oppilaiden tekemien virheiden analyysia sekä virheiden käyttöä opetuksen ohjauksessa. Vastauksien tarkastukseen käytettiin matematiikan lineaariseen esitystapaan perustuvaa STACK-vastausjärjestelmää (Tiitu 2017, 31, 43). Tut-

kielmassa käytettiin Aalto-yliopiston Matematiikan peruskurssin P2 STACK-järjestelmään tehtyjen viikkoharjoituksen ratkaisuja oppijoiden tekemien virheiden luokitukseen ja luokituksen käyttämiseen virheanalyysissä.

Tuloksena saatiin tietoa sekä virheanalyysin hyödyistä matematiikan opetuksessa että lineaarisen esitystavan hyödyistä ja haasteista. Esimerkiksi selvisi, että lineaarinen esitystapa voi aiheuttaa lisävirheitä, sillä matemaattinen notaatio on erilainen tavalliseen verrattuna (Tiitu 2017, 47). Lineaarinen notaatio on perinteistä tarkempi: esimerkiksi tietokone ymmärtää merkinnän $x + y/z + w$ muodossa $x + \frac{y}{z} + w$, sillä aikaa kun oppija saattaa haluta kirjoittaa $\frac{x+y}{z+w}$, jonka lineaarinen esitysmuoto on $(x + y)/(z + w)$. Tämä onkin yksi lineaarisen esitystavan hankaluuksista, jotka pahimmillaan voivat lisätä turhaa kognitiivista kuormaa vastatesaan kysymyksiin. Toisaalta, koska lineaarinen syntaksi on helppoa tarkastaa automaattisesti, oppijalla on aina mahdollisuus tarkistuttaa vastauksensa syntaktista oikeellisuutta ennen vastauksen lähetystä (Tiitu 2017, 47).

Työn tuloksien perusteella nähdään, että suurin hyöty virheanalyysistä on automaattisen tarkistuksen tuotteena syntynyt opiskelijan profiili. Tällaisen profiilin perusteella jokaisen oppilaan taitoja matematiikan eri osa-alueissa pystytään näkemään helpommin. Tällöin opetusta voidaan eriyttää tehokkaammin, ja oppijalle voidaan tarjota yksilöllisempää ohjausta (Tiitu 2017, 59). Vastauksien automaattinen tarkastaminen on selvästi myös hyödyllinen sähköisissä kokeissa, joissa automaattinen virheanalyysi tarjoaa mahdollisuudet helpottamaan opettajien työtä sekä vähentämään arvioinnin subjektiivisuutta. On kuitenkin otettava huomioon, että lineaarinen notaatio sopii parhaiten tehtäviin, jotka eivät vaadi monirivisen tekstin tuottamista.

3.3 Muut matematiikan esitystavat

Lopuksi, matematiikan esittämistä voidaan pyrkiä *kokonaan välttämään tietokoneella*. Sen sijaan, että matematiikkaa kirjoitetaan käyttäen jompaakumpaa edellisestä menetelmästä, pääpainona ovat joko vain loppuratkaisut tai perinteisen kirjoitustyylin digitalisointi. Siinä tapauksessa vältytään kokonaan oppijoiden totuttautumisesta yhä uusiin työkaluihin ja keskitytään itse opittavaan asiaan. Tällöin siis säästytään turhalta kognitiivisen kuormituksen

lisäämiseltä.

Tällaista menetelmää käyttää Nieminen (2008), joka tutkii väitöskirjassaan Ilmavoimien kadettien matematiikan perusopintojen sähköistämistä. Matematiikan sähköistäminen tapahtui vuosina 2003–2007, jolloin opetus siirrettiin täysin luentomaisesta tyylistä monimuotoiseen opetukseen. Siinä puolet opetuksesta tapahtui luennoilla ja puolet pienryhmissä hyödyntäen verkko-oppimisympäristössä olevia materiaaleja sekä tehtäviä (Nieminen 2008, 120). Nieminen käytti kyselyjä sekä tietoja oppimisen menestyksestä arvioidakseen matematiikan opetuksen sähköistämisen mahdollisuutta.

Nieminen ratkaisi matematiikan notaation sähköistämisiongelman vaatimalla vain loppuvastauksia (Nieminen 2008, 125). Nieminen perustelee tämän osiltaan kurssin käytännöllisyysvaatimuksen kannalta: Ilmavoimien kadettien matematiikkakurssien pääpaino on oppia ratkaisemaan oman osa-alueen ongelmat eikä parantaa oppijan tietotekniset taidot (Nieminen 2008, 122). Tämä on vahvasti erilainen lähestymistapa esimerkiksi Sallasmaan, Mannilan ym. (2011) ajatteluun, jonka mukaan matematiikan todellinen sähköistäminen edellyttää tapaa esittää matematiikkaa tietokoneella. Toisaalta on otettava huomioon eri lähestymistapojen erilaiset tarkoitukset: sillä aikaa kun Nieminen soveltaa verkko-oppimisympäristöä monimuoto-opetuksessa, Sallasmaa ym. hakevat ratkaisua laajempiin, täysin verkossa suoritettaviin kursseihin. Siispä Niemisen lähestymistapa on perusteltu, sillä verkko-oppimisympäristön merkitys Ilmavoimien kadettien matematiikkakurssilla ei ole suuri, jolloin ylimääräisen kognitiivisen kuorman lisääminen on turhaa. Toisaalta silloinhan tietokoneen käyttö ei tuo mitään lisäarvoa opetukseen, jolloin verkko-oppimisympäristöä ei välttämättä nähdä yhtä hyödyllisenä.

Matematiikkaan esittämiseen tietokoneella voidaan siis lähestyä useasta näkökulmasta, ja jokaisella tavalla on useita hyötyjä ja haittoja. Vaikka Nieminen (2008) näkee, että helpoin tapa on pitää kognitiivista kuormitusta minimissä ja keskittyä vain loppuvastauksien tarkastukseen, Sallasmaa, Liimatainen ym. (2011) esittävät, että symboleihin perustuva kirjoitus-tyyli mahdollistaa monipuolisempien sekä realistisempien matematiikan tehtävien suunnittelun. Toisaalta symbolinen esitystapakaan ei ole aina suotavin, sillä se edellyttää erillistä kaa-vaeditoria tai ladontaohjelmistoa, ja sitä on vaikeampi tarkistaa automaattisesti. Siispä hyvän verkko-oppimisympäristön on toteutettava oppilaiden tarpeiden ja opetustavoitteiden mukai-

sesti. Sillä aikaa kun matematiikan laskennalliset osa-alueet voidaan sähköistää ilman tarvetta matemaattiselle esittämiselle, syvät ja abstraktit aiheet voivat vaatia symbolisen esitystavan, joka ei rajoita notaatiota millään tavalla. Lisäksi on otettava huomioon myös verkkooppimisympäristön osallisuus oppilaiden kommunikointiin: mikäli tavoitteena on järjestää keskustelufoorumeja verkossa, oppilaille on tarjottava laajat mahdollisuudet esittää ajatuksiaan mahdollisin pienin haastein – silloin kaikkien tapojen toteuttaminen saattaa olla jopa suotavaa.

3.4 Matemaattisen argumentoinnin esittäminen

Matematiikan onnistunut sähköistäminen edellyttää tapoja kirjoittaa matematiikkaa luonnollisesti (Sallasmaa, Mannila ym. 2011), mutta matematiikan kirjoittaminen on muutakin kuin kaavojen kirjoittamista. Sen sijaan matematiikka rakentuu paljolti sekä argumentaation että matemaattisen notaation sekoitukseen. Lisäksi opetuksessa matemaattisen ajattelun kielen-tämisellä on suuri rooli oppijan ajattelun arvioinnissa. Siispä pelkästään matematiikan esit-tämisvälineet eivät riitä, vaan on oltava välineet myös avoimen argumentoinnin esittämiseen tietokoneella.

Matematiikan argumentoinnin sähköistäminen ei kuitenkaan ole yksikäsitteistä. Matematiikan argumentointi perustuu vahvasti proosamaiseen kirjoittamiseen: kaikki nykyaikaiset tunnetuimmat matematiikan oppikirjat, väitöskirjat ja todistukset kirjoitetaan esseemäisesti, sekoittamalla tekstiä matemaattiseen notaatioon. Tämä on toimiva tapa tieteellisissä piireissä, sillä yhtä tekstiä saattaa vertaisarvioida useita – ellei satoja – ihmisiä. Samanlaista käytäntöä on sen sijaan mahdotonta toteuttaa koulun mittakaavalla, sillä ainoa oikeellisuuden tarkastaja on opettaja, jota kohti saattaa olla samanaikaisesti kymmeniä oppilaita, joiden argumentointitaitoja tulisi arvioida. Tämän lisäksi proosamainen argumentointi on mahdotonta tarkastaa tietokoneella, sillä ei ole olemassa yhtä tapaa kirjoittaa sama todistus tai ratkaista sama yhtälö. Siispä samaan aikaan kun monia tehtävätyyppejä voidaan sähköistää ja tarkistaa automaattisesti, avoimet päättely- ja argumentointitehtävät joutuu tarkistamaan itse opettaja.

Matematiikan argumentoinnin esittämistä on ajan saatossa pyritty formalisoimaan. Voisi sanoa, että pyrkimys juontaa juurensa Whiteheadin ja Russellin *Principia Mathematica* -

kirjoista, joissa algebran perusteet johdettiin ja todistettiin käyttäen hyvin formaalia argumentoinnin esitystapaa. Myöhemmin formaaleja argumentointikieliä alettiin kehittää muun muassa tietotekniikassa, jossa tarvittiin menetelmiä osoittaakseen monimutkaisien algoritmien oikeellisuutta matemaattisesti. Näillä menetelmillä on potentiaalinen hyöty matematiikan opetuksessa, sillä formaalit menetelmät pakottavat kirjottajaa kielentämään ajatteluaan.

Kuten edellä mainittiin, matematiikan notaation eräs ongelma on sen proosamaisuus. Esimerkiksi Lamport (2012) nostaa esille, että tällainen esitystapa on ollut käytössä jo 1600-luvusta alkaen. Hän ehdottaakin tilalle argumentoinnin hierarkkista rakennetta: jokainen argumentoinnin välivaihe esitetään ja perustellaan erikseen välivaiheittain edeten näin haluttuun lopputulokseen. Vapaan kielenkäytön sijaan käytetään vain tiettyä, tarkkaa kieltä, kuten “valitaan”, “oletetaan” ja “jos”. Lamport nostaa esille TLA⁺-kielen, jota tietotekniikassa käytetään muun muassa algoritmien todistukseen.

Hierarkkinen kirjoitustapa tarjoaa useita hyötyjä. Lamport korostaa, että hierarkkisen notaation tarkoitus on avustaa kirjoittajaa pakottamalla tätä miettimään, miksi argumentoinnin jokainen väite pitää paikkaansa. Tämän lisäksi hierarkkinen esitystapa avustaa muita lukijoita tarjoamalla tarkan perustelun jokaiselle väitteelle (Lamport 2012). Siispä hierarkkisen ja formaalin tavan olennaisin hyöty on ajattelun pakotettu kielentäminen. Lopuksi hierarkkiset todistukset voidaan usein tarkastaa tietokoneella, ja on olemassa valtavasti kieliä ja todistustyökaluja – kuten Coq ja TLA⁺ – joilla tämä onnistuu. Nämä työkalut ovat kuitenkin liian monimutkaiset opetuskäyttöön. Sen sijaan opetukseen on kehitetty omia hierarkkisia esitystapoja, joista eräs on “rakenteiset päättelyketjut” -menetelmä.

3.5 Rakenteiset päättelyketjut

Rakenteiset päättelyketjut (*computational proofs*) on menetelmä, jolla kirjoitetaan matemaattiset todistukset ja argumentoinnit käyttäen tarkkaa notaatiota sekä hierarkkista rakennetta (Back 2008, 7, 41). Menetelmä perustuu Dijkstran ja Scholtenin (1990) ajatukseen, että matemaattinen todistus rakentuu “väiteketjuista”, jossa jokainen väite on kiinni toisensa jonkun perustelun avulla. Menetelmän tavoite on perustaa todistukset logiikan sääntöihin ja opiskelun aikana esitettyihin tuloksiin, jolloin opiskelijoiden vastauksista tulee tarkem-

- Ratkaise $7x^2 - 6x = 0$
- \Vdash { ekvivalenssi on transitiivinen }
- $7x^2 - 6x = 0$
- \equiv { osittelulaki: $a(b + c) = ab + ac$ }
- $x(7x - 6) = 0$
- \equiv { tulon nollasääntö: $ab = 0 \equiv (a = 0 \vee b = 0)$ }
- $x = 0 \vee 7x - 6 = 0$
- \equiv { ratkaistaan oikeanpuoleinen yhtälö }
- $x = 0 \vee x = \frac{6}{7}$

□

Kuvio 3. Esimerkki yhtälön $7x^2 - 6x = 0$ ratkaisemisesta käyttäen rakenteisia päättelyketjuja. (Back 2008, 20.)

pia, oppijat tekevät vähemmän virheitä ja vastauksia on helpompaa tarkistaa. Eräs toinen tavoite on yhdenmukaistaa merkintää: rakenteisilla päättelyketjuilla on tarkka formaali merkintätapa, mikä mahdollistaa oikeellisuuden tarkastamista tietokoneella sekä ajatusvirheiden vähentämistä. Eräs esimerkki rakenteisten päättelyketjujen notaatiosta on kuviossa 3.

Back (2008) nostaa esille, että menetelmää on kokeiltu onnistuneesti lukioissa ja että rakenteisia päättelyketjuja voidaan soveltaa useassa matematiikan osa-alueessa, kuten logiikassa, algebrassa, analyysissä sekä geometriassa. Matematiikan opetuksen sähköistämiskokeilussa Sallasmaa, Liimatainen ym. (2011) käyttivät rakenteisia päättelyketjuja yhtenä tapana vastata tehtäviin. Kokeilussa rakenteisia päättelyketjutehtäviä sai kirjoittaa sekä suoraan verkkooppimisympäristössä että LyX-tekstieditorilla. Vaikka kokeilussa ei ollut käytössä automaattista vastauksien tarkastusta, opettajan haastattelun perusteella selvisi, että rakenteiset päättelyketjut toimivat hyvin myös yläasteen matematiikan opetuksessa.

Kaiken kaikkiaan, myös matematiikan avoimempien tehtävien vieminen verkkoon on mahdollista muuttamalla merkintätapa yhä formaalisemmaksi. Mainittakoon, että ei ole olemassa yksikäsitteistä tapaa siirtää tehtävät verkkoon: esimerkiksi Ruokokoski (2009) esittää tavan, jolla avoimet ongelmanratkaisutehtävät voidaan toteuttaa verkossa monivalintakysymyksillä sekä matematiikan lineaarisella notaatiolla rakenteisten päättelyketjujen sijaan.

Vaikka hierarkkiset esitystavat eivät ole ainoa tapa sähköistää matematiikan avoimia tehtäviä, voidaan tätä menetelmää luokitella paremmaksi perinteisiin monivalinta- ja aukontäyttötehtäviin verrattuna. Vaikka monivalintatehtävät voisivatkin opettaa tarvittavat taidot tietyn ongelman ratkaisemiseksi, avoimien argumentaatiotaitojen merkitys matematiikassa on suuri: oikean maailman ongelmat edellyttävät usein ihmiseltä laskutaitojen lisäksi taitoja perustella valintojaan. Tämän lisäksi ihmisellä on usein tietokone apuna ongelmien ratkaisemiseksi – sekä myös perustelujen oikeellisuuden todentamiseksi.

4 Yhteenveto

Verkko-oppimisympäristö on järjestelmä, joka tuo yhteen mitä erilaisimpia opetuksen elementtejä kuten opetusmateriaaleja, tehtäviä sekä arviointityökaluja. Kuitenkin verkko-oppimisympäristön käytöstä ei itsessään ole mitään hyötyä, mikäli itse opetusta ei suunnitella verkko-oppimisen periaatteiden mukaisesti. Tämän lisäksi järkevä verkko-oppimisympäristön integrointi ja oppiaineen sähköistäminen vaativat kyseisen aineen didaktiikan tuntemista. Tässä tutkielmassa tarkasteltiin matematiikan kannalta yhtä tärkeintä integrointiin liittyvää ongelmaa: matemaattisen notaation sähköistäminen.

Tutkielmassa huomattiin, että matematiikan kirjoittaminen voidaan ottaa huomioon verkko-oppimisympäristöissä ainakin kolmella eri tavalla. Matematiikkaa voidaan latoa symbolisesti käyttäen \LaTeX in tapaisia ladontakieliä tai kaavaeditoreja. Toisaalta matematiikkaa voidaan kirjoittaa täysin näppäimistöllä käyttäen ohjelmointityylistä lineaarista notaatiota. Lopuksi, matematiikan esittämistä verkko-oppimisympäristöissä voidaan jättää pois tai korvata vain vastauksia vaativilla tehtävillä.

Jokaisella esitystavalla on puolensa. Sillä aikaa kun symbolinen notaatio on kaikille tutumpaa, lineaarista notaatiota on paljon nopeampi kirjoittaa. Lisäksi lineaarinen notaatio käy hyvin yhteen rakenteisten päättelyketjujen kanssa, ja sitä on erittäin helppoa tarkistaa automaattisesti. Myös muilla menetelmillä on hyötynsä, sillä symbolinen ja lineaarinen notaatio kummatkin edellyttävät uusien kirjoitustyökalujen oppimista, jolloin vastauksien kirjoittaminen tietokoneella aiheuttaa ylimääräistä kognitiivista kuormitusta. Koska jokaisella menetelmällä on eri hyödyt ja haitat, ideaalisesti verkko-oppimisympäristön on tarjottava kaikki nämä notaatiovaihtoehdot.

Mainittakoon, että verkko-oppimisympäristöt eivät ole ainoa tapa sähköistää matematiikkaa ja sen notaatiota. Itse asiassa tällä hetkellä vastavalmistuneet matematiikan opettajat ovat erittäin aktiiviset soveltaa teknologiaa opetuksessa, mutta se on paljon monipuolisempaa kuin yhden järjestelmän käyttäminen (esim. McCulloch ym. 2018). Tehtäviä saatetaan tehdä Kahoot-pelillä, matematiikkaa kirjoitetaan tekstinkäsittelyohjelmalla ja grafiikkaa GeoGebra-sovelluksella. Siispä on pidettävä mielessä, että verkko-oppimisympäristöt eivät yk-

sinomaan ole ehto matematiikan opetuksen onnistuneeseen sähköistämiseen. Mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe olisi siis selvittää, onko verkko-oppimisympäristöjen integroinnilla matematiikkaan ylipäätään mitään hyötyä.

Tässä tutkielmassa verkko-oppimisympäristöjen tarkempi tarkastelu on jäänyt vähiin. On selvää, ettei matematiikan notaation sähköistäminen ole ainoa syy viedä opetusta verkkoon: kuten luvussa 2 mainittiin, verkko-oppimisympäristöt ovat paljon muutakin kuin vain tehtävien tekoon tarkoitettu alusta. Verkko-oppiminen ja matematiikan didaktiikka ovat aihealueet, joiden tarkempi tarkastelu voi tuottaa erittäin monipuolista tietoa verkko-oppimisympäristöjen hyödystä ja haitoista matematiikan opetuksessa. Jatkotutkimuksessa voitaisiinkin keskittyä tarkemmin siihen, miten verkko-oppimisympäristöjen eri ominaisuudet voidaan soveltaa järkevästi matematiikan opetuksessa.

Lopuksi on tärkeää huomata, että aineisto on valittu varsin monipuoliseksi. Matematiikkaa ei kuitenkaan opeteta samalla tavalla kaikilla ikäasteilla, jolloin on erittäin vaikeaa arvioida kaikkien tutkielmassa esiteltyjen menetelmien yleistä sopivuutta. Tulevaisuudessa olisi siis mielenkiintoista rajata tutkimusta vain tietylle ikäasteelle. Tällä hetkellä tilanne näyttää siltä, että Suomessa asiaa on vähiten tutkittu yläaste- ja lukioikäisillä oppijoilla. Erityisesti jatkotutkimuksena voisi siis selvittää verkko-oppimisympäristöjen integrointia lukion matematiikan opetukseen, sillä lukiossa matematiikan sähköistäminen on ajankohtaisinta sähköistyneiden ylioppilaskirjoitusten vuoksi.

Lähteet

Aleven, Vincent, Elmar Stahl, Silke Schworm, Frank Fischer ja Raven Wallace. 2003. "Help seeking and help design in interactive learning environments". *Review of educational research* 73 (3): 277–320.

Antikainen, Ari. 2013. *Kasvatussosiologia*. 5. uud. p. Jyväskylä: PS-kustannus. <http://library.ellibs.com/login/?library=10078&book=978-952-451-652-5>.

Back, Ralph-Johan. 2008. "Matematiikkaa logiikan avulla: Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin". *TUCS Lecture Notes* 10 (elokuu).

Blåfield, Linda. 2009. "Matematiikan verkko-opetus osana perusopetuksen kehittämistä Teknillisessä korkeakoulussa". *Pro gradu-tutkielma*. Helsingin yliopisto.

Digiabi. 2018. *Example of rich text editor*. Viitattu 22. marraskuuta. <http://digabi.github.io/rich-text-editor/>.

Dijkstra, Edsger W., ja Carel S. Scholten. 1990. *Predicate Calculus and Program Semantics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 0-387-96957-8.

Lamport, Leslie. 2012. "How to write a 21 st century proof". *Journal of fixed point theory and applications* 11 (1): 43–63.

McCulloch, Allison W., Karen Hollebrands, Hollylynn Lee, Taylor Harrison ja Asli Mutlu. 2018. "Factors that influence secondary mathematics teachers' integration of technology in mathematics lessons". *Computers & Education* 123:26–40. ISSN: 0360-1315. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.04.008>. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131518300885>.

Nevgi, Anne, ja Kirsi Tirri. 2003. *Hyvää verkko-opetusta etsimässä : oppimista edistävät ja estävät tekijät verkko-oppimisympäristöissä : opiskelijoiden kokemukset ja opettajien arviot*. Kasvatusalan tutkimuksia. VEDET-projekti. Turku: Suomen kasvatustieteellinen seura.

Nieminen, Mika. 2008. "Ilmavoimien kadetit verkossa : kokemuksia verkkopohjaisen oppimisympäristön käytöstä matematiikan perusopetuksessa". Tohtorinväitöskirja. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-3117-9>.

OKM. 2016. "Valmiina valintoihin: Ylioppilastutkinnon parempi hyödyntäminen korkeakoulujen opiskelijavalinnoissa". *Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja* 2016:36. <http://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/79291/okm37.pdf>.

Opetushallitus. 2014. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf.

———. 2015. *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf.

Patrikainen, Sanna. 2012. "Luokanopettajan pedagoginen ajattelu ja toiminta matematiikan opetuksessa". Tohtorinväitöskirja. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-10-7868-2>.

Pehkonen, Erkki, ja Maarit Rossi. 2018. *Hyvää matematiikan opetusta etsimässä*. Helsinki: MFKA-Kustannus Oy.

Rauste-von Wright, Maijaliisa, Johan von Wright ja Tiina Soini. 2003. *Oppiminen ja koulu*. Wsoy.

Ruokokoski, Jarno. 2009. "Automatic Assessment in University-level Mathematics; Automaattinen tarkastaminen yliopistotasoisessa matematiikassa" [kielellä en]. G2 Pro gradu, diplomityö. <http://urn.fi/URN:NBN:fi:aalto-201311247863>.

Sallasmaa, Petri, Tero Liimatainen, Linda Mannila, Mia Peltomäki, Tapio Salakoski, Petri Salmela ja Ralph-Johan Back. 2011. "Interaktiivinen oppimisympäristö matematiikan opetukseen – kokemuksia ja tulevaisuuden haasteita". Teoksessa *Opetusteknologia koulun arjessa. II*, toimittanut Arto Ahonen, 101–120. Kannessa myös: Tekes, Cicero Learning, AGORA Human Technology Center. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Sallasmaa, Petri, Linda Mannila, Mia Peltomäki, Tapio Salakoski, Petri Salmela ja Ralph-Johan Back. 2011. “Haasteet ja mahdollisuudet tietokonetuetussa matematiikan opetuksessa”. Teoksessa *Opetusteknologia koulun arjessa*, toimittanut Antti Vehkaperä, 125–140. Opetusteknologia koulun arjessa (OPTEK) -tutkimushanke. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Tanhua-Piironen, Erika, Jarmo Viteli, Antti Syvänen, Jaakko Vuorio, Kari A Hintikka ja Heikki Sairanen. 2016. “Perusopetuksen oppimisympäristöjen digitalisaation nykytilanne ja opettajien valmiudet hyödyntää digitaalisia oppimisympäristöjä”.

Tiitu, Hannu. 2017. “Oikeisiin virheisiin! Virheelliset vastaukset ja niiden tulkinta automaattisesti tarkastetuissa matematiikan harjoitustehtävissä; Towards proper errors! The errors and their interpretation in automatically assessed exercises in mathematics” [kielellä fi]. G2 Pro gradu, diplomityö. <http://urn.fi/URN:NBN:fi:aalto-201712188201>.

Tikkanen, Anne. 2016. “Suomalaisten yliopistojen käyttämät digitaaliset oppimisympäristöt”. *Informaatioteknologian tiedekunnan julkaisuja/Jyväskylän yliopisto*, not. 2016, 24.

Watson, William, ja Sunnie Lee Watson. 2007. “An Argument for Clarity: What are Learning Management Systems, What are They Not, and What Should They Become.”

Weller, Martin. 2007. *Virtual learning environments: Using, choosing and developing your VLE*. Routledge.

Ylioppilastutkintolautakunta. 2017. “Vastauksia digitaalisia MAFYKE-kokeita koskevaan kyselyyn” (maaliskuu). Viitattu 22. lokakuuta 2018. https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ajankohtaista/mafyke-ytl-fi.pdf.