Pituusavaruudet ja geodeesiset avaruudet

Janne Järvinen

Sivuainetutkielma

Lokakuu 2018

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee polkujen pituuksia metrisissä avaruuksissa, ja polun pituuteen liittyviä käsitteitä pituusavaruus ja geodeesinen avaruus.
Työn alussa määritellään muutamia keskeisiä käsitteitä, sellaisia joita tarvitaan edempänä. Näistä työn kannalta erityisen oleellinen on polku metrisessä avaruudessa.
Kolmannessa luvussa määritellään polun pituus. Polkua approksimoidaan tiheäjakoisilla murtoviivoilla ja pituudeksi määritellään niiden supremum. Sikäli kun polun pituus on äärellinen, mitä se ei suinkaan aina ole, sanotaan polun olevan suoristuva. Kolmannessa luvussa esitetään useita polun pituuteen liittyviä lauseita, joista osaa tarvitaan työn päätuloksen, ns. Hopfin ja Rinowin lauseen, todistuksessa luvussa neljä.
Polun parametria voi vaihtaa, johon liittyen esitetään muutamia tuloksia. Erikoistapauksena parametrin vaihdosta on polun parametrisointi omalla pituudellaan, siten että parametri on aina yhtä polun siihenastisen pituuden kanssa.
Edelleen kolmannessa luvussa määritellään pituusavaruuden käsite. Avaruus, jossa kaikkien kahden pisteen välisten polkujen pituuksien infimum on sama kuin pisteiden välinen etäisyys, on pituusavaruus. Pituusavaruudelle annetaan täsmällinen määritelmä ja esitetään esimerkkejä paitsi avaruuksista jotka ovat pituusavaruuksia, niin myös sellaisista, jotka eivät ole.
Neljäs luku käsittelee geodeesisyyttä. Polku on geodeesinen, jos sen pituus on sama kuin sen päätepisteiden välinen etäisyys. Jos kaikki avaruuden pisteet voidaan yhdistää toisiinsa pisteiden etäisyyden pituisella polulla, sanotaan avaruutta geodeesiseksi. Kaikissa avaruuksissa tällaista polkua ei ole lainkaan, joskus niitä on yksi ja joskus useita. Esimerkiksi pallon pinnalla pohjoisnavalta on etelänavalle äärettömän monta lyhintä reittiä. Työn päätulos liittyy avaruuden geodeesisyyteen.
Hopfin ja Rinowin lauseen todistuksen pohjustukseksi esitellään yhtäjatkuviin funktiojonoihin liittyvä ns. Arzelàn ja Ascolin lause. Tämän avulla päästään todistamaan itse Hopfin ja Rinowin lause: lokaalisti kompaktissa täydellisessä pituusavaruudessa kaikki suljetut ja rajoitetut joukot ovat

kompakteja, lisäksi mainituin ehdoin varustettu avaruus on geodeesinen.
Tutkielman kaksi tärkeintä lähdettä ovat Bridson ja Haefliger: *Metric spaces of non-positive curvature* [1] ja Papadopoulos: *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature* [8]. Päälauseen todistuksessa on käytetty näiden lisäksi kahta verkosta löytynyttä kurssimateriaalia, kirjoittajina Holopainen ja Lang.
Perusasioissa ja suomenkielisessä terminologiassa on tukeuduttu oppikirjoihin Jussi Väisälä: *Topologia I* [11] ja *Topologia II* [12]. Sikäli kun englanninkielisille termeille ei löytynyt helposti suomennosta, aiheutti niiden kääntäminen jonkin verran miettimistä. Topologian oppikirjojen lisäksi aiheesta ei juurikaan löytynyt suomenkielistä kirjallisuutta. Geodeesisyyteen liittyvä vanha kirjallisuus oli jo ikänsä puolesta mielenkiintoista. Erityisesti Cohn-Vossenin teos [3], jossa Hopfin ja Rinowin lause esiintyy ilmeisesti ensimmäisen kerran nykymuodossaan. Tämä herättää ajatuksen, josko lauseen tulisi kantaa myös hänen nimeään?

2 Metrinen avaruus ja polku metrisessä avaruudessa

Olkoon X joukko.

Määritelmä 2.1 (Metriikka ja metrinen avaruus)**.** Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ on *metriikka*, jos kaikilla $x, y, z \in X$

1) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,

2) $d(x, y) = d(y, x)$ ja

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Pari (X, d) on *metrinen avaruus.*

Jos avaruus $\mathbb{R}^n$ varustetaan "tavallisella" euklidisella metriikalla, voidaan siitä käyttää merkintää $\mathbb{E}^n$.

Määritelmä 2.2 (Täydellinen metrinen avaruus)**.** Metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen* jos kaikki sen Cauchyn jonot suppenevat.

Määritelmä 2.3 (Kompaktius)**.** Metrinen avaruus on *kompakti*, jos sen kaikilla jonoilla on suppeneva osajono.

Määritelmä 2.4 (Lokaali kompaktius)**.** Metrinen avaruus on *lokaalisti kompakti*, jos sen kaikilla pisteillä on jokin ympäristö U, siten että $\overline{U}$ on kompakti.

Esimerkki 2.5. Kompakti avaruus on aina myös lokaalisti kompakti.

Esimerkki 2.6. $\mathbb{R}^n$ on lokaalisti kompakti, koska kaikki suljetut pallot $\overline{B}(x, r)$ ovat kompakteja.

Esimerkki 2.7. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ (varustettuna euklidisella metriikalla) ei ole lokaalisti kompakti, koska sekä $\mathbb{Q}$ että $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ovat tiheitä $\mathbb{R}$:ssä. Jokaisessa $\mathbb{Q}$:n suljetussa pallossa on rationaalilukujen jonoja, jotka suppenevat kohti irrationaalilukua.

Määritelmä 2.8 (Siisti metrinen avaruus)**.** Metrinen avaruus on *siisti*[1], jos sen kaikki suljetut pallot ovat kompakteja.

Jos kaikki metrisen avaruuden suljetut pallot ovat kompakteja, niin myös sen kaikki suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja, koska ne sisältyvät riittävän suureen suljettuun palloon. Jos taas kaikki metrisen avaruuden suljetut joukot ovat kompakteja, niin luonnollisesti kaikki suljetut pallot ovat kompakteja.

Seuraus 2.9. Metrinen avaruus on siisti jos ja vain jos sen kaikki suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja.

Esimerkki 2.10. Euklidiset avaruudet ovat paitsi lokaalisti kompakteja, niin myös siistejä.[2]

Määritelmä 2.11 (Polku)**.** Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \leq b$. Jatkuva kuvaus

$$\gamma : [a, b] \to X$$

on *polku*, jonka *päätepisteet* ovat avaruuden X pisteet x ja y, siten että $\gamma(a) = x$ ja $\gamma(b) = y$. Polku γ *yhdistää* pisteet x ja y.

Määritelmä 2.12 (Käänteispolku)**.** Polulle γ voidaan määritellä *käänteinen polku* $\overline{\gamma} : [a, b] \to X$

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t).$$

Määritelmä 2.13 (Janapolku)**.** Olkoon E normiavaruus ja $x, y \in E$. Polku $\gamma : [0, 1] \to E$

$$\gamma(t) = (1 - t)x + ty$$

on *janapolku* ja sen kuvajoukko $\gamma([0, 1])$ on *jana*.

[1] engl. proper

[2] Euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. (Heinen ja Borelin lause)

3 Polun pituus ja pituusavaruudet

Kun ajatellaan helppona esimerkkinä kaarevan polun pituutta euklidisessa tasossa, on varsin intuitiivista lähestyä asiaa mahdollisimman tiheäjakoisen murtoviivan kautta. Sama ajatus toimii muissakin metrisissä avaruuksissa.

3.1 Polun pituus

Määritellään polun pituus siten, kun Papadopoulos sen määrittelee [8].

Välille $[a, b]$ voidaan tehdä *jako*. Kutsutaan jakoa nimellä σ, jossa σ on välin $[a, b]$ osaväli, sisältäen välin päätepisteet a ja b. Siis

$$\sigma = (t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n(\sigma)-1} < t_{n(\sigma)}),$$

missä $a = t_0$ ja $b = t_{n(\sigma)}$.

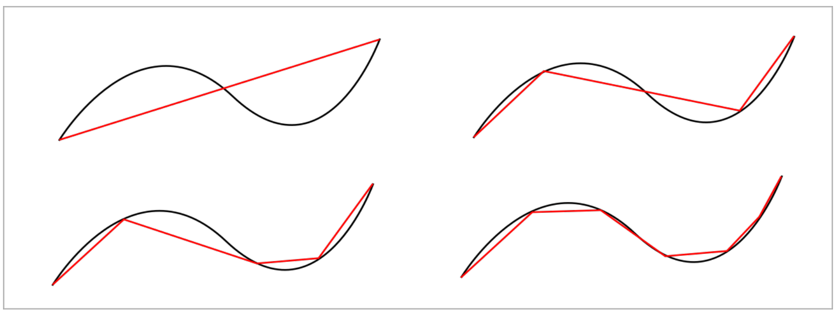
Jaon pituus on $\#(\sigma)$ ja joukon σ alkioita kutsutaan jaon jakopisteiksi.

Määritellään seuraavaksi polun γ pituus käyttäen apuna polun lähtöjoukolle $[a, b]$ tehtyä jakoa σ.

Määritelmä 3.1 (Polun pituus)**.** Polun $\gamma : [a, b] \to X$ pituus on

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

jossa supremum otetaan kaikkien välin $[a, b]$ jakojen yli.



Kuva 1: murtoviiva-approksimaatioita polun pituudelle esimerkkijaoilla, joiden pituudet $2, 4, 5$ ja 7

Jako voi olla mielivaltaisen tiheä, erityisesti väli voidaan jakaa niin, että jakopisteiden määrä lähestyy ääretöntä.
Jos $L(\gamma)$ on äärellinen, sanotaan että polku on *suoristuva.*

Määritelmä 3.2 (Kokonaisvariaatio)**.** Polun $\gamma : [a,b] \to X$ *kokonaisvariaatio*[3] välin $[a,b]$ jaolla σ on

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Seuraus 3.3. Polun $\gamma : [a,b] \to X$ pituus voidaan esittää kokonaisvariaation avulla ottamalla supremum yli erilaisten välin $[a,b]$ jakojen σ

$$L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma).$$

Lause 3.4. Jos γ on jatkuva ja derivoituva välillä $[a,b]$, niin tällöin

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Todistus sivuutetaan, saatavilla esim. oppikirjassa Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, s. 137 [10].

Esimerkki 3.5. Reaaliarvoisten funktioiden kuvaajien kaarenpituuksia määritettäessä voidaan käyttää Riemannin integraalia. Määritellään jatkuvan ja derivoituvan funktion f kuvaajan kaari S välillä $[a,b]$ seuraavasti:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \in [a,b], y = f(x)\}.$$

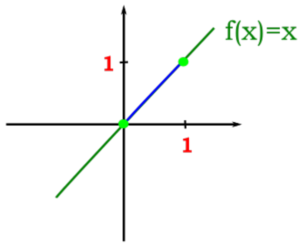
Kun oletetaan funktio $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$ Riemann-integroituvaksi, niin kaaren S pituus $L(S)$ on

$$L(S) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Esimerkkilaskuna, jos $f(x) = x$ ja $[a,b] = [0,1]$, niin $f'(x) = 1$ ja

$$L(S) = \int_0^1 \sqrt{1 + 1^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}.$$

[3]engl. *total variation*, Papadopoulos s.11 [8]



Kuva 2: kaaren pituus funktiolle $f(x) = x$ välillä $[0, 1]$

Toisena esimerkkinä voidaan laskea r-säteisen ympyrän kehän puolikas, jossa $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ja $[a, b] = [-r, r]$, jolloin

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Tällöin

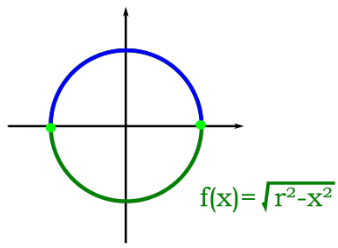
$$L(S) = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx.$$

Lasketaan sijoitusmenetelmällä valitsemalla $x = r\cos t$, jossa $t \in [0, \pi]$. Välin $[-r, r]$ päätepisteiksi saadaan

$$\begin{aligned} x &= -r & x &= r \\ r\cos t &= -r & r\cos t &= r \\ \cos t &= -1 & \cos t &= 1 \\ t &= \pi, & t &= 0. \end{aligned}$$

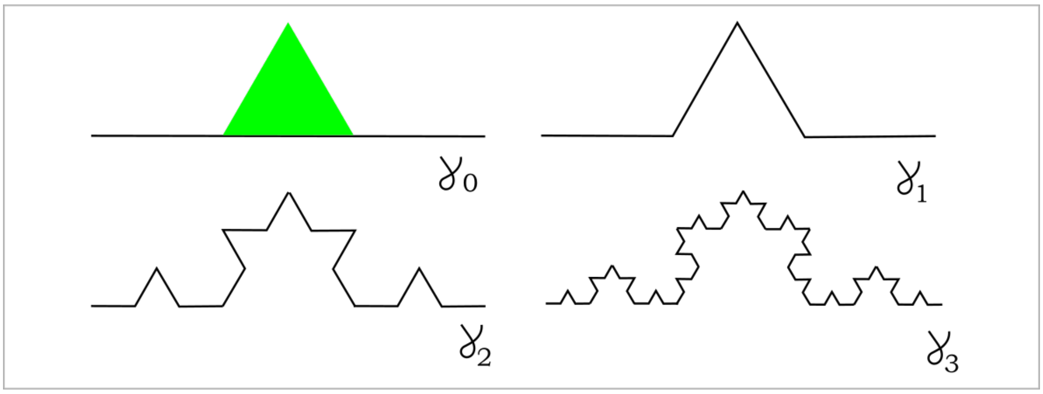
Lisäksi $dx = -r \sin t\, dt$. Siis

$$\begin{aligned} L(S) &= \int_{\pi}^{0} \frac{r}{\sqrt{r^2 - (r\cos t)^2}}(-r \sin t\, dt) \\ &= \int_{\pi}^{0} \frac{r}{\sqrt{r^2(1-\cos^2 t)}}(-r \sin t\, dt) \\ &= \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}(-r \sin t\, dt) \\ &= \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sin t}(-r \sin t\, dt) \\ &= \int_{\pi}^{0} -r\, dt = -r \cdot 0 - (-r \cdot \pi) = \pi r. \end{aligned}$$



Kuva 3: r-säteisen ympyrän kehän puolikas

Esimerkki 3.6. Kochin käyränä tunnettu fraktaali on esimerkki suoristumattomasta polusta. Polku konstruoidaan siten, että janan $[0,1]$ (jäljempänä iteraatio γ_0) päälle ajatellaan tasasivuinen kolmio, siten että kolmion kanta ja janan keskimmäinen kolmannes yhtyvät. Janan keskimmäinen kolmannes poistetaan ja tilalle tulee kolmion kylkien mukaiset (ja siis janan kolmanneksen pituiset) uudet janat (jäljempänä polku γ_1).
Saaduille janoille toistetaan tätä. Jokainen jana siis korvataan murtoviivalla, jonka pituus on aina $\frac{4}{3}$ siitä janasta, jonka tilalle kyseinen murtoviiva tulee. Annetaan seuraavassa täsmällinen määrittely konstruktiolle:



Kuva 4: Kochin käyrän neljä ensimmäistä iteraatiota

Polut $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ovat polun γ murtoviiva-approksimaatioita, joiden induktiivinen määrittely tapahtuu seuraavasti: polku $\gamma_0(t) = (t, 0)$ kaikilla $t \in [0,1]$. Polku γ_n saadaan tekemällä välille $[0,1]$ jako

$$\sigma_n = \{i/4^n, i = 0, 1, \ldots, 4^n\}.$$

Polut γ_n muodostavat jonon, joka suppenee tasaisesti kohti polkua γ. Polun γ pituuden, joka on siis kaikkien murtoviiva-approksimaatioiden supremum, osoitetaan olevan ääretön.

Tihenevillä jaoilla muodostuvien polkujen pituudet ovat

$$\begin{aligned} L(\gamma_0) &= 1 \\ L(\gamma_1) &= \tfrac{4}{3} \\ L(\gamma_2) &= (\tfrac{4}{3})^2 \\ &\vdots \\ L(\gamma_n) &= (\tfrac{4}{3})^n. \end{aligned}$$

Polkujen muodostaman jonon jokaisen jäsenen pituus on aina $\frac{4}{3}$ edellisen jäsenen pituudesta, siis $L(\gamma_{i+1}) = \frac{4}{3}L(\gamma_i)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Ja koska $L(\gamma_n) = (\frac{4}{3})^n$, niin

$$L(\gamma_n) \to \infty, \text{ kun } n \to \infty.$$

Tarkastellaan vielä polkua γ_k, $k \in \mathbb{N}$. Polku γ_k on siis murtoviiva-approksimaatio polusta γ. Jonon seuraava polku γ_{k+1} sisältää paitsi samat jakopisteet kuin γ_k, niin myös uuden iteraation $k+1$ lisäämät jakopisteet. γ_{k+1} siis on edellistä murtoviivaa γ (kolmasosan) pidempi. Siis $L(\gamma) = \infty$ ja täten Kochin käyrä ei ole suoristuva.

Esitetään seuraavassa muutamia polun pituuteen liittyviä lauseita.

Lause 3.7 (Polun pituuden alaraja)**.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\gamma : [a, b] \to X$ polku. Tällöin

$$L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Todistus. $d(\gamma(a), \gamma(b)$ on pisteiden $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$ välisen murtoviivan pituus, jos murtoviiva on muodostettu käyttäen välin jakoa $\{a, b\}$. Koska d on metriikka, pätee sillä kolmioepäyhtälö, joten jakopisteiden lisääntyessä aina $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$. □

Lause 3.8 (Vakiokuvaus)**.** Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku. $L(\gamma) = 0$ jos ja vain jos γ on vakiokuvaus.

Todistus. Oletetaan ensin, että γ on vakiokuvaus, siis on olemassa jokin $x_0 \in X$, siten että $\gamma(t) = x_0$ kaikilla $t \in [a, b]$. Tällöin polun pituuden määritelmän ja metriikan positiivisuuden nojalla

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d(x_0, x_0) = 0.$$

Oletetaan, että $L(\gamma) = 0$. Olkoon t piste välillä $]a, b[$. Tehdään välille $[a, b]$ jako $\sigma = \{a, t, b\}$. Tällöin

$$V_\sigma(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(b)) \leq L(\gamma) = 0.$$

Koska d on metriikka, eikä siis voi saada negatiivisia arvoja, niin nyt $d(\gamma(a), \gamma(t)) = 0$ ja $d(\gamma(t), \gamma(b)) = 0$. Siis $\gamma(a) = \gamma(t) = \gamma(b)$ kaikilla $t \in]a, b[$. Siis γ on vakiokuvaus. □

Merkintä 3.9. Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku ja $t \in [a, b]$. Polun γ rajoittumaa $\gamma' : [a, t] \to X$ merkitään $\gamma|_{[a,t]}$.

Seuraava lause on varsin triviaalin oloinen. Lauseen tulosta kuitenkin tarvitaan jäljempänä, joten esitetään lause tässä:

Lause 3.10 (Additiivisuus)**.** Olkoon $\gamma : [a,b] \to X$ polku ja $t \in [a,b]$. Kaikilla t

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,t]}) + L(\gamma|_{[t,b]}).$$

Vaikka lauseen tulos vaikuttaa itsestäänselvältä, todistus on vaadittavine sivutuloksineen pitkä, sivuutetaan.[4]

Lause 3.11 (Pituuden kertymäfunktion jatkuvuus ja monotonisuus)**.** Olkoon $\gamma : [a,b] \to X$ suoristuva polku, sen pituus $L(\gamma) = l$ ja $t \in [a,b]$. Funktio $\lambda : [a,b] \to [0,l]$

$$\lambda(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$$

on jatkuva ja monotoninen.

Todistus. Funktion λ monotonisuus seuraa lauseesta 3.10. Jatkuvuuden todistamiseksi on osoitettava, että kaikilla $\varepsilon < 0$ väli $[a,b]$ voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin, siten että polun γ rajoittuman pituus kullakin osavälillä on alle ε. Tämän osoittamiseksi käytetään kuvauksen $\gamma : [a,b] \to X$ tasaista jatkuvuutta ja valitaan $\delta > 0$, siten että $d(\gamma(t), \gamma(t')) < \varepsilon/2$ kaikilla $t, t' \in [a,b]$, kun $\mid t - t' \mid < \delta$.
Koska $L(\gamma)$ on äärellinen, väli $[a,b]$ voidaan jakaa sellaisella jaolla $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < b$, että

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) > L(\gamma) - \varepsilon/2. \tag{A}$$

Jako voidaan tehdä niin tiheästi, että $\mid t_i - t_{i+1} \mid < \delta$ kaikilla $i = 0, \ldots, k-1$, jolloin $d(\gamma(t_1), \gamma(t_{i+1})) < \varepsilon/2$ kaikilla i.
Lauseen 3.10 nojalla

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} L(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}). \tag{B}$$

Kaikilla osaväleillä

$$L(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) \geq d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})). \tag{C}$$

[4] todistus Papadopoulos s. 17 [8]

Yhdistämällä (A), (B) ja (C) saadaan

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} L(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) \geq \sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) > L(\gamma) - \varepsilon/2. \tag{D}$$

Jokainen yksittäinen termi ensimmäisessä summassa on suurempi tai yhtä suuri kuin "murtoviivavastineensa" toisessa summassa. Epäyhtälön (D) seurauksena millään osavälillä polun rajoittuma ei saa kuitenkaan olla "liikaa" pidempi kuin vastaava murtoviivan osan. Siis kaikilla i

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) - d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) &\leq \varepsilon/2 \\ L(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) &\leq \varepsilon/2 + d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\ L(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lause 3.12 (puolijatkuvuus alhaalta)**.** Olkoon (γ_n) jono polkuja, $\gamma_n : [a, b] \to X$, jotka suppenevat tasaisesti kohti polkua γ. Jos γ on suoristuva, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, siten että

$$L(\gamma) \leq L(\gamma_n) + \varepsilon$$

aina, kun $n > N_\varepsilon$.

Todistus. Välille $[a, b]$ tehdään sellainen jako $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < b$, että

$$L(\gamma) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon/2.$$

Valitaan N_ε niin suureksi, että $d(c(t), c_n(t)) < \varepsilon/4k$ kaikilla $n > N_\varepsilon$ ja kaikilla $t \in [a, b]$.
Kolmioepäyhtälöllä $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq 2\varepsilon/4k + d(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i+1}))$. Siis

$$L(\gamma) \leq k\frac{\varepsilon}{2k} + \sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i+1})) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon + L(\gamma_n).$$

□

Esimerkki 3.13. Olkoon $\gamma_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{n}\cos(n^2 t).$$

jono polkuja. Jono suppenee kohti vakiopolkua $\gamma(t) = 0$, jonka pituus on 0. Osoitetaan, että $L(\gamma_n) \to \infty$, kun $n \to \infty$. Kun $t \in [0, \pi]$, niin $\cos(n^2 t)$ kulkee 1:n ja -1:n välillä n^2 kertaa. Tällöin siis

$$L(\gamma_n) \geq \frac{1}{n} 2n^2 = 2n.$$

Siis $L(\gamma_n) \to \infty$ ja täten $L(\gamma_n)$ ei lähesty pituutta $L(\gamma)$.

3.2 Parametrin vaihto

Polun parametrisointia voi muuttaa. Jäljempänä osoitetaan, että parametrin vaihto ei vaikuta polun pituuteen, olettaen että parametrin vaihto on tehty seuraavassa esitetyn mukaisesti monotonisella ja surjektivisella kuvauksella.

Määritelmä 3.14 (Parametrin vaihto)**.** Olkoot $\gamma : [a, b] \to X$ ja $\gamma' : [c, d] \to X$ polkuja. Jos on olemassa monotoninen surjektio $\psi : [c, d] \to [a, b]$, jolla pätee $\gamma' = \gamma \circ \psi$, kutsutaan kuvausta ψ *parametrin vaihdoksi.*

Lause 3.15 (Polun pituuden riippumattomuus parametrisoinnista)**.** Olkoot $\gamma : [a, b] \to X$ ja $\gamma' : [c, d] \to X$ polkuja, joille voidaan tehdä parametrin vaihto kuvauksella $\psi : [c, d] \to [a, b]$. Tällöin $L(\gamma) = L(\gamma')$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $L(\gamma') \geq L(\gamma)$. Jokaista välille $[a, b]$ tehtyä jakoa $\sigma = (t_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ kohden valitaan välin $[c, d]$ jako $\sigma' = (t'_i)_{i=0,1,\ldots,n}$, siten että kaikilla i voidaan valita piste $t'_i \in \psi^{-1}(t_i)$. Joukosta $\psi^{-1}(t_i)$ löytyy aina vähintään yksi mahdollinen t'_i, koska ψ on surjektio. Tällöin $V_{\sigma'}(\gamma') = V_\sigma(\gamma)$. Koska $L(\gamma')$ on polun pituuden määritelmän mukainen supremum yli kaikkien välin $[c, d]$ jakojen, niin $L(\gamma') \geq V_{\sigma'}(\gamma') = V_\sigma(\gamma)$.
Ottamalla supremum yli kaikkien välin $[a, b]$ jakojen, saadaan

$$L(\gamma') \geq \sup_\sigma V_\sigma(\gamma),$$

joten seurauksen 3.3 nojalla $L(\gamma') \geq L(\gamma)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $L(\gamma') \leq L(\gamma)$. Olkoon σ' välin $[c, d]$ jako. Tällöin $\psi(\sigma') = \sigma$ on välin $[a, b]$ jako. Koska ψ on monotoninen, niin $V_{\sigma'}(\gamma') = V_\sigma(\gamma)$.
Koska $L(\gamma)$ on supremum yli kaikkien välin $[a, b]$ jakojen, niin

$$L(\gamma) \geq V_\sigma(\gamma) = V_{\sigma'}(\gamma').$$

Kun nyt otetaan supremum yli kaikkien välin $[c, d]$ jakojen, niin saadaan $L(\gamma) \geq L(\gamma')$.
Siis $L(\gamma) = L(\gamma')$. □

Lause 3.16 (Käänteispolun pituus)**.** Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku ja $\overline{\gamma} : [a, b] \to X$ sen käänteispolku $\overline{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t)$. Tällöin $L(\overline{\gamma}) = L(\gamma)$.

Todistus. Valitaan määritelmän 3.14 ja lauseen 3.15 parametria vaihtavaksi kuvaukseksi monotoninen surjektio $\psi_0 : [a, b] \to [a, b]$

$$\psi_0(t) = b + a - t.$$

Tällöin lauseen 3.15 nojalla $L(\overline{\gamma}) = L(\gamma)$. □

3.2.1 Parametrisointi polun pituudella

Polun parametrisointia voidaan muuttaa niin, että parametri on yhtä polun siihenastisen pituuden kanssa. Parametria vaihdetaan siis siten, että suoristuvan polun $\gamma : [a, b] \to X$ määrittelyjoukon $[a, b]$ sijaan parametri saa arvoja joukosta $[0, L(\gamma)]$. Seuraavassa esitetään muutama tähän liittyvä lause sellaisina, kuin Papadopoulos [8] ne muotoilee.

Lause 3.17. Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ suoristuva polku. Kaikilla $u \in [0, L(\gamma)]$ on olemassa yksikäsitteinen $x \in X$ ja $t \in [a, b]$, joilla $x = \gamma(t)$ kun $u = L(\gamma|_{[a,t]})$. Jos mahdollisia pisteitä t on useita, on niiden muodostama joukko välin $[a, b]$ suljettu osaväli, jolla γ on vakiokuvaus.

Todistus. Lauseen 3.11 mukainen kuvaus $\lambda(t)$ on jatkuva, joten differentiaalilaskennan väliarvolaueen nojalla kaikkia u, $0 \leq u \leq L(\gamma)$, vastaa luku t,

jolla $u = L(\gamma|_{[a,t]})$.
Olkoot t ja $t' \in [a,b]$, $t \le t'$ ja

$$L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{[a,t']}).$$

Tällöin lauseen 3.10 nojalla

$$L(\gamma|_{[t,t']}) = L(\gamma|_{[a,t']}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = 0.$$

Nyt, koska polun pituus välillä $[t,t']$ on nolla, niin lauseen 3.8 mukaan γ on vakiokuvaus tällä välillä. Lisäksi lukujen t joukko on välin $[a,b]$ suljettu osaväli. $\square$

Lause 3.18. Olkoon $\gamma : [a,b] \to X$ suoristuva polku ja $\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to X$, $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(t)$ siten, että kaikilla t on yksikäsitteinen piste $\gamma(t) \in X$ toteuttaen yhtälön $u = L(\gamma|_{[a,t]})$. Kuvaus $\tilde{\gamma}$ on 1-Lipschitz (ja Lipschitz-kuvauksena siis jatkuva)[5], joten se on polku. Lisäksi polkujen γ ja $\tilde{\gamma}$ välillä voidaan tehdä parametrin vaihto kuvauksella $\psi : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$, $\psi(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$.

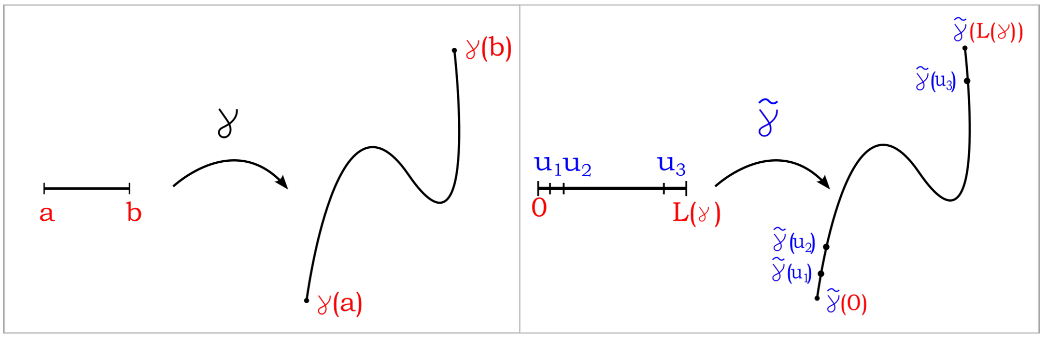
Todistus. Olkoot u ja $u' \in [0, L(\gamma)]$, $u \le u'$ sekä t ja $t' \in [a,b]$, joilla $L(\gamma|_{[a,t]}) = u$ ja $L(\gamma|_{[a,t']}) = u'$. Tällöin $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(t)$ ja $\tilde{\gamma}(u') = \gamma(t')$.
Lauseen 3.7 (polun pituuden alaraja) avulla

$$d(\tilde{\gamma}(u), \tilde{\gamma}(u')) = d(\gamma(t), \gamma(t')) \le L(\gamma|_{[t,t']}) = d(u,u').$$

Siis kuvaus $\tilde{\gamma}$ on 1-Lipschitz.
Kuvaus ψ on kasvava ja surjektio. Lauseen 3.17 mukaisen pisteen yksikäsitteisyyden avulla voidaan tehdä parametrin vaihto $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \psi$. $\square$

Lause 3.19. Olkoon $\gamma : [a,b] \to X$ suoristuva polku ja $\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to X$ kuten edellä. Kaikilla $u \in [0, L(\gamma)]$ pätee $u = L(\tilde{\gamma}|_{[a,u]})$.

[5] Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia ja $x_1, x_2 \in X$. Kuvaus $f : X \to Y$ on *M-Lipschitz*, jos on olemassa luku $M \ge 0$ siten, että $d'(f(x_1), f(x_2)) \le Md(x_1,x_2)$ kaikilla x_1, x_2.
Lipschitz-kuvaus on aina jatkuva.



Kuva 5: polun pituudella parametrisointi

Todistus. Olkoot $u \in [0, L(\gamma)]$ ja $t \in [a, b]$ siten, että $L(\gamma|_{[a,t]}) = u$.
Polku $\gamma|_{[a,t]}$ saadaan polusta $\tilde{\gamma}|_{[0,u]}$ parametrin vaihdolla

$$\gamma|_{[a,t]} = \tilde{\gamma}|_{[0,u]} \circ \psi,$$

jossa $\psi : [0, t] \to [0, u]$.
Koska polun pituus on riippumaton paramterisoinnista (Lause 3.15), niin $L(\tilde{\gamma}|_{[a,u]}) = u$. □

Lauseet 3.17, 3.18 ja 3.19 antavat aihetta seuraavaan määritelmään:

Määritelmä 3.20. Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ suoristuva polku ja kaikilla $u, v \in [a, b]$, $u \leq v$ pätee $v - u = L(\gamma|_{[u,v]})$. Tällöin γ on *parametrisoitu polun pituudella.*

Erityisesti pituudellaan parametrisoidulla polulla $\gamma : [a, b] \to X$ pätee $L(\gamma) = b - a$.

Määritelmä 3.21. Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku, $a < b$. Polku γ on *parametrisoitu suhteessa omaan pituuteensa*, jos se joko on vakiopolku tai on olemassa omalla pituudellaan parametrisoitu polku $\gamma' : [c, d] \to X$ siten, että $\gamma = \gamma' \circ \psi$, missä $\psi : [a, b] \to [c, d]$ on yksikäsitteinen affiini homeoformismi

$$\psi(x) = \frac{(d - c)x + (bc - ad)}{b - a}.$$

3.3 Pituusavaruus

Määritelmä 3.22 (Pituusmetriikka ja pituusavaruus)**.** Metrinen avaruus X on *pituusavaruus*, jos kaikilla $x, y \in X$

$$d(x,y) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

jossa infimum otetaan kaikkien sellaisten polkujen yli, jotka yhdistävät avaruuden pisteet x ja y. Pituusavaruuden metriikkaa kutsutaan *pituusmetriikaksi*. ([8], s. 35)

Gromov [5] kutsuu pituusavaruuksia nimellä *polkumetrinen avaruus*.[6] Pituusmetriikkaa voidaan kutsua myös jonkin avaruuden *luontaiseksi metriikaksi*.[7]. Esimerkki 3.28 havainnollistaa asiaa: kun avaruutena on pallopinta ja tutkitaan kahden pisteen välistä etäisyyttä, on varsin luontaista käyttää etäisyytenä lyhintä pisteiden välistä polkua pallon pinnalla.

Esimerkki 3.23. Avaruudet $\mathbb{E}^n$ ovat pituusavaruuksia, koska mitkä tahansa kaksi avaruuden pistettä x ja y voidaan yhdistää euklidisella janapolulla, jonka pituus on sama kuin pisteiden välinen euklidinen etäisyys $||x - y||$.
Lasketaan janapolun $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}^n$, $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ pituus.
Kaikilla t_1 ja t_2, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ pätee

$$\begin{aligned}
d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) &= ||\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|| \\
&= ||(1-t_1)x + t_1 y - (1-t_2)x - t_2 y|| \\
&= ||(1 - t_1 - 1 + t_2)x + (t_1 - t_2)y|| \\
&= ||(t_2 - t_1)x + (t_1 - t_2)y|| \\
&= ||(t_2 - t_1)x - (t_2 - t_1)y|| \\
&= (t_2 - t_1)||x - y||.
\end{aligned}$$

Polun määritelmän mukainen pituus, kun supremum otetaan yli kaikkien eri välin $[0,1]$ jakojen $\sigma = (t_0 < \cdots < t_n)$, $t_0 = 0$ ja $t_n = 1$ saadaan edelläolevan

[6] engl. *path metric space*. Muita synonyymejä pituusavaruudelle *inner metric space* ja *intrinsic space*. Vastaavasti pituusmetriikka voi olla *length metric* tai *intrinsic metric*.[4]

[7] engl. *intrinsic* [4].

laskun nojalla seuraavasti:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\ &= \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)||x-y|| \\ &= \sup_{\sigma}\ (t_n - t_0)||x-y|| \\ &= \sup_{\sigma}\ (1-0)||x-y|| \\ &= ||x-y||. \end{aligned}$$

Janapolulle tehdyn murtoviiva-approksimaation pituus on siis riippumaton tehdystä tehdystä jaosta σ. Miten ikinä jaon tekeekään, murtoviivan pituus on sama kuin pisteiden x ja y välinen etäisyys.

Esimerkki 3.24. Määritellään normi $\|x\|_p$ vektorille $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$ seuraavasti:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Täten normi $\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)$. Näin määriteltynä normi $\|x\|_2$ on "tavallinen" euklidinen normi. Lisäksi määritellään tapaus $p = \infty$

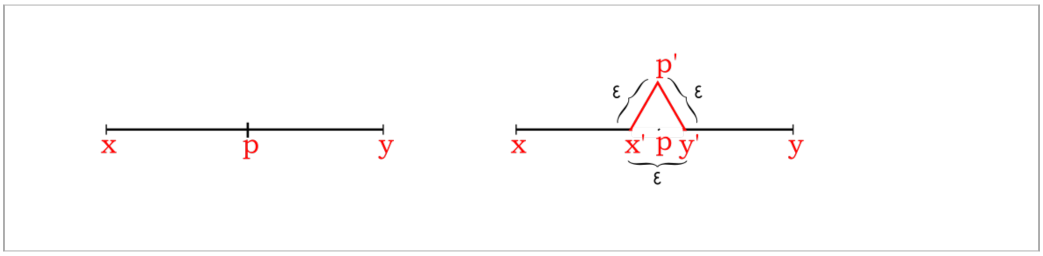
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Edellämainitut normit antavat vastaavat pituusmetriikat d_1, d_2 (euklidinen metriikka) ja d_∞.[8]
Esimerkki 3.23 pätee kaikissa normiavaruuksissa.

Esimerkki 3.25. Jos tasosta $\mathbb{E}^2$ poistetaan piste, on se edelleen pituusavaruus. Esimerkiksi "reiällisessä tasossa"' $\mathbb{E}^2 \setminus (0,0)$ pisteiden $(-1,0)$ ja $(1,0)$ välinen etäisyys on tasan 2. Ei kuitenkaan ole olemassa sen pituista polkua näiden kahden pisteen välillä. Kuitenkin erilaisten pisteitä $(-1,0)$ ja $(1,0)$

[8] d_1 metriikalle on olemassa useita sitä hyvin kuvaavia nimityksiä: *taxicab metric, Manhattan metric, rectilinear metric* ja *right-angle metric.* [4]

yhdistävien polkujen pituuksien infimum on 2.
Seuraavassa esimerkki yhdenlaisesta polusta, jolla voidaan kiertää poistettu piste.[9] Poistettava piste p sijaitsee janalla $[x, y]$. Rakennetaan polut $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}^n$ siten, että ne kulkevat pisteiden x', p' ja y' kautta, $\gamma(0) = x$ ja $\gamma(1) = y$.



Kuva 6: tasosta poistettu piste kierretään

Polun γ pituus on

$$L(\gamma) = d(x, x') + d(x', p') + d(p', y') + d(y', y) = d(x, x') + 2\varepsilon + d(y', y).$$

Lisäksi $d(x', y') = \varepsilon$.
Tällöin

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma).$$

Yleisemmin, jos avaruudesta $\mathbb{E}^n, n \geq 2$ poistetaan äärellinen määrä pisteitä, on se edelleen pituusavaruus. Edellä esitetty pisteiden kiertäminen toimii useammankin pisteen tapauksessa.

Esimerkki 3.26. Jos tasosta $\mathbb{E}^2$ poistetaan jana, se ei ole pituusavaruus. Tasossa $\mathbb{E}^2$ kahden pisteen välinen lyhin polku on niiden välinen janapolku. Jos tasosta poistetaan jana $[i, j]$, niin pituusavaruuden määritelmä ei täyty sellaisten pisteiden $x, y \in \mathbb{E}^2 \setminus [i, j]$ osalta, joita yhdistävä euklidinen jana risteäisi janaa $[i, j]$.
Polkujen pituuksien infimum on joko $d(x, i) + d(i, y)$ tai $d(x, j) + d(j, y)$, kumpikin kuitenkin kolmioepäyhtälön nojalla pidempiä kuin $d(x, y)$.

[9]Tämä vain yksi esimerkki, poistettu piste voidaan kiertää äärettömän monella tavalla, niin että saadaan haluttu tulos.

Kuva 7: tasosta poistettu jana

Yleisemmin, avaruus $\mathbb{E}^n$, josta on poistettu jokin palloympäristö, ei ole pituusavaruus.

Esimerkki 3.27. Yksikköympyrä $\mathbb{E}^2$:ssa ei ole pituusavaruus. Esimerkiksi pisteiden $(1,0)$ ja $(0,1)$ välinen etäisyys $d((1,0),(0,1)) = \sqrt{2}$. Lyhin niitä yhdistävä polku on ympyrän kehän neljännes, jolloin $\inf_\gamma L(\gamma) = \pi/2$. Siis $d(x,y) \neq \inf_\gamma L(\gamma)$. Yleisemmin, pallopinnat S^{n-1}, joissa metriikkana $\mathbb{E}^n$:n indusoima metriikka, eivät ole pituusavaruuksia.

Esimerkki 3.28. Varustetaan $\mathbb{R}^2$:n yksikköympyrä (S^2) ympyräkaaren pituutta mittaavalla metriikalla (d_{ymp}) ja tarkistetaan, antaako tämä metriikka yhtä pitkät polun pituudet kuin se metriikka (d), jonka suhteen ympyräkaarenpituusmetriikka on muodostettu.[10]
Merkitään polun γ pituutta metrisessä avaruudessa (S^2, d_{ymp}) merkinnällä $L_{\text{ymp}}(\gamma)$.
Koska $d(x,y) \leq d_{\text{ymp}}(x,y)$ (edempänä lause 3.30), niin $L(\gamma) \leq L_{\text{ymp}}(\gamma)$. Lisäksi, kun otetaan supremum yli erilaisten jakojen,

$$L_{\text{ymp}}(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d_{\text{ymp}}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \sup \sum_{i=0}^{n-1} L(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}) = L(\gamma).$$

Siis $L(\gamma) = L_{\text{ymp}}(\gamma)$. Metriikalla d_{ymp} varustettu yksikköympyrä on pituusavaruus.[11]

[10] Mainittu kuvaus d_{ymp} oletetaan siis metriikaksi. Seuraavassa alaluvussa tarkistetaan, onko se todella sitä.

[11] Vastaava päättely voidaan tehdä muissakin kuin tässä mainitussa yksikköympyrän tapauksessa. Bridson ja Haefliger esittävät sen lauseen muodossa, s. 32-33 [1].

Esimerkki 3.29. Tarkastellaan edeltävää esimerkkiä useampiulottuvuuksissa avaruuksissa. Olkoon $S^n(0,r)$ origo-keskinen r-säteinen pallopinta avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. Varustetetaan pallo metriikalla[12]

$$d_{\text{pallo}}(x,y) = r\arccos(\frac{|\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i|}{r^2}).$$

Tällaista metriikkaa kutsutaan *pallometriikaksi* tai *isoympyrämetriikaksi.*[13]. Tällöin metrinen avaruus $(S^n(0,r), d_{\text{pallo}})$ on pituusavaruus.

3.4 Polkumetriikka

Edellisissä esimerkeissä metriikkana käytettiin pisteitä yhdistävän polun pituutta.

Pituusavaruuden määritelmän mukaan avaruuden kahden pisteen välinen etäisyys on niitä yhdistävien polkujen pituuksien yli otettu infimum. Tarkastellaan vielä sitä, onko edellä mainittu infimum metriikka yleisessä tapauksessa. Määritellään yleisessä metrisessä avaruudessa X kuvaus $d_p : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$d_p(x,y) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

jossa $x, y \in X$ ja infimum otetaan yli kaikkien polkujen, jotka yhdistävät pisteitä x ja y. Kuvaus d_p on metriikan d määräämä *polkumetriikka.*

Polkumetriikan määrittelyjoukkona on laajennettu $\mathbb{R}$, koska suoristumattomilla poluilla $d_p = \infty$. Sikäli kun kaikki avaruuden kaksi pistettä voidaan yhdistää suoristuvalla polulla, on d_p äärellinen.

Lause 3.30. Olkoon (X,d) metrinen avaruus, jonka mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää suoristuvalla polulla. Kuvaus d_p on metriikka. Lisäksi $d(x,y) \leq d_p(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$.

[12]Mainittu kuvaus d_{pallo} todella on metriikka. Kolmioepäyhtälöehdon voi osoittaa ainakin kahdella tavalla. Joko trigonometrisella laskulla (Parkkonen esimerkki 1.4 sivulla 8 [9]) tai vastaväitteellä (Bridson ja Haefliger, propositio 1.14 sivulla 10 ja propositio 2.1 sivulla 16 [1]).

[13]englanniksi *spherical metric* tai *great circle metric* [4]

Todistus. Olkoot $x, y \in X$ ja $\gamma : [a, b] \to X$ niitä yhdistävä polku. Lauseen 3.7 mukaan polun pituudella on alaraja, $d(x, y) \leq L(\gamma)$. Kun otetaan infimum polkumetriikan määritelmän mukaisesti yli kaikkien pisteitä x ja y yhdistävien polkujen, saadaan $d(x, y) \leq d_p(x, y)$.
Tarkistetaan metriikan ehdot (Määritelmä 2.1).

1. (symmetrisyys) Kaikkia polkuja γ vastaa aina käänteispolku $\overline{\gamma}$. Lauseen 3.16 mukaan $L(\gamma) = L(\overline{\gamma})$, joten kaikilla γ ja $\overline{\gamma}$

$$d_p(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma) = \inf_{\overline{\gamma}} L(\overline{\gamma}) = d_p(y, x).$$

2. (positiivisuus)

   (a) Oletetaan, että $d_p(x, y) = 0$. Koska $d(x, y) \leq d_p(x, y)$, niin $d(x, y) \leq 0$. d on metriikka, joten nyt $d(x, y) = 0$ ja edelleen $x = y$.

   (b) Oletetaan $x = y$. Polku, joka yhdistää pisteen itseensä on vakiopolku, joten lauseen 3.8 nojalla $d_p(x, x) = 0$.

3. (kolmioepäyhtälö) Olkoon $x, y, z \in X$, $\gamma : [a, b] \to X$ pisteitä x ja y yhdistävä polku, $\gamma' : [a, b] \to X$ pisteitä y ja z yhdistävä polku ja $\varepsilon > 0$, joilla

$$L(\gamma) \leq d_p(x, y) + \varepsilon/2 \text{ ja}$$
$$L(\gamma') \leq d_p(y, z) + \varepsilon/2.$$

Lisäksi määritellään polku $\gamma'' : [a, b + b' - a'] \to X$

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{kun } t \in [a, b], \\ \gamma'(t - b + a') & \text{kun } t \in [b, b + b' - a']. \end{cases}$$

Tarkastellaan polun γ'' pituutta kahdessa osassa, määritelmän molempia osia erikseen. Ensimmäisen osan tapauksessa $\gamma''_{|[a,b]|} = \gamma$, joten $L(\gamma'') = L(\gamma)$, kun $t \in [a, b]$.
Jälkimmäisen osan tapauksessa polku $\gamma''_{|[b,b+b'-a']|}$ saadaan polusta γ' vaihtamalla parametria kuvauksella $\psi : [b, b + b' - a'] \to [a', b']$,

$$\psi(t) = t + a' - b.$$

Koska parametrin vaihto ei vaikuta polun pituuteen (lause 3.15), niin $L(\gamma''_{|[b,b+b'-a']|}) = L(\gamma')$.
Polun γ'' kokonaispituus on siis

$$L(\gamma'') = L(\gamma) + L(\gamma') \leq d_p(x,y) + d_p(y,z) + \varepsilon$$

jollakin $\varepsilon > 0$.

Kun otetaan infimum yli kaikkien pisteitä x ja z yhdistävien polkujen γ'', saadaan $d_p(x,z) \leq d_p(x,y)+d_p(y,z)+\varepsilon$. Siis $d_p(x,z) \leq d_p(x,y)+d_p(y,z)$. □

Seuraus 3.31. Avaruus (X,d) on pituusavaruus jos ja vain jos $d_p = d$. Pisteitä x ja y yhdistävien polkujen pituus on sama molemmilla metriikoilla[14], kuten esimerkissä 3.28. Pituusavaruuden määritelmän mukaisesti

$$d(x,y) = \inf_{\gamma} L(\gamma).$$

Polkumetriikan tapauksessa

$$d_p(x,y) = \inf_{\gamma} L(\gamma).$$

[14] Tarkemmin katso Bridson ja Haefliger, s. 32-33 [1].

4 Geodeesisyys

Jos avaruuden kaksi pistettä voidaan yhdistää polulla, jonka pituus on sama kuin yhdistettyjen pisteiden etäisyys, sanotaan polkua *geodeesiseksi poluksi.* Sikäli kun avaruuden mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää näin, sanotaan että avaruus on *geodeesinen avaruus.*

4.1 Geodeesinen polku ja geodeesinen avaruus

Olkoon X metrinen avaruus ja $\gamma : [a, b] \to X$ polku.

Määritelmä 4.1 (Geodeesinen polku)**.** Polku γ on *geodeesinen* tai lyhyesti *geodeesi*, jos kaikilla $t_1, t_2 \in [a, b]$

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = d(t_1, t_2)$$

Geodeesinen polku siis säilyttää etäisyydet.[15]

Määritelmä 4.2 (Geodeesinen jana)**.** Geodeesisen polun kuva metrisessä avaruudessa X on *geodeesinen jana.*

Jos polku $\gamma : [a, b] \to X$ yhdistää avaruuden X pisteet x ja y, niin vastaavasti geodeesinen jana $\gamma([a, b])$ yhdistää ne.

Määritelmä 4.3 (Geodeesinen avaruus)**.** Metrinen avaruus X on *geodeesinen*, jos kaikilla $x, y \in X$ on olemassa niitä yhdistä geodeesinen polku.[16]

Pituusavaruuden ja geodeesisen avaruuden määritelmistä (Määr. 3.22 ja Määr. 4.3) voidaan tehdä seuraava päätelmä:

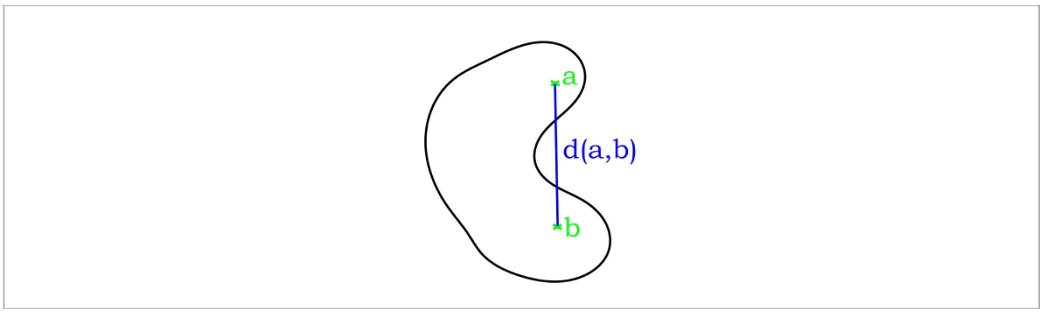
Seuraus 4.4. Geodeesinen avaruus on aina pituusavaruus.

[15]Suomennokset *geodeesinen polku* ja *geodeesi* tehty englanninkielisistä termeistä *geodesic path* ja *geodesic* [8]. Geodeesinen jana on terminä yksikäsitteisempi kuin pelkkä geodeesi: geodeesiksi kutsutaan myös "suoran yleistystä kaareville pinnoille"'. Esimerkiksi isoympyrä pallopinnalla on geodeesi [4].

[16]Synonyymi geodeesiselle avaruudelle *lyhimmän polun metrinen avaruus*, englanniksi *shortest path metric space* [4].

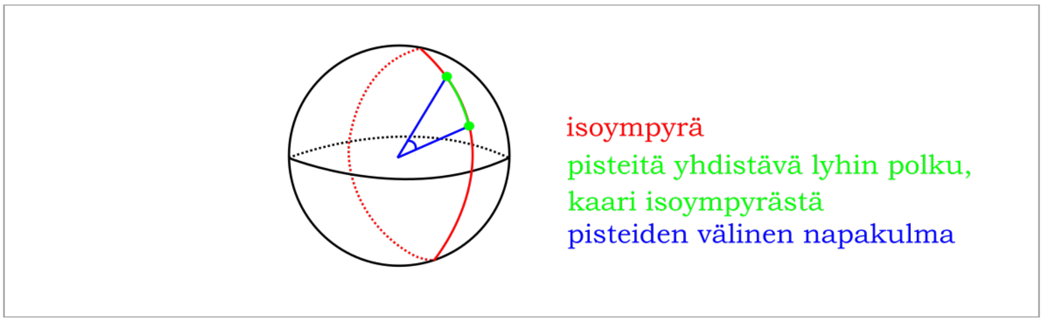
Esimerkki 4.5. Euklidiset avaruudet $\mathbb{E}^n$ ovat geodeesisiä. Kahta pistettä yhdistävä geodeesinen jana on pisteiden välinen "euklidinen jana". Janapolun pituus laskettiin aiemmin esimerkissä 3.23.

Esimerkki 4.6. Euklidisen avaruuden osajoukko on *konveksi* (kupera), jos joukon minkä tahansa kahden pisteen välinen jana kuuluu kyseiseen joukkoon. Osajoukko $A \subset \mathbb{E}^n$, varustettuna indusoidulla euklidisella metriikalla, on geodeesinen jos ja vain jos se on konveksi.



Kuva 8: joukko, joka ei ole konveksi

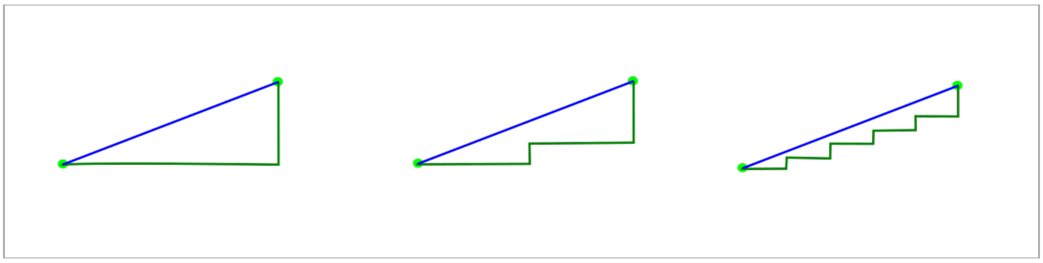
Esimerkki 4.7. Esimerkissä 3.29 käsitelty pallopinta varustetulla pallometriikalla d_{pallo} on geodeesinen avaruus. Pallopinnalla kahden pisteen välinen lyhin etäisyys on kaari vastaavasta isoympyrästä.



Kuva 9: geodeesisen janan kuva pallopinnalla

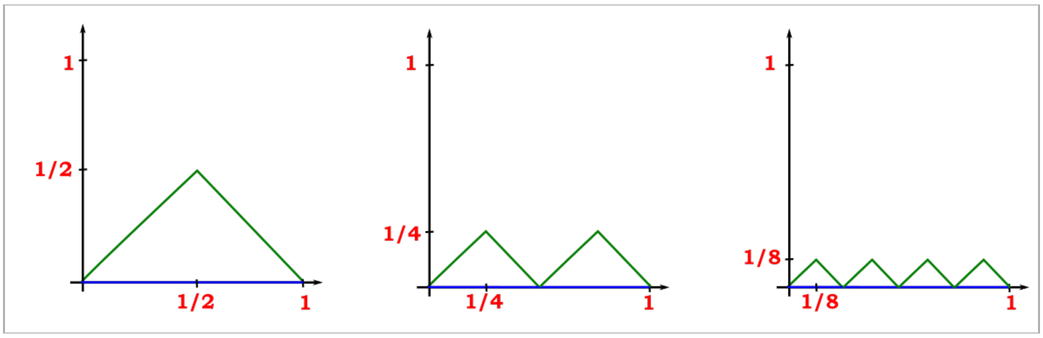
Esimerkki 4.8. Esimerkissä 3.24 normi $\|x\|_1$ määritti pituusmetriikan d_1. Tällä metriikalla varustettu taso, siis avaruus $(\mathbb{R}^2, d_1)$ on geodeesinen avaruus. Esimerkissä 3.23 laskettiin janapolun pituus euklidisessa avaruudessa.

Sama voidaan yleistää kaikkiin normiavaruuksiin.
Euklidisissa avaruuksissa kahta pistettä yhdistäviä lyhimpiä polkuja on yksi, kun taas pituusmetriikalla d_1 varustetussa metrisessä avaruudessa voi olla äärettömän monta erilaista geodeesia. Tämän esimerkin avaruuden geodeesisyys ei ole yksikäsitteistä.[17]



Kuva 10: kolme esimerkkiä geodeeseistä tasossa, kun metriikkana d_1

Esimerkki 4.9. Myös esimerkin 3.24 normin $\|x\|_\infty$ määrittämällä pituusmetriikalla d_∞ varustetussa $\mathbb{R}^2$:ssa kahden pisteen välillä voi olla äärettömän monta geodeesiä. Esimerkiksi origon ja pisteen $(0, 1)$ välinen etäisyys on 1. Kuvassa on kolme erilaista geodeesiä, joiden pituudet ovat $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ ja $(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})$. Avaruuden geodeesisyys ei taaskaan ole yksikäsitteistä.

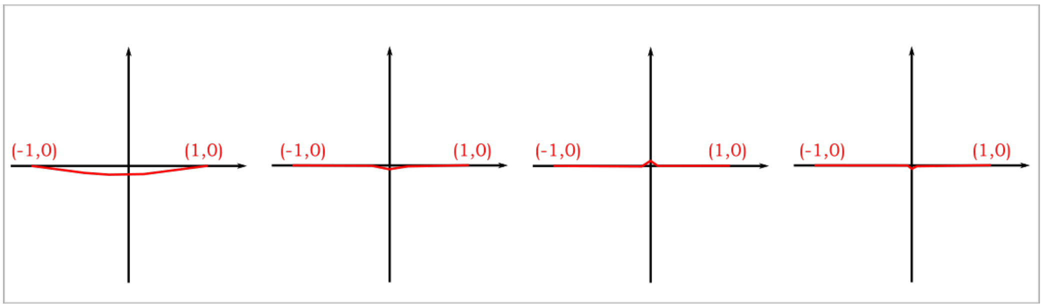


Kuva 11: kolme esimerkkiä geodeeseistä tasossa, kun metriikkana d_∞

Esimerkki 4.10. Aiemmin esimerkissä 3.25 tarkasteltiin euklidista tasoa, josta on poistettu origo, $\mathbb{E}^2 \setminus (0, 0)$. Tämä avaruus on edelleen pituusavaruus,

[17]engl. *uniquely geodesic space* [1]

mutta se ei ole geodeesinen. Origon vastakkaisilla puolilla olevien pisteiden, esimerkiksi $(-1,0)$ ja $(1,0)$ välinen euklidinen etäisyys on 2. Pisteitä $(-1,0)$ ja $(1,0)$ yhdistävää geodeesista polkua ei kuitenkaan ole olemassa.



Kuva 12: polkuja, jotka kiertävät origon

Huomionarvoista on, että esimerkin 4.10 avaruus ei ole täydellinen.

Aiemmin (Seuraus 4.4) todettiin, että geodeesiset avaruudet ovat aina pituusavaruuksia. Kuitenkaan pituusavaruudet eivät aina ole geodeesisiä avaruuksia (Esimerkki 4.10). Edempänä esitettävä Hopfin ja Rinowin lause liittyy siihen, millaisin ehdoin pituusavaruus tulee varustaa, jotta se olisi geodeesinen.

4.2 Funktioperheiden yhtäjatkuvuus

Jotta jatkossa päästään todistamaan em. Hopfin ja Rinowin lause, tarvitaan funktioperheiden (funktiojonojen) yhtäjatkuvuuteen liittyvä Arzelàn ja Ascolin lause.

Määritelmä 4.11 (Yhtäjatkuvuus)**.** Olkoot Y ja X metrisiä avaruuksia. Funktioperhe (funktiojono) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jossa $f_n : Y \to X$ on *yhtäjatkuva*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, siten että kaikilla n

$$d(f_n(y), f_n(y')) < \varepsilon, \text{ kun } d(y, y') < \delta.$$

Määritelmän nojalla on selvää, että yhtäjatkuvan funktioperheen funktiot ovat tasaisesti jatkuvia.[18]

Lause 4.12 (Arzelàn ja Ascolin lause)**.** Olkoon X kompakti metrinen avaruus ja Y separoituva metrinen avaruus. Tällöin kaikilla yhtäjatkuvilla funktiojonoilla $f_n : Y \to X$ on osajono, joka suppenee tasaisesti Y:n kompaktissa osajoukossa kohti jatkuvaa funktiota $f : Y \to X$.

Todistus. Olkoon $Q = \{q_1, q_2, ...\} \subset Y$ numeroituva, tiheä joukko.
Valitaan jonon f_n osajono $f_{n,1}$, siten että $f_{n,1}(q_1)$ suppenee, kun $n \to \infty$. Tällainen osajono on olemassa, koska X on kompakti. Merkitään tätä raja-arvoa $f(q_1)$.
Seuraavaksi valitaan jonon $f_{n,1}$ osajono $f_{n,2}$, siten että $f_{n,2}(q_2)$ suppenee. Merkitään raja-arvoa $f(q_2)$.
Näin jatkamalla saadaan uusia osajonoja $f_{n,k}$, jotka suppenevat seuraavasti:

$$\lim_{n(k)\to\infty} f_{n,k}(q_j) = f(q_j), \text{ kaikilla } j \leq k.$$

Nyt diagonaalijono $f_{n,n}(q)$ suppenee kohti raja-arvoa $f(q)$ kaikilla $q \in Q$.
Yhtäjatkuvuuden määritelmän mukaan kaikilla n ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$d(f_n(y), f_n(y')) < \varepsilon, \text{ kun } d(y, y') < \delta.$$

Kun $n \to \infty$, niin kaikilla $q, q' \in Q$

$$d(f(q), f(q')) \leq \varepsilon, \text{ kun } d(y, y') < \delta.$$

Koska Q on tiheä Y:ssä ja X on kompakti (ja täten siis täydellinen), niin f:llä on yksikäsitteinen jatke $f : Y \to X$, jolla[19]

$$d(f(y), f(y')) \leq \varepsilon, \text{ kun } d(y, y') < \delta.$$

[18] Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on ***tasaisesti jatkuva***, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, kun $d(x, y) < \delta$.

[19] Väisälä todistaa seuraavaan lauseen: Olkoon $A \subset X$, $f : A \to Y$ tasaisesti jatkuva A:ssa ja Y täydellinen. f:llä on olevassa jatkuva jatke $\bar{A} \to Y$, joka on vieläpä tasaisesti jatkuva ([11], s. 94).
Lauseen todistus tarvittavine apulauseineen monivaiheinen, sivuutetaan. Tyydytään toteamaan, että Arzelàn ja Ascolin lauseen todistuksen jatke on olemassa.

Osoitetaan, että funktiojonon $f_{n,n}$ suppeneminen kohti funktiota f on tasaista kompaktissa joukossa $C \subset Y$. Annetulle $\varepsilon > 0$ valitaan $\delta > 0$ kuten edellä. Valitaan $N \in \mathbb{N}_+$, siten että kaikilla $y \in C$ on olemassa $j(y) < N$, jolla $d(y, q_{j(y)}) < \delta$.
Lisäksi valitaan riittävän suuri $M \in N_+$, siten että $d(f_{n,n}(q_j), f(q_j)) < \varepsilon$ kaikilla $n > M$ ja kaikilla $j < N$.
Nyt kaikilla $y \in C$ ja kaikilla $n > M$ pätee

$$\begin{aligned}
&d(f(y), (f_{n,n}(y)) \\
&\leq d(f(y), f(q_{j(y)})) + d(f(q_{j(y)}), f_{n,n}(q_{j(y)})) + d(f_{n,n}(q_{j(y)}), f_{n,n}(y)) \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

4.3 Hopfin ja Rinowin lause

Seuraavassa esitettävä lause tunnetaan nimellä Hopfin ja Rinowin lause.[20]

Lauseen todistuksessa on käytetty kirjoja [1] ja [8], sekä niiden tukena verkosta löytyneitä luentomateriaaleja [6] ja [7]. Bridson ja Haefliger ([1], s. 35) muotoilevat lauseen seuraavasti:

Lause 4.13 (Hopfin ja Rinowin lause)**.** Olkoon X lokaalisti kompakti täydellinen pituusavaruus. Tällöin

1. kaikki X:n suljetut ja rajoitetut osajoukot ovat kompakteja ja

2. X on geodeesinen avaruus.

Todistus. Osoitetaan, että kaikki[21] a-keskiset suljetut pallot ovat kompakteja, $a \in X$.

[20]Historiallisena huomiona todettakoon, että lauseen nimessä voisi hyvin esiintyä myös saksalaissyntyisen Stephan Cohn-Vossenin nimi. Katso esim. Bridson ja Haefliger s. 35 [1] tai vanhempi, Papadopoulosin [8] mainitsema lähde Busemann s. 1 ja s. 4 [2].
Cohn-Vossenin teksti ***Existenz kürzester Wege*** löytyy verkosta [3], ja siinä hän mainitsee Hopfin ja Rinowin käsitelleen lausetta 2-ulotteisessa avaruudessa.

[21]***kaikki*** tarkoittaa siis sitä, että pallon säteen on voitava olla mitä tahansa väliltä $[0, \infty[$

Olkoon I joukko ei-negatiivisia lukuja, siten että a-keskiset suljetut pallot ovat kompakteja, kun niiden säteen pituus on tässä joukossa. Siis

$$I := \{r \geq 0 : \overline{B}(a, r) \text{ on kompakti}\}.$$

Täten I on väli ja $0 \in I$. Osoitetaan, että I on sekä avoin että suljettu joukossa $[0, \infty[$.

Valitaan jokin $r \in I$. Koska X on lokaalisti kompakti, voidaan $\overline{B}(a, r)$ peittää äärellisen monella avoimella pallolla $B(x_i, \varepsilon_i)$, siten että $\overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$ on kompakti. Äärellinen yhdiste $\cup_i \overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$ on myös kompakti.

Kaikille pisteille $x \in \overline{B}(a, r)$ on olemassa säde $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset \cup_i \overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$. Kaikilla säteillä r_x on positiivinen alaraja, koska kuvaus $x \mapsto r_x$ on jatkuva ja $\overline{B}(a, r)$ on kompakti. Merkitään tätä alarajaa r_δ. Nyt siis kaikkien pisteiden $x \in \overline{B}(a, r)$ etäisyys suljettuun joukkoon $X \setminus \cup_i \overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$ on vähintään r_δ. Täten äärellinen yhdiste $\cup_i \overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$ sisältää suljetun pallon $\overline{B}(a, r + \delta)$, $\delta > 0$. Siis $r + \delta \in I$, joten I on avoin.

Osoittaaksemme, että I on myös suljettu, tarkastellaan sen osaväliä $[0, \rho[\subset I$ ja osoitetaan, että myös $\overline{B}(a, \rho)$ on kompakti. Jonokompaktiuden määritelmän mukaisesti riittää osoittaa, että kaikilla jonoilla $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{B}(a, \rho)$ on suppeneva osajono.
Olkoon $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$ vähenevä, nollaa lähestyvä lukujono, siten että $0 < \varepsilon_p < \rho$. Kaikille p ja kaikille n on olemassa sellainen $y_n^p \in X$, että

$$d(a, y_n^p) \leq \rho - \frac{\varepsilon_p}{2}, \quad d(y_n^p, x_n) \leq \varepsilon_p.$$

Tällainen y_n^p on aina olemassa, koska X on pituusavaruus.[22]

Indeksin p ollessa 1, pallo $\overline{B}(a, \rho - \varepsilon_1)$ on kompakti, ja täten jonolla

[22]Jos tällaista pistettä ei löytyisi, niin tällöin $\overline{B}(x_n, \varepsilon_p) \cap \overline{B}(a, \rho - \frac{\varepsilon_p}{2}) = \emptyset$. Kaikki polut, jotka yhdistävät pisteet a ja x_n, olisivat tällöin pituudeltaan vähintään $\rho + \frac{\varepsilon_p}{2}$. Tämä on ristiriita, koska X on pituusavaruus ja $d(a, x_n) \leq \rho$.
Piste y_n^p siis sijaitsee sellaisella polulla, joka yhdistää pisteet a ja x_n ja jonka pituus on alle $d(a, x_n) + \frac{\varepsilon_p}{2}$.

y_n^1 on suppeneva osajono. Merkitään tätä osajonoa $y^1_{n^1_k}$.
Vastaavasti jonolla $y^2_{n^1_k}$ on suppeneva osajono $y^2_{n^2_k}$. Jonolla $y^3_{n^2_k}$ on suppeneva osajono $y^3_{n^3_k}$ ja niin edelleen.
Näin jatkamalla saadaan sellainen lukujono $n_k \in \mathbb{N}$, että $y^p_{n_k}$ suppenee kaikilla p.
Osoitetaan, että tätä indeksijonoa vastaava jono $x_{n_k} \in X$ on Cauchy. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan niin suuri p, että $\varepsilon_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska $y^p_{n_k}$ on suppeneva, on se myös Cauchy. Siis on olemassa $M \in \mathbb{N}$, siten että

$$d(y^p_{n_k}, y^p_{n_{k'}}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kaikilla } k, k' \geq M.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
&d(x_{n_k}, x_{n_{k'}}) \\
&< d(x_{n_k}, y^p_{n_k}) + d(y^p_{n_k}, y^p_{n_{k'}}) + d(y^p_{n_{k'}}, x_{n_{k'}}) \\
&< \varepsilon_p + \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon_p \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis x_{n_k} on Cauchy. Ja koska X on täydellinen, x_{n_k} suppenee. Olemassaoleva raja-arvo on pallossa $\overline{B}(a, \rho)$. Täten kaikilla pallon $\overline{B}(a, \rho)$ jonoilla on suppeneva osajono ja joukko on kompakti, siis $\rho \in I$.
I on siis sekä avoin että suljettu, eli $I = [0, \infty[$.

Todistetaan lauseen osa 2. Olkoot $a, b \in X, a \neq b$. Kaikille $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen suhteessa omaan pituuteensa parametrisoitu polku $c_n : [0,1] \to X$, että $l(c_n) < d(a,b) + \frac{1}{n}$. Polkujen $\{c_n\}$ muodostava funktioperhe on yhtäjatkuva: kaikilla $t, t' \in [0,1]$ pätee

$$|t - t'| = \frac{l(c_n|_{[t,t']})}{l(c_n)} \geq \frac{d(c_n(t), c_n(t'))}{d(a,b) + 1}.$$

Jos $|t - t'| < \frac{\varepsilon}{d(a,b)+1}$, niin

$$\frac{\varepsilon}{d(a,b)+1} > \frac{d(c_n(t), c_n(t'))}{d(a,b)+1} \implies d(c_n(t), c_n(t')) < \varepsilon.$$

Koska funktiot $\{c_n\}$ ovat yhtäjatkuvia, niin Arzelàn ja Ascolin (lause 4.12) nojalla funktiojonolla on tasaisesti suppeneva osajono $c : [0,1] \to X$. Ja koska tasaisesti suppeneva osajono on olemassa, niin alhaalta puolijatkuvuuden (Lause 3.12) nojalla

$$l(c) \leq \liminf l(c_{k_n}) = d(a,b).$$

Toisaalta $l(c) \geq d(a,b)$, joten $l(c) = d(a,b)$. Siis c on geodeesinen polku ja täten X on geodeesinen avaruus. □

Hopfin ja Rinowin lauseen seurauksena Bridson ja Haefliger esittävät seuraavan seurauksen:

Seuraus 4.14. Pituusavaruus on siisti jos ja vain jos se on täydellinen ja lokaalisti kompakti.

Lähteet

[1] Martin R. Bridson and André Haefliger: *Metric spaces of non-positive curvature*, vol. 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1999.

[2] Herbert Busemann: *Recent Synthetic Differential Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970.

[3] Stefan Cohn-Vossen: *Existenz kürzester Wege*, Compositio Mathematica 3, 1936. Saatavilla: http://www.numdam.org/article/CM_1936__3__441_0.pdf, viitattu 11.2.2018.

[4] Michel Marie Deza and Elena Deza: *Encyclopedia of Distances.* Second Edition. Springer. Heidelberg, New york, Dordrecht, London 2013.

[5] Misha Gromov: *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces.* Birkhäuser, Boston, 1999.

[6] Ilkka Holopainen: *Metric Geometry*, http://www.helsinki.fi/~iholopai/MetGeo.pdf, viitattu 28.6.2018.

[7] Urs Lang: *Length Spaces*, https://people.math.ethz.ch/~lang/LengthSpaces.pdf, viitattu 28.6.2018.

[8] Athanase Papadopoulos: *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature.* European Mathematical Society, Zurich, 2005.

[9] Jouni Parkkonen: *Metriset avaruudet ja Topologia*, http://users.jyu.fi//~parkkone/MetTop2018/MetTopo2018.pdf, viitattu 25.8.2018.

[10] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Inc., New York etc., 1976.

[11] Jussi Väisälä: *Topologia I.* 4. painos. Limes ry, Helsinki, 2007.

[12] Jussi Väisälä: *Topologia II.* 2. painos. Limes ry, Helsinki, 2005.