

Laskusujuvuuden kehitys ja sukupuolierot
alkuopetuksen aikana

Tanja Sorsa & Saara Starczewski

Erityispedagogiikan pro gradu -tutkielma

Syyslukukausi 2018

Kasvatustieteiden laitos

Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Sorsa, Tanja & Starczewski, Saara. 2018. Laskusujuvuuden kehitys ja sukupuolierot alkuopetuksen aikana. Erityispedagogiikan pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden laitos. 81 sivua.

Laskusujuvuudella tarkoitetaan peruslaskutoimitusten, kuten yhteen- ja vähennyslaskujen, laskemista tarkasti ja nopeasti, mikä on keskeinen alkuopetuksessa opittava taito. Aikaisemmissa tutkimuksissa on tullut ilmi, että alkuopetuksessa opitut taidot ennustavat myöhempää matemaattista suoriutumista ja laskusujuvuutta. Laskusujuvuutta ja sen kehitystä on tutkittu varsin vähän verrattuna lukutaitoon ja sen kehitykseen, vaikka matematiikan taitojen on todettu ennakoivan myöhempää koulumenestystä lukutaitoa enemmän. Tämä tutkimus on tehty osana FLARE-hanketta (FLuency in Arithmetic REading), jossa seurattiin eräiden Keski-Suomen kuntien oppilaiden lasku- ja lukutaidon kehitystä alakoulussa. Tutkittavina oli 195 oppilasta, joiden yhteen- ja vähennyslaskutaitoja mitattiin kolmena eri mittausajankohtana: ensimmäisen luokan keväänä sekä toisen luokan syksynä ja keväänä. Jokaisena mittausajankohtana oppilaiden tavoitteena oli laskea kahden minuutin aikana yhteen- ja vähennyslaskuja mahdollisimman tarkasti ja nopeasti. Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli seurata laskusujuvuuden kehitystä alkuopetuksen aikana. Tutkimuksessa seurattiin erityisesti riskiryhmään kuuluvien lasten kehitystä. Katkaisurajana oli 25 persentiiliä. Lisäksi tutkittiin sukupuolieroja laskusujuvuudessa eri mittausajankohtina. Tulosten mukaan riskiryhmään kuuluvien oppilaiden yhteen- ja vähennyslaskusujuvuus erosivat ei-riskiryhmän laskusujuvuudesta ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä ei-riskiryhmän kehittyessä enemmän sekä yhteen- että vähennyslaskuissa. Ensimmäisen luokan keväänä riskiryhmä laski noin puolet vähemmän yhteenlaskuja kuin ei-riskiryhmä. Poikien lukumäärä ei eronnut tyttöjen lukumäärästä tilastollisesti merkitsevästi riskiryhmässä, mutta poikien osuus oli kuitenkin suurempi tyttöihin verrattuna, esimerkiksi toisen luokan keväänä riskiryhmään kuului 16 poikaa ja kahdeksan tyttöä. Pojilla oli siis kohonneempi riski olla riskiryhmässä yhteen- ja vähennyslaskusujuvuudessa. Riskiryhmän oppilaille oli hyvin erilaisia kehityspolkuja yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuden kehityksessä. Yhteenlaskutaidot olivat riskiryhmässä sujuvampia kuin vähennyslaskutaidot kaikkina mittausajankohtina. Laskusujuvuuden kehityksen seuranta ja sen haasteisiin puuttuminen varhaisessa vaiheessa on tarpeellista, sillä matematiikka on kumuloituva oppiaine, minkä takia vankka matemaattinen pohja on tärkeää. Lisäksi tutkimuksissa on todettu, että heikko laskusujuvuus ennakoii usein matemaattisia oppimisvaikeuksia.

Asiasanat: laskusujuvuus, alkuopetus, riskiryhmä, sukupuolierot, matematiikka

SISÄLTÖ

TIIVISTELMÄ

1	JOHDANTO.....	4
1.1	Matemaattiset taidot ja laskusujuvuus.....	7
1.1.1	Taitojen kehitys	7
1.1.2	Laskusujuvuus	9
1.1.3	Oppimisvaikeudet.....	12
1.1.4	Sukupuolierot.....	16
1.1.5	Tutkimuskysymykset	20
2	TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN	21
2.1	Tutkittavat	21
2.2	Mittarit	21
2.3	Aineiston analyysi.....	22
3	TULOKSET	23
3.1	Yhteenlaskusujuvuuden kehitys.....	23
3.2	Vähennyslaskusujuvuuden kehitys.....	32
3.3	Yksilölliset kehityspolut yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuden kehityksessä.....	38
3.4	Yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuserot riskiryhmässä.....	42
4	POHDINTA	44
4.1	Tulosten tarkastelua.....	44
4.2	Tutkimuksen arviointia ja jatkotutkimushaasteet	49
4.3	Käytännön merkitys.....	52
	LÄHTEET	58
	LIITTEET	78

1 JOHDANTO

Peruskoulun tavoitteena on varmistaa, että oppilaat saavat ne koulussa perusvalmiudet, jotka ovat tärkeitä arjen ja työelämän sekä jatkokoulutuksen takia (POPS, 2014). Matemaattisen osaamisen, kuten aritmeettisten taitojen nopean ja sujuvan hallinnan, tärkeys on osoitettu useissa eri tutkimuksissa nyky-yhteiskunnan vaatimusten kannalta (Rivera-Batiz, 1992; Rourke & Conway, 1997). Suomessa PISA-tutkimusten tulokset ovat kuitenkin olleet matematiikan osalta 2000-luvulla laskussa: vuonna 2003 Suomi oli vielä toisena kaikista tutkimukseen osallistuneista maista, kun taas vuonna 2012 Suomi oli vasta sijalla 18. Heikkojen matematiikan osaajien määrä Suomessa on noussut 7 prosentista 12 prosenttiin ja erinomaisten matematiikan osaajien määrä on laskenut 23 prosentista 15 prosenttiin. (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2013.)

Lukusujavuuteen ja lukivaikeuksiin verrattuna laskusujavuuteen ja sen kehitykseen liittyviä tutkimuksia on tehty Suomessa verraten vähän (Aunola, Leskinen, Lerkkanen, & Nurmi, 2004; Koponen, Salmi, Eklund, & Aro, 2013). Näin siitäkin huolimatta, että tutkimusten mukaan matematiikan taidot ensimmäisen luokan alkaessa ennakoivat myöhempää koulumenestystä lukutaitoa ja tarkkaavaisuutta enemmän (Duncan ym., 2007). Matematiikan taidot seitsemän vuoden iässä ennakoivat myöhempää sosioekonomista statusta enemmän kuin lapsuuden perheen sosioekonominen status (Ritchie & Bates, 2013). On osoitettu, että lasten laskemisen taidot jo esiopetuksessa ennustavat aritmeettisiä taitoja ensimmäisellä luokalla sekä matemaattista suoriutumista myöhemmin ylipäättään (Aunio & Niemivirta, 2010). Laskusujavuuden tukemiseen on kehitetty erilaisia interventioita (esim. McCallum, Skinner, Turner, & Saecker, 2006; Salminen, 2015). Laskusujavuuden kehityksestä on kuitenkin tehty suhteellisen vähän pitkittäistutkimusta, mikä olisi tärkeää erilaisten interventioiden ja tukimuotojen suunnittelun kannalta.

Hyvään matemaattiseen osaamiseen kuuluu laskemisen sujuvuus (Geary ym., 2009a; Geary, Hoard, Nugent, & Bailey, 2012b). Laskusujuvuuden ja matemaattisten taitojen kehitystä on tärkeää tutkia jo varhaisessa vaiheessa matemaatiikan taitotason pysyvyyden (Aunola ym., 2004) ja laskujärjestelmän kumuloituvan luonteen vuoksi (Fuchs ym., 2006). Toisin sanoen uudet opittavat asiat kumuloituvat aikaisemmin opittujen asioiden päälle. Peruslaskutaitojen hallinta nopeasti ja tarkasti on matematiikassa keskeistä, jotta voidaan siirtyä laskemaan haastavampia laskuja. (Fuchs ym., 2006.)

Tutkimuksien tulokset sukupuolen yhteydestä matemaattisiin taitoihin ovat olleet vaihtelevia: joissakin tutkimuksissa tyttöjen ja poikien väliltä ei ole löytynyt eroja (Aunola ym., 2004; Butterworth, 2005a; Paukkeri, Pakarinen, Lerkkanen, & Poikkeus, 2015), kun taas joissakin tutkimuksissa eroja on löytynyt poikien ollessa sujuvampia laskijoita toisella ja kolmannella luokalla (Väisänen & Aunio, 2016). Suomessa on kuitenkin havaittu, että tytöt pärjäisivät paremmin varhaisissa matemaattisissa taidoissa päiväkodissa sekä koulun alkaessa (Aunio, Hautamäki, Heiskari, & Van Luit, 2006) Kansainvälisissä TIMMS-tutkimuksissa (Trends in Mathematics and Science Study) on ollut vaihtelua matemaattisessa osaamisessa sukupuolten välillä Suomessa: Vuonna 2011 poikien ja tyttöjen pistemäärien ero oli 7 pistettä poikien ollessa tilastollisesti merkitsevästi parempia (Kupari, Sulkunen, Vettenranta, & Nissinen, 2012), kun taas vuonna 2015 tytöt olivat tilastollisesti merkitsevästi parempia poikiin nähden 9 pisteen pistemäärien erolla (Vettenranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka, & Rautopuro, 2016).

Erot heikkojen ja normaalisti suoriutuvien oppilaiden välillä ovat kuitenkin selkeät. On havaittu, että heikosti suoriutuvien ja normaalisti suoriutuvien välillä on matteusvaikutusta: kaikista heikoimmin suoriutuvat kehittyvät yhteen- ja vähennyslaskutaidoissa huomattavasti hitaammin ensimmäisen ja toisen kouluvuoden aikana kuin hyvin tai normaalisti suoriutuvat, joiden osaaminen taas kasvaa entisestään. (Paukkeri ym., 2015.) Tutkimuksissa on myös tullut selville, että heikoimpaan neljännekseen kuuluvien ja normaalisti suoriutuvien oppilaiden taitojen erot kasvavat vielä ajan myötä (Chong & Siegel, 2008).

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (POPS, 2014) laskutaidon sujuvuudessa edistyminen on mainittu yhtenä oppimisprosessin kannalta keskeisenä arvioinnin ja palautteen antamisen kohteena vuosiluokilla 1–2. Suomessa on käytössä kolmiportaisen tuen malli, minkä avulla pyritään auttamaan oppilaita, joilla on haasteita esimerkiksi laskusujuvuuden kehityksen kanssa (POPS, 2014).

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli tutkia yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuden kehitystä ja pysyvyyttä sekä sukupuolieroja alkuopetuksen aikana kolmena eri mittausajankohtana. Kohonneen riskin määrittelyssä on käytetty 25 persentiiliin katkaisurajaa, mitä on käytetty myös aikaisemmissa tutkimuksissa (Fuchs, Fuchs, & Prentice, 2004; Geary, 2004; Geary & Hoard, 2005). Tässä tutkimuksessa on keskitytty kuvaamaan erilaisia kehityspolkuja riskiryhmän ja ei-riskiryhmän välillä, lisäksi on tarkasteltu riskiryhmän oppilaiden kehityspolkuja yksilötasolla sekä yhteen- ja vähennyslaskutaitojen välisiä sujuvuuseroja riskiryhmässä. Tässä tutkimuksessa kohonneen riskin ryhmästä käytetään nimitystä riskiryhmä (<25 persentiiliä) ja alhaisen riskin ryhmästä nimitystä ei-riskiryhmä (>25 persentiiliä).

Tutkielman johdannossa käsitellään matemaattisia taitoja, erityisesti laskusujuvuutta, taitojen kehityksen sekä oppimisvaikeuksien näkökulmasta sekä sukupuolieroja. Teoriataustan jälkeen kerrotaan tutkimuksen toteuttamisesta, käytetyistä mittareista sekä aineiston analyysistä. Metodi-luvun jälkeen esitellään tutkimuksessa saadut tulokset laskusujuvuuden kehityksestä sekä yksilöllisistä kehityspoluista yhteen- ja vähennyslaskutaitojen osalta. Tutkielman lopuksi tarkastellaan saatuja tuloksia, arvioidaan tutkimusta sekä esitellään jatkotutkimushaasteet ja käytännön merkitys.

1.1 Matemaattiset taidot ja laskusujuvuus

1.1.1 Taitojen kehitys

Lapsella kehittyy ennen koulun aloitusta paljon erilaisia kognitiivisia toimintoja, jotka mahdollistavat myöhemmin opittavien monimutkaisempien matematiikan tehtävien hallinnan. Osa toiminnoista on synnynnäisiä. Jo muutaman kuukauden ikäinen vauva kykenee erottelamaan pieniä lukumääriä (Antell & Keating, 1983) tai ajatuksellisesti lisäämään tai poistamaan lukumäärästä yhden (Wynn, 1992). Lapsella on siis ennen varsinaisen laskutaidon ja numerojärjestelmän hallintaa synnynnäisiä kykyjä varhaisen lukumääräisyyden ymmärtämiseen (subitisaatio) (Gelman & Butterworth, 2005a). Feigenson, Dehaene ja Spelke (2004) ovat esittäneet varhaisen lukumääräisyyden ymmärtämisen ja käsittelyn jakautuvan kahteen eri järjestelmään: suuriin ja arvioon perustuvien määrien käsittelyyn sekä pienten ja tarkkojen lukumäärien käsittelyyn järjestelmään. Jo muutaman kuukauden ikäisten vauvojen uskotaan siis kykenevän erottelamaan esimerkiksi kahdeksan ja kuudentoista pisteet toisistaan.

Kahden vuoden iässä lapset ymmärtävät yksi yhteen -vastaavuuden tehtävässä, jossa jaetaan esineitä (Potter & Levy, 1968) sekä alkavat oppia lukusanojen järjestystä (Fuson, 1992). Kolmevuotiaat osaavat laskea pienen määrän esineitä sekä lisätä tai vähentää lukusanoilla tai esinejoukosta yhden esineen (Starkey & Gelman, 1982; Wynn, 1990). Samaan aikaan kehittyy myös kyky ymmärtää kardinalisuutta eli sitä, että esineitä on niin monta kuin viimeksi lueteltu lukusana (Gelman & Gallistel, 1978). 4–5-vuotias osaa käyttää sormia apunaan yhteenlaskussa sekä osaa laskea oikein 40 saakka (Fuson, 1988, Fuson & Kwon, 1992). Esi-kouluikäiset alkavat ymmärtää lukumäärän säilyvyyden periaatteita (Piaget, 1952) ja sen, että yhteen- ja vähennyslasku ovat toisiaan täydentäviä eli komplementaarisia toimintoja (Bryant, Christie, & Rendu, 1999). Seitsenvuotiaana lapsi osaa jo palauttaa joitakin aritmeettisiä faktoja muistista laskematta niitä ensin (Butterworth, 2005a).

Lapsi oppii monia erilaisia numeroihin ja laskemiseen liittyviä taitoja alkuopetukseen mennessä. Koulupolun alkaessa lapsi oppii numerosanat (yksi, kaksi, kolme jne.), tunnistamaan ja kirjoittamaan numerot (1, 2, 3 jne.), lausumaan luvut oikeassa järjestyksessä sekä tunnistamaan lukumääriä pienten esineiden muodossa. Viimeisenä opitaan perusaritmeettiset taidot eli yhteen-, vähennys-, kerto- sekä jakolaskut, erilaiset laskutoiminnot ja -järjestykset sekä oivalletaan aritmeettisiä lakeja (esim. $a+b = b+a$). (Butterworth, 2005a.) Matemaattisten taitojen kehittymisen yhteydessä on lisäksi huomioitava eri osa-alueiden hierarkkisuus eli uusi asia kehittyy jo aiemmin opitun kautta (Räsänen, 2012).

7–9-vuotiaana lapsi oppii suorittamaan yhteen- ja vähennyslaskuja. Yhteen- ja vähennyslaskutaitojen kehitys on jaettu eri vaiheisiin, jotka pitävät sisällään hallinnan sekä yksi- että kaksinumeroisilla luvuilla laskemisen ensin kymmenylityksen avulla ja sitten ilman kymmenylitystä (Dowker, 1998). Tällöin lapsi alkaa käyttää kolmea eri strategiaa laskujen ratkaisemiseen: sormilla laskeminen, ääneen laskeminen sekä suoraan muistista hakeminen (Ardila & Rosselli, 2002; Butterworth, 1999; Murata, 2004; Rusanen & Räsänen, 2012; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007). Ensimmäiseksi lapset laskevat yhteenlaskua aloittamalla laskemisen luvusta 1 alkaen edeten yhteenlaskun ensimmäiseen lukuun, jonka jälkeen varsinainen yhteenlasku lasketaan (Fuson, 1982; Geary, Hamson, & Hoard, 2000). Ajan myötä yhteenlaskemisen strategiat kehittyvät tehokkaammiksi siten, että lapsi aloittaa laskemisen ensimmäisestä tai suuremmasta luvusta (Geary ym., 2000). Vähennyslaskussa vastaavasti lapset laskevat ensin molemmat luvut. Myöhemmin vähennyslaskustrategiat kehittyvät joko niin, että lasketaan alaspäin (esim. 4-2, "kolme, kaksi") tai ylöspäin (esim. 4-2, "kolme, neljä") (Ostad, 1999).

Dekomposition eli laskun pilkkomisen pienempiin osiin katsotaan olevan sormilla ja ääneen luettelemista laskemista kehittyneempi laskustrategia (Baroody & Gannon, 1984; Geary, 1994). Hajotelmien oppiminen luo perustaa myös kymmeneen täydentämisen strategialle, jotka nopeuttavat ja lisäävät laskemisen tarkkuutta alkuopetuksessa (Koponen, 2012). Suora muistista hakeminen lisääntyy harjoittelun myötä ja lapset alkavat käyttää ja valikoida strategioita tilanteen

mukaan 7–8-vuotiaina (Barrouillet & Fayol, 1998; Clarke, Clarke, & Horne, 2006; Geary ym., 2000). Laskustrategioiden hyödyntäminen on kuitenkin yksilöllistä: toiset turvautuvat sormilla laskemiseen tavallista pidemmän aikaa. Lasten kehityserot aritmeettisissa taidoissa voivat olla hyvin suuria alkuopetuksen aikana (Dowker, 1998, 2015). Toisaalta koulun opetus muokkaa lasten aritmeettisten taitojen, kuten yhteen- ja vähennyslaskujen, kehitystä yhdenmukaisemmaksi (Geary, 1994). Erojen kaventumisen on havaittu lisääntyvän toiselta luokalta neljännelle luokalle, vaikka erot säilyvät yhä merkitsevinä (Paukkeri ym., 2015).

Yhteen- ja vähennyslaskutaitojen operaatioiden ymmärtäminen on tärkeää lapsen laskutaidon kehitykselle (Baroody & Lai, 2007). Laskustrategioiden lisäksi lasten on yhteen- ja vähennyslaskun yhteydessä ymmärrettävä inversion ja assosiatiiivisuuden merkitys. Inversio tarkoittaa, että yhteen- ja vähennyslasku ovat toisilleen käänteisiä toimintoja. Tällöin lapsi ymmärtää, että laskun ratkaisuun ei tarvita varsinaista laskemista (esim. $2+12-12$), jolloin ongelmanratkaisu on nopeaa ja tehokasta (Bisanz & LeFevre, 1990). Assosiatiiivisuudessa taas on kyse siitä, että yhteen- ja vähennyslaskut voidaan laskea missä tahansa järjestyksessä (esim. $3+12-10$), jolloin laskun toinen osa on mahdollista laskea ensin (Canobi & Bethune, 2008). Tällöin ongelmanratkaisu voi olla nopeampaa ja tarkempaa kuin laskemisen ratkaiseminen etenemällä perinteisesti vasemmalta oikealle. 2.–4. luokkalaisten välillä ei ollut juurikaan eroja näiden konseptien soveltamisessa yhteen- ja vähennyslaskuissa, mutta inversion käsite ymmärrettiin usein assosiatiiivisuutta paremmin (Robinson & Dubé, 2009).

1.1.2 Laskusujuvuus

Laskusujuvuudella tarkoitetaan kykyä ratkoa perusaritmeettisiä laskuja nopeasti ja tarkasti (Carr & Alexeev, 2011; Chong & Siegel, 2008; Geary, Fan & Bow-Thomas, 1992). Sujuvuuden kohdalla nopeutta on tutkittu muun muassa yksittäisen vastauksen antamisen kuluvan reaktioajan laskemisena (esim. Carr & Alexeev, 2011) ja laskemalla aikarajallisen testin oikeiden vastausten lukumäärä (esim. Chong & Siegel, 2008; Koponen ym., 2016; Martin ym., 2012). Toisinaan huomiota

on kiinnitetty myös virheiden määrään (Carr & Alexeev, 2011; Hakkarainen, Haring, Holopainen, Lappalainen, & Mäkihonko, 2014; Mazzocco, Devlin, & McKenney, 2008). Kaksostutkimusten avulla on saatu näyttöä, että laskemisen sujuvuus on aikarajoittamattomasta matematiikan osaamisesta erillinen taito, jolla on mahdollisesti geneettistä taustaa (Petriill, Logan, & Hart, 2012). Laskusujuvuus saattaa todennäköisesti siis olla geneettisesti erillinen osa-alue muista matematiikan osa-alueista.

Sujuvasta perusaritmeettisesta laskutaidosta on hyötyä erityisesti uusien ja monimutkaisempien matematiikan laskujen oppimisen kannalta, ja sillä on todettu olevan yhteyttä myöhempään matemaattiseen osaamiseen (Binder, 1996; Geary, 2011). Sujuvuutta pidetään myös yhtenä selittäjänä algoritmien hallinnalle (Fuchs ym., 2006). Sujuvuus on mahdollista saavuttaa toistuvilla laskuharjoituksilla, jotka ajan myötä johtavat perusaritmeettisten faktojen automaattiseen muistista hakemiseen ja muistamiseen (Baroody, 2006). Binderin (1996) mukaan laskutaidon sujuvuus auttaa muun muassa keskittymään tehtävään paremmin ja ehkäisemään häiriötekijöitä. Sujuvasta laskutaidosta on hyötyä erityisesti työmuistin kannalta, kun ongelmanratkaisuun vapautuu enemmän työmuistin resursseja (Vasilyeva, Laski, & Shen, 2015; Dehaene, 1997). Samalla matemaattisten laskujen ymmärtämiseen jää enemmän aikaa (Therrien, 2004). Vastaavasti lapset, joilla on sujuvuusongelmia laskutehtävien aikana joutuvat käyttämään enemmän kognitiivisia resursseja, kuten työmuistia ja tarkkaavaisuutta, jolloin ymmärtämiselle jää vähemmän resursseja. Tästä johtuen laskutaidon sujuvuusongelmat mielletään yhdeksi matemaattisten oppimisvaikeuksien ydinpiirteeksi. (Geary, 1996.)

Laskusujuvuuden kehitystä ja laskusujuvuuden ongelmia eritellessä on tutkimuksessa otettu huomioon kognitiivisen kehityksen tason yhteys laskusujuvuuteen jakamalla lapset esimerkiksi Piaget'n (1969) kognitiivisen kehitysvaiheiden teorian mukaan esioperationaalisen ja konkreettisten operaatioiden vaiheen ryhmiin. Molempien kehitysvaiheiden katsotaan esiintyvän vielä koulupolun alussa 8–9-vuoden iässä (Wadsworth, 1996). Konkreettisten operaatioiden vaihetta edustavalla lapsiryhmällä on tutkimusten mukaan sujuvampi laskutaito ja

he ehtivät laskea laskuja enemmän kuin esioperationaalista vaihetta edustavat lapset (Ramos-Christian, Schleser, & Varn, 2008). Molempien ryhmien laskutaidon tarkkuus eli oikein laskettujen laskujen lukumäärä eivät eronneet toisistaan, kun luokka-aste oli kontrolloitu. Laskusujuvuuden kohdalla laskemisen tarkkuus ja nopeus kehittyvät mahdollisesti siis eri aikaan, jolloin on otettava huomioon kognitiivisten toimintojen, kuten muistin, taso sekä laskustrategioiden käyttö laskemisen apuna. (Ramos-Christian ym., 2008.)

Harjoituksen määrällä sekä lapsen kognitiivisilla taidoilla, kuten työmuistilla, on yhteys laskutaidon sujuvuuden yksilöllisiin eroihin (Bailey, Littlefield, & Geary, 2012; Barrouillet & Lépine, 2005). Useissa tutkimuksissa on todettu, että matematiikan sujuvuustaidot voivat parantua interventioiden avulla, joissa keskitytään harjoitteluun (Poncy, Skinner, & Jaspers, 2007; McCallum ym., 2006; Hartnedy, Mozzoni, & Fahoum, 2005). Työmuistin on todettu selittävän yksinkertaisten, mielessä laskettujen yhteenlaskusujuvuuden eroja tavanomaisesti suoriutuvien ja matematiikan oppimisvaikeuksien riskiryhmän välillä (Berg & Hutchinson, 2010). Väisäsen ja Aunion (2016) tutkimuksessa havaittiin, että aiempi laskusujuvuus oli paras selittäjä laskemisen sujuvuudelle: laskemisen sujuvuuden tuloksilla toisella luokalla pystyttiin selittämään yli puolet laskemisen sujuvuuden tulosten vaihtelusta kolmannen luokan talvella. Toisella luokalla mitattu laskemisen sujuvuus ennakoii siis myöhempää laskemisen sujuvuutta.

Gearyn (2011) tutkimuksessa huomattiin, että laskemisen sujuvuus on yhteydessä myöhempään yleiseen matemaattiseen osaamiseen. Myös lukemisen sujuvuus (esim. Hecht, Torgesen, Wagner, & Rashotte, 2001) ja esineiden nimeämisnopeus (esim. Koponen, Aunola, Ahonen, & Nurmi, 2007; Koponen, Georgiou, Salmi, Leskinen, & Aro, 2017) ovat yhteydessä laskemisen sujuvuuteen. Joidenkin tutkimusten mukaan lapsen laskutaidon sujuvuuden taso on yhteydessä laskutaidon strategioiden käyttöön (Carr & Alexeev, 2011). Hyvä laskusujuvuus saattaa täten myös nopeuttaa lasta siirtymään konkreettisista lukujen luettelemiseen pohjautuvista laskustrategioista kohti mielessä tapahtuvaa laskeamista ja aritmeettisten faktojen suoraan muistista hakemista (Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003a). Vasilyeva ja kumppanit (2015) ehdottavatkin, että erityisesti

kyky pilkkoa monimutkainen aritmeettinen lasku osavaiheisiin sekä sen uudelleen kokoaminen olisi vuorovaikutuksessa sujuvuuden kanssa. Tällöin lapsen on mahdollista esimerkiksi ratkaista $5+7$ hakemalla ensin muistista $5+5$ ja sitten lisäämällä lukuun vielä 2. Näyttäisi siltä, että sujuvuudella olisi myönteinen, kehämäinen vaikutus uudelleen oppimiseen, sillä nopea ja tarkka suoriutuminen peruslaskutaidoista auttaa suoriutumaan hyvin myös uusista haasteellisimmista matematiikan tehtävistä (Binder, 1996).

Laskutaidon sujuvuuden mahdollisimman hyvän tason saavuttaminen jo alakoulussa on tärkeää erityisesti emotionaalisen kehityksen, matematiikkaan kohdistuvan ahdistuksen sekä motivaation kannalta. On näyttöä, että oppilaan sujuva laskutaito alentaa matematiikkaan kohdistuvaa ahdistusta (Cates & Rhymer, 2003) ja motivoi laskujen ratkaisemiseen (Billington & Skinner, 2002).

1.1.3 Oppimisvaikeudet

Matemaattiset oppimisvaikeudet esiintyvät kansainvälisessä ICD-10 (International Statistical Classification of Diseases) tautiluokituksessa nimellä laskemiskyvyn häiriö (F81.2), jonka mukaan vaikeudet laskemisessa ilmenevät haasteina aritmeettisten peruslaskutaitojen, kuten yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskun hallinnassa. Vaikeudet eivät ole seurausta neurologisista häiriöistä, aistivammoista tai riittämättömästä tai puutteellisesta opetuksesta. DMS-V:n (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders) määritelmän mukaan matematiikan vaikeudet voivat olla kielellisiä, havaintopohjaisia, tarkkaavaisuuteen kohdistuvia tai taitoihin perustuvia. Vaikeudet kohdistuvat tällöin käsitteiden ja symbolien muistamiseen ja ymmärtämiseen, numeroiden ja laskumerkkien havaitsemiseen ja lukemiseen, lukujen oikein kopioimiseen sekä laskusääntöihin ja lukujo-notaitoihin. Arvioiden mukaan noin 5–7%:lla peruskoululaisista on vaikeuksia saavuttaa matematiikan opetussuunnitelman tavoitteet (Räsänen, 2012).

Matematiikan oppimisvaikeuksien taustalla on osittain aivojen rakenteelliset ja toiminnalliset poikkeavuudet erityisesti pääläenlohkossa sekä etuotsaloh-

kossa (esim. Rivera, Reiss, Eckert, & Menon, 2005). Matemaattisten oppimisvaikeuksien on todettu myös vahvasti olevan yhteydessä muihin oppimisvaikeuksiin. Lapsilla, joilla on haasteita matematiikassa, voi olla vaikeuksia lisäksi lukemisessa ja kirjoittamisessa (Geary, 2011; Willburger, Fussenegger, Moll, Wood, & Landerl, 2008). On arvioitu, että jopa noin 50% lapsista, joilla on vaikeuksia laskemisessa, on myös vaikeuksia lukemisessa ja kirjoittamisessa (Moll, Bruder, Kunze, Neuhoff, & Schulte-Körne, 2014). Päällekkäistymisen on arveltu olevan seurausta yhteisistä neurobiologisista tekijöistä (esim. Butterworth & Kovas, 2013; Landerl & Moll, 2010).

Laskemisen vaikeuksien ydinongelmaksi katsotaan vaikeus muistaa aritmeettisiä faktoja (Geary, 1993; Geary & Hoard, 2001; Jordan, Hanich & Kaplan, 2003b). Toinen laskutaitojen vaikeuksien piirre on peruslaskutoimitusten sujuvuuden ongelmat (Geary, 1993, 2004; Hart, Petrill, & Thompson, 2010; Mazzocco ym., 2008; Vukovic & Siegel, 2010). Tutkimuksissa on havaittu, että joillakin oppilailta on haasteita matematiikassa, koska he eivät ole tulleet sujuviksi peruslaskutaidoissa (Binder, 1996). Lapsella on tällöin haasteita laskujen ratkaisuiden hakemisessa suoraan muistista. Lapset, joilla on matematiikan oppimisvaikeuksia, käyttävät usein sormilla ja apuvälineillä laskemiseen perustuvia laskustrategioita pidemmän aikaa eivätkä he siirry kehittyneempiin strategioihin (Ostad, 1999). Samaan tulokseen on myös päätenyt Koponen (2012), jonka mukaan matematiikan oppimisvaikeuksien kohdalla lapset käyttävät usein hitaita luettelamiseen perustuvia laskustrategioita.

Matematiikan oppimisvaikeuksien taustalla on useita eri kognitiivisia tekijöitä, jotka vaikuttavat ja ilmenevät jo varhaislapsuudessa. Ongelmia ilmenee muun muassa numeerisen prosessoinnin taidoissa, kuten lukumääräisyyksien vertailussa (De Smedt ym., 2009; Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004; Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011; Reigosa-Crespo ym., 2012). Tutkijoiden mukaan matemaattiset oppimisvaikeudet olisivat seurausta myös synnynnäisiin taitoihin liittyvistä vaikeuksista arvioida suuria arvion perustuvia lukumääriä (Mazzocco ym., 2011) tai esineiden tai pisteiden pienien ja tarkkojen lukumäärien

erotteluun liittyviä lukumääriä (Butterworth, 2010). Muita laskemisen vaikeuksiin yhteydessä olevia tekijöitä on etsitty lukujonotaidoista (Geary, Hoard, Nugent, & Byrd-Craven, 2008) sekä lukumäärän suuruuden arvioinnin vaikeutta arabialaisen numeron perusteella (Rousselle & Noël, 2007). Tällöin lapsi saattaa esimerkiksi väittää, että luku 188 on suurempi kuin 200, koska ensimmäisessä luvussa on jälkimmäistä enemmän kahdeksikkoja. Poikkeavuuksia on löydetty myös muiden kognitiivisten taitojen, kuten työmuistin kohdalla (Swanson & Jerman, 2006).

Matemaattisten oppimisvaikeuksien määritelmien sekä katkaisupisterajojen määrittelemisessä on ollut vaihtelevuutta (Dowker, 2005; Geary, 2004). Osa tutkijoista puhuu lapsen kohdalla matematiikan oppimisen vaikeudesta, kun hän putoaa alle 35 persentiiliin joukkoon (esim. Geary ym., 2000; Hanich, Jordan, Kaplan, & Dick, 2001; Jordan, Kaplan, & Hanich, 2002, 2003b). Tällöin lapset suoriutuvat laskutaitoa mittaavasta testistä keskiarvoa 0.39 keskihajonnan verran huonommin. 35 persentiiliin katkaisurajan kohdalla ongelmana on kuitenkin oikeiden positiivisten kustannuksella sisällyttää matematiikan riskiryhmään vääriä positiivisia (Chong & Siegel, 2008). Tämän vuoksi matemaattisten oppimisvaikeuksien määrittelyssä käytetään nykyään tyypillisesti 25 persentiiliin katkaisurajaa, jolloin katkaisurajan alapuolelle jäävien oppilaiden suoriutuminen on alle 0.67 keskihajonnan verran huonompaa keskiarvosta (Fuchs ym., 2004; Geary, 2004; Geary & Hoard, 2005).

Usein tutkijat jakavat lapset, joilla on matematiikan oppimisvaikeus, vielä kahteen eri ryhmään: MD-ryhmä (Mathematical Disability) sekä LA-ryhmä (Low Achievement) (Geary, 2011). LA-ryhmässä katkaisurajana pidetään 11–25 persentiiliin väliä. LA-ryhmän ja tavanomaisesti suoriutuvien ryhmän väliset erot säilyvät ajan myötä samoina (Morgan, Farkas, & Wu, 2009, 2011; Murphy, Mazzocco, Hanich, & Early, 2007). MD-ryhmään kuuluvat lapset sen sijaan sijoituvat alle 10 persentiiliin joukkoon, jolloin vaikeudet matematiikassa ovat jo huomattavasti alle keskitason ($Z = -1.28$). MD-ryhmän ja tavanomaisesti suoriutuvien ryhmän väliset erot sen sijaan kasvavat ajan myötä suuremmiksi: MD-ryhmään

kuuluvien lasten aritmeettisten peruslaskutaitojen kehitys on hitaampaa ja kehityksen suunta saattaa olla jopa alaspäin (Morgan ym., 2009, 2011; Murphy ym., 2007; Salaschek, Zeuch, & Souvignier, 2014; Wong, Ho, & Tang, 2015).

Matematiikan oppimisvaikeuksien pitkittäistutkimus on keskittynyt Nelsonin ja Powellin (2017) meta-analyysin mukaan muun muassa laskutaitojen kehittymiseen eri matematiikan osa-alueissa, matematiikan oppimisvaikeuden ennakointiin sekä pysyvyyteen. Useiden pitkittäistutkimusten mukaan riskiryhmä sekä ei-riskiryhmä kehittyvät taidoissaan ajan myötä, mutta jo alkumittauksessa havaitut erot taidoissa säilyvät samana tai riskiryhmän kehitys saattaa jopa jäädä entistä enemmän jälkeen tavanomaisesti kehittyviin lapsiin verrattuna (Geary ym., 2012b; Jordan & Hanich, 2003; Morgan ym., 2009, 2011; Murphy ym., 2007; Vukovic, 2012). Ryhmien välisen kehityksen vertailuun voi tosin vaikuttaa katkaisurajan määrittäminen. On esimerkiksi todettu, että yli 25 persenttiin kuuluvat oppilaat, joilla on lievempiä laskemisen haasteita, vähitellen hitaasti saavuttavat laskusujuvuudessa tavanomaisesti suoriutuvien tasoa (Geary ym., 2012b). Mielenkiinnonkohteena on ollut lisäksi erilaisten oppimisvaikeuksien komorbiditeetin yhteys matemaattisten taitojen kehitykseen. Tutkimusten mukaan lapset, joilla on haasteita sekä laskemisessa että lukemisessa, suoriutuvat heikommin kuin lapset, joilla on haasteita vain laskemisessa (Jordan & Hanich, 2003; Vukovic, 2012).

Osassa varhaisiin numeerisiin taitoihin kohdennetuista tutkimuksista on pystytty havaitsemaan riskiryhmän nopeampi kehitys esimerkiksi lukujonotaidoissa (Geary ym., 2012b) sekä yleisissä matemaattisissa taidoissa (Navarro ym., 2012), vaikka riskiryhmä tosin suoriutui systemaattisesti ei-riskiryhmää huonommin. Riskiryhmän nopeampi yksilöllisen kehityksen muutos aikapisteiden välillä on mahdollista selittää ei-riskiryhmän jo korkealla taitotasolla alkumittauksessa (Nelson & Powell, 2017). Varhaisten numeeristen taitojen kohdalla on myös pitkittäistutkimuksissa havaittu, että alkuopetuksessa riskiryhmään kuuluvat lapset ovat olleet heikkoja jo päiväkotij- ja esikouluaikana (Desoete & Grégoire, 2006). Aritmeettisten taitojen ja laskusujuvuuden kannalta taas riskiryhmän lapset tekevät enemmän virheitä laskiessaan ja käyttävät tehottomampia

laskustrategioita esikoulun ja alakoulun aikana (Andersson, 2010; Chong & Siegel, 2008; Jordan & Hanich, 2003; Jordan ym., 2003a; Jordan ym., 2002; Swanson, Jerman, & Zheng, 2008; Vanbinst, Ghesquière, & De Smedt, 2014). Riskiryhmän oppilaat käyttävät tavanomaisesti suoriutuvia oppilaita harvemmin strategiana vastauksen suoraan muistista hakua ja suosivat enemmän proseduraalisia taitoja (Geary ym., 2000; Geary ym., 2012b; Vanbinst ym., 2014).

Riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuulumista on yritetty ennakoida useissa eri tutkimuksissa sekä löytää selittäviä tekijöitä pääosin varhaisista numeerisista taidoista sekä perusaritmeettisistä laskutaidoista esi- ja alkuopetuksen aikana (esim. Desoete, Ceulemans, De Weerd, & Pieters, 2012; Geary ym., 2009a; Locuniak & Jordan, 2008; Mazzocco & Thompson, 2005; Stock, Desoete, & Roeyers, 2010; Vukovic & Siegel, 2010). Riskiryhmässä pysymisen pitkittäistutkimuksessa on saatu vaihtelevia prosenttilukuja riippuen asetetusta katkaisupisterajasta. 10-15 persentiilin katkaisurajalla riskiryhmässä pysyminen ajan myötä vaihtelee noin 60-75% välillä (esim. Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent, & Numtee, 2007; Geary, Bailey, & Hoard, 2009b; Mazzocco & Myers, 2003; Morgan ym., 2009). Yli 30 persentiilin katkaisurajalla riskiryhmässä pysyminen on vastaavasti vähemmän todennäköisempää; noin 40% 9-10 vuotiaista pysyy riskiryhmässä vielä kahden vuoden jälkeen (Martin ym., 2013). Riskiryhmässä pysyminen on myös vahvaa sellaisten oppilaiden kohdalla, joilla on vaikeuksia sekä laskemisessa että lukemisessa (Jordan & Hanich, 2003; Schwenck, Dummert, Endlich, & Schneider, 2015).

1.1.4 Sukupuolierot

Sukupuolen ja matemaattisen osaamisen välisestä yhteydestä on saatu erilaisia tuloksia, mikä saattaa vaikeuttaa käsityksen muodostamista laskutaidon kehityksen eroista tyttöjen ja poikien välillä. Huomattava osa tutkimuksesta on lisäksi keskittynyt matematiikan sukupuolierojen tutkimiseen alakoulun, ylempien luokkien ja lukion välillä (Hyde, Lindberg, Linn, Ellis, & Williams, 2008; Li,

Zhang, Liu, Hao, 2017; Reilly, Neumann, & Andrews, 2015). Sen sijaan sukupuoli-eroja matematiikan osaamisessa on tutkittu huomattavasti vähemmän esi- ja alkuopetuksen aikana, minkä vuoksi voi olla vaikeaa muodostaa selkeää käsitystä sukupuolierojen alkamisajankohdasta matematiikassa.

Yleisesti ottaen tutkimuksista, joissa on käytetty aineistona suuria oppilasmääriä, ei ole löytynyt tilastollisesti merkitseviä sukupuoli-eroja tai efektikoot ovat olleet erittäin pieniä. Hyden, Fenneman ja Lamonin (1990) laajassa meta-analyysissä tultiin johtopäätökseen, että sukupuoli-erojen efektin koko ($d = -.05$) tyttöjen hyväksi on niin pieni matematiikassa aina alkuopetuksesta peruskoulun loppuun asti, että erot tyttöjen ja poikien välillä eivät käytännössä ilmene ennen lukio-opintojen alkua. Sukupuoli-eroja matematiikan taidoissa ei löytynyt myöskään yli seitsemän miljoonan 7–17-vuotiaiden oppilaan väliltä USA:ssa (Hyde ym., 2008). Kiinalaisessa meta-analyysissä 11-vuotiaiden väliltä ei löytynyt vielä sukupuoli-eroja matematiikassa, mutta 14-vuotiaina tytöt suoriutuivat poikia paremmin (Li ym., 2017). Kansainvälisessä TIMMS-tutkimuksessa (Trends in Mathematics and Science Study) suomalaiset tytöt olivat tilastollisesti merkitsevästi parempia matemaattisessa suoriutumisessa kuin pojat (Vettenranta ym., 2016).

Jotkut tutkimukset kuitenkin puoltavat sukupuoli-erojen ilmaantumista jo esikoulun ja alakoulun aikana. Suomessa on havaittu tyttöjen pärjäävän poikia paremmin varhaisissa matemaattisissa taidoissa päiväkodissa sekä myöhemmin koulun alkaessa (Aunio ym., 2006). Tyttöjen parempi suoriutuminen jo päiväkodissa ja alkuopetuksen aikana on havaittu lisäksi Australiassa ja Isossa-Britanniassa (Boardman, 2006; Demie, 2001; Gorard, Rees, & Salisbury, 2001). Väisäsen ja Aunio (2016) pitkittäistutkimuksessa tosin havaittiin poikien suoriutuvan laskusujuvuustehtävistä tyttöjä paremmin toisen luokan talvella ja kolmannen luokan syksyllä, mutta sen jälkeen eroja sukupuolten välillä ei ollut havaittavissa. Joidenkin tutkimusten mukaan pojat ovat varhaisilta matematiikan taidoiltaan parempia jo päiväkodissa (esim. Jordan, Kaplan, Oláh, & Locuniak, 2006; Jordan, Kaplan, Locuniak, & Ramineni, 2007). Useassa tutkimuksessa on havaittu, että poikien kehityksen nopeus esiopetuksen ja alakoulun aikana on tyttöjä suurem-

paa (Aunola ym., 2004; Metsämuuronen, 2010; Strand, 1999). Vaikka useassa tutkimuksessa on saatu näyttöä sukupuolierojen ilmenemisestä jo alkuopetuksen aikana, monissa tutkimuksissa ei ole löytynyt eroja tyttöjen ja poikien matematiikan taidoissa sekä taitojen kehityksessä (Butterworth, 2005a; Carr & Jessup, 1997; Herbert & Stipek, 2005; Kersey ym., 2018; Lachance & Mazzocco, 2006). On suomalaisia tutkimuksia, joiden mukaan sukupuolieroja varhaisissa matematiikan taidoissa ja laskusujuvuudessa esi- ja alkuopetuksessa ei ole löytynyt (Aunio & Niemivirta, 2010; Aunola ym., 2004; Mononen & Aunio, 2013). On arveltu, että toisinaan esi- ja alkuopetuksen aikana havaitut sukupuolierot olisivatkin kohortti- tai ikään liittyviä eroja (Aunio & Niemivirta, 2010; Lachance & Mazzocco, 2006). Käsitteiden muodostaminen matematiikan taitojen sukupuolieroista on siis varsin monimutkaista vaihtelevien tutkimustulosten vuoksi.

Tyttöjen ja poikien välillä on havaittu eroja eri matematiikan osa-alueiden kehityksessä. Tyttöjen aritmeettiset taidot ovat poikia parempia (Wei ym., 2012; ks. poikkeus Martens, Hurks, Meijs, Wassenberg, & Jolles, 2011), kun taas pojilla on paremmat ongelmanratkaisutaidot (Wei ym., 2012) sekä avaruudellisen hahmottamisen taidot (Levine, Huttenlocher, Taylor, & Langrock, 1999; Levine, Vasilyeva, Lourenco, Newcombe, & Huttenlocher, 2005). Syitä tyttöjen parempaan suoriutumiseen aritmeettisissä taidoissa on haettu kielellisistä taidoista: tyttöjen katsotaan olevan poikia edellä kielen kehityksessä (Wei ym., 2012). Laskustrategioiden valinnassa saattaa olla eroja sukupuolten välillä. Tytöt käyttävät enemmän sormia tai muita laskemisen apuvälineitä apuna laskiessa eli konkreettisia strategioita, kun taas pojat käyttävät enemmän muistista hakemista laskiessaan yhteen- ja vähennyslaskuja (Carr & Davis, 2002; Carr & Jessup, 1997; Fennema, Carpenter, Jacobs, Frank, & Levi, 1998). Tyttöjen laskustrategian valinta saattaa mahdollisesti hidastaa laskutaidon kehitystä verrattuna poikien nopeampaan vastauksen suoraan muistista hakemiseen (Carr & Davis, 2002). Poikien nopeampi vastauksen suora muistista hakeminen voi osittain selittää sen, miksi joissakin tutkimuksissa poikien matemaattisten taitojen kehityksen nopeus on ollut tyttöjä suurempaa (esim. Aunola ym., 2004; Strand, 1999).

Sukupuolieroja korkean ja alhaisen riskin ryhmiin kuulumisessa on tutkittu jonkin verran. Poikien välillä laskutaidoissa on todettu olevan enemmän vaihtelevuutta (Aunola ym., 2004; Hyde ym., 2008; Li ym., 2017; Paukkeri ym. 2015; Reilly, Neumann, & Andrews, 2017). Joidenkin tutkimusten mukaan erityisesti laskemisen vaikeuksien riskiryhmässä kaikista heikoiten suoriutuvista suurin osa on poikia ja hieman alle keskitason suoriutuvista taas tyttöjä (Barbaresi, Katusics, Colligan, Weaver, & Jacobsen, 2005; Geary ym., 2009a; Murphy ym., 2007; Penner & Paret, 2008). Sukupuolierot riskiryhmään kuulumisessa eivät tosin olleet tilastollisesti merkitseviä. Poikien suurempi varianssi tarkoittaa toisaalta sitä, että poikia on havaittu olevan tyttöjä enemmän matemaattisesti taitavimpien joukossa (Hyde ym., 2008; Paukkeri ym., 2015; Penner & Paret, 2008). Poikien suurempaa varianssia ei ole toistaiseksi pystytty selittämään. Landerlin ja Mollin (2010) tutkimuksessa sen sijaan todettiin, että matematiikan haasteet ovat yleisempiä tytöillä kuin pojilla.

Sukupuolten välisiä eroja laskutaidoissa on yritetty selittää oppilaiden käsityksillä omasta suoriutumisestaan. Pojat ovat raportoineet enemmän myönteisempiä asenteita matematiikkaa kohtaan, kun taas tytöt kokevat heikompaa minäpystyvyyttä (Herbert & Stipek, 2005; Reilly ym., 2017). Tytöillä saattaa olla heikompi itseluottamuksen taso matematiikassa poikiin verrattuna, mikä on tullut esiin Hannulan, Kuparin, Pehkosen & Räsänen (2004) tutkimuksessa. Vaikuttaisi kuitenkin siltä, että asenteet ja minäpystyvyys eivät selitä matematiikan suoriutumisen eroja tyttöjen ja poikien välillä (Reilly ym., 2017).

1.1.5 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää laskusujuvuuden kehitystä alkuopetuksessa 1. luokan keväästä 2. luokan kevääseen. Tutkittavat jaettiin laskusujuvuuden taitojen perusteella kahteen ryhmään: riskiryhmään ja ei-riskiryhmään. Tässä tutkimuksessa riskiryhmällä tarkoitetaan oppilaita, jotka kuuluivat heikoimpaan 25 persenttiin eli korkean riskin ryhmään eri mittausajankohtina ja ei-riskiryhmään eli alhaisen riskin ryhmään loput oppilaat eli 25–100 persenttiä. Tutkimuskysymyksessä 1 vertaillaan riskiryhmän ja ei-riskiryhmän yhteen- ja vähennyslaskusujuvuutta. Tutkimuksessa oli kuitenkin erityisenä kiinnostuksenkohteena riskiryhmän kehitys ja taidot laskusujuvuudessa, joten tutkimuskysymyksissä 2 ja 3 keskitytään riskiryhmään. Tämän tutkimuksen tavoitteena oli vastata seuraaviin kysymyksiin:

1. Miten riskiryhmän oppilaat kehittyvät yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuudessa alkuopetuksen aikana?

1.1 Onko riskiryhmän ja ei-riskiryhmän välillä eroja?

1.2 Onko tyttöjen ja poikien välillä eroja?

2. Millaisia ovat yksilölliset kehityspolut yhteen- ja vähennyslaskutaidon kehityksessä riskiryhmässä?

2.1 Onko tyttöjen ja poikien välillä eroja?

3. Onko yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuudessa eroja riskiryhmässä?

3.1 Onko tyttöjen ja poikien välillä eroja?

2 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

2.1 Tutkittavat

Tutkimuksen aineisto on kerätty osana FLARE -hanketta (FLuency ARithmetic REading). Hankkeen on rahoittanut Suomen Akatemia (277340). Hankkeen vastuullisena johtajana on professori Mikko Aro. Tutkittavina oli 202 oppilasta eräästä Keski-Suomen kunnasta. Tähän tutkimukseen tuli mukaan 195 oppilasta, joilta oli tiedot kaikista mittauksista. Oppilaita mitattiin kolmena eri ajankohtana: 1. luokan keväänä, 2. luokan syksynä ja 2. luokan keväänä. Tutkimukseen osallistui 95 (48.7%) poikaa ja 100 (51.3%) tyttöä. Tutkittujen oppilaiden ryhmä on varsin suurella todennäköisyydellä edustava näyte Suomessa yleisopetuksessa opiskelevista lapsista, joten tutkimuksen ulkoinen reliabiliteetti on vähintään kohtalainen.

2.2 Mittarit

Tutkimuksessa käytettiin kahta kokeellista mittaria, joista toinen koostui 120 yhteenlaskusta ja toinen 120 vähennyslaskusta. Laskut olivat yksi- ja kaksinumeroisia (esim. $3 + 8$ ja $12 + 5$) ja laskuissa oltiin lukuvälillä 0–20. Jokaisena mittausajankohtana käytettiin samanlaista mittaria, jossa alun muutama lasku vaihteli eri mittausajankohtina. 1. luokan kevään ja 2. luokan syksyn mittareiden välinen korrelaatiokerroin yhteenlaskujen osalta oli .80, ja vähennyslaskujen osalta oli .76 eli sujuvuusmittareiden ulkoinen reliabiliteetti oli vähintään kohtalainen. Mittaukset suoritettiin ryhmätestauksena, missä oppilaille oli 2 minuuttia aikaa laskea ensin yhteen- ja sitten vähennyslaskuja. Ryhmätestaukset toteuttivat tutkimusavustajat, jotka olivat tähän mittaukseen koulutettuja Jyväskylän yliopiston opiskelijoita. Oppilaiden oikein laskettujen laskujen lukumäärästä muodostettiin muuttujat siten, että lukuarvo kuvaa oikeiden vastausten lukumäärää minuutissa. Muuttujina on käytetty keskimääräisesti minuutin aikana oikein laskettujen laskujen raakapistemääriä. Mittaustavasta johtuen sisäistä reliabiliteettia ei

ole arvioitu numeerisesti. Validiteettia tukee tutkimuksessa käytetty mittaus-tapa, koska vastaavat laskemisen nopeutta ja tarkkuutta mittaavat testit on to-dettu luotettaviksi aikaisemmissa tutkimuksissa (Woodcock IV™; Schrank, McGrew, & Mather, 2014).

2.3 Aineiston analyysi

Aineiston analysoitiin SPSS 24-ohjelmalla. Riskiryhmän kehitystä arvioitiin Wil-coxonin testillä. Sukupuolten välisiä eroja riskiryhmään kuulumisessa selvitet-tiin χ^2 -testillä. Eri kehityspolkuja pitkin riskiryhmään tulleiden oppilaiden erot yhteen- ja vähennyslaskusujuvuuden keskiarvoissa analysoitiin U-testillä. Riski-ryhmän ja ei-riskiryhmän laskusujuvuuden kehitystä sekä yhteen- että vähen-nyslaskussa analysoitiin Friedmanin testillä ja ryhmien välisiä eroja kehityksessä tarkasteltiin lisäksi U-testillä. Riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuulumisen py-syvyyttä kuvattiin visuaalisesti Markovin ketjulla. Yhteen- ja vähennyslaskutai-tojen sujuvuuseroja analysoitiin Wilcoxonin testillä. Tuloksissa esitetyt p-arvot ovat asymptoottisia. Efektin kokoa arvioitiin Cohenin (1988) esittämän luokituk-sen mukaisesti; efektin koko on pieni, jos $r=.1-.3$, kohtalainen, jos $r=.3-.5$ ja suuri, jos $r=.5$ tai korkeampi. Kendallin W:tä on tulkittu 0–1 välillä, jossa 1 tarkoittaa täydellistä konkordanssia muuttujien välillä (Legendre, 2010). η^2 on tulkittu seu-raavasti: efektin koko on pieni, jos $\eta^2=.010-.039$, kohtalainen, jos $\eta^2=.060-.110$ ja suuri, jos $\eta^2=.140$ tai korkeampi (Cohen 1988).

3 TULOKSET

3.1 Yhteenlaskusujuvuuden kehitys

Ensimmäisen luokan kevään mittauksen yhteydessä 46 oppilasta (23.6%) valikoitui riskiryhmään yhteenlaskun sujuvuustestissä, kun katkaisurajana oli 25 persentiiliä (kuvio 1). Riskiryhmään kuuluvat oppilaat ratkaisivat keskimäärin viisi yhteenlaskua oikein yhdessä minuutissa ($ka=5.01$, $md=5.50$, $kh=1.46$), mikä oli hieman alle puolet vähemmän ei-riskiryhmään kuuluvien oppilaiden oikein laskettujen yhteenlaskujen tuloksesta ($ka=10.88$, $md=10.00$, $kh=3.18$). Ensimmäisen luokan keväänä riskiryhmään kuuluvista oppilaista 30 (65.2%) kuului riskiryhmään edelleen myös toisen luokan syksyllä. Oikein laskettujen yhteenlaskujen lukumäärä minuutissa riskiryhmään kuuluvien oppilaiden kohdalla nousi keskimääräisesti hieman ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn ($ka=5.34$, $md=5.50$, $kh=1.50$) välillä. Ei-riskiryhmään kuuluvat oppilaat sen sijaan laskivat toisen luokan syksynä oikein kaksi laskua enemmän minuutissa kuin ensimmäisen luokan keväänä ($ka=12.68$, $md=12.00$, $kh=4.08$).¹

Toisen luokan keväänä 24 oppilasta oli kuulunut kaikkina kolmena mittausajankohtana riskiryhmään (1. lk kevät = 52.2%; 2. lk syksy = 80.0%). Toisen luokan keväänä riskiryhmään kuuluvat oppilaat laskivat yhteenlaskuja keskimäärin 1.5 laskua enemmän ($ka=6.60$, $md=7.00$, $kh=1.81$) ensimmäisen luokan kevääseen ja toisen luokan syksyyn verrattuna. Ei-riskiryhmässä laskettiin oikein 4.5 yhteenlaskua enemmän ($ka=16.02$, $md=14.50$, $kh=5.59$) ensimmäisen luokan kevääseen verrattuna.

Ensimmäisen luokan keväänä riskiryhmään kuuluvista 46 oppilaasta 26 (56.5%) oli poikia ja 20 tyttöjä (43.5%). Poikien lukumäärä ei eronnut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen lukumäärästä; $\chi^2(1)=0.78$, $p=.384$. Toisen luokan syksynä molempina mittausajankohtina riskiryhmään kuuluvista oppilaista poikia oli 20

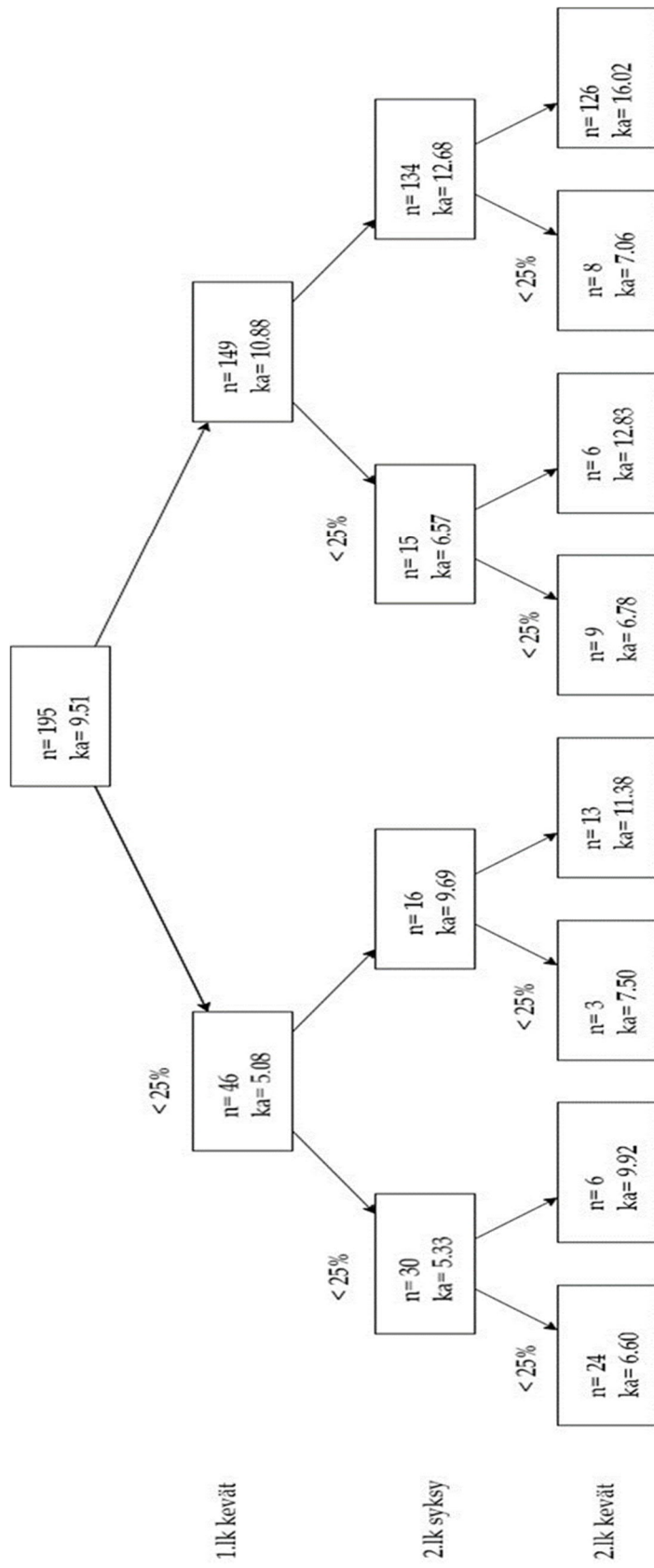
¹ Tilastollista merkitsevyyttä ei ole testattu ryhmien välillä, koska ne ovat samasta aineistosta.

(66.7%) ja tyttöjä 10 (33.3%). Poikien lukumäärä ei eronnut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen lukumäärästä; $\chi^2(1)=3.33$, $p=.068$. Toisen luokan keväänä kaikkina mittausajankohtina riskiryhmään oli kuulunut 16 (66.7%) poikaa ja kahdeksan (33.3%) tyttöä. Poikien lukumäärä ei eronnut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen lukumäärästä; $\chi^2(1)=2.68$, $p=.102$.

Toisen luokan keväänä 24 riskiryhmään kuuluvaa oppilasta olivat kuuluneet riskiryhmään kaikkien kolmen mittausajankohdan aikana (kuvio 1). Oli kuitenkin myös oppilaita, jotka olivat päätyneet riskiryhmään toisen luokan keväänä erilaisten kehityspolkujen kautta. Osa oppilaista oli kuulunut ei-riskiryhmään joko ensimmäisen luokan keväänä tai toisen luokan syksynä, mutta kuului lopulta toisen luokan keväänä riskiryhmään. Esimerkiksi yhdeksän oppilasta ei kuulunut riskiryhmään ensimmäisen luokan keväänä, mutta päätyi riskiryhmään toisen luokan syksynä ja keväänä. Kahdeksan oppilaista taas eivät kuuluneet riskiryhmään ensimmäisen luokan keväänä eikä toisen luokan syksynä, mutta päätyivät riskiryhmään vasta toisen luokan keväänä. Toisen luokan syksynä alle 25 persentiiliin riskiryhmään kuului yhteensä 45 oppilasta, joista 30 (66.7%) olivat kuuluneet riskiryhmään jo ensimmäisen luokan keväänä ja 15 oppilasta (33.3%) olivat siirtyneet riskiryhmään vasta toisen luokan syksynä. Ne oppilaat, jotka kuuluivat riskiryhmään vasta toisen luokan syksynä, suoriutuivat tilastollisesti merkitsevästi paremmin yhteenlaskuissa ($k_a=6.57$, $k_h=0.88$, $k_{\text{järj}}=30.80$) kuin molemmissa mittapisteissä riskiryhmään kuuluvat oppilaat ($k_a=5.33$, $k_h=1.50$, $k_{\text{järj}}=19.10$) toisen luokan syksynä (efektin koko suuri); $U=108.00$, $Z=-2.85$, $p=.004$, $r=.52$.

Toisen luokan keväänä alle 25 persentiiliin riskiryhmään kuului yhteensä 44 oppilasta, joista 24 (54.5%) oli kuulunut riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina ja 20 oppilasta (45.5%) oli jonain mittausajankohtana kuulunut ei-riskiryhmään, mutta oli päätenyt lopulta toisen luokan kevääseen mennessä riskiryhmään. Toisen luokan syksyn tai kevään aikana riskiryhmään tulleet ($k_a=7.00$, $k_h=1.29$, $k_{\text{järj}}=23.45$) eivät eronneet yhteenlaskusujuvuudessa tilastollisesti mer-

kitsevästi niistä riskiryhmän oppilaista ($k_a = 6.60$, $k_h = 1.81$, $k_{\text{järj}} = 21.71$), jotka olivat kuuluneet riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina ensimmäisen luokan keväästä lähtien (ei efektiä); $U = 221.00$, $Z = -0.45$, $p = .652$, $r = .08$.



KUVIO 1. Riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien oppilaiden oppilaiden määrät sekä minuutissa oikein laskettujen yhteenlaskujen keskiarvot sujuvuuden mittausajankohtina

Laskusujuvuudessa mittausajankohdat erosivat tilastollisesti merkitsevästi toisistaan oppilailta, jotka olivat kuuluneet yhteenlaskuissa riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina ($p < .001$) (taulukko 1). Dunn-Bonferroni post hoc –testin mukaan muutosta oli tapahtunut tilastollisesti merkitsevästi ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään ($p < .001$) sekä toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään ($p < .05$) välillä. Ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn välillä ei ollut tapahtunut muutosta.

Laskusujuvuudessa mittausajankohdat erosivat tilastollisesti merkitsevästi toisistaan oppilailta, jotka olivat kuuluneet yhteenlaskuissa ei-riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina ($p < .001$) (taulukko 1). Dunn-Bonferroni post hoc –testin mukaan muutosta oli tapahtunut tilastollisesti merkitsevästi ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn ($p < .01$), ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään ($p < .001$) sekä toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään ($p < .001$) välillä.

Ei-riskiryhmän minuutissa oikein laskettujen yhteenlaskujen keskiarvojen erotukset erosivat tilastollisesti merkitsevästi riskiryhmän keskiarvojen erotuksista toisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn ($p < .05$) sekä toisen luokan kevään ja ensimmäisen luokan kevään ($p < .01$) välisissä keskiarvojen erotuksissa, ei-riskiryhmän keskiarvojen erotusten ollessa suuremmat, eli ei-riskiryhmä kehittyi yhteenlaskuissa enemmän kuin riskiryhmä (taulukko 2). Toisen luokan syksyn ja ensimmäisen luokan kevään välisissä keskiarvojen vertailuissa riskiryhmä ja ei-riskiryhmä eivät eronneet tilastollisesti merkitsevästi toisistaan. Tyttöjen ja poikien yhteenlaskusujuvuuden kehitystä on kuvattu liitteissä 1–4.

Yhteenlaskusujuvuudessa riskiryhmässä kaikkina mittausajankohtina olevia oppilaita oli 24, joista poikia oli 16 ja tyttöjä 8. Ei-riskiryhmässä kaikkina mittausajankohtina olevia oli 126, joista poikia oli 56 ja tyttöjä 70. Riskiryhmän ja ei-riskiryhmän sukupuolijakaumat erosivat toisistaan tilastollisesti melkein merkitsevästi $\chi^2(1)=3.99$, $p=.046$.

TAULUKKO 1. Kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien oppilaiden keskiarvot, mediaanit ja keskihajonnat.

	Riskiryhmä n= 24			Ei-riskiryhmä n= 126		
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh
1.lk kevät	4.48 _a	4.25	1.66	11.32 _a	10.50	3.24
2.lk syksy	5.15 _{ab}	5.50	1.58	12.88 _b	12.00	4.10
2.lk kevät	6.60 _c	7.00	1.81	16.02 _c	14.50	5.59
Friedman χ^2	21.42			122.80		
p	.000			.000		
Kendallin W	.45			.49		

Huom. Ne keskiarvot, joilla ei ole yhteistä alaindeksiä erosivat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

TAULUKKO 2. Kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien oppilaiden eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

	Riskiryhmä n= 24			Ei-riskiryhmä n= 126			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.lk syksy – 1.lk kevät	0.67	1.00	1.66	1.56	1.25	3.24	1217.00	-1.52	.129	.20
2.lk kevät – 2.lk syksy	1.46	1.50	1.58	3.14	2.50	4.10	1045.50	-2.40	.017	.31
2.lk kevät – 1.lk kevät	2.13	2.00	1.81	4.70	4.00	5.59	899.00	-3.15	.002	.41

Riskiryhmän tytöt ja pojat erosivat tilastollisesti melkein merkitsevästi yhteenlaskujen kehityksessä toisen luokan syksyn ja ensimmäisen luokan kevään ($p < .05$) välillä (taulukko 3). Riskiryhmän poikien yhteenlaskujen pistemäärissä oli tapahtunut enemmän muutosta tyttöihin verrattuna. Tytöt ja pojat eivät sen sijaan eronneet tilastollisesti merkitsevästi toisistaan toisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn ($p < .10$) välillä eikä toisen luokan kevään ja ensimmäisen luokan kevään ($p < .10$) välillä.

TAULUKKO 3. Kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskujen osalta riskiryhmään kuuluvien tyttöjen ja poikien eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

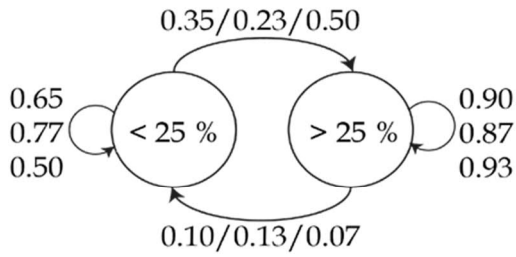
	Pojat n=16			Tytöt n= 8			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.Ik syksy – 1.Ik kevät	1.13	1.00	1.50	-0.25	0.50	1.46	23.50	-2.52	.012	.63
2.Ik kevät – 2.Ik syksy	1.16	0.50	1.85	2.06	2.50	1.27	49.50	-0.90	.369	.23
2.Ik kevät – 1.Ik kevät	2.28	1.75	2.35	1.81	2.00	1.10	63.00	-0.06	.951	.02

Markovin ketjuna kuvattuna ensimmäisen luokan keväänä 25 persenttiliin kuuluvat riskiryhmän oppilaat kuuluivat 65 %:n todennäköisyydellä (pojat 77 % ja tytöt 50 %) riskiryhmään toisen luokan syksynä (kuvio 2). Riskiryhmästä siirryttiin 35 %:n todennäköisyydellä (pojat 23 % ja tytöt 50 %) ei-riskiryhmään ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn välillä. Ensimmäisen luokan keväänä ei-riskiryhmään kuuluvat oppilaat kuuluivat 90 %:n todennäköisyydellä (pojat 87 % ja tytöt 93 %) ei-riskiryhmään vielä toisen luokan syksynä. Ei-riskiryhmästä siirryttiin 10 %:n todennäköisyydellä riskiryhmään (pojat 13 % ja tytöt 7 %) ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn välillä.

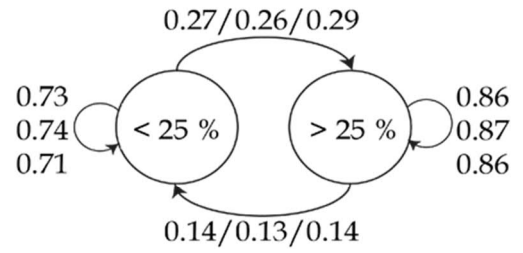
Ensimmäisen luokan keväänä riskiryhmän oppilaat kuuluivat 59 %:n todennäköisyydellä (pojat 62 % ja tytöt 55 %) riskiryhmään toisen luokan keväänä. Riskiryhmästä siirryttiin 41 %:n todennäköisyydellä (pojat 38 % ja tytöt 45 %) ei-riskiryhmään ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä. Ensimmäisen luokan keväänä ei-riskiryhmään kuuluvat oppilaat kuuluivat 89 %:n todennäköisyydellä (pojat 88 % ja tytöt 89 %) ei-riskiryhmään vielä vuoden päästä toisen luokan keväänä. Ei-riskiryhmästä siirryttiin 11 %:n todennäköisyydellä (pojat 12 % ja tytöt 11 %) riskiryhmään ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä.

Toisen luokan syksynä riskiryhmän oppilaat kuuluivat 73 %:n todennäköisyydellä (pojat 69 % ja tytöt 81 %) riskiryhmään vielä toisen luokan keväänä. Riskiryhmästä siirryttiin 27 %:n todennäköisyydellä (pojat 31 % ja tytöt 19 %) ei-riskiryhmään toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään välillä. Ei-riskiryhmän oppilaat pysyivät toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään välillä 93 %:n todennäköisyydellä (pojat 94 % ja tytöt 92 %) ei-riskiryhmässä. Ei-riskiryhmästä siirryttiin 7 %:n todennäköisyydellä (pojat 6 % ja tytöt 8 %) riskiryhmään toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään välillä. Tulokset vähennyslaskusjuvuuden kohdalta ovat luvussa 2.2.

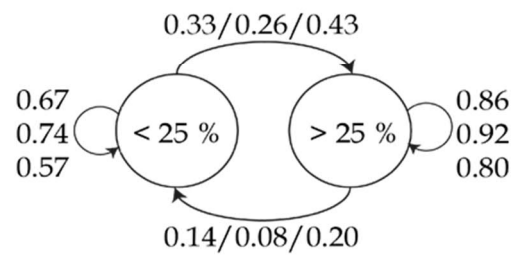
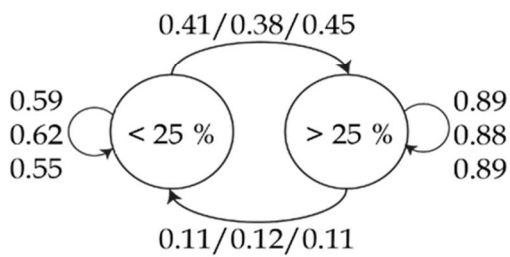
Yhteenlaskusujuvuus



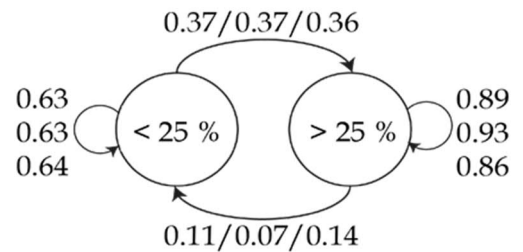
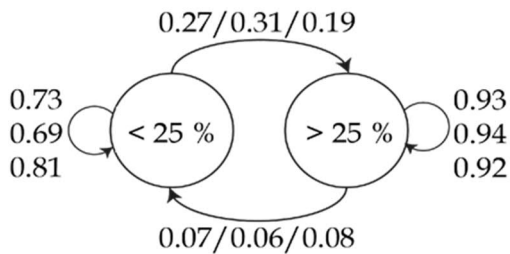
Vähennyslaskusujuvuus



Muutos 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn



Muutos 1. luokan keväästä 2. luokan kevääseen



Muutos 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

< 25 % = alin 25 persenttiiryhmä, kohonnut riski
> 25 % = 25 - 100 persenttiiryhmä, vähäinen riski

Järjestys: kaikki/pojat/tytöt (vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas)

KUVIO 2. Yhteen- ja vähennyslaskusujuvuuden riskiryhmään kuulumisen todennäköisyys

3.2 Vähennyslaskusujuvuuden kehitys

Ensimmäisen luokan keväänä vähennyslaskutestissä 33 oppilasta (16.9%) valikoitui riskiryhmään (kuvio 3). Riskiryhmään kuuluvat lapset ratkaisivat keskimäärin kolme vähennyslaskua oikein yhden minuutin aikana ($ka=2.91$, $md=3.00$, $kh=0.58$), mikä oli neljä oikein laskettua laskua vähemmän kuin ei-riskiryhmän oppilaille ($ka=7.64$, $md=7.00$, $kh=3.32$). Toisen luokan syksynä riskiryhmään kuuluvista oppilaista 24 (72.7%) kuului edelleen riskiryhmään, missä oikein laskettujen vähennyslaskujen lukumäärä minuutissa oli keskimäärin 0.5 laskua enemmän ensimmäisen luokan kevääseen verrattuna ($ka=3.35$, $md=3.50$, $kh=0.94$). Ei-riskiryhmään kuuluvat oppilaat sen sijaan laskivat 10 vähennyslaskua ($ka=10.07$, $md=9.50$, $kh=3.83$) minuutissa oikein, mikä oli 2.5 laskua enemmän ensimmäisen luokan kevääseen verrattuna.

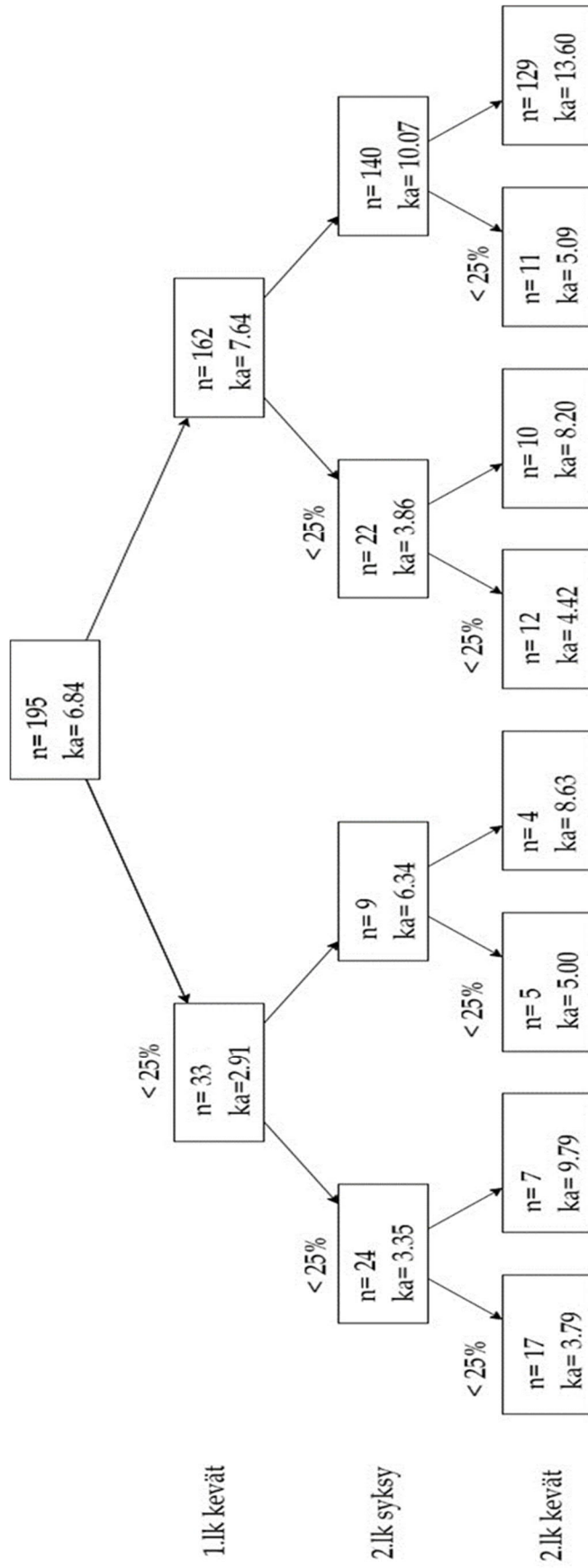
Kaikkina kolmena mittausajankohtana riskiryhmään kuuluneita oppilaita oli 17 toisen luokan keväänä (1 lk. kevät = 51.5%; 2. lk syksy = 70.8%). Riskiryhmän oppilaat laskivat toisen luokan keväänä minuutissa noin yhden laskun enemmän ensimmäisen luokan kevääseen verrattuna ($ka=3.37$, $md=4.00$, $kh=1.10$). Ei-riskiryhmään kuuluvat oppilaat sen sijaan laskivat toisen luokan keväänä keskimäärin kuusi laskua ($ka=13.60$, $md=13.00$, $kh=4.97$) enemmän kuin ensimmäisen luokan keväänä.

Riskiryhmään ensimmäisen luokan keväänä kuului 33 oppilasta, joista poikia oli 19 (57.6%) ja tyttöjä 14 (42.4%). Poikien lukumäärä ei eronnut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen lukumäärästä; $\chi^2(1)=0.76$, $p=.384$. Toisen luokan syksynä molempina mittausajankohtina riskiryhmään kuuluvista oppilaista poikia oli 14 (58.3%) ja tyttöjä 10 (41.7%). Poikien lukumäärä ei eronnut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen lukumäärästä; $\chi^2(1)=0.67$, $p=.414$. Toisen luokan keväänä kaikkina mittausajankohtina riskiryhmään taas kuului 11 (64.7%) poikaa ja kuusi (35.3%) tyttöä. Poikien lukumäärä ei eronnut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen lukumäärästä; $\chi^2(1)=1.47$, $p=.225$. Toisen luokan keväänä 17 riskiryhmään kuu-

luvaa oppilasta olivat kuuluneet riskiryhmään kaikkien kolmen mittausajankohdan aikana (kuvio 3). Oli kuitenkin myös oppilaita, jotka olivat päätyneet riskiryhmään toisen luokan keväänä erilaisten kehityspolkujen kautta. Osa oppilaista oli kuulunut ei-riskiryhmään joko ensimmäisen luokan keväänä tai toisen luokan syksynä, mutta kuului lopulta toisen luokan keväänä riskiryhmään. Esimerkiksi 12 oppilasta ei kuulunut riskiryhmään ensimmäisen luokan keväänä, mutta päätyi riskiryhmään toisen luokan syksynä ja pysyi siellä toisen luokan kevääseen asti. 11 oppilaista taas eivät kuuluneet riskiryhmään ensimmäisen luokan keväänä eikä toisen luokan syksynä, mutta päätyivät riskiryhmään lopulta toisen luokan keväänä.

Toisen luokan syksynä riskiryhmään kuului yhteensä 46 oppilasta, joista 24 (52.2%) olivat kuuluneet riskiryhmään jo ensimmäisen luokan keväästä lähtien ja 22 oppilasta (47.8%) olivat siirtyneet riskiryhmään vasta toisen luokan syksynä. Ne oppilaat, jotka kuuluivat riskiryhmään vasta toisen luokan syksynä, suoriutuivat tilastollisesti melkein merkitsevästi paremmin vähennyslaskusujuudessa ($k_a = 3.86$, $k_h = 0.89$, $k_{a_j\text{ärj}} = 28.41$) kuin molemmissa mittapisteissä riskiryhmään kuuluvat oppilaat ($k_a = 3.35$, $k_h = 0.94$, $k_{a_j\text{ärj}} = 19.00$) toisen luokan syksynä (efektin koko kohtalainen); $U = 156.00$, $Z = -2.45$, $p = .014$, $r = .41$).

Toisen luokan keväänä alle 25 persentiiliin riskiryhmään kuului yhteensä 45 oppilasta, joista 17 (37.8%) oli kuulunut riskiryhmään kaikkina mittausajankohdina ja 28 oppilasta (62.2%) oli kuulunut riskiryhmään joko toisen luokan syksystä tai toisen luokan keväästä alkaen. Toisen luokan syksyn tai kevään aikana riskiryhmään tulleet ($k_a = 4.79$, $k_h = 0.74$, $k_{a_j\text{ärj}} = 27.68$) erosivat vähennyslaskusujuudessa tilastollisesti merkitsevästi niistä riskiryhmän oppilaista ($k_a = 3.79$, $k_h = 1.10$, $k_{a_j\text{ärj}} = 15.29$), jotka olivat kuuluneet riskiryhmään kaikkina mittausajankohdina ensimmäisen luokan keväästä lähtien (efektin koko suuri); $U = 107.00$, $Z = -3.12$, $p = .002$, $r = .55$).



KUVIO 3. Riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien oppilaiden määrät sekä minuutissa oikein laskettujen vähennyslaskujen keskiarvot sujuvuuden mittausajankohtina

Laskusujuvuudessa mittausajankohdat erosivat tilastollisesti merkitsevästi toisistaan oppilailta, jotka olivat kuuluneet vähennyslaskuissa riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina ($p < .01$) (taulukko 4). Dunn-Bonferroni post hoc –testin mukaan muutosta on tapahtunut tilastollisesti merkitsevästi ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään ($p < .01$) välillä. Ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn eikä toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään väliltä löytynyt tilastollista merkitsevyyttä.

Laskusujuvuudessa mittausajankohdat erosivat tilastollisesti merkitsevästi toisistaan oppilailta, jotka olivat kuuluneet vähennyslaskuissa ei-riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina ($p < .001$) (taulukko 4). Dunn-Bonferroni post hoc –testin mukaan muutosta on tapahtunut tilastollisesti merkitsevästi ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn ($p < .001$), toisen luokan kevään ja toisen luokan kevään ($p < .001$) sekä toisen luokan syksyn ja kevään ($p < .001$) välillä.

Ei-riskiryhmän minuutissa oikein laskettujen vähennyslaskujen keskiarvojen erotukset erosivat tilastollisesti merkitsevästi riskiryhmän keskiarvojen erotuksista toisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn ($p < .001$), toisen luokan syksyn ja ensimmäisen luokan kevään ($p < .05$) sekä toisen luokan kevään ja ensimmäisen luokan kevään ($p < .001$) välisissä keskiarvojen erotuksissa (taulukko 5). Ei-riskiryhmän keskiarvojen erotusten ollessa suuremmat, eli ei-riskiryhmä kehittyi vähennyslaskuissa enemmän kuin riskiryhmä kaikkina mittausajankohtina. Tyttöjen ja poikien vähennyslaskusujuvuuden kehitystä on kuvattu liitteissä 5–8.

Vähennyslaskusujuvuudessa riskiryhmässä kaikkina mittausajankohtina olevia oppilaita oli 17, joista poikia oli 11 ja tyttöjä 6. Ei-riskiryhmässä kaikkina mittausajankohtina olevia oppilaita oli 129, joista poikia oli 64 ja tyttöjä 65. Riskiryhmän ja ei-riskiryhmän sukupuolijakaumat eivät eronneet toisistaan tilastollisesti merkitsevästi $\chi^2(1) = 1.37$, $p = 0.242$.

TAULUKKO 4. Kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien oppilaiden keskiarvot, mediaanit ja keskihajonnat.

	Riskiryhmä n= 17			Ei-riskiryhmä n= 129		
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh
1.lk kevät	2.62 _a	2.50	0.57	8.19 _a	7.50	3.37
2.lk syksy	3.26 _{ab}	3.50	1.05	10.33 _b	10.00	3.86
2.lk kevät	3.80 _b	4.00	1.10	13.60 _c	13.00	4.97
Friedman χ^2	11.44			153.05		
p	.003			.000		
Kendallin W	.34			.59		

Huom. Ne keskiarvot, joilla ei ole yhteistä alaindeksiä erosivat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

TAULUKKO 5. Kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien oppilaiden eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

	Riskiryhmä n= 17			Ei-riskiryhmä n= 129			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.lk syksy – 1.lk kevät	0.65	1.00	0.57	2.13	1.50	3.37	711.00	-2.36	.018	.35
2.lk kevät – 2.lk syksy	0.53	0.50	1.05	3.28	3.00	3.86	519.00	-3.53	.000	.53
2.lk kevät – 1.lk kevät	1.18	1.50	1.10	5.41	5.00	4.97	296.00	-4.89	.000	.73

Riskiryhmän poikien vähennyslaskusujuvuudessa oli tapahtunut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjä enemmän kehitystä toisen luokan syksyn ja ensimmäisen luokan kevään ($p < .01$) sekä toisen luokan kevään ja ensimmäisen luokan kevään ($p < .01$) välisenä aikana (taulukko 6). Riskiryhmän tyttöjen ja poikien keskiarvojen erotukset eivät eronneet tilastollisesti merkitsevästi toisistaan ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn ($p < .10$) välisenä aikana.

TAULUKKO 6. Kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskujen osalta riskiryhmään kuuluvien tyttöjen ja poikien eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

	Pojat n= 11			Tytöt n= 6			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.Ik syksy – 1.Ik kevät	1.09	1.00	0.49	-0.17	-0.25	1.13	9.50	-2.56	.010	.71
2.Ik kevät – 2.Ik syksy	0.64	1.00	0.71	0.33	0.00	1.69	20.50	-1.28	.201	.38
2.Ik kevät – 1.Ik kevät	1.73	2.00	0.90	0.17	0.25	0.98	7.00	-2.66	.008	.79

Markovin ketjuna kuvattuna ensimmäisen luokan keväänä 25 persenttiiliin kuuluvat riskiryhmän oppilaat kuuluivat 73 %:n todennäköisyydellä (pojat 74% ja tytöt 71%) riskiryhmään toisen luokan syksynä (kuvio 2, sivu 31). Riskiryhmästä siirryttiin 27 %:n todennäköisyydellä (pojat 26% ja tytöt 29%) ei-riskiryhmään ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn välillä. Ensimmäisen luokan keväänä ei-riskiryhmään kuuluvat oppilaat kuuluivat 86 %:n todennäköisyydellä (pojat 87% ja tytöt 86%) ei-riskiryhmään vielä toisen luokan syksynä. Ei-riskiryhmästä siirryttiin 14 %:n todennäköisyydellä riskiryhmään (pojat 13 % ja tytöt 14 %) ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn välillä.

Ensimmäisen luokan keväänä riskiryhmän oppilaat kuuluivat 67 %:n todennäköisyydellä (pojat 74 % ja tytöt 57 %) riskiryhmään edelleen toisen luokan keväänä (kuvio 2). Riskiryhmästä siirryttiin 33 %:n todennäköisyydellä (pojat 26 % ja tytöt 43 %) ei-riskiryhmään ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä. Ensimmäisen luokan keväänä ei-riskiryhmään kuuluvat oppilaat kuuluivat 86 %:n todennäköisyydellä (pojat 92 % ja tytöt 80 %) ei-riskiryhmään vielä vuoden päästä toisen luokan keväänä. Ei-riskiryhmästä siirryttiin 14 %:n todennäköisyydellä (pojat 8 % ja tytöt 20 %) riskiryhmään ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä.

Toisen luokan syksynä riskiryhmän oppilaat kuuluivat 63 %:n todennäköisyydellä (pojat 63 % ja tytöt 64 %) riskiryhmään vielä toisen luokan keväänä (kuvio 2). Riskiryhmästä siirryttiin 37 %:n todennäköisyydellä (pojat 37 % ja tytöt 36 %) ei-riskiryhmään toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään välillä. Ei-riskiryhmän oppilaat pysyivät toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään välillä 89 %:n todennäköisyydellä (pojat 93 % ja tytöt 86 %) ei-riskiryhmässä. Ei-riskiryhmästä siirryttiin 11 %:n todennäköisyydellä (pojat 7 % ja tytöt 14 %) riskiryhmään toisen luokan syksyn ja kevään välillä.

3.3 Riskiryhmän yksilölliset kehityspolut yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuden kehityksessä

Riskiryhmään kuuluvien oppilaiden kehityspolut yhteenlaskutaitojen kehityksessä olivat erilaisia (kuvio 4). Yhteenlaskutaidoissa oli seitsemän erilaista kehityspolkua (ks. taulukko 7). Kehityspolut määriteltiin yli yhden pisteen eroilla raakapistemäärissä eli oppilaan kehityksen katsottiin pysyneen samana, jos muutosta oli tapahtunut yhden tai 0.5 pisteen verran tai ei ollenkaan. 11 oppilaalla kehitys oli koko ajan nouseva ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn sekä toisen luokan syksyn ja kevään välillä, eli oppilaat paransivat pistemääriään jokaisella mittauskerralla. Oppilaat saivat siis vähintään 1.5 laskua enemmän oikein minuutin aikana mittausajankohdasta toiseen. Koko ajan nousevan kehityksen ryhmässä esimerkiksi eräs oppilas sai ensimmäisen luokan keväänä 6.5 laskua, toisen luokan syksynä 14.5 ja toisen luokan keväänä 17.5 yhteenlaskua oikein minuutin aikana. Kuudella oppilaalla ei ollut tapahtunut kehityksessä muutosta alkuopetuksen aikana. Eräällä oppilaalla oikein laskettujen yhteenlaskujen lukumäärä minuutissa oli ensimmäisen luokan keväänä 2.5, toisen luokan syksynä 3.5 ja toisen luokan keväänä neljä.

Yhteensä neljällä oppilaalla kehitys oli mittausajankohtien välillä joko ensin laskeva ja sitten nouseva tai ensin nouseva ja sitten laskeva. Eräs oppilas sai esimerkiksi ensimmäisen luokan keväänä 6.5, toisen luokan syksynä 4.5 ja toisen luokan keväänä kahdeksan yhteenlaskua oikein minuutin aikana. 24 oppilaalla

yhteenlaskutaidon kehitys vaihteli siten, että kehitys oli mittauskohtien välillä joko ensin pysyvä ja sen jälkeen nouseva tai ensin nouseva ja sen jälkeen pysyvä. Esimerkiksi eräällä oppilaalla minuutissa oikein laskettujen yhteenlaskujen määrä oli ensimmäisen luokan keväänä 4.5, toisen luokan syksynä yhdeksän ja toisen luokan keväänä 9.5.

TAULUKKO 7. Riskiryhmän kehityspolut yhteenlaskun raakapisteiden mukaan

	Pojat	Tytöt	Yhteensä
Nouseva ja nouseva ¹	9	2	11
Nouseva ja laskeva ²	1	1	2
Nouseva ja pysyvä ³	5	7	12
Laskeva ja nouseva ⁴	1	1	2
Laskeva ja laskeva ⁵	-	-	-
Laskeva ja pysyvä ⁶	-	-	-
Pysyvä ja nouseva ⁷	5	7	12
Pysyvä ja laskeva ⁸	1	0	1
Pysyvä ja pysyvä ⁹	4	2	6

Huom.

1 Kehitystrendi nouseva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

2 Kehitystrendi nouseva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja laskeva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

3 Kehitystrendi nouseva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja pysyvä 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

4 Kehitystrendi laskeva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja nouseva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

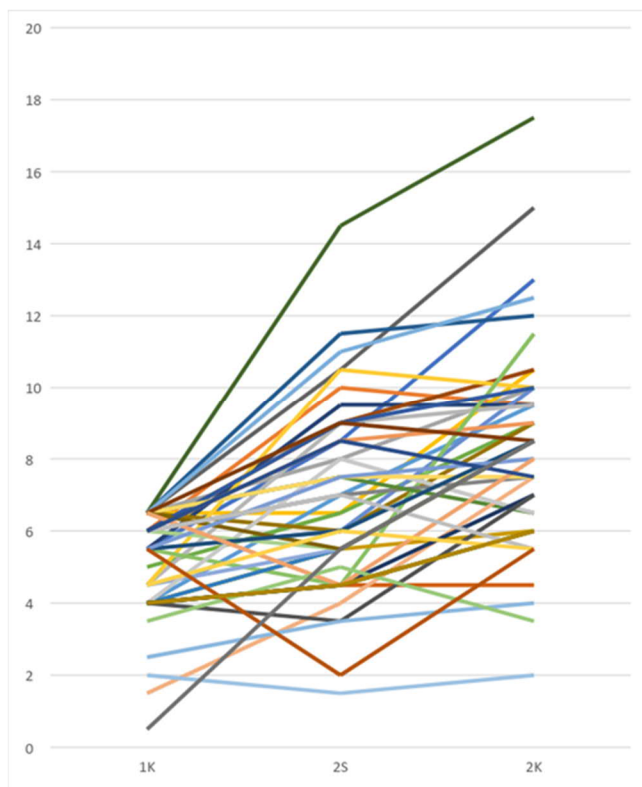
5 Kehitystrendi laskeva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

6 Kehitystrendi laskeva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja pysyvä 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

7 Kehitystrendi pysyvä 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja nouseva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

8 Kehitystrendi pysyvä 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja laskeva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

9 Kehitystrendi pysyvä 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja laskeva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen



KUVIO 4. Riskiryhmään kuuluvien oppilaiden yksilölliset kehityspolut yhteenlaskutaitojen sujuvuudessa

Riskiryhmään kuuluvien oppilaiden kehityspolut vähennyslaskutaitojen kehityksessä olivat hyvin erilaisia (kuvio 5). Vähennyslaskutaidoissa löytyi kuusi erilaista kehityspolkua (ks. taulukko 8). Kehityspolut määriteltiin yli yhden pisteen eroilla raakapistemäärissä, eli oppilaan kehityksen katsottiin pysyneen samana, jos kehitystä oli tapahtunut yhden tai 0.5 pisteen verran tai ei ollenkaan. Kolmella oppilaalla kehitys oli koko ajan nouseva ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn sekä toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään välillä, eli oppilaat paransivat pistemääriään jokaisella mittauskerralla, eli saivat vähintään 1.5 vähennyslaskua enemmän oikein minuutin aikana mittausajankohdasta toiseen. Koko ajan nousevan kehityksen ryhmässä esimerkiksi eräs oppilas sai ensimmäisen luokan keväänä 2.5 laskua, toisen luokan syksynä kuusi ja toisen luokan keväänä 8.5 yhteenlaskua oikein minuutin aikana. 12 oppilaalla ei ollut tapahtunut kehityksessä muutosta alkuopetuksen aikana. Eräällä oppilaalla oi-

kein laskettujen yhteenlaskujen lukumäärä minuutissa oli esimerkiksi ensimmäisen luokan keväänä kolme, toisen luokan syksynä neljä ja toisen luokan keväänä neljä.

Yhteensä neljällä oppilaalla kehitys oli mittausajankohtien välillä joko ensin laskeva ja sitten nouseva tai ensin nouseva ja sitten laskeva. Eräs oppilas sai esimerkiksi ensimmäisen luokan keväänä kolme, toisen luokan syksynä kahdeksan ja toisen luokan keväänä kuusi yhteenlaskua oikein minuutin aikana. 14 oppilaalla vähennyslaskutaidon kehitys vaihteli siten, että kehitys oli mittauskohtien välillä joko ensin pysyvä ja sen jälkeen nouseva tai ensin nouseva ja sen jälkeen pysyvä. Esimerkiksi eräällä oppilaalla minuutissa oikein laskettujen vähennyslaskujen määrä oli ensimmäisen luokan keväänä kaksi, toisen luokan syksynä neljä ja toisen luokan keväänä neljä.

TAULUKKO 8. Riskiryhmän kehityspolut vähennyslaskun raakapisteiden mukaan

	Pojat	Tytöt	Yhteensä
Nouseva ja nouseva ¹	2	1	3
Nouseva ja laskeva ²	2	1	3
Nouseva ja pysyvä ³	4	2	6
Laskeva ja nouseva ⁴	0	1	1
Laskeva ja laskeva ⁵	-	-	-
Laskeva ja pysyvä ⁶	-	-	-
Pysyvä ja nouseva ⁷	4	4	8
Pysyvä ja laskeva ⁸	-	-	-
Pysyvä ja pysyvä ⁹	8	4	12

Huom.

1 Kehitystrendi nouseva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

2 Kehitystrendi nouseva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja laskeva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

3 Kehitystrendi nouseva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja pysyvä 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

4 Kehitystrendi laskeva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja nouseva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

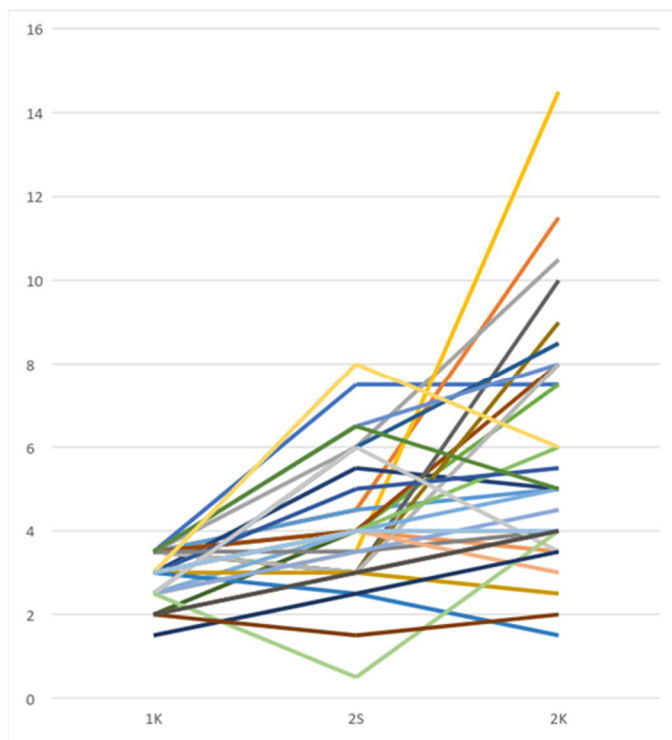
5 Kehitystrendi laskeva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

6 Kehitystrendi laskeva 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja pysyvä 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

7 Kehitystrendi pysyvä 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja nouseva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

8 Kehitystrendi pysyvä 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja laskeva 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen

9 Kehitystrendi pysyvä 1. luokan keväästä 2. luokan syksyyn ja 2. luokan syksystä 2. luokan kevääseen



KUVIO 5. Riskiryhmään kuuluvien oppilaiden yksilölliset kehityspolut vähennyslaskutaitojen sujuvuudessa

3.4 Riskiryhmän yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuserot

Ensimmäisen luokan keväänä riskiryhmän yhteenlaskutaidot olivat sujuvampia kuin vähennyslaskutaidot ($p < .001$) raakapisteillä laskettuna (taulukko 9; ks. myös kuviot 1 ja 3, sivuilta 26 ja 34). Toisen luokan aikana riskiryhmä oli edelleen sujuvampi yhteenlaskutaidoissa sekä syksyllä ($p < .01$) että keväällä ($p < .001$). Osa oppilaista kuului riskiryhmään pelkästään yhteenlaskujen kohdalla, kun taas vähennyslaskuissa he kuuluivat ei-riskiryhmään.

Ensimmäisen luokan keväänä riskiryhmään kuuluvien poikien yhteenlaskutaidot olivat sujuvampia kuin vähennyslaskutaidot ($p < .001$) raakapisteillä laskettuna. Toisen luokan aikana riskiryhmään kuuluvat pojat olivat edelleen sujuvampia yhteenlaskutaidoissa sekä syksyllä ($p < .01$) että keväällä ($p < .01$). Osa pojista kuului riskiryhmään pelkästään yhteenlaskujen kohdalla, kun taas vähennyslaskuissa he kuuluivat ei-riskiryhmään.

Toisen luokan keväänä riskiryhmään kuuluvien tyttöjen yhteenlaskutaidot olivat sujuvampia kuin vähennyslaskutaidot ($p < .01$) raakapisteillä laskettuna. Toisen luokan aikana riskiryhmään kuuluvat tytöt olivat edelleen sujuvampia yhteenlaskutaidoissa sekä syksyllä ($p < .001$) että keväällä ($p < .001$). Osa tytöistä kuului riskiryhmään pelkästään yhteenlaskujen kohdalla, kun taas vähennyslaskuissa he kuuluivat ei-riskiryhmään.

TAULUKKO 8. Riskiryhmän yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuserot

Raakapisteet			
1. lk kevät	Neg. 37	K _{a järj} yhteenlasku	23.84
	Pos. 6	K _{a järj} vähennyslasku	10.67
	Sid. 3	Z = -4.96	
		p = .000	
		$\eta^2 = .54$	
2. lk syksy	Neg. 23	K _{a järj} yhteenlasku	16.30
	Pos. 6	K _{a järj} vähennyslasku	10.00
	Sid. 1	Z = -3.42	
		p = .001	
		$\eta^2 = .39$	
2. lk kevät	Neg. 17	K _{a järj} yhteenlasku	12.88
	Pos. 4	K _{a järj} vähennyslasku	3.00
	Sid. 3	Z = -3.61	
		p = .000	
		$\eta^2 = .54$	

4 POHDINTA

4.1 Tulosten tarkastelua

Tutkimuksen tavoitteena oli seurata yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuden kehitystä alkuopetuksen aikana kolmena eri mittausajankohtana. Tutkimus keskittyi erityisesti yhteen- ja vähennyslaskusujuvuuden kannalta riskiryhmään eli heikoimpaan 25 persentiiliin kuuluvien oppilaiden kehitykseen ryhmä- ja yksilötasolla. Tutkimuksessa tutkittiin myös sukupuolieroja laskusujuvuudessa, pyrittiin selvittämään todennäköisyyksiä riskiryhmässä pysymiseen mittausajankohdasta toiseen sekä tunnistamaan erilaisia kehityspolkuja. Lisäksi vertailtiin yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sujuvuuseroja riskiryhmässä.

Tutkimuksessa havaittiin, että riskiryhmään kuuluvien oppilaiden yhteen- ja vähennyslaskutaito oli heikompi ei-riskiryhmään verrattuna: ensimmäisen luokan keväänä ei-riskiryhmä laski keskimäärin noin puolet enemmän yhteen- ja vähennyslaskuja oikein minuutin aikana kuin riskiryhmä. Tulos on linjassa Monosen, Aunion, Hotulaisen ja Ketosen (2013) tutkimuksen kanssa, jossa ensimmäisen luokan syksyllä heikoimmin suoriutuvien lasten ryhmä laski keskimäärin puolet vähemmän yhteenlaskuja kuin tavanomaisesti laskevat oppilaat. Kaikkina mittausajankohtina riskiryhmään kuuluneiden ja ei-riskiryhmään kuuluneiden oikein laskettujen laskujen erot kasvoivat vielä ajan kuluessa: ei-riskiryhmä laski toisen luokan keväänä keskimäärin yli kaksi kertaa enemmän yhteenlaskuja ja yli kolme kertaa enemmän vähennyslaskuja riskiryhmään verrattuna. Riskiryhmässä laskettiin keskimäärin 1.5 yhteenlaskua ja yksi vähennyslasku enemmän toisen luokan keväänä verrattuna ensimmäisen luokan kevääseen. Paukkerin ja kumppaneiden (2015) tutkimuksessa on saatu samankaltaisia tuloksia, sillä heikkojen ryhmän aritmetiikan taidot eivät kehittyneet juurikaan ensimmäisen ja toisen luokan aikana, kun taas kahden muun ryhmän taidot kehittyivät. Myös Jordanin ja kumppaneiden (2003a) tutkimuksessa ne lapset, joilla oli peruslaskutaidon sujuvuuden ongelmia, kehittyivät varsin vähän ja hitaam-

min aikarajallisissa laskutehtävissä verrattuna tavanomaisesti suoriutuviin. Heikosti laskevien lasten tulokset kolmannen luokan lopussa olivat lähes samoja kuin toisella luokalla (Jordan ym., 2003a).

Tämän tutkimuksen tuloksissa oli havaittavissa matteusvaikutusta, sillä erot riskiryhmän ja ei-riskiryhmän välillä kasvoivat ajan myötä entisestään. On paljon aikaisempaa näyttöä siitä, että kaikkein heikoimmat oppilaat ovat riskissä jäädä entistä enemmän jälkeen ikätovereistaan (Morgan ym., 2009, 2011; Murphy ym., 2007). Aikaisemmissa tutkimuksissa on kuitenkin myös havaittu, että heikkojen ja tavanomaisesti suoriutuvien väliset taidot tasoittuvat ajan myötä (esim. Geary ym., 2012b; Paukkeri ym., 2015). Tässä tutkimuksessa ensimmäisen ja viimeisen mittausajankohdan välillä oli vain noin vuosi ja mittaus tehtiin alkuopetuksessa, mikä voi olla yhteydessä siihen, että tässä tutkimuksessa taitojen tasoittumista ei ollut nähtävissä. Aikaisemmassa tutkimuksessa oppilaiden taitoerot on havaittu tasoittuvan viidennelle luokalle tultaessa yhteenlaskutehtävien osalta (Geary ym., 2012b).

Poikien lukumäärä ei eronnut tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen lukumäärästä riskiryhmään kuulumisessa eri mittausajankohtina yhteen- eikä vähennyslaskusujuvuudessa. Toisen luokan syksynä ja keväänä riskiryhmään kuului kuitenkin 50 % enemmän poikia kuin tyttöjä. Pojat olivat siis kohonneemmassa riskissä olla riskiryhmässä yhteen- ja vähennyslaskusujuvuudessa. Aikaisemmissa tutkimuksissa on havaittu, että laskemisen vaikeuksien riskiryhmässä kaikista heikoiten suoriutuvista suurin osa on poikia ja hieman alle keskitason suoriutuvista suurin osa on tyttöjä (Geary ym., 2009a; Murphy ym., 2007), tosin tulokset eivät olleet tilastollisesti merkitseviä. Tässä tutkimuksessa käytettiin vain yhtä katkaisurajaa, minkä takia ei pystytty selvittämään, onko suurin osa kaikista heikoiten suoriutuvista poikia ja hieman alle keskitason suoriutuvista tyttöjä. Joissakin tutkimuksissa taas tyttöjen kohdalla matematiikan oppimisvaikeuksien on todettu olevan yleisempiä (esim. Landerl & Moll, 2010), kun taas joissakin tutkimuksissa tyttöjen aritmeettiset taidot ovat olleet poikia parempia (esim. Wei ym., 2012). Useissa aikaisemmissa tutkimuksissa ei ole löydetty sukupuolieroja alkuopetuksen aikana (esim. Aunio & Niemivirta, 2010; Aunola ym., 2004;

Lachance & Mazzocco, 2006; Mononen & Aunio, 2013), kun taas joissakin tutkimuksissa sukupuolieroja laskusujuvuudessa on havaittu, mutta erot ovat tulleet näkyviin vasta 10–11 ikävuodesta eteenpäin tai myöhemmin (Li ym., 2012; Hyde ym., 1990; Reilly ym., 2015; Royer, Tronsky, Chan, Jackson, & Marchant, 1999). Tämä saattaa selittää sitä, että tässä tutkimuksessa sukupuolieroja ei ollut havaittavissa, sillä tutkimus tehtiin alkuopetuksessa. Lisäksi aikaisemmissa tutkimuksissa on todettu, että Suomen kaltaisissa tasa-arvoisissa maissa sukupuolierot ovat hyvin pieniä (Guiso, Monte, Sapienza, & Zingales, 2008), mikä saattaa selittää sitä, että tässä tutkimuksessa tilastollisesti merkitseviä sukupuolieroja ei ollut havaittavissa riskiryhmään kuulumisessa.

Riskiryhmään kuuluvien poikien puolet suurempi määrä tyttöihin verrattuna voi olla yhteydessä alkuopetuksen aikana vielä esimerkiksi kielen kehitykseen sekä laskustrategiavalintoihin. Tyttöjen on katsottu pärjäävän erityisesti aritmeettisissa taidoissa, kuten yhteen- ja vähennyslaskussa, paremmin siksi, että he ovat poikia edellä kielellisissä taidoissa (Wei ym., 2012). Lisäksi tyttöjen on havaittu käyttävän enemmän apuvälineitä ja sormia laskemisen tukena, kun taas pojat turvautuvat enemmän vastauksen suoraan muistista hakemiseen (Carr & Davis, 2002; Carr & Jessup, 1997; Fennema ym., 1998). Pojilla saattaa tästä johtuen tulla laskiessa enemmän virheitä kuin tytöillä. Legewie ja Diprete (2012) ovat ehdottaneet, että pojat olisivat alttiimpia oppimista heikentäville kielteisille ympäristötekijöille. Tällaisia kielteisiä tekijöitä voivat olla esimerkiksi tovereiden epäsuotuisa vaikutus sekä koulun toimintatavat ja resurssit. Poikien on myös katsottu olevan tyttöjä äänekkäämpiä ja herkempiä häiriöille, kun oppilaat ovat itse saaneet arvioida tyttöjen ja poikien välistä koulumenestystä (Francis, 2000). Esimerkiksi Aunio ja Niemivirran (2010) tutkimuksessa pojilla havaittiin enemmän keskittymis- ja tarkkaavaisuusongelmia laskemisessa, vaikka sukupuolieroja perusaritmetiikan taidoissa alkuopetuksen aikana ei löytynyt. Tässä tutkimuksessa ei tosin tutkittu muita matematiikan kehitykseen yhteydessä olevia tekijöitä tyttöjen ja poikien välillä.

Oppilailta oli hyvin erilaisia kehityspolkuja: osa oppilaista kuului riskiryhmään tai ei-riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina, kun taas osa oppilaista

saattoi kuulua ensin ei-riskiryhmään ja päätyä lopuksi riskiryhmään, tai kuulua ensin riskiryhmään ja päätyä lopuksi ei-riskiryhmään. Toisen luokan syksynä kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskutaitojen osalta riskiryhmään kuuluvat oppilaat olivat heikompia yhteenlaskutaidoissa kuin oppilaat, jotka tulivat riskiryhmään vasta toisen luokan syksynä. Toisen luokan kevään mittausajankohtana toisen luokan syksynä tai keväänä riskiryhmään tulleet eivät eronneet juurikaan oppilaista, jotka olivat kuuluneet riskiryhmään jokaisena mittausajankohtana. Toisen luokan syksyn mittauksessa kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskutaitojen osalta riskiryhmään kuuluvat oppilaat olivat heikompia vähennyslaskutaidoissa kuin oppilaat, jotka tulivat riskiryhmään vasta toisen luokan syksynä. Toisen luokan kevään mittausajankohtana toisen luokan syksynä tai keväänä riskiryhmään tulleet oppilaat olivat sujuvampia kuin oppilaat, jotka olivat kuuluneet riskiryhmään jokaisena mittausajankohtana. Myös aikaisempien tutkimustulosten mukaan niillä lapsilla, jotka ovat kuuluneet riskiryhmään alusta alkaen oli havaittavissa hitaampaa laskutaitojen kehitystä kuin niillä lapsilla, jotka olivat päätyneet riskiryhmään vasta myöhemmässä vaiheessa (Morgan ym., 2009).

Laskusujuvuudessa oli tapahtunut kehitystä yhteen- ja vähennyslaskuissa ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä oppilailta, jotka olivat kuuluneet riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina sekä oppilailta, jotka olivat kuuluneet ei-riskiryhmään kaikkina mittausajankohtina. Ryhmien keskiarvojen erotukset erosivat toisistaan yhteen- ja vähennyslaskuissa ei-riskiryhmän kehittyessä riskiryhmää enemmän ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä. Myös Paukkerin ja kumppaneiden (2015) tutkimuksessa löytyi tilastollista merkitsevyyttä alaryhmien välisistä eroista koko mittausjakson ajan aritmeettisissa taidoissa heikoimpien ryhmän jäädessä suuresti jälkeen muiden ryhmien kehityksestä.

Yhteenlaskutaidoissa riskiryhmään kuuluvat oppilaat pysyivät 59%:n todennäköisyydellä ja vähennyslaskutaidoissa 67%:n todennäköisyydellä riskiryhmässä ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan kevään välillä, eli riskiryhmässä pysyminen oli varsin pysyvää. Martinin ja kollegoiden (2012) tutkimuk-

sessä saatiin samankaltaisia tuloksia, koska laskusujuvuuden riskiryhmässä pysyttiin 62 %:n todennäköisyydellä, tosin tutkimuksessa käytettiin 32 persenttiin katkaisurajaa, kun taas tässä tutkimuksessa katkaisurajana oli 25 prosenttia. Aikaisemmissa tutkimuksissa on pyritty selvittämään, miksi osa oppilaista siirtyy alkuopetuksen aikana pois riskiryhmästä. Syitä on muun muassa etsitty oppilaiden ikäeroista (Boardman, 2006; Dowker, 2008).

Yhteenlaskujen osalta riskiryhmään kuuluvilla oppilailla oli yhteensä seitsemän erilaista kehityspolkua, esimerkiksi 11 oppilasta oli parantanut tuloksiaan vähintään 1.5 pistettä mittauskerrasta seuraavaan, kun taas kuusi oppilasta ei ollut parantanut oikein laskettujen yhteenlaskujen määrää mittauskerrasta toiseen yli yhdellä pisteellä. Vähennyslaskuissa riskiryhmään kuuluvilla oli yhteensä kuusi erilaista kehityspolkua, esimerkiksi kolmella oppilaalla kehitys oli ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn välillä nouseva, mutta toisen luokan syksyn ja toisen luokan kevään aikana laskeva. Aikaisemmasta tutkimuksesta löytyy myös samankaltaista oppilaiden jaottelua erilaisiin polkuihin, esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kategorisoimisesta alkuopetuksen aikana erilaisiin oppimispolkuihin (Lakka, 2014). Tämän tutkimuksen riskiryhmän kehityspolut sekä yhteen- että vähennyslaskussa olivat linjassa Metsämuurosen (2010) tutkimuksen kanssa, jossa seurattiin suomalaisten oppilaiden yksilöllisiä kehityspolkuja laskutaidon kehityksessä. Metsämuuronen löysi yhteensä yhdeksän erilaista muutosprofiilia yli 3500 suomalaisten peruskoululaisien matematiikan osaamisen kehityksessä kolmen eri mittapisteen välillä (3.lk, 6.lk & 9lk.). Tämä tutkimus tosin erosi Metsämuurosen tutkimuksesta siinä, että kehityspolkuja seurattiin vain riskiryhmän oppilaiden kohdalla. Suurin osa Metsämuurosen tutkimuksen oppilaista (84%) noudatti joko "voimakkaasti kasvavaa" tai "tasaantuvasti kasvavaa" trendiä matematiikan taitojen kehityksessä. Myös tässä tutkimuksessa suurin osa riskiryhmän oppilaiden yksilöllisistä kehityspoluista noudatti nousevaa trendiä.

Riskiryhmään kuuluvat oppilaat olivat keskimäärin yhteenlaskuissa sujuvampia kuin vähennyslaskuissa kaikissa mittapisteissä. Myös Monosen ja kolle-

goiden (2013) tutkimus oli linjassa tämän tuloksen kanssa, koska heidän tutkimuksessaan oppilaat laskivat ensimmäisen luokan syksyllä kahden minuutin aikana keskimäärin 11 yhteenlaskua, kun taas vähennyslaskuja laskettiin vain viisi, lisäksi 8 % oppilaista ei osannut laskea yhteenlaskuja ollenkaan, kun taas vähennyslaskuja ei osannut vielä laskea 42 % oppilaista. Tulos saattaa selittyä sillä, että alkuopetuksessa keskitytään ensin yhteenlaskujen opettamiseen ennen vähennyslaskuihin siirtymistä, jolloin yhteenlaskujen automatisoituminen on jo kehittynyt paremmaksi vähennyslaskuihin verrattuna. Tässä tutkimuksessa osa oppilaista kuului riskiryhmään pelkästään yhteenlaskuissa, kun taas vähennyslaskujen osalta he kuuluivat ei-riskiryhmään. Tämä saattaa kuitenkin selittyä sillä, että valittaessa heikointa 25 persentiiliä oppilaista yhteen- ja vähennyslaskuissa ensimmäisen luokan kevään, niin yhteenlaskun riskiryhmään valikoitui 46 oppilasta, kun taas vähennyslaskujen riskiryhmään valikoitui vain 33 oppilasta.

4.2 Tutkimuksen arviointia ja jatkotutkimushaasteet

Tutkimuksen vahvuutena on se, että kyseessä oli pitkittäistutkimus, sillä aikaisempien pitkittäistutkimusten määrä on Suomessa vähäinen. Tutkimus antoi erityisesti uutta tietoa yhteen- ja vähennyslaskusujuvuuden yksilöllisistä kehityspoluista, sillä suurin osa aikaisemmista tutkimuksista on keskittynyt ryhmätason tutkimukseen. Tässä tutkimuksessa keskityttiin laskusujuvuuden kehitykseen vain alkuopetuksessa yhden vuoden aikana, joten mittausten välinen aika saattoi olla liian lyhyt, esimerkiksi sukupuolierojen tai ryhmien tasoerojen tasoittumisen havaitsemiseen. Jos tutkimus olisi toteutettu pidemmällä aikavälillä, sukupuolten ja ryhmien erot olisivat voineet ilmetä eri tavalla. Jatkotutkimuksen kannalta olisi hyvä tehdä lisää pitkittäistutkimusta laskusujuvuuden kehityksestä pidemmällä aikavälillä sekä tutkia laskusujuvuutta myös yksilötasolla, esimerkiksi eri-

laisia kehityspolkuja tutkimalla, mikä lisäisi laskusujuvuuden kehityksen moniulotteisuuden ymmärtämistä. Lisäksi mukaan voitaisiin ottaa myös kerto- ja jakolaskujen sujuvuuden hallinta ylempillä luokilla.

Tutkimuksen luotettavuutta lisäsi tutkimuksessa käytetyt mittarit, sillä ne pysyivät samanlaisina eri mittausajankohtina, jolloin tulosten tulkinta laskusujuvuuden kehityksen tarkastelusta helpottui. Ongelmallista kuitenkin käytetyissä aikarajoitteisissa mittareissa oli se, että ne eivät pysty esimerkiksi osoittamaan millaisia strategioita lapsi käyttää ja valitsee laskiessaan yhteen- ja vähennyslaskuja. Aikarajoitetun testin ja muistista suoraan hakemisen väliltä on löytynyt negatiivinen yhteys (Henry & Brown, 2008). Aikarajoitteiset testit voivat aiheuttaa ahdistuksen tunteita oppilaissa, millä voi olla kielteinen vaikutus testisuoriutumiseen (Boaler, 2012; Henry & Brown, 2008; Ramirez, Gunderson, Levine, & Beilock, 2013). Tutkimuksessa käytetty mittaustapa on todettu kuitenkin luotettavaksi ja hyväksi tavaksi mitata laskusujuvuutta (Woodcock IVTM; Schrank ym., 2014).

Tutkimusjoukko oli suhteellisen suuri (n=195), mutta tässä tutkimuksessa keskityttiin erityisesti riskiryhmän tarkasteluun (heikoin 25 persentiiliä), jolloin tutkimusjoukon kokoa voidaan pitää tutkimuksen rajoitteena ja se voi vaikuttaa tutkimustulosten yleistettävyyteen. Jatkotutkimuksia varten olisi hyvä kasvattaa otoksen kokoa, jotta riskiryhmästä saataisiin kattavampi. Rajoituksena voidaan pitää myös sitä, että tutkimuksessa ei ole käytetty satunnaisotantamenetelmää, sillä tutkimusaineisto oli kerätty yhdeltä alueelta Suomessa, jolloin se ei ole välttämättä edustava otos koko Suomen alueelta, esimerkiksi monikulttuurisuuden näkökulmasta. Tästä huolimatta tutkittavien oppilaiden ryhmä antaa viitteitä suomenkielisten yleisopetuksessa opiskelevien lasten yhteen- ja vähennyslaskutaidon sujuvuuden kehityksestä. TIMMS-tutkimuksen mukaan koulujen väliset sekä alueelliset erot ovat Suomessa varsin pieniä (Vettenranta ym., 2016), mikä antaa myös viitteitä sille, että tästä tutkimuksesta saadut tulokset ovat yleistettävissä.

Tutkimukseen osallistuvien oppilaiden erityisopetusta ei ole otettu ollenkaan huomioon seurannan aikana, mikä voi myös vaikuttaa tutkimuksen tuloksiin. Yksilötasolla tarkasteltuna tässä tutkimuksessa oli mukana oppilaita, jotka kuuluivat ensimmäisenä mittausajankohtana riskiryhmään, mutta paransi suoritustaan huomasti ja siirtyi ei-riskiryhmään toisella mittauskerralla. Tämä tutkimus ei kuitenkaan pystynyt tavoittamaan sitä, mistä mittava laskusujuvuuden kehitys johtui. Jatkotutkimuksia ajatellen, olisi mielenkiintoista saada selville mitkä asiat ovat yhteydessä oppilaiden kehitykseen yksilötasolla. Matematiikan taitotasoihin erityisesti koulupolun alussa saattaa vaikuttaa lisäksi oppilaiden jopa 12 kuukauden ikäero (Boardman, 2006; Dowker, 2008; Hojnosi, Silbergliitt, & Floyd, 2009). Todennäköisesti alkuopetuksen aikana laskutaidoissa tapahtuu paljon kehityksellisiä muutoksia, joita tämä tutkimus ei pystynyt tavoittamaan.

Aikaisemmissa tutkimuksissa on usein jaettu riskiryhmä alle 10 persentiiliin ja 11–25 persentiiliin ryhmään, mikä erottelee ne lapset, joilla on lievempiä haasteita ja ne, joiden haasteet ovat vaikeampia. Tämän tutkimuksen kohdalla tällaista jaottelua ei tehty, mikä saattaa vaikuttaa tutkimustuloksiin. Riskiryhmän kohdalla ei saatu selville esimerkiksi sitä, kuinka suuri osuus jossain vaiheessa ei-riskiryhmään siirtyneistä olisivat kuuluneet hieman alle keskitason suoriutuviin ja ketkä heikoimpaan 10 persentiiliin. 25 persentiilirajan käyttö on kuitenkin todettu pitävän sisällään vähemmän vääriä positiivisia kuin esimerkiksi 35 persentiilin katkaisurajaan verrattuna. 25 persentiilirajaa on käytetty yleisesti aikaisemmissa tutkimuksissa, mikä lisää tulosten vertailtavuutta aikaisempien tutkimusten kanssa. Tässä tutkimuksessa heikoimman 10 persentiilin katkaisurajan käyttö olisi jättänyt tutkimusjoukon hyvin pieneksi, mitä ei olisi ollut mielekäästä tutkia. Jatkotutkimuksia ajatellen suurempi tutkimusjoukko voisi mahdollistaa kahden katkaisurajan käytön, millä tavalla saataisiin lisää tietoa siitä, millaisia oppilaita eri katkaisurajoin muodostettuihin ryhmiin päätyy.

Tässä tutkimuksessa vahvuutena oli se, että sukupuolijakauma oli hyvin tasainen, sillä tutkimukseen osallistui 100 tyttöä ja 95 poikaa. Yhden katkaisurajan käytön vuoksi tässä tutkimuksessa ei saatu kuitenkaan selville oliko suurin osa kaikista heikoiten suoriutuvista (<10 persentiiliä) tyttöjä vai poikia eikä sitä,

oliko lähellä 25 persentiilin katkaisurajaa olevissa enemmän tyttöjä vai poikia. Kahden katkaisurajan avulla saataisiin lisää tietoa myös sukupuolten eroista riskiryhmän sisällä.

Suomalaisissa matematiikan oppimisvaikeustutkimuksissa on keskitytty enimmäkseen alle kouluikäisiin ja alkuopetuksen oppilaisiin, joten olisi tärkeää saada tietoa myös muista alakouluikäisistä (Väisänen, 2017). Myös vanhempien koulutustaustan yhteyttä matemaattiseen osaamiseen olisi syytä tutkia enemmän, koska tästä yhteydestä on näyttöä aikaisemmissa tutkimuksissa (esim. Vetterranta ym., 2016). Aikaisemmissa tutkimuksissa sukupuolten erot matemaattisten taitojen kehityksessä ovat olleet keskenään hyvin ristiriitaisia, joten sukupuolten eroja olisi syytä tutkia lisää ja selvittää mistä vaihtelevat tutkimustulokset sukupuolten välillä voisivat johtua. Jatkotutkimusten kannalta olisi hyvä selvittää myös opettajan osuutta oppilaiden matemaattiseen kehitykseen, sillä opettajan omalla toiminnalla on varmasti myös yhteys siihen, miten lapset innostuvat matematiikasta. Kodin merkitystä matemaattiselle kehitykselle olisi myös hyvä tutkia, sillä kotona saadut kokemukset matematiikasta vaikuttavat varmasti oppilaiden matemaattiseen kehitykseen. Lisäksi laskusujuvuuteen yhteydessä olevia asioita, kuten työmuistin ja tarkkaavaisuuden yhteyttä, olisi hyvä tutkia enemmän, myös sukupuolierojen näkökulmasta.

4.3 Käytännön merkitys

Matematiikka on kumuloituva oppiaine, minkä takia olisi tärkeää saada vankka pohja matemaattiselle kehitykselle jo varhaisessa vaiheessa. Kun peruslaskutaidot ovat hallinnassa, aletaan harjoittelemaan haastavampia laskuja, ja tätä kautta kehittää matemaattista osaamista. Yhteen- ja vähennyslaskutaitojen sekä laskustrategioiden hallinta ovat keskeisiä ensimmäisen luokan oppisisältöjä matematiikassa. Näiden taitojen omaksuminen vaatii varhaisia matemaattisia taitoja, kuten lukujonotaitoja (Locuniak & Jordan, 2008). Matemaattisia taitoja on tärkeää

harjoitella jo varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa, jotta varhaiset matemaattiset taidot olisivat lapsilla mahdollisimman hyvät alkuopetukseen siirryttäessä.

Laskusujuvuus on tärkeä osa matemaattista osaamista, koska heikko laskusujuvuus ennakoi usein matemaattisia oppimisvaikeuksia (Geary, 2004; Mazzocco ym., 2008). Väisäsen (2017) tutkimuksen mukaan laskemisen sujuvuus pysyi kohtalaisen muuttumattomana suhteessa muiden lasten laskemisen sujuvuuteen toiselta luokalta viidennelle luokalle. Tutkimuksessa laskemisen sujuvuutta selitti parhaiten lapsen aikaisempi laskemisen sujuvuus. Laskemisen sujuvuuden taso on siis varsin pysyvä. Laskemisen sujuvuuden pysyvyys muihin oppilaisiin nähden ja riskiryhmässä pysymisen suuri todennäköisyys ovat havaintoja, mitkä ovat tärkeää ottaa huomioon tukitoimien suunnittelussa ja toteutuksessa. Aunolan ja kumppaneiden (2004) tutkimuksessa saatiin viittausta siihen, että eriytymistä matemaattisessa osaamistasossa tapahtuu jo ensimmäisinä kouluvuosina. Erityisopetuksen resursseja kaikilla tuen portailla olisi syytä kohdistaa enemmän juuri alkuopetukseen, jotta laskusujuvuus ja muut matemaattiset taidot pääsisivät kehittymään mahdollisimman varhain.

Vuosina 2009–2010 Suomessa annettiin erityisopetusta alakoulussa yli kaksi kertaa vähemmän matematiikan oppimisen vaikeuksiin kuin luku- tai kirjoitushäiriöihin, kun taas yläkoulun puolella matematiikan ongelmien takia erityisopetusta annettiin lähes kolme kertaa enemmän kuin lukemisen tai kirjoittamisen ongelmiin (Tilastokeskus, 2010). Voi siis olla, että ongelmat peruslaskutaidoissa, kuten yhteen-, vähennys-, jako- ja kertolaskujen sujuvuusongelmat, alkavat näkyä erityisesti vasta yläkoulun puolella. Yläkoulussa matematiikan vaativuustaso nousee ja laskut ovat yhä monimutkaisempia, jolloin peruslaskutaitojen hallitseminen on erityisen tärkeää. Kolmiportaisen tuen malliin liittyvä kehittämistyö tarvitseeikin tietoa tuen keinojen vaikuttavuudesta sekä tuen menetelmien ja arvioinnin välineiden kehittämistä (Aro, 2015).

Kansallinen koulutuksen arviointikeskus Karvi toteuttaa perusopetuksen oppimistuloksien pitkittäisarvioinnin vuosina 2016–2020, minkä tavoitteena on saada tietoa esimerkiksi matematiikkaan liittyvistä taidoista ja niiden kehityk-

sestä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaisesti. Hankkeen kautta saadaan lisää tietoa esimerkiksi alkuopetuksen osaamisen kehityksestä. Tutkimuksessa tehdään alkumittaus 6000 oppilaalle ensimmäisellä luokalla sekä seuranta-arvio kolmannella luokalla. (Kansallinen koulutuksen arviointikeskus, 2018)

Osalla oppilaista on paljon haasteita matematiikan taitojen kehityksessä, jolloin he tarvitsevat runsaampia tukitoimia. Tällaisten oppilaiden tunnistaminen vaatii sitä, että kaikkien oppilaiden matemaattisten taitojen kehitystä seurataan säännöllisesti ja johdonmukaisesti. Olisi tärkeää, että matemaattisten taitojen kehityksen seuranta alkaisi jo varhaiskasvatuksessa. (Väisänen, 2017.) Nykypäivään standardoituja mittareita ei ole kehitetty laskemisen sujuvuuden seuraamiseen toisen luokan jälkeen. Uusi mittaristo, jolla pystyisi toteuttamaan myös seurannan, olisi todella hyödyllinen. Johdonmukaisen ja säännöllisen seurannan avulla voitaisiin löytää aikaisemmin ne oppilaat, joiden matemaattinen osaaminen kuuluu heikoimpaan neljännekseen ja on jäämässä huolen alueelle (Väisänen, 2017.)

Laskusujuvuuden eroihin oppilaiden välillä saattavat olla yhteydessä esimerkiksi erilaisten laskustrategioiden käyttö, riskiryhmä saattaa käyttää vähemmän kehittyneempiä laskustrategioita ei-riskiryhmään verrattuna. Riskiryhmä saattaa turvautua hitaisiin strategioihin, kuten luettelemiseen ja sormilla laskemiseen, jolloin laskujen laskeminen on hidasta ja työlästä. Räsänen ja Koponen (2010) ehdottavatkin, että aritmetiikan sujuvuuden harjoittelussa olisi syytä käyttää palauteskeistä toistoharjoittelua ja suoraa strategiaopetusta, varsinkin heikkojen oppilaiden kohdalla alakoulussa. Laskusujuvuuden kehittymisen onkin huomattu tehostuvan jopa 65 %:lla oikeiden vastausten drillaamisen eli toistuvaan laskemiseen perustuvan harjoittelun avulla (Walker, Mickes, Bajic, Nailon, & Rickard, 2013).

Matematiikan opetus on keskittynyt usein taitojen drillaukseen, jolloin lukuyhdistelmät opitaan nopeasti ulkoa (Butterworth, 2005a). Yhteen- ja vähennyslaskutoimitusten toistoharjoittelu ei kuitenkaan itsessään välttämättä riitä lasku-

toimitusten automatisoitumiseen taidoiltaan heikoimmilla oppilaille, sillä melkein kaikkiin aritmetiikkaan liittyviin ongelmiin on yhteydessä hidas ja automatisoitumaton mieleen palauttaminen yksinkertaisten laskutoimitusten kohdalla (Gersten, Jordan, & Flojo, 2005). Toistoharjoittelun lisäksi on siis tärkeää ottaa huomioon myös esimerkiksi oppilaan käyttämien strategioiden harjoittaminen kohti kehittyneempiä strategioita. Voi myös olla, että varhaiset matematiikan taidot, kuten subitisaatio, määräisyyden vertailu ja arabialaisten numeroiden yhdistäminen lukumäärään eivät ole vielä tarpeeksi kehittyneet tai vakiintuneet oppilaille, joilla on haasteita laskusujuvuuden kehityksessä (Butterworth, 2005b; Geary ym., 2009; Rousselle & Noël, 2007), mitkä ovat hyvin olennaisia taitoja alkuopetuksessa opittavien taitojen kannalta. Myös lukujonotaidoilla on huomattu olevan yhteys aritmeettiseen sujuvuuteen (Koponen ym., 2013).

Laskusujuvuuteen on yhteydessä monia yleisiä kognitiivisia tekijöitä, kuten työmuisti, prosessointinopeus ja tarkkaavaisuus. Gearyn, Hoardin ja Baileyn (2012a) tutkimuksessa korkeammassa riskissä olevien oppilaiden työmuistitoiminnot olivat heikompia kuin alhaisen riskin ryhmässä. Myös Berg ja Hutchinson (2010) ovat todenneet, että yhteenlaskusujuvuuden erot tavanomaisesti suoriutuvien ja riskiryhmän välillä selittyvät osittain työmuistilla. Prosesointinopeudessa kaikista heikoiten suoriutuvalla alle 10 persentiiliin ryhmällä oli eniten vaikeuksia, sillä nopean nimeämisen testissä reaktioajat olivat sitä pidempiä, mitä heikompaa suoriutuminen perusaritmeettisissä taidoissa oli (Geary ym., 2012a). Tarkkaavuuden ja prosessointinopeuden on huomattu selittävän laskemisen sujuvuutta kolmannella luokalla (Fuchs ym., 2006). Tarkkaavaisuudessa erityisesti heikentynyt kyky inhibioida epäolennaiset ärsykkeet laskemisen aikana voi olla yhteydessä suoritukseen matematiikassa (Geary, 2010). Laskusujuvuuteen yhteydessä olevat tekijät ovat syytä ottaa huomioon laskusujuvuuden kehityksen tukemisessa, erityisesti heikosti laskusujuvuudessa suoriutuvien oppilaiden kohdalla. Erilaiset prosessointinopeuteen ja tarkkaavaisuuteen liittyvät harjoitukset voivat auttaa myös laskusujuvuuden kehityksessä.

Tässä tutkimuksessa sukupuolieroja löytyi poikien kehittyessä tyttöjä enemmän vähennyslaskusujuvuudessa toisen luokan syksyn ja ensimmäisen

luokan kevään sekä toisen luokan kevään ja ensimmäisen luokan kevään välisenä aikana sekä yhteenlaskusujuvuudessa toisen luokan syksyn ja ensimmäisen luokan kevään välisenä aikana. Poikia oli määrällisesti enemmän riskiryhmässä, vaikka tulos ei ollut tilastollisesti merkitsevä. Aikaisemmat tutkimukset matematiikan sukupuolieroista ovat ristiriitaisia, mutta erot asenteissa matematiikkaa kohtaan ovat selkeät. Pystyvyyden tunne matematiikassa on pojilla tilastollisesti erittäin merkitsevästi parempi 3., 6. ja 9. luokalla kuin tytöillä (Tuohilampi & Hannula, 2013). Poikien asenteet matematiikasta ovat myönteisempiä, kun taas tyttöjen minäpystyvyys on ollut taas heikompaa poikiin verrattuna (Herbert & Stipek, 2005; Reilly ym., 2017). Sukupuoli on syytä ottaa huomioon laskusujuvuuden kehityksen tukemisessa, mutta tärkeintä on kuitenkin kohdata jokainen oppilas yksilönä ja huomioida oppilaan yksilölliset haasteet kehityksen tukemisessa.

Interventioiden avulla laskusujuvuutta voidaan kehittää paremmaksi. Bryantin, Bryantin, Gerstenin, Scammaccan ja Chavezin (2008) tutkimuksessa on huomattu, että interventiosta saadaan eniten hyötyä, kun se toteutetaan mahdollisimman varhaisessa vaiheessa, alkuopetuksessa. Suomessa ei ole kuitenkaan vielä paljoa tehty tutkimukseen perustuvia harjoitusmateriaaleja eikä ole tutkittu, miten opetukselliset interventiot ovat vaikuttaneet oppimiseen (Björn ym., 2015; Salminen, 2015). Interventioita, mitkä ovat tehty lasten matemaattisten taitojen tukemiseksi sekä niihin liittyvää vaikuttavuustutkimusta ei ole tehty vielä paljoa, varsinkaan kentällä toteutettuna. Tutkimuksiin perustuvia harjoitusohjelmia olisi syytä ottaa käyttöön kentällä enemmän ja tehdä samalla johdonmukaista arviointia, millä saataisiin merkityksellistä tietoa kehittämistyötä varten. (Väisänen, 2017.)

Intervention sisältöä suunnitellessa on erityisen tärkeää ottaa huomioon oppilaan taitotaso ja valita sellaisia sisältöjä, mitkä ovat kaikkein keskeisimpiä muiden taitojen oppimiselle ja varmistua siitä, että oppilas sisäistää opetetut asiat (Powell ym., 2013). Esimerkiksi algoritmien käytön sujuvuutta helpottaa peruslaskutaitojen sujuvuuden tukeminen (Geary, 2011). Interventioita suunnitellessa

pitää ottaa huomioon myös oppilaiden harjoitusvasteiden yksilöllisyys, sillä oppilaat eivät saa välttämättä samankaltaista hyötyä samankaltaisesta harjoittelusta, vaikka oppilaille olisi keskenään suhteellisen samanlaiset lähtötason taidot (Salminen, 2015). Interventioihin kuuluu myös havainnollistusvälineiden käyttö, mutta on tärkeää varmistaa, että lapselle on ilmeistä matemaattisen käsitteen ja havainnollistusvälineen välinen suhde (Väisänen, 2017).

Väisänen (2017) tuo esiin, että pelimäiset harjoitteet ovat yleensä oppilaille toivottuja harjoituksia. Esimerkiksi LukiMat-verkkoympäristö on opetusalan ammattilaisten käyttöön suunniteltu sivusto, mistä saa välineitä oppimisen arviointiin ja tukemiseen sekä erilaisia harjoitusmateriaaleja lukemisen ja matematiikan taitojen kehittämiseen. LukiMat-sivusto on kehitelty esi- ja alkuopetusikäisille oppilaille. LukiMat-sivustolta löytyy esimerkiksi tietokonepohjaisia harjoitusmateriaaleja, muun muassa Ekapeli-Matikka- ja Numerorata-tehtävät, joita voi käyttää matemaattisten taitojen tukemiseen. LukiMatin Ekapelissä liikutaan lukualueilla 1–10 tai 1–20 ja pelin vaikeustaso riippuu lapsen pelissä suoriutumisesta. Ekapeli on harjoitusmuotona lapsia motivoiva. (Ronimus, 2013). Ekapeli-Matikan on tutkittu olevan tehokas keino vahvistaa heikkoja varhaisia numeerisia taitoja lapsilla, jotka ovat esiopetuksessa. Peli sopii esiopetusikäisille sekä mahdollisesti myös alkuopetusikäisille oppilaille tehostetun ja erityisen tuen menetelmänä sekä lisäksi myös eriyttävänä menetelmänä. (Salminen, 2015.)

Matematiikan oppimiseen voi olla yhteydessä erilaisten interventioiden ja harjoitteiden lisäksi myös monet muut asiat, kuten lasten motivoiminen ja positiivisten asenteiden välittäminen matematiikkaa kohtaan (Aunola, Leskinen, & Nurmi, 2006). Esimerkiksi opettajan oma asenne matematiikkaa kohtaan vaikuttaa todennäköisesti myös lapsen asenteeseen matematiikkaa kohtaan. Myös erilaiset työtavat voivat lisätä myönteisiä asenteita matematiikkaa kohtaan, kuten yhteistoiminnallinen oppiminen (Boaler, 1998). Lisäksi kokemukset matematiikasta kotona voivat olla ratkaisevassa asemassa oppilaan mielenkiinnon ylläpitämisessä matematiikkaa kohtaan. Lapsen innostaminen lukuja ja laskemista kohtaan, esimerkiksi erilaisten pelien avulla voi pitää lapsen mielenkiintoa yllä matematiikka kohtaan myös koulussa.

LÄHTEET

- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders*, 5. Washington, DC.
- Andersson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 102(1), 115–134. doi:10.1037/a0016838
- Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, 54(3), 695–701. doi:10.2307/1130057
- Ardila, A., & Rosselli, M. (2002). Acalculia and Dyscalculia. *Neuropsychology Review* 12 (4), 179–231. doi:[10.1023/A:1021343508573](https://doi.org/10.1023/A:1021343508573)
- Aunio, P., Hautamäki, J., Heiskari, P., & Van Luit, J. E. H. (2006). The Early Numeracy Test in Finnish: Children's norms. *Scandinavian Journal of Psychology*, 47, 369–378. doi: 10.1111/j.1467-9450.2006.00538.x
- Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20(5), 427–435. doi:[10.1016/j.lindif.2010.06.003](https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.06.003)
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.- E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713. doi: [10.1037/0022-0663.96.4.699](https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.699)
- Aunola, K., Leskinen, E., & Nurmi, J.-E. (2006). Developmental dynamics between mathematical performance, task motivation, and teachers' goals during the transition to primary school. *British Journal of Educational Psychology*, 76, 21–40.
- Bailey, D. H., Littlefield, A., & Geary, D. C. (2012). The codevelopment of skill at and preference for use of retrieval-based processes for solving addition problems: Individual and sex differences from first to sixth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(1), 78–92. doi:[10.1016/j.jecp.2012.04.014](https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.04.014)

- Barbarese, W. J., Katusic, S. K., Colligan, R. C., Weaver, A. L., & Jacobsen, S. J. (2005). Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort. *Ambulatory Pediatrics*, 5(5), 281–289. doi:[10.1367/A04-209R.1](https://doi.org/10.1367/A04-209R.1)
- Baroody, A. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, 13(1), 22–31. Luettu osoitteesta <http://www.jstor.org/stable/41198838>
- Baroody, A. J., & Gannon, K. E. (1984). The development of the commutatively principle and economic addition strategies. *Cognition and Instruction*, 1(3), 321–339. doi:[10.1207/s1532690xci0103_3](https://doi.org/10.1207/s1532690xci0103_3)
- Baroody, A. J., & Lai, M. (2007). Preschoolers' understanding of the addition subtraction inversion principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(2), 131–171. doi: [10.1080/10986060709336813](https://doi.org/10.1080/10986060709336813)
- Baroody, A. J., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 2–9. doi: [10.1080/10986060802583873](https://doi.org/10.1080/10986060802583873)
- Barrouillet, P., & Fayol, M. (1998). From algorithmic computing to direct retrieval: Evidence from number and alphabetic in children and adults. *Memory & Cognition*, 26(2), 355–368. doi: [10.3758/BF0320114](https://doi.org/10.3758/BF0320114)
- Barrouillet, P., & Lépine, R. (2005). Working memory and children's use of retrieval to solve addition problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 91, 183–204. doi: [10.1016/j.jecp.2005.03.002](https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.03.002)
- Berg, D.H., & Hutchinson, N.L. (2010). Cognitive processes that account for mental addition fluency differences between children typically achieving in arithmetic and children at-risk for failure in arithmetic. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 8 (1), 1–20.
- Billington, E. J., & Skinner, C. H. (2002). Getting students to choose to do more work: Evidence of the interspersal procedure. *Journal of Behavioral Education*, 11(2), 105–116. doi: [10.1023/A:1015431309847](https://doi.org/10.1023/A:1015431309847)
- Binder, C. (1996). Behavioral fluency: Evolution of a new paradigm. *The Behavior Analyst*, 19(2), 163–197.

- Boaler, J. (1998). Alternative approaches to teaching, learning and assessing mathematics. *Evaluation and Program Planning*, 21(2), 129–141. doi:10.1016/S0149-7189(98)00002-0
- Boaler, J. (2012). Timed Tests and the Development of Math Anxiety. *Education Week*. Luettu osoitteesta: <https://www.edweek.org/ew/articles/2012/07/03/36boaler.h31.html>
- Boardman, M. (2006). The impact of age and gender on prep children's academic achievements. *Australian Journal of Early Childhood*, 31, 1–6.
- Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.
- Butterworth, B. (2005a). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3–18. doi: [10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x](https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x)
- Butterworth, B. (2005b). Developmental dyscalculia. Teoksessa J. I. D. Campbell (toim.), *Handbook of mathematical cognition*. New York, NY: Psychology Press, 455–467.
- Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of Dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, 534-541. doi:[10.1016/B978-0-12-385948-8.00016-5](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385948-8.00016-5)
- Butterworth, B., & Kovas, Y. (2013). Understanding neurocognitive developmental disorders can improve education for all. *Science*, 340 (6130), 300–305. doi:10.1126/science.1231022
- Bisanz, J., & LeFevre, J.-A. (1990). Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition. Teoksessa D. F. Bjorklund (toim.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (s. 213–244). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 194–212. doi: [10.1006/jecp.1999.2517](https://doi.org/10.1006/jecp.1999.2517)
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N., & Chavez, M. M. (2008). Mathematical intervention for first- and second-grade students with mathematical difficulties. The effects of Tier 2 intervention delivered as

- booster lessons. *Remedial and Special Education*, 29(1), 20–32. doi:10.1177/0741932507309712
- Canobi, K. H., & Bethune, N. E. (2008). Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition*, 108(3), 675–686. doi: [10.1016/j.cognition.2008.05.011](https://doi.org/10.1016/j.cognition.2008.05.011)
- Carr, M., & Jessup, D. L. (1997). Gender differences in first-grade mathematics strategy use: Social and metacognitive influences. *Journal of Educational Psychology*, 89(2), 318–328.
- Carr, M., & Davis, H. (2002). Gender differences in strategy use: A function of skills and preference. *Contemporary Educational Psychology*, 26, 330–347.
- Carr, M., & Alexeev, N. (2011). Fluency, accuracy, and gender predict developmental trajectories of arithmetic strategies. *Journal of Educational Psychology*, 103(3), 617–631.
- Cates, G. L., & Rhymer, K. N. (2003). Examining the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance: An instructional hierarchy perspective. *Journal of Behavioral Education*, 12(1), 23–34. doi: 10.1023/A:1022318321416
- Chong, S. L., & Siegel, L. S. (2008). Stability of computational deficits in math learning disability from second through fifth grades. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 300–317. doi: 10.1080/87565640801982387
- Clarke, B., Clarke, D. M., & Horne, M. (2006). A longitudinal study of children's mental computational strategies. Teoksessa J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (toim.) *Proceeding 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (s.329–336).
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2. painos). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- De Smedt, B., Reynvoet, B., Swillen, A., Verschaffel, L., Boets, B., & Ghesquière, P. (2009). Basic number processing and difficulties in single-digit arithmetic: evidence from Velo-Cardio-Facial Syndrome. *Cortex*, 45 (2), 177-188.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense*. New York: Oxford University Press.

- Demie, F. (2001). Ethnic and gender differences in educational achievement and implications for school improvement strategies. *Educational Research*, 43 (1), 91–106.
- Desoete, A., & Grégoire, J. (2006). Numerical competence in young children and in children with mathematics learning disabilities. *Learning and Individual Differences*, 16(4), 351–367. doi: 10.1016/j.lindif.2006.12.006
- Desoete, A., Ceulemans, A., De Weerd, F., & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 64–81. doi: 10.1348/2044-8279.002002
- Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetical development. Teoksessa C. Donlan (toim.), *Studies in developmental psychology: The development of mathematical skills* (s. 275–302). Hove, England: Psychology Press, Taylor & Francis (UK).
- Dowker, A. (2005). Early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 324–332. doi: [10.1177/00222194050380040801](https://doi.org/10.1177/00222194050380040801)
- Dowker, A. (2008). Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental Science*, 11(5), 650–654. doi:[10.1111/j.1467-7687.2008.00713.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00713.x)
- Dowker, A. (2015). Individual differences in arithmetical abilities: The componential nature of arithmetic. Teoksessa R. C. Kadosh & A. Dowker (toim.) *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (s.1–14). Oxford: Oxford University Press. doi:10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.034
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., ... & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446. doi:10.1037/0012-1649.43.6.1428
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences* 8(7), 307-314. doi: [10.1016/j.tics.2004.05.002](https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002)

- Fennema, E., Carpenter, T. P., Jacobs, V. R., Franke, M. L., & Levi, L. W. (1998). A longitudinal study of gender differences in young children's mathematical thinking. *Educational Researcher*, 27(5), 6-11. doi: [10.3102/0013189X027005006](https://doi.org/10.3102/0013189X027005006)
- Francis, B. (2000). The gendered subject: Students' subject preferences and discussions of gender and subject ability. *Oxford Review of Education*, 26(1), 35-48. doi:10.1080/030549800103845
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., & Prentice, K. (2004). Responsiveness to mathematical problem-solving instruction: Comparing students at risk of mathematical disability with and without risk of reading disability. *Journal of Learning Disabilities*, 37(4), 293-306. doi: [10.1177/00222194040370040201](https://doi.org/10.1177/00222194040370040201)
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., . . . Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29-43. doi: [10.1037/0022-0663.98.1.29](https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.29)
- Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting-on procedure. Teoksessa T. Carpenter., J. Moser. & T. Romberg. (toim.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates: New Jersey.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer Verlag. doi: 10.1007/978-1-4612-3754-9
- Fuson, K. C. (1992). Relationships between counting and cardinality from age 2 to 8. Teoksessa J. Bideaud, C. Meljac, & J. P. Fisher (toim.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities*, (s. 127-149). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fuson, K.C., & Kwon, Y. (1992). Learning addition and subtraction: Effects of number words and other cultural tools. Teoksessa J. Bideaud, C. Meljac, & J.P. Fisher (toim.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (s.283-306). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates.
- Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 113(2), 345-362.

- Geary, D.C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications*. Washington, DC, US: American Psychological Association. doi:[10.1037/10163-000](https://doi.org/10.1037/10163-000)
- Geary, D. C. (1996). Sexual selection and sex differences in mathematical abilities. *Behavioral and Brain Sciences*, 19(2), 229–247. doi: [10.1017/S0140525X00042400](https://doi.org/10.1017/S0140525X00042400)
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4–15. doi:[10.1177/00222194040370010201](https://doi.org/10.1177/00222194040370010201)
- Geary, D. C. (2010). Mathematical disabilities: Reflections on cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Learning and Individual Differences*, 20, 130–133.
- Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, 47(6), 1539–1552.
- Geary, D. C., Fan, L. C., & Bow-Thomas, C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. *Psychological Science*, 3(3), 180–185. doi: [10.1111/j.1467-9280.1992.tb00023.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1992.tb00023.x)
- Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 236–263. doi: 10.1006/jecp.2000.2561
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2001). Numerical and arithmetical deficits in learningdisabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia. *Aphasiology*, 15(7), 635–647. doi: [10.1080/02687040143000113](https://doi.org/10.1080/02687040143000113)
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. Teoksessa J. I. D. Campbell (toim.) *Handbook of Mathematical Cognition* (s.253–268). Great Britain: Psychology Press.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with

mathematical learning disability. *Child Development*, 78(4), 1343–1359. doi: [10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x)

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 277–299. doi: [10.1080/87565640801982361](https://doi.org/10.1080/87565640801982361)

Geary, D. C., Bailey, D. H., Littlefield, A., Wood, P., Hoard, M. K., & Nugent, L. (2009a). First-grade predictors of mathematical learning disability: A latent class trajectory analysis. *Cognitive Development*, 24(4), 411–429. doi: [10.1016/j.cogdev.2009.10.001](https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.10.001)

Geary, D. C., Bailey, D. H., & Hoard, M. K. (2009b). Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27(3), 265–279. doi:10.1177/0734282908330592

Geary, D. C., Hoard, M. K., & Bailey, D. H. (2012a). Fact Retrieval deficits in low achieving children and children with mathematical learning disability. *Journal of Learning Disabilities*, 45(4), 291–307. doi: <https://doi.org/10.1177/0022219410392046>

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012b). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, 104(1), 206–223. doi: 10.1037/a0025398

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R., & Butterworth, B. (2005). Number and language: How are they related?. *Trends in Cognitive Sciences*, 9(1), 6-10. doi:[10.1016/j.tics.2004.11.004](https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.11.004)

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293–304. doi: [10.1177/00222194050380040301](https://doi.org/10.1177/00222194050380040301)

- Gorard, S., Rees, G., & Salisbury, J. (2001). Investigating the patterns of differential attainment of boys and girls at school. *British Educational Research Journal*, 27 (2), 125–139.
- Guiso, L., Monte, F., Sapienza, P., & Zingales, L. (2008). Culture, gender and math. *Science*, 320(5880), 1164–1165. doi: 0.1126/science.1154094
- Hakkarainen, A., Haring, M., Holopainen, L., Lappalainen, K., & Mäkihönko, M. (2014). Matemaattisen ajattelun mallintaminen ja laskustrategioiden opettaminen: yleisen tuen interventio ensimmäisen luokan oppilaille. *NMI-Bulletin* 24 (1), 9–24.
- Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 615–626.
- Hannula, M., Kupari, P., Pehkonen, L., Räsänen, P., & Soro, R. (2004). Matematiikka ja sukupuoli. Teoksessa P. Räsänen., P. Kupari., T. Ahonen. & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (170–197). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Hart, S. A., Petrill, S. A., & Thompson, L. A. (2010). A factorial analysis of timed and untimed measures of mathematics and reading abilities in school aged twins. *Learning and Individual Differences*, 20(2), 63–69. doi: [10.1016/j.lindif.2009.10.004](https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.10.004)
- Hartnedy, S. L., Mozzoni, M. P., & Fahoum, Y. (2005). The effect of fluency training on math and reading skills in neuropsychiatric diagnosis children: A multiple baseline design. *Behavioral Interventions*, 20(1), 27-36. doi:[10.1002/bin.167](https://doi.org/10.1002/bin.167)
- Hecht, S. A., Torgesen, J. K., Wagner, R. K., & Rashotte, C. A. (2001). The relations between phonological processing abilities and emerging individual differences in mathematical computation skills: A longitudinal study from second to fifth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79, 192–227. doi:10.1006/jecp.2000.2586

- Henry, V. J., & Brown, R. (2008). First-Grade Basic Facts: An Investigation into Teaching and Learning of an Accelerated, High-Demand Memorization Standard. *Journal for Research in Mathematics Education* 39, 153–83.
- Herbert, J., & Stipek, D. (2005). The emergence of gender differences in children's perceptions of their academic competence. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 26(3), 276–295. doi:[10.1016/j.appdev.2005.02.007](https://doi.org/10.1016/j.appdev.2005.02.007)
- Hojnoski, R. L., Silbergliitt, B., & Floyd, R. G. (2009). Sensitivity to growth over time of the preschool numeracy indicators with a sample of preschoolers in head start. *School Psychology Review*, 38(3), 402–418.
- Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107(2), 139–155. doi:10.1037/0033-2909.107.2.139
- Hyde, J. S., Lindberg, S. M., Linn, M. C., Ellis, A. B., & Williams, C. C. (2008). Gender similarities characterize math performance. *Science*, 321, 494–495.
- ICD-10. (1992). *Classification of Mental and Behavioural Disorders: Clinical Descriptions and Diagnostic Guidelines*. Geneva: World Health Organization.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., & Hanich, L. B. (2002). Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 94(3), 586–597. doi:10.1037//0022-0663.94.3.586
- Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2003). Characteristics of children with moderate mathematics deficiencies: A longitudinal perspective. *Learning Disabilities: Research and Practice*, 18(4), 213–221. doi: 10.1111/1540-5826.00076
- Jordan, N. C., Hanich, L. C., & Kaplan, D. (2003a). Arithmetic fact mastery in young children: A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85(2), 103–119. doi: 10.1016/S0022-0965(03)00032-8
- Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003b). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74(3), 834–850. doi: 10.1111/1467-8624.00571

- Jordan, N. C., Kaplan, D., Oláh, L. N., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, 77 (1), 153–175.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities: Research & Practice*, 22(1), 36–46. doi:[10.1111/j.1540-5826.2007.00229.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2007.00229.x)
- Kansallinen koulutuksen arviointikeskus Karvi. Perusopetuksen oppimistuloksien pitkäjäsenarviointi, ensimmäinen vaihe. Luettu verkosta: <https://karvi.fi/event/perusopetuksen-oppimistuloksien-pitkittaisarviointi-ensimmainen-vaihe/>
- Kersey, A., Braham, E., Csumitta, K., Libertus, M., & Cantlon, J. (2018). No intrinsic gender differences in children’s earliest numerical abilities. *Science of Learning*, 12 (3), 1–10. doi:[10.1038/s41539-018-0028-7](https://doi.org/10.1038/s41539-018-0028-7)
- Koponen, T. (2012). Peruslaskutaito matematiikan kivijalkana. *NMI bulletin*, 22, 59–62.
- Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T., & Nurmi, J.-E. (2007). Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology*, 97(3), 220–241. doi:[10.1016/j.jecp.2007.03.001](https://doi.org/10.1016/j.jecp.2007.03.001)
- Koponen, T., Salmi, P., Eklund, K., & Aro, T. (2013). Counting and RAN: Predictors of arithmetic calculation and reading fluency. *Journal of Educational Psychology*, 105(1), 162-175. doi: [10.1037/a0029285](https://doi.org/10.1037/a0029285)
- Koponen, T., Salmi, P., Torppa, M., Eklund, K., Aro, T., Aro, M., . . . Nurmi, J.-E. (2016). Counting and rapid naming predict the fluency of arithmetic and reading skills. *Contemporary Educational Psychology*, 44–45, 83-94. doi:[10.1016/j.cedpsych.2016.02.004](https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2016.02.004)
- Koponen, T., Georgiou, G., Salmi, P., Leskinen, M., & Aro, M. (2017). A meta-analysis of the relation between RAN and mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 109(7), 977–992. doi:[10.1037/edu0000182](https://doi.org/10.1037/edu0000182)

- Kupari, P., Sulkunen, S., Vettenranta, J., & Nissinen, K. (2012). Enemmän iloa oppimiseen: Neljännen luokan oppilaiden lukutaito sekä matematiikan ja luonontieteiden osaaminen. Kansainväliset PIRLS- ja TIMMS-tutkimukset Suomessa. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino. Luettu osoitteesta <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/40574/1/978-951-39-5011-8.pdf>
- Lachance, J. A., & Mazzocco, M. M. M. (2006). A longitudinal analysis of sex differences in math and spatial skills in primary school age. *Learning and Individual Differences*, 16 (3), 195–216.
- Lakka, J. (2014). Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden rakentaminen alkuopetuksen matematiikassa: Yhden luokan oppilaiden erilaiset oppimispolut tehokkaisiin strategioihin. (Väitöskirja, Helsingin yliopisto). Helsinki: Helsinki yliopisto, tutkimuksia 358.
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition*, 93(2), 99–125. doi:[10.1016/j.cognition.2003.11.004](https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.11.004)
- Landerl, K., & Moll, K. (2010). Comorbidity of learning disorders: Prevalence and familial transmission. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 51(3), 287–294. doi:[10.1111/j.1469-7610.2009.02164.x](https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2009.02164.x)
- Legendre, P. (2010). Coefficient of concordance. Teoksessa N. J. Salkind (toim.), *Encyclopedia of Research Design* (1. painos), (s.164–169). SAGE: Publications Inc.
- Legewie, J., & Diprete, T.A. (2012). School context and the gender gap in educational achievement. *American Sociological Review*, 77(3), 463–485. doi:[10.1177/0003122412440802](https://doi.org/10.1177/0003122412440802)
- Levine, S.C., Huttenlocher, J., Taylor, A., & Langrock, A. (1999). Early sex differences in spatial skill. *Developmental Psychology*, 35, 940–949.
- Levine, S.C., Vasilyeva, M., Lourenco, S.F., Newcombe, N.S., & Huttenlocher, J. (2005). Socioeconomic status modifies the sex difference in spatial skill. *Psychological Science*, 16, 841–845.

- Li, M., Zhang, Y., Liu, H., & Hao, Y. (2017). Gender differences in mathematics achievement in Beijing: A meta-analysis. *British Journal of Educational Psychology*, 1–18. doi: 10.1111/bjep.12203
- Locuniak, M. N., & Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities*, 41(5), 451–459. doi:10.1177/0022219408321126
- Martens, R., Hurks, P. P. M., Meijs, R., & Jolles, J. (2011). Sex differences in arithmetical performance scores: Central tendency and variability. *Learning and Individual Differences*, 21, 549–554.
- Martin, R. B., Cirino, P. T., Barnes, M. A., Ewing-Cobbs, L., Fuchs, L. S., Stuebing, K. K., & Fletcher, J. M. (2012). Prediction and stability of mathematics skill and difficulty. *Journal of Learning Disabilities* 46(5), 428–443. doi:10.1177/0022219411436214
- Martin, R. B., Cirino, P. T., Barnes, M. A., Ewing-Cobbs, L., Fuchs, L. S., Stuebing, K. K., & Fletcher, J. M. (2013). Prediction and stability of mathematics skill and difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 46, 428–443. doi:10.1177/0022219411436214
- Mazzocco, M. M. M., & Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, 53(1), 218–253. doi: 10.1007/s11881-003-0011-7
- Mazzocco, M. M., & Thompson, R. E. (2005). Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities: Research & Practice*, 20(3), 142–155. doi:10.1111/j.1540-5826.2005.00129.x
- Mazzocco, M. M. M., Devlin, K. T., & McKeeney, S. J. (2008). Is it a fact? Timed arithmetic performance of children with mathematical learning disabilities (MLD) varies as a function how MLD is defined. *Developmental Neuropsychology* 33(3), 318–344. doi: 10.1080/8756540801982403
- Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development*, 82(4), 1224–1237. doi:[10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x)

- McCallum, E., Skinner, C. H., Turner, H., & Saecker, L. (2006). School Psychology Review, 35(3), 419–434.
- Metsämuuronen, J. (2013). Matemaattisen osaamisen muutos perusopetuksen luokilla 3-9. Teoksessa Metsämuuronen, J. (toim). Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4 (s. 65–172). Helsinki: Opetushallitus.
- Moll, K., Kunze, S., Neuhoff, N., Bruder, J., & Schulte-Körne, G. (2014). Specific learning disorder: Prevalence and gender differences. PLoS ONE, 9(7) 1–8. doi: 10.1371/journal.pone.0103537
- Mononen, R., & Aunio, P. (2013). Early mathematical performance in Finnish kindergarten and grade one. LUMAT, 1 (3), 245–262.
- Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R., & Ketonen, R. (2013). Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa. NMI-bulletin, 4, 12–25.
- Morgan, P. L., Farkas, G., & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. Journal of Learning Disabilities, 42(4), 306–321. doi: 10.1177/0022219408331037
- Morgan, P. L., Farkas, G., & Wu, Q. (2011). Kindergarten children's growth trajectories in reading and mathematics: Who falls increasingly behind?. Journal of Learning Disabilities, 44(5), 472–488. doi:[10.1177/0022219411414010](https://doi.org/10.1177/0022219411414010)
- Murata, A. (2004). Paths to learning ten-structured understanding of teen sums: addition solution methods of Japanese grade 1 students. Cognition and Instruction 22(2), 185–218.
- Murphy, M. M., Mazzocco, M. M. M., Hanich, L. B., & Early, M. C. (2007). Cognitive characteristics of children with mathematics learning disability (MLD) vary as a function of the cutoff criterion used to define MLD. Journal of Learning Disabilities, 40(5), 458–478. doi:[10.1177/00222194070400050901](https://doi.org/10.1177/00222194070400050901)
- Navarro, J. I., Aguilar, M., Marchena, E., Ruiz, G., Menacho, I., & Van Luit, J. E. H. (2012). Longitudinal study of low and high achievers in early mathematics. British Journal of Educational Psychology, 82(1), 28–41. doi: 10.1111/j.2044-8279.2011.02043.x

- Nelson, G., & Powell, S. R. (2017). A systematic review of longitudinal studies of mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 74 (3), 1–17. doi: 10.1177/0022219417714773
- Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus.
- Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2013). PISA 2012: Suomalaisnuorten osaaminen laskussa. Luettu osoitteesta: https://valtioneuvosto.fi/artikkeli/-/asset_publisher/pisa-2012-finlandsk-ungas-kunskapsniva-har-sjunkit?_101_INSTANCE_3wyslLo1Z0ni_groupId=1410845
- Ostad, S. A. (1999). Developmental progression of subtraction strategies: A comparison of mathematically normal and mathematical disabled children. *European Journal of Special Needs Education*, 14(1), 21–36. doi: [10.1080/0885625990140103](https://doi.org/10.1080/0885625990140103)
- Paukkeri, V. Pakarinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Poikkeus, A.-M. (2015). Alaryhmätarkastelu matemaattisten taitojen kehityksestä esiopetuksesta neljännelle luokalle. *Psykologia* 50 (4), 277-291.
- Penner, A. M., & Paret, M. (2008). Gender differences in mathematics achievement: Exploring the early grades and the extremes. *Social Science Research*, 37, 239–253.
- Petrill, S., Logan, J., & Hart, S. (2012). Math fluency is etiologically distinct from untimed math performance, decoding fluency, and untimed reading performance: Evidence from a twin study. *Journal of Learning Disabilities*, 45(4), 371–381. doi: [10.1177/0022219411407926](https://doi.org/10.1177/0022219411407926)
- Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Poncy, B. C., Skinner, C. H., & Jaspers, K. E. (2007). Evaluating and comparing interventions designed to enhance math fact accuracy and fluency: Cover, copy and compare versus taped problems. *Journal of Behavioral Education*, 16(1), 27–37.

- Potter, M. C. & Levy, E. I. (1968). Spatial enumeration without counting. *Child Development*, 39(1), 265–272.
- Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2013). Math anxiety, working memory and math achievement in early elementary school. *Journal of Cognition and Development*, 14(2), 187–202. doi: [10.1080/15248372.2012.664593](https://doi.org/10.1080/15248372.2012.664593)
- Ramos-Christian, V., Schleser, R., & Varn, M.E. (2008). Math fluency: Accuracy versus speed in preoperational and concrete operational first and second grade children. *Early Childhood Education Journal* 35(6), 543–549.
- Reigosa-Crespo, V., Valdes-Sosa, M. Butterworth, B., Estévez, N., Rodriguez, M., Santos, E., . . . Lage, A. (2012). Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: The Havana survey. *Developmental Psychology*, 48(1), 123–135. doi:[10.1037/a0025356](https://doi.org/10.1037/a0025356)
- Reilly, D., Neumann, D. L., & Andrews, G. (2015). Sex differences in mathematics and science achievement: A meta-analysis of national assessment of educational progress assessments. *Journal of Educational Psychology*, 107, 645–662. doi: 10.1037/edu0000012
- Reilly, D., Neumann, D. L., & Andrews, G. (2017). Investigating gender differences in mathematics and science: Results from the 2011 Trends in Mathematics and Science Survey. *Research in Science Education*, 1–24. doi: 10.1007/s11165-017-9630-6
- Ritchie, S. J., & Bates, T. C. (2013). Enduring Links fro childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological Science*, 24(7), 1301–1308. doi:[10.1177/0956797612466268](https://doi.org/10.1177/0956797612466268)
- Rivera-Batiz, F. L. (1992). Quantitative literacy and the likelihood of employment among young adults in the United States. *The Journal of Human Resources*, 27(2), 313–328.
- Rivera, S.M, Reiss, A.L, Eckert, M.A., & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic: Evidence for increased cortex functional specialization in the left inferior parietal cortex. *Cerebral Cortex*, 15 (11), 1779–1790.

- Robinson, K. M., & Dubé, A. K. (2009). Children's understanding of addition and subtraction concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(4), 532-545. doi:[10.1016/j.jecp.2008.12.002](https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.12.002)
- Rourke, B. P., & Conway, J. A. (1997). Disabilities of arithmetic and mathematical Reasoning: Perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), 34-46. doi:
[10.1177/002221949703000103](https://doi.org/10.1177/002221949703000103)
- Rousselle, L., & Noël, M.- P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, 102(3), 361-395. doi:
[10.1016/j.cognition.2006.01.005](https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005)
- Royer, J.M., Tronsky, L.N., Chan, Y., Jackson, S.J., & Marchant, H., III. (1999). Math-fact retrieval as the cognitive mechanism underlying gender differences in math test performance. *Contemporary Educational Psychology*, 24, 181-266.
- Rusanen, E., & Räsänen, P. (2012). Matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioiden kehitys. *NMI-Bulletin* 22(3), 28-41.
- Räsänen, P. (2012). Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia. Helsinki: Suomalainen Lääkäriseura Duodecim, 128, 1168-1177. Luettu osoitteesta:
<http://www.terveysportti.fi.ezproxy.jyu.fi/xmedia/duo/duo10309.pdf>
- Räsänen, P. & Koponen, T. (2010). Matemaattisten oppimisvaikeuksien neuropsykologisesta tutkimuksesta. *NMI-Bulletin*, 20(3), 39-53.
- Salaschek, M., Zeuch, N., & Souvignier. (2014). Mathematics growth trajectories in first grade: Cumulative vs. Compensatory patterns and the role of number sense. *Learning and Individual Differences*, 35, 103-112. doi:
[10.1016/j.lindif.2014.06.009](https://doi.org/10.1016/j.lindif.2014.06.009)
- Salminen, J. (2015). Response to Computer-Assisted Intervention in Children Most at Risk for Mathematics Difficulties. (Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto). Jyväskylä studies in education, psychology and social research 543.
- Schrank, F. A., Mather, N., & McGrew, K. S. (2014). Woodcock-Johnson IV Tests of Rolling Meadows Achievement. IL: Riverside.

- Schwenck, C., Dummert, F., Endlich, D., & Schneider, W. (2015). Cognitive functioning in children with learning problems. *European Journal of Psychology of Education, 30*(3), 349–367. doi: 10.1007/s10212-014-0242-5
- Starkey, P., & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. Teoksessa T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (toim.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s. 99–116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stock, P., Desoete, A., & Roeyers, H. (2010). Detecting children with arithmetic disabilities from kindergarten: Evidence from a 3-year longitudinal study on the role of preparatory arithmetic abilities. *Journal of Learning Disabilities, 43*(3), 250–268. doi: 10.1177/0022219409345011
- Strand, S. (1999). Ethnic group, sex, and economic disadvantage: Associations with pupils' educational progress from Baseline to the end of Key Stage 1. *British Educational Research Journal, 25* (2), 179–202.
- Swanson, H. L., & Jerman, O. (2006). Math disabilities: A selective meta-analysis of the literature. *Review of Educational Research, 76*(2), 249–274. doi:[10.3102/00346543076002249](https://doi.org/10.3102/00346543076002249)
- Swanson, H. L., Jerman, O., & Zheng, X. (2008). Growth in working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology, 100*(2), 343–379. doi: 10.1037/0022-0663.100.2.343
- Therrien, W. J. (2004). Fluency and comprehension gains as a result of repeated reading: A Meta-Analysis. *Remedial and Special Education, 25*(4), 252–261. doi:[10.1177/07419325040250040801](https://doi.org/10.1177/07419325040250040801)
- Tilastokeskus (2013). Suomen virallinen tilasto: Erityisopetus. Liitetaulukko 5. Osa-aikaista erityisopetusta lukuvuonna 2009–2010 saaneet peruskoulun oppilaat erityisopetuksen ensisijaisen syyn mukaan 1. Helsinki: Tilastokeskus. Luettu osoitteesta: http://www.stat.fi/til/erop/2010/erop_2010_2011-06-09_tau_005_fi.html
- Tuohilampi, L., & Hannula, M. (2013). Matematiikan liittyvien asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3., 6. ja 9.

- luokalla. Teoksessa Metsämuuronen, J. (toim). Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4 (s. 231–254). Helsinki: Opetushallitus.
- Vanbinst, K., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2014). Arithmetic strategy development and its domain-specific and domain-general cognitive correlates: A longitudinal study in children with persistent mathematical learning difficulties. *Research in Developmental Disabilities*, 35(11), 3001–3013. doi:10.1016/j.ridd.2014.06.023
- Vasilyeva, M., Laski, E. V., & Shen, C. (2015). Computational fluency and strategy choice individual and cross-national differences in complex arithmetic. *Developmental psychology*, 51(10), 1489 – 1500. doi:[10.1037/dev0000045](https://doi.org/10.1037/dev0000045)
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. Teoksessa F. K. Jr Lester (toim.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. National Council of Teachers of Mathematics (s. 557–628). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.
- Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E., & Rautopuro, J. (2016). Lapsuudesta eväät oppimiseen: Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMMS-tutkimus Suomessa. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino. Luettu osoitteesta <https://ktl.jyu.fi/vanhat/julkaisut/julkaisuluettelo/julkaisut/2016/KTL-D117.pdf>
- Vukovic, R. K. (2012). Mathematics difficulty with and without reading difficulty: Findings and implications from a four-year longitudinal study. *Exceptional Children*, 78(3), 280–300. doi: 10.1177/001440291207800302.
- Vukovic, R. K., & Siegel, L. S. (2010). Academic and cognitive characteristics of persistent mathematics difficulty from first through fourth grade. *Learning Disabilities: Research and Practice*, 25(1), 25–38. doi: 10.1111/j.1540-5826.2009.00298.x

- Väisänen, E. (2017). Laskemisen sujuvuus osana matemaattisia taitoja: Sujuvuuden seuranta ja matemaattisten taitojen tukeminen alakoulussa. (Väitöskirja, Helsingin yliopisto). *Kasvatustieteellisiä tutkimuksia*, 17.
- Väisänen, E., & Aunio, P. (2016). Laskemisen sujuvuus toiselta neljännelle luokalle sekä yhteys lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa. *Psykologia*, 51(4), 244–261.
- Wadsworth, B. J. (1996). Piaget's theory of cognitive and affective development: Foundations of constructivism, 5th edition. White Plains, NY, England: Longman Publishing.
- Walker, D., Mickes, L., Bajic, D., Nailon, C. R., & Rickard, T. C. (2013). A test of two methods of arithmetic fluency training and implications for educational practice. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 2(1), 25–32. doi:[10.1016/j.jarmac.2013.02.001](https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2013.02.001)
- Wei, W., Lu, H., Zhao, H., Chen, C., Dong, Q., & Zhou, X. (2012). Gender differences in children's arithmetic performance are accounted for by gender differences in language abilities. *Psychological Science*, 23 (3), 320–330.
- Willburger, E., Fussenegger, B., Moll, K., Wood, G., & Landerl, K. (2008). Naming speed in dyslexia and dyscalculia. *Learning and Individual Differences*, 18(2), 224-236. doi:[10.1016/j.lindif.2008.01.003](https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.01.003)
- Wong, T. T.-Y., Ho, C. S.-H., & Tang, J. (2015). Defective number sense of impaired access? Differential impairments in different subgroups of children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*. doi:10.1177/0022219415588851
- Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155-193. doi:[10.1016/0010-0277\(90\)90003-3](https://doi.org/10.1016/0010-0277(90)90003-3)
- Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749–750.

LIITTEET

Liite 1. Kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien poikien keskiarvot, mediaanit ja keskihajonnat.

	Riskiryhmä n= 16			Ei-riskiryhmä n= 56		
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh
1.Ik kevät	4.34 _a	4.25	1.83	11.94 _a	11.50	3.64
2.Ik syksy	5.47 _{ab}	5.50	1.66	14.11 _b	13.50	4.20
2.Ik kevät	6.63 _b	7.25	1.85	18.03 _c	15.50	6.34
Friedman χ^2	12.90			60.58		
Tarkka p	.002			.000		
Kendallin W	.40			.54		

Huom. Ne keskiarvot, joilla ei ole yhteistä alaindeksiä erosivat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

Liite 2. Kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien poikien eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

	Riskiryhmä n= 16			Ei-riskiryhmä n= 56			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.Ik syksy – 1.Ik kevät	1.13	1.00	1.50	2.17	2.00	2.71	330.50	-1.60	.110	.26
2.Ik kevät – 2.Ik syksy	1.16	0.50	1.85	3.92	3.50	4.55	266.00	-2.47	.014	.41
2.Ik kevät – 1.Ik kevät	2.28	1.75	2.35	6.09	5.50	5.28	221.50	-3.07	.002	.51

Liite 3. Kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien tyttöjen keskiarvot, mediaanit ja keskihajonnat.

	Riskiryhmä n= 8			Ei-riskiryhmä n= 70		
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh
1.Ik kevät	4.75 _a	4.75	1.34	10.83 _a	10.00	2.81
2.Ik syksy	4.50 _{ab}	4.50	1.28	11.89 _{ab}	11.25	3.76
2.Ik kevät	6.56 _b	6.50	1.84	14.41 _c	14.00	4.31
Friedman χ^2	10.07			64.49		
p	.007			.000		
Kendallin W	.63			.46		

Huom. Ne keskiarvot, joilla ei ole yhteistä alaindeksiä erosivat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

Liite 4. Kaikkina mittausajankohtina yhteenlaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien tyttöjen eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

	Riskiryhmä n= 8			Ei-riskiryhmä n= 70			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.Ik syksy – 1.Ik kevät	-0.25	0.50	1.46	1.06	1.00	2.51	190.00	-1.49	.137	.32
2.Ik kevät – 2.Ik syksy	2.06	2.50	1.27	2.52	2.25	3.04	244.50	-0.59	.558	.13
2.Ik kevät – 1.Ik kevät	1.81	2.00	1.10	3.59	3.25	3.25	174.00	-1.75	.080	.38

Liite 5. Kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien poikien keskiarvot, mediaanit ja keskihajonnat.

	Riskiryhmä n= 11			Ei-riskiryhmä n= 64		
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh
1.Ik kevät	2.50 _a	2.50	0.59	8.59 _a	8.25	3.86
2.Ik syksy	3.59 _b	4.00	0.63	11.18 _b	10.50	4.51
2.Ik kevät	4.23 _{bc}	4.00	0.90	15.31 _c	14.00	5.49
Friedman χ^2	15.05			94.67		
p	.001			.000		
Kendallin W	.68			.74		

Huom. Ne keskiarvot, joilla ei ole yhteistä alaindeksiä erosivat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

Liite 6. Kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien poikien eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

	Riskiryhmä n=11			Ei-riskiryhmä n=64			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.Ik syksy – 1.Ik kevät	1.09	1.00	0.49	2.59	2.00	3.18	224.50	-1.92	.055	.36
2.Ik kevät – 2.Ik syksy	0.64	1.00	0.71	4.13	3.75	3.76	128.00	-3.36	.001	.64
2.Ik kevät – 1.Ik kevät	1.73	2.00	0.90	6.73	6.25	4.28	72.00	-4.20	.000	.80

Liite 7. Kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien tyttöjen keskiarvot, mediaanit ja keskihajonnat.

	Riskiryhmä n= 6			Ei-riskiryhmä n= 65		
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh
1.Ik kevät	2.83 ^a	3.00	0.52	7.81 ^a	7.00	2.78
2.Ik syksy	2.67 ^a	3.00	1.44	9.48 ^b	9.50	2.90
2.Ik kevät	3.00 ^a	3.25	1.05	11.92 ^c	12.00	3.72
Friedman χ^2	.29			60.31		
p	.867			.000		
Kendallin W	.02			.46		

Huom. Ne keskiarvot, joilla ei ole yhteistä alaindeksiä erosivat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

Liite 8. Kaikkina mittausajankohtina vähennyslaskujen osalta riskiryhmään ja ei-riskiryhmään kuuluvien tyttöjen eri mittausajankohtien erotusten keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat ja U-testin tulokset.

	Riskiryhmä n= 6			Ei-riskiryhmä n= 65			U-testi	Z	p	r
	Ka	Md	Kh	Ka	Md	Kh				
2.Ik syksy – 1.Ik kevät	-0.17	-0.25	1.13	1.68	1.50	2.53	101.50	-1.94	.053	.48
2.Ik kevät – 2.Ik syksy	0.33	0.00	1.69	2.43	2.50	3.19	106.00	-1.85	.065	.46
2.Ik kevät – 1.Ik kevät	0.17	0.25	0.98	4.11	3.50	3.40	36.50	-3.28	.001	.81