Weierstrassin lause ja muita approksimaatiotuloksia

Hilla Kullaa

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2018

Tiivistelmä: Hilla Kullaa, *Weierstrassin lause ja muita approksimaatiotuloksia* (engl. *Weierstrass theorem and other approximation theorems*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 29 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2018.

Tässä työssä tutustutaan kahteen Weierstrassin tulokseen. Karl Wilhelm Theodor Weierstrass oli saksalainen matemaatikko (1815–1897). Monelle Weierstrassin nimi on tuttu Bolzano-Weierstrassin lauseesta tai Weierstrassin M-testistä. Hän myös muotoili (ε, δ) määritelmän jatkuvuudelle. Tässä tutkielmassa keskitytään kuitenkin kahteen approksimaatioteorian tulokseen. Näiden kahden Weierstrassin tuloksen voidaan ajatella olevan approksimaatioteorian klassisia perustuloksia.

Ensimmäinen tulos on vuodelta 1872. Se on Weierstrassin esimerkki jatkuvasta ei missään pisteessä derivoituvasta funktiosta. Käyttämällä funktiosarjoja Weierstrass konstruoi funktion, joka on jatkuva, mutta ei missään pisteessä derivoituva. Tätä kutsutaan Weierstrassin funktioksi. Jatkuvien, ei missään pisteessä derivoituvien funktioiden löytyminen mahdollisti monen sovelluksen syntymisen kuten Brownin liike, fraktaalit ja kaaosteoria.

Toinen tulos on vuodelta 1885. Kyseessä on Weierstrassin approksimaatiolause. Lauseen mukaan jokaista jatkuvaa funktiota reaalilukujen joukossa voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti sup-normissa polynomeja käyttäen.

Tutkielmassa lähdetään liikkeelle määrittelemällä aputuloksia ja käymällä läpi työssä käytettäviä merkintöjä. Työ etenee funktiosarjojen ja potenssisarjojen käsittelyllä. Tällöin esitellään ja todistetaan myös Raaben testi, joka on sarjan suppenemistesti. Sen avulla pystytään tutkimaan suppeneeko potenssisarja suppenemisvälinsä päätepisteissä. Raaben testiä tarvitaan Weiertrassin approksimaatiolauseen todistamisessa. Työssä todistus tehdään kahdella eri tavalla. Ensimmäinen todistus tehdään Lebesguen tavalla ja toinen niin sanotun konvoluutioapproksimaation avulla.

Avainsanat: approksimaatiolause, ei missään derivoituva funktio, Raaben testi, Weierstrass.

Sisältö

Johdanto

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on todistaa kahdella tavalla Weierstrassin tulos jatkuvien funktioiden approksimoimisesta polynomeilla. Weierstrassin approksimaatiolauseen nojalla jokainen jatkuva, suljetulla välillä määritelty funktio voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti sup-normissa käyttäen polynomeja. Tämä tulos on vuodelta 1885.

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass oli saksalainen matemaatiikko (1815–1897). Hänen isänsä lähetti hänet lukemaan lakia, mutta se ei kiinnostanut Weierstrassia ja hänestä tulikin opettaja. Hän toimi 13 vuotta opettajana. Weierstrassin matematiikan professori C. Gudermann sai myös Weierstrassin kiinnostumaan matematiikasta. Vuonna 1854 hän julkaisi artikkelin, joka arvioitiin mestariteokseksi. Weierstrassin ura jatkui matematiikan professorina. Useimmille Weierstrassin nimi on tuttu Bolzano-Weierstrassin lauseesta tai Weierstrassin M-testistä. Yhtä yleisesti ei ole tiedossa, että Weierstrass muotoili (ε, δ) määritelmän jatkuvuudelle pisteessä. Lisätietoja Weierstrassiin liittyen löytyy Allan Pinkusin artikkelista [**8**].

Lukijalta odotetaan analyysin perustulosten hallintaa. Ensimmäisessä luvussa käydään läpi merkintöjä ja aputuloksia, joita työssä tarvitaan. Toisessa luvussa käsitellään funktiosarjoja ja potenssisarjoja. Näiden lukujen asioiden pitäisi olla lukijalle tuttuja, mutta ne on esitelty helpottamaan lukemista. Poikkeuksena toisessa luvussa esitelty ja todistettu Raaben testi, joka ei ole varsin tunnettu tulos. Sitä ei tyypillisesti käsitellä esimerkiksi analyysin peruskursseilla. Tästä syystä kyseisen testin todistus esitetään.

Kolmannessa luvussa tutustutaan toiseen Weierstrassin tulokseen, eli niin sanottuun Weierstrassin funktioon. Tarkoituksena on näyttää, että on olemassa jatkuva, ei missään pisteessä derivoituva funktio. Weierstrass julkaisi esimerkin tällaisesta funktiosta vuonna 1872, mutta yleisesti uskotaan, että hän esitti sen oppitunnilla jo vuonna 1861 [**8**]. Jatkuvat, ei missään pisteessä derivoituvat funktiot ovat perusta monelle sovellukselle kuten esimerkiksi Brownin liike, fraktaalit ja kaaosteoria. Soveltamalla Weierstrassin approksimaatiolausetta Weierstrassin funktioon havaitaan, että derivoituvuus ei säily rajalle funktiosarjojen tasaisessa suppenemisessa.

Luvuissa neljä ja viisi todistetaan Weierstrassin approksimaatiolause vaihtoehtoisin menetelmin. Luvun neljä todistus tapahtuu Lebesguen todistuksen mukaisesti. Todistuksessa käytetään apuna luvussa kaksi esiteltyä Raaben testiä. Viidennessä luvussa annetaan vaihtoehtoinen todistus Weierstrassin approksimaatiolauseelle niin sanotun konvoluutioapproksimaation avulla.

LUKU 1

Merkintöjä ja aputuloksia

Tässä luvussa esitellään työssä käytettäviä merkintöjä ja aputuloksia. Luvussa käytetyt lähteet ovat Mikko Saarimäen luentomoniste [**9**], Markus Haasen kirja [**3**], Thomsonin, Brucknerin ja Brucknerin kirja [**11**] sekä Tero Kilpeläisen luentomoniste [**5**].

MÄÄRITELMÄ 1.1. [**9**] Epätyhjää joukkoa V, jossa on määritelty sen alkioiden summat ja reaalikerrat niin, että seuraavat kohdat toteutuvat, sanotaan *vektoriavaruudeksi.* Olkoot x, y ja z joukon V alkioita sekä λ ja μ reaalilukuja.

(1) $x + y = y + x \in V$.
(2) $x + (y + z) = (x + y) + z \in V$.
(3) On olemassa $\bar{0} \in V$ siten, että $x + \bar{0} = x$.
(4) $x + (-x) = \bar{0} \in V$.
(5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \in V$.
(6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \in V$.
(7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \in V$.
(8) $1x = x$.

Vektoriavaruuden alkioita kutsutaan *vektoreiksi.* Sanotaan, että vektorit

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$$

virittävät vektoriavaruuden V, jos jokainen $x \in V$ voidaan ilmaista jonakin näiden *lineaarikombinaationa* eli muodossa

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad \text{joillakin } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}.$$

Joukko $S \subset V$ virittää vektoriavaruuden V, jos jokainen $x \in V$ voidaan lausua lineaarikombinaationa joukon S vektoreista.

MÄÄRITELMÄ 1.2. [**9**] Vektoriavaruuden V epätyhjä osajoukko U on V:n *aliavaruus*, jos seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat.

(1) Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $u \in U$, niin $\lambda u \in U$.
(2) Jos $u \in U$ ja $v \in U$, niin $u + v \in U$.

MÄÄRITELMÄ 1.3. [**3**] Olkoon V vektoriavaruus. Kuvausta $||\cdot|| : V \times V \to [0, \infty)$ sanotaan *normiksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot aina, kun $x, y \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $||x|| = 0,$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$.
(2) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$.
(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Normiavaruudeksi kutsutaan paria $(V, ||\cdot||)$.

MÄÄRITELMÄ 1.4. [**11**] Olkoon $(V, ||\cdot||)$ normiavaruus. Sanotaan, että joukko $A \subset V$ on *tiheä* normin $||\cdot||$ suhteen, jos kaikilla $x \in V$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $y \in A$ siten että $||x - y|| < \varepsilon$.

Esimerkki 1.5. [**9**] Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, kun se varustetaan standardilaskutoimituksin. Pari $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ on normiavaruus, kun vektorin

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

pituus eli normi määritellään positiivisena lukuna

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Joukko $\mathbb{Q}^n$ on tiheä normiavaruudessa $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$. Katso esimerkiksi [**11**, Thm. 1.15].

Määritelmä 1.6. [**3**] Olkoon $[a, b]$ suljettu väli reaaliakselilla. Suljetulla välillä jatkuvat reaaliarvoiset funktiot muodostavat vektoriavaruuden, kun joukko varustetaan seuraavin laskutoimituksin.

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
(2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Tässä f ja g ovat reaaliarvoisia jatkuvia funktioita välillä $[a, b]$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ sekä $x \in [a, b]$. Näin muodostuvaa vektoriavaruutta

$$C[a, b] := \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ jatkuva}\}$$

sanotaan *jatkuvien funktioiden avaruudeksi* välillä $[a, b]$. Sen *nollavektori* on

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in [a, b].$$

Määritelmä 1.7. [**3**] Olkoon $[a, b]$ suljettu väli reaaliakselilla ja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Määritellään *tasaisen suppenemisen normi* eli *sup-normi* seuraavasti

$$||f||_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Lemma 1.8. *Sup-normi on normi vektoriavaruudessa $C[a, b]$.*

Todistus. Olkoon $f, g \in C[a, b]$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Koska $f \in C[a, b]$ on suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva, niin se on rajoitettu, katso esimerkiksi [**5**]. Siten $0 \le ||f||_\infty < \infty$. Näytetään vielä, että Määritelmän 1.3 kohdat (1)–(3) toteutuvat.

(1) Jos $||f||_\infty = 0$, niin $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$. Tällöin $|f(x)| = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$, mistä seuraa, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Eli f on vektoriavaruuden $C[a, b]$ nollavektori. Kääntäen, jos $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin myös $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$. Siten $||f||_\infty = 0$.
(2) Reaalilukujen itseisarvon ominaisuuksien perusteella
$$||\lambda f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = |\lambda|\, ||f||_\infty.$$
(3) Kaikilla $x \in [a, b]$ pätee
$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le ||f||_\infty + ||g||_\infty$$
Otetaan supremum vasemmalta puolelta yli joukon $[a, b]$. Tällöin saadaan
$$||f + g||_\infty \le ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

□

Määritelmä 1.9. [**5**] Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *tasaisesti jatkuva joukossa A*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in A$, joille $|x - y| < \delta$, pätee

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

LAUSE 1.10. [**11**] *Jos* $f \in C[a,b]$, *niin funktio* f *on tasaisesti jatkuva välillä* $[a,b]$.

TODISTUS. Katso esimerkiksi [**11**, Thm. 5.48]. □

MÄÄRITELMÄ 1.11. [**5**] Olkoon $[a,b]$ suljettu väli reaaliakselilla. Funktio $p \in C[a,b]$ on *polynomi*, jos on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ siten, että

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Tässä tulkitsemme tarvittaessa, että $0^0 = 1$. Joukkoa

$$P[a,b] := \{p \,|\, p \in C[a,b] \text{ on polynomi}\}$$

kutsutaan *polynomiavaruudeksi*.

Polynomiavaruus $P[a,b]$ on jatkuvien funktioiden vektoriavaruuden $C[a,b]$ aliavaruus. Nimittäin kahden polynomin summa on polynomi ja polynomin kertominen reaaliluvulla tuottaa myös polynomin. Lisäksi polynomiavaruus on epätyhjä, koska ainakin nollafunktio sisältyy siihen.

MÄÄRITELMÄ 1.12. [**5**] Sanotaan, että $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ on *lineaarinen polynomi*, jos on olemassa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ siten, että $p(x) = \alpha x + \beta$ kaikilla $x \in [a,b]$.

MÄÄRITELMÄ 1.13. [**3**] Funktio $g \in C[a,b]$ on *murtoviivafunktio*, jos on olemassa jako

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

siten, että $g|_{[t_{j-1},t_j]}$ on lineaarinen polynomi osavälillä $[t_{j-1}, t_j]$, aina kun $j = 1, \ldots, n$. Toisin sanoen on olemassa $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = \alpha_j x + \beta_j$ aina, kun $x \in [t_{j-1}, t_j]$.

Merkitään murtoviivafunktioiden joukkoa symbolilla $PL[a,b]$. Murtoviivafunktiot muodostavat jatkuvien funktioiden vektoriavaruuden $C[a,b]$ aliavaruuden.

Aputuloksena käydään vielä läpi kahden pisteen kautta kulkevan murtoviivafunktion rakentuminen.

LEMMA 1.14. *Olkoot* (x_1, y_1) *ja* (x_2, y_2) *tason pisteitä siten, että* $x_1 < x_2$. *Tällöin on olemassa lineaarinen polynomi* $p : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ *siten, että* $p(x_1) = y_1$ *ja* $p(x_2) = y_2$. *Sille pätee*

$$p(x) = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \textit{kun } x \in [x_1, x_2].$$

TODISTUS. Selvästi $p(x_1) = y_1$ ja $p(x_2) = y_2$. Riittää osoittaa, että p on lineaarinen polynomi eli muotoa $\alpha x + \beta$, missä

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ja} \quad \beta = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1.$$

Sijoittamalla α ja β lineaarisen polynomin yhtälöön ja sieventämällä saadaan p esitettyä halutussa muodossa

$$p(x) = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \alpha x + \beta, \qquad \text{kun } x \in [x_1, x_2].$$

Siten p on lineaarinen polynomi. □

LUKU 2

Funktiosarjat, potenssisarjat ja Raaben testi

Funktiosarjat

Tässä luvussa määritellään funktiosarjat ja käsitellään funktiosarjojen suppenemista. Funktiosarjojen teorian pohjana toimii Heli Tuomisen luentomuistiinpanot syksyn 2012 Analyysi 3 -kurssilta [**12**, luvut 3 ja 5].

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon $(f_j)_{j=0}^{\infty}$ funktiojono, $f_j : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$. Summaa

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j$$

sanotaan *funktiosarjaksi*. Funktiosarja suppenee

(1) *pisteittäin* joukossa A, jos lukusarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ suppenee jokaisella $x \in A$; toisin sanoen, jos on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(x)$ kaikilla $x \in A$;
(2) *itseisesti* joukossa A, jos funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|$ suppenee pisteittäin; toisin sanoen, jos on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} |f_j(x)|$ jokaisella $x \in A$;
(3) *tasaisesti* joukossa A, jos osasummien

$$S_n : A \to \mathbb{R}, \qquad S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x), \qquad x \in A$$

muodostama funktiojono suppenee tasaisesti joukossa A; toisin sanoen, jos on olemassa funktio $f : A \to \mathbb{R}$, jolle kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{kaikilla } n \geq N, \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

Seuraava lause antaa niin sanotun tasaisen suppenemisen Cauchyn ehdon sarjoille.

LAUSE 2.2. *Olkoon $(f_j)_{j=0}^{\infty}$ funktiojono, $f_j : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$. Funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että*

$$\sup_{x\in A} \left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(x) \right| = \sup_{x\in A} \left| S_m(x) - S_n(x) \right| < \varepsilon$$

aina kun $m > n \geq N$.

TODISTUS. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f. Merkitään osasummaa $S_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$. Siis $\lim_{n\to\infty} S_n = f$ tasaisesti joukossa A. Nyt kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left| S_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

aina, kun $n \geq N$ ja $x \in A$. Olkoon $m > n \geq N$. Tällöin kaikilla $x \in A$ pätee

$$0 \leq \left|\sum_{j=0}^{m} f_j(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{m} f_j(x)\right| = |S_m(x) - S_n(x)|$$
$$\leq \left|S_m(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Siispä

$$\sup_{x \in A}\left|\sum_{j=n+1}^{m} f_j(x)\right| < \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että jos $m > n \geq N$ niin $\left|\sum_{j=n+1}^{m} f_j\right| < \varepsilon$ joukossa A. Olkoon $m, n \geq N$ ja oletetaan, että $m > n$. Tällöin pätee

$$\left|S_m(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{j=0}^{m} f_j(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{m} f_j(x)\right| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Siispä osasummien S_n muodostama funktiojono suppenee tasaisesti joukossa A, joten funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti. □

Tasaisesti suppenevan funktiosarjan summafunktio perii monia funktiojonon $(f_j)_{j=0}^{\infty}$ funktioiden f_j ominaisuuksia. Seuraava lause näyttää, että funktioiden f_j jatkuvuus periytyy summafunktiolle.

Lause 2.3. *Olkoot $f_j : A \to \mathbb{R}$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, funktioita, joille funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa $A \subset \mathbb{R}$. Jos funktiot f_j ovat jatkuvia, niin myös funktio f on jatkuva joukossa A.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $x_0 \in A$. Näytetään, että on $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, aina kun $x \in A$ ja $|x - x_0| < \delta$. Koska jatkuvien funktioiden äärellinen summa on jatkuva, niin osasumma $S_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$ on jatkuva joukossa A kaikilla $n = 1, 2, \ldots$

Koska funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|S_N(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

Toisaalta osasumman S_N jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left|S_N(x) - S_N(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{kun } |x - x_0| < \delta \quad \text{ja} \quad x \in A.$$

Nyt kaikille $x \in A$, joille $|x - x_0| < \delta$, saadaan kolmioepäyhtälöä sekä ylläolevia arvioita käyttäen

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \left|f(x) - S_N(x)\right| + \left|S_N(x) - S_N(x_0)\right| + \left|S_N(x_0) - f(x_0)\right|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tämä osoittaa, että funktio f on jatkuva pisteessä x_0. Koska x_0 on mielivaltainen joukon A piste, niin funktio f on jatkuva joukossa A. □

Seuraava lause antaa erään käyttökelpoisen testin funktiosarjan tasaiselle suppenemiselle.

LAUSE 2.4. (Weierstrassin M-testi) *Olkoot* $f_j : A \to \mathbb{R}$ *funktioita, joille kaikilla* $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ *on vakio* $0 \leq M_j < \infty$ *siten, että*

$$|f_j(x)| \leq M_j \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

Tällöin jos lukusarja $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ *suppenee, niin funktiosarja* $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ *suppenee (itseisesti ja) tasaisesti joukossa* A.

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Merkitään osasummaa $S_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$. Kun $m > n$, niin kaikilla $x \in A$ on kolmioepäyhtälön nojalla

$$\left|S_m(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{m} f_j(x)\right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \left|f_j(x)\right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} M_j.$$

Tiedetään, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ suppenee, joten osasummien jono $(\sum_{j=0}^{m} M_j)_{m\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Löytyy siis $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon$, kun $m > n \geq N$. Tällöin

$$\left|S_m(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$$

kaikilla $x \in A$, jos $m > n \geq N$. Nyt funktiosarja $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti tasaisen Cauchyn ehdon (Lause 2.2) perusteella. □

Potenssisarjat ja Raaben testi

Tässä luvussa tarkasteellaan muotoa $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ olevia potenssisarjoja ja niitä koskevia tuloksia. Lisäksi tutustutaan Raaben testiin, joka on suhdetestin yleistys. Potenssisarjojen teorian pohjana käytetään Heli Tuomisen luentomuistiinpanoja syksyn 2012 Analyysi 3 -kurssilta [**12**, luku 5]. Lisäksi käytetään George Arfkenin kirjaa [**2**, s. 183] ja Christopher Hammondin artikkelia [**4**], mistä löytyy Raaben testi.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Olkoon $a_j \in \mathbb{R}$ kullekin $j = 0, 1, \dots$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Muotoa

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan *potenssisarjaksi.* Luvut a_j ovat potenssisarjan *kertoimet* ja piste x_0 sen *keskus.*

MÄÄRITELMÄ 2.6. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$. Sen *suppenemissäde* on luku

$$R = \sup\left\{|x - x_0| : \text{sarja} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j \text{ suppenee}\right\} \in [0, \infty].$$

Jos $R > 0$ on reaaliluku, niin avoin väli $]x_0 - R, x_0 + R[$ on potenssisarjan *suppenemisväli.*

HUOMAUTUS 2.7. (1) Potenssisarja suppenee suppenemisvälillään.
(2) Jos $R = 0$, niin potenssisarja suppenee vain, kun $x = x_0$.
(3) Jos $R = \infty$, niin potenssisarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Seuraava lause näyttää, että suppenevalla potenssisarjalla on kaikkien kertalukujen derivaatat suppenemisvälillään.

LAUSE 2.8. *Olkoon R potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenemissäde. Tällöin funktiolla $f :]x_0 - R, x_0 + R[\to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$$

on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat. Lisäksi funktion f derivaatat saadaan derivoimalla potenssisarja termeittäin, eli erityisesti pätee

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (x-x_0)^{j-1} \qquad \text{kaikilla } x \in]x_0 - R, x_0 + R[.$$

TODISTUS. Katso esimerkiksi [**1**, Thm. 11.9]. □

Seuraava lause antaa kaksi eri menetelmää selvittää potenssisarjan suppenemissäde. Kyseiset menetelmät ovat niin sanotut suhde- ja juuritestit.

LAUSE 2.9. *Olkoon $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ potenssisarja.*

(1) *Jos jonolla $\left(\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}\right)_{j=0}^{\infty}$ on raja-arvo, joka kuuluu joukkoon $[0,\infty]$, niin potenssisarjan suppenemissäde on*

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}.$$

(2) *Jos jonolla $\left(\sqrt[j]{|a_j|}\right)_{j=0}^{\infty}$ on raja-arvo, joka kuuluu joukkoon $[0,\infty]$, niin potenssisarjan suppenemissäde on*

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{|a_j|}}.$$

TODISTUS. Katso esimerkiksi [**12**, Lause 5.13]. □

Seuraavassa esimerkissä näytetään, että potenssisarja ei aina suppene suppenemisvälinsä päätepisteissä.

ESIMERKKI 2.10. Olkoon $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j-1}{2j+1} x^j$ potenssisarja, missä siis $a_j = \frac{2j-1}{2j+1}$ kaikilla $j \in \{0,1,2,\ldots\}$ ja piste $x_0 = 0$ on sen keskus.
Määritetään potenssisarjan suppenemissäde. Koska

$$\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|} = \frac{\frac{2j-1}{2j+1}}{\frac{2(j+1)-1}{2(j+1)+1}} = \frac{4j^2+4j-3}{(2j+1)^2} = \frac{(2j+1)^2-4}{(2j+1)^2} = 1 - \frac{4}{(2j+1)^2} \xrightarrow{j\to\infty} 1,$$

niin Lauseen 2.9 nojalla $R = 1$ ja suppenemisväli on $]-1,1[$. Potenssisarja suppenee siis ainakin kun $x \in]-1,1[$. Tutkitaan vielä välin päätepisteet.

Kun $x = 1$, niin pätee

$$\frac{2j-1}{2j+1} 1^j = \frac{2j-1}{2j+1} = 1 - \frac{2}{2j+1} \xrightarrow{j\to\infty} 1 \neq 0.$$

Näin ollen potenssisarja hajaantuu kun $x = 1$.

Toisaalta kun $x = -1$, niin kaikilla $j \geq 0$ pätee

$$\frac{2j-1}{2j+1}(-1)^j.$$

Koska kyseiset termit eivät suppene kohti nollaa, niin tarkasteltava potenssisarja hajaantuu, kun $x = -1$.

Näiden laskujen perusteella potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j-1}{2j+1} x^j$ suppenee kun $x \in]-1, 1[$ ja hajaantuu muualla.

Edellinen esimerkki osoittaa, että potenssisarja ei välttämättä suppene suppenemisvälinsä päätepisteissä. Seuraavaa tulosta kutsutaan nimellä Raaben testi. Kyseessä on sarjan suppenemistesti, jonka avulla voidaan esimerkiksi tutkia suppeneeko potenssisarja suppenemisvälinsä päätepisteissä. Raaben testi ei ole standarditulos. Alla oleva todistus on lainattu lähteestä [**4**]. Raaben testi löytyy myös esimerkiksi viitteestä [**2**] tai [**10**].

Lause 2.11. *Olkoon $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ sarja, jonka suppenemissäde $R = 1$.*

(A) *Jos $a_j > 0$ ja*

$$j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1\right) \geq P > 1$$

kaikilla $j \geq N$, missä N on positiivinen kokonaisluku, joka ei riipu luvusta j, niin sarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ suppenee.

(B) *Jos $a_j > 0$ ja*

$$j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1\right) \leq P < 1$$

kaikilla $j \geq N$, missä N on positiivinen kokonaisluku, joka ei riippu luvusta j, niin sarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

Todistus. Näytetään aluksi kohta (A). Oletetaan tätä varten kohdassa (A) esiintyvät oletukset. Koska $\frac{P-1}{2} > 0$, on olemassa luku $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1\right) > P - \frac{P-1}{2} = \frac{P+1}{2} \qquad \text{kaikilla } j \geq N.$$

Olkoot $P_1 = \frac{P+1}{2} > 1$ ja $j \geq N$. Huomataan, että

$$j\frac{a_j}{a_{j+1}} > P_1 + j.$$

Siten

$$ja_j > (P_1 + j)a_{j+1}.$$

Tästä saadaan

$$ja_j - (j+1)a_{j+1} > (P_1 - 1)a_{j+1}. \tag{2.1}$$

Koska $P_1 - 1 > 0$ ja $a_{j+1} > 0$, niin

$$ja_j > (j+1)a_{j+1} \qquad \text{kaikilla } j \geq N.$$

Koska $ja_j > 0$, kun $j \geq N$, niin vähenevä sarja $(ja_j)_{j=N}^{\infty}$ suppenee kohti jotakin lukua x. Tutkitaan sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty}(ja_j - (j+1)a_{j+1}).$$

Kirjoitetaan summan $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ m ensimmäistä termiä auki ja huomataan, että summasta supistuu pois lähes kaikki termit

$$(a_1 - 2a_2) + (2a_2 - 3a_3) + \cdots + (ma_m - (m+1)a_{m+1}) = a_1 - (m+1)a_{m+1}.$$

Siispä sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenee kohti lukua $a_1 - x$. Nyt majoranttiperiaatteen ja epäyhtälön (2.1) perusteella sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty}(P_1 - 1)a_{j+1}$$

suppenee ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1} = \frac{1}{P_1 - 1}\sum_{j=1}^{\infty}(P_1 - 1)a_{j+1}.$$

Siispä sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee.

Osoitetaan seuraavaksi kohta (B). Oletetaan tätä varten kyseisessä kohdassa esiintyvät oletukset. Koska $\frac{1-P}{2} > 0$ on olemassa luku $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1\right) < P + \frac{1-P}{2} = \frac{1+P}{2} \qquad \text{kaikilla } j \geq N.$$

Kiinnitetään $j \geq N$, jolloin edellisen epäyhtälön nojalla

$$j\frac{a_j}{a_{j+1}} - (j+1) < \frac{1+P}{2} - 1 = \frac{P-1}{2} < 0.$$

Koska lisäksi $a_{j+1} > 0$, niin edellisen epäyhtälöketjun perusteella saadaan

$$ja_j < (j+1)a_{j+1},$$

mistä puolestaan seuraa, että

$$Na_N \leq ja_j \qquad \text{kaikilla } j \geq N.$$

Merkitään $M = Na_N > 0$. Nyt

$$0 < \frac{M}{j} \leq a_j \qquad \text{kaikilla } j \geq N.$$

Siispä sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu. □

Näytetään seuraavaksi Raaben testin avulla, ettei Esimerkin 2.10 potenssisarja suppene suppenemisvälinsä päätepisteissä.

Esimerkki 2.12. Palataan Esimerkkiin 2.10 ja sovelletaan siihen Raaben testiä. Eli tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j-1}{2j+1}x^j$, missä siis $a_j = \frac{2j-1}{2j+1} > 0$ kaikilla $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Edellisessä esimerkissä selvitettiin potenssisarjan suppenemissäde $R = 1$.

Tutkitaan nyt Raaben testillä (Lause 2.11) suppeneeko vai hajaantuuko sarja pisteessä $x = 1$, kun $j \geq 1$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned} j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1\right) &= j\left(\frac{\frac{2j-1}{2j+1}}{\frac{2(j+1)-1}{2(j+1)+1}} - 1\right) = j\left(1 - \frac{4}{(2j+1)^2} - 1\right) \\ &= j\left(-\frac{4}{(2j+1)^2}\right) = -\frac{4}{4j + 4 + \frac{1}{j}} \xrightarrow{j \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Koska $0 < 1$, niin Raaben testin nojalla sarja $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j-1}{2j+1}$ hajaantuu. Näin ollen tarkasteltava potenssisarja ei myöskään suppene pisteessä $x = 1$.

LUKU 3

Jatkuva, ei missään derivoituva funktio

Tässä luvussa tutustutaan niin sanottuun Weierstrassin funktioon

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Tarkoituksena on osoittaa, että funktio u on jatkuva reaaliakselilla ja ettei u ole missään reaaliakselin pisteessä derivoituva. Tuloksen todistuksen historiasta ei olla täysin varmoja. Bolzano näyttää olevan ensimmäinen, joka on konstruoinut funktion, joka on jatkuva, mutta ei missään pisteessä derivoituva. Weierstrass julkaisi oman esimerkkinsä vuonna 1872. Kuitenkin voidaan olettaa, että hän esitti esimerkin jatkuvasta, ei missään pisteessä derivoituvasta funktiosta luennolla jo vuonna 1861. Luku pohjautuu viitteessä [**7**, Thm. 1.12] annettuun esitykseen. Muotoillaan aluksi luvun päätulos.

Lause 3.1. *Olkoon $0 < a < 1$, $b \in \mathbb{N}$ pariton ja $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Tällöin funktio $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$, mutta ei missään sen pisteessä derivoituva.

Lauseen todistus on tekninen, joten se on jaettu osiin. Todistusta varten tarvitaan muutama aputulos. Lause todistetaan luvun lopussa.

Lemma 3.2. *Olkoon $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $ab > 1$ ja merkitään*

$$\mathrm{I}_m(x,h) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} a^n[\cos(b^n\pi(x+h)) - \cos(b^n\pi x)] \quad \textit{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin

$$\left|\mathrm{I}_m(x,h)\right| < \pi\frac{(ab)^m}{ab-1}, \qquad \textit{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Väliarvolauseen avulla saadaan, että

$$|\cos z - \cos w| \leq |z - w| \quad \text{aina, kun } z, w \in \mathbb{R}.$$

Tämän tiedon nojalla pätee

$$\left|\mathrm{I}_m(x,h)\right| \leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=0}^{m-1}\left|a^n\right|\left|b^n\pi(x+h) - b^n\pi x\right| = \pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n.$$

Geometrisen summan kaavan perusteella

$$\left|\mathrm{I}_m(x,h)\right| \le \pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n = \pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1}.$$

Käytetään vielä oletusta, että $ab > 1$. Sen nojalla on

$$\left|\mathrm{I}_m(x,h)\right| \le \pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1} < \pi\frac{(ab)^m}{ab-1}.$$

$\square$

LEMMA 3.3. *Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ ja $b \in \mathbb{N}$ pariton. Kullakin $m \in \mathbb{N}$ kirjoitetaan $b^m x = k_m + r_m$, missä $k_m \in \mathbb{Z}$ ja $-\frac{1}{2} < r_m \le \frac{1}{2}$. Määritellään*

$$h_m = \frac{1-r_m}{b^m}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Merkitään

$$\mathrm{II}_m(x) = \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{\infty} a^n[\cos(b^n\pi(x+h_m)) - \cos(b^n\pi x)].$$

Tällöin

$$\left|\mathrm{II}_m(x)\right| \ge \frac{1}{h_m}a^m.$$

Lisäksi

$$\lim_{m\to\infty} h_m = 0.$$

TODISTUS. Kiinnitetään luonnolliset luvut n ja m siten, että $n \ge m$. Luvun h_m määritelmän perusteella saadaan

$$b^n(x+h_m) = b^{n-m}(b^m x + b^m h_m) = b^{n-m}(k_m+1).$$

Kosinin jaksollisuuden ja tiedon b on pariton ($b = 2p+1$) perusteella seuraavat yhtälöt ovat voimassa

$$\cos(b^n\pi(x+h_m)) = \cos((2p+1)^{n-m}\pi(k_m+1)) = (-1)^{k_m+1}$$

ja toisaalta kosinin yhteenlaskukaavan nojalla

$$\begin{aligned}
\cos(b^n\pi x) &= \cos(\pi b^{n-m}(b^m x)) = \cos(\pi b^{n-m}(k_m+r_m)) = \cos(\pi b^{n-m}k_m + \pi b^{n-m}r_m) \\
&= \cos(\pi b^{n-m}k_m)\cos(\pi b^{n-m}r_m) - \sin(\pi b^{n-m}k_m)\sin(\pi b^{n-m}r_m) \\
&= \cos(\pi b^{n-m}k_m)\cos(\pi b^{n-m}r_m) - 0\cdot\sin(\pi b^{n-m}r_m) \\
&= \cos(\pi b^{n-m}k_m)\cos(\pi b^{n-m}r_m) \\
&= (-1)^{k_m}\cos(\pi b^{n-m}r_m).
\end{aligned}$$

Koska $0 < a < 1$, niin reaaliluvun $\mathrm{II}_m(x)$ määrittelevä sarja suppenee reaaliakselilla Weierstrassin M-testin nojalla. Näin ollen edellisten laskujen nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_m(x) &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{\infty} a^n[(-1)^{k_m+1} - (-1)^{k_m}\cos(\pi b^{n-m} r_m)] \\ &= \frac{(-1)^{k_m+1}}{h_m}\sum_{n=m}^{\infty} a^n[1+\cos(\pi b^{n-m} r_m)].\end{aligned}$$

Tämän avulla voidaan arvioida

$$\big|\mathrm{II}_m(x)\big| = \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{\infty} a^n[1+\cos(\pi b^{n-m} r_m)] \geq \frac{1}{h_m} a^m[1+\cos(\pi r_m)].$$

Koska $-\frac{1}{2} < r_m \leq \frac{1}{2}$, niin $\cos(\pi r_m) \geq 0$. Näin ollen pätee

$$\big|\mathrm{II}_m(x)\big| \geq \frac{1}{h_m} a^m.$$

Koska lisäksi $b > 1$, niin $\lim_{m\to\infty} h_m = 0$. □

Todistetaan seuraavaksi luvun alussa esitetty Lause 3.1 hyödyntämällä edellä todistettuja aputuloksia.

Todistus. Jaetaan lauseen todistus kahteen osaan. Näytetään ensin, että funktio $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R},$$

on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$ ja lopuksi, että funktio u ei ole derivoituva missään pisteessä $x \in \mathbb{R}$.

Osoitetaan, että u on jatkuva. Koska funktiot $u_n = a^n \cos(b^n \pi \cdot)$ ovat jatkuvia joukossa $\mathbb{R}$ kaikilla $n \geq 0$, niin Lauseen 2.3 perusteella summafunktio $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ on jatkuva reaaliakselilla, jos funktiosarja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ suppenee siellä tasaisesti.

Näytetään seuraavaksi, että funktiosarja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ suppenee tasaisesti. Lauseen 2.4 nojalla riittää löytää jokaiselle funktiolle $|u_n| = |a^n \cos(b^n \pi \cdot)|$ majoranttifunktio $M_n > 0$ siten, että majoranttisarja $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ suppenee. Huomataan, että

$$|u_n(x)| = |a^n \cos(b^n \pi x)| \leq |a^n| = a^n \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Olkoon $M_n = a^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tutkitaan vielä suppeneeko majoranttisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Se on geometrinen sarja, joka tunnetusti suppenee, jos ja vain jos $|a| < 1$. Toisaalta oletusten nojalla $0 < a < 1$. Näin ollen on löydetty summafunktiolle u majoranttisarja $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$, joka suppenee, joten Weierstrassin M-testin (Lause 2.4) perusteella funktiosarja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$. Erityisesti funktio u on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Näytetään vielä, ettei funktio u ole derivoituva missään reaaliakselin pisteessä. Kiinnitetään $x \in \mathbb{R}$. Jos funktio u olisi derivoituva pisteessä x, niin seuraava erotusosamäärän raja-arvo olisi olemassa

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Riittää siis osoittaa, että kyseistä raja-arvoa ei ole olemassa. Tämän osoittamiseksi riittää, että löydetään jono $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ nollasta poikkeavia reaalilukuja siten, että

(1) $\lim_{m \to \infty} h_m = 0$, ja
(2) raja-arvo

$$\lim_{m \to \infty} \frac{u(x+h_m) - u(x)}{h_m}$$

ei ole olemassa.

Olkoot luvut $h_m \neq 0$ kuten Lemmassa 3.3 kullakin $m \in \mathbb{N}$. Tutkitaan erotusosamäärää

$$\frac{u(x+h_m) - u(x)}{h_m}.$$

Kinnitetään luku $m \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
\frac{u(x+h_m) - u(x)}{h_m} &= \frac{1}{h_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n [\cos(b^n \pi (x+h_m)) - \cos(b^n \pi x)] \\
&= \frac{1}{h_m} \sum_{n=0}^{m-1} a^n [\cos(b^n \pi (x+h_m)) - \cos(b^n \pi x)] \\
&\qquad + \frac{1}{h_m} \sum_{n=m}^{\infty} a^n [\cos(b^n \pi (x+h_m)) - \cos(b^n \pi x)] \\
&= \mathrm{I}_m(x, h_m) + \mathrm{II}_m(x).
\end{aligned}$$

Koska

$$\left| \frac{u(x+h_m) - u(x)}{h_m} \right| = \left| \mathrm{I}_m(x, h_m) + \mathrm{II}_m(x) \right| \geq \left| \mathrm{II}_m(x) \right| - \left| \mathrm{I}_m(x, h_m) \right|,$$

niin arvioidaan osaa $|I_m(x, h_m)|$ ylöspäin ja osaa $|II_m(x)|$ alaspäin. Lemman 3.2 ja Lemman 3.3 arvioiden perusteella saadaan

$$\left| \frac{u(x+h_m) - u(x)}{h_m} \right| \geq \frac{1}{h_m} a^m - \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}.$$

Olkoon r_m kuten Lemmassa 3.3, jolloin $\frac{1}{2} \leq 1 - r_m < \frac{3}{2}$. Siten

$$h_m = \frac{1 - r_m}{b^m} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{b^m}.$$

Tästä seuraa

$$\left| \frac{u(x+h_m) - u(x)}{h_m} \right| \geq (ab)^m \cdot \frac{2}{3} - \pi \frac{(ab)^m}{ab-1} = (ab)^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right).$$

Koska $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi > 1$, niin $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} > 0$. Siten

$$\lim_{m\to\infty} (ab)^m \Big(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\Big) = \infty.$$

Siten myös

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{u(x+h_m) - u(x)}{h_m} \right| = \infty.$$

Kuten aiemmin todettiin tästä seuraa, että funktio u ei ole derivoituva pisteessä x. Koska valittiin mielivaltainen $x \in \mathbb{R}$, niin funktio u ei ole derivoituva missään reaaliakselin pisteessä.

Nyt on saatu näytettyä, että funktio on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$, mutta ei missään pisteessä derivoituva, kuten haluttiin. $\square$

On olemassa myös muita konstruktioita jatkuville, ei missään derivoituville funktiolle. Seuraavana esitetään eräs niistä, joka on pohjimmiltaan van derWaerden konstruktion kaltainen. Van derWaerden esimerkki on vuodelta 1930. Alla esitetty konstruktio löytyy esimerkiksi viitteestä [**10**, ss. 174–175].

Esimerkki 3.4. Olkoon $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned} \psi(x) &= |x|, && \text{jos } |x| \le 2, \\ \psi(x+4p) &= \psi(x), && \text{jos } x \in \mathbb{R} \text{ ja } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tällöin funktio ψ on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$. Itse asiassa

$$\psi(x) = \operatorname{dist}(x, A), \qquad \text{missä } A = \{4m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

On myös selvää, että

$$|\psi(s) - \psi(t)| = |s - t|$$

kun s ja t ovat sellaiset eri reaaliluvut, että avoimella välillä, jonka päätepisteet ovat s ja t, ei ole yhtään parillista kokonaislukua. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään funktiot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavoilla

$$f_n(x) = 4^{-n}\psi(4^n x) \qquad \text{ja} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jokainen f_n on jatkuva reaalilukujen joukossa ja $0 \le f_n(x) \le \frac{2}{4^n}$ kaikilla x. Näin ollen Weierstrassin M-testin (Lause 2.4) perusteella funktio f on jatkuva reaalilukujen joukossa.

Voidaan myös osoittaa, että funktio f ei ole missään derivoituva, katso esimerkiksi [**10**, ss. 174–175]. Todistus ohitetaan tässä työssä.

LUKU 4

Weierstrassin approksimaatiolause

Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli. Weierstrassin approksimaatiolauseen 4.1 nojalla mitä tahansa jatkuvaa funktiota $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti sup-normissa käyttäen polynomeja $p : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tässä luvussa esitellään Lebesguen todistus Weierstrassin approksiomaatiolauseelle. Apuna käytettyjä merkintöjä ja käsitteitä on selitetty luvussa 1. Alla oleva todistus on lainattu lähteestä [**3**].

Lause 4.1. *Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli, missä $a < b$. Tällöin joukko $P[a, b]$ on tiheä jatkuvien funktioiden avaruudessa $C[a, b]$ sup-normin suhteen. Siis jos funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa polynomi $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, jolle*

$$||f - p||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Todistetaan Weierstrassin approksimaatiolause Lebesguen todistuksella [**3**, Luku 9.1]. Todistus on kaksivaiheinen. Kiinnitetään väli $[a, b]$ ja pidetään se kiinnitettynä tämän luvun ajan. Ajatuksena on approksimoida annettua funktiota $f \in C[a, b]$ aluksi murtoviivafunktiolla g ja sitten näyttää, että funktiota g voidaan puolestaan approksimoida polynomilla sup-normin suhteen.

Lemma 4.2. *Murtoviivafunktioiden avaruus $PL[a, b]$ on tiheä jatkuvien funktioiden avaruudessa $C[a, b]$ sup-normin suhteen.*

Todistus. Olkoon $f \in C[a, b]$ ja $\varepsilon > 0$. Funktio f on jatkuva jokaisessa suljetun välin $[a, b]$ pisteessä, joten se on Lauseen 1.10 perusteella tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$. Siis on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(s) - f(t)| \le \varepsilon$ kun $|s - t| \le \delta$ ja $s, t \in [a, b]$. Valitaan riittävän suuri $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{n}(b - a) < \delta$ ja määritellään $t_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$, $j = 0, \dots, n$. Koska

$$|t_j - t_{j-1}| = \left| a + \frac{j}{n}(b - a) - \left(a + \frac{j-1}{n}(b - a) \right) \right| = \frac{1}{n}(b - a) < \delta,$$

niin

$$|f(s) - f(t_{j-1})| \le \varepsilon \qquad \text{aina, kun } s \in [t_{j-1}, t_j] \text{ ja } j = 1, \dots, n. \tag{4.1}$$

Olkoon $g \in PL[a, b]$ ainoa murtoviivafunktio, joka kelpaa, jotta $g(t_j) = f(t_j)$ kaikilla $j = 0, \dots, n$. Välillä $[t_{j-1}, t_j]$ kyseessä on siis pisteiden $(t_{j-1}, f(t_{j-1}))$ ja $(t_j, f(t_j))$ kautta kulkeva lineaarinen polynomi. Lemman 1.14 nojalla funktio g voidaan kyseisellä välillä kirjoittaa muodossa

$$g(s) = f(t_{j-1}) + (s - t_{j-1}) \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}, \qquad j = 1, \dots, n \text{ ja } s \in [t_{j-1}, t_j]. \tag{4.2}$$

Näytetään, että $||f-g||_\infty \le 2\varepsilon$. Olkoon $s \in [a,b]$. Tällöin $s \in [t_{j-1}, t_j]$ jollakin $j = 1, \dots, n$ ja kohtien (4.2) ja (4.1) nojalla

$$|g(s) - f(t_{j-1})| = (s - t_{j-1}) \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|}{t_j - t_{j-1}} \le |f(t_j) - f(t_{j-1})| \le \varepsilon. \tag{4.3}$$

Nyt kohtien (4.1) ja (4.3) nojalla

$$\begin{aligned} |f(s) - g(s)| &= |f(s) - f(t_{j-1}) + f(t_{j-1}) - g(s)| \\ &\le |f(s) - f(t_{j-1})| + |f(t_{j-1}) - g(s)| \\ &= |f(s) - f(t_{j-1})| + |g(s) - f(t_{j-1})| \\ &\le 2\varepsilon, \end{aligned}$$

joka siis pätee aina, kun $s \in [a,b]$. Siis

$$||f-g||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \le 2\varepsilon.$$

Koska $f \in C[a,b]$ ja $\varepsilon > 0$ ovat mielivaltaisia, sekä $g \in PL[a,b]$, niin Määritelmän 1.4 perusteella tästä seuraa, että $PL[a,b]$ on tiheä avaruudessa $C[a,b]$. □

Seuraavaksi etsimme vektoriavaruudelle $PL[a,b]$ virittäjäjoukon, joka koostuu varsin yksinkertaisista funktioista. Olkoon $h_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h_0(s) = \frac{s + |s|}{2} = \begin{cases} 0, & \text{jos } s \le 0 \\ s, & \text{jos } s \ge 0. \end{cases}$$

Olkoon $t \in [a,b]$ ja $h_t : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h_t(s) = h_0(s-t) \qquad \text{kaikilla } s \in [a,b].$$

Olkoon $\mathbb{1} : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}(s) = 1 \qquad \text{kaikilla } s \in [a,b].$$

Havaitaan, että $\mathbb{1}, h_t \in PL[a,b]$ kaikilla $t \in [a,b]$.

Lemma 4.3. *Joukko $\{\mathbb{1}\} \cup \{h_t : t \in [a,b]\}$ virittää vektoriavaruuden $PL[a,b]$.*

Todistus. Olkoon $g \in PL[a,b]$ murtoviivafunktio. Oletetaan, että

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

on jako siten, että funktio g on lineaarinen polynomi jokaisella välillä $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$. Lineaarisen polynomin $g|_{[t_{j-1}, t_j]}$ kulmakerroin on

$$c_j = \frac{g(t_j) - g(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Funktio

$$g_1 = g(t_0)\mathbb{1} + c_1 h_{t_0}$$

välillä $[t_0, t_1]$ on $g|_{[t_0, t_1]}$. Funktio

$$g_2 = g(t_0)\mathbb{1} + c_1 h_{t_0} + (c_2 - c_1) h_{t_1}$$

välillä $[t_1, t_2]$ on $g|_{[t_1, t_2]}$. Koska jakopisteitä on äärellinen määrä, niin näin jatkamalla saadaan lopulta esitys funktiolle g käyttämällä vakiofunktiota $\mathbb{1}$ ja äärellisen monta funktiota h_{t_j}, $j = 1, \dots, n$. □

Osoitetaan seuraavaksi, että välillä $[a, b]$ jokaista funktiota h_t voidaan approksimoida tasaisesti polynomeilla. Todistus tapahtuu kolmessa osassa Lemmojen 4.4, 4.5 ja 4.6 avulla.

LEMMA 4.4. *Funktiota $\sqrt{1-x}$ voidaan approksimoida tasaisesti polynomeilla välillä* $[0, 1]$.

TODISTUS. Aloitetaan todistus valmistelevilla laskuilla. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j,$$

missä kertoimet ovat

$$a_j = \begin{cases} 1, & \text{kun } j = 0 \\ (-1)^j \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{j!}, & \text{kun } j \geq 1. \end{cases}$$

Näytetään, että potenssisarjan S suppenemissäde R on luku 1. Lauseen 2.9 nojalla

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa. Kiinnitetään $j \geq 1$ ja lasketaan

$$\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|} = \frac{\left|\frac{(-1)^j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-j+1\right)}{j!}\right|}{\left|\frac{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(j+1)+1\right)}{(j+1)!}\right|} = \frac{|(j+1)!|}{\left|\left(\frac{1}{2}-j\right)j!\right|} = \left|\frac{j+1}{\frac{1}{2}-j}\right|$$

$$= \left|\frac{j(1+\frac{1}{j})}{j(\frac{\frac{1}{2}}{j}-1)}\right| = \left|\frac{1+\frac{1}{j}}{\frac{\frac{1}{2}}{j}-1}\right| \xrightarrow{j\to\infty} \left|\frac{1}{-1}\right| = 1.$$

Nyt on osoitettu, että raja-arvo on olemassa ja että $R = 1$.

Tutkitaan seuraavaksi potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ suppenemista Raaben testin 2.11 kohdan (A) avulla. Käyttämällä edellistä laskua nähdään, että kaikilla $j \geq 1$ pätee

$$j\left(\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|} - 1\right) = j\left(\frac{\left|1+\frac{1}{j}\right|}{\left|\frac{\frac{1}{2}}{j}-1\right|} - 1\right) = j\left(\frac{1+\frac{1}{j}-1+\frac{\frac{1}{2}}{j}}{1-\frac{\frac{1}{2}}{j}}\right)$$

$$= j\left(\frac{\frac{1+\frac{1}{2}}{j}}{1-\frac{\frac{1}{2}}{j}}\right) = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{\frac{1}{2}}{j}} \xrightarrow{j\to\infty} \frac{3}{2} > 1.$$

Raaben testin nojalla $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$. Valitaan kullakin $j = 0, 1, \ldots$ luku $M_j = |a_j|$. Tällöin pätee

$$|a_j x^j| = |a_j||x|^j \leq M_j \qquad \text{kaikilla } j \geq 0 \text{ ja } x \in [-1, 1].$$

Weierstrassin M-testi 2.4 osoittaa, että potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ suppenee tasaisesti välillä $[-1,1]$. Määritellään funktio $S : [-1,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \qquad \text{kun } x \in [-1,1].$$

Tällöin Lauseen 2.3 nojalla S on jatkuva välillä $[-1,1]$.

Seuraavaksi osoitetaan, että $S(x) = \sqrt{1-x}$ kaikilla $x \in [-1,1]$. Koska sekä S että $\sqrt{1-x}$ ovat jatkuvia funktioita kyseisellä suljetulla välillä, niin riittää osoittaa, että

$$S(x) = \sqrt{1-x} \qquad \text{kaikilla } x \in\,]-1,1[. \tag{4.4}$$

Tätä varten näytetään ensin, että

$$(1-x)S'(x) = -\frac{1}{2}S(x), \qquad \text{kun } x \in\,]-1,1[. \tag{4.5}$$

Kiinnitetään $x \in\,]-1,1[$. Lauseen 2.8 nojalla funktion S määräävä potenssisarja voidaan derivoida termeittäin

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{j!} j(-1)^j x^{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{(j-1)!}(-1)^j x^{j-1}. \end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned} (1-x)S'(x) = &\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{(j-1)!}(-1)^j x^{j-1} \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{(j-1)!}(-1)^j x^{j}. \end{aligned}$$

Tekemällä muuttujanvaihto ensimmäisessä sarjassa saadaan esitys

$$\begin{aligned} (1-x)S'(x) = &-\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)(\frac{1}{2}-j)}{j!}(-1)^j x^j \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{(j-1)!}(-1)^j x^{j}. \end{aligned}$$

Ottamalla yhteinen tekijä havaitaan, että

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x) = &-\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\Bigg((-1)\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)(\frac{1}{2}-j)}{j!} \\ &- \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{(j-1)!}\Bigg)(-1)^j x^j \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)(\frac{1}{2}-j)}{(j-1)!}\Bigg(-\frac{1}{j}-\frac{1}{\frac{1}{2}-j}\Bigg)(-1)^j x^j \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)(\frac{1}{2}-j)}{(j-1)!}\Bigg(\frac{-\frac{1}{2}+j-j}{j(\frac{1}{2}-j)}\Bigg)(-1)^j x^j.\end{aligned}$$

Sieventämällä ja ottamalla yhteinen tekijä saadaan lopulta

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x) &= -\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{j!}(-1)^j x^j(-\frac{1}{2}) \\ &= -\frac{1}{2}\Bigg(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-j+1)}{j!}(-1)^j x^j\Bigg) \\ &= -\frac{1}{2}S(x).\end{aligned}$$

Kaava (4.5) on nyt osoitettu. Näytetään sen avulla seuraavaksi, että kaava (4.4) pätee. Kaavan (4.5) perusteella kaikilla $x \in\,]-1,1[$ pätee

$$\begin{aligned}\Big(S(x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}\Big)' &= S'(x)(1-x)^{-\frac{1}{2}} + S(x)\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= (1-x)^{-\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2}S(x)+\frac{1}{2}S(x)) = 0.\end{aligned}$$

Koska derivaatta on nolla välillä $]-1,1[$, niin on olemassa reaalinen vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$S(x)(1-x)^{-\frac{1}{2}} = c \qquad \text{kaikilla } x \in\,]-1,1[. \tag{4.6}$$

Erityisesti

$$S(x) = c\sqrt{1-x} \qquad \text{kaikilla } x \in\,]-1,1[.$$

Lisäksi tiedetään, että $S(0) = 1$. Tästä saadaan, että $c = 1$. Siis $S(x) = \sqrt{1-x}$ kaikilla $x \in\,]-1,1[$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin, koska $S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in P[-1,1]$ suppenee tasaisesti kohti funktiot S välillä $[-1,1]$, niin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$||S_N - \sqrt{1-x}||_\infty = ||S_N - S||_\infty < \varepsilon.$$

Lemma on nyt todistettu. $\square$

LEMMA 4.5. *Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa polynomi $p \in P[-1,1]$ siten, että*

$$\big|p(s) - |s|\big| < \varepsilon \qquad \textit{aina, kun } s \in [-1,1].$$

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lemman 4.4 perusteella on olemassa $q \in P[0,1]$ siten, että $\left|q(x) - \sqrt{1-x}\right| < \varepsilon$ kaikilla $x \in [0,1]$. Olkoon $s \in [-1,1]$. Määritellään $p(s) = q(1-s^2)$, missä $1 - s^2 \in [0,1]$. Koska q on polynomi, niin myös $p \in P[-1,1]$ on polynomi. Kun $s \in [-1,1]$, niin $1 - s^2 \in [0,1]$, joten Lemman 4.4 nojalla

$$|p(s) - |s|| = \left|q(1-s^2) - |s|\right| = \left|q(1-s^2) - \sqrt{1-(1-s^2)}\right| < \varepsilon.$$

□

LEMMA 4.6. *Funktiota h_t voidaan approksimoida välillä $[a,b]$ tasaisesti polynomeilla kun $t \in [a,b]$. Toisin sanoen, jos $\varepsilon > 0$ ja $t \in [a,b]$, niin on olemassa polynomi $p \in P[a,b]$ siten, että $||p - h_t||_\infty < \varepsilon$.*

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lemman 4.5 nojalla funktiota

$$h_0(s) = \frac{s + |s|}{2}$$

voidaan approksimoida polynomilla sup-normin suhteen välillä $[-1,1]$. Nimittäin lemman nojalla on olemassa $p \in P[-1,1]$ siten, että kaikilla $s \in [-1,1]$ pätee

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}(s + p(s)) - h_0(s)\right| &= \left|\frac{s}{2} + \frac{p(s)}{2} - \frac{s}{2} - \frac{|s|}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\,|p(s) - |s|| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Merkitään $p_0(s) = \frac{1}{2}(s + p(s))$ kaikilla $s \in [-1,1]$. Näin ollen $p_0 \in P[-1,1]$ ja $||p_0 - h_0||_\infty < \varepsilon$.

Yleistetään todistus vielä kaikille funktioille h_t. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja $t \in [a,b]$. Valitaan $M > 0$ siten, että

$$\left[\frac{a-t}{M}, \frac{b-t}{M}\right] \subset [-1,1].$$

Tällöin kaikille $s \in [a,b]$ pätee

$$\frac{s-t}{M} \in \left[\frac{a-t}{M}, \frac{b-t}{M}\right] \subset [-1,1].$$

Olkoon $p_0 \in P[-1,1]$ siten, että

$$|h_0(s) - p_0(s)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

kaikilla $s \in [-1,1]$. Tällöin määritellään $p_{t,a,b} \in P[a,b]$ kaavalla

$$p_{t,a,b}(s) = M \cdot p_0\left(\frac{s-t}{M}\right), \qquad \text{kun } s \in [a,b].$$

Nyt kaikilla $s \in [a, b]$ on

$$\begin{aligned}
|h_t(s) - p_{t,a,b}(s)| &= \left| \frac{s - t + |s - t|}{2} - p_{t,a,b}(s) \right| \\
&= \left| M \cdot \frac{\frac{s-t}{M} + \frac{|s-t|}{M}}{2} - M \cdot p_0\left(\frac{s-t}{M}\right) \right| \\
&= M \cdot \left| \frac{\frac{s-t}{M} + \frac{|s-t|}{M}}{2} - p_0\left(\frac{s-t}{M}\right) \right| \\
&= M \cdot \left| h_0\left(\frac{s-t}{M}\right) - p_0\left(\frac{s-t}{M}\right) \right| \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siten erityisesti $||h_t - p_{t,a,b}||_\infty < \varepsilon$.

□

Todistetaan seuraavaksi Lause 4.1 yhdistämällä edellä todistetut aputulokset.

Todistus. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $\varepsilon > 0$. Lemman 4.2 nojalla on olemassa murtoviivafunktio $g \in PL[a, b]$ siten, että

$$||f - g||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toisaalta Lemman 4.3 nojalla on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja luvut $t_j \in [a, b]$ ja c_j kullakin $j = 1, \ldots, n$ siten, että

$$g = \sum_{j=1}^{n} c_j h_{t_j} + c_0 \mathbb{1}.$$

Lemman 4.6 nojalla voidaan kullakin h_{t_j} valita polynomi $p_j \in P[a, b]$ siten, että

$$||p_j - h_{t_j}||_\infty < \frac{\varepsilon}{2n \cdot \max_{j=1,\ldots,n}|c_j|+1}$$

Olkoon

$$p = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j + c_0 \in P[a, b].$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
||g - p||_\infty &\le \sum_{j=1}^{n} |c_j| \, ||h_{t_j} - p_j||_\infty \\
&< \sum_{j=1}^{n} |c_j| \cdot \frac{\varepsilon}{2n \cdot \max_{j=1,\ldots,n} |c_j| + 1} < \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Siten

$$||f - p||_\infty \le ||f - g||_\infty + ||g - p||_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tämä arvio päättää Weierstrassin approksimaatiolauseen todistuksen. □

LUKU 5

Toinen todistus Wierstrassin approksimaatiolauseelle

Tässä luvussa annetaan vaihtoehtoinen todistus Weierstrassin approksimaatiolauseelle niin sanotun konvoluutioapproksimaation avulla. Todistus pohjautuu Krantzin kirjaan [**6**, ss. 210–214]. Tässä luvussa rajoitutaan tarkastelemaan tapausta $[a, b] = [0, 1]$. Yleisen suljetun välin tapaus saadaan tästä erikoistapauksesta muuttujanvaihdolla, kuten jo edellisessä luvussa havaittiin. Aloitetaan todistus seuraavalla aputuloksella.

LEMMA 5.1. *Olkoon $\psi_j : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio kullakin $j \in \mathbb{N}$ siten, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa.*

(1) $\psi_j(t) \geq 0$ *kaikilla* $t \in [-1, 1]$ *ja kaikilla* $j \in \mathbb{N}$.
(2) $\int_{-1}^{1} \psi_j(t)dt = 1$ *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$.
(3) *Kaikilla* $\delta > 0$ *pätee*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\delta \leq |t| \leq 1} \psi_j(t)dt = 0.$$

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Asetetaan

$$f_j(x) = \int_{-1}^{1} \psi_j(t) f(x - t)dt$$

kullakin $j \in \mathbb{N}$ ja $x \in [0, 1]$. Tällöin funktiojono $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$ kohti funktiota f, kun j lähestyy kohti ääretöntä.

TODISTUS. Todetaan aluksi, että kertomalla f sopivalla vakiolla voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $\sup_{x\in[-1,2]} |f(x)| \leq 1$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $j \in \mathbb{N}$. Koska funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $[-1, 2]$ on olemassa $0 < \delta < 1$ siten, että

$$|f(x - t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.1}$$

kun $|t| \leq \delta < 1$ ja $x \in [0, 1]$. Kun $x \in [0, 1]$ ja $|t| \leq \delta$, niin hyödyntämällä funktion ψ_j ominaisuuta (2) saadaan

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} \psi_j(t) f(x - t)dt - f(x) \cdot 1 \right| \\ &= \left| \int_{-1}^{1} \psi_j(t) f(x - t)dt - f(x) \int_{-1}^{1} \psi_j(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{-1}^{1} f(x - t)\psi_j(t)dt - \int_{-1}^{1} f(x)\psi_j(t)dt \right|. \end{aligned}$$

Yhdistetään seuraavaksi integraalit ja käytetään kolmioepäyhtälöä integraalille sekä funktion ψ_j ominaisuutta (1) seuraavasti

$$\begin{aligned}|f_j(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}(f(x-t)-f(x))\psi_j(t)dt\right| \\ &\le \int_{-1}^{1}\left|(f(x-t)-f(x))\psi_j(t)\right|dt = \int_{-1}^{1}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt + \int_{-1}^{-\delta}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt \\ &\quad + \int_{\delta}^{1}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt + \int_{\delta\le|t|\le 1}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt \\ &= A+B.\end{aligned}$$

Arvioidaan seuraavaksi termejä A ja B erikseen. Aloitetaan arvioimalla termiä A. Funktion ψ_j ominaisuuden (2) sekä epäyhtälön (5.1) nojalla

$$\begin{aligned}A &= \int_{-\delta}^{\delta}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt \le \int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}\psi_j(t)dt \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\psi_j(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Arvioidaan sitten termiä B. Funktioiden ψ_j ominaisuuden (3) perusteella on olemassa $N = N(\delta,\varepsilon)$ siten, että $\int_{\delta\le|t|\le 1}\psi_j(t)dt < \frac{\varepsilon}{4}$ aina, kun $j > N$. Tässä yhteydessä on tärkeä huomata, että luku N ei riipu luvusta x. Lisäksi käytetään tietoa $\sup_{x\in[-1,2]}|f(x)| \le 1$. Kaikilla $j > N$ pätee

$$\begin{aligned}B &= \int_{\delta\le|t|\le 1}\left|f(x-t)-f(x)\right|\psi_j(t)dt \le \int_{\delta\le|t|\le 1}(|f(x-t)|+|f(x)|)\psi_j(t)dt \\ &\le \int_{\delta\le|t|\le 1}2\cdot\psi_j(t)dt = 2\int_{\delta\le|t|\le 1}\psi_j(t)dt \\ &< 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Yhdistämällä arviot saadaan

$$|f_j(x)-f(x)| \le A+B < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{kaikilla } x\in[0,1], \text{ kun } j>N.$$

Siis funktiot f_j suppenevat tasaisesti välillä $[0,1]$ kohti funktiota f. □

Muotoillaan tässä välissä Lemman 5.3 todistusta varten aputulos.

LEMMA 5.2. *Olkoon* $j\in\mathbb{N}$ *ja* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t) = (1-t^2)^j - 1 + jt^2$. *Tällöin* $g(t)\ge 0$ *kaikilla* $t\in[0,1]$.

Todistus. Kiinnitetään $j \in \mathbb{N}$. Lasketaan

$$g'(t) = 2jt(1 - (1 - t^2)^{j-1}).$$

Näytetään, että $g'(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$. Koska $2jt \geq 0$, kun $t \geq 0$, niin riittää näyttää, että

$$1 - (1 - t^2)^{j-1} \geq 0 \qquad \text{kaikilla } t \in [0,1].$$

Kun $t \in [0,1]$, niin $t^2 \in [0,1]$, $1 - t^2 \in [0,1]$ ja $(1 - t^2)^{j-1} \in [0,1]$. Tällöin

$$1 - (1 - t^2)^{j-1} \geq 0 \qquad \text{kaikilla } t \in [0,1].$$

Koska $g'(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$, niin g on kasvava kyseisellä välillä. Lisäksi koska $g(0) = 0$, niin $g(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$. □

Etsitään seuraavaksi funktioita ψ_j, jotka toteuttavat Lemman 5.1 ehdot (1)–(3) ja joita vastaavat funktiot f_j ovat polynomeja.

Lemma 5.3. *Määritellään funktiot $\psi_j : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\psi_j(t) = k_j(1-t^2)^j$, missä vakio $k_j > 0$ on valittu siten, että $\int_{-1}^{1} \psi_j(t)dt = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin funktiot ψ_j toteuttavat Lemmassa 5.1 mainitut ominaisuudet (1)–(3).*

Todistus. Ominaisuudet (1) ja (2) seuraavat suoraan määritelmästä. Ominaisuuden (3) todistamiseksi arvioidaan vakiota k_j. Lemman 5.2 nojalla $(1-t^2)^j \geq 1-jt^2$, kun $0 \leq t \leq 1$ ja $j \in \mathbb{N}$. Käyttämällä tätä arviota saadaan

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^j dt = 2 \cdot \int_{0}^{1}(1-t^2)^j dt \geq 2 \cdot \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{j}}}(1-t^2)^j dt \geq 2 \cdot \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{j}}}(1-jt^2)dt.$$

Lasketaan

$$2 \cdot \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{j}}}(1-jt^2)dt = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{j}} - \frac{j}{3}\frac{1}{(\sqrt{j})^3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{j}} - \frac{1}{3\sqrt{j}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{j}} > \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

Siis

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^j dt > \frac{1}{\sqrt{j}}. \tag{5.2}$$

Koska $\int_{-1}^{1} k_j(1-t^2)^j dt = 1$ ja $k_j > 0$ vakio, niin

$$k_j = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^j dt}.$$

Soveltamalla tätä esitystä luvulle k_j sekä epäyhtälöä (5.2) saadaan $k_j < \sqrt{j}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

Kiinnitetään $\delta > 0$ ja oletetaan, että $\delta \leq |t| \leq 1$. Nyt

$$\psi_j(t) \leq k_j(1-\delta^2)^j \leq \sqrt{j}(1-\delta^2)^j.$$

Koska $\sqrt{j}\alpha^j = \alpha^{\log_\alpha \sqrt{j} + j} = \alpha^{\frac{1}{2}\log_\alpha j + j} \xrightarrow{j \to \infty} 0$, kun $\alpha \in \,]0,1[$, niin

$$\sqrt{j}(1-\delta^2)^j \xrightarrow{j \to \infty} 0. \tag{5.3}$$

Arvioidaan vielä integraalia ominaisuuden (3) toteamiseksi. Positiivisuuden nojalla

$$0 \leq \int_{\delta \leq |t| \leq 1} \psi_j(t)dt.$$

Lisäksi $\psi_j(t) \leq \sqrt{j}(1-\delta^2)^j$, kun $\delta \leq |t| \leq 1$, joten kohdan (5.3) nojalla

$$0 \leq \int_{\delta \leq |t| \leq 1} \psi_j(t)dt \leq \sqrt{j}(1-\delta^2)^j \int_{\delta \leq |t| \leq 1} 1dt \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Tästä seuraa ominaisuus (3), eli että

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\delta \leq |t| \leq 1} \psi_j(t)dt = 0.$$

□

Todistetaan seuraavaksi Weierstrassin approksimaatiolause edellä todistettujen aputulosten avulla. Todistus on lainattu Krantzin kirjasta [**6**, ss. 210–214]

Lause 5.4. *Olkoon f jatkuva funktio välillä $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa polynomijono $(p_j)_{j=0}^{\infty}$, joka supenee tasaisesti kohti funktiota f välillä $[0,1]$. Lisäksi jos $f(0) = 0 = f(1)$, niin kullakin $j \in \mathbb{N}$ polynomi p_j on muotoa*

$$p_j(x) = \sum_{m=0}^{2j} c_{j,m,f}x^m, \qquad x \in [0,1],$$

missä

$$c_{j,m,f} = \int_0^1 a_{j,m}(t)f(t)dt \qquad \textit{jokaisella } j \in \mathbb{N} \textit{ ja } m \in \{0,\dots,2j\}.$$

Tässä jatkuvat funktiot $a_{j,m} : [0,1] \to \mathbb{R}$ eivät riipu funktiosta f.

Todistus. Voidaan olettaa yleispätevyyttä menettämättä, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(x) = 0$, jos $x \in \mathbb{R}\setminus]0,1[$. Sillä jos f ei ole valmiiksi kyseistä muotoa, niin voidaan sitä muokata alla esitetyllä tavalla. Olkoon

$$g(x) = f(x) - Q(x), \qquad \text{missä } Q(x) = x(f(1) - f(0)) + f(0).$$

Tällöin $g(0) = 0$ ja $g(1) = 0$. Asetetaan $g(x) = 0$, jos $x < 0$ tai $x > 1$. Näin muodostuu jatkuva funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = 0$ kun $x \in \mathbb{R}\setminus]0,1[$. Koska alla osoitettava Weierstrassin lause pätee funktiolle g, kaikilla $j \in \mathbb{N}$ on olemassa polynomi P_j siten, että $||g - P_j||_\infty < \frac{1}{j}$, missä sup-normi otetaan välin $[0,1]$ suhteen. Koska $g = f - Q$, niin

$$||f - Q - P_j||_\infty < \frac{1}{j}.$$

Koska $Q + P_j$ on polynomi, Weierstrassin lause pätee myös alkuperäiselle funktiolle f eli kaikilla $j \in \mathbb{N}$ on olemassa polynomi $p_j = Q + P_j$ siten, että $||f - p_j||_\infty < \frac{1}{j}$. Olkoon $\psi_j(t) = k_j(1-t^2)^j$ kuten Lemmassa 5.3 ja

$$f_j(x) = \int_{-1}^{1} \psi_j(t)f(x-t)dt$$

kuten Lemmassa 5.1 kullakin $j \in \mathbb{N}$. Tiedetään, että f_j suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä [0, 1], kun $j \to \infty$. Näin ollen riittää todistaa, että kaikki funktiot f_j ovat polynomeja välillä [0, 1]. Kiinnitetään $j \in \mathbb{N}$ ja $x \in [0,1]$. Tehdään seuraavaksi muuttujanvaihto $y = x - t$, jolloin $dt = -dy$ ja integrointirajat muuttuvat $t = 1 \Rightarrow y = x - 1$ ja $t = -1 \Rightarrow y = x + 1$. Tällöin

$$f_j(x) = -\int_{x+1}^{x-1} \psi_j(x-y)f(y)dy = \int_{x-1}^{x+1} \psi_j(x-y)f(y)dy.$$

Koska $f(y) = 0$, kun $y \in [x-1, x+1] \setminus]0,1[$ ja $]0,1[\subset [x-1, x+1]$, niin pätee

$$\int_{x-1}^{x+1} \psi_j(x-y)f(y)dy = \int_0^1 \psi_j(x-y)f(y)dy.$$

Merkitään jatkossa $y = t$. Yllä olevasta laskusta seuraa, että

$$f_j(x) = \int_0^1 \psi_j(x-t)f(t)dt.$$

Tässä kaikilla $t \in [0,1]$ pätee

$$\psi_j(x-t) = k_j(1-(x-t)^2)^j = k_j(1 - x^2 + 2xt - t^2)^j.$$

Kertomalla lauseke auki ja yhdistelemällä termit x:n potenssien suhteen saadaan

$$\psi_j(x-t) = \sum_{m=0}^{2j} x^m a_{j,m}(t),$$

missä jatkuvat funktiot $a_{j,m}$ eivät riipu luvusta x. Sijoitetaan saatu esitys funktion f_j lausekkeeseen

$$f_j(x) = \int_0^1 \left(\sum_{m=0}^{2j} x^m a_{j,m}(t) \right) f(t)dt = \sum_{m=0}^{2j} x^m \int_0^1 a_{j,m}(t)f(t)dt = \sum_{m=0}^{2j} c_{j,m,f}x^m,$$

missä reaaliluvut $c_{j,m,f}$ eivät riipu luvusta x. Tästä seuraa, että funktio f_j on polynomi välillä $[0,1]$. Voidaan siis valita $p_j = f_j$ kullakin $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Apostol, Tom M.: *Calculus.* Volume 1, One-variable calculus, with an introduction to linear algebra, Wiley, 1967.

[2] Arfken, George: *Mathematical methods for physicists.* Fourth edition. Academic Press, New York, 1968.

[3] Haase, Markus: *Functional analysis. An elementary introduction*, Graduate Studies in Mathematics, 156. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[4] Hammond, Christopher N. B.: The Case for Raabe's test. *arXiv:1801.07584v1 [math.HO],* 2018.

[5] Kilpeläinen, Tero: *Analyysi 1*, luentomuistiinpanot, 2014.

[6] Krantz, Steven G.: *Real Analysis and Foundations.* CRC Press 1991.

[7] Leoni, Giovanni: *A first course in Sobolev spaces.* Graduate Studies in Mathematics, 105. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[8] Pinkus, Allan: Weierstrass and Approximation Theory. *Journal of Approximation Theory, Vol 107.* Academic Press, 2000.

[9] Saarimäki, Mikko: *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa*, luentomoniste 65, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2011.

[10] Stromberg, Karl R.: *An Introduction to Classical Real Analysis.* AMS Chelsea Publishing, Vol 376, 2015.

[11] Thomson, Brian S., Bruckner, Judith B., Bruckner, Andrew M.,: *Elementary Real Analysis.* Second Edition, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.

[12] Tuominen, Heli: *Analyysi 3*, luentomuistiinpanot, 2012.