Johdanto yleistettyyn sini- ja kosinifunktioon

Topias Mikkola

Matematiikan pro-gradututkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2018

Sisältö

Tiivistelmä: Topias Mikkola, Johdanto yleistettyyn sini- ja kosinifunktioon, matematiikan pro gradu-tutkielma, 32 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesäkuu 2018.

Tässä tutkielmassa määritellään sini- ja kosinifunktiot sinifunktion käänteisfunktion avulla ja näiden funktioiden yleistykset eli funktiot $\sin_p$ ja $\cos_p$ aiempia määritelmiä varioimalla. Samalla osoitetaan, että merkittävä osa sini- ja kosinifunktioiden ominaisuuksista periytyy yleistyksille. Edelleen tutkitaan millä tasolla yleistykset vastaavat geometrisessä mielessä tavallisia sini- ja kosinifunktioita. Lopuksi tarkastellaan lyhyesti yleistettyjen funktioiden määrittelyn taustoja ja merkitystä kirjallisuudessa.

Sinifunktio määritellään määrittelemällä ensin sen käänteisfunktio avoimella rajoitetulla välillä integroimalla sinifunktion käänteisfunktion derivaattaa. Käänteisfunktio laajennetaan määritellyksi myös välin päätepisteissä. Käänteisfunktion avulla määritellään sinifunktio paloittain koko reaaliakselille hyödyntäen käänteisfunktiolta periytyviä ominaisuuksia kuten jatkuvuutta, rajoittuneisuutta ja parittomuutta. Sitten osoitetaan, että myös käänteisfunktion derivoituvuus periytyy sinifunktiolle ja käsittää koko reaaliakselin. Tämän jälkeen kosinifunktio määritellään sinifunktion derivaattana ja osoitetaan, että kosinifunktiolla on vastaavat ominaisuudet kuin sinifunktiollakin. Huomataan, että sinifunktio saadaan kosinifunktion derivaatan vastalukuna ja siten nämä funktiot ovat äärettömästi derivoituvia. Sini- ja kosinifunktiolle osoitetaan myös muutamia yhteenlaskukaavoja sekä Pythagoraan trigonometrinen identiteetti.

Funkiot $\sin_p$ ja $\cos_p$ määritellään aiempien määrittelyiden rakennetta hyödyntäen siten, että uudet funktiot ovat parametrista p riippuvaisia ja yhtyvät sini- ja kosinifunktioon parametrin p arvolla kaksi. Sitten osoitetaan, että myös yleistyksillä on edellä mainitut klassisten vastineidensa ominaisuudet. Tosin $\sin_p$-funktion tiedetään olevan vain kertaalleen derivoituva, eikä funktiota $\sin_p$ siten voida suoraan esittää $\cos_p$-funktion derivaatan avulla. Funktioille $\sin_p$ tai $\cos_p$ ei voida myöskään johtaa Pythagoraan trigonometrisen identiteetin lisäksi muita yksinkertaisia vastineita sini- ja kosinifunktiolle näytetyistä yhteenlaskukaavoista.

Geometrista tarkastelua varten määritellään l_p-normi, joka vastaa tavallista Euklidista normia parametrin p arvolla kaksi. Sitten osoitetaan, että $\sin_p$- ja $\cos_p$-funktioilla voidaan parametrisoida l_p-normin määrittämä yksikköympyrä. Tämän tuloksen avulla määritetään klassista napakoordinaattiesitystä vastaava yleistetty napakoordinaattiesitys l_p-normin virittämään reaalitasoon. Samalla näytetään, että funktioiden $\sin_p$ ja $\cos_p$ argumentit eivät klassisen tapauksen tapaan vastaa yksikköympyrän sektorin kaaren pituutta. Huomataan myös, ettei Euklidisesta metriikasta tuttu sektorin kaaren pituuden ja pinta-alan välinen yhteys ole voimassa muissa l_p-normin virittämissä reaalitasoissa.

Etsittäessä geometristä tulkintaa yleistetyn sinifunktion argumentille huomataan, että yksikköympyrän sektorin kaksinkertainen pinta-ala toimii erään 1800-luvulla määritetyn sinifunktion yleistyksen argumenttina. Kirjallisuuslähteiden perusteella voidaan todeta, että myös myöhemmin tätä aihetta tutkineet matemaatikot ovat päätyneet yleistettyihin trigonometrisiin funktioihin tutkiessaan alkuarvo-ongelmia. Erityisesti $\sin_p$-funktio on ratkaisu erääseen eri muodoissaan paljon tutkittuun Dirichtletin alkuarvo-ongelmaan.

1 Johdanto

Sini ja kosini ovat tärkeimpiä alkeisfunktiota ja niiden avulla voidaan määritellä kaikki muut trigonometriset funktiot sekä niiden keskinäissuhteet. Ne ovat keskeisiä geometrian lisäksi muun muuassa jaksollisten ilmiöiden mallintamisessa. Lisäksi ne tarjoavat usein ratkaisun moniin matemaattisiin ongelmiin kuten differentiaaliyhtälöihin tai haastaviin integraaleihin.

Teknisesti suoraviivainen tapa määritellä sini- ja kosinifunktiot on määritellä ensiksi niiden käänteisfunktiot integroimalla sini- ja kosinifunktioiden derivaattoja. Tätä määritelmää varioimalla saadaan kokonainen perhe uusia funktioita, joita voidaan kutsua yleistetyiksi trigonometrisiksi funktioiksi.

Tässä työssä esitellään täsmällinen sinifunktion käänteisfunktioon perustuva määritelmä reaaliakselilla määritellyille sini- ja kosinifunktioille. Näille funktioille osoitetaan määritelmän seurauksena tärkeitä ominaisuuksia kuten jatkuvuus, jaksollisuus, derivoituvuus, rajoittuneisuus sekä parittomuus tai parillisuus. Lisäksi lasketaan joitakin määritelmistä seuraavia laskukaavoja, joista mainittakoon Pythagoraan trigonometrinen identiteetti eli yhtälö $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Tämän jälkeen johdetaan käänteisfunktioon perustuva määritelmä sini- ja kosinifunktioiden yleistyksille eli $\sin_p$- sekä $\cos_p$-funktioille siten, että saadut funktiot yhtyvät sini- ja kosinifunktioihin, kun $p = 2$. Yleistyksillä on samoja ominaisuuksia kuin sini- ja kosinifunktioillakin, joita ovat muun muuassa jatkuvuus, jaksollisuus, rajoittuneisuus, Pythagoraan trigonometrisen identiteetin vastine eli

$$|\sin_p(x)|^p + |\cos_p(x)|^p = 1$$

sekä parittomuus tai parillisuus. Tässä työssä osoitetaan myös, että funktio $\sin_p$ on (ainakin) kertaalleen derivoituva. Tämän jälkeen kosinifunktion yleistys, funktio $\cos_p$, määritellään $\sin_p$-funktion ensimmäiseksi derivaataksi.

Toisin kuin sini- ja kosinifunktio $\sin_p$- ja $\cos_p$-funktio ovat äärettömästi derivoituvia vasta, kun reaaliakselilta poistetaan pisteet $x = \frac{\pi_p}{2} + n\pi_p$, missä n on kokonaisluku [1]. Funktioille $\sin_p$ tai $\cos_p$ ei voida myöskään johtaa kaavan $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ tyyppisiä yksinkertaisia summakaavoja [2].

Trigonometriset funktiot voidaan määritellä lukuisilla tavoilla [3]. Tilanteesta riippuen voi olla järkevää käyttää erilaisia määritelmiä. Esimerkiksi tavalliset trigonometriset funktiot voidaan määritellä differentiaaliyhtälöön liittyvällä alkuarvo-ongelmalla [4][s. 432]. Tällöin sinifunktio määritellään siksi yksikäsitteiseksi funktioksi $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka ratkaisee (toisen asteen differentiaaliyhtälön olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen nojalla [5]) alkuarvo-ongelman

$$u''(x) + u(x) = 0, \tag{1}$$
$$u(0) = 0, \tag{2}$$
$$u'(0) = 1. \tag{3}$$

Yksikäsitteisyyden nojalla tätä ominaisuutta voidaan käyttää sinifunktion määrittelemiseen. Edelleen tästä määritelmästä voidaan johtaa samat ominaisuudet kuin käänteisfunktiolla määritellyllä sinifunktiolla on, joista osa mainittiin edellä.

Kirjallisuudessa myös yleistetyille trigonometrisille funktiolle löytyy useita eri määritelmiä. Ne kaikki ovat laajennuksia tavallisten trigonometristen funktioiden määritelmistä ja säilyttävät määritelmästä riippuen joitakin klassisten vastineidensa ominaisuuksista [3]. Siten myös $\sin_p$- ja $\cos_p$-funktiot voidaan määritellä edellä mainittua määrittelyä vastaavalla alkuarvo-ongelmalla.

Ensimmäistä kertaa yleistettyjä trigonometrisia funktioita esiintyy ruotsalaisen matemaatikon Eric Lundbergin (1846-1911) työssä ”Om hypergoniometriska funktioner af komplexa variabla”. Lundberg tutki differentiaaliyhtälöitä [6]

$$\frac{dy}{dx} = (1 \pm y^p)^{m/p},$$

joista esimerkiksi valinnalla $m = 1$ Lundberg päätyi funktioihin, jotka tunnetaan nykyään $\sin_p$-, $\cos_p$- sekä $\tan_p$-funktiona. Myöhemmin 1900-luvun puolella yleistetyt trigonometriset funktiot ovat olleet suosittu tutkimuskohde johtuen muun muassa niiden yhteydestä yksiulotteiseen p-Laplace-operaattoriin [2]. Peter Lindqvist [1] määrittelee yleistetyn $\hat{\sin}_p$-funktion välillä $]0, \pi_p[$ siksi funktioksi $u :]0, \pi_p[\to \mathbb{R}$, joka ratkaisee alla olevan Dirichtlet'n ongelman

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(|u'|^{p-2}\, u'\right) &= \lambda\, |u|^{p-2}\, u \qquad \text{välillä }]0, \pi_p[, \\ u(0) &= 0, \\ u(\pi_p) &= 0. \end{aligned}$$

Edellä $\hat{\sin}_p$-funktio on merkitty ”hatulla” erotuksena tässä tutkielmassa käytettyyn $\sin_p$-funktioon. Näiden funktioiden välisen yhteyden ilmaisee yhtälö $\sin_p = (p-1)^{-1/p}\hat{\sin}_p$. Edellä mainittu Dirichtlet'n ongelma voidaan esittää myös p-Laplace-operaattorin avulla, mikä kuvastaa yleistettyjen trigonometristen funktioden matemaattista merkitystä. Tutkimus p-Laplace-operaattoriin liittyen on laajaa [3][s.7]. Edelleen myös fysiikassa esitettyjen kaltaiset reunaehto-ongelmat ovat yleisiä.

Kappaleessa 6 johdetaan myös eräs geometrinen tulkinta $\sin_p$- ja $\cos_p$-funktioille sekä arcsin-funktiolle. Lisäksi pohditaan vastaavan tyyppistä tulkintaa eräälle arcsin-funktiota vastaavalle yleisemmälle trigonometriselle funktiolle, joka esiintyy Lundbergin teoksessa [6]. Tavallinen yksikköympyrä voidaan nimittäin parametrisoida siten, että kehällä olevan pisteen x-koordinaatti on pistettä vastaavan kulman sini ja y-koordinaatti kulman kosini. Kun tavallisen yksikköympyrän sijaan tarkastellaan l_p normilla määritettyä yksikköympyrää, saadaan sille vastaavanlainen parametrisointi yleistettyjä trigonometrisiä funktioita käyttäen. Itseasiassa vaatimus tällaisesta parametrisaatiosta voidaan ottaa yleistettyjen sini- ja kosinifunktioiden perustaksi, jolloin päädytään samoihin funktioihin kuin käänteisfunktiomääritelmällä [3].

2 Käänteinen sinifunktio eli arcsin

Kappaleiden 2, 3 ja 4 päälähde on [4]. Määritellään funktio arcsin integraalimuotoisen käänteisfunktion avulla. Määrittely on tehdään ensin avoimelle välille $]-1, 1[$ ja laajennetaan sitten myös päätepisteisiin. Tällöin voidaan todeta, että ensimmäisessä vaiheessa havaitut jatkuvuus, monotonisuus, sekä rajoittuneisuus periytyvät suljetulle välille $[-1,1]$ määritellylle arcsin-funktiolle.

Määritelmä 1. (Käänteinen sini-funktio, kun $x \in \left]-1,1\right[$)

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad\qquad x \in \left]-1,1\right[.$$

Määritelmä on mielekäs, koska funktio $f : [0,x] \to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ on jatkuva suljetulla välillä $[0,x]$, sillä $1-t^2 > 1-|1| = 0$. Siten funktio f on Riemann-integroituva välillä $[0,x]$. Kun muuttuja x kuuluu välille $\left]-1,0\right[$, määritelmän integroitava funktio on vastaavalla tavalla Rieman-integroituva.

Listataan joitakin arcsin-funktion ominaisuuksia, joita tarvitaan myöhemmässä vaiheessa.

Lause 1. *Funktio* $\arcsin x$ *on*

(a) jatkuva välillä $\left]-1,1\right[$,

(b) derivoituva välillä $\left]-1,1\right[$ *ja*

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

(c) aidosti kasvava, rajoitettu sekä injektiivinen funktio välillä $\left]-1,1\right[$

(d) sekä pariton funktio välillä $\left]-1,1\right[$. *Toisin sanoen pätee* $\arcsin -x = -\arcsin x$.

Todistus. Olkoon funktio $f : \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

(a) Koska funktio $f(t)$ on jatkuva, myös sen integraalifunktio $\arcsin x$ on jatkuva .

(b) Koska funktio $f(t)$ on jatkuva, niin analyysin peruslauseen nojalla intergraalifunktio $\arcsin x = \int_0^x f(t)dt$ on derivoituva ja

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) Kohdan *b)* nojalla

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0,$$

joten funktio $\arcsin x$ on aidosti kasvava. Sitten kun $x \geq 0$ saadaan

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&\leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \\
&= -\int_1^{1-x} u^{\frac{-1}{2}} du \\
&= \int_{1-x}^1 u^{\frac{-1}{2}} du \\
&= 2(1-(1-x)^{\frac{1}{2}}) \\
&\leq 2,
\end{aligned}
$$

koska $1-t \leq 1-t^2$ kaikilla $t \in [0,1[$. Kolmannessa integraalissa käytettiin sijoitusta $t(u) = -u+1$. Jos taas $x < 0$ saadaan

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&\geq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \\
&= -\int_1^{1-x} u^{\frac{-1}{2}} du \\
&= \int_{1-x}^1 u^{\frac{-1}{2}} du \\
&= 2(1-(1-x)^{\frac{1}{2}}) \\
&\geq -2,
\end{aligned}
$$

koska $1-t \geq 1-t^2$ kaikilla $t \in]-1,0[$. Siten funktio arcsin on rajoitettu aidon kasvavuuden nojalla. Myös injektiivisyys on seuraus aidosta kasvavuudesta.

(d) Huomataan, että funktio f on parillinen, sillä

$$
f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(-t)^2}} = f(-t).
$$

Siten muuttujanvaihdolla $t = -k$ saadaan

$$
-\arcsin x = -\int_0^x f(t)dt = \int_0^{-x} f(-k)dk = \int_0^{-x} f(k)dk = \arcsin -x.
$$

$\square$

Laajennetaan seuraavaksi arcsin-funktion määrittely suljetulle välille $[-1,1]$. Määrittely perustuu seuraavaan yleiseen tulokseen.

Lemma 1. *Olkoon jatkuva funktio $f : I \to \mathbb{R}$ aidosti monotoninen ja rajoitettu avoimella välillä $I =]a, b[$. Tällöin välin I kuva $f(I)$ on avoin ja rajoitettu väli, jolle $f(I) = (\inf f(I), \sup f(I))$. Lisäksi funktio f voidaan laajentaa jatkuvaksi, aidosti monotoniseksi ja rajoitetuksi funktioksi f_0 suljetulle välille $[a, b]$, siten että $f_0([a, b]) = [\inf f_0(I), \sup f_0(I)]$.*

Todistus. Jatkuva kuvaus kuvaa välin väliksi [4][Theorem 5.3.8], joten $f(I)$ on väli ja lisäksi rajoitettu, sillä funktio f on rajoitettu. Nyt täydellisyysaksiooman nojalla löytyy joukon $f(I)$ supremum sekä täydellisyysaksiooman suorana seurauksena myös infimum. Koska funktio f on aidosti monotoninen ja lähtöjoukko eli väli I on avoin, tiedetään että $\inf f(I) \notin f(I)$ ja $\sup f(I) \notin f(I)$, mikä nähdään epäsuoran päättelyn avulla.

Oletetaan, että funktio f on aidosti kasvava ja että löytyy $a_0 \in I$, siten että $f(a_0) \leq \inf f(I)$. Nyt välin I avoimuuden nojalla löytyy myös $a_1 \in I : a_1 < a_0$, jolle $f(a_1) < f(a_0) \leq \inf f(I)$, mikä on ristiriita. Samaan tapaan voidaan osoittaa, että $\sup f(I) \notin f(I)$. Siten on $f(I) =]\inf f(I), \sup f(I)[$. Jos funktio f olisi aidosti vähenevä, väite voitaisiin todistaa samantapaisella päättelyllä.

Oletetaan edelleen, että funktio f on aidosti kasvava ja määritellään nyt funktio

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in I, \\ \inf f(I) & , x = a, \\ \sup f(I) & , x = b. \end{cases}$$

Määritelmästä seuraa, että funktio f_0 on aidosti kasvava aiemman käänteisen päättelyn perusteella. Myös funktion f_0 rajoittuneisuus seuraa suoraan määritelmästä.

Olkoon sitten $0 < \epsilon < |\sup f(I) - \inf f(I)|$. Nyt Bolzanon lauseen sekä infimumin määritelmän nojalla $\inf f(I) + \frac{\epsilon}{2} \in f(I)$. Toisin sanoen löytyy $a_0 \in I$, jolle $f(a_0) = \inf f(I) + \frac{\epsilon}{2} \in f(I)$. Siten

$$|f_0(a) - f_0(a_0)| = |\inf f(I) - f(a_0)| = \left|\inf f(I) - \inf f(I) - \frac{\epsilon}{2}\right| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Olkoon nyt $x \in [a, a_0]$ ja $\delta = a_0 - a > 0$, jolloin aidon kasvavuuden nojalla

$$|f_0(a) - f_0(x)| \leq |\inf f(I) - f(a_0)| < \epsilon,$$

kaikilla $|x - a| < \delta$. Siten funktio f_0 on jatkuva pisteessä $x = a$.

Vastaavalla tavalla voidaan todeta jatkuvuus pisteessä $x = b$, jolloin funktio f_0 on jatkuva koko välillä I funktion f jatkuvuuden nojalla. Myös aidosti vähenevän funktion f laajennuksessa välille $[a, b]$ jatkuvuus sekä aito monotonisuus voidaan osoittaa vastaavalla tavalla kuin aidosti kasvavalle funktiolle f nyt osoitettiin.

□

Lauseen 1 nojalla funktio arcsin toteuttaa lemman 1 oletukset avoimella välillä $]-1, 1[$, joten seuraava funktion arcsin määrittelyn laajennus on perusteltua.

Seuraus 1. *Funktion arcsin määrittely voidaan laajentaa suljetulle välille* $[-1,1]$ *niin, että funktiosta tulee jatkuva, aidosti kasvava sekä rajoitettu ja*

$$\arcsin\,[-1,1] = [c,d],$$

missä

$$\begin{aligned} c &= \inf\{\arcsin x, x \in \,]-1,1[\} = \lim_{x\to -1^+} \arcsin x = \lim_{x\to -1^+} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ ja} \\ d &= \sup\{\arcsin x, x \in \,]-1,1[\} = \lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

Nyt funktion arcsin parittomuuden nojalla

$$\begin{aligned} c &= \lim_{x\to -1^+} \arcsin x \\ &= \lim_{x\to -1^+} -\arcsin -x \\ &= -\lim_{x\to 1^-} \arcsin x \\ &= -d. \end{aligned}$$

Määritellään luku π seuraavasti.

Määritelmä 2.

$$\pi = 2\arcsin 1.$$

Eli yllä mainittu arcsin-funktion kuvajoukko $[c,d]$ on siis $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Edelleen määritelmän 2 nojalla

$$\begin{aligned} \pi &= 2\arcsin 1 \\ &= 2\sup\{\arcsin x : -1 < x < 1\} \\ &= 2\lim_{x\to 1^-} \arcsin x \\ &= 2\lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

Huomattakoon, että myös kappaleessa 4 määritellyn kosinifunktion käänteisfunktio voidaan määritellä manipuloimalla arcsin-funktion käänteisfunktiomääritelmää.

3 Sinifunktio

3.1 Sinifunktion määritelmä

Tässä kappaleessa määritellään sinifunktio vaiheittain ensin arcsin-funktion käänteisfunktiona ja sitten määrittelyväliä pidentämällä ja lopulta laajentamalla sinifunktion määrittelyä jaksolliseksi koko reaaliakselille. Määritelmät asetetaan siten, että sinifunktio perii arcsin-funktiolta tärkeitä ominaisuuksia kuten jatkuvuuden ja parittomuuden.

Seuraavan lauseen nojalla on olemassa arcsin-funktion käänteisfunktio, joka perii arcsin-funktion ominaisuuksia. Todistus sivuutetaan, mutta se löytyy lähteestä [4][Corollary 5.5.3].

Lause 2. *Olkoon I epätyhjä väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ jatkuva ja aidosti monotoninen. Tällöin on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : f(I) \to I$, joka on myös jatkuva ja aidosti monotoninen.*

Lisäksi seuraava lause takaa, että myös arcsin-funktion parittomuus periytyy sinifunktiolle.

Lause 3. *Olkoot välit A ja B epätyhjiä ja välillä A pariton funktio $f : A \to B$ sellainen, että sille löytyy käänteisfunktio $f : B \to A$. Tällöin myös käänteisfunktio $f^{-1}(x)$ on pariton välillä B.*

Todistus. Nyt kaikilla $x \in B$ on

$$f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(f(x)).$$

$\square$

Lauseen 1 nojalla funktio arcsin toteuttaa lauseen 2 oletukset ja siten löytyy arcsin-funktion käänteisfunktio.

Määritelmä 3. Sinifunktio välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Funktion arcsin käänteisfunktio, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, nimetään sinifunktioksi.

Huomautus 1. *(a) Määritelmän 1 nojalla* $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$*, joten* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$*. Vastaavalla tavalla nähdään, että* $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$.

(b) Funktio $\sin x$ *on jatkuva ja aidosti kasvava välillä* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(c) Koska arcsin-funktio on pariton välillä $[-1, 1]$*, lauseen 3 nojalla funktio* $\sin x$ *on pariton välillä* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Pyritään määrittelemään sinifunktio koko reaaliakselille. Tätä varten tarvitaan jaksollisuuden käsitettä.

Määritelmä 4. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jaksollinen jaksolla $n > 0$, jos kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) = f(x + n)$.

Huomautus 2. *Induktioperitaatteen nojalla edellisen määritelmän merkinnöin funktiolle f pätee myös $f(x) = f(x + nk)$, kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.*

Sinifunktion määrittelyn laajentaminen jaksollisesti määritellyksi koko reaaliakselille perustuu seuraavaan lauseeseen.

Lause 4. *Suljetulla välillä $[a, a+n]$ jatkuva sekä jaksolla n jaksollinen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä.*

Todistus. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ sellainen, että $x_0 + nk \in]a, a+n[$, jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Siten lauseen oletuksilla ja jatkuvuuden raja-arvomääritelmän nojalla funktio f on tälloin jatkuva, sillä $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x+nk) = f(x_0+nk) = f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Olkoon sitten $x_0 \in \mathbb{R}$ sellainen, että $x_0 + nk = a$, jollakin $k \in \mathbb{Z}$, jolloin $x_0 + n(k+1) = a + n$. Osoitetaan, että tällaisissa pisteissä toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja yhtä suuret. Jaksollisuuden ja jatkuvuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0^-} f(x+nk) &= \lim_{x \to x_0^-} f(x + n(k+1)) \\
&= f(a+n) \\
&= f(a) \\
&= \lim_{x \to x_0^+} f(x+nk).
\end{aligned}$$

Jos pisteet $x_0 \in \mathbb{R}$ ovat muotoa $x_0 + nk = a + n$, jollakin $k \in \mathbb{Z}$, voidaan jatkuvuus todistaa vastaavalla laskulla. Siten funktio f on jatkuva ja rajoitettu $\mathbb{R}$:ssä. □

Ennen kuin käytetään jaksollisuutta sinifunktion määritelmän laajentamiseksi, määritellään sinifunktio välille $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ peilauksena itsestään suoran $x = \frac{\pi}{2}$ suhteen. Tämän ansiosta sinifunktio säilyttää jatkuvuusominaisuutensa.

Määritelmä 5. Välille $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ määritellään $\sin x = -\sin(x - \pi)$.

Määritelmä on mielekäs, sillä kun $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ on $x - \pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Huomautus 3. *(a) Sinifunktio on jatkuvien funktioiden yhdistettynä funktiona jatkuva välillä $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.*

(b) Sinifunktio on jatkuva pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$, koska toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja yhtyvät funktion arvoon tässä pisteessä. Eli huomautuksen 1 nojalla on

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x &= \sin \tfrac{\pi}{2} \\
&= 1 \\
&= -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\
&= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} -\sin x. \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} -\sin(x - \pi) \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sin x.
\end{aligned}$$

Siten $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$, mistä seuraa jatkuvuus pisteessä $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ylläolevan sekä huomautuksen 1 ja nojalla $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [-1, 1]$ on jatkuva ja $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 = \sin(\frac{3\pi}{2})$. Siten lauseen 4 nojalla sinifunktion määritelmä voidaan laajentaa jaksolliseksi, jatkuvaksi sekä rajoitetuksi funktioksi reaaliakselille, sillä kaikille $x \in \mathbb{R}$ löydetään $n \in \mathbb{Z}$, jolle $x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Määritelmä 6. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Valitaan tällöin $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ja asetetaan

$$\sin(x) = \sin(x + 2n\pi).$$

Seuraus 2. *Funktio* $\sin(x)$ *on pariton koko reaaliakselilla.*

Todistus. Koska sinifunktio on huomautuksen 1 nojalla pariton välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on se pariton myös välillä $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Nimittäin jos $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, niin määritelmän 5 nojalla

$$-\sin(x) = \sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -(-\sin(\pi - x - \pi)) = \sin(-x),$$

missä $-x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, joten myös tämä väli tuli tarkistettua. Olkoon sitten $x_0 \in \mathbb{R}$. Nyt löytyy $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $x_0 + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Siten määritelmän 6 nojalla

$$\begin{aligned} -\sin(x_0) &= -\sin(x_0 + 2n\pi) \\ &= \sin(-x_0 + 2n\pi) \\ &= \sin(-x_0 + 2n\pi - 2n\pi) \\ &= \sin(-x_0). \end{aligned}$$

□

3.2 Sinifunktion derivoituvuus

Tässä kappaleessa osoitetaan vaiheittain sinifunktion derivoituvuus ja määritetään sen derivaattafunktio. Ensin todetaan, että derivoituvuus periytyy arcsin-funktiolta sinifunktiolle avoimella välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Tämän jälkeen derivoituvuus välillä $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ on melko ilmeinen, koska sinifunktio määriteltiin tälle välille peilauksena itsestään. Sinifunktion palottaisen määrittelyn takia derivoituvuus pisteissä $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{R}$ täytyy tarkastaa erikseen.

Nyt koska sinifunktio on määritelty käänteisfunktiona arkussinistä, tarvitaan ensin tietoa käänteisfunktion derivoituvuudesta. Tämän tiedon avulla voidaan päätellä derivoituvuus myös sinifunktiolle.

Lause 5. *Oletetaan, että injektiivinen funktio* f *on jatkuva avoimella välillä* I*. Jos funktio* f *on derivoituva pisteessä* $x_0 \in I$ *ja* $f'(x_0) \neq 0$*, niin myös käänteisfunktio* f^{-1} *on derivoituva pisteessä* $y = f(x_0)$ *ja*

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Todistus. Katso [4][Theorem 6.2.4]. □

Lemma 2. *Sinifunktio on derivoituva välillä* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *ja kaikille* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{d}{dx}\sin x = \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Todistus. Lauseen 1 nojalla funktio $y(x) = \arcsin x$ toteuttaa lauseen 5 oletukset avoimella välillä $]-1, 1[$, sillä $y'(x) = \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} > 0$. Siten lauseen 5 nojalla arsin-funktion käänteisfunktio $x(y) = \sin y$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $y \in]\arcsin -1, \arcsin 1[=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ja

$$\frac{d}{dy}\sin y = \frac{d}{dy}x(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y}.$$

□

Tästä tuloksesta seuraa sinifunktion derivoituvuus koko reaaliakselilla sinifunktion ominaisuuksien takia. Koska sinifunktio on määritelty paloittain myös derivoituvuutta on tarkasteltava paloittain.

Lemma 3. *Sinifunktio on derivoituva välillä* $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ *ja kaikilla* $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ *on* $\frac{d}{dx}\sin x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Todistus. Olkoon $f\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ f(x) = -\sin x$ ja $g :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g(x) = x-\pi$. Koska nämä funktiot ovat derivoituvia on ketjusäännön nojalla niiden yhdistetty funktio $f \circ g\colon]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ f(g(x)) = -\sin(x-\pi)$ derivoituva. Tällöin ketjusäännön ja määritelmän 5 nojalla kaikille $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ on

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \frac{d}{dx}(-\sin(x-\pi))\\ &= (f\circ g)'(x)\\ &= f'(g(x))g'(x)\\ &= -\sqrt{1-\sin^2(x-\pi)}\\ &= -\sqrt{1-\sin^2(x)}.\end{aligned}$$

□

Seuraava ehto derivoituvuudelle on suora seuraus derivaatan määritelmästä. Lausetta tarvitaan sinifunktion derivoituvuuden määrittämiseen pisteessä $\frac{\pi}{2}$ sekä myöhemmin pisteissä $-\frac{\pi}{2}$ ja $-\frac{3\pi}{2}$.

Lause 6. *Olkoon* x_0 *välin* $I \subset \mathbb{R}$ *sisäpiste ja* $f : I \to \mathbb{R}$. *Tällöin* $f'(x_0)$ *on olemassa, jos ja vain jos sekä vasemmanpuoleinen derivaatta* $f'_-(x_0)$ *että oikeanpuoleinen derivaatta* $f'_+(x_0)$ *ovat olemassa ja* $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Huomattakoon, että edellisessä lauseessa merkintä $f'_-(x_0)$ tarkoittaa erotusosamäärän raja-arvoa, kun pistettä x_0 lähestytään vasemmalta ja $f'_+(x_0)$ vastaavasti erotusosamäärän raja-arvoa, kun pistettä x_0 lähestytään oikealta.

Sinifunktio on derivoituva pisteen $\frac{\pi}{2}$ läheisyydessä ja tässä pisteessä derivaatan toispuoleiset raja-arvot ovat löydettävissä. Tämän tiedon sekä seuraavan lauseen nojalla derivaatta pisteessä $\frac{\pi}{2}$ voidaan määrittää lauseen 6 avulla.

Lause 7. *(a) Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä $]x_0-\sigma, x_0[$ sekä jatkuva suljetulla välillä $[x_0-\sigma, x_0]$, missä $\sigma > 0$. Tällöin jos $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x_0)$ on olemassa, niin myös vasemmanpuoleinen derivaatta $f'_-(x_0)$ on olemassa ja $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x_0) = f'_-(x_0)$.*

(b) Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä $]x_0, x_0+\sigma[$ sekä jatkuva suljetulla välillä $[x_0-\sigma, x_0]$, missä $\sigma > 0$. Tällöin jos $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x_0)$ on olemassa, niin myös oikeanpuoleinen derivaatta $f'_+(x_0)$ on olemassa ja $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x_0) = f'_+(x_0)$.

Todistus. (a) Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla kaikille $\sigma > 0$ löytyy $c \in]x_0-\sigma, x_0[$ siten, että

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x_0-\sigma)}{x_0 - (x_0-\sigma)}.$$

Nyt kun $\sigma \to 0$, niin $c \to x_0$, joten $\lim\limits_{\sigma\to 0} f'(c) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) \in \mathbb{R}$. Siten

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f'(x) &= \lim_{\sigma\to 0} f'(c) \\
&= \lim_{\sigma\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-\sigma)}{x_0 - (x_0-\sigma)} \\
&= \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'_-(x_0).
\end{aligned}$$

(b) Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa erotusosamäärän oikeanpuoleisen raja-arvon olemassaolo.

□

Lemma 4. *Sinifunktio on derivoituva pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$ ja tässä pisteessä $\frac{d}{dx} \sin x = 0$.*

Todistus. Sinifunktio $f(x) = \sin x$ on jatkuva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, joten

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \sqrt{1 - \sin^2 x} \\
&= 0 \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(-\sqrt{1 - \sin^2 x} \right) \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{d}{dx} \sin x.
\end{aligned}$$

Koska sinifunktio on lisäksi derivoituva väleillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sekä $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on lauseen 7 nojalla

$$f'_-(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{dx} \sin x = 0 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{d}{dx} \sin x = f'_+(\frac{\pi}{2}).$$

Nyt koska $\frac{\pi}{2}$ on välin $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ sisäpiste, on lauseen 6 nojalla $\frac{d}{dx} \sin(\frac{\pi}{2})$ olemassa ja $\frac{d}{dx} \sin(\frac{\pi}{2}) = 0$. □

Suorana seurauksena saadaan seuraava tulos.

Seuraus 3. *Sinifunktio on derivoituva välillä* $] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ *ja*

$$\frac{d}{dx} \sin x = \begin{cases} \sqrt{1 - \sin^2 x} & , \textit{kun } x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ -\sqrt{1 - \sin^2 x} & , \textit{kun } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[. \end{cases}$$

Seuraavan lauseen nojalla sinifunktion derivoituvuus välillä perityy koko reaaliakselille samaan tapaan kuin jatkuvuuskin (katso lause 4).

Lause 8. *Jaksolla $n \in \mathbb{R}$ jaksollinen sekä jokaisessa välin $[a, a+n[$ pisteessä (molemmin puolin) derivoituva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva $\mathbb{R}$:ssä ja f' on jaksollinen jaksolla n.*

Todistus. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Nyt jollakin $k \in \mathbb{Z}$ on $x_0 - nk \in [a, a+n[$. Siten lauseen oletuksilla on

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - nk + h) - f(x_0 - nk)}{h} \\
&= f'(x_0 - nk) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Toisaalta tällöin $f'(x_0) = f'(x_0 - nk)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, koska x_0 oli mielivaltaisesti valittu. □

Seuraus 4.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \begin{cases} \sqrt{1 - \sin^2 x} & , \textit{kun } x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \textit{ jollekin } n \in \mathbb{Z}, \\ -\sqrt{1 - \sin^2 x} & , \textit{kun } x + 2n\pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \textit{ jollekin } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Todistus. Todistetaan ensin sinifunktion derivoituvuus pisteessä $x = -\frac{\pi}{2}$ samaan tapaan kuin se lemmassa 4 tehtiin pisteelle $x = \frac{\pi}{2}$.

Sinifunktio $f(x) = \sin x$ on jatkuva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, joten sinifunktion määrittelyjen sekä lemman 4 nojalla on

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{dx} - \sin(x - \pi) \\
&= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{dx} - \sin(x - \pi + 2n\pi) \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{dx} - \sin(x) \\
&= 0 \\
&= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(\sqrt{1 - \sin^2(x)} \right) \\
&= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{d}{dx} \sin(x).
\end{aligned}
$$

Lisäksi sinifunktio on derivoituva välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ja edelleen jaksollisuuden sekä lemman 7 nojalla derivoituva välillä $]-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$, sillä kun $x_0 \in]-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ on $x_0 + 2\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Tällöin sinifunktion määrittelyjen nojalla

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + 2\pi + h) - \sin(x_0 + 2\pi)}{h} \\
&= \frac{d}{dx} \sin(x_0 + 2\pi) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Siten lauseen 7 nojalla

$$
f'_-(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{dx} \sin x = 0 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{d}{dx} \sin x = f'_+(-\frac{\pi}{2}).
$$

Nyt koska $-\frac{\pi}{2}$ on välin $]-\infty, \infty[$ sisäpiste, on derivaatta tässä pisteessä lauseen 6 nojalla olemassa ja $\frac{d}{dx} \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Derivoituvuus pisteessä $\frac{3\pi}{2}$ voidaan todistaa vastaavalla tavalla ja tässä pisteessä $\frac{d}{dx} \sin(\frac{3\pi}{2}) = 0$.

Koska jaksollinen sinifunktio on derivoituva pisteissä $x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, on se lauseen 8 nojalla derivoituva $\mathbb{R}$:ssä. Olkoon nyt $x \in \mathbb{R}$. Tällöin löytyy $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, jolloin seurauksen 3 nojalla

$$
\frac{d}{dx} \sin x = \frac{d}{dx} \sin(x + 2n\pi) = \begin{cases} \sqrt{1 - \sin^2 x} & , \text{ kun } x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ jollekin } n \in \mathbb{Z}, \\ -\sqrt{1 - \sin^2 x} & , \text{ kun } x + 2n\pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\text{ jollekin } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}
$$

□

4 Kosinifunktio

Määritellään seuraavaksi kosinifunktio sinifunktion derivaattana. Määrittely tehdään paloittain, jotta samalla nähdään, että kosinifunktio on jatkuva koko reaaliakselilla. Tämän jälkeen osoitetaan, että kosinifunktiolla on vastaavia ominaisuuksia kuin sinifunktiolla, joita ovat jatkuvuuden lisäksi parillisuus, derivoituvuus ja rajoittuneisuus. Lisäksi osoitetaan sini- ja kosinifunktioiden välisiä yhteyksiä, joista mainittakoon erityisesti Pythagoraan trigonometrinen identiteetti.

Määritelmä 7. Välille $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ määritellään $\cos x$ siten, että

$$\cos x = \frac{d}{dx}\sin x = \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2 x} & \text{, kun } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ -\sqrt{1-\sin^2 x} & \text{, kun } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

Huomautus 4. *(a)* $\cos -\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ *ja* $\cos 0 = -\cos\pi = 1$.

(b) Kosinifunktio on jatkuvien funktioiden yhdistettynä funktiona jatkuva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$*, sillä jatkuvuus pisteessä* $\frac{\pi}{2}$ *perustuu siihen, että toispuoleiset raja-arvot yhtyvät funktion arvoon tässä pisteessä (katso huomautus 3).*

Nyt voimme laajentaa määritelmän koko reaaliakselille siten, että jatkuvuus säilyy.

Määritelmä 8. Määritellään kosinifunktio jaksolliseksi siten, että kaikille $x \in \mathbb{R}$ asetetaan $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$, missä $n \in \mathbb{Z}$ on sellainen, että $x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Huomautus 5. *(a) Huomautuksen 4 sekä määritelmän 8 nojalla* $\cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$ *ja* $\cos(0 + 2n\pi) = -\cos(\pi + 2n\pi) = 1$ *kaikilla* $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Huomautuksen 4 sekä lauseen 4 nojalla kosinifunktio on jatkuva ja rajoitettu koko reaaliakselilla.

Seuraava tulos lienee merkittävimpiä tuloksia sini- ja kosinifunktiolle. Kappaleessa 6 osoitetaan, että sini- ja kosinifunktion avulla voidaan parametrisoida yksikköympyrä tätä tulosta hyödyntäen.

Seuraus 5. *Sini- ja kosinifunktioille on voimassa Pythagoraan trigonometrinen identiteetti, jonka mukaan* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *kaikille* $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Kosinifunktion määrittelyjen perusteella kaikille $x \in \mathbb{R}$ on

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x + \left(\pm\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^2 = 1.$$

□

Seuraavan lemman avulla voidaan osoittaa, että kosinifunktio on parillinen eli $\cos(-x) = \cos x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 5. *Oletetaan, että* A *ja* B *ovat epätyhjiä välejä ja* $f : A \to B$ *on derivoituva funktio. Tällöin* *(a) jos f on pariton, niin f' on parillinen,*

(b) jos f on parillinen, niin f' on pariton.

Todistus. (a) Oletetaan, että f on pariton ja derivoituva. Nyt toisaalta kejusäännön nojalla

$$\frac{d}{dx}f(-x) = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$$

ja toisaalta parittomuuden perusteella

$$\frac{d}{dx}f(-x) = \frac{d}{dx}(-f(x)) = -\frac{d}{dx}f(x) = -f'(x).$$

Koska molempien tapojen pitää johtaa samaan lopputulokseen, saadaan $-f'(-x) = -f'(x)$ eli $f'(-x) = f'(x)$. Derivaattafunktio f' on siis parillinen.

(b) Voidaan todistaa vastaavalla tavalla kuin kohta a.

□

Seuraus 6. *Kosinifunktio on parillinen.*

Todistus. Sinifunktion parittomuuden, kosinifunktion määrittelyjen sekä lemman 5 nojalla kosinifunktio on parillinen, sillä sinifunktion määrittely- sekä maalijoukko $]-\infty, \infty[$ on epätyhjä väli. □

Kosinifunktion derivoituvuus on parillisuuden tapaan seuraus kosinifunktion määrittelystä sinifunktion avulla.

Lause 9. *Sinifunktio ja kosinifunktio ovat kaikkialla derivoituvia ja kaikille $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad ja \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

Todistus. Ensimmäinen yhtälö on suora seuraus sinifunktion derivoituvuudesta reaaliakselilla sekä kosinifunktion määrittelmästä. Kosinifunktio on derivoituva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ yhdistettynä funktiona $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituvista funktioista $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : 1 - \sin^2 x$ ja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$. Edellä yhdistetty funktio $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ on hyvin määritelty, sillä sinifunktion määrittelyjen nojalla $1 - \sin^2 x > 1 - 1 = 0$.

Pisteissä $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ kosinifunktion määrittelyjen sekä huomautuksen 5 nojalla on

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'_-(x_n) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sin^2(x_n+h)}-\sqrt{1-\sin^2 x_n}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\sin^2(x_n-h)}-0}{-h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{(-2\sin(x_n-h))\sqrt{1-\sin^2(x_n-h)}(-1)}{2\sqrt{1-\sin^2(x_n-h)}}}{-1}\\
&= -\sin(x_n),
\end{aligned}
$$

missä toiseksi viimeinen yhtäsuuruus perustuu L'Hôpitalin sääntöön sekä ketjusääntöön. Samaan tapaan myös

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'_+(x_n) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{-\sqrt{1-\sin^2(x_n+h)}-\sqrt{1-\sin^2 x_n}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{-(-2\sin(x_n+h))\left(-\sqrt{1-\sin^2(x_n+h)}\right)}{2\sqrt{1-\sin^2(x_n+h)}}-0}{1}\\
&= -\sin x_n.
\end{aligned}
$$

Vastaavasti kaikille $x_n=\frac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ voidaan samantapaisella laskulla osoittaa, että $(f\circ g)'_-(x_n)=(f\circ g)'_+(x_n)=-\sin(x_n)$. Edelleen pisteet $\{\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}\}=\{\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathbb{Z}\}$ ovat välin $]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$ sisäpisteitä, joten kosinifunktio on lauseen 6 nojallla derivoituva näissä pisteissä. Olkoon sitten $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, tällöin ketjusäännöllä saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= \frac{d}{dx}\sqrt{1-\sin^2 x}\\
&= \frac{1}{2}(-2\sin x\cos x)(1-\sin^2 x)^{-1/2}\\
&= -\sin x(1-\sin^2 x)^{1/2}(1-\sin^2 x)^{-1/2}\\
&= -\sin x.
\end{aligned}
$$

Kun $x\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ saadaan ketjusäännöllä

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= -\frac{d}{dx}\sqrt{1-\sin^2 x}\\
&= \frac{-1}{2}(-2\sin x\cos x)(1-\sin^2 x)^{-1/2}\\
&= \sin x(-(1-\sin^2 x)^{1/2})(1-\sin^2 x)^{-1/2}\\
&= -\sin x.
\end{aligned}
$$

Siten kaikille $x \in \mathbb{R}$ löytyy $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, jolloin

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sin(x + 2n\pi) = \cos x \qquad \text{ja}$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\cos(x + 2n\pi) = -\sin x.$$

□

Todetaan seuraavaksi joitakin ominaisuuksia sini- ja kosinifunktioille.

Lause 10. *Sini- ja kosinifunktiolle on voimassa seuraavat identiteetit.*

(a) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

(b) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ *ja* $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$,

(c) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Todistus. (a) Olkoon x ja y mielivaltaisia reaalilukuja sekä $z = x + y$. Nyt kaikilla $t \in \mathbb{R}$, on

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\sin t \cos(z - t) + \cos t \sin(z - t))\\ &= \cos t \cos(z - t) + \sin t \sin(z - t) - \sin t \sin(z - t) - \cos t \cos(z - t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Siten $\sin t \cos(z - t) + \cos t \sin(z - t) := K$ on vakio, koska ainoastaan vakiofunktion derivaatta on nolla kaikkialla. Nyt kun asetetaan $t = 0$, saadaan $K = 0 + 1\sin(z) = \sin z$ ja kun asetetaan $t = x$, saadaan

$$\begin{aligned}K &= \sin x \cos(z - x) + \cos x \sin(z - x)\\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y,\end{aligned}$$

sillä $z = x + y$. Tämä todistaa kohdan a väitteen.

(b) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Nyt kohdan (a) ja kosinifunktion parillisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \sin(\frac{\pi}{2})\cos(-x) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(-x)\\ &= \cos(-x) + 0\\ &= \cos(x).\end{aligned}$$

Tämä todistaa b-kohdan ensimmäisen yhtälön. Kun tähän yhtälöön sijoitetaan $x = \frac{\pi}{2} - y$ saadaan $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + y) = \sin y$, mikä todistaa jälkimmäisen yhtälön.

(c) Edelleen kun $x, y \in \mathbb{R}$, saadaan kohtien (b),(a) sekä sinifunktion parittomuuden ja kosinifunktion parillisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \sin(\frac{\pi}{2} - x - y) \\ &= \sin(\frac{\pi}{2} - x)\cos(-y) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)\sin(-y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

□

5 Yleistetyt trigonometriset funktiot

Määritellään seuraavaksi edellä määriteltyjen trigonometristen funktioiden yleistykset, joita merkitsemme alaindeksillä p. Määritelmät ovat muunnelmia "tavallisten" trigonometristen funktioiden määritelmistä ja niiden käsittelyssä pyritään noudattamaan samaa rakennetta kuin aiemmissa kappaleissa. Määrittelyt tehdään paloittain, koska jatkuvuuden, derivoituvuuden sekä parillisuuden tai parittomuuden osoittaminen vaatii joidenkin pisteiden osalta tarkempaa tarkastelua. Tämän kappaleen päälähde on [7].

5.1 Käänteinen $\sin_p$-funktio eli F_p

Määritellään yleistetty arcsin-funktio eli funktio F_p arcsin-funktion määritelmää varioimalla.

Määritelmä 9. Olkoon $1 < p < \infty$ ja

$$F_p(x) := \int_0^x \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}}, \qquad x \in [0,1[.$$

Määritelmä on mielekäs, koska funktio $f : [0,x] \to \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{(1-t^p)^{1/p}}$ on jatkuva suljetulla välillä $[0,x]$. Siten funktio f on Riemann-integroituva välillä $[0,x]$.

F_p-funktiolla on välillä $[0,1[$ samoja ominaisuuksia, joita arcsin-funktiolle todettiin välillä $]-1,1[$ (katso lause 1).

Lause 11. *Funktiolla $F_p(x)$ on seuraavat ominaisuudet*

(a) $F_p(x)$ on jatkuva välillä $[0,1[$.

(b) $F_p(x)$ on derivoituva avoimella välillä $]0,1[$ ja tällä välillä

$$\frac{dF_p(x)}{dx} = (1-x^p)^{-1/p}.$$

(c) $F_p(x)$ on aidosti kasvava, rajoitettu sekä injektiivinen funktio välillä $[0,1[$.

Todistus. Todistukset voidaan tehdä samaan tapaan, kuin lauseessa 1. Funktion F_p jatkuvuus ja derivoituvuus seuraavat integroitavan funktion jatkuvuudesta analyysin peruslauseen nojalla. Derivaattaa tutkimalla nähdään aito kasvavuus. Edelleen aidosta kasvavuudesta seuraa suoraan injektiivisyys.

Tarkistetaan rajoittuneisuus samaan tapaan kuin tapauksessa $p = 2$. Kun $p \in]1, \infty[$, on voimassa epäyhtälö $1 - t \leq 1 - t^p$, kaikilla $t \in [0, 1[$. Siten

$$\begin{aligned} F_p &= \int_0^x \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{p}}} \\ &= -\int_1^{1-x} u^{-\frac{1}{p}} du \\ &= \int_{1-x}^1 u^{-\frac{1}{p}} du \\ &= \left(\frac{1}{-\frac{1}{p}+1} \right) \left(1 - (1-x)^{-\frac{1}{p}+1} \right) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kolmannessa integraalissa käytettiin sijoitusta $t(u) = -u + 1$. Edelleen $\frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} \geq 0$, joten $F_p \geq 0$. □

Lauseen 11 nojalla funktio F_p toteuttaa lemman 1 oletukset avoimella välillä $]0, 1[$, joten seuraava määrittelyn laajennus on perusteltua.

Seuraus 7. *Laajennetaan funktion F_p määrittely suljetulle välille $[0, 1]$ niin, että funktiosta tulee jatkuva, aidosti kasvava sekä rajoitettu ja*

$$F_p[0, 1] = [0, c],$$

missä

$$\begin{aligned} c &= \inf\{F_p(x), x \in [0, 1[\} = \lim_{x \to 0^+} F_p(x) = \lim_{x \to 0^+} \int_0^x \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}} = 0 \qquad \textit{ja} \\ c &= \sup\{F_p(x), x \in [0, 1[\} = \lim_{x \to 1^-} F_p(x) = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Määritellään luku π_p seuraavasti

Määritelmä 10.

$$\pi_p = 2F_p(1).$$

Edelleen määritelmän 10 nojalla

$$\begin{aligned}\pi_p &= 2F_p(1)\\ &= 2\sup\{F_p(x) : 0 \leq x < 1\}\\ &= 2\lim_{x\to 1^-} F_p(x)\\ &= 2\lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}}.\end{aligned}$$

5.2 Funktio $\sin_p$

Tässä kappaleessa määritellään funktio $\sin_p$ siten, että sillä on samoja ominaisuuksia kuin sinifunktiolla. Lisäksi $\sin_p$-funktio yhtyy sinifunktioon eli $\sin_2(x) = \sin(x)$, kun $p = 2$. Niissä todistuksissa, jotka noudattelevat lähes samaa rakennetta kuin sinifunktion yhteydessä, jätetään todistusten täsmällinen toteaminen lukijalle.

Lauseen 11 nojalla funktio F_p toteuttaa lauseen 2 oletukset ja siten sille löytyy käänteisfunktio, jota kutsutaan $\sin_p$-funktioksi.

Määritelmä 11. **$\sin_p$-funktio välillä $[0, \frac{\pi_p}{2}]$**

$$\sin_p : [0, \frac{\pi_p}{2}] \to [0, 1].$$

Huomautus 6. *(a) Määritelmän 9 nojalla $F_p(0) = 0$ ja $F_p(1) = \frac{\pi_p}{2}$, joten $\sin_p(0) = 0$ ja $\sin_p(\frac{\pi_p}{2}) = 1$.*

(b) Lauseen 2 nojalla funktio $\sin_p(x)$ jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[0, \frac{\pi_p}{2}]$.

Laajennetaan määrittely välille $[-\pi_p, \pi_p]$ peilaamalla funktio $\sin_p$ ensin suoran $x = \frac{\pi_p}{2}$ ja sitten origon suhteen.

Määritelmä 12.

(a) Kun $x \in [\frac{\pi_p}{2}, \pi_p]$ määritellään

$$\sin_p(x) = -\sin_p(x - \pi_p).$$

(b) Kun $x \in [-\pi_p, 0]$ määritellään

$$\sin_p(x) = -\sin_p(-x).$$

Huomautus 7. *(a) Funktion $\sin_p$ jatkuvuus pisteissä $x = \frac{\pi_p}{2}$ sekä $x = 0$ nähdään samalla tapaan kuin huomautuksen 3 yhteydessä nähtiin. Siten funktio $\sin_p$ on jatkuvien funktioiden yhdistettynä funktiona jatkuva välillä $[-\pi_p, \pi_p]$.*

(b) Määritelmän 12 nojalla $\sin_p(x)$ on pariton välillä $[-\pi_p, \pi_p]$.

Määritelmä 13. Kaikille $x \in \mathbb{R}$ määritellään

$$\sin_p(x) = \sin_p(x + 2n\pi_p).$$

Huomautus 8. *Määritelmän perusteella* $-1 \leq \sin_p(x) \leq 0$, *kun* $x + 2n\pi_p \in [-\pi_p, 0]$ *ja* $0 \leq \sin_p(x) \leq 1$, *kun* $x + 2n\pi_p \in [0, \pi_p]$, *jollekin* $n \in \mathbb{Z}$.

Seuraus 8. *Funktio* $\sin_p$ *on pariton koko reaaliakselilla.*

Todistus. Kaikille $x \in \mathbb{R}$ löytyy $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $x + 2n\pi_p \in [-\pi_p, \pi_p]$. Tällöin huomautuksen 7 sekä $\sin_p$-funktion määrittelyiden nojalla $-\sin_p(x) = -\sin_p(x + 2n\pi_p) = \sin_p(-x - 2n\pi_p) = \sin_p(-x)$. □

5.3 Funktion $\sin_p$ derivoituvuus

Samoin kuin edellä tässä kappaleessa ilmeisimmät todistukset jätetään lukijalle pääsääntöisesti silloin, kun voidaan viitata vastaaviin todistuksiin sinifunktion yhteydessä. Funktion $\sin_p$-derivoituvuus on sinifunktion tapaan seuraus käänteisfunktion derivoituvuudesta. Seuraava lemma voidaan todistaa vastaavasti kuin lemma 2, mutta tuloksen merkittävyyden vuoksi myös todistus kirjoitetaan auki.

Lemma 6. *Funktio* $\sin_p$ *on derivoituva välillä* $]0, \frac{\pi_p}{2}[$ *ja kaikille* $x \in]0, \frac{\pi_p}{2}[$,

$$\frac{d}{dx} \sin_p x = (1 - (\sin_p(x))^p)^{1/p}.$$

Todistus. Lauseen 11 nojalla funktio $y(x) = F_p(x)$ on toteuttaa lauseen 5 oletukset avoimella välillä $]0, 1[$, sillä $y'(x) = \frac{d}{dx} F_p(x) = (1 - x^p)^{-1/p} > (1 - 0^p)^{-1/p} > 0$. Siten lauseen 5 nojalla on funktion $y(x)$ käänteisfunktio $x(y) = \sin_p(y)$ derivoituva jokaisessa pisteessä $y \in]F_p(0), F_p(1)[=]0, \frac{\pi_p}{2}[$, jolloin

$$\frac{d}{dy} \sin_p(y) = \frac{d}{dy} x(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{(1 - x^p)^{-1/p}} = (1 - x^p)^{1/p} = (1 - (\sin_p(y))^p)^{1/p}.$$

□

Lemmasta 6 seuraa derivoituvuus koko reaalikselille $\sin_p$-funktion ominaisuuksien takia. Todistetaan derivoituvuus paloissa kuten sinifunktion yhteydessä tehtiin. Seuraava lemma voidaan todistaa vastaavasti kuin lemma 3.

Lemma 7. *Funktio* $\sin_p(x)$ *on derivoituva välillä* $]\frac{\pi_p}{2}, \pi_p[$ *ja kaikilla* $x \in]\frac{\pi_p}{2}, \pi_p[$ *on* $\frac{d}{dx} \sin_p(x) = -(1 - (\sin_p(x))^p)^{1/p}$.

Lemma 8. *Funktio* $\sin_p(x)$ *on derivoituva väleillä* $]-\pi_p, -\frac{\pi_p}{2}[$ *sekä* $]-\frac{\pi_p}{2}, 0[$ *ja*

(a) *kun* $x \in]-\frac{\pi_p}{2}, 0[$, *on* $\frac{d}{dx} \sin_p(x) = (1 - |\sin_p(x)|^p)^{1/p}$,

(b) *kun* $x \in]-\pi_p, -\frac{\pi_p}{2}[$, *on* $\frac{d}{dx} \sin_p(x) = -(1 - |\sin_p(x)|^p)^{1/p}$.

Todistus. (a) Kun $x \in \left]-\frac{\pi_p}{2}, 0\right[$ on $-x \in \left]0, \frac{\pi_p}{2}\right[$, jolloin määritelmän 12, lemman 6 ja ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin_p(x) &= \frac{d}{dx} - \sin_p(-x) \\ &= -(-(1-(\sin_p(-x))^p)^{1/p}) \\ &= (1-(\sin_p(-x))^p)^{1/p} \\ &= \frac{d}{dx}\sin_p(x) = (1-|\sin_p(x))|^p)^{1/p},\end{aligned}$$

sillä kun $x \in]-\pi_p, 0[$ on $\sin_p(-x) = -\sin_p(x) = |\sin_p(x)|$ määritelmän 12 ja huomautuksen 8 nojalla.

(b) Kun $x \in \left]-\pi_p, -\frac{\pi_p}{2}\right[$ on $-x \in \left]\frac{\pi_p}{2}, \pi_p\right[$, jolloin määritelmän 12, lemman 7 ja ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin_p(x) &= \frac{d}{dx} - \sin_p(-x) \\ &= -(-(-(1-(\sin_p(-x))^p)^{1/p})) \\ &= -(1-(\sin_p(-x))^p)^{1/p} \\ &= -(1-|\sin_p(x))|^p)^{1/p},\end{aligned}$$

sillä kun $x \in]-\pi_p, 0[$ on $\sin_p(-x) = -\sin_p(x) = |\sin_p(x)|$ määritelmän 12 ja huomautuksen 8 nojalla.

$\square$

Funktion $\sin_p$ derivaatan raja-arvot molemmin puolin pisteitä $\frac{\pi_p}{2}$, 0, $-\frac{\pi_p}{2}$ ovat löydettävissä (ja ne ovat samoja). Tämän tiedon sekä lauseiden 7 ja 6 avulla voidaan osoittaa $\sin_p$-funktion derivoituvuus näissä pisteissä samaan tapaan kuin sinifunktion yhteydessä näytettiin pisteelle $\frac{\pi_p}{2}$ lemmassa 4.

Lemma 9. *Funktio* $\sin_p$ *on derivoituva pisteissä* $\frac{\pi_p}{2}$, 0, $-\frac{\pi_p}{2}$ *ja* $\frac{d}{dx}\sin_p(-\frac{\pi_p}{2}) = \frac{d}{dx}\sin_p(\frac{\pi_p}{2}) = 0$ *sekä* $\frac{d}{dx}\sin_p(0) = 1$.

Kun yhdistetään yllä olevat lemmat, niin saadaan huomautuksen 8 nojalla

Seuraus 9. *Funktio* $\sin_p$ *on derivoituva väleillä* $\left]-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}\right]$, $\left]-\pi_p, -\frac{\pi_p}{2}\right]$ *sekä* $\left[\frac{\pi_p}{2}, \pi_p\right[$ *ja*

$$\frac{d}{dx}\sin_p(x) = \begin{cases} (1-|\sin_p(x)|^p)^{1/p} & , \text{ kun } x \in \left]-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}\right], \\ -(1-|\sin_p(x)|^p)^{1/p} & , \text{ kun } x \in \left]-\pi_p, -\frac{\pi_p}{2}\right] \text{ tai } x \in \left[\frac{\pi_p}{2}, \pi_p\right[. \end{cases}$$

Tästä seuraa sinifunktion derivoituvuus koko reaaliakselille. Tämän todistaminen voidaan tehdä siten, että ensin osoitetaan määritelmän 12 ja lauseen 6 avulla derivoituvuus pisteissä $-\pi_p$ ja π_p. Sitten käytetään jaksollisuutta (lause 8), jonka avulla nähdään, että funktio $\sin_p$ on derivoituva reaaliakselilla. Todistus noudattelee seurauksen 4 todistuksen rakennetta.

Seuraus 10. *Funktio* $\sin_p$ *on derivoituva reaaliakselilla ja*

$$\frac{d}{dx}\sin_p(x) = \begin{cases} (1-|\sin_p(x)|^p)^{1/p} & , \textit{ kun } x+2n\pi_p \in [-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}], \\ -(1-|\sin_p(x)|^p)^{1/p} & , \textit{ kun } x+2n\pi_p \in [-\pi_p, -\frac{\pi_p}{2}] \textit{ tai } x+2n\pi_p \in [\frac{\pi_p}{2}, \pi_p], \end{cases}$$

jollekin $n \in \mathbb{Z}$.

5.4 Funktio $\cos_p$

Määritellään funktio $\cos_p$ funktion $\sin_p$ derivaattana. Tehdään määrittely tällä kertaa heti koko reaaliakselille ja todetaan sitten, että saatu funktio on kosinifunktion tapaan jaksollinen, jatkuva, rajoitettu sekä parillinen. Tulosten yksityiskohtainen todistaminen sivuutetaan, mutta se voitaisiin toteuttaa samalla rakenteella kuin kosinifunktion yhteydessä tehtiin.

Määritelmä 14. Määritellään funktio $\cos_p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$\cos_p(x) = \frac{d}{dx}\sin_p(x) = \begin{cases} (1-|\sin_p(x)|^p)^{1/p} & , \text{ kun } x+2n\pi_p \in [-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}], \\ -(1-|\sin_p(x)|^p)^{1/p} & , \text{ kun } x+2n\pi_p \in [-\pi_p, -\frac{\pi_p}{2}] \text{ tai } x+2n\pi_p \in [\frac{\pi_p}{2}, \pi_p], \end{cases}$$

jollakin $n \in \mathbb{Z}$.

Funktio $\cos_p$ on jaksollinen jaksolla $2\pi_p$ ja jatkuvien funktioiden yhdistettynä funktiona jatkuva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, sillä jatkuvuus pisteessä $\frac{\pi}{2}$ seuraa toispuoleisten raja-arvojen olemassaolosta tässä pisteessä. Siten lauseen 4 nojalla funktio $\cos_p$ on jatkuva ja rajoitettu koko reaaliakselilla. Lisäksi funktion $\sin_p$ parittomuuden, määritelmän 14 ja lemman 5 nojalla funktio $\cos_p$ on parillinen samaan tapaan kuin seurauksen 6 yhteydessä todettiin.

Seuraus 11. *Funktion* $\cos_p$ *määritelmän seurauksena saadaan Pythagoraan trigonometrisen identiteetin vastine*

$$|\sin_p(x)|^p + |\cos_p(x)|^p = 1.$$

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned} |\sin_p(x)|^p + |\cos_p(x)|^p &= |\sin_p(x)|^p + \left|\pm(1-|\sin_p(x)|^p)^{1/p}\right|^p \\ &= |\sin_p(x)|^p + 1 - |\sin_p(x)|^p \\ &= 1, \end{aligned}$$

sillä $|\sin_p(x)| \leq 1$ huomatuksen 8 nojalla. □

Tässä mielessä $\sin_p$- ja $\cos_p$-funktiot muistuttavat klassisia vastineitaan. Niille ei kuitenkaan voi johtaa järkeviä vastineita lauseessa 10 esiintyville ”summakaavoille” [2].

6 Geometrinen näkökulma sekä katsaus yleistettyjen trigonometristen funktioiden määritelmän taustoihin

Geometrista tarkastelua varten otetaan käyttöön p-normi, jolla voidaan määritellä etäisyys ja edelleen tämän avulla yksikköympyrä p-metriikassa. Alla määritelty ”p-normi” on $\mathbb{R}^n$-avaruuteen rajattu kirjallisuudessa usein esiintyvä l_p-normi.

Määritelmä 15. Olkoon $p \in [1, \infty[$ ja olkoon $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|x\|_\infty &:= \max\{|x_n|\}. \end{aligned}$$

Kun $p = 2$, on kyseessä tavallinen Euklidinen normi $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ on $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Edellä määritellyn p-normin on helppo osoittaa toteuttavan normin oletukset. Täsmällinen todistus löytyy lähteestä [8] joskin hieman yleisemmässä tapauksessa. Määritellään sitten p-normin avulla etäisyys d_p, joka virittää p-metriikan avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 16. Olkoon a, $b \in \mathbb{R}^n$. Määritellään

$$d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_p(a, b) = \|a - b\|_p .$$

Luku $d_p(a, b)$ on pisteiden a ja b välinen etäisyys p-metriikassa.

Esimerkki 1. Kaupunkien kortteleissa kadut ovat usein 90 asteen kulmissa toisiinsa nähden. Siten kortteleissa ei voi liikkua ”linnuntietä” eli lyhyintä mahdollista reittiä. Sen takia pisteestä $a \in \mathbb{R}^2$ pisteeseen $b \in \mathbb{R}^2$ kuljettavan matkan mittaamiseen saattaa olla mielekästä käyttää 1-metriikkaa, ”city-block metric”, jolle [9]

$$\|a - b\|_1 = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| .$$

Tällä tavoin mitattuna karttakoordinaatistossa pisteiden $(0, 0)$ ja $(1, 1)$ etäisyys olisi $\|(0, 0) - (1, 1)\|_1 = |0 - 1| + |0 - 1| = 2$.

Määritellään yksikköympyröiksi p-metriikassa pisteet, jotka ovat kullakin p-normilla mitattuna yhden yksikön etäisyydellä origosta.

Määritelmä 17. Yksikköympyrä p-metriikassa on niiden pisteiden $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ joukko, joille $d_p((0, 0), (x_1, x_2)) = 1$.

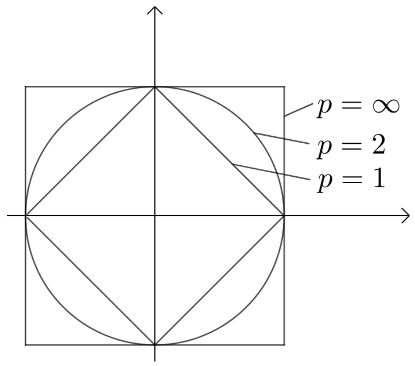
Esimerkki 2. Nyt yksikköympyrät $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 = 1\}$, $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ ja $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$ ovat piirretty kuvaan 1. Kun $p = 1$, yksikköympyrän oikea yläneljännes on joukko

$$\begin{aligned} \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, \|x\|_1 = 1\} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, |x_1| + |x_2| = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, x_2 = -x_1 + 1\}. \end{aligned}$$

Vastaavasti ∞-normilla määritelty yksikköympyrän oikea yläneljännes on joukko

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, \|x\|_\infty = 1\} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, \max\{x_1, x_2\} = 1\} \\ &= \{(1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 1\} \cup \{(x_1, 1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1\}.\end{aligned}$$

Vastaavilla tutkailuilla saadaan täydennettyä yksikköympyröiden puuttuvat osat. Euklidisella normilla määritetty yksikköympyrä pidetään tunnettuna. l_p-normin arvoilla $p = 1$, $p = 2$ ja $p = \infty$ määritetyt yksikköympyrät on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: *Yksikköympyrät määriteltynä p-normeilla* $p = 1, 2$ *ja* ∞.

Seuraus 12. *Polku*

$$\gamma_p : [-\pi_p, \pi_p] \to [-1, 1] \times [-1, 1], \;\; \gamma_p(t) = (\cos_p(t), \sin_p(t))$$

parametrisoi yksikköympyrän p-metriikassa.

Todistus. Seurauksen 11 nojalla

$$\begin{aligned}d_p\left((0,0); (\cos_p(t), \sin_p(t))\right) &= \|(0,0) - (\cos_p(t), \sin_p(t))\|_p \\ &= (|0 - \cos_p(t)|^p + |0 - \sin_p(t)|^p)^{1/p} \\ &= 1^{1/p} \\ &= 1,\end{aligned}$$

kaikille $t \in [-\pi_p, \pi_p]$. Siten määritelmän 17 nojalla polku γ_p on yksikköympyrällä.

Olkoon sitten piste (x, y) yksikköympyrällä. Tällöin selvästi $x, y \in [-1, 1]$. Muistetaan, että funktiot $\sin_p$ ja $\cos_p$ ovat suljetulla välillä $[-\pi_p, \pi_p]$ jatkuvia ja saavuttavat tällä välillä arvot -1 sekä 1. Siten Bolzanon lauseen nojalla löytyy $t \in [-\pi_p, \pi_p]$, jolle $\cos_p(t) = x$. Nyt

$$\begin{gathered}(|\cos_p(t)|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} = 1 \\ \Leftrightarrow \\ |\cos_p(t)|^p + |y|^p = 1,\end{gathered}$$

missä lauseen 11 nojalla voidaan valita $|y|^p = |\sin_p(t)|^p$, jolloin $y = \sin_p t$ tai $y = -\sin_p t$. Ensimmäisessä tapauksessa on $(\cos_p(t), \sin_p(t)) = (x, y)$. Jälkimmäisessä tapauksessa löytyy $-t \in [-\pi_p, \pi_p]$ siten, että $y = -\sin_p t = \sin_p(-t)$ funktion $\sin_p$ parittomuuden nojalla ja $x = \cos_p t = \cos_p(-t)$ funktion $\cos_p$ parillisuuden nojalla. Siten polku γ_p sisältää pisteen (x, y).

□

Edellä johdettu tulos pätee erityisesti myös sini- ja kosinifunktioille. Tässä mielessä ne ovat geometrisesti analogisia $\cos_p$- ja $\sin_p$-funktioiden kanssa. Edelleen kaikki karteesisen koordinaatiston pisteet (x, y) voidaan esittää $\cos_p$- ja $\sin_p$-funktioiden avulla, kun seurauksessa 12 mainitut vektorit $(\cos_p(t), \sin_p(t))$ skaalataan reaaliluvulla r, jolloin

$$x = r\cos_p(\alpha) \tag{4}$$
$$y = r\sin_p(\alpha), \tag{5}$$

missä $\alpha \in \mathbb{R}$. Sini- ja kosinifunktioiden tapauksessa kyseessä on tuttu napakoordinaattimuunnos. Funktiot $\sin_p$ ja $\cos_p$ voitaisiin määritellä myös näillä yhtälöillä, jolloin päädyttäisiin samoihin funktioihin kuin käänteisfunktiomääritelmällä [3].

Yhtälöissä 4 ja 5 muuttuja r kertoo siis pisteen l_p-etäisyyden origosta, sillä

$$\begin{aligned}\left\|(r\cos_p(\alpha), r\sin_p(\alpha))\right\|_p &= r\left\|(\cos_p(\alpha), \sin_p(\alpha))\right\|_p \\ &= r.\end{aligned}$$

Sen sijaan muuttujalle α saadaan vastine yksikköympyrän kaaren pituudesta vain arvolla $p = 2$ [3]. Tämä osoitetaan seuraavaksi arcsin-funktion avulla.

Näytetään aluksi, että funktio $\arcsin y$ kertoo Euklidista normia vastaavan yksikköympyrän pisteiden $(1, 0)$ ja (x, y) välisen kaaren pituuden, kun $x, y > 0$. Tehdään se valitsemalla yksikköympyrän oikealta yläneljännekseltä $n \in \mathbb{N}$ kappaletta pisteitä $P_n \in \mathbb{R}^2$ järjestettynä y-koordinaattien mukaiseen suuruusjärjestykseen, siten että $P_1 = (t_1, 0) = (1, 0)$ ja $P_n = (t_n, \sqrt{1 - t_n^2}) = (x, y)$, missä $x, y \in [0, 1[$. Näiden pisteiden muodostaman murtoviivan pituus $\sum_{k=1}^{n} \|P_k - P_{k+1}\|$ voidaan ajatella erääksi alarajaksi pisteiden P_1 ja P_n väliselle kaaren pituudelle. Tämä on esitetty kuvassa 2.

Supremum tällaisille approksimaatioille on ympyrän kaaren parametrisoivan polun $\gamma : [0, y] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\sqrt{1 - t^2}, t)$ pituus $\ell(\gamma)$ (katso [10])

$$\ell(\gamma) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))\|\}, \tag{6}$$

missä pisteet $0 = t_0 < t_2 < ... < t_n = y$ jakavat välin $[0, y[$.

On huomattava, että tällaisessa tarkastelussa polku täytyy määritellä siten, että ympyrän kaari kuljetaan vain kertaalleen. Koska yksikköympyrän oikean yläneljänneksen parametrisaatio on jatkuvasti derivoituva, voidaan käyttää polun pituuden integraalimääritelmää (katso [10]), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma_y) &= \int_0^y \left\| \gamma_y'(t) \right\| dt \\
&= \int_0^y \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} \right)^2} dt \\
&= \int_0^y \sqrt{\frac{1-t^2+t^2}{1-t^2}} dt \\
&= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.
\end{aligned}$$

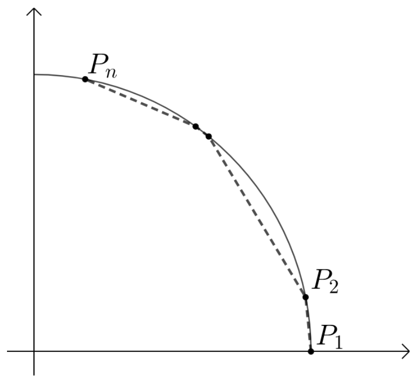
Huomataan, että integroitava polku γ_y voidaan suoraan laajentaa myös välille $]-1,1[$. Tällöin saatu funktio $\ell(\gamma_y) :]-1,1[\to \mathbb{R}$ yhtyy funktion arcsin määritelmään. Siten yhtälöissä 1 ja 2 sini- ja kosinifunktioiden argumentti α voidaan tulkita yksikköympyrän pisteiden $(1,0)$ ja (x,y) välisen kaaren pituutena.

Sen sijaan injektiota kulman eli $\sin_p$-funktion argumentin ja l_p-normilla määritetyn yksikköympyrän kaaren pituuden välillä ei ole, koska yleisessä tapauksessa yksikköympyrä ei ole symmetrinen origon suhteen [3]. Yksikköympyrän kaaren pituuden laskeminen p-metriikassa osoittautuu ylipäänsä haastavaksi.

Kaarta vastaavan sektorin pinta-alan avulla löydetään kuitenkin huomattavasti yksinkertaisempi funktio. Tämä funktio on yksi niistä ensimmäisistä yleistetyistä trigonometrisistä funktioista, joita ruotsalainen matemaatikko Eric Lundberg tutki jo 1800-luvulla. Seuraavassa tarkastelussa esitietoina lukijalta oletetaan vektorifunktioiden analyysin ja erityisesti Greenin lauseen tuntemusta. Idea lähestymistapaan on peräisin artikkelista [6][s. 10].

Pyritään siis etsimään sellainen funktio, joka antaa tuloksena sektorin pinta-alan, kun kuljetaan yksikköympyrän pisteestä $(1,0)$ pisteeseen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, missä $x, y \in [0,1]$. Lisäksi halutaan, että funktio on yhteydessä y-koordinaatin muutokseen, samaan tapaan kuin arcsin-funktio on.

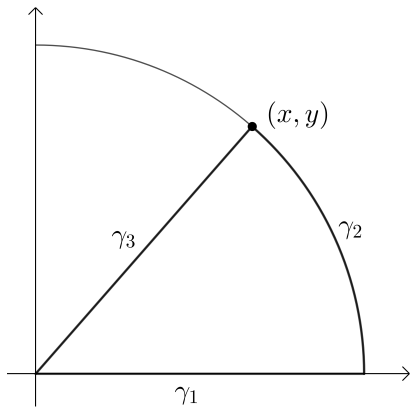
Olkoon nyt $0 \leq y < 1$ ja $1 < p < \infty$. Olkoon $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, missä



Kuva 2: *Ympyrän kaarta approksimoidaan murtoviivalla.*

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (t,0),\\
&\gamma_2 : [0,y] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_2(t) = ((1-t^p)^{1/p}, t)\text{ja}\\
&\gamma_3 : [0,y] \to \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) = ((y-t)\frac{(1-y^p)^{1/p}}{y}, y-t).
\end{aligned}
$$

Polku γ on yksikköympyrän $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\|_p\} = 1$ pisteestä $(1,0)$ pisteeseen $(x,y); x,y \in [0,1[$ ulottuvaa kaarta vastaavan sektorin reunan parametrisoiva polku. Havainnekuva polusta γ arvolla $p=2$ on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3: *Euklidisen normin määräämän yksikköympyrän erään sektorin reuna on parametrisoitu polulla* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$.

Lasketaan tämän polun rajaaman alueen S_y pinta-ala $V_2(S_y)$. Greenin lauseen nojalla

$$
\begin{aligned}
V_2(S_y) &= \int_{S_y} 1\\
&= \frac{1}{2}\int_\gamma \partial_y x - \partial_x y\\
&= \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)\cdot d\bar{s},
\end{aligned}
$$

sillä γ on positiivisesti suunnistettu, paloittain sileä ja itseään leikkaamaton joukon S_y reunan parametrisoiva polku. Nyt saatu käyräintegraali yli polun γ voidaan laskea kolmessa osassa, jolloin osoittautuu, että polkujen γ_1 ja γ_3 yli integroidessa integraalit häviävät, sillä

$$
\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} (-y,x)\cdot d\bar{s} = \frac{1}{2}\int_0^1 (0,t)\cdot(1,0)dt = 0
$$

ja

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\gamma_3}(-y,x)\cdot d\bar{s} &= \frac{1}{2}\int_0^y \left(-(y-t),(y-t)\frac{(1-y^p)^{1/p}}{y}\right)\cdot\left(\frac{-(1-y^p)^{1/p}}{y},-1\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^y \left((y-t)\frac{(1-y^p)^{1/p}}{y}+(t-y)\frac{(1-y^p)^{1/p}}{y}\right)dt\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\gamma}(-y,x)\cdot d\bar{s} &= 0+\frac{1}{2}\int_{\gamma_2}(-y,x)\cdot d\bar{s}+0\\
&= \frac{1}{2}\int_0^y \left(-t,(1-t^p)^{1/p}\right)\cdot\left(-t^{p-1}(1-t^p)^{\frac{1}{p}-1},1\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^y \left(t^p(1-t^p)^{\frac{1}{p}-1}+(1-t^p)^{1/p}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^y \left((t^p+(1-t^p))(1-t^p)^{\frac{1}{p}-1}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^y (1-t^p)^{\frac{1}{p}-1}dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^y \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{p-1}{p}}}\ .
\end{aligned}
$$

Huomataan, että kun $p=2$, saatu integraali yhtyy arcsin-funktion määritelmään eli

$$
\int_0^y \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{2-1}{2}}}=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2)}}=\arcsin y.
$$

Lisäksi havaitaan, että Euklidisessa metriikassa on voimassa yksikköympyrän ympyräsektorin kaarenpituuden $\arcsin y$ sekä sitä vastaavan sektorin pinta-alan $V_2(S_y)$ välinen yhteys

$$
2V_2(S_y)=\arcsin y,
$$

kun $y\in[-1,1]$. Edelleen sektorin pinta-alan funktiosta $V_2(S_y)$ voidaan huomata, ettei se yhdy funktion F_p määritelmään, kun $p\neq 2$.

Saatu funktio $V_2(S_y)$ on kuitenkin erään yleistetyn sinifunktion käänteisfunktio, johon Lundberg päätyi tutkiessaan differentiaaliyhtälöä $\frac{dy}{dx}=(1-y^p)^{m/p}$ arvolla $m=p-1$. Tätä funktiota Lundberg merkitsi $S_{\frac{p-1}{p}}(x)$. Vastaavasti kosinifunktion käänteisfunktion vastinetta eli integraalin

$$
x=\frac{1}{2}\int_y^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{p-1}{p}}}
$$

käänteisfunktiota Lundberg merkitsi $C_{\frac{p-1}{p}}(x)$. Tähän integraaliin päädytään, kun lasketaan sektorin pinta-ala vastaavalla tavalla kuin aiemminkin kuitenkin niin, että nyt sektori vastaa kaarta pisteestä (x, y) pisteeseen $(0, 1)$. Lundberg johti näille funktioille muun muassa Pythagoraan trigonometrisen identiteetin vastineen

$$S_{\frac{p-1}{p}}(x)^p + C_{\frac{p-1}{p}}(x)^p = 1.$$

Myöhemmin yleisempiä trigonometrisiä funktioita on tutkittu melko paljon osittain siksi, että ne ovat tunnettujen differentiaaliongelmien ratkaisuja. Erityisesti näistä seuraavaksi tarkastellaan Dirichtlet:n ongelmaa mukaillen Peter Lindqvistin tutkielmaa [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(\left|u'\right|^{p-2} u'\right) &= \lambda \left|u\right|^{p-2} u \qquad \text{välillä }]0, \pi_p[, \\ u(0) &= 0, \\ u(\pi_p) &= 0, \end{aligned}$$

missä luvut $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat vakiomuotoisia ominaisarvoja.Voidaan osoittaa, että ominaisfunktiot $\hat{\sin}_p(x)$, voidaan määritellä välillä $[0, \frac{\hat{\pi}_p}{2}[$ kaavalla

$$x = \int_0^{\hat{\sin}_p(x)} \frac{dt}{(1 - \frac{t^p}{p-1})^{1/p}}, \tag{7}$$

missä

$$\hat{\pi}_p = 2 \lim_{x \to (p-1)^{1/p}} \int_0^x \frac{dt}{(1 - \frac{t^p}{p-1})^{1/p}}.$$

Yllä alkuperäiseen lähteeseen verrattuna määrittelyväli on muutettu suljetusta puoliavoimeksi ja $\hat{\pi}_p$:n määritelmä raja-arvoksi, jotta integraalit ovat hyvin määriteltyjä tässä kirjoitelmassa käytettyjen määritelmien valossa.

Huomattakoon, että myös Lundberg tutki integraalin (7) tyyppistä funktiota. Integraalia (7) voidaan vielä yksinkertaistaa sijoituksella $t(\tau) = (p-1)^{1/p}\tau$, jolloin

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{\hat{\sin}_p(x)} \frac{dt}{(1 - \frac{t^p}{p-1})^{1/p}} \\ &= (p-1)^{1/p} \int_0^{(p-1)^{-1/p}\hat{\sin}_p(x)} \frac{d\tau}{(1 - \tau^p)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Havaitaan, että käsitellyn Dirichtlet'n ongelman kaikki ratkaisufunktiot voidaan esittää $\sin_p$-funktion avulla. Dirichtlet'n ongelma on esitetty artikkelissa [3] p-Laplace-operaattorin avulla. Tämä yhteys on merkittävä, sillä tutkimus p-Laplace-operaattoriin liittyen on laajaa. Edelleen Dirictlet'n "reunaehto-ongelmat" ovat merkittävässä roolissa fysiikan tutkimuksessa, joista esimerkiksi sini- ja kosinifunktiot ovat ratkaisu kvanttimekaanisen äärettömän yksiulotteisen potentiaalikuopan tilanteeseen [11][s. 25-29].

Viitteet

[1] Peter Lindqvist, *Some remarkable sine and cosine functions*, R'icerche d'i Matematica, Vol. XLIV, fasc. Po, (1995), s. 269-290

[2] David E. Edmunds, Petr Gurka, Jan Lang, *Properties of generalized trigonometric functions*, Department of Mathematics, Czech University of Life Sciences Prague, 2011

[3] David Edmunds, Jan Lang, *Generalizing trigonometric functions from different points of view*, Pokroky Matematiky, Fyziky & Astronomie nro. 54, Tammikuussa 2009

[4] Charles G. Denlinger, *Elements of real analysis*, Millersville University, Jones and Bartlett publishers, Sudbury, Massasuchetts, 2011

[5] Petri Juutinen, *Differentiaaliyhtälöt*, Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2.9.2008, luettu 21.3.2016

[6] Peter Lindqvist, Jaak Peetre, *Eric Lundberg och de hypergeometriska funktionerna*, Normat 1, Scandinavian University Press, 1997

[7] Lang, Jan and Edmunds, David, *Eigenvalues, embeddings and generalised trigonometric functions*, Springer Science & Business Media, 2011

[8] Topias Mikkola *l_p-avaruuksista*, Kandidaatin tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Syksy 2016

[9] Michel Marie Deza, Elena Deza, *Encyclopedia of Distances*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2016

[10] Petri Juutinen *Vektorifunktioiden analyysi 1A*, Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, 9.9.2014, luettu 10.10.2016

[11] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 1. painos, Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 1995