Toiminnallisen matematiikan mahdollisuuksia etsimässä:
”Sen kautta voijaan luoda niin paljon iloa ja yhteistyötä ja semmosta syvällisempää ymmärtämistä”

Annika Harja

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Kevätlukukausi 2015
Opettajankoulutuslaitos
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Harja, Annika. 2015. Toiminnallisen matematiikan mahdollisuuksia etsimässä: ”Sen kautta voijaan luoda niin paljon iloa ja yhteistyötä ja semmosta syvällisempää ymmärtämistä”. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää toiminnallisen matematiikan tarjoamia mahdollisuuksia peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. Pyrkimyksenä oli kartoittaa opettajien käsityksiä toiminnallisten työtapojen käytön tavoitteista ja niihin liittyvistä haasteita sekä selvittää, minkälaisten harjoitteiden ja välineiden avulla he toteuttavat toiminnallista matematiikkaa.

Teoreettisessa viitekehyksessä tarkastellaan matematiikan opettamista ja oppimista sekä määritellään toiminnallista matematiikkaa ja esitellään opetusmenetelmiä, joiden avulla sitä voidaan toteuttaa. Tutkimukseen osallistui yhteensä viisi opettajaa: kolme luokanopettajaa ja kaksi aineenopettajaa. Aineistonkeruumenetelmänä käytin puolistrukturoitua haastattelua sekä havainnointia. Tutkimusmenetelmänä toimi fenomenografia, jonka avulla luokittelin aineistosta nousevat käsitteet neljän kategorian alle: toiminnallisen matematiikan mahdollisuudet, edut ja haasteet sekä mitä käyttö edellyttää opettajalta. Kuvasin niitä narratiivin kerronnan avulla.

Toiminnallinen matematiikka mahdollistaa syvällisempää ymmärtämistä matematiikasta, aktivoi oppilasta ja lisää luokkahuoneen vuorovaikutusta. Tulosten mukaan sen käyttö tarjoaa myös oppilaalle mahdollisuuden omakohtaisten kokemusten saamiseen, lisää matematiikan opiskelun mielekkyyttä, tarjoaa konkretiaa sekä huomioi oppilaiden yksilöllisiä tarpeita. Käytön haasteina nousi esiin toimintavälineiden saatavuus, dokumentoinnin vaikeus, oppimisympäristö, koulun toimintakulttuuri ja erityisesti lukioissa ajan puute. Toiminnallisten menetelmien käyttö edellyttää myös opettajalta uskallusta kokeilla sekä vaivaa tehdä toimintamateriaaleja.

Hakusanat: Toiminnallinen matematiikka, matematiikan opetus, matematiikan oppiminen, fenomenografia

SISÄLTÖ

KUVIOT

TAULUKOT

1 TOIMINNALLINEN MATEMATIIKKA MATEMATIIKAN OPETUKSEN JA OPPIMISEN UUDISTAJANA

Matematiikan opetus- ja oppimiskulttuuri elävät tällä hetkellä murroksessa, sillä enää ei korosteta pelkästään lasten ja nuorten mekaanista laskutaitoa. Painopiste on siirtymässä kokonaisvaltaisen kulttuurin muodostumiseen, jossa korostuvat asioiden ymmärtäminen, toiminnallisuus ja vuorovaikutus (Kajetski & Salminen 2009, 11). Myös Pehkonen (2000) korostaa, ettei tänä päivänä pelkkä laskuvalmiuksien opettaminen riitä, vaan tämän lisäksi tarvitaan ymmärtämistä sekä näiden kahden asian yhteenpunomista.

Nuorten matematiikan osaaminen Suomessa on laskenut merkittävästi. Pisa 2012 tulosten perusteella Suomi on edelleen tuloksissa yli OECD-maiden osaamisen keskiarvon, mutta vuoden 2003 tuloksiin verrattuna suomalaisnuorten matematiikan taidot ovat heikentyneet huolestuttavasti kaikilla mitattavilla sisältöalueilla. Taitojen heikkenemistä on tapahtunut monessa taitoryhmässä: heikosti suoriutuvien oppilaiden määrä on lisääntynyt (7 % → 12 %) ja vastaavasti erinomaisesti suoriutuvien oppilaiden määrä on vähentynyt (23 % → 15 %). Selityksiä tällaiseen muutokseen on syytä miettiä, jotta kehityssuunta ei jatku laskuvoittoisena. (Kupari ym. 2013, 28–29.)

Suomen koulumaailmassa on vallalla ajatus, jonka mukaan ”matematiikka on tylsä oppiaine, jota ei enää laskinten aikakaudella tarvitse opiskella” (Kahanpää 2005, 90–91). Oppilaan motivaatiolla ja asenteilla tiedetään olevan suuri vaikutus matematiikan oppimiseen (Kupari ym. 2013, 55–66). Tällaisella negatiivisella suhtautumisella matematiikan opiskelua kohtaa on todennäköisesti laajempiakin vaikutuksia kuin huono matematiikan arvosana. Matematiikassa menestyminen on tutkimusten mukaan oppilaille muita aineita tärkeämpää (Linnanmäki 2004, 241), jolloin matematiikalla on todella iso rooli oppilaan koulunkäynnin määrittäjänä. Jos menestyminen matematiikassa jatkaa heikkenemistään ja asenteet sen opiskelua kohtaan säilyvät negatiivisina, on tällä väistämättä yhteys oppilaiden huonoon kouluviihtyvyyteen Suomessa (Currie ym. 2012, 46–48). Tämä on merkittävä ongelma nykypäivän kouluissa.

Uudessa vuonna 2016 käyttöön tulevassa perusopetuksen opetussuunnitelman luonnoksessa korostuvat muutoksen tuulet. Siellä opetukselta odotetaan tutkivaa ja luovaa työskentelyotetta. Vuorovaikutteinen oppiminen on nostettu voimakkaasti esiin, sillä halutaan, että oppilaat pääsevät yhdessä tekemään, keskustelemaan ja jakamaan ajatuksiaan. Opetusmenetelmiltä odotetaan jatkossa yhä enemmän toiminnallista otetta: leikkejä, pelillisyyttä, fyysistä aktiivisuutta, kokeellisuutta, muita toiminnallisia työtapoja sekä taiteen eri muotojen monipuolista käyttöä. Myös tieto- ja viestintäteknologia on suuressa roolissa: sitä korostetaan sekä oppimisenkohteena että opetusvälineenä. (Opetushallitus 2014, 17–23.)

Tässä tutkimuksessa näihin muutoshaasteisiin pyritään hakemaan apua ja vastauksia toiminnallisesta matematiikasta ja sen moninaisista toteutusmahdollisuuksista. Toiminnallisella matematiikalla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa matematiikan opetusta ja opiskelua sellaisen toiminnan kautta, jossa oppilaan aktiivinen rooli on keskeinen. Oleellista toiminnallisen matematiikan toteuttamisessa ovat seuraavat tekijät: välineillä toimiminen, leikkien ja pelaten oppiminen, kokemuksellisuus, oman toiminnan kautta oivaltaminen, monipuolinen vuorovaikutus sekä tutkimalla ja kokeilemalla oppiminen. (Coop, Wood, Yackel & McNeal 1992; Dienes 1973; Goos 2004; Hayes & Höynälänmaa 1985; Ikäheimo 1995, 1997; Kolb 1984; Tikkanen 2008.)

Oma kiinnostukseni toiminnallisen matematiikan tutkimiseen on moniulotteinen. Aloittaessani syksyllä 2012 tätä pro gradu -tutkielmaa, oli minulle selvää, että työni käsittelee jollain tapaa matematiikan opettamista ja oppimista. Selitys tälle juontuu aiemmista matematiikan aineenopettajan-opinnoistani, joita viimeistelin samanaikaisesti, kun aloitin luokanopettajan maisterikoulutuksen opintoni ja tämän tutkimuksen teon. Matematiikan aineenopettaja opintoihin kuuluvissa harjoitteluissa minusta alkoi tuntua, että matematiikan opettaminen pinttyneen tuntikaavan mukaan – kotitehtävien tarkastus, uuden asian opettaminen tai esimerkkien laskeminen, oppilaiden itsenäinen laskeminen ja kotitehtävien antaminen oli puuduttavaa ja ilotonta – pelkkää opettajajohtoista ja oppikirjasidonnaista toimintaa, vaikka itse olinkin innostunut matematiikan opettamisesta ja pyrin motivoimaan aina myös oppilaitani. Koin, että minulla ei ollut oppilaille mitään muuta annettavaa kuin matematiikan teoriaa käytännön ilmiöihin nivottuna. Minulla oli siis suuri halu tehdä asioita toisin. Todellisen alkusysäyksen omien opetusmetodeitteni muutokseen sainkin opintojeni loppuvaiheessa, kun tutustuin tutkivaan matematiikkaan. Tämän tutkimuksen avulla pystyin jatkamaan aineenopettajaopinnoissani herännyttä innostusta, joka liittyi matematiikan uudenlaiseen mielekkäämpään opettamiseen.

Halusin tehdä tutkimuksestani myös käytännönläheisen, koska aineenopettajaopintojeni vuoksi luokanopettajaopintoni eivät sisältäneet harjoittelujaksoa ja koin, että tarvitsen vielä eväitä oman opettajuuteni rakentamiseen. Matematiikan aineenopettajataustastani johtuen laajensin tutkimukseni koskemaan koko peruskoulua ja lukio-opintoja, koska halusin eväitä matematiikan opettamiseen sekä itselleni, tuleville ja jo työssä oleville luokanopettajille ja matematiikan aineenopettajille. Tavoitteenani oli siis perehtyä ja syventyä erilaisiin matematiikan opetuksen pedagogisiin ratkaisuihin ja käytännön toteutustapoihin, joilla matematiikkaa voidaan opettaa ilman pelkkää opettajajohtoista opetusta ja oppikirjan täyttämistä. Suomen kouluja ohjaavissa opetussuunnitelmissakin korostetaan, että matematiikan opetuksen tulee olla kokeilevaa, keksivää ja tutkivaa. Lisäksi sen tulee tarjota oppilaalle mahdollisuuksia tehdä havaintoja, saada kokemuksia sekä käyttää välineitä ja matematiikan kieltä ikätovereiden kanssa. Matematiikan opetuksen suurempana tehtävänä on edistää oppilaan henkistä kasvua, tavoitteellista toimintaa sekä sosiaalista vuorovaikutusta. (Opetushallitus 2003, 118–119, 125; 2004, 158–163.) Tämä muutos oli oikeastaan itselleni velvoitus, sillä koin, etten pystynyt täyttämään teoriapainotteisella opettajajohtoisella opetuksellani näitä tavoitteita.

Tässä tutkimuksessa selvitin, millaisia toteutusmahdollisuuksia toiminnallinen matematiikka tarjoaa peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. Tutkimustehtäväni on muokkautunut teoriaan perehtymisen, omien kiinnostusteni ja pohdintojeni sekä ohjaajieni kanssa käymien keskustelujen vuoropuheluna. Tutkimukseni keskittyi kartoittamaan sitä, minkälaisia käsityksiä opettajilla on toiminnallisuuden toteuttamisesta matematiikan opetuksessa. Jotta saisin mahdollisimman monipuolisen kuvan toiminnallisen matematiikan toteutusmahdollisuuksista matematiikan opetuksessa, kysyin opettajilta, minkä vuoksi he käyttävät toiminnallisuutta matematiikan opetuksessa, minkälaisia haasteita heidän mielestään toiminnallisten menetelmien käyttöön liittyy matematiikan opetuksessa ja minkälaisten harjoitteiden sekä välineiden kautta he kouluissa toteuttavat toiminnallista matematiikan opetusta.

Tutkimukseni teoreettinen pohja muodostuu luvuista kaksi ja kolme. Luvussa kaksi tarkastelen matematiikan opetusta ja oppimista pohtimalla yleisesti, mitä matemaattinen osaaminen on, minkälaista Suomen matematiikan opetus on. Lisäksi tarkastelen minäkäsityksen yhteyttä matematiikan oppimiseen sekä matematiikan oppimisvaikeuksia. Kolmannessa luvussa avaan toiminnallisen matematiikan käsitettä ja esittelen erilaisia pedagogisia suuntauksia ja opetusmenetelmiä, joiden avulla toiminnallista matematiikkaa voidaan toteuttaa. Tutkimukseni neljäs luku kuvaa tutkimukseni metodisia asioita. Siinä esittelen tutkimustehtäväni, tutkimusmatkani kulun aina käyttämistäni tutkimusmenetelmistä analyysiin asti sekä tekemiäni luotettavuus- ja eettisyysratkaisuja. Olen pyrkinyt kuvaamaan tutkimusmatkani mahdollisimman tarkasti ja todenmukaisesti, jotta lukijalla on mahdollisuus ymmärtää ja tarkastella tekemiäni valintoja. Viidennessä luvussa esittelen saamani tutkimustulokset vuoropuheluna teorian kanssa. Esittelen opettajien käsitykset toiminnallisesta matematiikasta vastaamalla jokaiseen tutkimukseni alakysymykseen omana lukunaan. Viidennen luvun loppuun olen koonnut vinkkilistan, josta löytyy apua sekä luokanopettajille että matematiikan aineenopettajille toiminnallisuuden aloittamiseen omassa matematiikan opetuksessa. Luvussa kuusi pohdin toiminnallisen matematiikan toteutuksesta saatuja tuloksia ja niiden merkityksiä matematiikan opetukselle.

2 MATEMATIIKAN OPETTAMINEN JA OPPIMINEN

"Anna lapselle
Oivaltamisen onni
Ratkaisun ilo"
Sinikka Lindgren (1998)

Tämän luvun alussa esittelen, mitä matemaattinen osaaminen on, miten se kehittyy lapsella ja mitä osa-alueita siihen sisältyy. Kaikessa älyllisessä toiminnassa on aina mukana ajattelu (Vygotsky 1982, 35–36). Sen vuoksi näen ajattelun merkittävänä tekijänä myös matemaattisen osaamisen kannalta. Näin ollen tässä luvussa tarkastelen myös matemaattista ajattelua ja sen kehittymistä. Tämän jälkeen perehdyn matematiikan opettamiseen yleensä sekä esittelen suomalaisen matematiikan opetuksen yleispiirteitä ja opetuksen suhdetta perusopetuksen opetussuunnitelmaan. Luvun lopuksi tarkastelen matematiikan oppimista, sen yhteyttä minäkäsitykseen sekä matematiikan oppimisvaikeuksia. Näiden tekijöiden ymmärtäminen on erityisen tärkeää myös toteutettaessa matematiikan opetusta toiminnallisten menetelmien kautta. Tästä syystä koen niihin perehtymisen merkitykselliseksi.

2.1 Matemaattinen osaaminen ja sen kehittyminen

Lapsi on luonnostaan matemaattinen olento. Lapsella on synnynnäisiä valmiuksia hahmottaa lukumääriä. Sen lisäksi lapsi elää ympäristössä, joka on täynnä erilaisia matemaattisia sisältöjä ja tilanteita, joiden pohjalta lapsi kokoaa omaan matemaattiseen ymmärrykseensä suuntaa, välineitä ja kokemuksia ilman aikuisen ohjausta. (Aunio, Hannula & Räsänen, 2004, 198.) Näin ollen lapsen matemaattisen osaamisen perusta alkaa rakentua jo varhaisessa vaiheessa paljon ennen lapsen koulun aloittamista (Vainionpää, Mononen & Räsänen 2003, 292).

Vainionpää ym. (2003) esittävät mallin lapsen varhaiseen matemaattiseen osaamiseen liittyvien taitojen kehittymisestä. Mallissa varhaiset matemaattiset taidot jaetaan seuraavaan neljään osaan: *luettelu- ja laskutaidot* sekä *luku- ja suhdekäsitteet*. Kehityksen alkuvaiheessa nämä neljä taitoa ovat erillisiä, mutta myöhemmin ne nivoutuvat yhteen muodostaen matemaattisen osaamisen taitokokonaisuuksia. (Vainionpää ym. 2003, 293.)

Luettelutaito tarkoittaa lapsen kykyä luetella lukusanoja oikeassa järjestyksessä. Tämä taito on sidoksissa lapsen kielelliseen kehitykseen (ikävuodet 1–2). Aluksi luettelutaito on lorumaista. Myöhemmin se pitää sisällään taidon muodostaa katkeamattomia lukujonoja eli listoja (ikävuodet 2–3), katkaistavia lukujonoja eli ketjuja (ikävuodet 3–5) sekä lukujonoja yleensä (ikävuodet 5–6). Luettelutaitoon kuuluu myös ymmärrys lukusanaan liittyvästä määrän merkityksestä. Tämä tarkoittaa sitä, että lapsi kykenee hahmottamaan paljonko ”neljä” on. Lukujen luettelu- ja lukujonotaitojen omaksuminen ovat edellytyksenä lukukäsitteen ja laskutaidon oppimiselle. (Vainionpää ym. 2003, 293–295.)

Lukukäsitetaito ei ole sidoksissa kielelliseen kehitykseen, vaan lapsella on heti syntymänsä jälkeen kyky havaita ja erotella määriä. Lukukäsitetaito sisältää käsityksen siitä, mitä voidaan laskea ja mitä yksi-yhteen vastaavuus tarkoittaa (ikävuodet 2–3). Tähän taitoon kuuluu myös kyky ymmärtää lukujen kardinaalisuus, järjestyksen merkitsemättömyys sekä lukumäärän säilyminen (ikävuodet 3–5). (Vainionpää ym. 2003, 294–295.) Lukukäsite kehittyy läheisessä yhteydessä sarjojen ja luokkainkluusioiden muodostamisen kanssa (Piaget & Inhelder 1977, 102).

Lukukäsitteen ymmärtäminen ei liity lapsen taitoon laskea sanallisesti. Piaget on tutkinut lukumäärän säilymistä lapsilla ja havainnut niiden perusteella, että niin kauan kuin lapsi liittää lukumäärän arvioinnin avaruudelliseen sijaintiin, hän ei ymmärrä lukumäärän säilymistä. Tällä Piaget tarkoittaa, että jos kahdestatoista punaisesta ja kahdestatoista sinisestä napista muodostetaan yhtä pitkät jonot, lapsi tietää nappeja olevan yhtä paljon, mutta jos toista jonoa harvennetaan, on nappien määrä lapsesta eri. (Piaget & Inhelder 1977, 102–103.)

Vainionpää ym. (2003) määrittelevät *laskutaidon* lapsen kyvyksi laskea määriä – niiden muutoksia, lisääntymistä tai vähenemistä – sekä vertailla lukumäärien välisiä suhteita (Vainionpää ym. 2003, 296). Laskutaidon omaksumiseen tarvitaan kardinaalisuuden ymmärtämistä: laskemisella on jokin tulos. Jos lapsi haluaa selvittää, kuinka paljon esineitä on, hän alkaa laskea niitä lukuja luettelemalla. Kun lapsi ymmärtää viimeisen numeron edustavan esineiden määrää, hän on sisäistänyt kardinaalisuuden ajatuksen. (Bryant 1996, 321.) Ikävuosien 1–3 aikana lapsen voidaan havaita toteuttavan laskemiselta näyttävää toimintaa, vaikka varsinainen esineiden lukumäärien laskemistaito alkaa kehittyä ikävuoden kolme jälkeen. Laskemistaidon harjaannuttaminen alkaa ikävuosina 3–4 pieniä lukualueita käyttäen 1–3 esineellä. Siitä edetään luettelemisen käyttöön ikävuosina 4–5. (Vainionpää ym. 2003, 294–296.) Aluksi luetteleminen tapahtuu ”lasketaan kaikki -strategialla”, jossa luetteleminen alkaa aina ykkösestä. Kun lapsi oppii aloittamaan luettelemisen mistä kohdasta tahansa lukujonoa, helpottaa ja nopeuttaa tämä hänen laskemistaan. Kun lapsi kykenee luettelemaan lukuja suuremmasta pienempään, hänen on mahdollista omaksua lukujen vähentäminen toisistaan. (Aunio ym. 2004, 205.) Ikävuosina 5–6 laskeminen tapahtuu lukumääriä vertailemalla (Vainionpää ym. 2003, 294).

Viimeisenä varhaisena matemaattisena taitona Vainionpää ym. (2003) esittävät *suhdekäsitteen*. Sillä tarkoitetaan erilaisia muutoksia ja suhteita kuvaavia käsitteitä, joita ovat muun muassa ”enemmän, vähemmän, suurempi, pienempi, keskimmäinen, ennen, jälkeen, myöhemmin” (Vainionpää ym. 2003, 296). Ordinaalisuuden kehittyminen kuvastaa, että lapsi ymmärtää lukujen välisiä suhteita. Hän siis tiedostaa, että luku 15 on pienempi kuin luku 17 tai luku 9 on suurempi kuin luku 4. (Bryant 1996, 324.) Suhdekäsitteiden omaksuminen ja käyttö on lapselle haastavaa, sillä niihin ei liity yhtä käsitettä, vaan käsitteen omaksuminen edellyttää lapselta usean kohteen samanaikaista muistamista. Lapsi kykenee hahmottamaan toiminnan kautta käsitteitä ”lisää”,

”pois” ja” tyhjä” jo ikävuosien 1–2 aikana. Kahden vuoden iässä lapsi alkaa hahmottaa suhdekäsitteitä esineiden ominaisuuksien kautta kuten ”iso”, ”pieni”, ”paljon” ja ”vähän”. Lapsi kykenee ymmärtämään vertailun kautta suhdekäsitteitä 2–3 vuoden iässä, mutta alkaa käyttää itse vertailua vasta 3–4 ikävuoden aikana. Suhdekäsitteet ovat olennaisia kielellisessä vuorovaikutuksessa. Niitä tarvitaan, kun opettaja opettaa lapselle matemaattisia sääntöjä ja ilmiöitä. (Vainionpää ym. 2003, 294–297.)

2.1.1 Matemaattisen osaamisen osa-alueet

Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001, 116) ovat tutkineet matematiikan oppimista ja päätyneet havaintoon, että matematiikkaa voi oppia menestyksellisesti, mikäli hallitsee viisi tekijää. Nämä matematiikan osaamisen viisi tekijää ovat heidän mielestään seuraavat: *konseptuaalinen eli käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, soveltava päättely ja yritteliäisyys*.

Konseptuaalinen eli käsitteellinen ymmärtäminen tarkoitta taitoa ymmärtää matematiikan käsitteitä, operaatioita sekä näiden suhteita (Kilpatrick ym. 2001, 116). Käsitteellisesti ymmärtävä oppilas tietää enemmän kuin pelkästään erillisiä faktatietoja ja metodeja. Hän kykenee ymmärtämään lisäksi, miksi matemaattiset käsitteet ovat tärkeitä ja missä yhteydessä ne ovat käyttökelpoisia. Käsitteellisesti ymmärtävän oppilaan tietorakenteet ovat hyvin organisoituneet. Kun oppilas oppii uusia matemaattisia käsitteitä, hän ymmärtää, miten käsite linkittyy aiemmin opittuun. Käsitteellinen ymmärtäminen auttaa oppilasta muistamaan, koska oppilaalla on vahva ymmärrys faktoista ja metodeista. Opettajan on hyvä tiedostaa, että opiskelijat ymmärtävät usein käsitteet ennemmin kuin he kykenevät niitä verbaalisesti ilmaisemaan. (Kilpatrick ym. 2001, 118.)

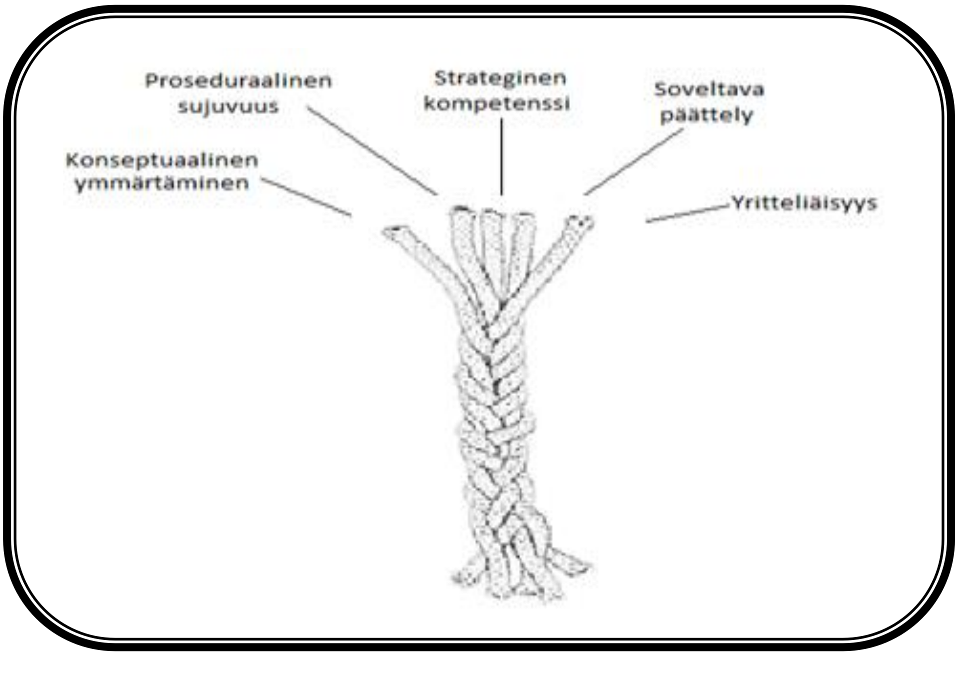
Proseduraalinen sujuvuus kuvastaa kykyä suorittaa matemaattiset proseduurit eli toimenpiteet joustavasti, tarkasti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti (Kilpatrick ym. 2001, 116). Se viittaa proseduurien tuntemukseen eli siihen, millaisissa yhteyksissä ja miten proseduureja on tarkoituksenmukaista käyttää. Proseduraalinen sujuvuus tukee käsitteellistä ymmärtämistä, sillä esimerkiksi paikkajärjestelmien ja rationaalilukujen käsitteitä ei voida ymmärtää ilman niihin liittyvien proseduurien hallintaa. Tämän lisäksi proseduraalinen sujuvuus tukee yhtäläisyyksien hallintaa ja laskentamenetelmien eroavaisuuksia. Proseduraalinen sujuvuus sisältää myös kirjalliset toimenpiteet ja mentaaliset menetelmät löytää oikeita summia, eroja, toimintatapoja sekä kysymyksiä matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi - eli laskemisen taidon. (Kilpatrick ym. 2001, 121.)

Strateginen kompetenssi kertoo kyvystä muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia (Kilpatrick ym. 2001, 116). Tämä matematiikan osaamisen tekijä tarkoittaa samaa kuin ongelmanratkaisu opetusmenetelmä, josta puhutaan tarkemmin luvussa 3.4.4. Strategisen kompetenssin omaava oppilas tuntee useita käyttökelpoisia ongelmanratkaisustrategioita ja kykenee löytämään annetusta ongelmatehtävästä ratkaisun kannalta tärkeimmät tekijät. Näiden pohjalta hän pystyy muotoilemaan ongelman sellaiseen muotoon, että hän kykenee sen ratkaisemaan. (Kilpatrick ym. 2001, 124.)

Soveltava päättely viittaa taitoon ajatella loogisesti, reflektoida omaa toimintaa sekä kykyä selittää ja esittää perusteluja (Kilpatrick ym. 2001, 116). Soveltava päättely kuvaa myös kapasiteettia ajatella tutkittavien käsitteiden ja tilanteiden välisiä suhteita. Opiskelija kykenee mukautuvaan päättelyyn, mikäli seuraavat kolme ehtoa täyttyvät: 1) hänellä on riittävä tietopohja, 2) tehtävä on ymmärrettävä ja motivoiva ja 3) konteksti on tuttu ja miellyttävä. Eräs soveltavan päättelyn ilmenemismuoto on oppilaan kyky perustella omat tekemisensä. Matemaattinen todistaminen on yksi perustelemisen muoto. Soveltava päättely on kiinteässä yhteydessä muihin neljään osataitoon. Oppilas käyttää soveltavaa päättelyä eniten ongelmanratkaisussa, kun hän strategisen kompetenssinsa avulla yrittää muotoilla ja kuvata ongelmaa. (Kilpatrick ym. 2001, 129–130.)

Yritteliäisyydellä tarkoitetaan yksilön omaa ahkeruutta ja tehokkuutta. Siihen sisältyy myös ajatus nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja kannattavana toimintana. (Kilpatrick ym. 2001, 116.) Yritteliäs oppilas uskoo, että ahkera matematiikan opiskelu on kannattavaa. Hän näkee itsensä tehokkaana matematiikan oppijana ja käyttäjänä. Mikäli oppilaalle on kehittynyt neljä edellistä tekijää, hänen täytyy uskoa matematiikan olevan ymmärrettävää, opittavaa ja käyttökelpoista. Kun opiskelija ratkaisee ei-rutiininomaisia tehtäviä, kehittää se hänen strategista kompetenssiaan, jonka seurauksena opiskelijan asenne ja uskomukset itsestään matematiikan oppijana tulevat positiivisemmiksi. Tämä vaikuttaa myönteisesti myös muiden tekijöiden kehittymiseen. (Kilpatrick ym. 2001, 131.)

Kilpatrick ym. (2001, 116–117) havainnollistavat matemaattista osaamista Kuviossa 1 narujen avulla, jotka lopulta muodostavat yhden vahvan köyden. Yksi naru edustaa aina yhtä matemaattisen osaamisen tekijää. Kukin tekijä on jokaiselle yksilölle merkityksellinen, jos hän haluaa oppia ja ymmärtää matematiikkaa onnistuneesti. Yksinään mikään tekijä ei ole riittävä matematiikan osaamisen saavuttamiseen, vaan niistä jokainen on riippuvainen toisista. Naruista muodostunut kokonainen köysi kuvaa hyvin matematiikan osaamisen yhteenkietoutunutta rakennetta. Kun tällainen osaaminen on saavutettu, yksilöllä on hyvät edellytykset laajaan matematiikan omaksumiseen ja hallintaan.



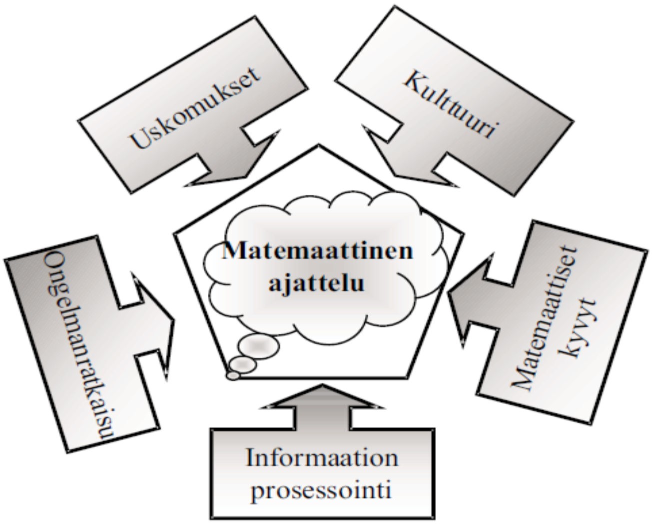
Kuvio 1. Matemaattisen osaamisen viisi tekijää (Kilpatrick ym. 2001, 117)

2.1.2 Matemaattinen ajattelu

Ajattelun perustana on Vygotskin (1982) mukaan sisäinen puhe, joka on sanaan tai pelkästään merkitykseen liittyvää ajattelua eli puhetta itselle. Ajatus ei siis muodostu puheen tapaan erillisistä sanoista, vaan se muodostaa kokonaisuuden, joka on kestoltaan ja kooltaan yksittäistä sanaa laajempi. Yksilö tiedostaa koko ajan, mistä sisäisessä puheessa on kysymys, sillä hän on tietoinen omasta ajattelustaan. Kun ajatus muutetaan lopulta puheeksi, muuttaa se muotoaan ja rakentuu uudelleen. Ajatus ei siis koskaan ilmene, vaan se tapahtuu ja toteutuu aina sanassa. (Vygotski 1982, 215, 221, 234–244.)

Oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymistä voidaan pitää matematiikan opetuksen tärkeimpänä tavoitteena (Koponen 1995, 15; Malaty 1997, 129). Se, mitä matemaattisen ajattelun käsitteellä tarkoitetaan, ei ole täysin vakiintunut. Pehkosen (2000, 375) mukaan matemaattinen ajattelu pitää erottaa matematiikan sisältöjen ja tekniikoiden hallinnasta. Burtonin (1984) mukaan matemaattinen ajattelu ei ole ajattelua matematiikasta, vaan se on ajattelutapa, joka on tiettyjen matematiikan operaatioiden, prosessien ja dynamiikan funktio. Matemaattisen ajattelun prosesseja ovat erikoistapauksen tutkiminen, otaksumien tekeminen, yleistäminen ja vakuuttaminen (Burton 1984, 37–38). Pehkonen (2000) kuvaa Ricen (1992) näkemystä matemaattisesta ajattelusta, joka lähestyy käsitettä hieman erilaisesta näkökulmasta. Rice korostaa matemaattisen ajattelun strategioita, joita ovat hänen mukaansa luokittelu, lukujonotaidot, analogian muodostaminen, deduktiivinen päättely ja ongelmanratkaisutaidot (Pehkonen 2000, 375).

Joutsenlahti (2005b) esittää Sternbergin (1996) näkemystä matemaattiseen ajatteluun vaikuttavista tekijöistä. Oppilaan matemaattiseen ajatteluun vaikuttavat oppilaan omat uskomukset, matemaattiset kyvyt, informaation prosessointi ja ongelmanratkaisu sekä kulttuuri, jossa oppilas elää (Joutsenlahti 2005b, 51). Matemaattisen ajattelun rakentumista havainnollistetaan Kuviossa 2.



Kuvio 2. Matemaattisen ajattelun osa-alueita (Joutsenlahti 2005b, 51)

Joutsenlahden (2005b) mukaan oppilaan *uskomukset* matematiikan opiskelussa vaikuttavat merkittävästi hänen ajatteluunsa ja toimintaansa, joten ne ovat yhteydessä myös matemaattiseen ajatteluun. Kun matemaattista ajattelua tarkastellaan *kulttuurin* näkökulmasta, viitataan oppimisen tilannesidonnaisuuteen sekä kansallisen kulttuurin ominaispiirteisiin. Näin ollen kieli, joka on aina sidoksissa tiettyyn kulttuuriin, nähdään myös ajattelun välineenä. Matematiikan tilannesidonnaisuus näkyy arkielämän matematiikassa, joka on erilaista eri kulttuureissa. (Joutsenlahti 2005b, 51–52, 55–56.)

Informaation prosessointi ja ongelmanratkaisu koulussa liittyvät Joutsenlahden (2005b) mukaan matemaattisen tiedon prosessointiin, johon myös uskomuksilla on kiinteä yhteys. Kiinnostuksen kohteena ovat ne matemaattisen ajattelun piirteet, jotka ovat merkittävimpiä matemaattisten käsitteiden muodostumisprosesseissa ja ongelmanratkaisussa. Jos matemaattista ajattelua kuvataan ongelmanratkaisun näkökulmasta, voidaan siitä havaita erityyppisten tietojen prosessointeja. (Joutsenlahti 2005b, 66.)

Matemaattisen ajattelun ytimen muodostaa Malatyn (1977) mukaan deduktiivinen ajattelutapa. Sen mukaan yleisestä, totena pidetystä asiasta voidaan johtaa aina uusi ominaisuus, joka on myös tosi (Malaty 1997, 116). Deduktiivisen ajattelutavan omaksuminen on tärkeää, sillä muun muassa loogisten johtopäätösten tekeminen edellyttää deduktiivista ajattelua (Malaty 1997, 116). Alakoulun oppilaat eivät kuitenkaan kykene vielä deduktiiviseen oppimiseen, koska he tarvitsevat konkretiaa ja toimintaa – induktiivista opetusta – ymmärtääkseen asioita (Oravecz 2005, 24). Näin ollen oppilas kykenee deduktiiviseen ajatteluun aikaisintaan ollessaan yläkoulussa.

Voidaanko matemaattista ajattelua opettaa? Yrjönsuuri (2004) on esittänyt matematiikan tehtävän ratkaisemisen mallin, joka on käyttökelpoinen reaalimaailman ongelmien matematisointiin ja matemaattisen ajattelun opiskeluun. Yrjönsuuren (2004) ratkaisumalli koostuu viidestä vaiheesta:

1. Matemaattisen tehtävän tavoite:

   Tehtävän alku- ja lopputilan sisällöllisen muutoksen tiedostaminen: ongelman havaitseminen ja hahmottaminen sekä kuvallinen esittäminen, mielikuva tuloksesta.

2. Siirtyminen verbaalisesta kielestä matemaattiseen kieleen:

   Ongelman alku- ja lopputilaan liittyvän kielen muuttaminen matematiikan kielelle: lauseiksi ja kaavoiksi, sekä muuttujien valinta (mitä tunnetaan ja mitä pitää rakentaa uudelleen).

3. Matemaattisten käsitteiden, lausekkeiden ja operaatioiden ominaisuuksien pohdinta:

   Tämä mahdollistaa alkutilan lauseiden muuntamisen lopputilaan. Ajattelu tulee kohdistaa matemaattisten rakenteiden ja periaatteiden ymmärtämiseen siten, että valitut muutokset sopivat kokonaisuuteen ja täsmentävät operaattorin tai menetelmän valintaa.

4. Matemaattisen operaation käyttäminen:

   Ongelman rutiininomainen ratkaiseminen valitulla menetelmällä päässälaskien tai laskimen tai muun apuvälineen avulla.

5. Ongelman rajojen arviointi ja ratkaisun esittäminen:

   Tarkoittaa kaikkien mahdollisuuksien huomioimista ja saatujen tulosten kriittistä vertaamista tavoiteltuun lopputilaan. Saatu tulos tulee esittää reaalimaailman kielellä.

Mallin jokaisessa vaiheessa joudutaan käyttämään hyvinkin monenlaista matemaattista ajattelua. Erityisesti vaiheissa 2 ja 3 oppilas joutuu erittelemään käsitteiden ja operaatioiden koettelulla niitä tietoja, ominaisuuksia ja muuttujia, joita halutun operaation käyttäminen edellyttää. Näin ollen matemaattisen ajattelun opettamisen ongelmaksi nousee sellaisen matemaattisen ajattelun ominaisuuden havaitseminen, jota halutaan opettaa. (Yrjönsuuri 2004, 118–119.)

Lapsen matemaattinen ajattelu kehittyy vaiheittain siten, että edellinen vaihe on aina seuraavan edellytys. Vygotskin (1982) mukaan lapsen abstrakti ajattelu kehittyy kaikilla tunneilla, ei pelkästään matematiikan tunneilla. Matemaattisen ajattelun kehittymisestä pohdittaessa yhdytään useasti Piaget´n näkemyksiin yksilön ajattelun kehittymistä. Seuraavaksi perehdytäänkin tarkemmin tähän teoriaan ja sen eri kehitysvaiheisiin matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta.

Piaget´n teoria ajattelun kehittymisestä

Piaget´n (1977, 1988) mukaan yksilön kehityksessä sekä sosiaalinen, henkinen että fyysinen kehitys etenevät yhtäaikaisesti ollen keskenään jatkuvassa vuorovaikutuksessa. Tämän näkemyksen pohjalta hän on muotoillut teorian yksilön ajattelun kehityksestä, jossa hän jakaa kehityksen neljään erilliseen vaiheeseen (Piaget & Inhelder 1977; Piaget 1988): *sensomotorinen vaihe* (~0–2 v.), *esioperationaalinen vaihe* (~2–7 v.), *konkreettisten operaatioiden vaihe* (~7–12 v.) ja *formaalisten operaatioiden vaihe* (yli 12 v.).

Operaatiolla tarkoitetaan tässä yhteydessä sellaisia toimintoja, jotka on mahdollista sisäistää ja palauttaa. Operaatiot eivät ole irrallisia, vaan ne on mahdollista aina yhdistää järjestelmällisiksi kokonaisuuksiksi. Niiden havaitseminen ei ole ominaista yksilölle, vaan jokainen samassa kehitystasossa oleva yksilö kykenee havaitsemaan ne samanlaisena. Eräs esimerkki operaatiosta on yhteenlasku, joka on hyvin yleinen operaatio yhdistämisestä. Se täyttää myös operaation palautuvuusominaisuuden, sillä yhteen laskemisen vastakohtana on vähentäminen. (Piaget & Inhelder 1977, 94–95.)

Kouluun tullessaan lapsi voi olla vielä esioperationaalisessa vaiheessa, mutta pian koulun aloittamisen jälkeen noin seitsemän vuoden ikäisenä hän siirtyy jo konkreettisten operaatioiden vaiheeseen ja pysyy siinä koko alakoulun ajan. Lasten siirtyessä yläkouluun, voivat he olla vielä konkreettisten operaatioiden vaiheessa tai sitten he ovat siirtymävaiheessa kohti formaalisten operaatioiden vaihetta. (Piaget 1988, 23–24.) Lapsen matemaattisen ajattelun kehityksen alku ei ajoitu koulunaloitukseen, vaan se alkaa jo paljon varhaisemmassa vaiheessa. Sen vuoksi tässä tutkimuksessa perehdytään Piaget´n teorian kaikkiin neljään vaiheeseen.

Sensomotorista vaihetta pidetään lapsen ajattelun kehityksen kannalta kaiken perustana, joka mahdollistaa lapselle myöhempien vaiheiden operaatiot (Piaget & Inhelder 1977, 35). Lapsen kehitys pohjautuu refleksien eli synnynnäisten aistien ja liikkeiden käyttöön. Lapsen käyttämät refleksit sulautuvat pikku hiljaa hankittujen kokemusten ja havaintojen kanssa. Lapsen älykkyys on hyvin käytännöllistä, sillä lapsi kykenee käsittelemään esineitä ja muodostamaan toimintaskeemoja tekemiensä havaintojen ja liikkeiden pohjalta. (Piaget & Inhelder 1977, 13–14; Piaget 1988, 28–32.) Skeema on selvästi jäsentyneiden toimintojen kokonaisuus (Piaget & Inhelder 1977, 14). Samalla lapsi yrittää hahmottaa myös ympäröivää todellisuutta tilan, ajan ja syysuhteiden rakenteiden avulla, jonka yhteydessä hänelle kehittyy ymmärrys esineiden pysyvyydestä (Piaget & Inhelder 1977, 14, 21, 23; Piaget 1988, 28–30).

Esioperationaalinen vaihe on lapsen älyllisen kehityksen aikaa. Tällöin lapsen henkinen kehitys lähtee liikkeelle, jolloin lapsi alkaa sosiaalistua puheen avulla, hän kykenee ajattelemaan puheen sisäistyessä ja hänen toimintonsa sisäistyvät. Lapselle ajattelun kehitystä tukee hänen älyllisten toimintojensa laajeneminen ja kehittyminen. Lapsen ajattelu pysyy siis koko vaiheen ajan esiloogisena, eli hän korvaa logiikan intuition mekanismilla sekä havaintojen ja liikkeiden sisäistämisellä mielikuviksi. (Piaget 1988, 37, 42–56.) Tämän vaiheen alussa lapsi kykenee luokittelemaan esineitä järjestämällä niitä erilaisten kuvioiden muotoon, mutta vaiheen loppupuolella opettelee luokittelua ryhmiin niiden ominaisuuksien perusteella. Lapsi kykene muodostamaan erilaisia sarjoja empiirisesti kokeilemalla muuttaen järjestystä. Lapsen lukukäsite kehittyy. (Piaget & Inhelder 1977, 99–103.)

Konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsen ajattelu ei pohjaudu enää intuitioon, vaan konkreettisiin operaatioihin, jotka kohdistuvat suoraan tarkasteltavaan esineeseen. Konkreetit operaatiot muodostavat siirtymävaiheen toiminnan ja abstraktin välille. Noin 8 vuoden iässä lapsen luokittelu on operationaalista, jolloin hän ymmärtää luokan ja siihen kuuluvan alaluokan keskinäisen suhteen. Tähän vaiheeseen tullessa lapselle on kehittynyt kyky muodostaa yksinkertaisia sarjoja, jolloin hän alkaa muodostaa sarjoja kahden ulottuvuuden perusteella. Konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapselle kehittyy myös säilyvyyden käsitteet seuraavassa järjestyksessä: aineen säilyminen (Ikävuodet 7–8), painon säilyminen (ikävuodet 9–10) ja tilavuuden säilyminen (ikävuodet 11–12). Lapsi kykenee ymmärtämään käänteisyyden eli negaation (operaation yhdistyminen käänteisoperaatioon peruuttaa operaation) ja vastavuoroisuuden eli symmetrian käsitteet, mutta ne ovat vielä toisiinsa nähden irrallisia. Lapselle kehittyy 11–12 vuoden iästä alkaen suhteellisuuden käsite, eli hän alkaa ymmärtää avaruudelliset suhteet, metrisen nopeuden ja todennäköisyyden. (Piaget & Inhelder 1977, 95–100, 131–132, 136; Piaget 1988, 68–70, 73.)

Formaalisten operaatioiden vaihe on se vaihe, jossa lapsen ajattelu vapautuu konkretiasta ja hän alkaa kyetä ajattelemaan käsitteiden avulla. Tässä vaiheessa lapselle alkaa siis kehittyä deduktiivinen eli muodollinen ajattelu. Lapsen luokittelu- ja järjestyssuhdeoperaatioiden abstrahoitumisen seurauksena lapsi kykenee ymmärtämään kombinaatiojärjestelmän (esim. kombinaatiot ja permutaatiot). Tässä vaiheessa lapsi ymmärtää myös käänteisyyden ja vastavuoroisuuden yhtenä järjestelmänä, (Piaget & Inhelder 1977, 126–132.)

2.2 Ajatuksia matematiikan opettamisesta

Minkälainen matematiikan opetus mahtaisi olla laadukasta ja tehokasta? Vygotskin (1982, 186) mukaan *"opetus on hyvää vain silloin, kun se kulkee* *kehityksen edellä"*. Tällaista hedelmällisintä opetusvaihetta kutsutaan lähikehityksen vyöhykkeeksi, jossa lapsi kykenee opettajan ohjauksen ja tuen avulla oppimaan sellaisia tietoja ja taitoja, joita hän ei yksin vielä kykenisi oppimaan (Vygotski 1982, 184, 186). Tehokkaan matematiikan opetuksen käsite ei kuitenkaan ole yksiselitteinen tutkijoiden keskuudessa, sillä opettajat eivät ole yksimielisiä matematiikan opetuksen luonteesta. Pehkosen ja Kaasilan (2008, 37) mukaan *"matematiikan opetus on tehokasta, kun oppilaiden matematiikan oppimista edistetään mahdollisimman hyvin, toisin sanoen kun laskutaidot ja ymmärtämisen taidot kehittyvät optimaalisesti"*. Tutkimuksien pohjalta Pehkonen ja Kaasila ovat koostaneet tehokkaan matematiikan opetuksen kuusi ominaispiirrettä: tavoitteellisuus, joustavuus, yksilöllistäminen, eri elementtien yhdistäminen, ongelmakeskeisyys ja arviointi (Pehkonen & Kaasila 2008, 37).

Tavoitteellisuudella viitataan siihen, että opettajan tulee olla aina tietoinen opetuksen tavoitteista, sillä ne ohjaavat kaikkea hänen toimintaansa tuntien suunnittelusta ja toteutuksesta aina arviointiin asti. Tehokkaan matematiikan opetuksen päätavoitteena tulisi olla ymmärtämisen ja laskutaitojen kehittäminen. Joustavuus liittyy opettajan ominaisuuteen olla kiinnostunut oppilaistaan: kuunnella heitä ja yrittää ymmärtää heitä, sillä opettaja tarvitsee tietoa oppilaidensa uskomuksista, heidän käyttämistään strategioista ja systemaattisista virheistä. Yksilöllistäminen on eräs opettajan tärkeimmistä, mutta haastavimmista tehtävistä. Konstruktivismi näkee tiedon rakentamisprosessin hyvin henkilökohtaisena eikä tietoa voida siirtää toiselle. Lisäksi jokaisella oppilaalla on oma tapansa oppia ja rakentaa tietoa, joten yksilöllisyyden huomioiminen aiheuttaa väistämättä opetuksen yksilöllistämistä eli eriyttämistä. (Pehkonen & Kaasila 2008, 37–38.)

Hyvässä ja tehokkaassa matematiikan opetuksessa oleellista on myös systemaattinen ja tavoitteellinen eteneminen. Tämä vastuun kantaminen kuuluu opettajalle. Hänen on oltava koko opetusprosessin ajan tietoinen siitä, mitä tehdään, miten tehdään ja ennen kaikkea; miksi kyseistä asiaa tehdään. Koska tavoitteellinen opetus pohjautuu oppilaiden taitotasoon ja ennakkokäsityksiin, opettajan on lähdettävä opetuksessa liikkeelle oppilaiden matemaattisten taitojen havainnoinnista ja kartoittamisesta. Tämän avulla hän pystyy rakentamaan opetuksensa siten, että uusi opetettava asia linkittyy aina oppilaiden aikaisemmin oppimiinsa asioihin. (Kajetski & Salminen 2009, 11.)

Kommunikoinnilla on merkittävä rooli matematiikan opetuksessa, sillä se kehittää matemaattista ajattelua ja vaikuttaa myönteisesti käsitteiden ja sääntöjen oppimiseen (Pehkonen & Kaasila 2008, 38). Kommunikoinnin tärkeyttä korostaa myös Joutsenlahti (2005a) puhumalla kielentämisen tärkeydestä matematiikan opetuksessa (Kielentämisen etuja käsitellään enemmän luvussa 3.4.6). Matematiikan opetuksessa painottuvat verbaalisen kommunikoinnin neljä toimintoa: lukeminen, kirjoittaminen, puhuminen ja kuunteleminen. (Pehkonen & Kaasila 2008, 38–39.)

2.2.1 Suomalaisen matematiikan opetuksen yleispiirteitä

Suomessa on vallalla matematiikan oppimiseen liittyvä näkemys, jonka mukaan matematiikka on ikävä oppiaine (Kahanpää 2005, 90). Lisäksi ajatellaan, että matematiikkaa ei enää tarvita, kun laskeminen voidaan hoitaa koneiden avulla. Matematiikka on kuitenkin kaikkea muuta kuin mekaanista laskemista. (Kahanpää 2005, 90–91; Näätänen 2000, 114.) Matematiikan opiskelu parantaa lapsen keskittymistä, kehittää lasta itsenäiseen ajatteluun, harjoittaa aivoja sekä antaa älyllisiä virikkeitä. Matematiikan oppiminen vaatii lapselta myös kykyä keskittyä sekä toteuttaa älyllisesti pitkäjänteisiä ponnisteluja. Matematiikka tieteenä taas on mielenkiintoinen, moderni ja nopeasti kehittyvä ala, jota tarvitaan yhä useammilla, myös niin sanotuilla pehmeillä aloilla. Sitä pidetään korkean teknologian perustana. (Kahanpää 2005, 90.)

Suomalaista matematiikan opetusta luonnehditaan usein opettajajohtoiseksi – opettajan esittäväksi opetukseksi. Tällöin lapsen rooli on passiivinen, sillä hän toimii vain tiedon vastaanottajana. (Tikkanen 2005, 101.) Nykyään matematiikan opetuksessa korostetaan konstruktivistista oppimiskäsitystä, jonka mukaan lapsi on aktiivinen; hän ohjaa omaa toimintaansa ja konstruoi oman tietonsa (Koponen 1995, 16–17). Tämä oppimiskäsitys ei näytä kuitenkaan olevan vakiintunut kaikkialle suomalaisiin kouluihin ja siellä tapahtuvaan matematiikan opetukseen. Suomalaisen matematiikan opetuksen on havaittu olevan tyypillisesti hyvin oppikirjasidonnaista. Opettajan opetuksen lisäksi tyypillisin työskentelymuoto on kirjan tehtävien itsekseen laskeminen. (Tikkanen 2005, 101.)

Matematiikan oppitunnit ovat useimmiten hyvin kaavamaisia. Niistä on erotettavissa selvästi neljä vaihetta. Oppituntitunti aloitetaan tarkistamalla kotitehtävät. Sen jälkeen käsitellään uutta asiaa opettajan johdolla tai käydään läpi yhdessä muutama esimerkkitehtävä. Seuraavaksi vuorossa on itsenäisen työskentelyn vaihe, jolloin oppilaat laskevat oppikirjan tehtäviä. Tunnin lopuksi opettaja antaa kotitehtävät, jonka jälkeen tunti päättyy. (Tikkanen 2005, 102.)

2.2.2 Opetussuunnitelmat

Suomen koulujen opetustoimintaa linjaavat valtakunnalliset opetussuunnitelmat. Seuraavassa tarkastelen, mitä yhtymäkohtia perusopetuksen ja lukion opetussuunnitelman perusteista löytyy toiminnalliseen ja tutkivaan matematiikkaan liittyen. Koska tutkimukseni tekohetkellä eletään opetussuunnitelmien murrosaikaa, tarkastelen tässä yhtymäkohtia myös tuleviin opetussuunnitelman perusteisiin.

Perusopetuksen opetussuunnitelma

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus 2004, 158) mukaan matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota oppilaalle mahdollisuus kehittää hänen omaa matemaattista, luovaa ja täsmällistä ajatteluaan. Tämän lisäksi tavoitteena on oppia matematiikkaan liittyviä käsitteitä sekä yleisiä ratkaisumenetelmiä. Matematiikan opetuksen tulee myös ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan erilaisia ongelmia sekä etsimään niihin ratkaisuja. Matematiikan opetuksen tavoitteet ja tehtävät eivät kohdistu pelkästään oppiaineen oppimiseen, vaan matematiikalla on laajempikin merkitys: se edistää oppilaan henkistä kasvua, tavoitteellista toimintaa sekä sosiaalista vuorovaikutusta. (Opetushallitus 2004, 158.)

Matematiikan opetuksen tulee edetä systemaattisesti luoden samalla kestävää pohjaa matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. *Konkreettisuus* nähdään opetuksessa tärkeänä, kun yhdistellään oppilaan kokemuksia ja ajatuksia matematiikan abstraktiin järjestelmään. Matematiikan opetuksessa tulee myös hyödyntää sellaisia arkipäivän ongelmia, joita voidaan ratkaista matemaattisen ajattelun ja toiminnan avulla. (Opetushallitus 2004, 158.)

Vuonna 2016 voimaan tuleva perusopetuksen opetussuunnitelma korostaa seuraavia asioita matematiikan opetuksessa:

> *Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaan loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaan kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Matematiikan kumulatiivisesta luonteesta johtuen opetus etenee systemaattisesti. Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua. Oppimista tuetaan hyödyntämällä tieto- ja viestintäteknologiaa. Matematiikan opetus tukee oppilaan myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja positiivista minäkuvaa matematiikan oppijana. Se kehittää myös viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja. Matematiikan opiskelu on tavoitteellista ja pitkäjänteistä toimintaa, jossa oppilas ottaa vastuuta omasta oppimisestaan. Opetus ohjaa oppilasta ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Opetus kehittää oppilaan kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti.* (Opetushallitus 2014, 135, 261, 429.)

Tällä hetkellä käytössä oleva matematiikan perusopetuksen opetussuunnitelma on jaettu vuosiluokittain seuraavaan kolmeen osaan: 1–2, 3–5 ja 6–9. Jokaisessa osiossa kuvataan opetuksen ydintehtävät, keskeiset sisällöt sekä tavoitteet. Tämän lisäksi opetussuunnitelmassa esitellään kuvaus oppilaan hyvästä osaamisesta kussakin nivelvaiheessa. (Opetushallitus 2004, 158–167.) Vuonna 2016 voimaan tuleva opetussuunnitelma on jaettu myös vuosiluokittain kolmeen osaan pienin muutoksin aiempaan verraten: 1–2, 3–6 ja 7–9. Jokaisessa osiossa matematiikan opetuksen tavoitteet on taulukoitu ja jokaiseen tavoitteeseen on linkitetty siihen liittyvät sisältöalueet sekä laaja-alaisen osaamisen kokonaisuus, johon kyseinen tavoite liittyy. (Opetushallitus 2014, 135–138, 261–266, 429–436.)

Vuosiluokilla 1–2 matematiikan opetuksella on kolme ydintehtävää: matemaattisen ajattelun kehittäminen, työskentelytapojen omaksuminen (kuunteleminen, keskittyminen ja kommunikoiminen) sekä *kokemusten hankkiminen* matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi. Näiden lisäksi on tärkeää, että lapsi saa opetuksesta monipuolisia kokemuksia eri tavoista esittää matematiikan käsitteitä *puhuen*, kirjoittaen, *välineiden* sekä symbolien avulla. Kyseisten vuosiluokkien aikana lapsen tulee myös harjaantua perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisten välineiden, mallien ja kuvien avulla sekä suullisesti ja kirjallisesti. (Opetushallitus 2004, 158.) Uudessa opetussuunnitelman luonnoksessa tärkeänä nähdään seuraavat asiat:

> *Vuosiluokkien 1−2 matematiikan opetuksessa oppilaalle tarjotaan monipuolisia kokemuksia matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi. Opetuksessa hyödynnetään eri aisteja. Opetus kehittää oppilaan kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvia. Matematiikan opetus luo vahvan pohjan lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän ymmärtämiseksi sekä laskutaidolle.* (Opetushallitus 2014, 135.)

Vuosiluokilla 3−5 opetukseen kuuluu neljä ydintehtävää: matemaattisen ajattelun kehittäminen, matemaattisten ajattelumallien oppimisen pohjustaminen, lukukäsitteen ja peruslaskutoimitusten varmentaminen sekä kokemusten hankkiminen matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumisen pohjaksi. Opetuksen tulee olla sellaista, että lapsi oppii muodostamaan matemaattisia käsitteitä ja käsitejärjestelmiä *tutkien ja havainnoiden*. Lapsen tulisi myös oppia esittämään kysymyksiä ja päätelmiä tehtyjen havaintojen pohjalta. (Opetushallitus 2004, 160–161.) Uudessa opetussuunnitelman luonnoksessa tärkeänä nähdään seuraavat asiat:

> *Vuosiluokkien 3−6 matematiikan opetuksessa tarjotaan kokemuksia, joita oppilas hyödyntää matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostamisessa. Opetus kehittää oppilaan taitoja esittää matemaattista ajatteluaan ja ratkaisujaan eri tavoilla ja välineillä. Monipuolisten ongelmien ratkaisu yksin ja ryhmässä sekä erilaisten ratkaisutapojen vertailu ovat opetuksessa keskeistä. Matematiikan opetuksessa varmennetaan ja laajennetaan oppilaan lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän ymmärtämistä. Lisäksi kehitetään laskutaidon sujuvuutta.* (Opetushallitus 2014, 261.)

Vuosiluokilla 6−9 ydintavoitteena on syventää ymmärrystä matemaattisista käsitteistä. Tämän lisäksi opetuksen tulee tarjota perusvalmiudet, joihin sisältyy arkipäivän matemaattisten ongelmien mallintaminen, matemaattisten ajattelumallien oppiminen sekä muistamisen, keskittymisen ja täsmällisen ilmaisun harjoitteleminen. (Opetushallitus 2004, 163.) Uudessa opetussuunnitelman luonnoksessa tärkeänä nähdään seuraavat asiat:

> *Vuosiluokkien 7−9 matematiikan opetuksen tehtävänä on vahvistaa matemaattista yleissivistystä. Opetuksessa syvennetään matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä. Opetus innostaa oppilasta löytämään ja hyödyntämään matematiikkaa omassa elämässään. Oppilaan valmiuksiin kuuluvat ongelmien matemaattinen mallintaminen ja ratkaiseminen. Matematiikan opetus ohjaa oppilasta tavoitteelliseen, täsmälliseen, keskittyneeseen ja pitkäjänteiseen toimintaan. Oppilasta rohkaistaan esittämään ratkaisujaan ja keskustelemaan niistä. Opetuksessa kehitetään oppilaan yhteistyötaitoja.* (Opetushallitus 2014, 429.)

Lukion opetussuunnitelma

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus 2003, 118) todetaan, että matematiikan opetuksen tulee herättää opiskelijoita tekemään *omien havaintojen pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä* sekä perustelemaan niitä. Matematiikan opetuksen yhtenä tärkeänä tehtävänä lukiossa on opettaa opiskelijoita käyttämään sekä puhuttua että kirjoitettua *matematiikan kieltä*. Oleellista on myös kehittää opiskelijoiden *ongelmanratkaisutaitoja*: tukea heitä *luovien ratkaisujen* kehittämiseen ja opettaa ratkaisujen kriittistä arviointia. Jotta matematiikan opetus kehittää opiskelijan persoonallisuutta, tulee opettajan ohjata opiskelijan omaa kiinnostuneisuutta sekä kannustaa erilaisiin kokeiluihin. (Opetushallitus 2003, 118−119.)

Lukion matematiikan opetus voidaan suorittaa joko pitkänä tai lyhyenä oppimääränä. Molempien oppimäärien opetuksen tavoitteissa korostetaan, että opetuksen tulisi rohkaista opiskelijoita *kokeilevaan, keksivään ja tutkivaan toimintaan*. Tärkeänä tavoitteena pitkän oppimäärän tavoitteissa nähdään myös matematiikasta keskusteleminen. Matemaattisen tiedon käsitteleminen matematiikalle ominaisella tavalla - otaksumien tekeminen, niiden oikeellisuuden tutkiminen, perusteleminen, perustelujen pätevyyden arvioiminen ja tulosten yleistettävyys - on myös tärkeää. Lyhyen matematiikan opetuksen tavoitteissa korostetaan myönteisten oppimiskokemusten saamista matematiikan parissa työskentelemisestä (Opetushallitus 2003, 119, 125.)

2.3 Ajatuksia matematiikan oppimisesta

Matematiikan oppiminen tapahtuu sisäisenä prosessina, eli yksilö ei kykene tunnistamaan prosessin etenemistä, vaan hän havaitsee pelkästään sen tuloksia. Oppiminen ei siis ole sitä, että oppilas näkee opettajan tekevän jonkin matemaattisen ratkaisuprosessin, vaan sitä, mitä hänen aivoissaan tapahtuu ja muuttuu tuohon näkemiseen ja toimintaan liittyen. Kun oppilaan kokemukset omasta ja/tai toisen henkilön toiminnasta muodostavat kokonaisuuden, kykenee hän ymmärtämään opittavan asian, jonka perusteella hänelle muodostuu käsitys siitä. (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri 1998, 114–115.) Matematiikan oppiminen nähdäänkin melko pysyvinä kokemukseen pohjautuvina muutoksina oppilaan tiedoissa, taidoissa ja valmiuksissa sekä itse toiminnassa (Koponen 1995, 17 Lehtiseen viitaten). Matematiikan oppimisessa yksilölle syntyy siis valmius matemaattiseen toimintaan eli hän kykenee esimerkiksi synnyttämään uusia matemaattisia ajatuksia tai toimintoja (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri 1998, 114).

Matematiikan oppiminen on kontingenttia: sitä tapahtuu tai voi olla tapahtumatta. Se ei siis ole koko elämän jatkuva prosessi, vaikka yksilöllä on edellytykset siihen läpi elämän. Opetuksen suurena haasteena on se, miten oppilaat saadaan oppimaan. Matematiikan oppimisen mahdollistavat matemaattiset kokemukset ja niiden reflektoiminen. Matemaattista kokemusta reflektoidessaan yksilö vertaa saamiaan uusia käsityksiä ja kokemuksia hänellä jo oleviin tietoihin ja kokemuksiin. Tämän perusteella hän yrittää muodostaa ilmiöstä abstraktin käsityksen sekä antaa sille merkityksen. Reflektoidessaan yksilöllä on mahdollisuus myös hylätä uusi asia tai näkemys, jos se ei ole yksilölle itselleen mielekäs ja merkityksellinen. (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri 1998, 114–115.)

Lapsella on todettu olevan synnynnäinen taipumus aktiiviseen ympäristön tutkimiseen ja mielekkäiden ongelmien ratkaisemiseen (Brotherus ym. 2002, 69). Tästä syystä lapsen rooli oppijana on myös aktiivinen ja aloitteellinen. Lapsen kiinnostus uusia asioita kohtaan herää toiminnan, havaintojen ja kokemusten kautta. (Brotherus ym. 2002 Pramlingiin viitaten, 73.) Lapsen aktiivista oppijan roolia ei kuitenkaan ole aina korostettu, sillä aiemmin ajateltiin, että opettajan tehtävänä on siirtää opetettavat asiat suoraan lapselle tämän toimiessa passiivisena vastaanottajana. Nykyään matematiikan opetuksessa painotetaan konstruktivistista oppimiskäsitystä, joka korostaa Brotheriuksen ym. (2002) tavoin lapsen aktiivista roolia oman toimintansa ohjaajana. Sen mukaan lapsi siis itse konstruoi oman tietonsa ja hänen oppimisensa etenee syklisen prosessin mukaan siten, että aiemmin opittujen tietojen ja taitojen avulla omaksutaan uutta. (Koponen 1995, 16–17.)

2.3.1 Oppiminen ja minäkäsitys

Minäkäsitys tarkoittaa yksilöllä olevaa pysyvää käsitystä siitä, millainen hän on (Keltikangas-Järvinen). Linnanmäki (2004) korostaa minäkäsityksen olevan hyvin kokonaisvaltainen. Korpisen (1990) mukaan minäkäsitys on organisoinut, kognitiivinen järjestelmä, joka muodostuu yksilön saamista kokemuksista itsestään. Se pitää sisällään yksilön havainnot itsestään suhteessa muihin, tavoitteet, arvot ja ihanteet. Yksilö siis muodostaa minäkäsitystään ympäröivästä maailmasta saamiensa kokemusten ja niistä tehtyjen tulkintojen kautta. Siihen vaikuttaa myös yksilön tärkeiltä ihmisiltä saama sekä itse tehty arvio yksilön käyttäytymisestä. Minäkäsitys on siis jatkuvassa vuorovaikutuksessa yksilön kokemusmaailman kanssa. (Korpinen 1990, 8, 10.)

Korpisen (1990) mukaan minäkäsitys on oppimien tulosta. Sen seurauksena voidaan ajatella, että lapsella on itsestään yleinen minäkäsitys sekä eri oppiaineisiin liittyvä minäkäsitys eli tämän tutkimuksen näkökulmasta myös matematiikkaminäkäsitys (Korpinen 1995, 27).

Matematiikkaminäkäsityksellä tarkoitetaan oppilaan käsitystä itsestä matematiikan oppijana. Se kuvastaa myös oppilaan suhdetta matematiikkaan, sen oppimiseen ja opettamiseen. (Tikkanen 2008, 20–21.) Matematiikkaminäkäsitys on keskeisin niistä affektiivisista tekijöistä, jotka vaikuttavat matematiikan oppimiseen ja sen saavutuksiin (Linnanmäki 2004, 244–245; Tikkanen 2008, 20). Pietilä (2002) käyttää tässä kohtaa käsitettä matematiikkakuva. Tässä tutkimuksessa matematiikkaminäkäsitys ja matematiikkakuva tarkoittavat samaa.

Pietilä (2002) määrittelee matematiikkakuvan muodostuvan lapsen subjektiivisista tiedoista ja tunteista. Matematiikkakuva koostuu hänen mukaan kahdesta osasta: lapsen kuvasta itsestään matematiikan oppijana sekä matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta. Lapsen kuvaan itsestään matematiikan oppijana sisältyy hänen henkilökohtaiset matematiikkaan liittyvät tavoitteensa ja motiivinsa, käsitys matematiikan käyttökelpoisuudesta, tunteet matematiikkaa kohtaan (pitäminen ja ei pitäminen) ja niihin liittyvät syyt, arvio omista kyvyistä opiskella matematiikkaa (missä matematiikan osa-alueessa olen vahva ja missä heikko) sekä onnistumisen ja epäonnistumisen syyt. Lapsen kuva matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta sisältää taas käsityksen siitä, mitä ja minkälaista matematiikka on, miten matematiikkaa opitaan sekä miten sitä opetetaan. (Pietilä 2002, 23–24.)

Matematiikka on ollut koulussa arvostettu oppiaine kautta aikojen (Linnanmäki 2004, 241). Tutkimukset osoittavat, että matematiikan saavutuksilla ja minäkäsityksellä on selkeä yhteys. Tämä yhteys voimistuu koko ajan oppilaan edetessä ylemmille luokkatasoille. Minäkäsityksellä näyttääkin olevan positiivinen yhteys koulusaavutuksiin (Korpinen 1995, 29). Oppilaille on siis tärkeää matematiikassa onnistuminen. Matematiikassa hankitut saavutukset ovat heille muiden aineiden saavutuksiin nähden merkityksellisempiä. (Linnanmäki 2004, 241.) Lapsen saamilla matematiikan koetuloksilla näyttää olevan iso merkitys hänen matematiikkaminäkäsitykselleen, sillä näiden tulosten pohjalta lapsen on havaittu luovan käsitystä itsestään matematiikan oppijana (Tikkanen 2008, 280). Niiden oppilaiden, jotka selviytyvät ensimmäisten kouluvuosien aikana hyvin matematiikassa, minäkäsitys näyttää kehittyvän positiivisesti. Vastaavasti niiden oppilaiden, jotka kokevat vastoinkäymisiä ja epäonnistumisia matematiikassa, minäkäsityksen kehitys heikkenee. (Linnanmäki 2004, 251–252.)

Matematiikassa hankittu koemenestyminen ei ole ainut tekijä, mikä näyttää vaikuttavan lasten kuvaan itsestään matematiikan osaajana. Tikkasen (2008) tutkimuksissa suomalaiset ja unkarilaiset lapset kuvaavat omaa matematiikkaminäkäsitystään sen perusteella, ymmärtävätkö he matematiikkaa. Tämän perusteella lapselle kehittyy myönteinen matematiikkaminäkäsitys silloin, jos hän kokee ymmärtävänsä matematiikkaa. Vastaavasti niille lapsille muodostuu kielteinen minäkäsitys, joilla on vaikeuksia ymmärtää matematiikkaa. Tämä ajatus vaikuttaa järkevältä, sillä on vaikea ajatella olevansa hyvä jossakin, mitä ei oikeasti ymmärrä. (Tikkanen 2008, 280.)

Lapsen matematiikkaminäkäsityksellä on selkeä yhteys myös hänen itsetuntoonsa ja itseluottamukseensa, sillä matematiikan oppimisessa hankitut kokemukset vaikuttamat menestymiseen, itsetuntoon ja itsetyytyväisyyteen. Vastaavasti itsetunto vaikuttaa toimintaan matematiikan oppimisessa ja siinä saadut kokemukset vaikuttavat suoraan matematiikkaminäkäsitykseen. Tämä mahdollistaa lapselle hänen matematiikkaminäkäsityksensä arvioimisen joko positiiviseksi tai negatiiviseksi. (Pietilä 2002, 19–20.) Lapsilla on suhteellisen korkea luottamus itseensä matematiikassa ensimmäisellä luokalla, mutta tämä luottamus laskee kouluvuosien aikana (Tikkanen 2008, 20).

2.3.2 Oppimisvaikeudet

Matematiikan oppiminen vaatii lapselta useiden taitojen hallintaa. Mikäli lapsella on puutteita jonkin taidon hallinnassa, vaikuttaa se suoraan hänen matemaattisen ajattelun kehittymiseensä ja matematiikan oppimiseen. (Kajetski & Salminen 2009, 17–19.) Matematiikan oppimisvaikeus on hyvin kompleksinen ja moninainen ongelma (Ikäheimo 1995, 23). Matematiikan oppimisvaikeuksilla on havaittu olevan yhteys myös lapsen muihin oppimisvaikeuksiin, mutta on olemassa lapsia, joilla on oppimisvaikeuksia vain matematiikassa (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 15).

Vaikeudet matematiikassa voivat liittyä muun muassa kielellisiin valmiuksiin, muistiin, havainnointiin, kokonaiskehitykseen tai tarkkaavaisuuteen (Kajetski & Salminen 2009, 17). Ongelmat voivat johtua myös lapsen huonosta toiminnanohjauksesta (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 17). Kieli on tärkeässä roolissa myös matematiikan oppimisessa (Joutsenlahti 2005a, 1). Tutkimuksissa on todettu, että noin 40 prosentilla lapsista, joilla on lukivaikeuksia, on myös vaikeuksia matematiikan oppimisessa. Matematiikan oppimisvaikeudet ovat usein yhteydessä lapsen puutteellisiin metakognitiivisiin taitoihin. Vaikeudet voivat olla myös visuaalisen tai auditiivisen hahmottamisen vaikeuksia tai molempia. (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 15.)

Mitä vaikeuksia lapsella voi sitten olla käytännössä, jos hänellä on havaittu olevan oppimisvaikeuksia matematiikassa? Tällaisen lapsella on usein vaikeuksia yleistää matematiikan sisältöjä sekä luoda yhteyksiä muun muassa lukujen, laskutoimitusten ja soveltamisen välille. Opittujen ja parhaillaan opittavien asioiden jäsentely ja mielekäs käyttäminen ovat haasteellisia. Myöskään aiemmin opittuja taitoja ei osata soveltaa uusissa tilanteissa. Matematiikassa tarvitaan hyvää havaintokykyä ja siihen liittyvät vaikeudet näkyvät kyvyttömyytenä muun muassa verrata, luokitella ja etsiä säännönmukaisuuksia tutkittavasta ilmiöstä. Jos lapsella on vaikeuksia työskennellä työmuistin varassa, on hänellä haasteita tiedon jäsentämisessä ja sen siirtämisessä pitkäkestoiseen muistiin. Myös tietojen ja taitojen mieleen palauttamisessa voi olla vaikeuksia, kun tieto ei ole jäsentynyt. Kapean työmuistin varassa työskentelevällä lapsella on haasteita toimia nopeasti ja tarkasti sekä useamman asian yhtaikaisessa käsittelyssä. Nämä heijastuvat suoraan laskemisen vaikeuksina. Toiminnanohjauksen ongelmat näkyvät lapsen osaamattomuutena hahmottaa ja suunnitella oppimisprosessia toiminnan kannalta. Tällöin mielekäs toimiminen, asiassa pysyminen, konkreetin ympäristön ja välineiden hallinta sekä käyttö ovat haasteellisia. (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 15–16.)

Suomessa matematiikan oppimisvaikeuksiin liittyvää tutkimusta on tehnyt Puro toteuttamalla erilaisia tukiopetustutkimuksia. Niiden pohjalta hän on jakanut matematiikan oppimisvaikeuksien syyt seuraavaan kolmeen osaan: matematiikan rakenteeseen liittyvät syyt, oppilaiden persoonallisuuden kehitykseen liittyvät syyt ja opetusjärjestelyistä johtuvat syyt. (Koponen 1995, 182–183.)

Matematiikan rakenteeseen liittyviin syihin sisältyy oppilaan kokemus siitä, että käytettävät matematiikan käsitteet ovat etäisiä ja että matematiikan vaikeus johtuu sen abstraktista luonteesta. Rakenteellisiin syihin sisältyy myös matematiikan rakenteen hierarkkisuuden ongelma; eli jos jotain asiaa ei olla ymmärretty kunnolla alussa, tämä aiheuttaa hankaluuksia myöhemmässä vaiheessa. Oppilaiden persoonallisuuden kehitykseen liittyvien syiden jaottelussa Puro on käyttänyt seuraavaa Magnen kolmea ryhmää: ympäristötekijät, heikko lahjakkuus ja emotionaaliset häiriöt. Jotta opetusjärjestelyt eivät aiheuttaisi oppimisvaikeuksia, edellyttää tämä opettajalta opetuksen tavoitteellista suunnittelua, mahdollisten vaikeuksien ennaltaehkäisyä, paneutumista uuden asian opettamiseen, opetuksen eriyttämistä sekä tukiopetuksen hyödyntämistä. (Koponen 1995, 182–183.) Opetuksesta johtuva tyypillinen este lapsen matematiikan oppimiselle on eteneminen liian nopeasti ja abstraktisti lapsen näkökulmasta käsin. Muita syitä ovat opetuksen systemaattisuuden, ajan ja välineiden käytön puute. (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 15.)

Voidaanko lasten matematiikkavalmiuksia tukea jo ennen koulun aloittamista, jolloin voitaisiin ennaltaehkäistä oppimisvaikeuksia tai havaita varhaisessa vaiheessa olevia vaikeuksia? Onko lapsen matematiikan oppimista mahdollista seurata ja tukea koulussa?

MAVALKA on lapsille yksilöllisesti tehtävä kartoitus, jonka avulla voidaan selvittää lapsen matematiikkavalmiuksia. Sen avulla voidaan selvittää, miten tulevat ensimmäisen luokan oppilaat tulevat selviytymään syyslukukauden aikana käytävistä matematiikan sisällöistä. MAVALKA-kartoitus voidaan tehdä myös esiopetusvaiheen alussa, jotta esiopetuksen opettaja voi seurata ja tukea lasten matemaattisten valmiuksien kehittymistä jo ennen koulun aloittamista. MAVALKAssa on myös tehtäviä, joiden avulla voidaan ennustaa ylemmillä luokilla tulevia oppimisvaikeuksia. Sen avulla saadaan selville, miten lapsi ratkaisee tehtäviä. MAVALKA-kartoitus on hyvä tehdä kaikille lapsille eikä vain niille, joilla epäillään olevan puutteita matematiikan valmiuksissa. Näin saadaan lähtökohta tulevan matematiikan opetuksen suunnittelulle sekä yksilö- että ryhmätasolla. (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 4-5.)

MAVALKA-kartoitus koostuu kahdesta versiosta: MAVALKA 1 ja MAVALKA 2. Molemmat kartoitukset sisältävät samat osa-alueet: lukukäsite, lukujono ja lukumäärän säilyminen. MAVALKA 1 soveltuu käytettäväksi, kun lapsen taitotasossa tai kielen hallinnassa havaitaan olevan tavallista suurempia puutteita. Se soveltuu tehtäväksi myös esiopetuksen alussa sekä starttiluokilla, erityisopetuksessa ja esiopetusikäisten maahanmuuttajalasten kanssa lukuvuoden alussa ja puolivälissä. MAVALKA 2 on käyttökelpoinen esiopetuksen alussa, puolivälissä ja lopussa sekä ensimmäisen luokan alussa. Sitä voidaan käyttää myös erityisopetuksessa, jos lapsella havaitaan olevan suuria puutteita matematiikan valmiuksissa myöhemmillä luokilla. (Lampinen, Ikäheimo & Dräger 2007, 5.)

MAKEKO taas on ala- ja yläkouluun suunniteltu koeaineisto, jonka avulla voidaan testata matematiikan keskeisen oppiaineksen hallintaa luokkatasoittain. Matematiikan keskeinen oppiaines tarkoittaa sitä opiskeltavaa sisältöä, jonka omaksuminen on asetettu opetussuunnitelmassa tavoitteeksi jokaiselle oppilaalle. Tämän sisällön hallinta on edellytyksenä myöhemmälle koulunkäynnille. (Ikäheimo 1995, 32–33.)

Jokaiselle luokalle (1−9) on yksi MAKEKO-koe, joka voidaan pitää lukuvuoden lopussa tai seuraavan lukuvuoden alussa. Nämä kokeet on laadittu siten, että yksi tehtävä mittaa aina yhtä asiaa. Esimerkiksi allekkain vähennyslaskusta on oma tehtävä, joka voidaan tehdä ilman lainaamista ja oma tehtävä, jonka oikea ratkaiseminen edellyttää lainaamisen hallintaa. Näin ollen oppilaan tekemät virheet ja oikeat ratkaisut rajaavat tarkasti sen sisällön, minkä lapsi hallitsee ja mihin tarvitaan lisätukea. MAKEKO-kokeiden tulokset esitetään virhepisteinä. Ne osa-alueet, joissa lapsella on virheitä enemmän kuin vastaavan luokan rajana oleva virheprosentti on, edellyttävät tukitoimia. (Ikäheimo 1995, 32–33.)

3 TOIMINNALLINEN MATEMATIIKKA

Toiminnallisessa matematiikassa olennaista on nimensä mukaisesti jonkinlainen toiminta, toiminnallisuus, joka saadaan aikaan työskentelemällä erilaisten välineiden ja materiaalien, toimintavälineiden, avulla. Puhuttaessa toiminnallisesta matematiikasta se liitetään usein unkarilaiseen matematiikkaan eli Varga-Neményi -pedagogiikkaan tai Maria Montessorin luomaan Montessori-pedagogiikkaan. Tässä tutkimuksessa toiminnallista matematiikkaa ei kohdisteta mihinkään tiettyyn pedagogiikkaan, vaan sitä ajatellaan laajempana käsitteenä: se nähdään kaikkena sellaisena opetustoimintana, mikä ei ole pelkästään itsenäistä kirjan tehtävien laskemista. Yllä mainittuihin pedagogiikan suuntauksiin palataan myöhemmin tämän tutkimuksen neljännessä luvussa, sillä ne nähdään erilaisina menetelminä ja mahdollisuuksina toteuttaa toiminnallisuutta matematiikan opetuksessa.

Toiminnallinen matematiikan opetus tarkoittaa Tikkasen (2008) mukaan matematiikan opiskelua erilaisten materiaalien ja toimintavälineiden avulla. Siinä oppilas rakentaa matemaattisia käsitteitä tutkien, kokeillen ja konkretisoiden. Tätä rakennusprosessia voidaan työstää yksin, pareittain, pienissä ryhmissä tai koko luokan kanssa yhdessä. Kun tehtäviä ja ongelmia ratkotaan toimintamateriaalien avulla, oppilaat pohtivat aina todellisuuden ja matemaattisen mallin välistä yhteyttä. (Tikkanen 2008, 93.) Myös Oikkonen (2012) näkee erilaiset toimintavälineet erittäin tärkeäksi osaksi toiminnallista matematiikan opetusta. Hänen mukaansa toiminnallisuus liittyy konkreettisen merkityksen antamiseen abstrakteille matemaattisille käsitteille ja objekteille. (Oikkonen 2012.)

Aivotutkimuksissa on havaittu, että lapsi kykenee prosessoimaan ainoastaan aistillisia havaintoja ja hän onnistuu käyttämään ajattelussaan ainoastaan kuvia. Pelkät kuvaan liittyvät sanat ja lauseet eivät lähde liikkeelle lapsen ajatuksissa. Myös Vygotski toteaa, että vasta kahdentoista ikävuoden lopulla lapsi kykenee muodostamaan itsenäisesti objektiivisia käsitteitä. Jos alakouluikäinen kohtaa verbaalisia tai kirjoitettuja merkkejä, hänen on ensin palautettava mieleensä niihin liittyviä kuvia. Jos näitä kuvia ei löydy, ei lapsessa käynnisty mitään älyllistä toimintaa. Sen vuoksi uusissa tilanteissa, ongelman ymmärtämisessä, käsittelyssä ja ratkaisussa, yhteyksien ymmärtämisessä ja tietojärjestelmän rakentamisessa tarvitaan muistikuvia konkreettisista asioista, jotta lapsen ajatustoiminnot saadaan käyntiin. (Neményi 2005, 32–33.) Näin ollen matematiikan opetuksen tulee olla toiminnallista ja kokemuksellisuuteen tähtäävää.

Toiminnalliseen matematiikan opetukseen liitetään yleensä konstruktivistinen oppimiskäsitys, jonka mukaan oppiminen nähdään aktiiviseksi toiminnaksi. Tällöin lapsen rooli nähdään aktiivisena ja osallistuvana, oman tietonsa rakentajana. Oppimisprosessissa lapsi siis muodostaa tietoa omien aikaisempien kokemustensa sekä itse muodostamiensa käsitysten pohjalta. (Ikäheimo 1995, 14.) Toimintavälineet auttavat erityisesti nuorta lasta työskentelemään aktiivisesti (Tikkanen 2008, 93).

3.1 Teoreettista taustaa

Toiminnallinen matematiikan opetus pohjautuu osaltaan Maria Montessorin luomaan pedagogiikkaan sekä hänen kehitysteoriaansa (käsitellään tarkemmin luvussa 4.2). Kehitysteorian mukaan jokainen lapsen kehityskausi sisältää herkkyyskausia, jolloin lapsi kykenee oppimaan helposti uusia tietoja ja taitoja. Montessorin mukaan matematiikkavälineiden käytön taustalla on ajatus, jonka mukaan lapsi oivaltaa oman toiminnan kautta ja näin hänen kokemuksensa muuttuvat todellisiksi ja merkityksellisiksi asioiksi. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 113; Ikäheimo 1995, 10.) Toiminnallinen matematiikka pohjautuu myös Piaget´n konstruktivistiseen teoriaan lapsen kehitysvaiheista (Tikkanen 2008, 93). Teoriaa käsiteltiin tarkemmin luvussa 2.1.2. Piaget´n teoria korostaa lapsen omien kokemusten merkitystä matemaattisten käsitteiden ja operaatioiden oppimisessa. (Ikäheimo 1995, 9.)

Montessorin ja Piaget´n teorioiden lisäksi venäläisen Galperin tekemät tutkimukset korostavat konkreettisten oppimismateriaalien roolia henkisen toiminnan sisäistämisessä. Galperin teorian mukaan oppimisessa ovat keskeisiä asioiden ja ilmiöiden väliset suhteet. Lapsi voi siis hallita jonkin henkisen toiminnan eri Galperin toiminnan tasoilla, joita ovat objektien käyttö apuna oppimisessa, ääneen puhuminen, itsekseen puhuminen sekä pelkästään omassa mielessä puhuminen. Lapsella kehitystä voi tapahtua toiminnan eri tasoilla kolmessa dimensiossa: yleistyksen lisääntyessä (yleistymisen aste), toimintojen lyhentyessä (lyhenemisen aste) sekä toimintojen automatisoituessa (hallinnan aste). Toiminnan tasot viestivät muutoksista, joiden kautta lapsen ulkoinen toiminta muuttuu sisäiseksi toiminnaksi tai ymmärtämiseksi. Tämän saavuttamiseksi on tärkeää, että opetus sisältää kaikki seuraavat vaiheet: orientoituminen, materiaalien käyttö, puhuminen, sisäinen puhuminen (itsekseen puhuminen) sekä sisäistyminen (ajatteleminen). (Ikäheimo 1995, 12.)

3.1.1 Dienes – oppiminen leikkien ja pelaten

Piaget´n teorioiden eräänä merkittävimpänä soveltajana matematiikan didaktiikkaan voidaan pitää unkarilaissyntyistä Zoltan Dienesiä. Matematiikan oppimisprosessissa Dienes korostaa oppilaan aktiivista roolia ja konkreettisten materiaalien käyttöä (Post 1988, 8). Dienesin (1973, 5) mukaan lapsen matemaattisten taitojen oppiminen etenee vähitellen leikkien ja pelaten kuuden eri vaiheen mukaisesti. Nämä vaiheet ovat vapaa leikki, säännönmukaisuuksien havaitseminen, yhdenmukaisuuksien havaitseminen, mallintaminen, mallien tarkasteleminen ja formaalit säännöt (Dienses 1973, 5–9, 53–54; Tikkanen 2008, 70–72). Näiden vaiheiden mukaisesti etenevä matematiikan opetus edistää lapsen kokonaisvaltaista ymmärrystä matematiikasta. (Dienes 1973, 5–9.)

1. Vapaa leikki (Free play):

Dienes (1973) määrittelee oppimisen ympäristöön sopeutumiseksi. Lapsi oppii vain silloin, kun hänellä on tarve hankkia itselleen uusia taitoja ympäristössä selviytymiseen eli sopeutumiseen. Tämä sopeutuminen tapahtuu lapselle vapaan leikin avulla. Leikkiessään lapsi harjaantuu erilaisiin tilanteisiin saaden niistä valmiuksia selviytyä vastaavanlaisissa tilanteissa myös elämänsä myöhemmässä vaiheessa. Vapaassa leikissä ei ole mitään tekemistä rajoittavaa tekijää, vaan painopiste on leikkiin tai materiaaliin tutustumisessa. Matemaattisten käsitteiden muodostumista ja omaksumista ei kuitenkaan edistä millainen vapaa leikki tahansa. Käsitteiden saavuttaminen edellyttää opettajan rakentamaa oikeanlaista ympäristöä, josta lapsi saa konkreettisia kokemuksia ja apua loogisten käsitteiden muodostamiseen. (Dienes 1973, 5–6, 53.) Tällaisten ympäristöjen rakentaminen edellyttää opettajalta tietämystä siitä, mitä käsitteitä eri pelit ja leikit harjaannuttavat, jotta hän voi tukea lasta uusien käsitteiden muodostamisessa (Ikäheimo 1997, 7).

2. Säännönmukaisuuksien havaitseminen (Regularities)

Leikin toteuttamiseen annetaan nyt tiettyjä rajoituksia, joiden pohjalta lapset toteuttavat leikkiä. Näitä rajoituksia kutsutaan pelisäännöiksi. Vapaata leikkiä uudestaan leikkiessään lapsen tulee tarkastella leikin etenemistä, jonka pohjalta hän vähitellen alkaa havaita tähän liittyviä säännönmukaisuuksia. Tässä keskeistä on siis konkreettisten tilanteiden ja toimintojen havainnoiminen. Näin lapsen toteuttama vapaa leikki muuttuu tavoitteelliseksi toiminnaksi, kunhan säännöt on valittu siten, että leikin toiminnot ovat matemaattisesti loogisia. Sääntöjen mukaan toimiminen edellyttää ensin lapselta konkreettista toimintaa ilman sääntöjä. (Dienes 1973, 7, 53.)

3. Yhdenmukaisuuksien havaitseminen (Isomorphism game)

Dienesin (1973, 7) mukaan matemaattisia rakenteita sisältävien leikkien leikkiminen ja pelien pelaaminen eivät ole vielä matematiikan oppimista. Lapsen on siis ensin kyettävä havaitsemaan ja erottamaan leikkien ja pelien säännönmukaisuudet, jotta hän voisi havaita myös niiden yhdenmukaisuuksia. Näiden havaitsemiseen lapsen on pelattava useita eri pelejä, joilla on sama rakenne sekä samankaltaiset lainalaisuudet (isomorphism game). Vertaamalla keskenään tällaisia pelejä, lapsi oppii erottamaan erimuotoisten pelien yhteiset rakenteet sekä epäoleelliset ominaisuudet. Kun lapsi ymmärtää, mitä eri pelien samankaltaisuus tarkoittaa, hän on muodostanut siitä ensimmäisen abstraktion. (Dienes 1973, 7–8, 53.)

4. Mallintaminen (Representation)

Lapsi ei vielä pysty käyttämään muodostamaansa abstraktiota uusissa tilanteissa, koska se ei ole vielä kunnolla sisäistynyt hänen mieleensä. Tämän saavuttaakseen lapsen on ensin saatava mallintaa kyseistä mielikuvaa jonkin menetelmän avulla. Mallintaminen voi olla lapselle joko auditiivista tai visuaalista (piirustuksia, diagrammeja). Vasta visuaalisen mallin havainnoimisen jälkeen lapsi kykenee tarkastelemaan sitä ulkopuolisen silmin. (Dienes 1973, 8, 53.)

5. Mallien tarkasteleminen (Symbolization)

Tarkastelemalla aiemmassa vaiheessa tehtyjä malleja, lapsi alkaa hahmottaa niiden avulla opittavana olevaan matematiikan ilmiöön liittyviä ominaisuuksia ja lainalaisuuksia. Näiden havaintojen käsitteleminen yhdessä muiden kanssa edellyttää lapselta omien havaintojen ja ajatusten kielentämistä. On tärkeää, että jokainen lapsi saa kertoa havaitsemistaan asioista ensin ”omin sanoin” eli käyttämällä hänelle itselleen luontaista kieltä. Vasta tämän jälkeen opettajan avustuksella valitaan yhteiseen kielenkäyttöön soveltuvat termit yhdessä keskustellen. (Dienes 1973, 8, 53.)

6. Formaalit säännöt (Formalization)

Tässä vaiheessa pystytään määrittelemään matematiikan ilmiö yksiselitteisesti huomioiden siihen liittyvät rajoitukset. Koska matematiikan rakenteet ovat niin kompleksisia, että ne sisältävät äärettömän määrän erilaisia ominaisuuksia, on tavoitteena muodostaa ominaisuuksista kaiken kattava yleiskäsitys, joka sisältäisi nämä kaikki ominaisuudet. Näitä ilmiöön liittyviä perusolettamuksia kutsutaan aksioomeiksi (pelin alkutilanne). Niiden pohjalta tiettyjen sääntöjen mukaan johdetut uudet seuraukset ovat teoreemoja (pelisäännöt), jotka kuvaavat tarkasteltavaa ilmiötä. Tämän avulla lapset oppivat ymmärtämään paremmin matematiikan formaalia rakennetta. (Dienes 1973, 9, 53–54.)

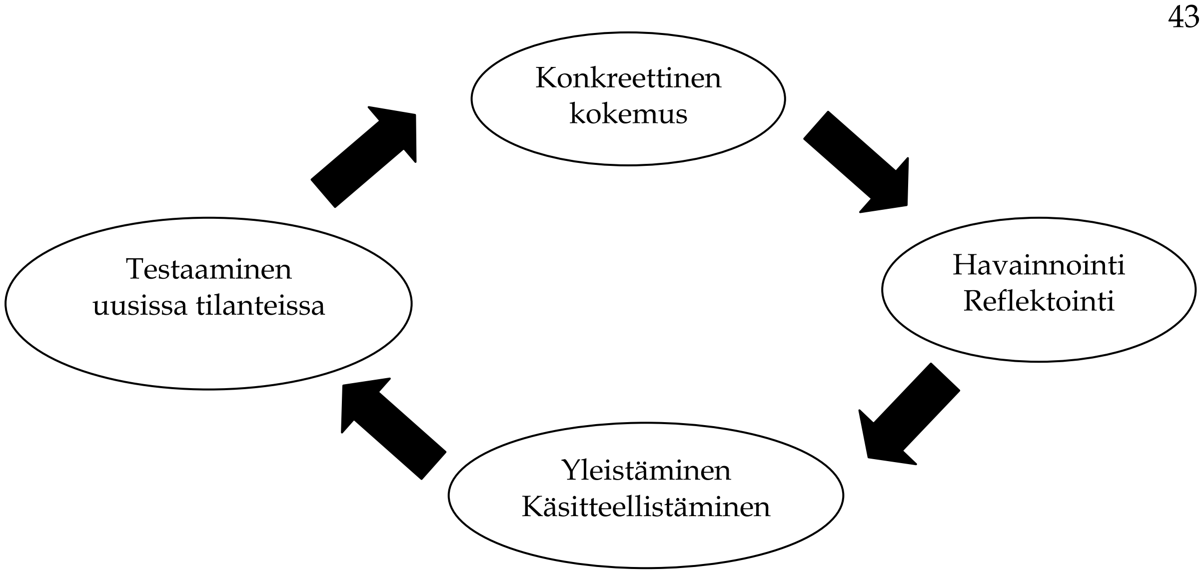
Eräs esimerkki Dienesin teoriaan pohjautuvasta opetuksesta on kombinatoriikkaan liittyvän tuloperiaatteen havainnollistaminen tuijotusleikin avulla. Leikin ideana on selvittää, kumpi jaksaa tuijottaa kaveria kauemmin räpäyttämättä silmiään. Tuijotusleikin toteuttaminen ilman mitään pohdintaa vastaa Dienesin teorian vapaata leikkiä (abstraktion muodostumisen toiminnallinen vaihe, fyysinen kokemus, ks. luku 3.3.1). Jotta edettäisiin kohti tavoitteellista toimintaa, lapsilta kysytään leikkiparien yhdistelmien määrää. Todennäköisesti havaitaan, etteivät lapset kiinnittäneet mitään huomiota yhdistelmiin leikin yhteydessä. Seuraavaksi leikitään uudestaan järjestäytyneesti siten, että kiinnitetään huomio leikin säännönmukaisuuksiin eli siirrytään teorian toiseen vaiheeseen. Tämän jälkeen saatuja yhdistelmiä mallinnetaan esimerkiksi kuvaamalla niitä askartelutikkujen avulla (välineellinen vaihe). Yhdistelmiä voidaan mallintaa myös taulukoimalla tai piirtämällä diagrammeja (kuvallinen vaihe). Sen jälkeen lapset kertovat leikin tapahtumista mallien ollessa kielentämisen tukena. Viimeiseksi muodostetaan laskulauseke leikissä olevien parien yhdistelmistä tuloperiaatteen mukaan. Alakoulun vuosiluokilla 1-4 laskulausekkeet liittyvät aina konkreettiseen itse koettuun tapahtumaan, mutta ne luovat perustan, joka mahdollistaa käsitteen formaalin ymmärtämisen myöhemmässä vaiheessa. (Tikkanen 2008, 69–72.)

3.1.2 Kolbin kokemuksellinen oppiminen

Kolb on yksi tunnetuimpia kokemuksellisen oppimisen tutkijoita. Hän on kehittänyt kokemuksellisen oppimisen mallin, johon hän on yhdistänyt John Deweynin, Kurt Lewinin ja Jean Piaget´n ajatuksia oppimisesta. Mallin syntymiseen ovat vaikuttaneet myös Carl Jungin psykoanalyyttinen lähestymistapa sekä kriittisten kasvatussosiologien, kuten Paolo Freiren, näkemykset. Kokemuksellisessa oppimisessa on läsnä sekä sisäinen että ulkoinen toiminta. Niissä yhdistyvät siis kokemus, havainnointi, kognitio ja käyttäytyminen. (Kolb 1984, 15–16, 20–25.)

Kolb (1984, 25–38) on laatinut kuusi kokemuksellista oppimista ja kehitystä määrittävää argumenttia. Ensimmäisen argumentin mukaan oppiminen määritellään parhaiten prosessina. Oppiminen ei siis ole mikään tuotos. Oppimisprosessissa käsitteet muotoillaan kokemuksista ja niitä muokataan jatkuvasti uusien kokemusten pohjalta. Toisessa argumentissa Kolb korostaa, että oppiminen on jatkuva prosessi, joka kestää niin pitkään kuin elämä ja oppiminen jatkuvat. Kolmannessa argumentissa Kolb esittää, että oppimisprosessi edellyttää konfliktien ratkaisemisessa dialektisesti vastakkaisten sopeutumistapojen erittelyä. Kokemuksellisen oppimisen prosessiin sisältyy siis kaksi dimensiota: kokemusten ymmärtäminen ja kokemusten muuntaminen. Kokemusten ymmärtämisessä oppiminen vaihtelee tapahtumien konkreettisen kokemisen ja abstraktin käsitteellistämisen jatkumolla ja vastaavasti kokemusten muuntamisessa aktiivisen kokeilun ja reflektiivisen havainnoinnin jatkumolla. Kolb korostaa neljännessä argumentissaan, että oppiminen on kokonaisvaltainen maailmaan sopeutumisen prosessi. Viidennen argumentin mukaan oppimiseen sisältyy kanssakäymistä yksilön ja ympäristön välillä. Viimeisessä, kuudennessa argumentissa Kolb korostaa, että oppiminen on tiedon luomisen prosessi. (Järvinen 1990, 5–9; Kolb 1984, 25–38.)

Koska Kolb (1984) näkee oppimisen jatkuvana prosessina, esitti hän kokemuksellisen oppimisen mallin syklinä, joka koostuu neljästä eri vaiheesta (ks. Kuvio 3.). Mallissa kaiken lähtökohtana on omakohtainen konkreettinen kokemus, joka luo pohjan oppimiselle. Konkreettista kokemusta havainnoidaan, reflektoidaan ja pohditaan syklin toisessa vaiheessa. Kolmannessa vaiheessa edellisen kokemukseen pohjautuvista havainnoista ja pohdinnoista yritetään muodostaa yleistyksiä. Syklin neljännessä vaiheessa muodostunutta kokonaiskäsitystä testataan uusissa tilanteissa. Kaikki toimivat skeemat linkitetään aikaisempaan tietorakenteeseen, joita hyödynnetään uusia kokemuksia hankittaessa. Näin ollen sykli aloittaa seuraavan uuden kierroksen. (Pehkonen 1995, 45.)



Kuvio 3. Kokemuksellisen oppimisen malli (Kolb 1984, 42)

3.1.3 Bruner - matemaattisten käsitteiden oppiminen

Matematiikan opetuksen eräänä kehittäjänä pidetään myös kasvatustieteilijä Jerome Bruneria (Koponen 1995, 175). Hän on havainnut tutkiessaan matemaattisten käsitteiden omaksumista, että oppiminen koostuu kolmesta eri tasosta:

1. toiminnallinen
2. ikoninen
3. symbolinen

(Bruner 1988; Koponen 1995, 175–177).

Brunerin (1988, 35, 58) mukaan toiminnallisessa vaiheessa lapsen oppiminen tapahtuu toiminnan kautta. Lindgren (1990, 180) onkin havainnut tutkimuksissaan, että tarkoituksenmukaisesti valitut toimintavälineet auttavat lasta sisäistämään matemaattisia käsitteitä sekä edistävät niiden hallintaa. Toiminnallisen vaiheen tarkoituksena on etsiä yhtymäkohtia opetettavan asian ja omien kokemusten väliltä (Koponen 1995, 175). Uusi opittava asia liitetään tuttuun tapahtumaan, jolloin se linkittyy oppilaan jo olemassa oleviin tietoihin ja taitoihin (Haapasalo 1995, 176; Koponen 1995, 175–177).

Hartshorn ja Boren (1990, 2) kuvaavat ikonista vaihetta siirtymävaiheena konkreettisesta abstraktiin, joka sisältää piirteitä molemmista. Brunerin (1988, 35, 58) mukaan ikonisen vaiheen toiminta liittyy oppilaan mielikuviin ja hänen havaintonsa organisoituvat. Ikonisessa vaiheessa edellisen vaiheen toimintaa pyritään havainnollistamaan lisää piirroksien, kuvien tai mallien avulla (Haapasalo 1995, 177; Koponen 1995, 175–177). Havainnollistavat kuvat ja mallit eivät enää muistuta kaikkine yksityiskohtineen alkuperäistä esinettä, vaan ovat yksinkertaistuksia siitä, jolloin abstraktisuus oppimisessa lisääntyy. Koska mallintamisessa tarkastelemme vielä todellista esinettä sitä kuitenkaan käyttämättä, on konkreettisuus ikonisessa vaiheessa vielä läsnä. (Hartshorn & Boren 1990, 2.)

Symbolinen vaihe on oppilaalle vaikein, koska silloin siirrytään asian abstraktiin käsittelyyn (Haapasalo 1995, 177). Brunerin (1988, 35, 58) mukaan symbolisessa vaiheessa oppilas kytkee toiminnallisen ja ikonisen vaiheen aikana saadut järjestäytyneet kokemukset merkeillä kuvattaviksi käsitteiksi. Vasta tässä vaiheessa opittavaa asiaa tarkastellaan siis sanojen, numeroiden ja muiden matematiikan symboleiden avulla. Sana ”neljä”, merkki ”4” sekä operaattorit ”+”, ”-”, ”x” ja ”:” ovat esimerkkejä matemaattisista symboleista. (Koponen 1995, 175–177.) Matemaattiset symbolit eivät muistuta opittavaa asiaa mitenkään, mutta toimivat sen edustajana (Haapasalo 1995, 177).

Tarkastelen seuraavassa murtoluvun käsitteen oppimista Brunerin (1988) kolmiportaisen mallin kautta. Toiminnallisessa vaiheessa oppilaat saavat konkreettisen esineen (esim. suklaalevy) käyttöönsä, joka edustaa heille yhtä kokonaista. Oppilaat saavat jakaa esineen yhtä suuriin osiin. Jos oppilaat olisivat jakaneet sen kuuteen yhtä suureen osaan, voitaisiin havaita, että yksi kokonainen levy voidaan jakaa tasan kuudelle oppilaalle siten, että jokainen saa yhden kuudesosan. Ikonisessa vaiheessa samanlaisen suklaalevyn jakaminen osiin voidaan piirtää yhdessä taululle tai vihkoon. Suklaalevyä voidaan kuvata suorakulmiolla, joka jaetaan viivoittamalla yhtä suuriin osiin. Osat voidaan värittää eri väreillä, jolloin korostuu selkeämmin, että kaikki osat ovat samankokoisia ja yhdessä muodostavat kokonaisuuden. Symbolisessa vaiheessa murtoluku esitetään kokonaisuudessa oikeassa muodossa. Tässä esimerkissä yksi kuudesosaa merkittäisiin $\frac{1}{6}$, joka ei liity enää lainkaan alkuperäisen suklaalevyn osaan. Se kuitenkin edustaa sitä abstraktina symbolina. (Haapasalo 1995, 177.)

3.2 Opettajan ajattelusta toimintaan

Lapsen kehityksen vuoksi alakoulussa oppimisen tulisi edetä induktiivisesti. Tietoja hankkiessaan sekä taitojen ja kykyjen kehittyessä lapsen tulee hankkia kokemuksia toiminnallisesti sekä edetä omassa tahdissaan ja omalla tavallaan abstraktisiin tietoihin ja niiden soveltamiseen. Tämän tavoitteen saavuttamiseen lapsi tarvitsee opettajaa, joka mahdollistaa riittävien kokemusten ja elämysten hankkimisen sekä harjoittelun sopivien materiaalien, tilojen, välineiden ja olosuhteiden avulla. (Neményi 2005, 38.)

3.2.1 Opettajan muuttuva rooli

Toiminnallisten menetelmien avulla toteutettu matematiikan opetus muuttaa myös opettajan roolia opetuksen suunnittelijana ja toteuttajana. Opettaja ei tarjoa kaikkea tietoa pelkästään verbaalisesti, vaan lapselle on annettava aina mahdollisuus kokea käsiteltävät asiat konkreettisesti itse. Pääajatuksena opetuksessa on lapsen toiminta, eikä opettajan selittäminen. (Oravecz & Kivovics 2005, 25–26.) Opettajan rooli toiminnallisen matematiikan toteuttajana on näin ollen virikkeellisen ja monipuolisen oppimisympäristön mahdollistaja. Lapsen tutkiessa opeteltavaa asiaa opettajan tehtävänä on auttaa ja ohjata lasta hänen oppimisprosessinsa aikana. (Lindgren 1990.)

Toiminnallisen menetelmän toteuttaminen vaatii opettajalta paljon, erityisesti valmistelutyötä, sillä toteutettavat harjoitteet ja tehtävät eivät ole sirpaleisia ”knoppitietoja”, vaan ongelmia, joiden avulla opettaja kykenee ohjaamaan lapsen matematiikan rakenteen omaksumista oikealla tavalla. Opettajan on suunniteltava opetus siten, että se johdattaa lasta koko ajan eteenpäin ja että kullakin tasolla tehtävät suuntavat oppimista haluttuun suuntaan. Mitä pidemmälle matematiikan opetuksessa ja oppimisessa edetään, se vaatii opettajalta vahvaa pohjakoulutusta ja laajaa matematiikan hallintaa oppilaiden tasoon nähden, jotta opettaja kykenee ohjaamaan myös lahjakkaita lapsia. (Tikkanen & Lampinen 2005, 75; Näätänen 2000, 114–115.) Vastatakseen tähän haasteeseen, opettajan tulee olla tunteihinsa valmistautunut, itseään säännöllisesti kouluttava, itsenäisiin päätöksiin kykenevä, luova ja askarteleva. Sen lisäksi hänellä tulee olla kokemuksia eri matemaattisista aihepiireistä. Opettaja on myös se henkilö, joka suunnittelee ja järjestää oppilaiden toiminnan tunneilla, mahdollistaa monipuolisten aistihavaintojen kautta tulevat kokemukset, alustaa abstraktion seuraavat askeleet, keksii ja huolehtii toimintavälineiden runsaasta ja monipuolisesta käytöstä, mukautuu oppilaiden ilmaisuun, puheen ymmärtämiseen, huomioi oppilaiden kehityksen ominaispiirteet, sallii keskustelun ja luo iloisen ilmapiirin luokkaan. (Tikkanen 2008, 83–84.)

Edellä mainittujen asioiden lisäksi lapsen iän ominaispiirteiden huomioiminen on pedagogisesti erittäin tärkeää. Sen vuoksi opettajan tulee olla tietoinen 6–12-vuotiaan lapsen ruumiillisista ja henkisistä kyvyistä ja valmiuksista. Hänen on myös kyettävä arvioimaan lapsen tietotasoa ja sanavarastoa. Opettajalle on erityisen tärkeää tuntea lapsen keskittymiskyvyn rajallisuus, pituus ja laajuus, jotta lapsella on mahdollisuus selviytyä opettajan laatimista tehtävistä. Näiden ikään liittyvien ominaispiirteiden tuntemus auttaa opettajaa myös opetuksen leikinomaisuuden suunnittelussa, sillä se taataan lapselle vain sopivan-tasoisilla, kehittävillä ja konstruktivistisilla leikeillä ja peleillä. (Oravecz & Kivovics 2005, 26.)

3.2.2 Toimintavälineet

Toimintavälineen tai yhtä hyvin toimintamateriaalin käsite pohjautuu englanninkielen sanoihin ”manipulatives”, ”manipulative aids”, ”manipulative materials” ja ”hands-on-materials”. Hartshornin ja Borenin (1990, 2) mukaan toimintavälineet tulee ymmärtää esineinä, joita lapsi voi itse koskettaa ja liikuttaa, eli lapsi käyttää niitä itse opetuksessa. Tällaisten välineiden käyttäminen havainnollistaa lapselle uutta matematiikan käsitettä sekä auttaa ja vahvistaa niiden ymmärtämistä (Hartshorn & Boren 1990, 2; Driscoll). Driscoll määrittelee toimintavälineet esineinä, joita voidaan tarkastella useita eri aisteja käyttäen ja joita lapset voivat koskettaa, käsitellä ja siirtää. Niitä käyttämällä lapsi pystyy ymmärtämään matematiikan käsitteitä. Driscoll korostaa myös, että pelkkä toimiminen toimintavälineiden ja -materiaalien avulla ei yksin riitä käsitteen ymmärtämiseksi, vaan keskeisessä roolissa on myös opettaja, jonka tehtävänä on ohjata materiaalien käyttöä johdonmukaisesti konkreettisesta esinemuodosta kohti abstraktia symbolimuotoa. Wieber taas kuvaa toimintavälineitä matematiikan symbolisten ja abstraktien esitysten malleina, joissa malli tarkoittaa yksinkertaistusta. Malli selventää käsiteltävän asian ominaisuuksia ja auttaa hahmottamaan asioita, joita ei voida nähdä. (Lindgren 1990, 90 Driscolliin ja Wieberiin viitaten.)

Mitä matematiikan opetuksessa käytettävät toimintavälineitä oikeastaan ovat? Toimintavälineet voivat olla joko esineitä tai kirjallista materiaalia, joita käyttämällä lapsi saa toiminnallisia kokemuksia ja elämyksiä. Ne mahdollistavat myös abstraktien käsitteiden tutkimisen ja harjoittelemisen. (Tikkanen 2008, 73.) Ne voivat olla lapsille tuttuja esineitä jokapäiväisestä elämästä kuten helmet, napit, kolikot tai nopat. Toimintavälineitä voivat olla myös jo olemassa olevat, kaupallisesti valmistetut esineet, jotka on suunniteltu ensisijaisesti muuhun käyttötarkoitukseen, mutta joita sovelletaan ja hyödynnetään aivan uudenlaisessa merkityksessä matematiikan tunneilla. Tällaisia esineitä ovat erilaiset rakennuspalikat, palapelit, legot tai erimuotoiset kynttilät, joiden avulla mallinnetaan kolmiulotteisia kappaleita kuten ympyrälieriötä tai kartiota. Matematiikan opetuksessa käytetyt toimintavälineet ja -materiaalit voivat olla myös opetusmateriaaleja valmistamien yritysten juuri matematiikkaan suunnittelemia välineitä. Tällaisia välineitä ovat värisauvat, murtolukukakut ja geolauta. (Domino 2012, 3 Spikelliin viitaten.) Opettaja voi myös itse kehittää ja tehdä toimintamateriaaleja. Valmiiden materiaalien lisäksi oma kehomme sekä sen ilmeet ja eleet voivat mahdollistaa uusia tapoja kokea ja viestiä matematiikkaa. (Oikkonen 2012)

Yllä esiteltyjen fyysisten toimintavälineiden lisäksi on olemassa tekniikan kehittymisen myötä myös virtuaalisia toimintamateriaaleja. Ne nähdään periaatteessa fyysisten toimintavälineiden kopioina, jotka löytyvät Internetistä erilaisina tietokoneen sovelluksina uudenlaisine ominaisuuksineen (Reimer & Moyer 2005, 6). Virtuaaliset toimintavälineet eivät vastaa täysin toimintavälineiden määritelmää, sillä fyysisen koskettamisen sijaan lapsi ohjaa niitä tietokoneen hiiren tai näppäimistön avulla (Domino 2010, 3). Ne ovat interaktii-visia, dynaamisten objektien visuaalisia esityksiä, jotka tarjoavat mahdollisuuden matemaattisen tietämyksen kehittämiseen. Visuaaliset toimintavälineet mahdollistavat pelkän kaksiulotteisen maailman ohella myös kolmiulotteisten objektien tarkastelemisen. (Moyer, Bolyard & Spikell 2002, 373.)

Tikkasen (2005, 102) mukaan toimintavälineiden tarkoituksena on edistää lapsen oppimista, sillä niitä käyttäessään lapsi muodostaa itse tietorakenteitaan (Tikkanen 2005, 102). Toimintamateriaaleja käyttäessään lapsi siis tutkii ja kokeilee. Välineiden ja materiaalien käytön taustalla on ajatus, jonka mukaan lapsi kykenee oivaltamaan kokemuksellisen toimintansa kautta matemaattisen mallin vastaavan todellisuutta eli sitä maailmaa, jossa itse elämme (Tikkanen 2008, 93). Toimintavälineillä toimiminen helpottaa myös lasta siirtymisessä konkreetista abstraktiin (Hartshorn & Boren 1990, 2).

Oppimisen on havaittu helpottuvan, mitä useampaa aistikanavaa opetuksessa käytetään. Opettajajohtoisessa matematiikan opetuksessa lapsi käyttää pääasiassa vain auditiivista (kuulo: opettajan puhe) ja visuaalista (näkö: opettajan toiminta) aistikanavaansa. Toiminnallisessa matematiikassa lapsi saa materiaaleilla ja toimintavälineillä toimiessaan aistiärsykkeitä auditiivisen (taputus, tömistäminen, soittaminen) ja visuaalisen aistikanavan lisäksi myös taktiaalisista (käden toiminta) sekä kinesteettisistä (koko kehon toiminta, myös haju ja maku) aistikanavista. (Ikäheimo 1997, 6, 9; Oravecz & Kivovics 2005, 22–23.) Monipuolisten aistihavaintojen käyttö huomioi samalla erilaiset oppijat ja oppimistavat. (Kajetski & Salminen 2009, 13.)

3.2.3 Leikit ja pelit osana oppimista

Leikki on keskeinen osa lapsen kokemusmaailmaa ja pelit kiehtovat lapsia. Lapset myös oppivat leikkimällä. (Ikäheimo 1997, 6.) Miksi erilaisia leikkejä ja pelejä ei sitten hyödynnetä matematiikan opetuksessa, vaan mieluummin pidättäydytään perinteisessä opettajajohtoisessa kynä-paperi-opetuksessa ja tehtävien tekemisessä itsenäisesti, sillä oikeanlaiset leikit ja pelit nähdään eräänlaisina toimintavälineinä matematiikan opetuksessa. Leikkejä ja pelejä ei kuitenkaan kannata käyttää opetuksessa vain niiden itsensä vuoksi, vaan opettajan tulee olla aina tietoinen niistä taidoista, joita ne kehittävät (Ikäheimo 1997, 7).

Leikillä nähdään olevan tärkeä merkitys matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Hauskan toiminnan lisäksi ne ovat hyvä motivointikeino oppimisen aloittamiseen ja oppimiselle yleensä. Leikkien ja pelien avulla opetusta on helppo eriyttää lapsen taitotasoon nähden sopivaksi. Siinä ei synny lapselle virheoppimista, sillä palaute saadaan välittömästi. Opittavien asioiden kertaaminen ja toistaminen käyvät luontevasti leikkien ja pelaten. Leikkien ja pelien avulla voidaan kehittää myös lapsen matemaattista ajattelua ja taitoa, sillä toiminnan kautta lapsi kehittää ajatteluaan. (Ikäheimo 1997, 6–7.)

Tunne on tärkeä tekijä matematiikan oppimisessa (Ikäheimo 1997, 4). Tunteilla on suuri merkitys tiettyyn päämäärään suunnatun toiminnan tai tekemisen säätelyssä. Ne myös auttavat tavoitteellisen toiminnan ylläpitämisessä, sillä tunteet auttavat jaksamaan. Erityisesti positiivisten tunteiden on havaittu helpottavan toimintaa tehden siitä sujuvampaa. (Hakkarainen, Lonka & Lipponen 2005, 210) Leikkien ja pelien avulla voidaankin muokata lapsen asennetta myönteisemmäksi matematiikan opiskelua kohtaan. Tämä on tärkeää, sillä kielteinen tunne voi estää oppimista ja myönteinen vastaavasti kannustaa yrittämään sekä kohottaa itsetuntoa. Erityisesti peleistä voi saada myönteisiä onnistumisen kokemuksia. (Ikäheimo 1997, 4, 6.) Lapsien on havaittu muistavan juuri myönteiset kokemukset (Ikäheimo 1997, 6) ja tämä edistää opittujen asioiden muistamista.

3.3 Toiminnallisen matematiikan toteuttaminen

Tämän alaluvun tarkoituksena on tarkastella erilaisia toiminnallisuuteen pohjautuvia pedagogisia suuntauksia, joiden avulla tämän tutkimuksen näkökulmasta toiminnallista matematiikan opetusta voidaan toteuttaa aina varhaiskasvatuksesta lukiokoulutukseen asti. Tässä kohtaa perehdytään tarkemmin unkarilaiseen matematiikkaan, montessori- ja steinerpedagogiikkaan, ongelmanratkaisuun, tutkivaan matematiikkaan sekä tarinankerrontaan opetusmetodina.

3.3.1 Unkarilainen matematiikka

Unkarilainen matematiikka juontaa juurensa 1960-luvulle, jolloin Unkarin matematiikan opetusta uudistettiin menestyksekkäästi Tamas Vargan ja hänen työryhmänsä toimesta, johon kuului muun muassa Eszter Neményi. Syynä uudistukseen oli se, että lasten ajattelun oli havaittu olevan jäykkää eikä riittävän luovaa, vaikka heidän suoriutumisensa laskemista vaativista tehtävistä olikin melko hyvää. Lasten kyvyt tunnistaa, käsitellä ja ratkaista ongelmia olivat myös puutteellisia. (Oravecz & Kivovics 2005, 22.) Näihin ongelmiin luotua uutta matematiikan opetusmenetelmää nimitetään keksijöidensä mukaan yleisesti Varga- tai Varga-Neményi -menetelmäksi (Tikkanen & Lampinen 2005, 78). Siitä käytetään myös nimitystä unkarilainen matematiikka, koska sen syntyjuuret liittyvät Unkariin (Kahanpää 2005, 73).

Systemaattisen Varga-menetelmän mukaan matematiikan opetuksen kantavana ajatuksena nähdään luova opettaminen, jossa käytetään paljon apuvälineitä (Oravecz & Kivovics 2005, 22). Siinä ideana on hankkia monenlaisia havaintoja ja kokemuksia matematiikan erikoistapauksista, joiden pohjalta käsiteltävästä asiasta muodostuu vähitellen abstraktio (Kahanpää 2002, 5). Vaikka matematiikkaa ja sen sisältämiä käsitteitä pidetään yleisesti hyvin abstrakteina ja vaikeina ymmärtää, Varga-menetelmän mukaan niihin voidaan tutustua jo hyvinkin varhaisessa vaiheessa. Olennaista on vain, että käsiteltävät asiat esitetään lapselle sopivalla tavalla huomioiden hänen kehitysvaiheensa. Opettajan ei siis ole olennaista pohtia sitä, milloin voin opettaa jotain matematiikan käsitettä lapsille, vaan huomio pitäisi kohdistaa siihen, mitä voin opettaa kyseisestä asiasta ensimmäisellä luokalla, mitä toisella tai myöhemmillä luokilla. Lapsi voi siis saada kokemuksia ja tehdä omia havaintoja asioista, jotka saavat nimityksen vasta myöhemmin. (Kahanpää 2005, 65–66)

Tavoitteet

Lapsi tarvitsee ajattelunsa kehittymiseen koko matematiikkaa, pelkät osaset siitä eivät riitä (Oravecz & Kivovics 2005, 26). Vargan mukaan matematiikan opetuksessa olennaista on sen *yhtenäinen* rakennelma. Yhtenäisyydellä hän tarkoittaa sitä, että matematiikan eri osa-alueet kietoutuvat yhteen ollen toisistaan aina riippuvaisia. Ajattelutavan on kuitenkin oltava kullakin osa-alueella sama. (Neményi 2005, 40.) Varga-menetelmän eräänä tärkeänä periaatteena onkin, että lapsi kykenee muodostamaan yhtenäinen ja laajan perustan matematiikan oppimiseen. Tavoitteena on siis opettaa matematiikkaa, eikä vain sen yhtä osa-aluetta, laskuoppia. (Oravecz & Kivovics 2005, 26.) Samaa näkökulmaa korostaa myös Pehkonen (2000) puhuessaan koulumatematiikan olevan lasku- ja ajattelutaidon yhdistämistä. Hänen mukaansa kumpikaan yksin ei kuvaa matematiikkaa oikein (Pehkonen 2000, 375). Yhtenäisen matematiikkakäsityksen kehityksen edellytyksenä on, että lapsi saa kokemuksia jokaisesta matematiikan osa-alueesta: joukko-opista, logiikasta, funktiosta ja lukujonoista, kombinatoriikasta, todennäköisyydestä, tilastotieteestä, geometriasta sekä mittaamisesta. Nämä kaikki edellä mainitut aihepiirit kuuluvat Varga-menetelmään. (Oravecz & Kivovics 2005, 26.) Myös kognitiivisten menetelmien ja ajattelutapojen harjaannuttaminen ovat läsnä jokaisessa edellä mainitussa matematiikan osa-alueessa (Neményi 2005, 40). Luku- ja laskutoimituskäsitteiden muodostamisella sekä erilaisten laskutapojen muokkaamisella ja harjoittamisella on tärkeä rooli unkarilaisessa matematiikan opetuksessa. Vain muutamat teemat, kuten geometria ja kombinatoriikka, nähdään omina kokonaisuuksinaan, joiden käsittelyssä keskeistä on näkemysten muodostaminen ja kokemusten hankkiminen. (Oravecz & Kivovics 2005, 26.)

Jotta oppilas kykenee muokkaamaan itselleen yhtenäisen matematiikkarakennelman, hänen on saatava kehittyä omalla tasollaan. Tämä edellyttää opettajalta ikään liittyvien ominaisuuksien tuntemuksen lisäksi myös sitä, että opetuksessa on huomioitava lapsen persoonallisuus ja sen kehitykseen kuuluvat yksilölliset ominaispiirteet. (Oravecz & Kivovics 2005, 26.) Matematiikkarakenteen kehittymiseen vaikuttaa merkittävästi myös lapsen *käyttämä kieli*, sillä lasta ohjataan kertomaan havainnoistaan ja päätelmistään hänelle itselleen tuttua kieltä käyttäen eli omin sanoin (Kahanpää 2001, 8; Tikkanen & Lampinen 2005, 79).

Lapsen käyttämä kieli ei ole ainut hänen matematiikkarakenteeseensa vaikuttava kielellinen tekijä. Myös opettajan käyttämän kielen tulee olla sellaista, että lapset ymmärtävät sitä. Opettaja ei saa käyttää puhuessaan sellaisia matematiikan käsitteitä, joita lapsella ei ole mahdollisuutta vielä ymmärtää. (Oravecz & Kivovics 2005, 27.) Jos opettaja ei käytä yhtenäistä kieltä puhuessaan tietystä asiasta, oppilaan on vaikea havaita sekä kuvailla erilaisten matemaattisten käsitteiden ja teorioiden välisiä yhteyksiä. Esimerkiksi yhteenlaskun ja kertolaskun välisestä vaihdannaisuusominaisuudesta puhuttaessa on loogista käyttää vain käsitettä vaihdantalaki eikä käyttää käsitteitä vaihdannaisuus, vaihdantalaki ja kommutatiivisuus sekaisin. Yhtenäinen puhetapa auttaa muodostamaan myös yhtenäisen ajattelutavan. (Kahanpää 2001, 8.)

Menetelmän perusperiaatteet

"Ajattele asioita, äläkä sanoja!" (Holmes)

"Kaikki, mitä opetetaan, olkoon todellisuutta!" (Farkas Bólyai)

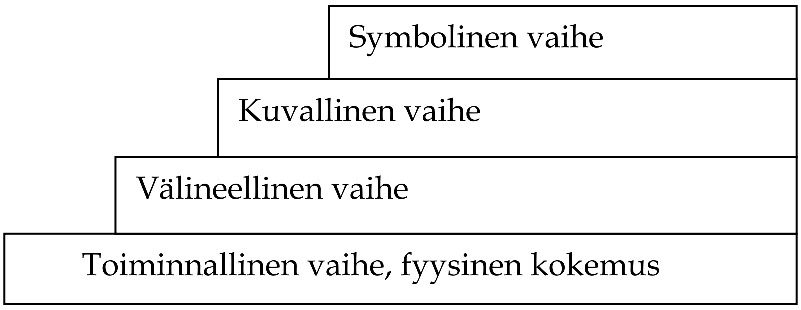
Varga-menetelmän metodologiset perusperiaatteet on esitetty Taulukossa 1. (Oravecz & Kivovics 2005, 22–31; Kahanpää 2005, 67.) Vaikka menetelmän perusperiaatteista on tehty erillisiä, ne muodostavat kuitenkin käytännössä yhtenäisen kokonaisuuden (Tikkanen & Lampinen 2005, 79).

TAULUKKO 1. Varga-menetelmän metodologiset perusperiaatteet

Metodologiset perusperiaatteet		
❖ Todellisuuteen perustuva oppiminen ❖ Toiminnallisten ja omakohtaisten kokemuksien hankkiminen ❖ Ympäröivä todellisuus ❖ Muistot ja muistikuvat ❖ Monipuoliset aistihavainnot ❖ Apuvälineiden käyttö	❖ Yhtenäinen ja laaja perustus (matematiikan opettaminen) ❖ Iän ominaispiirteiden huomioiminen ❖ Toiminta ja sen vaihtelevuus ❖ Leikinomaisuus (kehittäviä pelejä ja leikkejä) ❖ Abstraktion suunnittelu	❖ Induktiivinen oppiminen ❖ Turvallinen ilmapiiri ❖ Erehtyminen vapaus ❖ Keskustelu: oman mielipiteen ilmaiseminen ja toisten ajatusten kuunteleminen ❖ Iloinen oppiminen

Tärkeimpänä metodologisena periaatteena nähdään olevan todellisuuteen perustuva, toiminnallisesta kokemusten hankkimisesta lähtevä oppiminen (Oravecz & Kivovics 2005, 22–23). Menetelmässä todellisuus nähdään lapsen jokapäiväiseksi elinympäristöksi ja kokemuksellisuus taas lapsen konkreettiseksi esineiden käyttöön perustuvaksi toiminnaksi (Tikkanen 2008, 67). Omakohtaisesti hankitut ja todellisuuteen pohjautuvat kokemukset, muistot ja muistikuvat ovat erityisen merkityksellisiä, sillä lapsen ajatustoiminnot sisäistyvät konkreettisen toiminnan kautta. Matematiikan tunneilla lapsen toiminnallisia todellisuuteen pohjautuvia kokemuksia voidaan kuvata verbeillä siitä, mitä lapsi tekee: hän kokoaa, laskee, peittää, mittaa, täyttää, koskettaa, astuu ja rakentaa. Ajatuksena on, että lapsi hankkii kaikista matematiikan tärkeistä käsitteistä monipuolisen toiminnan kautta muistoja ja kuvia, joiden mieleen palauttaminen myöhemmässä vaiheessa auttaa tehtävien ratkaisussa sekä mahdollistaa uusien käsitteiden rakentumisen aiemmin opittujen päälle. (Oravecz & Kivovics 2005, 22–23.)

Monipuolisen ja kokemuksellisen toiminnan mukana kulkee erilaisten apu- ja toimintavälineiden runsas käyttö. Tavoitteena on, että lapsi havaitsee niiden avulla, että kaikki hänen ympärillään on matematiikkaa, ja hän voi havainnollistaa sitä ja mallintaa ajatuksiaan erilaisten välineiden avulla. Lapset käyttävät opetuksessa joko pysyviä tai tilapäisiä apuvälineitä. Varga-menetelmän pysyviä apuvälineitä ovat muun muassa väritangot, logiikkapalat sekä raha. Tilapäisiä apuvälineitä taas ovat mitkä tahansa esineet, joiden avulla voidaan havainnollistaa jotakin matematiikan ongelmaa, esimerkiksi vaatehenkaria käytetään vaakana. (Oravecz & Kivovics 2005, 24.) Matematiikan opetuksessa käytetyt apuvälineet auttavat lasta myös orientoitumaan opetustilanteeseen sekä auttavat myönteisesti koko tiedonhankinnan prosessiin: kokemusten kartuttamiseen, havainnoinnin tietoisuuteen ja ohjaamiseen, kokemusten järjestämiseen ja kommunikointiin (Neményi 2005, 32).



KUVIO 4. Abstraktion kehittymisen vaiheet

Varga-menetelmän perusperiaatteena olevan abstraktion kehitys tapahtuu vaiheittain askel askeleelta, jossa jokainen porras on merkityksellinen. (Oravecz & Kivovics 2005, 24–25.) Abstraktion kehittymisen neljä porrasta on esitetty Kuviossa 4 (Tikkanen 2008, 69–70). Abstraktion kehittyminen on pitkä prosessi ja se lähtee liikkeelle todellisuuteen perustuvasta konkreettisesta kokemuksesta, joka voi olla toimintaa – leikkejä ja pelejä. (Oravecz & Kivovics 2005, 24–25.) Tässä tavoitteena on luoda lapselle opittavasta asiasta vankkoja toiminnallisia ja visuaalisia mielikuvia ja muistoja (Tikkanen & Lampinen 2005, 80). Siitä edetään toiminnallisten havaintojen kokoamiseen välineiden avulla, jonka jälkeen asiaa havainnollistetaan piirtämällä. Havainnollistaminen etenee seuraavaksi merkkeihin ja lopuksi asiaa merkitään vain numeroiden ja symbolien avulla. Tässä vaiheittaisessa kehityksessä lapsella tulee kuitenkin aina olla mahdollisuus palata konkreettiseen niin kauan kuin hän itse kokee sen tarpeelliseksi. (Oravecz & Kivovics 2005, 24–25.) On hyvä huomata, että abstraktion kehityksen tiellä voidaan liikkua välillä myös toiseen suuntaan: symboleja voidaan esittää kuvilla, välineillä tai kehon toiminnoilla (Tikkanen & Lampinen 2005, 80).

Oppimateriaali tulee rakentaa spiraalimaiseksi. Tällöin käsitteitä kypsytellään pitkällä aika-välillä siten, että kuhunkin käsitteeseen palataan useita kertoja. Tämä mahdollistaa erilaisten kokemusten yhdistymisen, kun samaa asiaa käsitellään yhä uudestaan eri toimintojen avulla ja eri luvuilla, jolloin uusi sisältö rakentuu aina vanhan päälle. Tätä jatketaan aina siihen asti, kun itse abstrakti käsite tai laskutoimitus ilmentää monessa yksilöllisessä olevaa yhteistä perusolemusta. On huomioitava, että opetuksen tavoitteena oleva käsite voi saada lopullisen määritelmän vasta yläkoulussa lapsen ollessa 12–16 vuoden iässä. (Oravecz & Kivovics 2005, 24–25.)

3.3.2 Montessoripedagogiikka

Montessoripedagogiikan perustajana pidetään italialaista Maria Montessoria (1870–1952). Hänen intohimonsa matematiikkaa kohtaa syntyi jo kouluvuosina, jolloin hän oppi, miten koulua ei tulisi järjestää. Jatko-opintoja suunnitellessaan Montessori olisi halunnut opiskella lääketiedettä, mutta kyseinen ala ei ollut naisille sopiva. Sen vuoksi hän opiskeli fysiikkaa, matematiikka ja luonnontieteitä, jotta saisi toteutettua opiskeluhaaveensa. Vaikeuksista huolimatta hän sai ensimmäisenä naisena Italiassa lääketieteen ja kirurgian tohtorin arvonimen vuonna 1896. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 10–23.)

Lapsen matemaattinen kehitys Montessorin näkökulmasta

Matematiikan opetuksessa tavoitteena on kehittää lapselle matemaattinen mieli. Montessorin mukaan tämän tavoitteen saavuttamiseksi on olennaista, että lapsi oivaltaa oman toiminnan kautta ja että hänen omakohtaiset kokemuksensa muuttuisivat tietoisiksi elämän realiteeteiksi. Näiden näkemysten pohjalta Montessori kuvaa lapsen matemaattisen mielen kehittyvän seuraavien vaiheiden avulla.

1. Kokemus (konkreettisten matematiikkavälineiden käyttö)
2. Oivallus (välineet näyttävät hahmottamisen vaikeudet kuten hierarkiat ja prosessin kulun)
3. Oivaltamisen jälkeen lapsi siirtyy vähitellen hallinnan kautta abstraktiin soveltamiseen

(Hayes & Höynälänmaa 1985, 111, 113.)

Matematiikka ei ole kielen tavoin osa lapsen elämää syntymästä saakka, vaan se on täysin uusi abstrakti käsite. Montessori näkee matematiikan kuitenkin ihmisen yhdeksi perustarpeeksi ja opettajan tehtävä on osoittaa sen tärkeys lapsille. Apu matemaattisen mielen saavuttamiseen löytyy aistien käyttämisestä, sillä ne kehittävät mieltä ja muistia. Matematiikan opetuksen tulisi edetä loogisessa järjestyksessä ja siinä tulisi hyödyntää konkreettisia havaintovälineitä. Varhaislapsuuden aikana lapsen matematiikan opetus on suunniteltava herkkyys huomioiden, jotta edetään oikeassa tahdissa. Lapsuuden aikana koulun tehtävänä on taas herättää lapsen mielenkiinto, jotta hän oppii käyttämään mielikuvitusta myös matematiikassa. Jos opetus huomioi nämä ominaisuudet, ei matematiikka ole lapselle vaikeaa. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 111.)

Kehitysteorian perusajatus

Montessoripedagogiikan ydinajatuksena on Montessorin näkemys lapsen neljästä eri kehityskaudesta. Kukin kehityskausi pitää sisällään erilaisia herkkyyskausia, jotka ovat ohimeneviä ja kohdistuneet aina jonkin tietyn ominaisuuden tai kyvyn oppimiseen. Tämä herkkyys antaa lapselle mahdollisuuden poikkeuksellisen intensiiviseen ulkomaailman tarkasteluun. Sen vuoksi kyseisen taidon omaksuminen on helpointa ja vaivatonta aina taitoa vastaavalla herkkyyskaudella. Opittavan taidon herkkyys lakkaa, kun kyseinen taito on kehittynyt kokonaan. Jos lapsi ei omaksu opittavaa taitoa sitä vastaavan herkkyyskauden aikana, on sen oppiminen muulloin, ennen herkkyyskautta tai sen jälkeen, huomattavasti vaivalloisempaa ja vaatii ponnistelua. (Montessori

1969, 25–28.) Seuraavaksi tarkastellaan, mitä herkkyyskausia kukin kehityskausi pitää sisällään. Matematiikan oppimisen näkökulmasta merkityksellisiä herkkyyksiä tarkastellaan hieman tarkemmin.

Ensimmäiselle kehityskaudelle Montessori antoi nimen *varhaislapsuus*. Tämä kehityskausi alkaa syntymästä ja kestää noin kuuden vuoden ikään, jonka aikana luodaan lapsen persoonallisuutta. Varhaislapsuuden aikana lapsen tulee kokea rakkautta, suojelua, itsenäisyyttä ja sosiaalista kanssakäymistä. Tällöin lapsi on hyvin kiintynyt vanhempiinsa, perheeseensä ja kotiinsa. Lapsi on myös hyvin itsekäs. Lapsen mieli on täysin erilainen ensimmäisellä kaudella muihin kausiin nähden. Se on absorboiva, toisin sanoen lapsen mieli imee itseensä kaiken tiedon ympäristöstä ja sen tapahtumista. Alkuun absorboiva mieli on tiedostamaton. Kun mieli alkaa toimia tiedostaen, kehittää lapsi itseään tahdonvoimansa avulla. Tällöin lapselle alkaa kertyä myös muistoja. Absorboivan mielen vuoksi oppiminen on iloa ja kaikki tuntuu olevan yhtä helppoa kuin nukkuminen ja hengittäminen. Ensimmäisen kauden herkkyyskausia ovat kielellinen herkkyys, itsenäiset liikkeet ja niiden koordinaatio, järjestys, hyvien tapojen omaksuminen sekä aistien hienosäätö. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 22–24, 32–36.)

Ensimmäisellä kehityskaudella kielellinen herkkyys toimii jo paljon ennen lapsen puheen ilmenemistä, sillä absorboivan mielen avulla lapsi omaksuu spontaanisti ympärillään puhutun kielen ja sen käytön. Kuuden kuukauden iässä lapsi alkaa jokellella, noin vuoden iässä hän opettelee ensimmäisiä merkityksellisiä sanoja ja noin kahden vuoden ikäisenä lapsi osaa käyttää monipuolisesti sanoja kielessään. Ensimmäisen kauden jälkimmäisellä jaksolla lapsen kielenkehityksen tavoitteena on sanavaraston rikastuttaminen. Noin neljän vuoden iässä lapsi on kiinnostunut kielen analysoinnista, joka mahdollistaa kirjoittamisen oppimisen. Sen jälkeen kiinnostus kohdistuu lukemiseen. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 23–24, 37–39.) Joutsenlahden (2005) mukaan kieli on merkittävässä roolissa matematiikan oppimisessa. Kielentämisen etuja kuvataan tarkemmin luvussa 4.6.

Ennen kuin päättelykyky on muodostunut lapselle, on hänellä intensiivinen kiinnostus kaikenlaisiin aistihavaintoihin: värit, muodot, hahmot, ulottuvuudet, äänet, koostumukset, maut sekä hajut. Aisteja harjoittamalla voidaan parantaa niiden toimintaa vain tämän herkkyyskauden aikana. Tämä on tärkeää, sillä aistit ovat mielen ja maailman kosketuspiste: kaikki, mitä mieli saa ympäristöstä, tulee aistien kautta. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 43–44.)

Toista kehityskautta Montessori nimitti *lapsuudeksi* ja se ajoittuu ikävuosiin 6–12. Se sijoittuu suomalaisessa koulujärjestelmässä lapsen alakouluaikaan. Kehityskauden tehtävänä on edellisellä kaudella luodun rakentaminen ja kehittäminen. Tästä syystä toista kehityskautta kuvaa hyvin tasapainon, voiman ja tyyneyden aika. Toiselle kaudelle ominaisia herkkyyksiä ovat moraalisuus, kulttuurin omaksuminen, mielikuvitus, syiden etsiminen, älyllinen kehitys ja sosiaalisuus. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 22, 26, 72.)

Lapsuuden kehityskautta Montessori nimittää myös älyllisen kehityksen kaudeksi, sillä lapsi ei ole enää kiinnostunut pelkistä aistein havaittavista faktatiedoista, vaan hän haluaa suunnata tietämyksensä asioiden syihin ja seurauksiin. Sen vuoksi lapsi on täynnä loputtomia kysymyksiä. Lapsesta tulee siis tiedonjanoinen ja innokas oppija. Lapsen äly on toisella kaudella kokonaisvaltaista. Sen vuoksi lapsi tarvitsee laajan tutkimuskentän etsinnöilleen, sillä hän ei voi keskittyä pelkkiin yksityiskohtiin, vaan hän haluaa ymmärtää miten kaikki kokonaisuudet toimivat. Toisella kehityskaudella opetuksessa esiin tuleva mielikuvitus, jolle lapsi on luonut pohjan ympäristöään absorboimalla ensimmäisellä kaudella, auttaa tiedonjanoista lasta siirtymään käsitteissä konkreettisesta abstraktiin sekä syiden ja lainalaisuuksien tutkimisessa. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 73–75.)

Montessori nimesi kolmannen kehityskauden *nuoruudeksi* ja se ajoittuu ikävuosiin 12–18. Se vastaa suomalaisessa koulujärjestelmässä lapsen yläkoulu- ja toisen asteen koulutusaikaa. Tällä kehityskaudelle ominaista on suuri muutos: fyysinen ja psyykkinen kasvu. Tavoitteena on rakentaa nuoren sosiaalista persoonallisuutta, jotta hänestä tulisi sosiaalinen yksilö. Tähän liittyy kaksi psykologista perustarvetta: identiteetin ja oman sosiaalisen aseman löytäminen. Nuoren fyysinen kypsyys saavuttaa tämän kehityskauden aikana päätepisteensä, kun hänen ruumiinsa on kehittynyt aikuisen mittaan. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 22, 28–29, 94–95.)

Neljäs ja viimeinen Montessorin kehityskausista on *kypsyys*. Tämä kehityskausi käsittää ikävuodet 18–24. Se tarkoittaa suomalaisessa koulujärjestelmässä ja yhteiskunnassa nuoren aikuisen mahdollista korkeakouluopiskeluaikaa tai alkanutta työelämää. Kypsyyden kausi on seesteinen ja selkeä. Sen tärkeimpänä tavoitteena on kehittää kolmannella kaudella luotu sosiaalinen yksilö täysipainoiseksi yhteiskunnan jäseneksi. Tällöin nuori mies tai nainen kykenee tiedostamaan, mitä hän tekee ja ymmärtää, että se kuinka pitkälle hän haluaa mennä, on riippuvainen vain hänestä itsestään, koska kulttuuri ja kasvatus kuuluvat ihmiskunnalle, jonka jäseniin hän itse kuuluu. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 22, 30–31, 102–103.)

Montessori-koulun opetus

Montessori-koulujen matematiikan opetuksessa käytetään paljon matematiikkavälineitä (Hayes & Höynälänmaa 1985, 113). Tämä palvelee hyvin lasten tarpeita, sillä lapsen kiinnostus toimia näillä välineillä herää hänen ollessa noin neljän vanha (Parkkonen 1997, 180). Välineiden avulla opittavat prosessit voidaan hidastaa ja kuvata useista eri näkökulmista, jotta tuloksena saataisiin täydellinen ymmärrys. On tärkeää, että lapsi saa työskennellä matematiikkavälineillä nuoresta alkaen, sillä välineillä toimiminen kiehtoo tuolloin lasta yleisesti ja niiden avulla voidaan jättää positiivisia ja mieleenpainuvia muistijälkiä lapsille eri matematiikan osa-alueista. Montessori-materiaalien tarkoituksena onkin mahdollistaa tällaiset kokemukset lapselle, jolloin se auttaa asioiden muistamisessa ja niiden yhdistämisessä. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 111, 113.)

Montessorimenetelmässä määriin tutustuminen, symbolimerkkeihin eli numeroihin tutustuminen ja numeron tekemisen eli kirjoittamisen ohjaus erotetaan omiksi tehtäviksi heti, kun numeroilla työskentely alkaa (Parkkonen 1997, 180). Montessori-koulussa matematiikan opetus lähtee liikkeelle numeron ja sitä vastaavan nimen yhdistämisestä numerosarjoilla 1–10. Seuraavaksi hiekkapaperinumeroilla näytetään lukusanat ja sen jälkeen yhdistetään määrä ja sitä vastaava symboli. Nollan oppiminen on vuorossa seuraavana. Sen jälkeen perehdytään parillisen ja parittoman luvun käsitteisiin vain lukualueella 1-–10. Merkittävin ero tavallisen matematiikan opetuksen ja montessori-opetuksen välillä on siirtyminen kymmenjärjestelmään. Montessori-kouluissa se aloitetaan huomattavasti aiemmin eli heti, kun ensimmäiset luvut hallitaan. Montessoripedagogiikassa nähdään, että kymmenjärjestelmä on vain operoimista yhdeksällä luvulla ja nollalla. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 113.)

Montessori-koulussa on avoin ja vapaa oppimisympäristö, jossa lapsen toiminta on keskiössä. Palkkiot ja rangaistukset eivät kuulu Montessori-kouluun, sillä tausta-ajatuksena on, että lapsen oma riemu ja onnistumisen kokemukset saavutetuista tuloksista toimivat parhaina kannustimina oppimiselle. Jokainen lapsi saa edetä oppimisessa oman kehityksensä mukaisesti; eli hän työskentelee juuri omaa kehitystasoaan vastaavien tehtävien parissa kehitysteorian mukaisesti. Lapsi saa työskennellä itsenäisesti ja valita vapaasti tehtävät, joiden parissa hän haluaa työskennellä eikä oppimisen tapaa rajoiteta, vaan hänellä on mahdollisuus liikkua mielensä mukaan. Oppimisessa huomioidaan lapsen oma kiinnostuneisuus, joten lapsen on mahdollista edetä ja kehittyä niin pitkälle kuin oma motivaatio ja kyvyt sallivat. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 7.)

Jotta edellä kuvattu oppiminen olisi mahdollista, tarvitaan myös opettajaa. Opettajan tehtävänä on mahdollistaa avoin ja vapaa ympäristö, jossa tehtävät ja materiaalit ovat oppilaiden saatavissa. Opettajan rooli on tarkkailija: hän seuraa oppilaitaan niin, että jokainen lapsi työskentelee omaa kehitystään vastaavien tehtävien ja materiaalien parissa. Opettaja toimii myös lapsen yksilöllisenä ohjaajana. Montessori-kouluissa on myös yhteisiä ryhmäkeskusteluja, liikunta-, leikki- ja musiikkituokioita sekä retkiä. (Hayes & Höynälänmaa 1985, 7.)

Montessori-koulut ovat hyvin organisoituja ja niissä vallitsee hyvä järjestys. Luokkahuoneissa ei ole turhia esineitä ja kaikilla oppimista tukevilla materiaaleilla ja tavaroilla on oma paikkansa. Montessori-koulut eroavat tavallisista kouluista merkittävästi opetuksen aikatauluttamisessa; siellä ei ole käytössä lukujärjestyksiä. Lapset saavat työskennellä tietyn aihealueen parissa itse valitsemansa jakson verran kerrallaan. Näin ollen luokassa voidaan opiskella useita oppiaineita samanaikaisesti. Jos opettajalla on jokin suunniteltu yhteinen tuokio, hän ilmoittaa siitä aamulla oppilaille, jotta he voivat suhteuttaa oppimisensa siihen. (Lillard 2005, 289–292.)

3.3.3 Steinerpedagogiikka

Steinerkoululiike on Rudolf Steinerin (1861–1925) elämäntyön seurauksena syntynyt pedagoginen suuntaus, jossa korostuu ”vapaus”. Vapaudella Steiner tarkoitti aikanaan koulun vapautta toteuttaa omaa luonnettaan paikallisessa ympäristössä ilman mitään poliittista tai taloudellista valvontaa. Ensimmäinen Steinerkoulu perustettiin Stuttgartiin, Saksaan vuonna 1919. Steinerkoulujen toiminta kiellettiin toisen maailmansodan aikaan, mutta niiden toiminta elpyi nopeasti sodan jälkeen. Steinerkouluja perustettiin myös Lontooseen vuonna 1925 ja New Yorkiin vuonna 1928. Nykyään steinerkouluja löytyy ympäri maailmaa. (Edmunds 1984, 10–11, 15.)

Steinerkoulujen perusidea

Steinerpedagogiikassa kunnioitetaan lasta yksilönä ja korostetaan eheää ja opetuksetonta lapsuutta. Kasvatuksen tulee tarjota ravintoa lapselle kehollisella, sielullisella ja henkisellä alueella. Steinerkoulujen kasvatusajatuksen mukaan lapsen moraalisia, sosiaalisia ja ajattelun sekä ymmärtämisen voimia tulisi kehittää. Kasvatuksen tulee myös tarjota lapselle mahdollisuuksia hänen yksilöllisten kykyjen kehittymiselle. (Edmunds 1984, 20–25, 140–141.)

Steinerkouluissa kasvatuksen tarkoituksena on korostaa taiteen, tieteen ja mielikuvituksen merkitystä. Siellä ei anneta arvosanoja tai käytetä palkintoja. Niitä tärkeämpiä ovat auttaminen, neuvominen, kannustaminen ja ojentaminen tarvittaessa. Kilpailemista ei ole keskiössä, vaan oppilaita halutaan opastaa paremman pyrkimyksen henkeen. (Edmunds 1984, 42, 131.)

Steinerkoulun rakenne määräytyy kolmen lapsuusvaiheen pohjalta. Alle kouluikäiset lapset muodostavat oman yksikkönsä, tätä seuraa kahdeksan vuoden jakso luokanopettajan ohjauksessa ja lopuksi yläkoulu aineenopettajien parissa. Steinerkouluissa opiskelleen suurimmalta osin samoja oppiaineita kuin tavallisissa kouluissa, metodit vain ovat erilaiset. Pääaineita, kuten matematiikkaa, äidinkieltä, historiaa, uskontoa ja eri luonnontieteitä, opiskellaan oman luokanopettajan johdolla päivän aluksi. Tämän jälkeen vuorossa ovat vieraiden kielten, musiikin, eurytmian (liikuntataide), voimistelua ja käsityön opiskelu, joita opettavat aineisiin erikoistuneet aineenopettajat. Oppikirjojen täyttämisen sijaan oppilaat harjoittavat omatoimista vihkotyöskentelyä. (Edmunds 1984, 39, 65, 91, 132.)

Steinerkouluissa koulun yhteishengen yläpito on tärkeää. Kuukausijuhlat ovat yksi merkittävimpiä yhteishengen ylläpitämiä tekijöitä. Niitä järjestetään kuukausittain tai muutaman kerran lukukaudessa. Jokainen koulun luokka esittää muille luokille omia aikaansaannoksiaan. Ne voivat olla esimerkiksi äidinkielen tai vieraan kielen lausuntoja, huilunsoittoa, laulua, näytelmiä, katkelmia historian tai luonnontieteen jaksoilta, eurytmiaa tai voimistelua. (Edmunds 1984, 132.)

Pedagogiikka pohjautuu ikäkausiopetukseen

Steinerpedagogiikassa oleellista ei ole pelkästään se, *miten* opetetaan vaan myös *milloin*. Ikäkausiopetuksen perusideana on, että opetusmetodeja ja oppisisältöjä on muutettava lapsen kehittyessä ja muuttuessa. Steinerpedagogiikka jakaa lapsen koulutaipaleen tämän ajatuksen pohjalta kolmeen osaan. Aika syntymästä kouluikään on ensimmäinen jakso, jolloin lapsen koulukypsyys karttuu. Tämä jakso käsittää ikävuodet 0-6/7. Toinen jakso on lapsuus, joka käsittää ikävuodet 6/7-14. Tämä on merkittävin jakso kasvatuksen ja koulunkäynnin kannalta. Viimeisenä, kolmantena jaksona on murrosikä ja nuoruus, joka käsittää ikävuodet 14–18/21. (Edmunds 1984, 19, 34–35, 47)

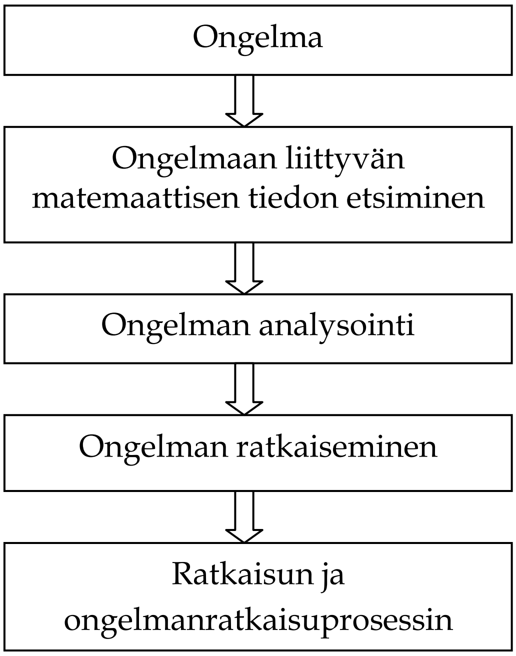
Ensimmäisellä lapsuuskaudella, syntymän ja kouluiän välillä, kasvun painopiste on fyysisessä kasvamisessa ja kehittymisessä. Lapsen oppiminen perustuu kykyyn jäljitellä kaikkea. Kasvuympäristöllä on erityisen keskeinen merkitys lapselle, sillä hän imee sieltä itseensä kaiken. Leikki on erityisen merkityksellistä lapselle, sillä leikkiessään lapsi on onnellisin ja sen avulla hän kykenee ilmentämään jäljittelemällä opitut asiat, jolla hän harjoittelee aikuiseksi kasvamista. (Edmunds 1984, 19–30.)

Kouluiässä lapsen tunne-elämä on keskiössä. Se tulisi huomioida kasvatuksessa ja opetuksessa, sillä lapsen ajattelu pohjautuu hänen tunteisiinsa. Tämän vuoksi opettajan tulisi esittää kaikki oppisisällöt käsitteellisten ajatusten ja määritelmien sijaan kuvallisessa, elävässä muodossa, sillä kuvat tavoittavat lapsen tunteet ja synnyttävät hänessä mielikuvia. Opetuksessa hyödynnetään paljon satuja, tarinoita ja vertauksia, koska niillä pyritään herättämään ja aktivoimaan lapsen mielikuvitusta. Murrosiän lähestyessä, ikävuodet kahdentoista neljäntoista tuovat mukanaan älyllistä heräämistä. Tämä muutos lapsen ajattelussa sekä alustava syy-seuraussuhteiden ajattelu tulee huomioida opetuksessa, mutta sitä ei pidä luulla kehittyneeksi ajatteluksi. Painopiste on edelleen asioiden elävässä sisällössä eikä vapaassa, objektiivisessa tarkastelussa. (Edmunds 1984, 31–64.)

Murrosiästä eteenpäin kasvatuksen ja opetuksen painopiste siirtyy elävistä kuvista käsitteiden hallintaa ja oleellista on ajattelun kehittyminen. Opetettavia asioita tarkastellaan useasta eri näkökulmasta ja työskentely on tieteellisempää. Nuoressa herää halu väitellä, esittää mielipiteitä ja vastustaa niitä. Nuoruus on itsenäistymisen aikaa, jolloin nuori kyseenalaistaa kaikkea: itsensä, maailman, vanhempien sekä opettajien auktoriteetin, kohtalon ja elämänarvot. Opettajan on siis tarjottava nuorelle aineksia, jotka kehittävät hänen mieltää ja arvostelukykyä, sytyttävät luovan mielikuvituksen, tukevat todellisuutta, vahvistavat tahtoa ja rohkaisevat oma-aloitteisuuteen. (Edmunds 1984, 77–97.)

3.3.4 Ongelmanratkaisu

Ongelmanratkaisuun pohjautuvan opetusmenetelmän ideana on opettaa matematiikkaa ongelmanratkaisun kautta. Ongelmanratkaisuun perustuvan oppimisprosessin etenemistä voidaan havainnollistaa Kuviossa 5 esitetyn ongelmaratkaisun toteutusvaiheiden avulla. Ongelmaratkaisuprosessin toteutus näyttää kuviossa lineaariselta. Käytännössä se ei kuitenkaan ole lineaarinen, vaan oppilaat saavat liikkua eri tasoilla ja tarvittaessa jopa palata takaisin ongelman esittelyyn, jos he huomaavat keksimänsä ratkaisun virheelliseksi. Näin toteutettu matematiikan opetus sopii hyvin pitkäkestoisiin tutkimuksiin ja projektitöihin. (Tikkanen 2008, 96.)



KUVIO 5. Ongelmanratkaisun toteutusprosessi (Tikkanen 2008, 96)

Ongelmia voidaan määritellä myös niiden ratkaisemisessa oletettavasti tarvittavien henkisten prosessien mukaan. Näin ollen ongelmatehtävä voi olla joko avoin tai suljettu. Avoimen ongelman ratkaisemiseksi oppilaan on kehitettävä itse mahdollisuuksia. Tämänkaltaista luovaa ajattelua voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi, kun mietitään tuttujen esineiden käyttömahdollisuuksien laajentamista. Avoimen ongelman ratkaisuprosessissa korostetaan aina luovan ongelmanratkaisun käyttöä. Suljetuissa ongelmissa on rajallinen määrä tekijöitä, jotka eivät muutu ongelmanratkaisuprosessin aikana. Valmiin toimintaohjeen mukaan ratkaistavat tehtävät tai käsitteenmuodostus ovat esimerkkejä suljetuista ongelmista. Avoimen ja suljetun ongelman eroja vertaillaan tarkemmin Taulukossa 2.

TAULUKKO 2. Avoimen ja suljetun ongelman vertailua (Sahlberg ym. 1994, 17)

Avoin ongelma	**Suljettu ongelma**
❖ Rajoja voidaan muuttaa ongelmanratkaisun aikana. ❖ Ratkaisuprosessissa esiintyy useita uusia ja odottamattomia ideoita. ❖ Prosessi saattaa sisältää kontrolloimatonta luovaa ajattelua. ❖ Ratkaisut saattavat joskus tuntua epäloogisilta – niitä ei voi näyttää toteen eikä kumota. ❖ Ongelmanratkaisun menetelmät vaihtelevat joustavasti, ja useita eri menetelmiä voidaan yhdistellä.	❖ Rajat ovat vakioita ongelmanratkaisun aikana. ❖ Oikea ratkaisu tiedetään etukäteen. ❖ Prosessi on yleensä tietoista toimintaa, kontrolloitavissa ja loogisesti uudelleenjärjestettävissä. ❖ Ratkaisut ovat usein toteen näytettävissä ja loogisesti oikeita. ❖ Ongelmanratkaisun keinot tunnetaan suorina menetelminä.

Pehkonen (2000, 2003) määrittelee avoimet ongelmat sellaisiksi tehtäviksi, joissa alku- tai lopputilanne ei ole tarkasti määrätty. Näin ollen oppilailla on vapaus tehtävien ratkomisessa, jolloin lopputuloksena on joukko erilaisia mutta yhtä oikeita ratkaisuja. Avoimia tehtäviä ovat muun muassa erilaiset arkielämän ongelmat, ongelman asettaminen, ongelmakentät tai -jonot, ongelmamuunnokset ("entä-jos"-menetelmä), projektityöt sekä tutkimustehtävät (alkutilanne tyypillisesti annettu). (Pehkonen 2000, 378; Pehkonen 2003, 37.)

Ongelmanratkaisu opetusmenetelmä kehitettiin, jotta sen avulla voitaisiin vastata konstruktivismin asettamiin haasteisiin muun muassa oppilaan ymmärtämisen edistämiseksi (Pehkonen 2000, 378). Ongelmaratkaisuun perustuvan opetuksen on havaittu kehittävän matemaattista osaamista laajasti. Se kehittää oppilaan kognitiivisia valmiuksia, kuten ajattelun joustavuutta, loogista ajattelua, analyyttistä (tutkivaa) havainnointia, tietojen arviointia, visualisointia, analogioiden löytämistä sekä päättelykykyä. Tämän lisäksi ongelmanratkaisu edistää luovuuden käyttöä sekä asioiden oikeaa ihmettelyä, otaksumista ja harkittujen arvailujen tekemistä. Tässä mitataan oppilaan todellinen kyky soveltaa eli kykeneekö hän käyttämään aiemmin opittuja matemaattisia taitoja jonkin uuden asian tutkimiseen. Se kehittää myös pitkäjänteisyyttä, kun saman ongelman parissa joudutaan työskentelemään pitkiäkin aikoja. (Koponen 1995, 149, 164.)

3.3.5 Tutkiva matematiikka

Tutkiva matematiikka (Cobb, Wood, Yackel & McNeal 1992) on opetusmenetelmä, jossa keskeistä on oppilaslähtöisyys, oppilaiden välinen vuorovaikutus sekä oppilaan aktiivinen rooli oppimisprosessissa. Menetelmän ideana on, että oppilaat itse tutkivat matematiikan ilmiötä tai ongelmaa siihen tarkoitettujen tehtävien avulla. Tehtävien tulee olla sellaisia, että oppilailla ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä niihin. (Hähkiöniemi 2011, 4.) Tämänkaltaisesta opetusmenetelmästä käytetään myös nimityksiä tutkiva oppiminen (Goos 2004), ongelmakeskeinen oppiminen (Wood & Seller 1997) ja avoin lähestymistapa (Pehkonen 1997b).

Tutkivan matematiikan oppitunnin rakenne eroaa selkeästi tavallisesta matematiikan tunnista (ks. luku 2.2.1). Tunti koostuu kolmesta selkeästä vaiheesta: alustus-, tutkimus- ja koontivaihe (Hähkiöniemi 2011, 5-6). Koska yksi oppitunti tai kaksoistunti muodostaa yhden tutkimuskokonaisuuden, tulee tutkivan matematiikan tehtävät muotoille siten, että oppilaat ehtivät tutkia opetettavaan asiaan liittyviä ongelmia riittävän kauan. Nämä tekijät erottavat tutkivan matematiikan ongelmanratkaisusta, koska ongelmanratkaisussa tutkimusprosessi on kestoltaan pidempi ja siihen käytettyjen oppituntien rakennetta ei ole strukturoitu näin tarkasti.

Alustusvaiheen ideana on, että opettaja esittelee tulevat tehtävät oppilaille, mutta hän ei näytä valmiita ratkaisumenetelmiä tai esimerkkejä. Opettajan tulee varmistaa, että jokainen oppilas ymmärtää tehtävän. Alustusvaiheessa oppilaita tulee motivoida oppilaita työskentelyyn, rohkaista heitä keksimään luovia ratkaisumenetelmiä sekä keskustelemaan niistä keskenään. Tässä vaiheessa voidaan tarvittaessa myös kerrata aiemmin opittuja asioita, kunhan opettaja huolehtii, että tehtävät eivät muutu mekaaniseksi laskemiseksi. Jos tutkiva matematiikka on oppilaille vieras työskentelymuoto, on opettajan esiteltävä myös työtapaa. (Hähkiöniemi 2011, 5.)

Tutkimusvaiheessa oppilaat ratkaisevat annettuja tehtäviä pareittain tai pienissä ryhmissä. Opettajan rooli muuttuu ohjaajaksi. Opettajan tärkein tehtävä on kuunnella oppilaita ja olla aidosti kiinnostunut heidän ajattelustaan. Mikäli oppilaat kysyvät opettajalta, onko heidän ratkaisunsa oikein, on opettajan tarkoituksenmukaista jättää vastaamatta siihen ja kysyä perusteluja oppilaiden ratkaisulle ja siihen, miten he pääsivät kyseiseen ratkaisuunsa. Opettajan tulee myös kehu oppilaidensa päättelyä tai kiinnittää heidän huomionsa johonkin tarkennusta kaipaavaan kohtaan. Näin opettaja pyrkii rakentamaan matemaattista toimintakulttuuria, jossa oikeiden vastausten sijaan perustelut ovat tärkeitä. Opettajan ohjaus on siis motivoimista, kannustamista aktivoimista ja kehumista. Näitä ei tule kohdistaa oppilaan persoonallisuuteen, vaan oikeanlaiseen työskentelyyn. (Hähkiöniemi 2011, 5-6.) Hähkiöniemi ja Leppäaho ovat kuvanneet opettajan ohjaustoimintaa erottamalla kolme eri ohjaamisen muotoa (Hähkiöniemi 2011, 6):

1. *Aktivoiva ohjaus:* opettaja kiinnittää huomiota oppilaan ratkaisussa olennaisiin asioihin ja johdattelee häntä tarkastelemaan sitä. Esimerkkejä olennaisista asioista ovat perusteleminen, teknologian rajoitteiden ymmärtäminen, siirtyminen kokeilemisesta päättelemiseen, ratkaisun syventäminen, yhteyksien rakentaminen ja yllättäen avautuvien tutkimusmahdollisuuksien hyödyntäminen.
2. *Passivoiva ohjaus:* opettaja kiinnittää huomiota oleelliseen asiaan oppilaan ratkaisussa, mutta hän esittää itse suoraan ratkaisumenetelmän tai

pyytää oppijalta muita ratkaisutapoja ilman motivointia. Näin toimiessaan opettaja passivoi oppilaan ratkaisutilanteessa ja vie häneltä mahdollisuuden ongelmanratkaisuun.

3. *Pinnallinen ohjaus:* opettaja ei kiinnitä huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa tai esittää oppilaan ratkaisuun liittymättömiä kommentteja.

Koontivaiheen tarkoituksena on läpikäydä yhdessä oppilaiden ratkaisumenetelmiä keskustellen niistä koko ryhmän kanssa siten, että oppilaille jää selkeä kuva opittavista asioista. Tässä vaiheessa opettajan tehtävänä on johtaa keskustelua. Koontivaiheessa opettajan tulee saada oppilaat kertomaan omista ratkaisuistaan ja kommentoimaan muiden ratkaisuideoita. Opettajan tulee nostaa oleelliset asiat esille ja korostaa, mitä niistä opittiin. Tiivistäessään opittuja asioita opettaja esittää niihin liittyvät standardimerkinnät hyödyntäen oppilaiden ratkaisuja. Näin tutkimukset eivät jää oppilaille irrallisiksi asioiksi, mikä on vaarana, jos koontivaihetta ei pidetä. (Hähkiöniemi 2011, 6-7.)

3.3.6 Tarinankerronta

Tarinankerronta (story telling) on uusin matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Se perustuu konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, joka näkee oppijan oman tietonsa rakentajana. (Tikkanen 2008, 102.) Tämä opetusmenetelmä perustuu Michael Stephen Schiron teokseen ”Oral storytelling and teaching mathematics – pedagogical and multicultural perspective”. Kyseisestä Schironin teoksesta on peräisin myös Velhon tarina, johon menetelmän rakenna ja toimintaperiaatteet pohjautuvat.

Tarinankerronta opetusmenetelmän ideana on, että opettaja kertoo elävästi ja toiminnallisesti Velho tarinaa. Tarinassa Velho haastaa muita tarinassa seikkailevia henkilöitä sekä kuuntelevia oppilaita ratkaisemaan erilaisia ongelmia, jotka liittyvät matematiikkaan. Ongelmia voidaan ratkoa yksin, pareittain tai pienissä ryhmissä. (Tikkanen 2008, 102.) Erilaisten toimintavälineiden käyttö on olennainen osa tarinankerrontaa. Ne vangitsevat oppilaiden huomion, helpottavat oppimista, ohjaavat toivotunlaisen toiminnan syntymistä, auttavat ymmärtämään ja muistamaan opittavia matematiikan sisältöjä. (Schiro 2004, 93–94.) Toisinaan oppilaat osallistuvat tarinaan esimerkiksi taputtamalla tai lausumalla taikasanoja, jolloin he vievät omalla toiminnallaan tarinaa eteenpäin. Näin toteutettuna tarinankerronta opetusmenetelmässä on läsnä myös sosiaalinen vuorovaikutus joko oppilaiden kesken tai opettajan ja oppilaan välillä. (Tikkanen 2008, 102.)

Opetusmenetelmässä tärkeässä roolissa on matematiikan kielentäminen eli matematiikasta puhuminen. Kielentämisessä olennaista on, että lapsi käyttää omaa kieltään: omia sanoja ja ilmauksiaan, puhuessaan matematiikasta. Kielentäminen voi tapahtua puhumalla (perustelee omia näkemyksiään ja vastauksiaan), kirjoittamalla (esittää omia kirjoitettuja ratkaisuja) tai piirtämällä. Kielentäminen edesauttaa myös oppimista ja sen tuomia etuja on esitetty Kuviossa 6. (Joutsenlahti 2005a, 1)

KIELENTÄMISEN ETUJA:

- Oppijan oman ymmärryksen kasvaminen:

  ”Puhuttu kieli on kirjoitettu kieli.” Sen perusteella kielentäessään omia ajatuksiaan muille, oppilaan on ensin selvitettävä ne itselleen.

- Sosiaalinen tekijä:

  Oppilaan kielentäessään omia ajatuksiaan muille, kuuntelijat saavat lisätietoa käsiteltävästä asiasta. Samalla he reflektoivat omia ajatuksiaan ja käsityksiään puhujan ajatuksiin ja mahdollisesti muuttavat sekä täydentävät omia käsityksiään sen pohjalta.

- Pedagoginen tekijä:

  Oppilaan kielentäessä omia ajatuksiaan ja käsityksiään, opettaja voi havainnoida, miten oppilas liittää uusia käsityksiään omiin tietorakenteisiinsa. Näin opettaja saa mahdollisuuden korjata mahdollisesti syntyviä virhekäsityksiä.

KUVIO 6. Kielentämisen etuja (Joutsenlahti 2005a, 1)

Tarinankerronta opetusmenetelmällä on saatu vaikuttavia ja monipuolisia tuloksia aikaan matematiikan tunneilla. Menetelmä on joustava ja erilaisuutta hyväksyvä, sillä siinä on jokaiselle jotakin: toimintavälineillä puuhastelua, mielikuvitusmaailmassa oppimista, kuuntelemista sekä mahdollisuus omiin kuvitelmiin. Lasten mielestä sen avulla matematiikkaa oli helpompi ymmärtää. Se toimii myös hyvänä motivoijana ja innostajana matematiikan oppimiseen, sillä menetelmän koettiin tuovan mielekkyyttä tunneille. Menetelmän avulla voidaan tukea matematiikan käsitteiden oppimista, ymmärtämistä ja kielentämistä sekä lapsen matemaattisen ajattelun kehitystä. Sen lisäksi tarinankerronta rikkoo matematiikan opetuksen kaavamaisia käytänteitä ja rutiineja. Sen avulla matematiikan opetukseen on helppo integroida muita oppiaineita, kuten äidinkieltä. (Hytti 2007, 69–86.)

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

Tutkimusmatkani alkoi sopivan aiheen valinnalla, joka muotoutui melko helposti oman opiskelutaustani pohjalta toiminnallista matematiikkaa käsitteleväksi. Minulle oli itsestään selvää heti tutkimuksen alussa, että teen laadullista tutkimusta. Halusin tutkimuksestani mahdollisimman käytännönläheisen, sillä opintoihini ei sisältynyt harjoittelujaksoa alakoulussa, ja koin kuitenkin, että tarvitsen vielä eväitä oman opettajuuteni rakentamiseen. Näin ollen käytännön läheinen tutkimus palvelee erityisesti minua mutta myös lukijaa mahdollisimman monipuolisesti. Tutkimuksen laadullisuutta käsitellään tarkemmin luvussa 4.2.

Seuraavaksi vuorossa oli tutkimustehtävän muotoilu ja tutkimuskysymysten asettaminen. Tutkimustehtäväni muotoutui tarkastelemaan opettajien käsityksiä toiminnallisesta matematiikasta, koska opintoihini ei kuulunut harjoittelujaksoa, jolloin käytännön kokeilu toiminnallisesta matematiikasta olisi ollut haasteellisempi toteuttaa, mikä oli toinen mahdollinen toteutustapani. Tutkimustehtäväni on tarkemmin kuvattuna luvussa 4.1. Koska tutkimustehtävänäni oli selvittää opettajien käsityksiä toiminnallisesta matematiikasta ja sen toteutusmahdollisuuksista, oli tutkimusmenetelmäni tietysti fenomenografia. Fenomenografiaa tutkimusmenetelmänä avataan tarkemmin luvussa 4.3.

Kun tutkimustehtävä ja -menetelmät olivat muotoutuneet, oli edessä teoriaan tutustuminen. Osin tämän jälkeen ja osin rinnakkain aloitin mielestäni todellisen tutkimuksen toteutuksen: tutkimushenkilöiden valinnan, aineiston keruun sekä analyysin. Näitä tutkimukseni vaiheista kuvaan tarkemmin niitä käsittelevien teoriajakson yhteydessä luvuissa 4.4–4.6.

4.1 Tutkimustehtävä

Tämän tutkimuksen tehtävänä on kuvata toiminnallisen matematiikan toteutusmahdollisuuksia matematiikan opetuksessa. Tarkastelua ei kohdisteta oman matematiikkataustani vuoksi pelkästään alkuopetuksen näkökulmaan, johon toiminnalliset opetusmenetelmät usein liitetään, vaan toteutusmahdollisuuksia etsitään laajemmin sekä peruskoulun että lukion matematiikan opetuksesta. Kiinnostukseni kohteena ovat opettajien käsitykset toiminnallisen matematiikan toteuttamisesta kouluopetuksessa, heidän käyttämänsä matematiikan toiminnalliset opetustavat ja välineet. Tämän lisäksi halutaan selvittää, miksi toiminnallisia menetelmiä käytetään. Tutkimukseni pääkysymyksenä on selvittää

1. Minkälaisia käsityksiä opettajilla on toiminnallisuuden toteuttamisesta matematiikan opetuksessa?

Pääkysymystäni tarkentavat seuraavat alakysymykset.

- 1.1 Minkä vuoksi opettajat käyttävät toiminnallisuutta matematiikan opetuksessa?
- 1.2 Minkälaisia haasteita toiminnallisten menetelmien käyttöön liittyy matematiikan opetuksessa?
- 1.3 Minkälaisten harjoitteiden ja välineiden kautta kouluissa toteutetaan toiminnallista matematiikan opetusta?

4.2 Tutkimuksen laadullinen luonne

Tutkimukseni on luonteeltaan kvalitatiivinen eli laadullinen tutkimus. Kvalitatiivisen tutkimuksen lähtökohtana on kuvata todellisen elämän ilmiöitä. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2009, 161–164.) Tämä pätee myös tässä tutkimuksessa, sillä tutkimukseni tavoitteena on kuvata toiminnallisen matematiikan toteuttamisen tapoja kouluopetuksessa. Ilmiöön kohdistuva tutkimus ja kuvaaminen pyritään toteuttamaan mahdollisimman kokonaisvaltaisesti. Hankittua aineistoa tulee tarkastella monitahoisesti ja yksityiskohtaisesti. Laadullinen tutkimus ei siis todenna jo olemassa olevia väittämiä, vaan se pyrkii löytämään ja paljastamaan tosiasioita. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2009, 161–164.)

Laadullisen tutkimuksen yksiselitteinen määritteleminen on vaikeaa ja sen vuoksi sitä on pyritty kuvaavaan sen mukaan, mitä se ei ole kvantitatiiviseen eli määrälliseen tutkimukseen nähden (Eskola & Suoranta 2001, 13–14). Eskola ja Suoranta (2001, 15) ovat määritelleet laadullista tutkimusta siihen kohdistuvien tyypillisten piirteiden avulla. Heidän mukaansa laadullisen tutkimuksen tunnusmerkkejä ovat aineistonkeruumenetelmä, tutkittavien näkökulma, harkinnanvarainen tai teoreettinen otanta, aineiston laadullis-induktiivinen analyysi, hypoteesittomuus, tutkimuksen tyylilaji ja tulosten esitystapa, tutkijan asema sekä narratiivisuus eli tarinan kerronta (Eskola & Suoranta 2001, 15–24).

Tässä tutkimuksessa toteutuvat Eskolan ja Suorannan (2001, 15–24) laadullisen tutkimuksen tunnusmerkit. Ensimmäinen toteutuva tunnusmerkki on tutkimusaineisto, joka on riippuvainen minusta tutkijana, sillä olen hankkinut kaiken aineiston haastattelemalla itse tutkimushenkilöitä. Olen huomioinut myös tutkittavien näkökulman, sillä pyrkimykseni on saada jokaisen haastateltavan henkilön mahdollisimman tarkka ja todenmukainen käsitys toiminnallisesta matematiikasta sitä yhtään manipuloimatta. Tutkimushenkilöt on valittu harkinnanvaraisen otannan avulla. Koska tavoitteenani oli löytää eri koulutasoilta sellaisia opettajia, joilla on käsitystä toiminnallisesta matematiikasta käytännössä ja jotka käyttävät sitä omassa opetuksessaan, oli minun järkevää etsiä nämä kriteerit täyttäviä opettajia, sen sijaan että valitsisin satunnaisesti viisi opettajaa eri koulutasoilta. Aineiston laadullis-induktiivisen analyysin avulla pystyn kuvaamaan tutkimani ilmiön olemusta ja siihen liittyviä perustietoja.

Hypoteesittomuudella tarkoittaa sitä, ettei tutkijalla ole ennakko-olettamusta tutkimuskohteesta tai tutkimuksen mahdollisista tuloksista (Eskola & Suoranta 2001, 19). Tämä tunnusmerkki toteutuu myös tässä tutkimuksessa, sillä minulla ei ollut mitään tietoa siitä, mitä tutkimushenkilöni toiminnallisesta matematiikasta todella ajattelevat, millä tavoin he sitä omassa työssään toteuttavat tai mitkä ovat heidän tavoitteensa käytölle. Tiesin vain, että jokainen oli aiheesta kiinnostunut ja käyttänyt opetuksessaan. Näin ollen en voinut arvella heidän ajatuksiaan ja käsityksiään, koska kaikki tutkimushenkilöt olivat minulle täysin vieraita. Tutkijan asemani tätä tutkimusta tehdessäni on ollut hyvin vapaa. Olen saanut suunnitella juuri sellaisen tutkimuksen, joka minua kiinnosti ja toteuttaa sen minulle parhaiten sopivalla tavalla. Narratiivisuus on myös läsnä analyysissani, sillä pyrin kuvaamaan saamiani tuloksia mahdollisimman laajasti tarinankerronnan avulla.

Laadullista tutkimusta ei toteuteta aina saman tradition mukaan, vaan tutkimustavat ovat riippuvaisia siitä, mistä näkökulmasta tutkittavaa ilmiötä tarkastellaan (Hirsjärvi ym. 2009, 162). Tässä tutkimuksessa tavoitteenani oli tutkia opettajien käsityksiä toiminnallisesta matematiikasta ja sen toteutusmahdollisuuksista koulumatematiikan opetuksessa sellaisina, kuin ne ilmenevät opettajien arjessa. Näin ollen tutkimusmenetelmäkseni valikoitui fenomenografinen tutkimusmenetelmä, joka on kiinnostunut kuvaamaan ihmisten erilaisia käsityksiä maailmasta, jossa elämme.

4.3 Fenomenografia tutkimusmenetelmänä

Fenomenografia on tutkimusmenetelmä, joka tutkii ihmisten erilaisia käsityksiä asioista. Fenomenografian (Phenomenography) käsite tulee sanoista ”ilmiö” ja ”kuvata” ja se tarkoittaakin ilmiön kuvaamista ja siitä kirjoittamista (Metsämuuronen 2008, 34; Ahonen 1994, 114). Fenomenografia on siis kiinnostunut siitä, miten ympäröivä maailma ilmenee ja rakentuu ihmisten tietoisuudessa, sillä ihminen nähdään tietoisena olentona, joka rakentaa itselleen käsityksiä asioista ja ilmiöistä ja joka osaa kertoa sanallisesti nämä käsityksensä (Ahonen 1994, 114, 121–122).

Lähtökohtana fenomenografisessa tutkimuksessa on ajatus, jonka mukaan on olemassa vain yksi maailma, josta eri ihmisillä on erilaisia käsityksiä (Metsämuuronen 2008, 35). Tutkimuksen kohteena oleva käsitys on kokemuksen ja ajattelun avulla muodostettu kuva asiasta (Ahonen 1994, 117). Se on dynaaminen ilmiö, sillä ihmisen käsitykset tarkasteltavasta asiasta voivat muuttua (Metsämuuronen 2008, 34–35). Ihmisen muodostamaan käsitykseen vaikuttaa eniten hänen kokemustaustansa (Ahonen 1994, 117). Muita vaikuttavia tekijöitä ovat yksilön ikä, koulutustausta ja sukupuoli (Metsämuuronen 2008, 34).

Fenomenografisen tutkimuksen juuret sijoittuvat 1970-luvun Ruotsiin ja Götenborgin yliopistoon, jossa Ference Marton tutki muun muassa opiskelijoiden käsityksiä oppimisesta, planeettojen liikkeistä ja sodan syistä (Metsämuuronen 2008, 35). Fenomenografisen tutkimussuuntauksen muotoutumiseen ovat vaikuttaneet vahvasti Piaget´n tekemät tutkimukset, hahmopsykologia sekä fenomenologia (Häkkinen 1996, 6). Ahosen (1994) mukaan fenomenografinen tutkimus voidaan kiteyttää neljään vaiheeseen, joiden avulla se etenee. Nämä neljä vaihetta ovat (Ahonen 1994, 115):

1. Tutkija kiinnittää huomionsa johonkin asiaan tai käsitteeseen, josta on olemassa erilaisia käsityksiä.
2. Tutkija perehtyy asiaan tai käsitteeseen liittyvään teoriaan ja jäsentää siihen liittyvät näkökohdat.
3. Tutkija haastattelee henkilöitä, joilla on erilaisia käsityksiä tutkittavasta asiasta tai käsitteestä.
4. Tutkija luokittelee käsityksen niiden merkitysten mukaan. Sen jälkeen tutkija kokoaa käsitykset ylemmän tason merkitysluokkiin, jotta hän voi selittää käsitysten erilaisuutta.

Fenomenografinen tutkimus pyrkii tuomaan esiin ihmisten arkiajattelusta mahdollisimman erilaisia ajattelutapoja tutkittavaan ilmiöön tai käsitteeseen liittyen. En siis etsi tässä tutkimuksessa teoriaan nähden oikeita tai vääriä vastauksia, vaan haluan selvittää mahdollisimman erilaisia käsityksiä toiminnallisen matematiikan toteuttamisesta. Näiden pohjalta muodostan tutkijana kokonaisia merkitysyksiköitä, joista muodostan tekemäni analyysin ja tulkinnan pohjalta tutkittavaa ilmiötä tai käsitettä kuvaavat kategoriat. Tätä tehdessäni minun tulee tutkijana tiedostaa kontekstisuuteni sekä omat lähtökohtani tutkittavaan käsitteeseen. Käsityskategorioiden tarkoituksena ei siis ole selittää käsitysten taustalla olevia syitä, vaan ymmärtää tutkittavien henkilöiden ajattelua. Nämä erilaisia ajattelutapoja kuvaavat käsityskategoriat ovat fenomenografisen tutkimuksen tärkeimmät tulokset. (Häkkinen 1996, 5, 14, 29.)

Tässä tutkimuksessa tarkastelen opettajien käsityksiä toiminnallisten opetusmenetelmien toteutusmahdollisuuksia matematiikan opetuksessa. Jokaisella haastattelemallani opettajalla on oma käsityksensä toiminnallisen matematiikan toteuttamisesta, jonka he ovat muodostaneet omasta käytännön työstään, koulutuksissa ja saamistaan teoriatiedoista. Minun tehtäväni tutkijana on avata heidän kokemuksiaan toiminnallisen matematiikan toteuttamisesta ja sen kautta pyrkiä luomaan merkitys ilmiölle. Tavoitteenani ei ole määritellä toiminnallista matematiikkaa ja sen toteuttamista kaikenkattavasti, vaan eritellä tätä ilmiötä määritteleviä käsitteitä sekä niiden välisiä suhteita mahdollisimman kattavasti saamieni aineistojen pohjalta.

4.4 Tutkittavat ja heidän valintansa

Laadullisen tutkimuksen toteutuksessa on tärkeää, että tutkimuksen kohdejoukko valitaan tarkoituksenmukaisesti (Hirsjärvi ym. 2009, 164). Eskola ja Suoranta (2001, 66) korostavat myös, että tutkimushenkilöt tulee valita huolella ja järkevästi. Heidän mukaansa valinnassa tulee huomioida seuraavat kolme seikkaa: tutkimushenkilöillä on suhteellisen samanlainen kokemusmaailma, heillä on omakohtaista tietoa tutkimusongelmasta ja he ovat kiinnostuneita itse tutkimuksesta (Eskola & Suoranta 2001, 66).

Tutkimushenkilöistäni kolme työskentelee alakoulussa ja heillä kaikilla on pidempi kokemus opettajan työstä. Koska tarkastelin ilmiötä myös yläkoulun ja lukion näkökulmasta, haastattelin alakoulun opettajien lisäksi yhden yläkoulussa ja yhden lukiossa toimivan opettajan. Vaikka heidän opetusympäristönsä eroaa alakoulusta, oli heilläkin pidempi kokemus opettajan työstä ja sama aineenopettajan koulutuspohja. Koska tutkimukseni aihe on kohdentunut opettajien käsityksiin toiminnallisuuden toteuttamisesta matematiikan opetuksessa, oli tutkimushenkilöilläni oltava kokemusta matematiikan opettamisesta. Tämän lisäksi oli erityisen tärkeää, että opettajat ovat toteuttaneet omassa matematiikan opetuksessaan joitain toiminnallisia menetelmiä tai harjoitteita. Kaikki haastattelemani henkilöt olivat kiinnostuneita kehittämään matematiikan opetustaan toiminnalliseen suuntaan ja olivat mielenkiinnolla tukemassa tutkimukseni tekoa. Näin ollen tutkimushenkilöideni valinnassa toteutuvat kaikki Eskolan ja Suorannan (2001, 66) yleistettävyyden kriteerit. Tutkimushenkilöideni lopulliseen valintaan vaikutti myös heidän oma halukkuutensa osallistua tutkimukseeni.

Edellä kuvattujen ominaisuuksien omaavien tutkimushenkilöiden etsiminen ei ollut helppoa. Löysin itse kovan yrittämisen ja useiden yhteydenottojen jälkeen kolme sopivaa tutkimushenkilöä. Tutkittavien etsintätehtävään sain apua myös toiselta ohjaajaltani Sirpa Eskelä-Haapaselta, jolla oli hyviä kontakteja. Tutkimukseeni osallistui lopulta yhteensä viisi opettajaa, kolme miestä ja kaksi naista. Heistä kolme toimii alakoulussa luokanopettajana ja kaksi aineenopettajana, toinen yläkoulussa ja toinen lukiossa. Olen nimennyt tutkimushenkilöni peitenimillä heidän henkilöllisyytensä turvaamiseksi. Seuraavaksi kuvaan hieman tarkemmin heidän taustojaan.

Mikko on valmistunut luokanopettajaksi vuoden 2002 lopulla. Valmistumisestaan lähtien hän on työskennellyt opettajana eli opetusvuosia on kertynyt lähemmäs kaksitoista. Tämän koko ajan Mikko on työskennellyt pienessä Montessori-koulussa. Siellä hän on vastannut pääasiassa 1–3 yhdysluokan opetuksesta. Joinain vuosina yhdysluokkaan on kuulunut myös esiopetusryhmä tai hän on opettanut vain luokkia 1–2. Joissain aineissa Mikko on opettanut myös luokkien 4–6 oppilaita. Mikolla ei ole erillisiä montessoriluokan opettajaopintoja.

Sanna on valmistunut luokanopettajaksi vuonna 1985. Hän on opiskellut myös matematiikasta ja kemiasta cum laude-arvosanan, eli hänellä on pätevyys opettaa näitä aineita yläkoulussa. Sanna on toiminut opettajan työssä kaikkiaan noin kaksikymmentä vuotta. Hän on työskennellyt muutaman vuoden ajan yläkoulussa äidinkielen tuntiopettajana ja opinto-ohjaajana. Muuten hän on toiminut luokanopettajana. Sanna on hankkinut lisäosaamista käymällä Hannele Ikäheimon pitämillä oppimisvaikeuksien kursseilla ja Martta Oraviczin unkarilaisen matematiikan kursseilla. Näiden innoittamana Sanna on lähtenyt kehittämään omaa matematiikan opettamistaan.

Kalle on valmistunut luokanopettajaksi vuonna 1985 ja toiminut koulutustaan vastaavissa tehtävissä noin 18 vuotta. Kalle on opettanut kaikkia alakoulun luokkia, mutta viime vuosina pääpaino on ollut luokkien 3–6 opetuksessa. Hän on käynyt paljon erilaisissa matematiikan opetukseen liittyvissä koulutuksissa. Viime vuodet hän on toiminut itse kouluttajana ja pitänyt koulutuksia matematiikan opettamisesta. Hän on innokas kehittämään matematiikan opetustaan ja käy edelleen kuuntelemassa mielenkiintoisissa koulutustilaisuuksissa.

Helena on valmistunut matemaattisten aineiden aineenopettajaksi vuonna 1989. Hän on toiminut opettajana pääasiassa lukiossa, mutta on työskennellyt yhden vuoden samanaikaisesti sekä yläkoulussa että lukiossa. Tällä hetkellä hän toimii matematiikan opettajana lukiossa IB-linjalla. Helena on myös tehnyt tutkivan oppimisen opetuskokeilun lukion matematiikassa, jonka pohjalta hän on tehnyt väitöskirjansa. Hän on siis väitellyt matematiikan didaktiikasta. Helena on työskennellyt myös yliopistossa didaktikkona. Helena on kouluttanut aineenopettajia tutkivasta matematiikan oppimisesta lukiossa sekä erään projektin mukana esikoulunopettajia toiminnallisesta matematiikasta.

Pekka on toiminut matematiikan aineenopettajana vajaan yhdeksän vuoden ajan. Hän on opettanut matematiikkaa pääasiassa yläkoulussa kaikilla kolmella luokalla. Pekka on erään matematiikkaprojektin perustajajäseniä ja on sen vuoksi osallistunut monenlaisiin toiminnallisen matematiikan koulutuksiin hakeakseen vinkkejä ja ideoita toiminnalliseen matematiikan opetukseen. Nykyään Pekka on toiminut myös kouluttajana toiminnallisen matematiikan parissa. Hän on kouluttanut sekä luokanopettajia että matematiikan aineenopettajia.

4.5 Aineiston keruu

Kvalitatiivisella tutkimukselle on ominaista, että aineiston keruun suorittaa tutkija itse vuorovaikutuksessa tutkimushenkilön kanssa (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2009, 164). Hyviä metodeja aineiston hankintaan ovat muun muassa lomakehaastattelu, teemahaastattelu, strukturoimaton haastattelu, ryhmähaastattelu tai osallistuva havainnointi (Hirsjärvi & Hurme 2008, 43–44; Hirsjärvi ym. 2009, 164).

Fenomenografisen tutkimuksen aineisto hankitaan tavallisesti haastattelun avulla (Ahonen 1994, 136). Sen vuoksi tutkimukseni pääasiallinen aineisto onkin hankittu opettajia haastattelemalla. Haastattelujen lisäksi osallistuin tutkimushenkilöni Kallen pitämään koulutukseen ja keräsin siinä tietoa havainnoimalla. Koulutuksen aihe käsitteli monin tavoin tutkimukseni aihetta. Tarkempia koulutuksen tietoja sen virallista nimestä ja koulutuspaikasta en tuo tässä tutkimuksessa julki, jotta Kallen henkilöllisyys ei paljastuisi. Koulutuksessa teimme erilaisia toiminnallisia harjoitteita sekä keskustelimme niistä heränneistä ajatuksista. Seuraavassa kuvaan hieman tarkemmin haastattelua ja osallistuvaa havainnointia aineistonkeruumenetelminä omassa tutkimuksessani.

4.5.1 Haastattelu

Haastattelu on etukäteen suunniteltu päämäärähakuinen vuorovaikutustilanne, johon osallistuu yleensä tutkija itse eli haastattelija sekä tutkimushenkilö eli haastateltava. Haastattelun tavoitteena on kerätä tutkimusaiheeseen liittyvää informaatiota. (Hirsjärvi & Hurme 2008, 41–43.) Hirsjävi ja Hurme (2008, 41) täydentävät, että haastattelijan tehtävänä on siis kuvata haastateltavan henkilön käsityksiä, kokemuksia, ajatuksia ja tunteita. Ennen haastattelun suorittamista haastateltavan on tutustuttava tutkittavaan ilmiöön sekä käytännössä että teoriassa (Hirsjärvi & Hurme 2008, 43).

Oma tutkimusmatkani ja teoriaan tutustuminen alkoi jo paljon ennen tämän tutkimukseni aloittamista, sillä olen perehtynyt aiheeseen jo aineenopettajaopintojeni aikana sekä teorian että käytännön kautta. Ennen haastatteluja tarkastelin vielä lisää juuri valitsemaani aiheeseen kohdennettua teoriatietoa. Varsinaisissa haastattelutilanteissa oli läsnä vain haastateltava opettaja ja minä tutkijana. Haastattelut toteutin puolistrukturoituna haastatteluna. Selvennän seuraavassa puolistrukturoidun haastattelun käsitettä, sillä tutkimushaastattelun lajeja käytetään hyvin väljästi, jolloin samaa lajia käyttävät haastattelijat voivat kuitenkin toteuttaa täysin erilaisen haastattelun (Hirsjärvi & Hurme 2008, 43).

Hirsjärven ja Hurmeen (2008, 47) mukaan puolistrukturoidussa haastattelussa kysymykset on laadittu etukäteen ja niiden muoto voi vaihdella eri haastatteluissa sanamuotojen osalta. Puolistrukturoidussa haastattelussa voidaan edetä myös tilanteen ja tunnelman mukaan, sillä kysymysten esitysjärjestystä voidaan vaihtaa (Hirsjärvi & Hurme 2008, 47). Eskola ja Suoranta (2001, 86) määrittelevät puolistrukturoidun haastattelun hieman tiukemmin: kaikille haastateltaville tulee esittää samat kysymykset siten, että esitysjärjestys säilyy samana. He korostavat, että kysymyksiin ei anneta vastausvaihtoehtoja, vaan jokainen haastateltava vastaa kysymyksiin omin sanoin (Eskola & Suoranta 1998, 86).

Tässä tutkimuksessa toteutuivat kaikki kolme edellä mainittua ominaisuutta. Haastattelussani esitettiin samat kysymykset kaikille haastateltaville pienin sanamuotoeroin ja niiden järjestys vaihteli käytävän keskustelun mukaan. Kaikki kysymykset oli laadittu ennalta. Muutama kysymyksistä oli hyvin avoimia, sillä tavoitteenani oli saada haastateltava kertomaan avoimesti omin sanoin omasta toiminnastaan, jota tarkensin tarvittaessa lisäkysymyksillä.

Haastatteluni toteutuksessa on myös piirteitä, jotka Hirsjärvi ja Hurme (2008, 48) luokittelevat teemahaastatteluun. Se on myös eräs puolistrukturoidun haastattelun laji. Teemahaastattelussa käsiteltävät aiheet eli teemat ovat kaikille haastateltaville samat (Hirsjärvi & Hurme 2008, 48). Haastattelu etenee kuhunkin teemaan liittyvien tarkentavien kysymysten varassa (Tuomi & Sarajärvi 2011, 75). Tutkimukseni kysymykset voidaan nähdä käsittelevän neljää suurempaa teemaa: opettajan taustatiedot, opettajan omat toiminnalliset opetustavat ja -käytänteet, käytön tavoitteet sekä haasteet.

Haastattelun vahvuus aineistonkeruumenetelmänä on sen joustavuus. Haastattelija voi valita kysymysten esittämisjärjestyksen tilanteeseen sopivaksi. (Hirsjärvi & Hurme 2008, 37; Tuomi & Sarajärvi 2011, 73). Hänellä on myös mahdollisuus toistaa kysymykset uudelleen, oikaista mahdollisia väärinkäsityksiä, selventää käyttämiensä ilmauksien sanamuotoja sekä käydä keskustelua haastateltavan kanssa (Tuomi & Sarajärvi 2011, 73). Haastattelussa tutkijan on helppo syventää saamiaan tietoja haastateltavalta esittämällä esimerkiksi tarkentavia lisäkysymyksiä tai pyytämällä perusteluja (Hirsjärvi & Hurme 2008, 35).

Olen suorittanut haastatteluista neljä syyslukukauden 2013 aikana. Viimeisen haastatteluni teko pitkittyi omien opiskelu- ja työkiireiden vuoksi, ja se toteutui vasta maaliskuussa 2014. Tutkimushenkilöideni Helenan, Sannan ja Pekan haastattelut olen käynyt tekemässä heidän omissa kouluissaan. Muut haastattelut on suoritettu haastateltavan kannalta järkevästi katsotuissa paikoissa. Olen nauhoittanut kaikki haastattelut tutkimushenkilöiden luvalla, jotta olen voinut keskittyä haastattelutilanteessa kirjoittamisen sijaan täysin kuuntelemiseen ja haastattelun läpiviemiseen järkevällä kysymysten asettelulla. Haastattelujen kestot vaihtelevat reilusta puolesta tunnista tuntiin.

Tavatessani haastateltavan opettajan puhuimme hetken omista kuulumisistamme, itse haastattelutilanteesta sekä muista arkisista asioista. Keskustelin Helenan, Sannan ja Pekan kanssa myös heidän kouluistaan, koska se toimi haastattelupaikka. Tämä keskustelu toimi hyvänä ja luonnollisena tapana kohdata ja tutustua uuteen ihmiseen. Sen avulla löysimme hyvin yhteisen keskustelusävelen, josta oli helppo siirtyä viralliseen haastatteluun. Hirsjärvi ja Hurme (2000, 90) kuvaavat, että lyhyt, vapaamuotoinen keskustelu helpottaa uuteen ihmiseen tutustumista ja auttaa sekä haastateltavaa että haastattelijaa siirtymään uuteen rooliin. Tämä edesauttaa myös synnyttämään luottamuksen osapuolten välille (Hirsjärvi & Hurme 2000, 90).

Kaikissa haastatteluissa istuin haastateltavan kanssa vastatusten pöydän ääressä ja ilmapiiri oli avoin ja rento koko haastattelun ajan. Aloitin jokaisen haastattelun määrittelemällä haastateltavalle vielä uudestaan, mitä toiminnallisella matematiikalla tässä tutkimuksessa tarkoitetaan, jotta he osaisivat kertoa mahdollisimman hyvin aiheeseen liittyviä käsityksiään. Tämän jälkeen selvitin opettajien taustoja, jotta saisin luotua heistä tutkimushenkilöprofiilit. Kaikki haastatteluni etenivät samankaltaisesta aloituksesta huolimatta hieman eri tavoin, vaikka minulla olikin suunniteltu runko haastattelun kulusta (ks. liite 1). Hirsjärvi ja Hurme (2000, 104) korostavatkin, että haastattelijan tulee toteuttaa joustavuutta ja luontevuutta kysymysten esittämisjärjestyksessä, joten toimintani oli siten hyväksyttävää. Keskustelut etenivät siis luontevasti aiheesta toiseen, joten minun tuli vain seurata, että kaikki suunnittelemani kysymykset tulee käsiteltyä. Välillä ajauduimme keskustelemaan haastateltavan opettajan kanssa tutkimuksen kannalta epäoleellisista asioista, mutta annoin sen edetä loppuun asti vaihtamatta aihetta, sillä ne olivat usein itselle nuorena opettajana hyvin merkityksellisiä keskusteluja.

4.5.2 Havainnointi

Havainnoimani koulutuksen ideana oli perehtyä erilaisiin toiminnallisen matematiikan opetusharjoitteisiin ratkaisemalla tehtäviä ja ongelmia. Sen lisäksi koulutuksessa keskusteltiin tehtävien ja harjoitteiden tekemiseen ja toteuttamiseen liittyvistä ajatuksista. Tavoitteenani oli havainnoida erilaisia toiminnallisia harjoitteita ja kirjata niihin liittyviä huomioita ylös. Erillistä havainnointilomaketta minulla ei ollut käytössä. Osallistuin tehtävien ratkaisemiseen ja siitä virinneeseen keskusteluun yhden pienemmän ryhmän jäsenenä. En johdatellut koko ryhmän yhteistä keskustelua mihinkään suuntaan, vaan pyrin vain seuraamaan sitä aktiivisesti. Näin ollen tutkijan tulkintojen ja havaintojen sekoittumisen riskiä tässä tutkimuksessa ei ole. Koulutus kesti kokonaisuutena kuusi tuntia, josta aktiivista osallistuvaa havainnointia oli noin neljä ja puoli tuntia.

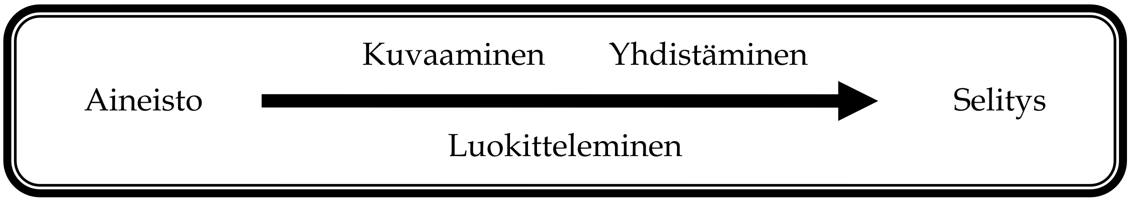
Havainnointi on aineistonkeruumenetelmä, jonka avulla saadaan selville, mitä käytännössä todella tapahtuu. Havainnointia on kahta tyyppiä: systemaattista ja osallistuvaa. Systemaattista havainnointia käytetään yleensä kvantitatiivisessa tutkimuksessa ja osallistuvaa kvalitatiivisessa tutkimuksessa. (Hirsjärvi ym. 2009, 212–215.) Koska tutkimukseni on laadullinen, perehdytään tarkemmin osallistuvaan havainnointiin.

Osallistuva havainnointi tarkoittaa, että tutkija on itse mukana ryhmän toiminnassa aktiivisesti tutkittavien ehdoilla. (Hirsjärvi ym. 2009, 216; Tuomi & Sarajärvi 2011, 82). Aidot sosiaaliset vuorovaikutustilanteet ovat tärkeä osa aineistonhankintaa (Tuomi & Sarajärvi 2011, 82). Tämän vuoksi havainnointi pyritään tekemään ryhmän luonnollisessa ympäristössä. Osallistuvan havainnoinnin alalajeja on monia riippuen siitä, miten täydellisesti ja kokonaisvaltaisesti tutkija osallistuu tutkittavien toimintaan. Tätä menetelmää käyttäessäni minun on ollut tutkijana tärkeä pitää erillään tekemäni havainnot ja omat tulkintani. (Hirsjärvi ym. 2009, 216–217.)

4.6 Aineiston analyysi

Aineiston analyysi on se tutkimuksen vaihe, missä tutkijalle selviää, mitä tuloksia hän on saanut tutkimastaan ongelmasta (Hirsjärvi ym. 2009, 221). Omassa tutkimuksessani toteutan tutkimukseni analyysin fenomenografisen tutkimusmenetelmän mukaan.

Ahonen (1994, 15) kuvaa fenomenografista analyysivaihetta seuraavasti: Tutkija luokittelee käsityksen niiden merkitysten mukaan. Sen jälkeen tutkija kokoaa käsitykset ylemmän tason merkitysluokkiin, jotta hän voi selittää käsitysten erilaisuutta. Tarkoituksena siis on, että litteroitu aineisto järjestetään ja siitä poimitaan tutkimuksen kannalta olennaiset asiat. Tämän jälkeen varsinainen analysointi alkaa. Analyysi tarkoittaa oleellisen aineiston tiivistämistä, luokittelua, narratiivista kerrontaa ja tulkintaa (Hirsjärvi ja Hurme 2008, 137). Kvalitatiivisen tutkimuksen analyysin tekeminen tapahtuu yleensä vaiheittain, jota Kuvio 7 havainnollistaa (Hirsjärvi ym. 2009, 223).



KUVIO 7. Analyysin vaiheittainen eteneminen (Hirsjärvi ym. 2009, 223)

Analyysini alkoi aineiston keruun jälkeen viiden haastattelun litteroinnilla. Litteroin tietokoneella kaikki haastattelut sanatarkasti kaikkine pikkusanoineen, sellaisina kuin ne nauhalta kuuluivat. Tämä oli todella hidas ja työteliäs vaihe tutkimuksen analyysissä. Kahden haastattelun litterointiin sainkin kirjoitusapua äidiltäni. Litteroinnin selkeänä hyötynä oli, että se palautti hyvin mieleen kaikki käymäni keskustelut tutkimushenkilöideni kanssa. Kokonaisuudessaan kirjoitettua aineisto tuli 53 sivua fontilla 12 ja rivivälillä 1,5. Litteroinnin jälkeen tulostin koko aineiston ja kävin ne vielä ajatuksella läpi, jotta sain aineistostani mahdollisimman hyvän kokonaiskuvan.

Analyysini seuraavassa vaiheessa tavoitteenani oli luokitella opettajien käsityksiä toiminnallisen matematiikasta ja sen toteuttamisesta niiden merkitysten perusteella. Luin litteroidut haastattelut uudestaan ja alleviivasin sieltä käsitysten muodostamisen näkökulmasta merkityksellisiä virkkeitä. Otin aineiston rinnalle jokaista tutkimushenkilöäni varten oman paperin, johon samalla kirjasin ylös muodostuvia käsitteitä. Tämän jälkeen pohdin kaikkien opettajien käsitteitä yhdessä, yhdistelin näitä käsityksiä ja lopulta muodostin viralliset käsitteet neljän kategorian alle: toiminnallisen matematiikan mahdollisuudet, edut ja haasteet sekä mitä käyttö edellyttää opettajalta.

Nyt vuorossa oli jäsennettyjen käsitteiden kirjoittaminen auki. Sitä helpottamaan tein listan kaikista käsitteistäni ja numeroin ne. Tämän jälkeen merkitsin käsitelistaani, kuka opettajista oli mistäkin käsitteestä puhunut ja merkkasin haastattelupapereihin merkityksellisten virkkeiden kohdalla kyseisen käsitteen numeron, jotta minun oli helppo löytää ne, kun kirjoitan kustakin käsitteestä.

Kirjoitusprosessini eteni vaiheittain, yksi käsite kerrallaan siinä järjestyksessä kuin ne on luvussa 5 esitetty. Kirjoittaessani käsitteitä tiivistin aiemmin kokoamaani aineistoa entisestään. Pyrin hyödyntämään mahdollisimman paljon suoria lainauksia haastatteluista, jotta en tekisi mitään vääriä tulkintoja niistä. Osan pitkistä sisällöistä selitin lyhyemmin omin sanoin käyttäen tiettyjä alkuperäistekstin ilmaisuja. Siirtelin myös aineistoa eri käsitteiden välillä, sillä niissä on osittain päällekkäisyyttä. Tulosteni raportointi ei ole pelkkää niiden narratiivia kerrontaa, vaan se sisältää myös vuoropuhelua teorian kanssa. Tein teorian pohjalta tulkintoja sekä hain siitä tukea tutkimushenkilöideni näkemyksille. (Eskola & Suoranta 2001, 82.)

4.7 Luotettavuus

Eskolan ja Suorannan (2001, 210) mukaan laadullisen tutkimuksen luotettavuutta arvioitaessa oleellista on tarkastella itse tutkijaa, sillä hän on tutkimuksensa yksi merkittävin tutkimusväline. Tutkijan tekemät pohdinnat ja päätelmät omien subjektiivisten olettamusten ja asenteiden valossa vaikuttavat merkittävästi tutkimukseen. Näin ollen tutkijaa voidaankin pitää laadullisen tutkimuksen pääasiallisena luotettavuuden kriteerinä. (Eskola & Suoranta 2001, 210.) Tutkija voi itse parantaa tutkimuksensa luotettavuutta ja uskottavuutta kriittisellä ja arvioivalla työasenteellaan. Tutkijan on siis tärkeä tarkastella huolellisesti ja kriittisesti koko tutkimusprosessin aikana tehtyjä valintoja, haasteita sekä niitä tekijöitä, jotka hänen mukaansa vaikuttavat tutkimuksen kulkuun ja tuloksiin. (Saaranen-Kauppinen & Puusniekka 2009, 27.) Olen pyrkinyt tutkijana tarkastelemaan keräämääni aineistoani mahdollisimman objektiivisesti ja pidättäytynyt vain niissä asioita, jotka nousivat esiin tutkimushenkilöideni virallisissa haastatteluissa. Olen pyrkinyt myös tiedostamaan omat asenteeni ja olettamukseni tutkimuksen aikana, jotta saisin ehkäistyä niiden vaikutuksen tutkimukseeni kokonaisuudessa. Koska tutkija on mukana koko tutkimuksen teon ajan, kohdistuu luotettavuuden arviointi koko tutkimusprosessiin (Eskola & Suoranta 2001, 210).

Hirsjärven ja Hurmeen (2008, 184) mukaan laadukkaan tutkimuksen teko pohjautuu hyvän haastattelurungon tekemiseen. Työstin omaa haastattelurunkoani ajallisesti melko paljon ja pohdin kysymyksiä huolella, sillä en ollut koskaan aiemmin tutkimushaastattelua suunnitellut, ja tavoitteenani oli saada hyvä ja laadukas haastattelumateriaali jokaiselta haastateltavalta yhdellä haastattelukerralla. Keskustelin haastattelurungostani myös ohjaajani kanssa. Ulkoasultaan se on suunniteltu minulle itselleni sopivaksi, sillä sen tarkoitus oli toimia muistini tukena haastattelutilanteissa. Haastattelujen loppuvaiheessa siitä oli helppo tarkistaa, että kaikkiin siinä olleisiin kysymyksiin olin ainakin saanut vastaukset jokaiselta haastateltavaltani.

Hirsjärvi ym. (2009, 232) korostavat, että laadullisen tutkimuksen luotettavuutta voidaan parantaa tutkimusvaiheiden huolellisella ja kattavalla raportoinnilla. Tämä on ollut tavoitteenani koko tutkimuksen raportoinnin ajan. Olen esitellyt oman sitoumukseni tutkimukseen ja perustellut, miksi tutkimukseni käsittelee juuri toiminnallista matematiikkaa. Olen pyrkinyt tutkimusmatkani toteutuksen tarkkaan raportointiin aina teoriasta tutkimustehtävääni. Luvussa neljä olen raportoinut tarkasti perustellen tutkimushenkilöideni valintaa, aineistonkeruuta sekä –analyysiä (Eskola & Suoranta 2001, 72). Tulosluvussa olen käsitellyt aineistoani mahdollisimman kattavasti ja monipuolisesti lisätäkseni tutkimukseni luotettavuutta (Eskola & Suoranta 2001, 210).

Eskola ja Suoranta (2001, 211–212) esittävät luotettavuuden lisäämiseksi uskottavuuskriteerin. Sillä he tarkoittivat, että tutkijan tulee tarkastaa, vastaavatko hänen tekemät tulkintansa tutkittavan käsityksiä (Eskola & Suoranta 2001, 211). Olen kerännyt kaikkien viiden tutkimushenkilöni haastattelut yhdellä haastattelukerralla. En kokenut tarvetta tarkentaa heidän käsityksiään uudella haastattelulla, kun kuuntelin haastattelut itsekseni uudestaan. Koska nauhoitin haastattelut, pystyin keskittymään kunnolla kuuntelemaan haastateltavia, joten tarkensin jokaisen haastattelemani opettajan käsityksiä esittämällä lisäkysymyksiä sitä mukaan, kun koin siihen tarvetta. Kokonaisuudessa esitin paljon lisäkysymyksiä kaikissa haastatteluissa opettajien käsitysten tarkentamiseksi, mikä ei olisi onnistunut näin luontevasti, jos olisin kirjannut tulokset ylös, jolloin keskittymiseni olisi ollut myös asioiden ylöskirjaamisessa. Aineistoa analysoidessani tulin samaan päätelmään eli että tutkittavien käsitysten tarkentaminen oli tarpeetonta, sillä niiden analysointi onnistui helposti.

Keräsin lisäaineistoa osallistumalla Kallen pitämään tutkimusaihettani käsittelevään koulutustilaisuuteen. Osallistuin itse kurssin toimintaan, mutta pyrin olla vaikuttamatta koulutuksen asioista heränneen keskustelun kulkuun. Olen esitellyt narratiivisen kerronnan avulla analyysissäni koulutuksessa käytyjä harjoitteita mahdollisimman tarkasti, jotta niitä voitaisiin suoraan hyödyntää käytännön opetustyössä. Olen lisännyt sinne joitain huomioita, jotka nousivat esiin koulutuksessa pohtiessamme harjoitteita ja niiden käytäntöön viemistä. Tällä tavoin toteutettu analyysi koulutuksen annista mahdollisti minulle tutkijana mahdollisimman objektiivisen tavan kuvata koulutuksen tapahtumia, minkä koen lisäävän tutkimuksen luotettavuutta.

Tutkimuksen luotettavuutta voidaan tarkastella myös sen siirrettävyyden eli yleistettävyyden näkökulmasta (Syrjälä ym. 1994, 102–103; Eskola suoranta 2001, 211). Syrjälän ym. (1994, 103) mukaan tutkimuksen siirrettävyys, liittyy keskeisesti sen käyttökelpoisuuteen, eli voidaanko sitä soveltaa ja onko sillä käyttöarvoa. Koen, että tämä tutkimus voi olla käyttökelpoinen sekä opettajaksi opiskeleville että opettajina toimiville matematiikkaa opettaville luokan- ja aineenopettajille. Tämä tutkimus tarjoaa valmiita toiminnallisia matematiikan harjoitteita, joita voi kokeilla suoraan omassa opetuksessaan. Niistä voi saada myös toteutusideoita, joita voi muokata itselleen sopiviksi. Tämän lisäksi tähän tutkimukseen on koostettu laaja materiaalista, joka helpottaa opettajaa etsimään lisää erilaisia toiminnallisia harjoitteita eri matematiikan osa-alueista tai teoriatietoa. Siellä on myös vinkkejä erilaisista pelisovelluksista. Tutkimuksessa on esitelty monenlaisia matematiikan opetukseen suunnattuja toimintavälineitä ja listattu niiden käyttömahdollisuuksia matematiikan osa-alueittain. Tutkimukseni tarjoaa siis käytännön toimintaharjoitusten lisäksi mahdollisuuden reflektoida omaa opetustaan ja sen uudistamista toiminnallisuuden avulla, jolloin se voi edistää lukijan omaa opettajuuttaan ja sen kehittymistä vielä myöhemmin hänen työurallaan.

Tutkimuksen siirrettävyys voi olla teoreettista (analyyttista) tai luonnollista (olemuksellista) (Syrjälä ym. 1994, 102–103; Eskola suoranta , 67). Teoreettinen siirrettävyys viittaa tutkimuksessa käytetyn käsitteen tai käsitteiden soveltamista toisissa tutkimuksissa. Edellytyksenä on, että tutkija on kuvannut riittävän tarkasti tutkimuskohteena ollutta käsitettä. (Eskola & Suoranta 2001, 67–68.) Teoreettinen yleistämisen seurauksena teorian on mahdollista laajentua ja myös yleistyä (Syrjälä ym. 1994, 102). Olen pyrkinyt esittelemään tutkimukseni pääkäsitettä toiminnallinen matematiikka mahdollisimman monipuolisesti ja huolellisesti. Näin ollen sitä voidaan käyttää suoraan muissakin tutkimuksissa.

Luonnollisella siirrettävyydellä Syrjälä ym. (1994, 103) viittaavat lukijan mahdollisuuteen hyödyntää tutkimustuloksia omaan tilanteeseensa. Eskola ja Suoranta (2001, 68) näkevät luonnollisen siirrettävyyden (käyttävät käsitettä olemuksellinen siirtyminen) mahdollisuutena siirtää tutkimuksen havaintoja toiseen tapaukseen ja toiseen toimintaympäristöön. Luonnollisessa siirrettävyydessä yleistäminen tapahtuu lukijan toimesta (Eskola & Suoranta 2001, 68). Tämän tutkimuksen tulokset ovat helposti peilattavissa lukijan omaan tilanteeseen ja omiin kokemuksiin. Lukija voi pohtia, miten minä voin matematiikan opettajana hyödyntää toiminnallisia työtapoja omassa opetuksessani. Jos lukija ei käytä matematiikan opetuksessaan toiminnallisuutta, voi hän peilata tutkimuksen tuomia etuja toiminnallisesta matematiikasta oman opetuksensa tuloksiin ja pohtia antaako toiminnallisuus oppimiselle vielä jotain lisäarvoa, mihin itse en pääse opetuksellani. Tutkimustuloksissa esitellään valmiita toiminnallisia harjoitteista useista matematiikan osa-alueista, joten lukija voi poimia niistä itselleen sopivat ja siirtää suoraan omaan opetukseensa.

Tutkimuksen luotettavuutta pohdittaessa on hyvä miettiä vielä sen vahvistettavuutta. Eskola ja suoranta (2001, 212) määrittelevät vahvistettavuuden siten, että tutkimuksessa tehdyt tulkinnat tulee vahvistaa esittämällä vastaavaa ilmiötä koskevaa tutkimustietoa. Olen koonnut tutkimukseni analyysilukuun (luku 5) tulosten esittämisen lisäksi myös niiden tulkintaa sekä tuloksiin liittyviä teoriaviittauksia, jotta tekemät havaintoni saavat vahvistettavuutta. Tutkimukseni pohdintaluvussa nostan esiin vielä merkittävimpiä tutkimustuloksiani ja peilaan niitä teorian ja muihin tutkimuksiin.

4.8 Eettiset ratkaisut

Tieteellisesti hyvä tutkimus pohjautuu eettisesti kestäville toiminatavoille ja valinnoille (Kuula 2006, 34–35). Eettisyyden huomioiminen koskee kaikkia tutkimuksen vaiheita (Hirsjärvi & Hurme 2008, 20). Näin ollen tutkimus on suunniteltava, toteuttava ja raportoitava huolella. Tutkimuksen teossa tulee huomioida myös tekijänoikeudelliset asiat. (Kuula 2006, 34–35, 68.) Jaottelen tutkimukseni eettisyyden pohdinnan Eskolan ja Suorannan (2001, 52) mukaan kahteen osaan: tiedonhankinta ja tiedonkäyttö. Tämän lisäksi pohdin omaa rehellisyyttäni tutkijana.

Tutkimukseni tiedonhankinta lähti liikkeelle tutkimushenkilöiden etsimisellä. Olin yhteydessä tutkimuspyynnön osalta tutkimushenkilöihini sähköpostitse, jolloin informoin heitä tutkimukseni aiheesta, tutkimustehtävästä, omasta sitoutumisestani tutkimukseen sekä mahdollisesta aikataulusta (Kuula 2006, 120–121). Viesteillä käyty keskustelu sisälsi useita viestejä jokaisen tutkimushenkilön kanssa, joten heillä kaikilla oli aikaa pohtia osallistumistaan tutkimukseeni rauhassa ja päättää siitä itse (Kuula 2006, 61–62).

Esittelin toiminnallisen matematiikan käsitteen merkityksen tutkimushenkilöille sekä tutkimuspyynnössä että haastattelujen aluksi, jota he tietävät, mitä sillä tässä tutkimuksessa tarkoitetaan. Tällä halusin varmistaa, että jokainen tutkimukseeni osallistunut opettaja ymmärtää toiminnallisen matematiikan käsitteen samalla tavalla. Itse aineistonkeruu eli haastattelujen toteutus ja tallennus tapahtui avoimesti. Olin kysynyt tutkimuspyyntöjen yhteydessä jokaiselta tutkimushenkilöltäni luvan haastattelun nauhoittamiseen. Nauhoitin oli koko haastattelun ajan esillä haastattelutilanteissa läheisellä pöydällä. Haastattelujen onnistumisen takaamiseksi laite oli verkkovirrassa, jonka asentamisesta keskustelin haastateltavan kanssa. Näin ollen en ole nauhoittanut haastatteluja salaa. (Eskola & Suoranta 2001, 56.)

Olen pyrkinyt eettiseen toimintaan myös haastattelu- ja havainnointiaineistojen jatkokäsittelyssä. Haastatteluaineistojen litterointi on toteutettu täysin sanatarkasti kaikkine puhetoistoineen ja äännähdyksineen. Olen tallentanut litterointiaineistot ilman haastateltavien opettajien nimiä. Kahden litteroinnin kirjoitukseen sain kirjoitusapuani äidiltäni. Äitini toimi vain kirjurina, joten hän ei ollut tietoinen siitä, kenen henkilön haastattelua hän kirjoitti puhtaaksi. Hän on lupautunut olemaan levittämättä kuulemaansa tietoa eteenpäin, joten koen, että saamani kirjoitusapu ei heikennä tutkimukseni eettisyyttä.

Tietojen käsittelyssä luottamuksellisuus ja anonymiteetti ovat keskeisiä käsitteitä. Tietoja julkaistaessa on tärkeä huolehtia, ettei tutkimukseen osallistuneiden henkilöllisyys paljastu. Mitä arkaluontoisempia asioita tutkimus käsittää, sitä tärkeämpää on huolehtia tutkimushenkilöiden anonymiteetistä. (Eskola & Suoranta 2005, 56–57.) Vaikka tutkimusaiheeni ei ole arkaluontoinen, olen antanut tutkimukseeni osallistuneille opettajille pseudonyymit eli peitenimet heidän yksityisyyden suojaamiseksi jo litterointivaiheessa. Tämän lisäksi olen jättänyt mainitsematta myös paikkakuntien ja koulujen nimet sekä Kallen pitämän koulutuksen tarkan nimen ja koulutuspaikkakunnan. (Kuula 2006, 214–125.)

Olen pyrkinyt raportoimaan tutkimukseni tieteellisten normien mukaan. Olen selostanut tutkimukseni vaiheita avoimesti ja todenmukaisesti, jotta myös lukija voi arvioida tutkimukseni ja siinä tehtyjen valintojen luotettavuutta ja eettisyyttä. Huolellisesta raportoinnista huolimatta, puhuttu ja kirjoitettu kieli ovat aina moniselitteisiä (Fontana & Frey 2000, 645). Eskola ja Suoranta (2001, 145) toteavatkin laadullisen tutkimuksen ongelmallisimmaksi vaiheeksi tulkintojen tekemisen, koska siihen ei ole olemassa minkäänlaista muodollista ohjeistusta. Hyväksyn, että minulla on tiettyjä ennakkotietoja aiheesta, mutta olen pyrkinyt tekemään ne itselleni tietoisiksi. Aineistoa analysoidessani tavoitteenani on ollut vain esitellä niitä asioita, jotka nousevat aineistosta. Tiedostan tutkijana kuitenkin, että tutkimustuloksiin vaikuttaa aina oma käsitykseni tutkittavasta asiasta ja sille antamistani merkityksistä (Tuomi & Sarajärvi 2008, 19).

Laadulliseen tutkimukseen liittyy aina myös toisen ihmisen ymmärtämisen tulkintaa sekä haastattelijan ja haastateltavan että tutkimusraportin kirjoittajan ja sen lukijan välillä (Tuomi & Sarajärvi 2008, 70–71). Tämä tutkimus on siis minun tutkintani keräämästäni aineistosta. Tiedostan, että joku toinen tutkija olisi tehnyt samasta aineistosta täysin erilaisen.

5 LÖYTÖJÄ TOIMINNALLISEN MATEMATIIKAN TOTEUTUSMAHDOLLISUUKSISTA

Tutkimukseni tehtävänä oli selvittää opettajien käsityksiä toiminnallisuuden toteuttamisesta matematiikan opetuksessa. Tässä luvussa esittelen opettajien käsityksiä toiminnallisesta matematiikasta ja sen toteutusmahdollisuuksista. Kuvaan opettajien käsityksiä tutkimuskysymysteni alakysymysten pohjalta, joissa haluttiin selvittää, minkä vuoksi opettajat käyttävät toiminnallisuutta matematiikan opetuksessa, minkälaisia haasteita he ovat kohdanneet käyttöön liittyen sekä minkälaisia menetelmiä, harjoitteita ja välineitä he käyttävät koulussa.

Opettajien käsityksien esittämisessä pyrin mahdollisimman tarkkaan kuvaamiseen narratiivisen kerronnan avulla. Tavoitteenani on esitellä käsityksiä mahdollisimman laajasti, joten kokoan aina yhteen käsitteeseen liittyen kaikkien asiaa kommentoineiden opettajien käsitykset. Näin saadaan luotua kustakin käsitteestä erilaisten näkökulmien muodostama kokonaisuus, mikä fenomenografisessa tutkimuksessa onkin tavoitteena. Peilaan samalla käsitteitä teoriaan sekä teen niistä tulkintoja sen pohjalta.

5.1 Minkä vuoksi opettajat käyttävät toiminnallisuutta matematiikan opetuksessa?

Tässä kappaleessa kuvaan ensin siitä, mitä opettajat käsitystensä mukaan toiminnallisuudella matematiikan opetuksessa tavoittelevat. Olen koonnut opettajien tavoittelemia asioista yhteen ja muodostanut niitä kuvaavia yläkategorioita. Esittelen myös toiminnallisuuden käyttöön liittyviä muita etuja matematiikan opetukselle ja oppimiselle.

5.1.1 Toiminnallisten työtapojen käyttö: mahdollisuus tukea matematiikan oppimista

Syvällinen ymmärtäminen

Toiminnallisen matematiikan käytön yhdeksi tärkeimmäksi tavoitteeksi nousi saavuttaa oppilaille ja opiskelijoille laaja syvällinen ymmärrys matematiikasta. Tämän saavuttaminen ei kuitenkaan ole ihan yksinkertaista.

> *Tuota minusta niin ku ehkä suurin haaste tai semmonen tärkein asia on toiminnallisen matikan yhteydessä, mikä pitäis muista, on se, että nimenomaan mitenkä se todella valjastetaan palvelemaan sitä oikeata matematiikan oppimista. Se tavoite on se, että sillä luodaan niin ku ymmärrystä sille symboliselle, sille tavalliselle matikalle, mitä opitaan, mikä on tavoitteena niin ku opiskella. Et sille luodaan niitä merkityksiä. Tavotteena on kuitenkin, että sitä matematiikkaa, mitä opetussuunnitelmassa sanotaan, sitä me opitaan syvällisemmin, ja hyvin ja perusteellisesti.* Helena

Myös Pekka näkee ymmärtämiseen tähtäävän oppimisen tärkeäksi. Hän esittelee tämän kaltaiselle oppimiselle selkeitä etuja.

> *Periaate on se, että toiminta ei oo toiminnan takia niin ku minusta se tärkee asia, vaan että kaikki pyrkii siihen ymmärtämiseen, hyvin vähän ulkoo opeteltavaa tietoo. Ymmärtää, mitä tekkee. Matikka ei oo vaan pakkoliikkeitä, joita tehdään sen takia kun opettaja sanoo, vaan että ymmärrettäs niitten taustalla olevat asiat ja jotenkin pystyttäs konkreettisesti tai arkipäivän elämään yhdistämään niitä, että niillä ois tarkoitus.* Pekka

Syvälliseen ymmärtämiseen tähtäävän matematiikan opetuksen tulisi olla Sannan mukaan kokonaisopetusta. (ks. luku 3.3.1) Sanna kuvaakin oman opetuksensa ideologiaa seuraavasti: ”*Matematiikkaa voi oppia, vaikka se on kuinka haastavaa. Sitä voi kaikki oppia, mutta se vaatii systemaattisuutta ja semmosta* *loogisuutta ja päättelyä."* (ks. esim. Neményi 2005, 40; Oravecz & Kivovics 2005, 26.)

Matematiikan syvällisessä ymmärtämisessä oleellista on haastattelemieni opettajien mukaan käsitteiden hallinta. Käsitteellinen ymmärrys matematiikassa tarkoittaa, että oppilas tai opiskelija ymmärtää matemaattisten käsitteiden ominaisuuksia, niiden hierarkkisuuden ja niiden välisiä suhteita. Kalle näkeekin merkitykselliseksi, että *oppilailla ois mahdollisuus ymmärtää matemaattisia käsitteitä.* Pekka korostaa käsitteellisen ymmärryksen tukemista, sillä hänen mielestä j*okainen käsite pitäis pystyä sanallisesti, symbolisesti ja joko kuvallisesti tai niin ku toiminnallisesti, konkreettisesti selittää tai ilmentää.* Hänen mukaansa *käsitteenmuodostusprosessi lähtee liikkeelle aina mahdollisimman konkreettisesta ja sitten sieltä viedään abstraktimpaan päin.* Tämä vastaa unkarilaisessa matematiikassa puhuttua abstraktion vaiheittaista muodostumista (ks. luku 3.3.1). Pekan mukaan *välineellä toimiminen on orientoivavaihe käsitteenmuodostusprosessissa.*

Perusopetuksen opetussuunnitelma (2004) korostaa myös, että matematiikan opetuksen tulee edistää matemaattisten käsitteiden oppimista, koska tavoitteena on luoda vankka perustus matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumisella. Hyvästä käsitteellisestä ymmärryksestä on oppilaalle paljon hyötyä.

> *Jos oppilaalle saadaan aikaan hyvän käsitteellinen ymmärrys niin se kantaa paljon pitempään, kun että sä saat ulkoa opeteltua jotkut laskualgoritmit ja unohdat ne viikossa. Mut jos sä oot ite pohtinut ja rakentanu niitä käsitteitä, niin ne jää pitemmäksi aikaa, ne jää osaksi sun tietoa, tietorakennetta. Mun mielestä tällä tutkivalla mutta myös* toiminnallisella *matikalla nimenomaan pystytään lisäämään sitä käsitteellistä oppimista.* Helena

Oppilas aktiivisena toimijana

Lapsen aktiivista toimintaa pidettiin merkityksellisenä toiminnallisen matematiikan toteuttamisessa. Kalle korostaa, että toimiessaan matematiikan tunneilla o*ppilas on itse aktiivinen,* sillä ratkoessaan ongelmia hän *itse prosessoi niitä asioita.* Kallelle on tärkeää, että *oppilailla ois mahdollisuus oivaltaa.* Samaa korostaa Suomessa vallalla oleva oppimiskäsitys, jonka mukaan lapsen rooli oppilaana ja opiskelijana on aktiivinen, oman tiedon rakentaja (Ikäheimo 1995, 14; Opetushallitus 2004, 18; Opetushallitus 2014, 14–15).

Mikko on oppilaan roolin suhteen samoilla linjoilla Kallen kanssa. Hänen mielestään *lapset pitäis saada tekemään.* Hän korostaa ajatusta: *"tekemällä oppii"*. Mikon mielestä oppilaalle suunnattu tekeminen pitäisi olla konkreettista. Myös Sanna yhtyy tekemällä oppimisen tärkeyteen. Hänen mukaansa matematiikan oppiminen *tulee vaan tekemisen kautta,* mutta hän tiedostaa myös sen, että oppiminen vaatii todella kovasti työtä oppilaalta, sillä *matikkahan ei tule helpolla.*

Uusien asioiden oppimisessa lapsen osallistumisella on tärkeä rooli. Helenan mielestä merkityksellistä on, että oppilas ja opiskelija *löytää asioita itse tutkien*. Oman tutkimisen kautta *hoksataan ja huomataan tai muistellaan mieleen niitä tärkeitä pointteja,* mitkä on tavoitteena oppia. (ks. luvut 3.3.1 ja 3.3.5) Helenasta oleellista on myös, että *asioita prosessoidaan ensin itse konkreettisessa kontekstissa* ja vasta sen jälkeen edetään yleisempään ja teoreettisempaan käsittelyyn. Oppimisen tulisi siis edetä induktiivisesti.

Kun oppilaan rooli muuttuu aktiiviseksi toimijaksi, se vaatii oppilaaltakin enemmän. Pekka on saanut eräältä oppilaalta kommentin kesken toiminnallisen välineillä tehtävän harjoitteen: *"Eikö me voitais tehä jo kirjantehtäviä, ku nyt ei jaksas ajatella"*. Tämä havainnollistaa mielestäni hyvin sitä, että toiminnalliset, välineillä tehtävät harjoitteet edellyttävät oppilailta itseltäänkin enemmän. Oppilaat myös kokevat kirjasta tehtävien tekemisen mekaanisemmaksi, koska silloin ei tarvitse itse pohtia ja miettiä niin paljoa - silloin pääsee ikään kuin helpommalla. Toiminnallisella välineisiin pohjautuvalla matematiikan opetuksella voidaan siis oikeasti haastaa oppilaita omaan ajatteluun ja luovuuden käyttöön.

Vuorovaikutus

Vuorovaikutus koetaan keskeiseksi tekijäksi osana toiminnallista matematiikkaa. Myös perusopetuksen opetussuunnitelma (2004, 158) nostaa esiin matematiikan laajemman merkityksen: edistää oppilaan sosiaalista vuorovaikutusta. Toiminnallisessa matematiikassa käytetty vuorovaikutus voi olla eri tavoin toteutettua oppilaiden välistä keskustelua tai opettajan ja oppilaiden yhteistä opetuskeskustelua. Kaikki haastattelemani opettajat kertovat toteuttavansa toiminnallisia harjoitteita monella tavalla. Yhteenvetona voidaan todeta, että toiminnallista matematiikkaa toteutetaan sekä yksin, pareittain, pienissä ryhmissä että koko luokan kanssa yhdessä keskustellen. Helena on kokenut oppilaiden väliset keskustelut hedelmällisiksi oppimisen kannalta.

> *Kyllä mulla aina tarkotus on, että vähintään pareittain tai pienissä ryhmissä, koska se keskusteleminenhan on siinä se oleellinen asia. Kun opiskelijat siinä keskustelee niistä omista ideoistaan, omista ajatuksistaan ja reagoivat siihen, mitä toiset sanoo, niin se on semmosta paljon monipuolisempaa opetuskeskustelua ja oppimista, kun se, jos taas yksin vastaukset sinne lätkii.* Helena

Myös Kalle korostaa *oppilaiden ryhmässä keskustelemista.* Sanna yhtyy keskustelun tärkeyteen, mutta hänen kokemuksensa on, että alkuopetuksen oppilailta ei oikein onnistu isossa ryhmässä toimiminen. Kolmekin oppilasta yhdessä on liikaa. Neljän oppilaan ryhmissä pienet taas ajautuvat työskentelevät pareittain. Parityöskentely onkin Sannan kokemuksen mukaan toimivin tapa työskennellä alkuopetuksessa. Hän näkee parin käytölle selkeitä etuja.

> *Parityö on yks semmonen, mitä mä käytän. Se, että ne puhuvat ja että ne oppivat selittämään. Parityössä se keskustelu on niin ku jotenkin tehokkaampaa. Toinen tukee toistaan*. Sanna

Mikkokin pitää parityötä hyvänä oppimisen muotona. Heillä Montessori-koulussa osa oppilaista voi tehdä saman tunnin aikana paritöitä valitsemissaan oppiaineissa ja osa taas yksin jossain muussa oppiaineessa. Mikko kertoo, että *meillä on kaikkiin oppiaineisiin semmosia materiaaleja, joita voi tehdä yksin ja sit meillä on kaikkiin oppiaineisiin semmosia materiaaleja, joissa se pointti on, että niitä tehdään esimerkiksi kahden hengen ryhmissä pareittain.*

Ryhmässä keskusteleminen ei ole aina ihan helppoa oppilaille. Haasteita keskusteluun voi tuoda muun muassa omat vuorovaikutustaidot. Helena näkeekin tärkeänä tavoitteena, että *osattas kommunikoida muiden kanssa samalla tavalla.* Senpä vuoksi myös keskustelutaitoja on opeteltava. Kommunikoiminen muiden kanssa matematiikan aiheista edellyttää mielestäni myös hyvää käsitteiden hallintaa, joka nostettiin tärkeäksi tekijäksi syvällisen ymmärtämisen näkökulmasta. Haasteita voi tuoda myös keskusteltava aihe. Pekka on havainnut, että o*ppilaat ei osaa sanallisesti välttämättä kuvailla sitä varsinkaan, jos eivät oo sitä konkreettisesti nähny ja tehny.* Tällainen tilanne on hyvin tavanomainen, jos uutta asiaa aletaan opiskella matematiikassa suoraan opettajajohtoisesti symbolisella tasolla. Pekalla onkin idea, miten oppilaiden keskustelua voidaan helpottaa ja tukea. Hän käyttää opetuksessaan apuna toimintavälineitä, sillä hänen mielestään v*älineen kanssa on pakko tuottaa puhetta, ellei tee yksin ja silloinkin, jos tekee, niin siinä on pakko tuottaa ajatusta ittesä kanssa.* Näin ollen keskustelu on aina läsnä toiminnallisessa matematiikassa, kun työskennellään välineiden kanssa. Se voi tapahtua joko muiden oppilaiden tai opiskelijoiden kanssa tai sisäisenä puheena itsensä kanssa, mutta sitä tapahtuu aina.

Opettajan ja koko luokan yhteistä opetuskeskustelua voidaan Kallen ja Pekan mukaan käyttää myös silloin, kun toimitaan välineen kanssa. Kalle kertoo, että hän on *ihan pyrkinyt tietoisesti opettelemaan toimimaan koko luokan kanssa välineellä*, koska ei näe sitä esteenä käytölle. Pekka näkee yhteisissä opetuskeskusteluissa välineellä tärkeän roolin: *sen avulla oppilas, joka ei oo vielä abstraktilla tasolla, pystyy siinä koko ajan seuraamaan välineellä sitä asiaa*. Väline toimii oppilaalla siis oman ajattelun tukena konkreetin ja abstraktin matematiikan välillä.

Koko luokan kanssa toteutettu toiminnallisuus voi olla Pekan mielestä hyvinkin *opettajajohtoista*, jolloin opettaja vie keskustelua ja tekemistä eteenpäin oikeanlaisen kysymysten asettelun kautta. Se voi edetä Pekan mukaan myös siten, että ensin tehdään itse ja sitten oppilas tulee näyttämään omaa ideaansa, josta yhdessä keskustellaan. Sanna näkee koko luokan yhteisen toiminnan enemmän semmoiseksi *koonnin kautta* tapahtuvaksi. Hänen mukaan oppilaiden pitää saada *ensin tehdä* ja sen jälkeen voidaan koota yhteen, että *mitä opittiin, mitä hoksattiin ja mikä oli haastavaa*. (ks. luku 3.3.5)

Miksi keskusteleminen sitten nähdään tärkeäksi matematiikan oppimisen kannalta? Syvimmältä olemukseltaanhan matematiikka on asioiden todistamista. Todistaminen rakentuu oikeanlaisten perustelujen varaan. Oppilaiden kasvattamista matematiikan perustelukulttuurin voidaan aloittaa jo hyvin varhaisessa vaiheessa ja siinä keskusteleminen on tärkeässä roolissa.

> *Oppilaat, pienet lapset oppis niin ku puhumaan, sanallistamaan sitä, mitä he niin ku ajattelevat ja tekee. Lapset oppisivat myös niin ku perustelemaan, tai selittämään, millä tavalla he ajattelivat, kun he antoivat jonkun vastauksen tai ratkaisivat jonkun jutun*. Helena

Pekka pitää myös tärkeänä *toimintaan liittyvää keskustelua,* mutta sen lisäksi hän korostaa käsiteltävien asioiden *kielentämistä*. Kielentämisellä tarkoitetaan matematiikasta puhumista käyttäen omaa kieltä: omia sanoja ja ilmauksia (Joutsenlahti 2005a, 1). Joutsenlahden (2005a) mukaan kielentämisestä on hyötyä sekä oppilaalle itselle, hänen kanssaoppijoilleen että opettajalle. Kielentäminen etuja esiteltiin tarkemmin luvussa 3.3.6.

Kokemuksien saaminen

Yksilön saamalla kokemuksella tarkoitetaan todellisuutta koskevien tietojen saamista ja merkityksenantamista siten, että hänen jo olemassa oleviin tietoihin tulee jotain uuttaa lisätietoa ja hänen persoonallisuutensa muuttuu (Silkelä 1999, 5). Tällaisten kokemusten saaminen matematiikan oppimisen yhteydessä nähdään merkitykselliseksi.

> *Toiminnallisuus tuo kokemuksia. Olkoon ne ahistavia tai semmosia ahaa-kokemuksia, mutta molemmat minusta opettaa.* Pekka

Monipuolisten kokemusten saaminen nähdään erityisen merkityksellisesti sekä unkarilaisessa matematiikassa että Montessoripedagogiikassa (ks. luvut 3.3.1 ja 3.3.2).

Sanna korostaa myös, että itse *tekemisestä* saadaan *kokemuksia*. Hänen mukaansa oppilaat eivät kykene käsittelemään asiaa ilman omakohtaisia kokemuksia, vaan *ne tulee niin ku kokemusten kautta* (ks. Hayes & Höynälänmaa 1985, 111–113). Pekalla onkin opetuksessaan pyrkimyksenä, että oppilaille *tulee ainakin yks kokemus jokaisessa käsitteessä sieltä toiminnan kautta.* Perusopetuksen opetussuunnitelmassa (2004) korostetaankin vuosiluokkien 1-5 osalla, että matematiikan opetuksen ydintehtävänä on hankkia kokemuksia matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumisen pohjaksi. Kun jokaisesta uudesta käsitteestä on oppilaalla omakohtainen kokemus, hän pystyy käsittelemään sitä paremmin abstraktimmalla tasolla, jolloin saadaan aikaan syvällisempää ymmärtämistä.

Yksilöllisyyden huomioiminen

Yksilöllisyyden huomioiminen on keskeisessä osassa tämän päivän koulumaailmaa, kun tavoitteena on taata kaikille oppilaille mahdollisuus opiskella omassa lähikoulussa. Perusopetuksen tehtävänä onkin tarjota *yksilöll*e mahdollisuus yleissivistyksen hankkimiseen. Sen tulee antaa mahdollisuus myös monipuoliseen kasvuun, oppimiseen ja terveen itsetunnon kehittymiseen, jotta *yksil*ö kykenee hankkimaan elämässä tarvittavia tietoja ja taitoja. (Opetushallitus 2004, 14.)

Mikko kertoo, että Montessori-koulun ideaa kuvastaa ilmaus ”auta minua tekemään itse”. Se kertoo Mikon mukaan heidän koulun toimintaideasta, jonka mukaan oppilas löytäis omat ja sille osattaisiin antaa oman kehitystason ja oman semmosen herkkyyskauden mukaisia tehtäviä. Käytännössä tämä tarkoittaa Mikon mukaan sitä, että kun oppilaat tekee oman taitotason tehtäviä, niin silloin samaan aikaan joku oppilas voi tehä yksin tiettyä äidinkielen tehtävää ja saman luokka-asteen oppilas tekee luokan toisella puolella matikan tehtävää ja jotkut voi tehdä pareittain ympän työtä. (ks. Lillard 2005, 289–292). Mikäli oppilas saa edetä omassa tahdissa oman kiinnostuneisuuden mukaan siten, ettei se ole sidoksissa muiden oppilaiden tekemisiin, huomioi tällainen opetus oppilaiden yksilölliset tarpeet.

Jotta oppilaille voidaan antaa yksilöityjä tehtäviä, edellyttää se opetuksen eriyttämistä. Pekan mukaan toiminnallisten tehtävien käytössä on se hyvä puoli, että *eriyttäminen on osittain samalla mukana*, sillä *eri oppilaat löytää eri asioita*. Näin ollen niissä pitäisi olla haastetta kaiken tasoisille oppilaille, myös lahjakkaille. *Koska oppilaat tekee eri tahtiin toiminnallisia hommia*, Pekan mielestä *kirjan tehtävät ovat äärimmäisen hyviä tunnilla*. Hänen mukaansa *kaikkien ei tarvitse käydä samaan aikaan läpi sitä toiminnallisen osiota*, vaan *yleensä ne, jotka ymmärtää ja hakee toiminnallisuudesta sen ajatuksen, niin he sitte pystyvät sen aika hyvin siirtämään sinne kirjan tehtäviin ihan oma-aloitteisesti.* Toiminnallisten harjoitteiden ja kirjan yhteispelillä saadaan siis kaikille oppilaille oikeanlaista tekemistä koko ajan.

Mikko mielestä Montessori-materiaalit on suunniteltu hyvin siksi, että *ne nimenomaan auttaa molempiin suuntiin eriyttämistä*. Mikolla on ollut erittäin taitavia ja matemaattisesti lahjakkaita oppilaita, joita hän on pystynyt eriyttämään ylöspäin siten, että *yksi oppilas on lukenu ekan luokan aikana ekan ja tokan luokan matikan.* Ylöspäin eriyttämisessä on Mikon mukaan ideana, että *oppilas tekee yli kurssin asioita.*

Eriyttämistä ei voi aina suunnitella etukäteen. Sen vuoksi opettajalla on oltava herkkyyttä reagoida eteen tuleviin tilanteisiin. Sanna kertookin, että *hän yrittää aina keksiä siihen tilanteeseen sen että, mikä on sille lapselle se kaikista järkevin*.

5.1.2 Toiminnallisten työtapojen käytön etuja

Mielekkyyttä matematiikan oppimiseen

Suomalaisten lasten ja nuorten mielestä matematiikka on ikävä oppiaine, jota ei tulisi opiskella kouluissa (Kahanpää 2005, 90). Tämä kuulostaa huolestuttavalta, sillä matematiikan opiskelu kehittää yksilöä ja hänen taitojaan monipuolisesti. Matematiikan taitoja myös tarvitaan tämän päivän yhteiskunnassa useimmilla aloilla (Kahanpää 2005, 90). Haastattelemani opettajat näkevät, että toiminnallisen matematiikan avulla tähän ongelmaan olisi mahdollista puuttua ja saada oppilaat uudelleen kiinnostumaan matematiikasta.

Sannan mielestä tärkeintä on *yrittää saada motivoitua heitä*. Kupari ym. (2013, 55–66) toteavat myös, että oppilaan motivaatiolla ja asenteilla on suuri vaikutus matematiikan oppimiseen. Motivoimisen kautta oppilaiden asenteisiin voidaan vaikuttaa ja siten saada matematiikan opiskelu tuntumaan vähemmän vastenmieliseltä ja pikku hiljaa jopa mielekkäältä.

Kallen näkemyksenä on, että oppilaille pitää luoda tilanteista, joissa heillä *ois mahdollisuus innostua oppiaineesta.* Hänen kokemuksiensa pohjalta toiminnallisista harjoitteista on hyötyä mielekkyyden lisäämiselle matematiikan opiskelussa.

> *Kyllä se musta ainakin näyttäs siltä, että ne on kiinnostuneita ja innostuneempia ja myös ehkä oppivat paremmin.* Kalle

Helenan mielestä *toiminnallisen matikan kautta voijaan luoda niin paljon semmosta iloa*. Hänellä on kokemuksia esikoululaisten parista toiminnallisten harjoitteiden kokeiluista ja niissä erilaisen tekemisen kautta on saatu muutosta opiskelutunnelmaan.

> *Noi kokemukset, mitä mulla tuolta esikoulusta on, niin tuota heti kun ne niitä lukujonotaitoja pelataan siinä noppapelissä, niin se on jo hauskempaa. Onhan se aina semmonen et se niin ku luo semmosta, kun se on erilaista ja hauskaa, niin se luo erilaista tunnelmaa myös siihen opiskeluun. Helena*

Myös Pekka pitää merkityksellisenä tekemiseen liittyvän iloa. Hänen kokemuksensa mukaan oppilaille *yleensä se kirjan tekemisen ilo ei oo se suurin ilo*. Senpä vuoksi hän valitsee *ennemmin välineellä tekemisen ilon, kun että kirjalla tekemisen ilon*, jos lopputulema oppilaiden oppimisessa olisikin sama molemmissa tavoissa.

Oppiaineiden integrointi

Oppiaineiden integroinnilla tarkoitetaan, että toteutettavan opintokokonaisuuden tekemiseen oppilaan tulee käyttää useamman oppiaineen tietoja ja taitoja hyväkseen. Ideana on siis häivyttää oppiainerajoja. Oppiaineiden integrointi näkyy tällä hetkellä opetussuunnitelmassa aihekokonaisuuksien muodossa. Niiden tarkoituksena *on ohjata oppilaita ja opiskelijoita tarkastelemaan ilmiöitä eri tiedonalojen näkökulmista rakentaen kokonaisuuksia ja korostaen yleisiä kasvatuksellisia ja koulutuksellisia päämääriä.* Aihekokonaisuuksissa opiskeltavat sisällöt ja tavoitteet linkittyvätkin useisiin oppiaineisiin. (Opetushallitus 2004, 38–43; 2003, 24–25.) Vuonna 2016 voimaan tuleva opetussuunnitelma (2014a, 14) korostaa vielä voimakkaammin laaja-alaista osaamista, joka ei kohdistu vaan yhteen oppiaineeseen. Tavoitteena on, että jokainen oppilas kykenee toimimaan muuttuvassa maailmassa tilanteen edellyttämien tietojen ja taitojen avulla, kun tiedon- ja taidonalarajat ylittyvät (Opetushallitus 2014, 17).

Mikon mukaan Montessori-koulussa *integroidaan paljon oppiaineita* yhteen, myös matematiikkaa. Oppilaat tekevät paljon *kaikenlaisia projekteja*, joissa tarvitaan usean oppiaineen taitoja. Monet Montessori-materiaalit ja harjoitukset on myös suunniteltu siten, että niissä *tavallaan integroituu useampi oppiaine*. Mikko kertoi esimerkin eräästä matematiikan harjoituksesta, jossa välineenä oli kolmen eri värisiä ja kolmen eri kokoisia kolmiota siten, että jokaisesta koosta ja väristä löytyivät kaikki kolmioiden erikoistapaukset (tasasivuinen, tasakylkinen, erisivuinen, teräväkulmainen, tylppäkulmainen ja suorakulmainen kolmio). Oppilaiden tehtävänä on selvittää vihjeitä ja tuntomerkkejä keräämällä, kuka ”kolmioista” on pankkiryöstäjä. Oppilaat kirjasivat saamiaan tietoja ja havaintoja koko ajan paperille ylös. Havaintoja kerättiin siten, että kaikista kolmion ominaisuuksista oli kortti, jotka oli luokiteltu kolmeen pinoon: väri, koko ja tyyppi ja niistä nostettiin aina yksi kerrallaan kortti ja poistettiin kolmion joukosta syyttömät henkilöt. Näin lopulta päästiin syylliseen. Harjoitus vaikutti puhtaasti matemaattiselta: siinä perehdyttiin erilaisiin kolmioihin konkreettisesti läpikäymällä niiden erilaisia vaihtoehtoja. Harjoite vaati oppilaalta myös loogista päättelyä, mutta silti oppilaat olivat sitä mieltä, että he ovat kirjoittaneet äidinkielen salapoliisitarinan.

Sanna hyödyntää oppiaineiden integrointia paljon työssään, erityisesti matematiikan osalta. Hänen mielestään *jokainen tunti voi olla matematiikan tunti*. Tällä Sanna tarkoittaa sitä, että matematiikan asioita voidaan hyödyntää *pieninä juttuina siellä täällä* eri oppiaineiden tunneilla. Sanna integroi matematiikkaa mielellään liikuntaan. Sitä voi käyttää oppilaille sanallisesti annetuissa ohjeistuksissa sekä erilaisten kirjallisten ohjelappujen tekemisessä. Sanna antaa esimerkin, että oppilaita voidaan käskeä pomputtamaan palloa ympyrän kehää pitkin tai vaikka puolikasympyrää pitkin. Sanna korostaa, että *sen kautta lapsi hahmottaa itsestään matematiikkaa* ja se on hänen mielestä *hirveen tärkeetä*.

Sanna kertoi toisen konkreettisen esimerkin. Hän oli juuri ennen haastattelua olleella liikuntatunnilla istuttanut oppilaat liikuntasalin keskelle normaalista poikkeavalla tavalla. Luokan 12 tyttöä oli saapunut ensin saliin ja Sanna oli ohjeistanut heitä istumaan ympyrän neljännekselle niin, että kolme tyttöä on kaarella. Kun 8 poikaa tuli jumppasaliin, Sanna pyysi heitä kiinnittämään huomiota tyttöjen istumistapaan. Poikien tuli miettiä, montako neljännestä on yhdessä kokonaisessa ympyrässä. Tuttujen käsitteiden käyttö uusissa tilanteissa saa lapset heti miettimään, että mitä tällä tarkoitetaan.

Musiikki on myös hyvin usein integroitu oppiaine matematiikkaan. Kallen tietojen mukaan, monet opettaja *käyttää rytmiikkaa, kun opiskellaan lukujonoja*. Myös Sanna integroi musiikkia matematiikkaan. Hänestä *laulut on hyviä ja ne on aika hauskoja*. Sanna on ideoinut myös leikin lukusuoralauluun, jossa lauletaan edestakaisin numeroita nollasta kymmeneen. Sen ideana on, että kun lasketaan numeroita ylöspäin, hypitään samalla eteenpäin ja vastaavasti, kun mennään numeroita alaspäin, hypitäänkin taaksepäin. Lauluissa se oppiminen tapahtuu *rallatuksen ja vähän niin ku ulkoluvun kautta.* Sanna kertoo, että kirjasarjoihin on valmiita CD:tä, joissa on erilaisia matematiikkaan liittyviä lauluja.

Kalle näkee, että oppiaineiden integroinnissa opettajat pystyvät hyödyntämään helposti *omia vahvuusalueitaan, semmosta omaa muuta osaamistaan*. Hän mainitsee sekä teknisen- että tekstiilikäsityön ja kuvataiteen helppoina matematiikkaan integroitavina aineina. Sanna sanookin integroivansa kuvataidetta matematiikkaan. Erityisesti *symmetriaan* liittyviä juttuja voidaan pohtia hyvin molempien oppiaineiden näkökulmasta.

Konkretisointi

Konkreettisuus toimii tärkeänä apuna, kun oppilaan on tarkoitus kyetä yhdistämään omia kokemuksia sekä ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään (Opetushallitus 2004, 158). Sanna näkee, että *konkretiaa tarvitaan koko ajan.* Oleellista on hänen mukaan, *että se ei saa olla pelkästään se kirja.* Pekka taas korostaa erityisesti käsitteiden konkretisointia. Hänellä on *käytännön periaatteena, että jokainen käsite matikassa ihan alusta väittäisin lukion loppuun asti pitäis pystyä jotenkin konkretisoimaan.* Konkretian tarve on siis jatkuvaa kaikilla. Se ei kohdistu vain pieniin oppilaisiin, vaan se on oleellista vielä lukiossakin.

Kalle kuvaa, että *oma lukunsa on sitten niin ku laskujen konkretisointi*. Hänen mielestään se on vähän eri asia: *se on tavallaan toiminnallista, mutta se on niin ku eri linja*. Tällä Kalle tarkoittaa, että jos oppilaalla on vaikeuksia jonkin tehtävän laskemisessa, niin sellaisen tukemiseen pitää olla jokin keino, jotta lapsi pystyy sen ratkaisemaan. Tässä tilanteessa väline toimii apuvälineenä, jolloin se on Kallen mielestä erityyppistä toimintaa, koska siitä on tarkoitus pyrkiä tietyllä tavalla myös eroon.

Sanna käyttääkin opetuksessaan Kallen puhumaa laskujen konkretisointia. Sannan mielestä konkretia on *monta kertaa semmosia pieniä niksejä, kun lapset tekee tehtäviä*. Tehtävien teon yhteyteen liitetään siis jotain *toimintaa*. Se voi olla piirtämistä, värittämistä tai välineiden käyttöä. Sanna korostaakin, *ettei opettaja aina hoksaa, kuinka pienet asiatki voi olla konkretiaa koko ajan, mikä helpottaa sitä oppimista.* Tärkeää siis olisi, että opettaja pystyisi asettumaan mahdollisimman hyvin oppilaan asemaan ja sitä kautta tukemaan hänen oppimistaan mahdollisimman monipuolisesti.

Välitön palaute

Mikko korostaa Montessori materiaaleja myös siinä suhteessa, että ne antavat oppilaalle välitöntä palautetta omasta tekemisestä. *Niissä on aina se tarkistus läsnä, eli jollain tavalla se oppilas pystyy itse katsomaan, onko se mennyt oikeen.* Välittömästi saadun palautteen avulla itsenäisesti ilman opettajaa työskentelevälle oppilaalle ei synny väärinoppimista.

Sanna on käyttänyt opetuksessaan myös erilaisia tietokoneella käytettäviä matematiikan oppimisympäristöjä. Niissä hän korostaa oppilaan tekemiselle tulevaa palautetta. Tärkeää siinä on se, että *se heti ohjaa sun virhettä, eli kun sä teet virheen, se neuvoo*. Näin lapsi saa tekemiseensä ohjeistamista heti, eikä tähän tarvita opettajaa.

Elämää varten oppiminen

Opetuksessa oleellista on asioiden liittäminen käytäntöön. Oppilaan tulee saada matematiikan opetuksesta eväitä omaa elämää varten. Perusopetuksen opetussuunnitelmakin (2004) korostaa, että opetuksessa tulee hyödyntää tehokkaasti arkielämässä eteen tulevia ongelmia.

> *Käytäntö on minusta paljon tärkeenpää, säännöt sitten voi opetella myöhemmässä elämässä, jos tekee tieteellistä hommaa, niin tieteen metodein, mutta jos ei oo iki kuuna päivänä nähny neliömillimetriä ja antaa neliömillimetrin vastaukseksi luokan pinta-alaan, niin voi vähän miettiä, että ollaanko tässä nyt päästy perimmäiseen tavoitteeseen elämää varten vai ei.* Pekka

Oleellista on siis opittavien asioiden linkittäminen johonkin arkiasiaan. Sanna korostikin oppilaan *matematiikan hahmottamista itsestään*. Pekan mukaan tällainen hahmottaminen olisi hyödyllistä esimerkiksi yksiköiden kiinnittämisen yhteydessä, jotta oppilaille jäisi mielikuva, mistä omasta kehosta löytyy neliömillimetri, neliösenttimetri tai neliödesimetri, miten itse sijoittuu yhden kuutiometrin sisään tai millainen on kuution avaruuslävistäjä. Tällaisten asioiden hahmottaminen auttaa oppilasta tehtävissä, joissa tulee arvioida geometristen kappaleiden pinta-aloja tai tilavuuksia ennen konkreettista mittaamista ja laskemista.

Aineenhallinnan lisäksi matematiikan opetuksen pitäisi tarjota lapselle eväitä laajemmin elämää varten, myös jatko-opintoihin (ks. Opetushallitus 2004, 14). Mikko näkeekin tärkeänä tavoitteena tukea oppilasta myös vastuun ottamiseen oman oppimisen suhteen.

> *Oppilaan oppiminen siihen vastuun kantamiseen, että työn eteenpäin vieminen ja edistyminen on minun tekemisestä kiinni, eikä mistään muusta. Jos lyön omat hommat läskiksi, niin muiden hommat ei mee läskiksi, koska ne tekee omia hommiaan ja juttujaan.* Mikko

5.2 Toiminnallisten menetelmien käyttöön liittyviä haasteita

Toiminnallisuuden toteuttaminen ei suju aina ihan yksinkertaisesti, niin kuin ei opettaminen yleensäkään, vaan siihenkin liittyy monenlaisia haasteita, joita suunnitteluvaiheessa on hyvä pohtia. Kuvaan ensin opettajien kertomia käytännön haasteita toiminnallisuuden toteuttamisesta. Tämän jälkeen esittelen, mitä toiminnallisuuden toteuttaminen todella opettajalta edellyttää.

5.2.1 Käytännön haasteita

Välineillä toimiminen

Mikäli opettaja haluaisi suunnitella toiminnallisen matematiikan välineillä tapahtuvaksi, luo se jo haasteen: onko koululla välineitä riittävästi ja monipuolisesti. Kalle toteaakin, että *toimintavälineiden saatavuus ja määrä* ovat suurena haasteena toteutuksen näkökulmasta. Välineiden puuttuminen on ongelma, mutta myös liian pienet määrät lisäävät suunnittelun ja toteutuksen organisoinnin työtä. Jos koululta löytyy vain yhdenlainen väline, rajoittaa se myös toteutusta, sillä jokaisella olemassa olevalla välineillä ei voi tehdä kaikkiin matematiikan osa-alueisiin liittyviä toiminnallisia harjoituksia. Näin ollen aiheiden näkökulmasta laaja toiminnallisen matematiikan toteutus edellyttää monipuolisten välineiden saatavuutta.

Merkittävimpänä syynä välineiden vähäisyyteen koulussa on Pekan mukaan niiden hinta. Välineet maksavat ja kouluissa joudutaan miettimään, onko välineiden käyttöaste investoinnin arvoinen.

> *Hyvä luokkavälinepakkaus niin viidellä sadalla eurolla saa niin ku aivan täydellisen setin luokkaan, mutta ehkä sadalla kahdella saalla eurolla saa perusteet, joilla pärjää varsin hyvin jo.* Pekka

Välineiden vähäisyys ei saa jäädä käytön esteeksi. Pekka esittääkin ratkaisun tällaisiin tilanteisiin.

> *Pystyy demoamaan tai ottamaan oppilaat pienissä ryhmissä ja he tekee sitten niitä tehtäviä tai sitten miksei, että osa tekee toisella tunnilla ja osa toisella, niin sanottu jakotuntiajatus.* Pekka

Vaikka koululla olisikin käytössä monipuolisesti välineitä siten, että niistä riittäisi isollekin ryhmälle, se ei vielä takaa haasteiden häviämistä toteutuksen näkökulmasta. Pekan mukaan yläkouluissa opettajilla ei ole aina omia luokkia ja jos matematiikan luokissa ei ole välineitä saatavilla, joutuvat opettajat *aika paljon roudaamaan* niitä. Tämä tuo Pekan tietojen mukaan *opettajille töitä ja kiireen tuntua*.

Mikäli välineenä hyödynnetään tietokonetta ja sen mahdollisuuksia, ei sekään ole haasteetonta. Pekka kuvaa, että tietokoneiden käyttöä rajoittaa heidän koulussaan ATK-luokan saatavuus. Sen lisäksi ikuisena ongelmana tietokoneisiin liittyen ovat tietotekniset ongelmat.

> *Jos lähdet yksöistunnilla, niin sun pitäis käydä aamulla laittamassa kaikki koneet päälle ja ohjelmat auki, ettei siinä mee ensin kymmentä minuuttia, että jokaisella on ohjelma auki ja niin poispäin. Mut siinä on itellä kehittämisen paikka.* Pekka

Kalle pitää tärkeänä välineillä tehtyjen havaintojen dokumentointia. Hän kertoo, että oppilaat pystyvät tuottamaan hyvinkin nopeasti erilaisia ratkaisuja välineillä ja tekevät sitä mielellään, mutta ratkaisujen kirjaaminen paperille tai vihkoon on vähän vaikeaa. Kalle kuitenkin korostaa dokumentoinnin tärkeyttä, koska silloin *toiminnasta jää niille joku jälki, mitä ne on tehny.*

Toimintaväline itsessään voi myös luoda haasteita. Sanna kertoo, että osa välineistä, esimerkiksi nopan heittäminen, tuo ylimääräistä hälyääntä luokkaan. Toki toiminnasta tulee aina hetkellisesti tietynlainen taustaääni, Sanna kuitenkin korostaa, että opettajan on aina pidettävä mielessä, että jonkun oppilaan oppimista tämä hälyääni voi estää. Senpä vuoksi Sanna on pyrkinyt suunnittelemaan toimintavälineitä siten, että niistä tulisi vähemmän ääntä. Hän on esimerkiksi hankkinut pehmonoppia tavallisten kovien sijasta. Sannan mielestä lego-rakennuspalikoilla rakentaminen olisi hyvä tapa harjoittaa lapsen avaruudellista hahmottamista. Niiden hakeminen omalle työskentelypaikalle aiheuttaa kuitenkin kolinaa, jota voisi poistaa Sannan mukaan esimerkiksi laittamalla palikoita kankaalla vuorattuun laatikkoon, jolloin *ne ei kolisisi niin kauheesti*.

Aika

Helenan mukaan erityisesti aika on suuri haaste lukiossa toiminnallisen matematiikan toteuttamiseen. Hän kuvaakin toiminnallisten työtapojen käytön mahdollisuuksia seuraavasti: kyllähän se ihan eri määrä, mitä voi sitä toiminnallisuutta käyttää ihan pienillä ja alkuopetuksessa kuin mitä niin ku lukiossa. Lukiossa kurssisisällöt ovat laajoja ja kaikki pitäisi ehtiä käydä läpi, sillä opiskelijoiden oppimisen edistymistä mittaavat kurssiarviointien lisäksi valtakunnalliset ylioppilaskirjoitukset (LOPS 2003).

Helena on saanut usein pitämissään tutkivan oppimisen koulutustilaisuuksissa opettajilta kommentin *"eihän tohon oo aikaa"*. Hän on kuitenkin sitä mieltä, että tiettyihin tärkeisiin käsitteisiin jokaisella kurssilla pitäisi satsata myös aikaa, sillä se kantaa pidemmällä ja edistää syvällistä käsitteellistä ymmärtämistä. Helena kertoo oivaltaneensa yhdessä koulutuksessa, että opettajat luulevat hänen koko opetuksen olevan vain tutkivaa oppimista, jolloin hän ymmärsi, että asiaa pitää tarkentaa.

> *Mun pitää niin ku korostaa sitä, että hyvänen aika, ei se mun opetus oo pelkkästään sitä tutkivaa oppimista, vaan se tutkivan oppimisen tapa otetaan osaksi sitä oppimisprosessia. Se on yks osa sitä oppimisprosessia ja siitä jatketaan sitten eteenpäin. Siinä käytetään hyödyksi aikasemmin opittua, se on se hetki ja siitä jatketaan eritavoin eteenpäin siihen matikan teoriaan.* Helena

Pekka pitää yläkoulussa teknisenä aikaongelmana *oppitunnin kestoa*, joka on joko 45 tai 60 minuuttia. *Jos joku hyvä juttu jää kesken, niin toiminnallisesti se ajottaminen on pikkusen haastavaa.* Pekka on kuitenkin pyrkinyt opettelemaan, että *toiminnallisuuskin voi jäädä kesken*. Tämmöisissä tilanteissa toiminnallisuuden jatkaminen tapahtuu hänen mukaan niin, että tunnin alussa tehdään lyhyt kertaus edellisellä tunnilla tehtyihin asioihin ja sen jälkeen päästään jatkamaan. Pekka pohtii, että *se on joskus pedagogisesti jopa järkevämpi ratkasu, sillä matikkahan muhii mielessä, haluaa tai ei.*

Koulukulttuuri

Koulukulttuurilla on suuri merkitys yksittäisen opettajan työhön. Se voi auttaa ja kannustaa opettajien yhteistyöhön ja samanaikaisopetukseen tai se voi luoda haasteita, erityisesti, jos yksittäisen opettajan toimintatavat poikkeavat valtavirran tavoista. Helena on kokenut omassa koulussaan koulukulttuurin nimenomaan haasteena toiminnallisen matematiikan toteutuksen näkökulmasta.

> *Lukiossa ja isossa lukiossa tämmösen toiminnallisen toteuttaminen on todella haastavaa. Koulussa on aina tietty kulttuuri ja siihen vaikuttaa ne muutkin opettajat ja se koko systeemi. Ja tota tässä koulussa mä oon kokenu sen hyvin hyvin niin ku vai keana ja vaativana, mutta tota kyllä semmosia onnistumisen kokemuksiakin on ollu.* Helena

Helena on saanut monenlaista palautetta opiskelijoiltaan tehdessään erilaisia kokeiluja toiminnallisen ja tutkivan oppimisen osalta. Radikaaleimmat mielipiteet toiminnallisen matematiikan toteuttamisesta ovat kommentointeja, joiden mukaan *tämmöstä opettajan omaa pedagogiikkaa pitäisi niin ku välttää ja jos semmosta meinaa toteuttaa, niin siitä pitäisi kertoa opiskelijoille etukäteen.* Helena korostaa vielä, että hänen opetuksensa oli *niin ku täydellisesti opetussuunnitelman (LOPS 1994) mukaista, mutta kun kukaan muu ei tehny sitä, niin se miellettiin opettajan omaksi pedagogiikaksi.* Helena tulkitsee tämänkaltaisia opiskelijoiden kommentteja seuraavasti:

> *Osa kokee jotenkin, että se ei oo oikeeta matematiikkaa tai oikeeta matematiikan opiskelua. Ne ei ymmärrä sitä, että niin ku hyvin valitut tutkimustehtävät tai toiminnalliset tehtävät, ne niin ku opettaa syvällisemmin ja opettaa sillä tavalla eri kanavilla. Et ne oikeesti opettaa ja ne oikeesti opettaa tärkeitä asioita, mut kun niillä ei oo kokemusta siitä, niin ne ei niin ku tajua sitä.* Helena

Usein toimintavälineet ja niiden käyttö liitetään alku-, erityis- sekä tukiopetukseen. Se voi olla syynä, miksi vanhemmilla oppilailla ja opiskelijoilla on niiden käyttöä kohtaan ennakkoluuloja. Helena onkin saanut alakoulun ylemmän luokan oppilailta kommentteja: ”minä lasken ilman toimintavälineitä, minä osaan laskea kynällä ja paperilla päässä”. Helenan mukaan tämä viestii kulttuurillista näkökulmaa, jonka mukaan toimintavälineiden käyttö yhdistetään heikompiin oppilaisiin, koska välineitä käytetään erityisopetuksessa heikompien opettamiseen.

> *Nää lapset mieltää, että ne on niitä ja koska tavotekkinhan on siihen, että osattaan ilman toimintavälineitä symbolisesti, niin niin tuota siinä on helposti semmonen vaara, että kulttuurillisesti oletaan niin ku halveksia sitä toimintavälineen käyttöä.* Helena

Helena luulee, että tällainen kulttuurillinen asenne liittyy vain toimintavälineisiin. Hän uskoo leikkien ja pelien aseman olevan oppilaiden ja opiskelijoiden mielestä erilainen. Helenan mielestä *ne innostaa ja haastaa kaikkia.* Hän uskoo kuitenkin vahvasti toiminnallisten työtapojen hyötyyn.

> *Mä näkisin, että toiminnallisen matematiikan, jotta sitä voidaan hyödyntää ja jotta siitä saada sitä kaikkea hyötyä ja iloa irti, ainakin täällä lukiotasolla, niin se vaatis semmosta kulttuurin muutosta. Se on niin ku iso juttu, mutta kyllä mää uskon, että tää maailma on niin ku menossa siihen suuntaan ja nään hirveen toiveikkaana sen.* Helena

Oppimisympäristö

Perusopetuksen opetussuunnitelman (2004, 18) mukaan oppimisympäristö on oppimiseen liittyvän fyysisen ympäristön, psyykkisten tekijöiden ja sosiaalisten suhteiden kokonaisuus, jossa opiskelu ja oppiminen tapahtuvat. Fyysinen oppimisympäristö voi asettaa rajoitteita toiminnallisuuden toteuttamiseen. Sannan mukaan opetustilan suhteen haasteita on eniten, jos on *iso tai levoton ryhmä*. Tällöin on mietittävä, miten toiminta sijoitetaan, ettei meteli nouse liian kovaksi ja saataisiin tilanne pidettyä rauhallisena. Sannan oma luokka on heidän koulunsa pienin, joten erot voivat olla koulun sisälläkin merkittäviä fyysisen ympäristön suhteen.

Mikko kertoo, että heillä *konkreettinen tila* on merkittävä haaste opetukselle. Montessori-materiaaleilla työskentely tapahtuu työskentelymattojen päällä, jotka sijoitetaan lattialle. Koska oppilailla on omassa kotiluokassaan myös pöydät ja tuolit, on tilan löytäminen omalle työskentelymatolle haasteellista. Osa oppilaista joutuukin siirtymään työskentelemään erilliseen kirjastoluokkaan tai työskentelyluokkaan, jossa materiaaleja säilytetään. Näin ollen kaikki oppilaat eivät ole opettajan nähtävillä koko ajan ja työskentelyn valvominen on vaikeaa. Mikko kuvaa, että montessorisodan (heitellään toisia Montessori-välineillä) syttyminen on aina dramaattinen tilanne. Oppimisympäristön tulisi kuitenkin tukea opettajan ja oppilaan välistä sekä oppilaiden keskinäistä vuorovaikutusta sekä edistää vuoropuhelua (Opetushallitus 2004, 18). Tämän tavoitteen toteuttaminen on kuitenkin haasteellista Mikon kuvaamassa oppimisympäristössä, kun oppilaat sijaitsevat hajallaan eri luokkatiloissa.

Luokan sosiaaliset suhteet luovat oman vaikutuksensa toiminnallisuuden toteuttamiseen. Helana pohtii omaan esikoulukokeiluunsa peilaten, että ensimmäisellä luokalla toiminnallisuuden toteuttaminen edellyttää varmasti kaveria opettajalle. Haasteen tuo Helenan mukaan se, että pienten oppilaiden on ensin opittava koulunkäyntiin liittyviä asioita kuten tuntityöskentely, hiljaa pulpetissa istuminen ja opetuksen seuraaminen, ennen kuin heidän kanssaan voidaan ruveta harjoittelemaan ryhmätyötaitoja ja toiminnallisuuteen liittyvää työskentelytapaa, joka edellyttää oppilailta sosiaalisia suhteita. Helena näkee kannattavana *panostaa toiminnallisen oppimisen taitojen opettamiseen*, vaikka pikku hiljaa. Jos oppilaille saadaan heti koulutaipaleen alussa kokemuksia toiminnallisista työtavoista, palvelee se pitkällä tähtäimellä toiminnallisuuden toteuttamista, koska sitä ei pidetä myöhempinä kouluvuosinakaan mitenkään erikoisena ja kummallisina työskentelymuotoina. Kun oppilaat omaksuvat uusia opetusmenetelmiä, se tuottaa vähitellen muutosta myös koulukulttuuriin.

5.2.2 Mitä toteuttaminen vaatii opettajalta?

Materiaalin tekeminen

Uuden opetusmateriaalin tekeminen ei ole koskaan vaivatonta. Pekan mukaan toiminnalliseen matematiikkaan suunnitelluissa tehtävissä ja harjoitteissa *itse toiminta ei ole niin ku se kaiken pääasia*. Helenan korostaa, että *niiden käytöllä täytyy* *olla niin ku selvä tavote, et se edistää sitä oppimisen kokonaisuutta.* Tällaiset tavoitteelliset tehtävät eivät kuitenkaan synny itsestään. Kallen mielestä *se vaatii sen, että ne toiminnalliset jutut on niin ku mietitty ja suunniteltuja*. Toiminnallisten materiaalien suunnittelu ja valmistaminen vaatii siis opettajalta muun muassa vaivaa, aikaa sekä laajaa matematiikan hallintaa (ks. esim. Tikkanen & Lampinen 2005, 75; Näätänen 2000, 114–115).

Toiminnallisten harjoitteiden suunnittelu pelkän matematiikan osa-alueen tai opetettavan käsitteen perusteella ei ole ihan helppoa, vaan siihen tarvitaan myös idea. Helenan ja Pekan mukaan idean voi kuulla jostain, kuten koulutuksista tai löytää alan kirjallisuudesta. Sitten voidaan itse *kehittää lisää ja tuunata itselle mukaviksi ja toimiviksi harjoitteiksi*. Helenan mukaan idean voi toisinaan saada myös *ikään kuin tyhjästä*, jota kehittämällä saadaan toimiva harjoitus. Kallen ja Sannan mielestä onkin *hauskaa keksiä itse* toiminnallisia harjoitteita. Näiden suunnittelussa opettaja voi hyödyntää omia vahvuuksiaan ja päästää oman luovuutensa todella valloilleen (ks. Oravecz & Kivovics 2005, 22; Tikkanen 2008, 83–84). Toiminnalliset harjoitteet voivat olla melkein minkälaisia vain, sillä ei matematiikka ole läsnä toiminnassa ilman opettajaa.

> *Tavallaan se toiminnallisessa, toimintavälineessä, leikissä pitää niin ku nähdä se matematiikka. Eihän se matematiikka ole niissä välineissä itsessänsä, vaan se tulee sen tavallaan sen opettajan kautta, että mitenkä hän niin ku tulkitsee niitä ja tavallaan lasten kanssa tekee ja tekemisen kanssa on yhteydessä, puhutaan niistä asioista, niin sitä kautta ne voi tulla sen sosiaalistumisen vuorovaikutuksen kautta ne merkitykset, ne matemaattiset merkitykset siihen leikkiin.* Helena

Pekan osasta itsenäisesti tehtävistä toiminnallisista harjoitteista on toteutettu siten, että toiminnan runko, jota oppilas työstää välineen kanssa, on kirjattu paperille ylös. Pekan mukaan tällaisen *itseohjautuvan materiaalin tekeminen on haastavaa*. Pekka on käyttänyt opetuksessaan myös GeoGebra-ohjelmaa ja kokee sen olevan geometrian opetuksessa hyvä, mutta *mielekkään materiaalin tekeminen yläkouluun on jokseenkin haastavaa* myös kyseiselle ohjelmalle. Haasteena on myös, että ohjelman käytön opettelu vie aikaa.

Mikko kertoo, että heillä Montessori-koulussa matematiikan perusrunko on olemassa valmiina tehtävien osalta kuhunkin välineeseen liittyen. Koska välineet tulevat ulkomailta, on opettajan muun muassa käännettävä tehtäväkorttien sisällöt englannista suomen kielelle. Toki tehtäväkortit kuluvat käytössä, joten välillä niitä joutuu tekemään lisää. Uudelleen tekemisessä Mikon mukaan oleellisessa roolissa eivät ole käytetyt luvut, vaan että tehtävän idea säilyy.

Uskallusta kokeilla

Monet jo pidempään töissä olleet opettajat varmasti yhtyvät ajatukseen, että kun on löytänyt sen oman tavan toimia ja opettaa, siihen helposti jumiutuu ja unohtaa sen kehitysintoilun. Sanna korostaakin, että tärkeää on *oman organisoinnin niin ku uudistaminen: pitää uudistaa ja miettiä mitä tekis toisin*. Pekka onkin sitä mieltä, että suurin este toiminnallisuuden toteuttamisen aloittamiseen "olet kuitenkin sinä itse". Opettajilta puuttuu siis *uskallus lähteä kokeilemaan*.

> *Jostainhan se kipinä pitää lähtee ennen, ku opettaja ite tekee ensimmäisen liikkeen itse. Ei toiminnallisuus tule sinun luokkaan. Sä et saa toiminnallisuutta sillä, että sä käyt koulutuksissa kattomassa. Sinä oot ite se tekijä ja pitää ottaa ite se ensimmäinen askel ja siihen saattaa sitten hurahtaa.* Pekka

Pekka muisteli omaa taivaltaan opettajana taaksepäin ja kertoi saaneensa yliopistossa vahvan formaalin matematiikan pohjan, jonka perusteella opettaminen aluksi tapahtui. Pian Pekka huomasi, *että hänellä ei oo oppilaille hirveesti mitään erilaista annetavaa kuin se mitä vahvalla matematiikalla pystyi tekemään. Kokemattomana opettajana ei ollu hirveesti vaihtoehtoja, jos oppilas sano kirjasta, että hän ei niin ku osaa.* Pekka oli miettinyt toimintavaihtoehtojaan tällaisiin tilanteisiin. Hän voisi pyytää oppilasta lukemaan tehtävän äänen, mikäli kyseessä on sanallinen tehtävä. Hän voisi itse opettajana lukea sen ääneen ja selittää sitä lisää oppilaalle. Missään vaiheessa opettajana sinä et kuitenkaan saa varmuutta siitä, mitä oppilas ymmärtää sinun selityksestäsi. Jos hän ei hahmota tilannetta, ei siitä selittämisestä ole mitään hyötyä. Toiminnallisuuden aloittamisen syy oli siis Pekalla se, että hän koki opetusmenetelmänsä riittämättömiksi. Muutospäätös ei ole kaduttanut häntä, vaikka kaikki ei ole mennyt aina niin kuin oli suunnitellut.

> *Ihan varmasti ensimmäisinä vuosina epäonnistuu. Ihan niin ku opettajat yleensäki ensimmäisinä vuosina ja sehän on sallittua. Ja siinä kehittää itseään, mutta tämä pitää ittensä, ainakin minut, hereillä ja vireenä, että joka tunti melkeen oppii itekki jotain oppilailta.* Pekka

Kalle kertoo saamiensa kokemusten pohjalta, että syynä opettajien kokeilemattomuuteen voi olla myös pelko omaa matemaattista osaamistaan kohtaan. Opettaja siis pelkää osaamisen riittämättömyyttä, kun siinä tulee tilanteita, että oppilas kysyy, onko se näin vai näin. Kirjasidonnaisessa opetuksessa opettajalla on mahdollisuus Kallen mukaan piiloutua kirjan taakse, jos tuntee itsensä epävarmaksi. Kalle yhtyy Pekan näkemykseen toiminnallisuuden epäonnistumisesta alkuaikoina. Kalle korostaakin, että sitä toiminnallisuuden toteuttamista joutuu harjoittelemaan: välillä joku homma voi mennä läskiksi ja sitä ei saa pelätä. Kalle kertoo itsekin joutuneen ihan tietoisesti opettelemaan toimimista koko luokan kanssa yhtä aikaa, jotta se alkaisi sujua ilman kaaoksen muodostumista.

Pekkakin uskoo, että opettajien kokeilemattomuuteen liittyy pelkoja. Hän kohdistaa pelot tilanteen hallintaan. *Toiminnallisuudessa opettaja ei kontrolloi toimimista koko ajan, jolloin hän ei itse tiedä, mitä oppilaat tismalleen tekevät.* Pekka pohtii, poikkeaako edellä kuvattu tilanne opettajajohtoisesta opettamisesta. Mietitään tilannetta, jossa opettaja esittää kysymyksen. Kuusi oppilasta luokasta viittaa ja yksi vastaa, josta opettaja päättelee, että asia osataan, jolloin voidaan mennä eteenpäin. Todennäköisesti luokalla oli paljon oppilaita, jotka eivät asiaa ymmärtäneet tai edes seuranneet sitä. Näin ollen opettaja ei voi olla opettajajohtoisessakaan menetelmässä täysin varma, mitä oppilaat opetuksen aikana tekevät – joten toiminnallisuus ei ole mitenkään huonompi tapa opettaa.

Opetuksen muuttuminen toiminnalliseksi on iso muutos myös oppilaille. Hekin ovat tottuneet tietynlaiseen opetustapaan ja tietävät, mitä heiltä milloinkin odotetaan. Jotta oppilaat saadaan opetettua menetelmään, jonka mukaan heidän tehtäväänsä on itse tekeminen, pääasioiden löytäminen niistä toiminnallisista harjoitteista, vie Pekka mukaan paljon aikaa. *Se ei tule kahdessa tai kolmessa viikossa, vaan puhutaan puolesta vuodesta tai jopa vuodesta.* Totutun struktuurin rikkominen voi aiheuttaa vastarintaa ja haluttomuutta oppilaissa, joten uskalluksen lisäksi opetuksen muuttaminen toiminnalliseksi vaatii opettajalta vaivaa ja kärsivällisyyttä kohdata tämä.

5.3 Toiminnallisuuden toteuttaminen kouluissa

Tähän lukuun olen koonnut haastattelemieni opettajien käytännöstä saatuja kokemuksia toiminnallisuuden toteuttamisesta matematiikan opetuksessa. Ensin esittelen erilaisia toimintavälineitä ja käyn läpi matematiikan osa-alueita, joissa niitä voi käyttää. Tämän lisäksi olen kuvannut yksityiskohtaisesti erilaisia suoraan käytäntöön vietäviä harjoitteita.

5.3.1 Toimintavälineet

Haastattelemistani opettajista kaikki ovat käyttäneet opetuksessaan jonkinlaisia välineitä. Heidän mukaan toimintavälineet voivat olla hyvin monenlaisia: valmiita matematiikkaan suunnattuja välineitä, itse keksittyjä välineitä tai muita valmiita esineitä, joita hyödynnetään ihan uudessa käyttötarkoituksessa (vrt. Domino 2012). Merkittävin ero välineiden osalta ilmeni Mikon haastattelusta. Montessorikoulun toiminta perustuu välineisiin ja niillä toimimiseen, jolloin kaikkiin opittaviin osa-alueisiin on aina jonkinlainen väline tai välineitä. Käytetyt välineet tilataan ulkomailta ja niistä suurin osa on Montessorin itsensä kehittämiä.

Haastatteluissa käytiin läpi erityisesti valmiita matematiikkaan suunnattuja välineitä ja niiden käyttömahdollisuuksia eri matematiikan osa-alueittain hieman tarkemmin läpi. Nämä tiedot olen koonnut Taulukkoon 3.

TAULUKKO 3. Toimintavälineiden käyttötarkoituksia matematiikan sisältöalueittain.

Toimintaväline	Käyttötarkoitus
Murtokakut	Murtoluvut, prosentit
Värisauvat	Kokonaisluvut, murtoluvut, lukujärjestelmät, prosentit, lukujen hajotelmat
Geolauta	Prosentin perusta (10 x 10 ruudukko), kuvioiden pinta-alat (kaavojen johtaminen ja niiden todistaminen), peilaukset, suoran piirtäminen, suurennokset, pienennökset, neliöjuuren löytäminen
Kymmenjärjestelmäväline	Kymmenjärjestelmä, yksikönmuunnokset, kuvioiden pinta-alat, kappaleiden tilavuudet
Tasokuviot	Kuvioiden luokittelu ja ominaisuuksien havaitseminen
3-ulotteiset kappaleet	Kappaleiden hahmottaminen ja luokittelu
Pattern Blocks -palat	Kuvioiden piiri ja pinta-ala, murtoluvut, suurennokset, pienennökset

5.3.2 Käytännön harjoituksia

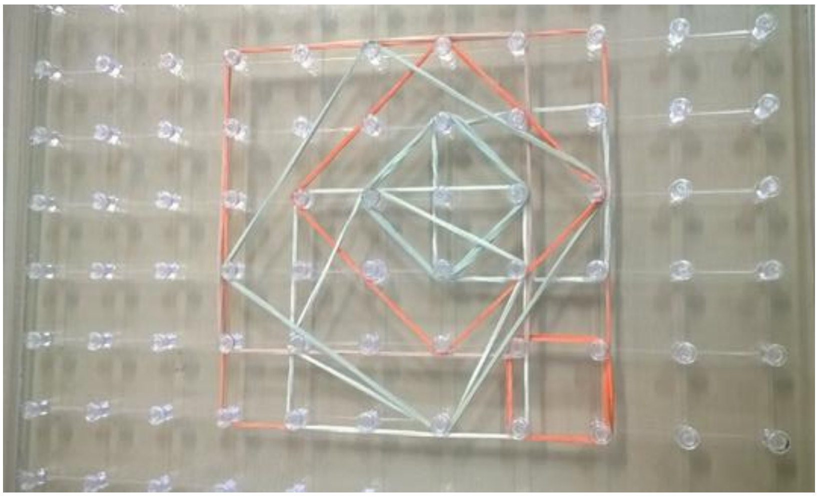
Toteutettavia toiminnallisia harjoituksia on hyvin paljon. Esittelen tässä lyhyesti muutamia harjoituksia, joita tarkastelimme ja joista keskustelimme koulutuksessa. Tämän lisäksi nostan esiin myös niitä harjoituksia ja pelejä, joita haastattelemani opettajat minulle kertoivat.

Neliötutkimuksia

Neliötutkimuksessa välineenä käytetään geolautaa ja kuminauhoja. Geolaudasta tulee ensin rajata kuminauhan avulla tietyn kokoinen ruudukko, esimerkiksi 5 x 5 ruudukko. Opettajan kannattaa varmistaa tehtävän alussa, että kaikilla oppilailla on todella 5 x 5 ruudukko, sillä havainnoimassani koulutuksessa monet opettajatkin itseni mukaan lukien rajasivat nopeasti ruudukon laskemalla viiden nupin välin, jolloin muodostuu vain 4 x 4 ruudukko. Tehtävässä tarkoituksena on etsiä kuminauhojen avulla kaikki erikokoiset neliöt ruudukosta. Ruudukon koosta riippuu kuinka paljon erilaisia neliöitä löydetään. Kuvassa 1 on esimerkkejä erikokoisista neliöistä, kun käytössä on 5 x 5 ruudukko.

Löydetyt neliöt kannattaa piirtää ruutuvihkoon, jotta omaa toimintaa tulee dokumentoitua. Löydetyistä neliöistä voidaan miettiä luokkatason mukaan seuraavia asioita: mikä oli neliön pinta-ala ruutuina, miten neliön pinta-ala voidaan laskea, neliön sivun pituuden ja pinta-alan välistä suhdetta tai näitä kaikkia. Mikäli pohtii näitä kaikkia ominaisuuksia samalla kertaa, tiedot on järkevä koota taulukkoon.

Neliön pinta-alan ymmärrystä voidaan harjaannuttaa myös toisella tavalla geolautaa käyttäen. Opettaja voi sanoa erisuuruisia pinta-aloja ja oppilaiden tehtävänä on rajata geolaudalta tämän kokoinen neliö.



Kuva 1. Neliötutkimus 5 x 5 ruudukolla.

Kolmiotutkimuksia

Kolmiotutkimuksessa välineenä käytetään neliötutkimuksen tavoin geolautaa ja kuminauhoja. Geolaudasta tulee ensin rajata kuminauhan avulla tietyn kokoinen ruudukko, esimerkiksi 5 x 5 ruudukko. Ruudukon koosta riippuu kuinka paljon erilaisia kolmioita löydetään. Tehtävän tarkoituksena on etsiä kuminauhojen avulla kaikki erikokoiset kolmiot ruudukosta ja miettiä, mikä on niiden pinta-ala.

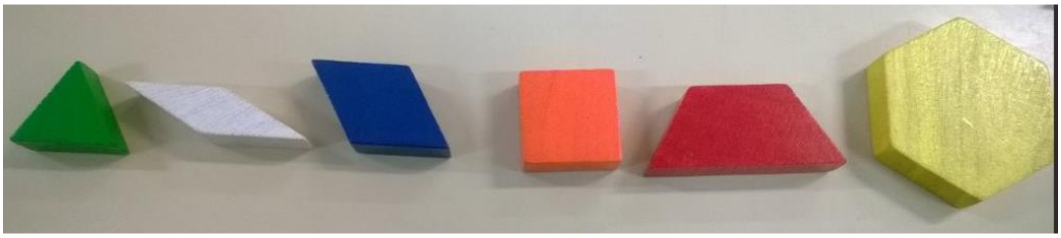
Kolmion pinta-alan ymmärrystä voidaan harjaannuttaa myös toisella tavalla geolautaa käyttäen. Opettaja voi sanoa erisuuruisia pinta-aloja ja oppilaiden tehtävänä on rajata geolaudalta tämän kokoinen kolmio.

Seuraavaksi kuvaamani kolmion pinta-ala harjoite on jo haastava. Käytetään edelleen tietyn kokoista osaa geolaudasta, esimerkiksi 5 x 5 ruudukkoa. Ensin oppilaiden tulee miettiä, mikä on pienin mahdollinen kolmio, joka geolaudalla voidaan tehdä. Kun tämä on selvillä, tulee oppilaiden tehdä kaikki sitä suuremmat kolmiot puolen ruudun pinta-alan välein. Tätä tehtävää havainnollistetaan Kuvassa 2.

Kuva 2. Kolmioita, joiden pinta-ala kasvaa aina puolella ruudun pinta-alalla.

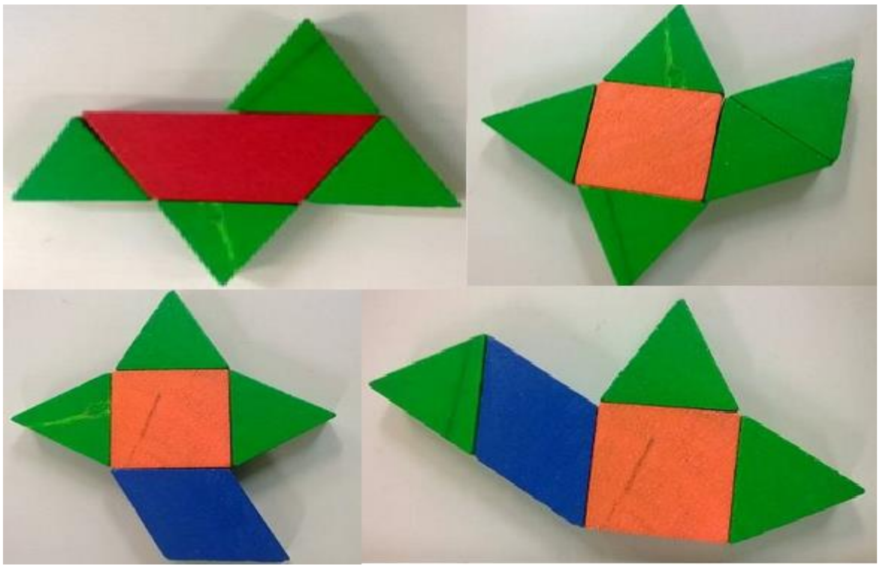
Piirin käsitteen ymmärtäminen

Tässä harjoitteessa käytetään pattern blocks -paloja. Ensimmäiseen harjoitteeseen tarvitaan yhdet jokaista kokoa olevan palasen, jotka on esitetty Kuvassa 3. Ideana on kuvitella olevansa muurahainen, joka kiertää palikoita. Tehtävä on miettiä, millaisen matkan muurahainen kiertää kunkin palikan kohdalla. Palikat voidaan laittaa piirin suuruuden mukaan järjestykseen pienimmästä suurimpaan. Tämän lisäksi tulee pohtia, millä yksiköllä kuljettua matka olisi hyvä ilmaista.



Kuva 3. Kuusi erilaista Pattern blocks -palasta.

Toisessa harjoitteessa ideana on tehdä erilaisia rakennelmia, joiden n suuruus on määrätty yksiköinä, esimerkiksi yhdeksän yksikköä. Kuvassa 4 on esimerkkejä erilaisista rakennelmista, joiden piiri on yhdeksän yksikköä. Tehtävää voidaan vaikeuttaa vaatimalla, että rakennelma pitää tehdä tietyllä määrällä paikoita, esimerkiksi kahdella, kolmella, neljällä tai viidellä palikalla.



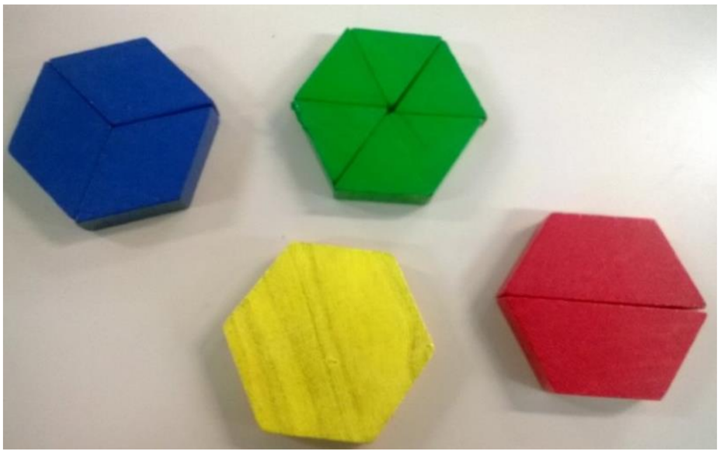
Kuva 4. Pattern blocks -paloilla tehtyjä rakennelmia, joiden piiri on yhdeksän yksikköä.

Piirin käsitteeseen liittyy myös yksi mukava ongelmatehtävä. A-kerrostalo on suorakaiteen muotoinen. B-kerrostalo on myös suorakaiteen muotoinen, jonka keskellä on porttikongisyvennys. Oppilaiden tulee miettiä, onko näillä kerrostaloilla, joiden pituus ja leveys ovat samat, myös sama piiri. Tilannetta havainnollistetaan Kuvassa 5.

Kuva 5. Kuvat kerrostaloista A ja B.

Murtolukututkimus

Tässä harjoitteessa käytetään Pattern blocks -paloja siten, että käytössä on vain siniset, vihreät, punaiset ja keltaiset palaset, koska niistä voidaan muodostaa säännöllinen kuusikulmio. Ideana on kuvata palikoiden suuruuksien suhteita murtoluvuilla. Kuvasta 6 näkee helposti erikokoisten palasten välisiä suhteita. Esimerkiksi vihreä palikka on yksi kahdesosa sinisestä palikasta ja yksi kolmasosa punaisesta palikasta. Eri vaihtoehdot on syytä kirjata ylös esimerkiksi taulukkoon.



Kuva 6. Eriväristen palasten suuruuksien väliset suhteet.

Värisauvatutkimuksia

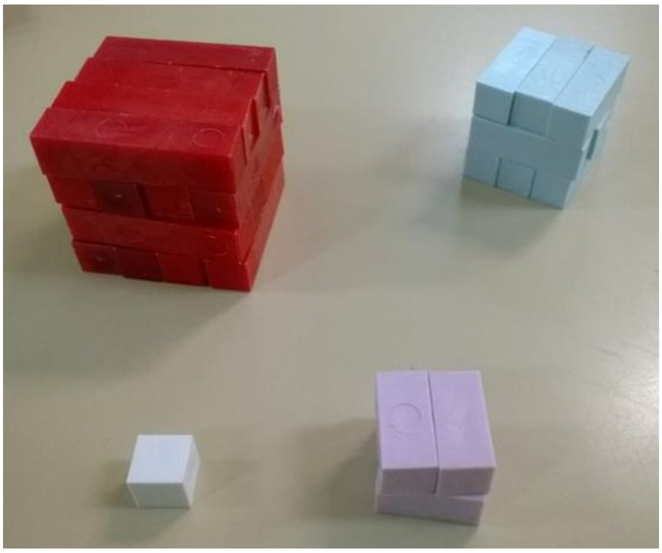
Värisauvoilla voidaan harjoitella esimerkiksi lukujen hajotelmia. Seuraavaksi pohditaan luvun kymmenen hajotelmia. Tällöin tarvitset ensin oranssin kymppisauvan. Tehtävänä on ensin tehdä samanmittaisia pötköjä kuin oranssi kymppisauva käyttäen kahta muuta sauvaa. Tätä tehtävää havainnollistetaan Kuvassa 7.

Tämän jälkeen ideana on tehdä oranssin kymppisauvan kanssa samanmittaisia pötköjä siten, että siinä pitää käyttää kahta eriväristä sauvaa. Tätä tehtävää havainnollistetaan kuvassa 8.

Kuva 7. Kahdella sauvalla tehtyjä luvun kymmenen hajotelmia.

Kuva 8. Kahdella erivärillä sauvalla tehtyjä luvun kymmenen hajotelmia.

Tässä harjoitteessa pohditaan tilavuuksia ja kappaleiden suurentamista. Otetaan ensin valkoinen sauva ja mietitään, minkä muotoinen se on. Valkoinen ykkössauva on tietysti kuutio. Seuraavaksi oppilaiden tulee rakentaa valkoista kuutiota isompi kuutio. Uudesta kuutosta heidän tulee miettiä, kuinka monta valkoista palikkaa siinä on ja miten kyseiseen tulokseen päästiin eli miten palikoiden määrä laskettiin. Kun tämä on saatu tehtyä, tulee yrittää taas rakentaa isompi kuutio ja miettiä siitä edellä mainitut asiat. Erikoisia kuutiorakennelmia on esitetty Kuvassa 9.



Kuva 9. Valkoisesta kuutista suurennetut kolme seuraavaa kuutiota.

Kuutiotarkastelua voidaan jatkaa vielä tilavuuden ilmaisemiseen käyttämällä yksikköä kuutiosenttimetri. Pienen valkoisen kuution tilavuus on 1 kuutiosenttimetrin, koska sen jokainen särmä on 1 senttimetrin pituinen. Tämän avulla voidaan ilmoittaa kaikkien rakennettujen kuutioiden tilavuuden kuutiosenttimetreinä.

Hevoskilpailu

Tämä harjoite sopii hyvin todennäköisyyslaskennan alkuun ja alkeistapauksien hahmottamiseen. Harjoitetta on toteutettu lukiossa. Materiaaleiksi riittää kaksi tavallista noppaa ja kuusi hevosta, jotka numeroidaan yhdestä kuuteen. Pelialustalle merkitään lähtö sekä maali ja niiden väliin tehdään halutun matkan verran askelmia. Jokainen pelaaja valitsee oman hevosen ja noppaa heittämällä pyritään pääsemään ensimmäisenä maaliin. Hevoset liikkuvat aina jokaisen pelaajan heitolla, vaikka hevonen ei olisi oma.

Kun tämä peli on pelattu, muutetaan hevosten etenemistapaa. Nyt tarvitaan kaksi noppaa. Kun pelaaja on heittänyt nopat, laskee hän noppien silmälukujen pistesumman ja summaa vastaava hevonen liikkuu. Ideana on siis havaita, että keskimmäisillä numeroilla kilpailevat hevoset etenemät keskimäärin nopeammin.

Bussileikki

Tämän harjoitteen avulla voidaan opetella ja treenata yhteen- ja vähennyslaskua. Harjoite koostuu neljästä vaiheesta: toiminnallinen leikki, välineellinen leikki, kuvallinen havainnollistus ja symbolinen laskeminen. Kokonaisuudessaan harjoitus toimii hyvin alkuopetuksessa, mutta on sovellettu myös esiopetukseen. Ideana on leikkiä oppilaiden kanssa englantilaisen bussin matkustamista. Bussi muodostuu viidestä parista tuoleja peräkkäin sekä kuljettajasta (oppilas), joka on väärällä puolella. Opettaja toimii leikinjohtajana. Ensin bussi ajaa tallilta pysäkille. Kun bussi saapuu pysäkille ohjaaja näyttää lapulla, kuinka monta henkilöä pussiin nousee. Jos ohjaaja näyttää lappua +3, nousee kolme oppilaista kyytiin. Sitten bussi jatkaa matkaa seuraavalle pysäkille, jolloin opettaja näyttää uutta lappua. Vastaavasti opettaja voi näyttää lappua -2, jolloin kahden matkustajan tulee nousta pois kyydistä. Toinen bussimatka toteutetaan ohjeistetulla systemaattisella bussin täyttämisellä. Kuvitellaan, että kuskin puolella on hieno maisema ja toisella puolella näkyy vain kallioita ja kiviä, jolloin kaikki haluaa mennä ihastelemaan maisemaa.

Välineellisessä leikissä samaa leikitään kanamunakennojen avulla. Kanamunakennon etuosan kuljettajan paikalle laitettiin kuskipalikka. Bussin ajaessa kenno oli kiinni ja pysäkillä se avattiin, jolloin tuli uusia kyytiläisiä tai lähti pois. Toistetaan edellä kuvattua leikkiä nyt kanamunakennon avulla. Oppilaat voivat nyt konkreettisesti liikuttaa bussia pysäkiltä toiselle. Kuvallisessa vaiheessa tehtiin samaa ruudukon avulla, jonne lisättiin ympyräkiekkoja kuvaamaan ihmisiä. Lopuksi kuvallisista havainnollistuksista muodostettiin yhtälöitä li siten, että merkittiin alkutilanne (montako henkilöä bussissa on, esim. 2), siirtymävaihe (opettajan näyttämä lappu, esim. +3) ja lopputilanne (montako henkilöä bussissa on pysäkiltä lähdettäessä, 5 henkilöä). Kukin vaihe muutettiin ensin symboliseen muotoon ja vasta ihan lopuksi se kirjoitettiin matemaattisena yhtälönä 2 + 3 = 5. Näitä toistettiin useita ihan kuten toiminnallisessa ja välineellisessä leikissäkin.

5.4 Materiaalivinkkejä toteuttamiseen

Tähän lukuun olen koostanut materiaali- ja lähdevinkkejä, joiden avulla opettaja voi lähteä suunnittelemaan ja toteuttamaan omaa toiminnallisempaa matematiikan opettamistaan. Sen lisäksi luvussa esitellään joitakin oppimispelejä sekä oppimisympäristöjä, joita voidaan myös hyödyntää toiminnallisessa matematiikan opetuksessa.

5.4.1 Teoksia toiminnallisista harjoituksista

Kajetskin ja Salmisen (2009) teoksen *"Matikasta moneksi. Toiminnallista matematiikkaa varhaiskasvatuksesta esiopetukseen"* tarkoituksena on saada matematiikan opetukseen iloa ja antaa jokaiselle lapselle mahdollisuus opiskella matematiikkaa. Harjoitukset on suunnattu varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen, mutta niitä voidaan helposti soveltaa myös alkuopetukseen. Teoksesta löytyy tehtäviä loogisen ajattelun perustan, lukukäsitteen, yhteen- ja vähennyslaskukäsitteen pohjustuksen, mittaamisen, geometrian ja eheyttämisen tukemiseen. Nämä harjoitukset pohjautuvat erilaisten toimintavälineiden käyttöön.

Salmisen ja Varamaan (2009) teos *"Heureka!: oivaltavaa matematiikkaa esi- ja alkuopetukseen"* sisältää innostavia leikkejä ja ohjeita ymmärtävän matematiikan opetukseen. Teos on suunnattu käytettäväksi varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa. Teoksessa esitellään taustatietoa matematiikan oppimisesta, ideoita oppimistilanteiden järjestelystä, sopivista välineistä sekä monistettavaa materiaalia. Teos korostaa opetuksessa pelaamista, pohtimista, musiikkia, liikuntaa ja rakentelua yhdessä muiden lasten ja opettajan kanssa.

Matikaisen, Kyyrän, Riskun ja Tikkasen (2002) teos *"Laskutaidon toimintapaketti 1"* sekä Riskun ja Tikkasen (2004) *"Laskutaidon toimintapaketti 2"* sisältävät paljon erilaisia toiminnallisia harjoitteita matematiikan opetukseen. Nämä harjoitteet on laadittu unkarilaisen matematiikan opetusidean pohjalta. Molempiin teoksiin löytyy myös opettajan materiaalit.

Ikäheimon, Aallon ja Puumalaisen (1997) kirja *"Opi matematiikka leikkien esi- ja alkuopetuksessa"* sisältää 40 erilaista leikki- ja peli-ideaa. Harjoitteiden yhteydessä on kerrottu, mitä matematiikan taitoja ja sisältöjä ne kehittävät sekä mitä aisteja lapsi käyttää niitä tehdessään. Jokaiseen peliin ja leikkiin löytyy sekä helpompi että vaikeampi versio.

Ikäheimon (1995) teoksesta *"Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan"* löytyy tietoa matematiikan opettamisesta, jossa keskiössä ovat oppimisen ja opettamisen ilo, käsitteiden ymmärtäminen ahdistuksen ja pelon poistaminen, itsetunnon säilyttäminen ja luovuuden lisääntyminen. Teoksesta löytyy tietoa ja vinkkejä keskeisten matematiikan solmukohtien opetukseen sekä erilaisia oppimispelejä ja matematiikkaan sopivien projektitöiden aiheita.

Ikäheimon (2012) teos *"KYMPPI-kirja: matematiikan osaamisen perusta vahvaksi 10-järjestelmällä"* opastaa opettajaa siinä, mihin kaikkeen 10-järjestelmävälinettä voi käyttää. Kirjassa on vinkkejä muun muassa seuraavista aihealueista: 10-järjestelmä, luonnolliset- ja desimaaliluvut, lukujen vertailu, lukujonot, pyöristäminen, yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut, yksikönmuunnoksia ja käsitteet: puolet, kaksinkertainen, 10-kertainen ja 10-osa. KYMPPI-kirjaan sisältyy myös kahdella DV-levyllä olevat KYMPPI-filmit, joihin on kuvattu aitoja oppimistilanteita. Jokaiseen filmiin löytyy KYMPPI-kirjasta opetuksellisen selostus.

KYMPPI-kirjaan liittyy läheisesti myös toinen Ikäheimon (2011) teos *"KYMPPI-kartoitus: 10-järjestelmän hallinnan kartoitus"*. Teos sisältää luonnollisten lukujen ja desimaalilukujen käsitteisiin liittyviä tehtäviä, laskutoimituksia sekä mittayksiköiden muunnoksia, jotka ovat tärkeitä 10-järjestelmän hallinnan kannalta. Teoksessa on kolme koepakettia: Kymppi-kartoitus 1, Kymppi-kartoitus 2 ja Junnauskokeet. KYMPPI-kartoitukset voidaan teettää luokassa tai yksilöllisesti. KYMPPI-kartoitus 1 sisältää siis luokkien 1–3 keskeisiä sisältöjä luonnollisilla luvuilla. KYMPPI-kartoitus 2 taas sisältää luokkien 4–5 keskeisiä sisältöjä luonnollisilla luvuilla ja desimaaliluvuilla. KYMPPI-kartoitusten sisällöt tulisi hallita arvosanalla 10, sillä uutteet näissä taidoissa haittaavat matematiikan oppimista jatkossa. Junnauskokeissa saadaan selville oppilaiden käyttämiä laskustrategioita sekä yhteen- ja vähennyslaskutaito. Junnauskokeessa 0-20 testataan edellä olevien asioiden hallintaa lukualueella 0–20 ja Junnauskokeessa 0-2000 lukualueella 0–2000. Kokeiden ideana on, että yhteen- ja vähennyslaskuja kerrataan eli junnataan molempien lukualueen niin kauan, että oppilaat hallitsevat nämä peruslaskut automaation tasolla.

Wassin (2003) teos *"Matematiikkaa unkarilaisilla laskusauvoilla"* on suunnattu esi- ja alkuopetuksen lisämateriaaliksi. Teoksesta löytyy harjoituksia värisauvoihin tutustumisesta, kuvioiden rakentelusta, kaksi- ja kolmeulotteisuudesta, sarjoista, vaihdannaisuudesta, yhtä suuruudesta, yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskusta, murtoluvuista, kymmen ylityksistä, pituudesta, pinta-alasta, painosta, ja symmetriasta. Tehtävät on suunniteltu siten, että niissä tarvitaan värisauvoja. Tehtävissä tarvitaan myös muita välineitä, kuten kynä, viivain tai senttimetripaperi, mutta se on mainittu kunkin tehtävän kohdalla erikseen.

Neményin, Oraveczin ja Lampisen teokset *"Tieviitta 1"* ja *"Tienviitta 2"* ovat Varga-menetelmän oppikirjoja oppilaille. Niihin löytyy myös opettajan versiot *"Opettajan tienviitta 1a, 1b, 2a ja 2b"*. Opettajan versioissa esitellään menetelmän perusideaa, annetaan vinkkejä opetusympäristön ja –tilanteen järjestämisestä. Niissä näkyy oppilaan sivut pienennettyinä sekä on paljon monistettavia lisämateriaaleja. Opettajan Tienviitoissa on tarkat viikkosuunnitelmat, jossa näkyy myös tavoitteet sekä tarvittavat havainnollistamis- ja toimintavälineet.

Pehkosen (1998) teoksesta *"Etappi: toiminnallisia matematiikan tehtäviä peruskouluun"* löytyy monipuolisia toiminnallisia matematiikan tehtäviä ja pelejä vuosiluokille 1-9. Tehtäviä löytyy aritmetiikan, algebran ja geometrian osa-alueista. Sen lisäksi teoksessa on käytännön sovellustehtäviä arkielämään sekä erilaisia ongelmanratkaisuja. Tehtävät ovat luonteeltaan senkaltaisia, että niitä voidaan helposti soveltaa usealle eri luokkatasolle, ja sen vuoksi jokaisen tehtävän kohdalle onkin merkitty suoritus luokkatasot tehtävän toteuttamisesta. Jokaiseen harjoitukseen on eritelty myös mitä esitietoja harjoitus edellyttää oppilaalta, tarvittavat välineet, tavoitteet sekä erilaisia opetusvihjeitä toteutuksen yhteyteen.

Ikäheimon ja Voutilaisen (2009) teos *"Murtolukuja välineillä luokille 3-9"*sisältää runsaasti monenlaisia harjoitteita murtolukujen oppimiseen sekä ala- että yläkouluun. Kirjassa on esitelty harjoitteita toteutettavaksi neljällä eri välineellä: murtokakuilla, värisauvoilla, värinapeilla ja tangram-paloilla. Kirjasta löytyy 47 valmista tehtävämonistetta, joista ei ilmene tarkoitettu luokka-aste, joten ne soveltuvat helposti eri luokka-asteille käytettäviksi. Kuhunkin tehtävämonisteeseen löytyy opettajan ohjeet sekä tehtävien ratkaisut. Samaan aiheeseen on tehty useamman eri vaikeustason tehtäviä, jotka on koodattu kirjaimin A, B ja C (A on helpoin ja C vaikein).

Kairavuon ja Voutilaisen (2005) teos *" Matematiikkaa värisauvoilla luokille 6–9"* soveltuu opetuksen oheismateriaaliksi 3.luokkalaisista 9. luokkalaisiin, jopa lukioon, koska jokainen oppilas saa lähtökohdistaan riippuen tehtävistä irti eri asioita. Teos sisältää 24 kopioitavaa tehtäväsarjaa. Tehtävät ovat suurelta osin itseohjautuvia ja ne ohjaavat oppilaan ajattelua pois rutiiniajattelusta. Jokaiseen tehtäväsarjaan on laadittu myös käyttöehdotuksia sekä malliratkaisut.

Tapiaisen (2011) teoksesta *"Pii - toiminnallista matematiikkaa"* opettaja saa apua matematiikan käsitteiden ja laskuoperaatioiden havainnollistamiseen välineiden avulla. Teoksesta löytyy esimerkkejä, pedagogisia ohjeita ja opetusvinkkejä viidestä eri aihealueesta: kokonaislukujen peruslaskutoimitukset, murtolukujen peruslaskutoimitukset, polynomilaskenta, ensimmäisen asteen yhtälö ja polynomilaskenta, joten siitä saa apuja sekä alakoulun että yläkoulun matematiikan opetukseen. Tämän teoksen harjoitteissa käytetään värisauvoja, murtokakkuja, värinappeja ja geolautaa.

Matematiikan solmu -lehdessä on julkaistu Unkarilaiseen matematiikkaan Pálfyn tekemä kokoelma *"Värisauvojen käyttö matematiikan opetuksessa"*. Siinä on paljon värisauvoilla tehtäviä harjoituksia. Harjoituksia löytyy neljästä aihealueesta: värisauvojen väreihin tutustuminen, vertailua suuruuden mukaan, lukukäsityksen valmennuksesta ja laskutoimituksista. Tämä harjoituskokoelma löytyy sähköisessä muodossa osoitteesta http://solmu.math.helsinki.fi/2003/un kari/varisauvoja/varisauvoja.pdf.

5.4.2 Oppimisympäristöjä ja -pelejä

Matikkamaan mattoteline

MATTOTELINE eli "MATematiikkaan TOiminnallisuudella ja TEknologialla LIsää Näppäriä Eriyttämismahdollisuuksia" –oppimisympäristö on Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön tukema matematiikan opetuksen kehittämishanke. Sen tarkoituksena on lisätä yläkoulun matematiikan opetuksessa toiminnallisuutta erilaisten välineiden avulla ja teknologian käyttöä sekä saada opettajat irtautumaan oppikirjasta. Ympäristö on suunnattu yläkouluun vuosiluokille 7-9.

Mattotelineestä löytyy viisi erilaista mattoa: punainen matto, puuhamatto, muovimatto, pelimatto ja fakiirin matto. Punaiselle matolle on koottu tietoa matematiikan historiasta ja sen merkkihenkilöistä. Puuhamatto sen sijaan tarjoaa ilmais- ja toimisto-ohjelmien sekä iPad Appsien parissa puuhastelua. Muovimatolla pääset tekemään interaktiivisia tutkimustehtäviä sähköisillä että konkreettisilla toimintavälineillä. Pelimatolla oppilas voi testata omaa osaamistaan eri osa-alueilla lyhyitä pelejä pelaamalla. Fakiirin matolla oppilaat saavat itseään perinteisillä ja ajankohtaisilla ongelmatehtävillä, jotka voivat olla sanallisia tehtäviä, tikkuongelmilla tai pulmaleluja rakentamalla. Mattoteline löytyy osoitteesta http://www.mattoteline.fi.

GeoGebra

GeoGebra on dynaaminen matematiikkaohjelma, jolla voidaan työskennellä geometrian, algebran, analyysin ja taulukkolaskennan alueilla tietokoneen avulla. Sen avulla voidaan tarkastella matematiikan objekteja kolmella eri tavalla: piirtoalueessa graafisesti (pisteet, käyrät, kuviot), numeerisesti algebraikkunassa (koordinaatit, yhtälöt) ja laskentataulukkona taulukkolaskennan soluissa. Ohjelman dynaamisuus viittaa siihen, että jos objektin jotain esitystä muuttaa, muuttaa se myös muita esityksiä. (Hohenwarter & Hohenwarter 2010, 7.) GebGebra ohjelma on täysin ilmainen. Ohjelma voi käyttää suoraan Internetissä (Geogebra webstart) tai sen voi ladata omalle koneelle ohjelman kotisivuilta osoitteesta www.geogebra.org. Ohjelmasta löytyy yleinen versio sekä helpotettu ja hieman karsittu versio alakouluopetukseen. Osoitteesta http://geogebra.fi/oppaita.html löytyy oppaita ohjelman käyttämiseen. GeoGebratube on sivusto, jossa voi jakaa omia materiaaleja, mutta myös löytyy valmiita sovelluksia, joka löytyy osoitteesta http://www.geogebratube.org/.

Netti moppi

Netti moppi on Mikrolinna Oy maksullinen tietokoneella pelattava pelinomainen ja päättelykykyä kehittävä seikkailuohjelma, josta löytyy noin 5500 motivoivaa ja opetussuunnitelman mukaista matematiikan harjoitusta. Netti mopista löytyy sopivia tehtäviä sekä esikouluun että alakoulun luokille 1–6. Tehtävistä löytyy jokaiselle laskijalle sopivaa tekemistä, sillä siellä on sekä helppoja perustehtäviä että haastavia tehtäviä ja oppilas saa edetä oman tahdin mukaan. Netti mopista löytyy myös kertotauluja tehokkaasti harjoittava osio. Netti mopissa on myös koe-osio, jossa opettaja voi tehdä sähköisen kokeen, jonka ohjelma tarkistaa. Lisätietoa ohjelmasta ja sen hankkimisesta omalle koululle saat osoitteesta http://www.mikrolinna.fi.

Sumdog

Sumdog on tietokoneella pelattava englanninkielinen oppimisympäristö, josta löytyy 27 erilaista matematiikkapeliä. Lähes kaikki näistä peleistä ovat ilmaisia, vain kolme uusinta peliä on maksullisia. Pelien animaatiot ovat hyvin tehtyjä ja monipuolisia. Pelien tehtävät liittyvät alakoulun peruslaskutaitojen ja päässälaskun hallintaan. Peleissä harjoitetaan seuraavia aihealueista: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, murto- ja desimaalilukuja, lukujen pyöristystehtäviä, lukujonotehtäviä sekä ongelmanratkaisua. (Räsänen 2014.)

Pelien ideana on, että oppilas saa kuhunkin tehtävään neljä vastausvaihtoehtoa, joihin hänen tulisi vastata oikean. Peli antaa välitöntä palautetta oppilaan osaamisesta: jos vastaat väärin, näyttää ohjelma heti oikean vastauksen. Vastauksilla on vaikutusta myös peliruudun tapahtumiin, sillä esimerkiksi ajopelissä vääristä vastauksista auton vauhti alkaa hidastua tai auto alkaa pomppia, ja vastaavasti oikeista vastauksista auton vauhti kiihtyy.

Peli aloitetaan aina alimmalta tasolta ja oppilas pääsee etenemään seuraaville tasoille, mikäli on saanut oikeilla suorituksillaan hankittua riittävästi kolikoita. Peliä pelataan itse valitsemalla hahmolla, jonka ulkonäköä voi itse muuttaa. Sumdogin peleissä on myös vuorovaikutteinen pelaaminen mahdollista. Oppilaat voivat pelata luokkatovereitaan vastaan, jos koko luokka kirjautuu pelaamaan, tai muita peliä samanaikaisesti käyttävien henkilöiden kanssa ympäri maailman. Opettaja voi valita, minkä osa-alueen tehtäviä oppilaat milloinkin tekevät. Hän voi myös estää tietyn aihealueen tehtävät, jos ne ovat oppilaille vielä uusia. (Räsänen 2014.)

Pelin käyttöönotto on yksinkertaista omalle koululle tai luokalle. Opettaja rekisteröityy ensin ohjelman käyttäjäksi, etsii oman koulunsa ja lisää oman luokkansa sinne. Sen jälkeen hän luo jokaiselle oppilaalle henkilökohtaisen käyttäjätunnuksen ja salasanan, joilla oppilas pääsee kirjautumaan peleihin. Oppilas voi pelata Sumdogin pelejä myös vapaa-ajallaan kotona. (Räsänen 2014.) Sumdogin pelit löytyvät osoitteesta http://www.sumdog. com.

Ekapeli-matikka

Ekapeli-matikka on Ekapeli tuoteperheeseen kuuluva tietokoneella pelattava peli. Se soveltuu esi- ja alkuopetuksen käyttöön, erityisesti niille oppilaille, joilla matematiikan oppiminen on haasteellista. Ekapeli-matikassa voidaan harjoittaa seuraavia osa-alueita: yksi-yhteen vastaavuutta, vertailua, järjestämistä, lukusanan, -määrän ja numerosymbolin vastaavuutta sekä lukujono- ja yhteenlaskutaitoja.

Ekapeli-matikka on ilmainen ohjelma. Sitä voi käyttää ilman rekisteröitymistä tai rekisteröitymällä. Rekisteröitynä käyttäjänä pelaajien tiedot ja pelitilanteet ovat käytettävissä aina peliin kirjauduttaessa. Opettajan tulee kuitenkin aina ilmoittautua Ekapeli-matikan käyttäjäksi sähköisellä lomakkeella, jolla hän hyväksyy Ekapelipalvelun käyttöehdot. Tämän voi tehdä Ekapelipalvelimella osoitteessa https://ekapeli.lukimat.fi/ tai pelin kautta. Opettaja saa sähköpostiin käyttäjätunnuksen sekä ohjeet salasanan asentamiseen ja pelin lataamiseen. Tarkempia ohjeita ilmoittautumiseen, pelin käyttöönottoon ja pelaamiseen löytyy Ekapeli-Matikka -Oppaasta, joka löytyy seuraavasta osoitteesta http://www.lukimat.fi/matematiikka/materiaalit/Tietokoneohjelmat/LukiMat-ohjelmat/ekapeli-matikka/ekapeli-matikan-peliohje.

Neure

Neure-tietokoneohjelmisto on Niilo Mäki -instituutin kehittämä oppimisympäristö, jota ylläpitää Niilo Mäki -instituutti ja opetushallitus. Se on tarkoitettu oppilaiden kehityksellisten häiriöiden ja oppimisvaikeuksien tutkimukseen, arviointiin ja kuntoutukseen. Neure sisältää kolmenlaisia tehtäviä: harjoitteita matematiikkaan, arviointitehtäviä matematiikkaan ja harjoitteita lukemisen perusteiden harjoitteluun. Tällä hetkellä Neure sisältää jo yli 300 yksittäistä harjoitetta.

Neure-ohjelmisto toimii Internet-selaimessa java-lisäohjelman avulla. Neure-materiaalit ovat vapaasti kaikkien käytettävissä, kun olet rekisteröitynyt ohjelmiston käyttäjäksi. Kun opettaja on rekisteröitynyt palveluun, luo hän oppilasryhmänsä ja lisää sinne valitsemansa oppilaat, joille hän antaa oman tunnuksen ja salasanan. Oppilas voi kirjautua tunnuksillaan Neureen ja tehdä harjoituksia sekä koulussa että kotona. Neuren tehtäväkirjastosta opettaja jakaa oppilasryhmälleen tai yksittäiselle oppilaalle sopivia tehtäviä, joten oppilas ei näe muita ympäristön tehtäviä. Opettaja voi omalla tunnuksellaan käydä tarkistamssa, mitä tehtäviä oppilaat ovat tehneet. Arviointitehtävistä opettaja voi seurata oppilaan suoriutumista tulosten analysointiosiossa. Neure-ohjelmiston ja lisätietoa siitä löydät osoitteesta http://www.lukimat.fi/matematiikka/materia alit/Tietokoneohjelmat/neure.

Numerorata

Numerorata on suomenkielinen versio La Course aux Nombres -nimisestä tietokonepelistä, joka on suunniteltu kehittämään lukumääräisyyden tajua. Se vahvistaa siis lapsen lukumääräisyyden ymmärrystä lukualueella 1-10, lukujonotaitoja, lukumäärien ja numerosymboleiden vastaavuutta sekä yhteen- ja vähennyslaskutaitoja. Numerorata on suunnattu ensisijaisesti 5–8 -vuotiaille lapsille, joilla on havaittu olevan matematiikan oppimisvaikeuksia.

Numerorata-pelin vaikeustaso mukautuu kolmella tavalla. Näitä ovat kahden esitetyn lukumäärän välinen etäisyys toisistaan, sillä lapselle on haasteellisempaa erottaa kahdesta toisiaan lähellä olevasta lukumäärästä suurempi, vastauksen antamiseen käytettävä aika sekä lukumäärän esitysmuoto. Aikaa rajoittamalla pyritään taas kehittämään taitojen automatisoitumista, joka tarkoittaa, että lapsen vastaamiseen käyttämä aika lyhenee harjoittelun myötä. Peli pyrkii vaihtelemaan lukumäärien esitysmuotoja lapsen tason mukaan: konkreettiset lukumäärät (kultarahat tai kookospähkinät), symbolit eli numeromerkein esitetyt lukumäärät sekä näiden yhdistelmät, kirjoitetussa ja verbaalisessa muodossa esitetyt lukumäärät ja myöhemmin peli esittää lukumääriä yhteen- ja vähennyslaskulausekkeina. Vaihtamalla lukumäärien esitystapoja pyritään vahvistamaan lapselle eri mallien yhteyttä toisiinsa sekä kykyä ymmärtää aritmeettisia periaatteita.

Numerorata-peli on kätevästi ladattavissa osoitteesta http://www.lukimat.fi/matematiikka/materiaalit/Tietokoneohjelmat/numero rata/lataa. Ensimmäisellä pelikerralla opettaja lisää oppilaat pelin tiedostoon nimellä, jonka tulee olla ainutkertainen, jotta peli tunnistaa aina, kuka on pelaamassa. Tämä on todella tärkeää, sillä pelaajan taitotaso tallentuu peliin ja se taas vaikuttaa siihen, kuinka vaikeita lukumääriä peli esittää pelaajalle. Pelaajia voi lisätä peliin lisää myöhemmin. Tarkemmat ohjeet pelaajien lisäämiseen, kuinka voit ladata sen omalle koneellesi ja kuinka peliä yleensä pelataan, löytyy Numeroratapelin oppaasta, joka löytyy osoitteesta http://www.lukimat.fi/mat ematiikka/materiaalit/Tietokoneohjelmat/LukiMatohjelmat/numerorata/peli ohjeet.

5.4.3 Internetsivustoja

Opperi

Opperin-internetsivusto (www.opperi.fi) on Hannele Ikäheimon ylläpitämä matematiikan opetukseen liittyvä sivusto. Sieltä löytyy monipuolisia opetusvinkkejä, tietoa erilaisista matematiikan välineistä, peleistä ja kirjallisuudesta. Tämän lisäksi siellä on tietoa erilaisista matematiikan opetukseen liittyvistä koulutuksista.

Matikkamaa

Matikkamaa on pedagoginen keskus, jonka tavoitteena on kehittää matematiikan opetusta aina esiopetuksesta lukioon. Kehitystyötä tehdään yhdessä opettajien kanssa. Tavoitteena on kehittää keinoja konkreettiseen ja toiminnalliseen matematiikan opetukseen. Matikkamaa toimii Suomessa kymmenellä eri paikkakunnalla. Jokaisella Matikkamaalla on omat Internetsivustot, joista löytyy ajankohtaista tietoa, koulutustietoa, erilaisia hankkeita, vinkkejä tabletilla käytettäviin matematiikan appseihin sekä paljon muuta tietoa liittyen toiminnallisen matematiikan opetukseen.

Näppituntuma

Näppituntuma-Internetsivusto (www.edu.fi/nappituntuma) on opetushallituksen ylläpitämä sivusto, jonka tarkoituksena on tarjota toiminnallista opetusmateriaalia alkuopetuksen matematiikan opetukseen. Matematiikan opiskelu on jaettu eri teemajaksoisin Näppituntumassa. Näppituntuman aineistot ovat tulostettavissa sivustolta PDF-muodossa.

Toiminnallisen Näppituntumamateriaalin tukena opettaja käyttää erilaisia ongelmanratkaisutehtäviä, logiikka- ja kombinatoriikanharjoituksia, yksinkertaista tilastomatematiikkaa sekä soveltavia tehtäviä. Toiminnallisten tehtävien jälkeen opettaja voi käyttää opetettavaan aihepiiriin sopivia tehtäviä haluamistaan oppimateriaaleista.

Tutkiva matematiikka

Jyväskylän yliopistossa opettajakoulutuslaitoksella matematiikan aineenopettajien opetusharjoitteluiden yhteydessä on toteutettu tutkivan matematiikan tunteja FT Markun Hähkiöniemen johdolla. Näiden oppituntien tuntisuunnitelmat on suunniteltu huolella Hähkiöniemen ohjauksessa ja ne on koostettu yhteen Tutkivan matematiikan tuntisuunnitelmat -sivulle, joka löytyy osoitteesta http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat/. Nämä tutkivan matematiikan tunnit on suunniteltu perusopetuksen vuosiluokille 7–9 sekä lukion pitkän- ja lyhyen matematiikan opetukseen.

6 TOIMINNALLISEN MATEMATIIKAN MAHDOLLISUUKSIA ETSIMÄSSÄ

Olen etsinyt tässä tutkimuksessa matematiikan opetuksen ja oppimisen uudistamiseen mahdollisuuksia toiminnallisesta matematiikasta. Ymmärrän toiminnallisen matematiikan opetuksen kaikkena muuna opetustoimintana kuin pelkkänä opettajajohtoisena oppikirjasidonnaisena opettamisena. Siihen tulisi sisältyä vuorovaikutusta, leikkimistä, pelaamista, välineillä toimimista, kokemuksellisuutta, omaa ideoimista ja pohtimista sekä useita aistikanavia hyödyntävää toimintaa (ks. luku 2). En poissulje tai vähenksy mitenkään opettajajohtoista matematiikan opetustamenetelmää, mutta haluni uudistaa matematiikan opetusta ja oppimista nousi henkilökohtaisesta tunteesta, että koin opettajajohtoisen opettamisen turhauttavaksi ja tylsäksi, jos kaikki oppisisällöt opetettaisiin opettajajohtoisesti. Tiedostan myös, että matematiikan opetus ei voi pelkästään olla toiminnallista, sillä oppilaalle tulee opettaa myös symbolista matematiikkaa ja hänen tulee harjaannuttaa omia laskutaitojaan.

Mitä hyötyä on opettaa matematiikkaa toiminnallisten työtapojen avulla?

Toiminnalliset työtavat ovat yksi tapa toteuttaa matematiikan opetusta, joten niihin kuten mihin tahansa muuhunkin menetelmään löytyy etujen lisäksi myös haasteita. Olen koonnut taulukkoon 4 toiminnallisten työtapojen käyttöön liittyviä etuja ja haasteita, jotka nousivat esiin koko tutkimusaineistostani.

Toiminnallisen matematiikan käytön merkittävimmäksi hyödyksi nousi haastattelemieni opettajien mukaan tavoite saavuttaa oppilaille ja opiskelijoille laaja syvällinen ymmärrys matematiikasta (ks. luku 5.1.1) Tärkeänä osana syvällistä ymmärtämistä nähdään matemaattisten käsitteiden hallinta ja niiden hierarkkisuuden ymmärtäminen. Syvällistä ymmärrystä saavutetaan, kun opetuksella onnistutaan luomaan merkityksiä sekä linkittämään opittavia asioita arkielämään. Jos tällaisiin tavoitteisiin toiminnallisella matematiikan päästään, näkyvät ne väistämättä tutkimuksissa kohonneena matematiikan osaamisena.

TAULUKKO 4. Opettajien käsityksiä toiminnallisten työtapojen käytön eduista ja haasteista matematiikan opetuksessa.

Käytön etuja	Käytön haasteita	Vaatii opettajalta
Syvällinen ymmärrys	Välineiden saatavuus	Materiaalin tekeminen
Aktiivinen oppilas	Dokumentointi	Uskallusta
Vuorovaikutus	Aika	
Kokemuksien saaminen	Koulukulttuuri	
Yksilöllisyyden huomioiminen	Oppimisympäristö	
Mielekkyys		
Konkretisointi		
Välitön palaute		
Elämää varten oppiminen		
Oppiaineiden integrointi		

Toiminnallisen matematiikan käytön yhtenä etuna oli se, että oppilaasta saadaan aktiivinen toimija, joka voi itse oivaltaa ja tutkia (ks. luku 5.1.1). Tämä on merkittävä positiivinen muutos matematiikan opetukselle, sillä Suomessa matematiikan opetus on pitkälti opettajajohtoista, jolloin lapsi toimii väistämättä passiivisena ja hän roolinsa on vain vastaanottaa uutta tietoa (Tikkanen 2005, 101–102). Toiminnallinen matematiikan opetus vastaa siis myös vallalla olevan konstruktivistisen oppimiskäsityksen näkemyksiä oppilaan aktiivisesta roolista oman oppimisensa edistäjänä (ks. esim. Brotherus ym. 2002, 73; Ikäheimo 1995, 14; Opetushallitus 2004, 18). Myös vuonna 2016 voimaan tuleva perusopetuksen opetussuunnitelma korostaa voimakkaasti oppilaan aktiivista roolia oppimisessa (Opetushallitus 2014, 14–15).

Vuorovaikutuksen lisääminen opetuksessa nähdään tärkeäksi tämän päivän koulumaailmassa (Opetushallitus 2014; 2004). Toiminnallisen matematiikan koetaankin lisäävän monipuolista vuorovaikutusta matematiikan opiskelussa (ks. luku 5.1.1). Jos matematiikan ongelmia ratkaistaan yhdessä, tutustuvat lapset yhden ratkaisumahdollisuuden sijaan useisiin erilaisiin ratkaisustrategioihin samaan lopputulokseen pääsemiseksi. Erilaisista ratkaisustrategioista keskustelu ja mahdollisesti myös väittely luokkatovereiden kanssa kehittää matemaattisen ajattelun kielentämistä eli matematiikasta puhumista. Ongelmien ratkaiseminen yhdessä keskustellen toisten lasten kanssa kehittää myös oppilaiden sosiaalisia taitoja. (Tikkanen 2008, 93.) Näin ollen toiminnallisen matematiikka kehittä monia elämän kannalta merkittäviä osa-alueita, joita yksin oppikirjan tehtäviä laskemalla ei voi harjaannuttaa.

Huono kouluviihtyvyys on merkittävä ongelma nykypäivänä suomalaisissa kouluissa (Currie ym. 2012, 46–48). Linnanmäen (2004, 241) tutkimusten mukaan matematiikassa menestyminen on oppilaille muita oppiaineita tärkeämpää, jolloin matematiikassa menestyminen on yksi tekijä oppilaan koulunkäynnin määrittäjänä ja siellä viihtymisessä. Opettajien kokemusten mukaan toiminnallisen matematiikan tunneilla oppilaat vaikuttavat innostuneemmilta ja kiinnostuneemmilta opiskelemaan matematiikkaa. Toiminnallisten menetelmien kautta opiskeluun on saatu myös paljon iloa. (ks. luku 5.1.2) Nämä tekijät eivät voi olla vaikuttamatta myönteisesti oppilaan käsitykseen itsestään matematiikan oppijana sekä siinä menestymiseen ja lopulta myös koulussa viihtymiseen.

Toiminnallisen matematiikan toteuttamiseen liittyvät haasteet ovat sekä materiaalisia että opettajaan itseensä kohdistuvia. Välineiden saatavuus hinnan näkökulmasta on tietysti merkittävä, sillä ostettavat välineet ovat kalliita ja koulujen rahat tiukoilla. Toiminnallista matematiikkaa voidaan kuitenkin toteuttaa vähemmälläkin määrällä välineitä, jolloin jo parilla paketilla välineitä osa oppilaista voi tehdä harjoitteita yhdellä tunneilla ja toiset taas seuraavalla tunneilla. Toiminnallista matematiikkaa voidaan toteuttaa myös monipuolisesti ei-matematiikkaan suunnatuilla välineillä kuten helmillä, napeilla ja ruudukoilla. Opettajan oman uskaltamisen ja koulukulttuurien muutos lähtee pienin askelin oman opettamisen toiminnasta. Suomessa järjestetään paljon hyviä koulutuksia, sekä on yhteisöjä, joista saa apua ja vertaistukea.

Tutkimuksen lopuksi

Tutkimukseni teon yhteyessä heräsi myös jatkotutkimusaiheita. Tämä tutkimus keskittyi pelkästää opettajan näkökulmaan toiminnallisesta matematiikasta. Se on kuitenkin vain yksi osa koko totuudesta. Toiminnallista matematiikkaa tutkittessa tutkimusnäkökulma tulisi kohdistaa myös oppilaisiin. Opettajat voivat toki arvailla oppilaiden ajatuksia ja käsityksiä toiminnallisesta matematiikasta sitä opettaessaan, mutta hedelmällistä olisi tutkia itse oppilaita ja selvittää heidän käsityksiään aiheesta. Oppilailta voidaan selvittää, miltä toiminnallinen matematiikan opiskelu opiskelumenetelmänä tuntuu opettajajohtoiseen opetukseen verrattuna ja onko matematiikan opiskelu mielekkäänpää toiminnallisia menetelmiä käytettäessä.

Opettajajohtoisen ja toiminnallisen matematiikan opetuksen tuloksia voitaisiin myös vertailla. Tällöin tutkimuksen toteutuksen ideana olisi, että opetetaan kahdelle samanikäiselle oppilasryhmälle samaa aihealuetta käyttäen erimenetelmiä. Ensimmäisen ryhmän opetus tapahtuisi kokonaan opettajakotoisesti ja toisen opetus toiminnallisia menetelmiä hyödyntäen. Opetusjakson päätteeksi testataisiin ryhmien osaamista ja vertaillaan testissa saamia tuloksia ryhmien välillä.

Tämä tutkimus on yksi vaihe opettajuuteni kasvuprosessissa. Olen saanut tätä tehdessäni lisää teoreettista tietämystä matematiikan opettamisesta ja oppimisesta. Olen peilannut tätä tietoa sekä tutkimuksessani saamiani tuloksia kokemuksiini, joita minulla tällä hetkellä on matematiikan opettamisesta. Koko tutkimusprosessin ajan olen myös reflektoinut omaa matematiikan opettajuuttani, jolloin olen havainnut sekä puutteitani että vahvuuksiani. Niitä tiedostamalla ja kehittämällä pystyn saavuttamaan itsessäni ammatillista kasvua. Olen saanut myös valtavasti ideoita haastattelemiltani opettajilta että omakohtaisesta teoriaan perehtymisestä toiminnallisen matematiikan opetuksen toteuttamiseen. Tämän lisäksi minulla on nyt koottuna aineistoa, mistä voin lähteä etsimään vielä lisää ideoita ja toimintamalleja matematiikan toiminnalliseen opettamiseen. Kokonaisuudessaan tutkimusmatkani on antanut minulle lisää eväitä selviytyä matematiikan opettajan työstäni.

LÄHTEET

Ahonen, S. 1994. Fenomenografinen tutkimus. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen & S. Saari (toim.) Laadullisen tutkimuksen työtapoja. Helsinki: Kirjayhtymä Oy, 113–160.

Aunio, P. Hannula, M. & Räsänen, P. 2004. Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 198–221.

Brotherus, A., Hytönen, J. & Krokfors, L. 2002. Esi- ja alkuopetuksen didaktiikkaa. Helsinki: WSOY.

Bruner, J. 1988. The course of cognitive growth. Teoksessa K. Richardson & S. Sheldon (toim.) Cognitive development to adolescence. Open University Set Book. Psychology Press, 33–60. Tulostettu 2.1.1015 http://books.google.com/books?hl=fi&lr=&id=I1Ih5vxvX0oC&oi=fnd&pg=PT45&dq=Bruner+enactive,++iconic,++symbolic&ots=txAyr0qUPC&sig=sgltPhEuErLgTK8sjUcLK3ySHZc.

Bryant, P. 1996. Children and arithmetic. Teoksessa Smith, L. (toim.) Critical reading on Piaget. London: Routledge, 312-346.

Burton, L. 1984. Mathematical thinking: the struggle for meaning. Journal for Research in Mathematics Education 15 (1), 35–49.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, B. 1992. Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. American Educational Research Journal 29 (3), 573–604.

Currie, C., Zanotti C., Morgan, A., Currie, D., de Looze, M., Roberts, C., Samdal, O., Smith O. R. F. & Barnekow, V. (toim.) 2012. Social determinants of health and well-being among young people. Health behaviorin school-aged children (HBSC) study: international report from the 2009/2010 survey. Copenhagen: WHO regional office for Europe. Tulostettu 16.10.2014

http://www.euro.who.int/__data/assets/pdf_file/0003/163857/Social-determinants-of-health-and-well-being-among-young-people.pdf

Dienes, Z. P. 1973. The six stages in the process of learning mathematics. Windsor: NFER.

Domino, J. 2010. The effects of physical manipulatives on achievement in mathematics in grades K-6: a meta-analysis. New York: ProQuest LLC.

Edmunds, F. 1984. Käytännön steinerpedagogiikka. Lapsen kasvu ja kasvatus. Helsinki: Otava.

Edwards, J. 2001. Women in American education: The female force & educational reform. Westport: Greenwood Press.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Flanagan, F. 2005. Greatest educators ever. New York: Continuum International Publishing Group.

Fontana, A. & Frey, J. H. 2000. The interview. From structured questions to negotiated text. Teoksessa N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (toim.) Handbook of qualitative research. 2. painos. Thousand Oaks: Sage, 645–672.

Goos, M. 2004. Learning mathematics in a classroom community of inquiry. Journal for Research in Mathematics Education 35 (4), 258–291.

Haapasalo, L. 1995. Konstruktivismi matemaattisen käsitteenmuodostuksen ohjaamisessa ja analysoimisessa. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen L. 2005. Tutkiva oppiminen. Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä. Helsinki: WSOY.

Hayes, M. & Höynälänmaa K. 1985. Montessoripedagogiikkaa. Helsinki: Otava.

Hartshorn, R. & Boren, S. 1990. Experiential learning of mathematics: Using manipulatives. Eric ED 321967. Tulostettu 5.11.2013

http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED321967.pdf

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2009. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 2008. Tutkimushaastattelu. Teemahaastattelun teoria ja käytäntö. Helsinki: Yliopistopaino.

Hohenwarten, M. & Hohenwarten, J. 2010. GeoGebra-opas: Virallinen käsikirja 3.2 RC1. Suom. T. Hinkula, H. Korhonen, J. Leino & K. Malinen. Tulostettu 17.10.2013

http://geogebra.fi/artikkelit/2010-11-12_docufi32.pdf

Hytti, P. 2007. Mielikuvituksella mielekkyyttä matematiikkaan – Tarinankerronta matematiikan opetusmetodina perusopetuksessa. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteen laitos. Pro gradu –tutkielma.

Hähkiöniemi, M. 2011. GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa – Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta. Tulostettu 3.10.2013 https://jyx.jyu.fi/dspace/handle/123456789/37131

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. 2010. Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M. Asikainen, P. E. Hirvonen, & K. Sormunen (toim.) Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.–23.10.2009. Joensuu: Itä-Suomen yliopisto, 59–75.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. 2011. Do GeoGebra-solutions need to be justified? Teachers' levels of guidance. Teoksessa Ubuz, B. (toim.) Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education ,. Ankara: PME, 309.

Häkkinen, K. 1996. Fenomenografisen tutkimuksen juuria etsimässä. Teoreettinen katsaus fenomenografisen tutkimuksen lähtökohtiin. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 21.

Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo H. 2011. KYMPPI-kartoitus: 10-järjestelmän hallinnan kartoitus. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo H. 2012. KYMPPI-kirja: matematiikan osaamisen perusta vahvaksi 10-järjestelmällä. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 1997. Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H. & Voutilainen E. 2009. Murtolukuja välineillä luokille 3–9. Helsinki: WSOY.

Joutsenlahti, J. 2005a. "Languaging" mathematics: What is it? Why do we need languaging? Tulostettu 19.09.2013

http://www.joutsenlahti.net/English2.html

Joutsenlahti, J. 2005b. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen osaamisen piirteitä: 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Acta Universitatitis Tamperensis 1061.

Järvinen, A. 1990. Reflektiivisen ajattelun kehittyminen opettajankoulutuksen aikana. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 35.

Kahanpää, L. 2001. Taustakuvia – Matematiikkaa alkuopettajille. Tulostettu 17.7.2013

http://solmu.math.helsinki.fi/2001/unkari/kahanpaa.pdf

Kahanpää, L. 2005. Unkarilaista matematiikkaako? Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 66–73.

Kajetski, T. & Salminen, M. (2009) Matikasta moneksi. Toiminnallista matematiikkaa varhaiskasvatuksesta esiopetukseen. Helsinki: Lasten keskus.

Kairavuo, K. & Voutilainen, E. 2005. Matematiikkaa värisauvoilla luokille 6–9. Helsinki: WSOY.

Kilpartick, J., Swafford, J. & Findell, B. 2001. Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington: National Academy Press. Viitattu 4.6.2014

http://site.ebrary.com.ezproxy.jyu.fi/lib/jyvaskyla/docDetail.action?docID=10038695

Kolb, D. A. 1984. Experiential learning. Experience as The source of learning and development. Engelwood Cliffs: Prentice-Hall.

Koponen, R. 1995. Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille. Jyväskylä: Atena.

Korpinen, E. 2005. Oppilaan minäkäsityksen ja itsetunnon kehittäminen pedagogiikan haasteena: Miten "unkarilainen matematiikka" – Varga-metodi vastaa haasteeseen? Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 152–165.

Korpinen, E. 1990. Peruskoululaisen minäkäsitys. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteen tutkimuslaitos. Julkaisusarja A. Tutkimuksia 34.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka E. & Vettenranta, J. 2013. PISA 2012 ensituloksia. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2013: 20. Tulostettu 15.10.2014

http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2013/liitteet/okm20.pdf?lang=fi

Kuula, A. 2006. Tutkimusetiikka. Aineistojen hankinta, käyttö ja säilytys. Tampere: Vastapaino.

Lampinen, A., Ikäheimo, H. & Dräger, M. 2007. MAVALKA 1 ja 2. Matematiikan valmiuksien kartoitus 1 ja 2. Helsinki: Multiprint Oy.

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. 2010. Opettajan tienviitta 2a. Varga-Neményi -yhdistys ry.

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. 2011a. Opettajan tienviitta 1a. 2. painos. Varga-Neményi -yhdistys ry.

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. 2011b. Opettajan tienviitta 1b. 2. painos. Varga-Neményi -yhdistys ry.

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. 2011d. Opettajan tienviitta 2b. Varga-Neményi -yhdistys ry.

Lillard, A. 2005. Montessori: The science behind the genius. Oxford: University Press.

Lindgren, S. 1998. Toiminnallista matematiikkaa luokanopettajille. Tampereen yliopiston opettajakoulutuksen opetusmoniste. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy.

Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla. Acta Universitatis Tamperensis A 307.

Linnanmäki, K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 241–254.

Malaty, G. 1998. Matemaattinen ajattelu ja matematiikan opetus. Teoksessa Opetus, oppiminen, vuorovaikutus. Julkunen, M. (toim.) 109–133. Helsinki: WSOY.

Matikainen, T., Kyyrä, A-M., Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2002a. Laskutaidon toimintapaketti 1. Opettajan opas. Kehitetty unkarilaisen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki: WSOY.

Matikainen, T., Kyyrä, A-M., Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2002b. Laskutaidon toimintapaketti 1. Kehitetty unkarilaisen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki: WSOY.

Metsämuuronen, J. 2008. Metodologia 4: Laadullisen tutkimuksen perusteet. 3. painos. Helsinki: International MethelpKy.

Montessori, M. 1936. Lapsen salaisuus. Helsinki: WSOY.

Moyer, P., Bolyard, J. & Spikell, M. 2002. What are virtual manipulatives? Teaching Children Mathematics 8 (6), 372–377.

Neményi, E. C. 2005. 4. luokan matematiikan rakenne. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 32–47.

Näätänen, M. 2000. Vaikutteita Unkarista matematiikan esi- ja alkuopetukseen. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Esiopetus. Nyt! Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 8, 114–119.

Näätänen, M & Matikainen, T. 2005. Unkarilaisen Varga-Neményi –menetelmän ja Suomessa tehtävän matematiikan alkuopetuskokeilun taustaa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 89–97.

Oikkonen, J. 2012. Toukokuun puheenaihe: Toiminnallisuutta matematiikan opetukseen. Tulostettu 17.7.2013

http://www.luma.fi/artikkelit/1215

Opetushallitus. 2003. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Helsinki: Opetushallitus. Tulostettu 14.10.2014

http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

Opetushallitus. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus. Tulostettu 17.7.2013

http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf

Opetushallitus. 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Tulostettu 15.10.2014

http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Oravecz, M. & Kivovics, Á. 2005. Matematiikan opetus Varga-menetelmällä Unkarissa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 22–31.

Parkkonen, H. 1997. Auta minua tekemään itse. Montessorimenetelmän sovelluksia. Helsinki: WSOY

Patrikainen, S. 2012. Luokanopettajan pedagoginen ajattelu ja toiminta matematiikan opetuksessa. Helsingin yliopisto. Käyttäytymistieteellinen tiedekunta. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 342.

Pehkonen, E.1995. Toiminnallista matematiikan opetusta peruskouluun! Dimensio 59, 44–46.

Pehkonen, E. 1997a. Etappi: toiminnallisia matematiikan tehtäviä peruskouluun. Helsinki: Edita.

Pehkonen, E. 1997b. Introduction to the concept ”open-ended problem”. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Use of open-ended problems on mathematics classroom. Helsingin yliopisto: Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 176, 7–11. sama kun korpinen 1990

Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus 31 (4), 375–381.

Pehkonen, E. 2003. Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. Tieteessä tapahtuu (6), 35–38.

Pehkonen, E. & Kaasila, R. 2008. Tehokkaan matematiikanopetuksen piirteitä. Dimensio (2), 37–40.

Piaget, J. 1988. Lapsi maailmansa rakentajana. Kuusi esseetä lapsen kehityksestä. Suom. S. Palmgren. Helsinki: WSOY.

Piaget, J. & Inhelder B. 1977. Lapsen psykologia. Suom. M. Rutanen. Jyväskylä: Gummerrus.

Pietilä, A. 2002. Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva. Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina. Helsinki: Yliopistopaino. Tulostettu 4.7.2014

http://ethesis.helsinki.fi/julkaisut/kas/opett/vk/pietila/

Reimer, K. & Moyer, P. 2005. Third-graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 24 (1), 2–15.

Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2004. Laskutaidon toimintapaketti 2. Opettajan opas. Kehitetty unkarilainen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki: WSOY.

Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2004. Laskutaidon toimintapaketti 2. Kehitetty unkarilainen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki: WSOY.

Räsänen, J. 2014. Sumdogin ilmaiset nettipelit koukuttavat laskemaan matematiikkaa. Tulostettu 17.10.2014

http://www.luma.fi/artikkelit/2715/sumdogin-ilmaiset-nettipelit-koukuttavat-laskemaan-matematiikkaa

Saaranen-Kauppinen, A & Puusniekka, A. 2009. Menetelmäopetuksen tietovaranto KvaliMOTV. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto. Tulostettu 6.1.2015 http://www.fsd.uta.fi/fi/julkaisut/motv_pdf/KvaliMOTV.pdf.

Sahlberg, P., Meisalo, V., Lavonen, J. & Kolari, M. 1994. Luova ongelmanratkaisu koulussa. Helsinki: Painatuskeskus.

Salminen, M. & Varamaa, M. 2009. Heureka!: oivaltavaa matematiikkaa esi- ja alkuopetukseen. Helsinki: WSOY.

Schiro, M. 2004. Oral storytelling and teaching mathematics – pedagogical and multicultural perspective. Thousand Oaks: Sage.

Tapiainen, T. 2011. Pii. Toiminnallista matematiikkaa. Helsinki: Otava.

Tikkanen, P. 2005. Miten Tytti voikaan kokea matematiikan opetuksen! Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 98–117.

Tikkanen, P. 2008. ”Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin”: Matematiikkaa suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 337.

Tikkanen, P. & Lampinen, A. 2005. Unkarilainen Varga-Neményi matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE. Tutkiva opettaja 2, 74–88.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2008. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. 8. uudistettu painos. Helsinki: Tammi.

Vainionpää, T., Mononen, R. & Räsänen, P. 2003. Matemaattiset valmiudet. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro, T. Ahonen & R. Ketonen (toim.) Joko se puhuu? Kielenkehityksen vaikeudet varhaislapsuudessa. Jyväskylä: PS-kustannus, 292–301.

Vygotski, L. S. 1982. Ajattelu ja kieli. Suom. K. Helkama & A. Koski-Jännes. Espoo: WeilinGöös.

Wass, S. 2003. Matematiikkaa unkarilaisilla laskusauvoilla. Helsinki: WSOY.

Wood, T. & Sellers, P. 1997. Deepening the analysis: Longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. Journal for Research in Mathematics Education 28 (2), 163–186.

Yrjönsuuri, R. & Yrjönsuuri Y. 1995. Matematiikan opiskelun ja opetuksen käsitteet. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 111–127.

LIITTEET

Liite 1. Haastattelun runko

1. **Taustaa**
   - Kauanko olet toiminut opettajana?
   - Millä luokilla olet opettanut?
   - Millainen on sinun koulutustaustasi?
   - Oletko käynyt täydennyskoulutuksissa toiminnalliseen matematiikkaan liittyen?

2. **Erilaiset toiminnalliset matematiikan opetusmenetelmät**
   - Minkälaisia toiminnallisia menetelmiä ja opetustapoja käytät/sovellat opetuksessasi? Anna esimerkkejä.
   - Minkälaisia konkreettisia toiminnallisia harjoitteita teette lasten kanssa tunneilla? Onko eroja luokka-asteittain? Anna esimerkkejä.
   - Miten toteutat toiminnallisia menetelmiä? (yksin, pareittain, pienissä ryhmissä, koko luokka yhdessä)
   - Minkälaisia apuvälineitä käytät? Ovatko apuvälineet ostettuja/itsetehtyjä? Anna esimerkkejä.
   - Miksi käytät välineitä?
   - Käytätkö pelejä ja leikkejä opetuksessasi? Mitä?
   - Hyödynnätkö tieto- ja viestintätekniikkaa toiminnallisessa matematiikan opetuksessa? GeoGebra? Aktiivitaulu? Tietokone? Oppimisympäristöt? Muuta? Mitä ja Miten?
   - Muita ajatuksia ja omia käsityksiä toiminnallisesta matematiikasta ja sen toteuttamisesta opetuksessa?

3. **Toiminnallisten menetelmien käytön tavoitteet**
   - Mikä on tavoitteena toiminnallisten menetelmien käytössä?
   - Pääsetkö tavoitteisiisi toiminnallisuuden kautta?

4. **Toiminnallisten menetelmien käytön esteet**
   - Mitkä tekijät estävät tai tuovat haasteita toiminnallisten menetelmien käyttöön?
   - Vaikuttaako opetettava asia toiminnallisuuden käyttöön?