Fourier-muunnos distribuutioille ja murtosileys

Visa Nummelin
Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
matematiikan pro gradu -tutkielma

12.8.2018 38 sivua

Pro gradu -tutkielmassani käsittelen distribuutioita, Fourier-muunnosta sekä näiden soveltamista funktioiden sileyden mittaamiseen. Distribuutiot ovat lokaalisti integroituvien funktioiden yleistys, joille on aina olemassa derivaatta toisen distribuution muodossa. Fourier-muunnos on lineaarikuvaus funktioiden tai distribuutioiden välillä, josta merkittävän tekevät sen lukuisat sovellukset matematiikan eri aloilla ja muissa luonnontieteissä. Tutkielmassa paneudun sovelluksista sileyskäsitteen laajentamiseen perinteisestä derivaattojen lukumäärästä reaaliarvoiseksi jatkuvaksi suureeksi.

Funktionaalianalyysi on keskeisessä roolissa tutkittavien objektien järjestäen muodostaessa jonkin vektoriavaruuden. Banach-avaruuksien teorian, jonka oletan lukijan tuntevan, jatkeeksi esittelen lyhyesti yleisempiä vektoriavaruuksien topologioita, erityisesti Fréchet ja heikko*. Näitä käytetään saman tien seuraavassa kolmannessa luvussa annettaessa topologia testi- eli sileille kompaktisti kannatelluille funktioille, ja määriteltäessä distribuutiot edellisten duaaliavaruutena. Derivointi laajenee lineaarikuvaukseksi koko distribuutioiden avaruudelta sille itselleen, mikä mahdollistaa derivaattapohjaisten formaalien argumenttien käytön myös karheille funktioille. Tämän tueksi keskityn distribuutioiden kohdalla pitkälti niiden laskuoperaatioihin eli vektoriaritmetiikan lisäksi pisteittäiseen tuloon, konvoluutioon ja rajoittamiseen. Ohessa johdan distribuutioille esityksen jatkuvien funktioiden derivaattadistribuutioiden summana.

Lähtökohtaisesti Fourier-muunnos on distribuutioista riippumaton, ja tutkielman neljäs luku käsitteleekin sitä aluksi vain funktioiden kontekstissa. Tässä todistetaan muun muassa käänteiskaava, Riemann-Lebesgue-lemma ja L^2-isometria. Distribuutiot kuitenkin täydentävät Fourier-teoriaa huomattavasti kuten laajentamalla käänteiskaavan kaikille L^1-funktioille. Fourier-muuntuvat distribuutiot, joita nimitetään temperoiduiksi, määrittelen duaaleina Schwartz- eli sileille superpolynomisesti väheneville funktioille. Temperoidut distribuutiot muodostavat suuren ja hyvin käyttäytyvän distribuutioiden aliavaruuden. Neljännen luvun jälkipuolisko keskittyy laajentamaan Fourier-muunnoksen laskukaavat temperoiduille distribuutioille.

Fourier-muunnoksen sovelluksista paneudun murtosileyden mittaamiseen viimeisessä viidennessä luvussa. Käytännössä tarkastelen avaruusperheitä, joita parametrisoi jatkuva sileysindeksi. Klassisesti derivaattojen lukumäärä toimii diskreettinä sileysindeksinä, mikä konkretisoituu mm. Sobolev-avaruuksissa. Esittelen näitä yleistävät murto-Sobolev-avaruudet, joiden sileysindeksi voi luonnollisten lukujen lisäksi saada mielivaltaisia reaaliarvoja. Lisäksi esittelen Hölder-avaruudet, ja käsittelen Littlewood-Paley-teoriaa kahden avaruushierarkian, Triebel-Lizorkin ja Besov-Lipschitz, kautta. Luvun päätulokset koskevat eri avaruushierarkioiden—siis murtosileyden eri mittaustapojen—välisiä yhteyksiä.

Fourier-muunnos distribuutioille ja murtosileys

Visa Nummelin
Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

12. elokuuta 2018

Tiivistelmä

Tässä pro gradussa tutkin distribuutioita, jotka mahdollistavat kaikkien lokaalisti integroituvien funktioiden derivoinnin. Nämä saadaan duaaliavaruutena kompaktisti kannatelluille sileille funktioille varustettuna erityisellä topologialla, jonka käsittelemiseksi esittelen topologisten vektoriavaruuksien teoriaa. Fourier-muunnos ja -käänteiskaava pääsevät oikeuksiinsa laajennettuina distribuutioille tai tarkemmin temperoiduille sellaisille, mutta käyn myös läpi L^1- ja L^2-teoriat alusta alkaen. Fourier-muunnos vaihtaa sileyden vähenemisnopeudeksi äärettömyydessä, mikä mahdollistaa sileyden mittaamisen. Määrittelen tämän innoittamana murto-Sobolev- eli Bessel-potentiaali-, Triebel-Lizorkin- ja Besov-Lipschitz-avaruudet. Todistan joukon näiden avaruuksien välisiä yhteyksiä olettaen Mihlinin kertojalauseen. Alkeellisempaa murtosileysteoriaa edustavat Hölder-avaruudet sisältyvät myös edellisiin avaruusperheisiin.

Sisältö

1 Johdanto

Distribuutioteoria laajentaa derivaatan käsitettä myös alunperin derivoitumattomiksi luokitelluille funktioille. Tämä tapahtuu siirtymällä perinteisiä funktioita laajempaan distribuutioiden luokkaan. Jokainen jatkuva (ja yleisemmin lokaalisti integroituva) funktio on tulkittavissa distribuutiona, ja jokaisella distribuutiolla on distribuutioderivaatta. Idea on seuraava: jos $f \in C^1(\mathbb{R})$ on jatkuvasti derivoituva ja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ kompaktisti kannateltu sileä funktio, niin osittaisintegroimalla pätee

$$\int_{\mathbb{R}} f'\varphi = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi'$$

Tämän yhtälön oikea puoli on mielekäs, vaikkei jatkuva funktio f olisikaan derivoituva. Kuitenkin oikea puoli φ:n funktiona täysin karakterisoi jatkuvan derivaatan f'. Vektoriavaruudella $C_c^\infty(\mathbb{R})$ määriteltyjen lineaarikuvausten $F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi$ ja $F'(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'\varphi$ avulla ilmaistuna

$$F'(\varphi) = -F(\varphi')$$

mikä sopii määrittelemään "derivaatan" mille tahansa lineaarikuvaukselle. Distribuutiot ovat sitten tällaiset kuvaukset modulo vähäiset jatkuvuusrajoitteet. Lähtöjoukon $\mathbb{R}$ paikalle kelpaavat yleisesti kaikki avoimet moniulotteiset joukot.

Derivaatan yleistys on tuiki tarpeellinen monille osittaisdifferentiaaliyhtälöille ja derivointiin nojaaville optimointiongelmille, joiden ratkaisuiksi ikään kuin kuuluisi derivoitumattomia funktioita. Lisäksi derivointiin pohjautuvat menetelmät voivat yleistyä distribuutioille, jolloin niitä on mahdollista soveltaa moniin uusiin funktioihin. Distribuutiot tarjoavat myös toimivan kontekstin Fourier-muunnokselle, mikä onkin tämän tutkielman pääaiheita. Näiden aihealueiden teoria on lähteenä käyttämäni kirjan [1] vastaavista luvuista. Viidennessä luvussa käytän Fourier-muunnosta murtosileyden mittaamiseen erilaisten funktioavaruuksien muodossa. Tämän pohjana toimi lähteen [2] kuudes luku.

2 Topologiset vektoriavaruudet

Vektoriavaruudet ovat vahvasti läsnä distribuutioiden teoriassa, kuten kaikkien perusoperaatioiden lineaarisuus tulee osoittamaan. Rajankäynti edellyttää topologiaa, mutta normiavaruudet eivät riitä teorian tarpeisiin. Siksi käsittelen ensin yleisempiä topologisia vektoriavaruuksia. Skalaarikunta S on tässä tekstissä aina joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, ja jokainen topologinen avaruus on oletusarvoisesti Hausdorff.

Määritelmä 2.1. Topologinen vektoriavaruus (skalaarikunnan S yli) on S-vektoriavaruus $(V, 0, +, \cdot)$ varustettuna topologialla T siten, että $+ \in V \times V \to V$ ja $\cdot \in S \times V \to V$ ovat jatkuvia. Lähtöjoukoissa käytetään tietenkin tulotopologiaa.

Tavallisin esimerkki topologisesta vektoriavaruudesta on normiavaruus $(V, 0, +, \cdot, \|\cdot\|_V)$. Summan jatkuvuus seuraa kolmioarviosta:

$$\|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\|_V \leq \|x_1 - y_1\|_V + \|x_2 - y_2\|_V =: \|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_{V \times V}$$

ja tulon jatkuvuus hyödyntää lisäksi normin venytyshomogeenisuutta:

$$\|ax - a'x'\|_V \leq |a|\|x - x'\|_V + |a - a'|(\|x\|_V + \|x - x'\|_V) \to 0 \quad \text{kun } (a', x') \to (a, x)$$

Normin refleksiivisyys takaa, että topologia on Hausdorff: jos $x \neq y$, niin avoimet pallot $B(x, \|x-y\|_V/2)$ ja $B(y, \|x-y\|_V/2)$ tarjoavat erilliset ympäristöt. Topologinen vektoriavaruus, joka ei ole normiavaruus, on esimerkiksi kaikkien S-arvoisten funktioiden joukko $A \to S$ varustettuna pisteittäisillä laskuoperaatioilla ja pisteittäisen suppenemisen topologialla eli tulotopologialla. Kun joukko A on ylinumeroituva, ei tulotopologia tunnetusti ole metrisoituva.

Ennen topologisten vektoriavaruuksien käsitteistöä kertaan muutaman oletettavasti tutun termin, joiden käyttö kuitenkin vaihtelee teksteittäin. Funktiojoukon F eräitä hyödyllisiä osajoukkoja merkitsen $\mathcal{L}(F)$, F_c ja F_0. Näistä $\mathcal{L}(F)$ muodostuu F:n jatkuvista lineaarisista alkioista, F_c kompaktisti kannatelluista, ja joukon $F_0 := \overline{F_c}$ funktioiden sanotaan häviävän reunalla, jos tämä vain aidosti kuvaa tilannetta. Jälkimmäisistä tarvitsen lähinnä kompaktisti kannateltuja sileitä funktioita C_c^∞ ja äärettömyydessä häviäviä jatkuvia funktioita C_0^0.

Ympäristö pisteelle x on joukko, jonka sisukseen x kuuluu, ja erityisesti ympäristön ei tarvitse olla avoin. Pisteen x ympäristöjen kokoelmaa avaruudessa X merkitsen $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_x^X = \{U \subseteq X \mid x \in \operatorname{int} U\}$. Seuraavassa lokaaliuden yleisessä määritelmässä voi konkretisoida vaikkapa $P =$ kompakti tai $P =$ kupera.

Määritelmä 2.2. Olkoot X topologinen avaruus ja $P \in \mathcal{P}(X) \to \{\text{tosi}, \text{valhe}\}$ ominaisuus, jota voidaan testata avaruuden X osajoukoilta. Sanotaan, että X on lokaalisti P pisteessä $x \in X$, jos P ympäristöt muodostavat ympäristökannan pisteelle x. Toisin sanoen jokaiselle $U \in \mathcal{N}_x$ on löydyttävä $N \in \mathcal{N}_x$ siten, että $N \supseteq U$ on P. Ilman kantapistettä, X on lokaalisti P tarkoittaa, että X on lokaalisti P jokaisessa pisteessä.

Lokaalius on tässä tekstissä aina ymmärrettävissä tämän määritelmän kautta, vaikka vaihtaisinkin sanajärjestystä. Esimerkiksi jos $P(U) =$ "funktio f on vakio U:ssa", niin lokaalisti P lausutaan "f on lokaalisti vakio", ja yliavaruus X otetaan oletusarvoisesti funktion f lähtöjoukoksi.

Määritelmä 2.3. Olkoot V topologinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$ mielivaltainen osajoukko.

- A on kupera, jos $tA + (1-t)A \subseteq A$ jokaiselle $t \in [0,1]$.
- A on tasapainoinen, jos $cA \subseteq A$ aina kun $|c| \leq 1$.
- A on rajoitettu, jos jokaiselle nollan $0 \in V$ ympäristölle $N \in \mathcal{N}_0$ on olemassa $t > 0$ siten, että $tA \subseteq N$. Toisin sanoen A voidaan skaalata mielivaltaisen pieneksi.
- V on rajoitetusti kompakti, jos jokainen suljettu rajoitettu joukko on kompakti.
- V on Fréchet-avaruus, jos V on lokaalisti kupera ja sen topologia tulee siirtoinvariantista täydellisestä metriikasta. Metriikan d siirtoinvarianssi tarkoittaa, että $d(x,y) = d(0, x-y)$.

Kuperuus ja tasapainoisuus eivät riipu topologiasta, mutta ovat hyödyllisimmillään sen yhteydessä. Rajoittuneisuus on jo määritelty metrisille avaruuksille, mutta normiavaruuksien kohdalla eri määritelmät johtavat selvästi samaan lopputulokseen. Fréchet-avaruuksiin teknisesti liittyy metriikka, mutta sen metriset ominaisuudet kuten rajoittuneisuus ovat yleensä merkityksettömiä—muunnos $d \mapsto \min(1,d)$ tekee kaikista joukoista metrisesti rajoitettuja säilyttäen silti täydellisyyden ja siirtoinvarianssin. Erityisesti metristen avaruuksien kontekstissa rajoitettu kompaktius on usein äärellisulotteisuuden korvike, mutta myös ääretönulotteiset topologiset vektoriavaruudet voivat olla rajoitetusti kompakteja: hyvä esimerkki tästä tulee olemaan testifunktioiden avaruus, ks. 3.1.6. Rajoitettu kompaktius tunnetaan myös Heine-Borel-ominaisuutena.

Kuperuus, tasapainoisuus ja rajoittuneisuus säilyvät jatkuvissa lineaarikuvauksissa ja karteesisissa tuloissa, sekä seurauksena erityisesti venytyksissä ja summissa. Kuperuuden ja tasapainoisuuden kohdalla nämä ovat suoria laskuja. Jos $A \subseteq X$ on rajoitettu, $L \in \mathcal{L}(X \to Y)$ ja $U \in \mathcal{N}_0^Y$, niin $L^{-1}U \in \mathcal{N}_0^X$ jatkuvuuden nojalla, jonka jälkeen $tA \subseteq L^{-1}U$ ja $tLA = L[tA] \subseteq U$ jollekin $t > 0$ osoittaen kuvan LA olevan rajoitettu. Rajoittuneiden joukkojen karteesisen tulon rajoittuneisuus on triviaalia tarkistaa, jos—ja seuraavan lauseen nojalla kun—riittää tarkastella tasapainoisia nollan ympäristöjä. Tulon on tosin oltava äärellinen toisin kuin kuperuuden ja tasapainoisuuden kohdalla.

Rajoitetun joukon kaikki osajoukot ovat selvästi rajoitettuja. On triviaalia todeta, että rajoitetulle A on $A \cup \{0\}$ myös rajoitettu, mikä edellisten kanssa osoittaa näppärästi rajoitettujen joukkojen yhdisteen rajoitetuksi: $A \cup B \subseteq (A \cup \{0\}) + (B \cup \{0\})$. Kuperuus ja tasapainoisuus eivät tietenkään säily kaikille osajoukoille, mutta ne säilyvät kaikissa leikkauksissa. Koska lisäksi vektoriavaruus itse on kupera ja tasapainoinen, on näille ominaisuuksille olemassa sulkeumaoperaatiot. Yleensä tavataan vain kuperaa sulkeumaa

$$\operatorname{hull} A := \bigcap \{B \supseteq A \mid B \text{ on kupera}\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j a_j \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, a_j \in A, c_j \in [0,1], \sum_{j=1}^{n} c_j = 1 \right\}$$

Esityksestä painotettuina keskiarvoina on helppo nähdä, että tasapainoisen joukon kupera sulkeuma on tasapainoinen.

Lause 2.4. *Jokainen topologinen vektoriavaruus on lokaalisti tasapainoinen nollassa. Edelleen jokainen lokaalisti kupera avaruus on lokaalisti yhtä aikaa tasapainoinen ja kupera nollassa.*

Todistus. Olkoon U mielivaltainen nollan ympäristö. Käyttäen tulon jatkuvuutta pisteessä $(0,0)$ löytyvät $r > 0$ ja $N \in \mathcal{N}_0$ siten, että $B(0,r)N \subseteq U$. Koska $cB(0,r)N = B(0,|c|r)N \subseteq B(0,r)N$ aina kun $|c| \leq 1$, on $B(0,r)N$ tasapainoinen. Edelleen $B(0,r)N \supseteq {}^r\!/\!_2 N \in \mathcal{N}_0$, joten $B(0,r)N$ on nollan ympäristö. Tämä osoittaa lokaalin tasapainoisuuden. Lokaalisti kuperassa tapauksessa voidaan lisäksi olettaa, että U on kupera, jolloin $\operatorname{hull}(B(0,r)N) \subseteq U$ on tasapainoinen kupera nollan ympäristö. □

Fréchet-avaruudet ovat merkittäviä Banach-avaruuksien yleistyksinä, joille yhä pätevät versiot funktionaalianalyysin huomattavista lauseista, kuten Hahn-Banach- ja avoimen kuvauksen lause—tässä tekstissä näille tulee kuitenkin vähän käyttöä. Yhden normin sijasta Fréchet-avaruuksien topologia on usein peräisin joukosta normeja tai yleisemmin seminormeja.

Määritelmä 2.5. Funktio $p \in X \to [0,\infty[$ on seminormi vektoriavaruudella X jos

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ kaikille $x, y \in X$ ja
2. $p(cx) = |c|p(x)$ kaikille $x \in X$ ja $c \in S$.

Joukko P seminormeja avaruudella X erottelee pisteet, jos jokaiselle $x \in X \setminus \{0\}$ on olemassa $p \in P$ siten, että $p(x) \neq 0$.

Seminormit ovat siis normeja lukuun ottamatta refleksiivisyyttä. Se saadaan kuitenkin heikommassa muodossa takaisin, kun tarkastellaan pisteet erottelevaa seminormijoukkoa. Jokainen normi $\|\cdot\|$ on seminormi, ja jo yksinään $\{\|\cdot\|\}$ erottelee pisteet.

Seminormijoukko P antaa vektoriavaruudelleen X luonnollisesti topologian, joka on pienin, jonka suhteen jokainen $p \in P$ ja summa ovat jatkuvia. Esikannan muodostavat joukot $x + p^{-1}[0,r[$, jossa $x \in X$, $p \in P$ ja $r > 0$. Seuraava lause kertoo, että X:stä tulee näin topologinen vektoriavaruus, sekä luettelee tämän topologian tärkeimmät ominaisuudet. Huomautan vielä, että kun $P = \{\|\cdot\|\}$ muodostuu yhdestä normista, $x + \|\cdot\|^{-1}[0,r[= B(x,r)$ on avoin pallo, ja tuloksena on siis tavallinen normin määräämä topologia.

Lause 2.6. *Olkoot P kokoelma vektoriavaruuden X seminormeja, joka erottelee pisteet. Tällöin pätee:*

1. *P määrää X:lle lokaalisti kuperan vektoriavaruustopologian.*
2. *Jos P on äärellinen, niin topologian antaa normi* $\sup P$.
3. *Jos P on numeroituva, niin topologian antaa siirtoinvariantti metriikka.*
4. *Jos 3:n lisäksi "Cauchy-ehdosta" $\lim_{j,k\to\infty} p(x_j - x_k) = 0$ kaikille $p \in P$ seuraa, että $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ suppenee, niin X on Fréchet-avaruus.*

Todistus. Oletuksen, että P erottelee pisteet, rooli on vain varmistaa, että topologia on Hausdorff. Jos $x \neq y$, niin löytyy $p \in P$ siten, että $r := p(x-y) > 0$. Nyt $x + p^{-1}[0, {}^r\!/\!_2[$ ja $y + p^{-1}[0, {}^r\!/\!_2[$ ovat erilliset avoimet ympäristöt pisteille x ja y, koska yhteisen pisteen $z \in (x + p^{-1}[0, {}^r\!/\!_2[) \cap (y + p^{-1}[0, {}^r\!/\!_2[)$ olemassaolo johtaisi ristiriitaan $r = p(x-y) \leq |-1|p(z-x) + p(z-y) < {}^r\!/\!_2 + {}^r\!/\!_2$.

1. Avoimet joukot ovat esikannan joukkojen äärellisten leikkausten mielivaltaisia yhdisteitä. Funktio avaruudelle X on jatkuva, jos sen alkukuvat esikantajoukoista ovat avoimia, koska leikkaukset ja yhdisteet säilyvät alkukuvissa. Erityisesti siirtokuvaukset $x+ \in X \to X$ ovat jatkuvia, koska $(x+)^{-1}\left[y + p^{-1}[0,r[\right] = y - x + p^{-1}[0,r[$, ja edelleen homeomorfismeja, koska $(x+)^{-1} = (-x)+$ on myös siirto. Tämän turvin summan ja tulon jatkuvuus riittää tarkistaa pisteessä nolla. Lisäksi jos $0 \in x + p^{-1}[0,r[$, niin $0 \in p^{-1}[0, r - p(x)[\subseteq x + p^{-1}[0,r[$, mikä vähentää tarkastettavien ympäristöjen muotoja. Nyt summan jatkuvuuden osoittaa yksinkertaisesti arvio $p^{-1}[0,r[\supseteq p^{-1}[0, {}^r\!/\!_2[+ p^{-1}[0, {}^r\!/\!_2[$, ja tulon jatkuvuuden osoittaa $p^{-1}[0,r[\supseteq B(a,1) \times p^{-1}[0, r/(|a|+1)[$.

Topologialle saadaan kanta esikannan joukkojen äärellisistä leikkauksista. Koska leikkaukset säilyttävät kuperuuden, riittää osoittaa esikannan joukot kuperiksi. Kuperuus säilyy myös siirrossa, joten riittää tarkistaa muotoa $p^{-1}[0,r[$ olevat joukot:

$$p(tx+(1-t)y) \leq p(tx)+p((1-t)y) = tp(x)+(1-t)p(y) < tr+(1-t)r = r$$

kaikille $x,y \in p^{-1}[0,r[$ ja $t \in [0,1]$. Siis P määrää lokaalisti kuperan vektoriavaruustopologian.

2. Kun P on äärellinen, $n \in X \to [0,\infty[$, $n(x) = \max_{p\in P} p(x)$ on seminormi. Skaalautuvuus on selvää, ja kolmioarvio pätee, koska $n(x+y) = p(x+y)$ jollekin $p \in P$, jonka jälkeen $p(x+y) \leq p(x)+p(y) \leq n(x)+n(y)$. Edelleen n on normi, koska P erottelee pisteet. Osoitan seuraavaksi, että P määrää täsmälleen normiavaruuden (X,n) topologian. Jos $0 \in x+p^{-1}[0,r[$, niin $0 \in B_n(0,r-p(x)) = n^{-1}[0,r-p(x)[\subseteq x+p^{-1}[0,r[$, mikä siirtojen homeomorfisuuden kanssa osoittaa P-avoimet joukot n-avoimiksi. Kääntäen $B_n(0,r) = \bigcap_{p\in P} p^{-1}[0,r[$, joten n-avoimet joukot ovat P-avoimia.

3. Kun P on numeroituva, ei $\sup P$ välttämättä ole äärellinen, mutta rajaamalla ja luopumalla skaalautuvuudesta saadaan yhä metriikka. Triviaali tapaus $P = \varnothing$ sivuuttaen olkoot $P = \{p_0, p_1, \ldots\}$, ja määritellään $d(x,y) = \sup_j \min\{2^{-j}, p_j(x-y)\}$. On rutiinia tarkistaa, että d on siirtoinvariantti metriikka. Rajausten 2^{-j} on supettava nollaan, jotta d määrää saman topologian kuin P, ja tämä on myös syynä numeroituvuuden tarpeeseen.

Kun $r < 2^{-j}$, niin $p_j^{-1}[0,r[\supseteq B_d(0,r) \ni 0$, mikä osoittaa P-avoimet joukot d-avoimiksi. Kääntäen $B_d(0,r) \supseteq \bigcap_{j<m} p_j^{-1}[0,r[\ni 0$ kun valitaan niin iso $m \in \mathbb{N}$, että $2^{-m} < r$. Näin on, koska kun $p_j(x) < r$ kaikille $j < m$, ja $2^{-j} \leq 2^{-m} < r$ kaikille $j \geq m$, niin $\min\{2^{-j}, p_j(x)\} < r$ kaikille $j \in \mathbb{N}$. Siis d-avoimet joukot ovat P-avoimia, ja topologiat yhtyvät.

Kohtaa **4.** varten riittää osoittaa metriikka d täydelliseksi. Jos $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ on d-Cauchy, niin $\min\{2^{-m}, p_m(x_j-x_k)\}$ tulee mielivaltaisen pieneksi kun $j,k \to \infty$, jolloin siis $\lim_{j,k\to\infty} p_m(x_j-x_k) = 0$. Tässä $m \in \mathbb{N}$ on mielivaltainen, joten oletuksen nojalla $(x_j)_j$ suppenee, mikä osoittaa metriikan d täydellisyyden. □

Lause 2.7. *Olkoot X ja Y topologisia vektoriavaruuksia, joiden topologiat tulevat seminormijoukoista R ja P. Tällöin lineaarikuvaus $L \in X \to Y$ on jatkuva jos ja vain jos jokaiselle $p \in P$ on olemassa $C > 0$ ja äärellinen $r \subseteq R$ siten, että $p \circ L \leq C \sup r$.*

Tämä on perin suoraviivainen, mutta erittäin hyödyllinen jatkuvuusehto. Tyypillisesti supremum jää piiloon, koska onnistutaan löytämään yksittäinen $p' \in R$, jolle $p \circ L \leq Cp'$.

Todistus. Ehto $p \circ L \leq C \sup r$ on suoraan yhtäpitävää siihen, että kaikille $a > 0$ pätee

$$L^{-1}p^{-1}[0,a[= (p\circ L)^{-1}[0,a[\supseteq (\sup r)^{-1}[0,a/C[= \bigcap\{p'^{-1}[0,a/C[\mid p' \in r\}$$

jossa ensimmäinen ja viimeinen yhtälö ovat aina voimassa. Oikean puolen joukot muodostavat ympäristökannan nollalle vapailla C ja r, joten sisäkkäisyys on täsmälleen kuvauksen L jatkuvuusehto nollassa. Koska L on lineaarinen, jatkuvuus on yhtäpitävää jatkuvuuteen nollassa. □

Määritelmä 2.8. Topologisen vektoriavaruuden X duaaliavaruus on vektoriavaruus $X^* = \mathcal{L}(X \to S)$, jossa S on skalaarikunta.

Heikko*-topologia on pisteittäisen suppenemisen topologia avaruudelle X^*, jonka esikannan antavat joukot $\mathrm{ev}_x^{-1} U$, jossa $x \in X$, $U \subseteq S$ on avoin, ja $\mathrm{ev}_y(z) = z(y)$ on evaluointikuvaus.

Duaaliavaruutta ei suinkaan aina varusteta heikko*-topologialla. Jos nimittäin X on normiavaruus, tekee operaattorinormi $\|x^*\|_{X^*} := \sup_x |x^*x|/\|x\|_X$ duaaliavaruudesta X^* Banach-avaruuden, mikä on yleensä hyödyllisempää. Heikko*-topologia on yleisratkaisu muille topologisille vektoriavaruuksille. Duaaliavaruus varustettuna heikko*-topologialla on aina Hausdorff, koska maaliavaruus S on Hausdorff. Tuloksena on tietenkin myös topologinen vektoriavaruus, minkä todistamiseksi esitän ensin heikko*-topologian ns. universaaliominaisuuden, jolla voi tarkistaa, onko kuvaus heikko*-topologialle jatkuva.

Lemma 2.9. *Olkoot Y topologinen avaruus, $f \in Y \to X^*$ ja X^* varustettu heikko*-topologialla. Sitten $f \in Y \to X^*$ on jatkuva jos ja vain jos jokainen kuvauksista $\mathrm{ev}_x \circ f \in Y \to S$ on jatkuva.*

Todistus. Osa "vain jos" on selvä, koska syöttökuvaus $\mathrm{ev}_x \in X^* \to S$ on jatkuva. Käänteisessä muistetaan, että heikko*-topologian esikannan muodostavat joukot $\mathrm{ev}_x^{-1} U$, jossa $x \in X$ ja $U \subseteq S$ on avoin. Näiden alkukuvat $f^{-1}[\mathrm{ev}_x^{-1} U] = (\mathrm{ev}_x \circ f)^{-1} U$ ovat avoimia kuvausten $\mathrm{ev}_x \circ f$ jatkuvuuden nojalla, mikä takaa funktion f jatkuvuuden. □

Lause 2.10. *Duaaliavaruus X^* varustettuna heikko*-topologialla on topologinen vektoriavaruus.*

Todistus. Käytetään edellistä lemmaa funktioihin $+ \in X^* \times X^* \to X^*$ ja $\cdot \in S \times X^* \to X^*$. Jatkuvuus on helppo todeta esittämällä näiden yhdisteet syöttökuvauksen kanssa sopivasti. Yhtälöt

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x \circ (+) &= (+) \circ (\mathrm{ev}_x \times \mathrm{ev}_x) \\ \mathrm{ev}_x \circ (\cdot) &= (\cdot) \circ (\mathrm{id}_S \times \mathrm{ev}_x) \end{aligned}$$

avautuvat suoraan pisteittäisten laskutoimitusten määritelmiksi $(y^* + z^*)(x) = \mathrm{ev}_x(y^*) + \mathrm{ev}_x(z^*)$ ja $(c \cdot y^*)(x) = \mathrm{id}_S(c) \cdot \mathrm{ev}_x(y^*)$. Yhtälöiden oikealla puolella summa ja tulo tunnetaan avaruuden X operaatioina jatkuviksi, joten myös vasemmat puolet ovat jatkuvia. □

Määritelmä 2.11. Kuvauksen $T \in \mathcal{L}(X \to Y)$ liittokuvaus on lineaarifunktio $T^* \in Y^* \to X^*$, $T^* y^* = y^* \circ T$.

Koska T on jatkuva, niin sitä on myös $T^* y^* = y^* \circ T \in X^*$ jokaiselle $y^* \in Y^*$. Kuvaus T^* itse on jatkuva, kun Y^* ja X^* varustetaan heikko*-topologialla, koska $\mathrm{ev}_x \circ T^* = \mathrm{ev}_{Tx} \in \mathcal{L}(Y^* \to S)$. Liittokuvauksilla on yksinkertaisuudestaan huolimatta iso rooli distribuutioteoriassa, koska kaikki perusoperaatiot määritellään niiden avulla.

3 Distribuutiot

Moniulotteista derivointia varten käytän multi-indeksimerkintää. Jonoja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ kutsutaan multi-indekseiksi, ja ajatellen näitä koordinaattikohtaisina eksponentteina määritellään

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n && \text{on } \alpha\text{:n kertaluokka} \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} && \text{jossa } x \in \mathbb{R}^n \\ \partial^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1} \circ \cdots \circ \partial_n^{\alpha_n} && \text{jossa } \partial_j \text{ on derivointi koordinaatin } j \text{ suhteen} \end{aligned}$$

Multi-indeksit α ja β järjestetään tulojärjestyksellä eli $\alpha \leq \beta$ jos $\alpha_j \leq \beta_j$ jokaiselle j. Binomikaavan multi-indeksi vastine on

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta}$$

jossa kertoimet $\binom{\alpha}{\beta}$ määritellään juurikin niin, että tämä kaava pätee kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$. Yleensä tarkalla arvolla ei ole väliä, mutta eksplisiittinenkin kaava $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j}$ on tarjolla.

Todistus. $(x+y)^\alpha = \prod_{j=1}^n (x_j + y_j)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^n \sum_{\beta_j \leq \alpha_j} \binom{\alpha_j}{\beta_j} x^{\beta_j} y^{\alpha_j - \beta_j} = \sum_{\beta \leq \alpha} \Big(\prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j} \Big) x^\beta y^{\alpha - \beta}$ □

Nyt osittaisintegrointikaavan n-ulotteinen versio iteroiduilla derivaatoilla voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_\Omega \varphi \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi$$

Tässä $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin joukko, α on n-ulotteinen multi-indeksi, $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ on $|\alpha|$-kertaa jatkuvasti derivoituva ja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ kompaktisti kannateltu sileä funktio. Kaava riittää todistaa kertaluokkaa 1 oleville multi-indekseille, koska yleinen versio seuraa sitten iteroimalla. Voidaan olettaa, että $\alpha = (0,...,0,1)$, jolloin $\partial^\alpha = \partial_n$. Fubinin lause palauttaa ongelman yksiulotteiseksi. Olkoot $g = \varphi\partial_n f + f\partial_n\varphi$, jolloin

$$\int_\Omega g = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega g = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega_x}(y) g(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\Omega_x} g(x,y)dydx$$

jossa $\Omega_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in \Omega\}$ on avoin. Riittää siis osoittaa, että $\int_{\Omega_x} g(x,y)dy = 0$. Koska Ω_x on avoin, se on numeroituva yhdiste erillisistä avoimista väleistä, sanotaan $]a_j, b_j[$. Kullakin näistä väleistä voidaan soveltaa osittaisintegrointia, mikä antaa

$$\int_{\Omega_x} g(x,y)dy = \sum_j \int_{a_j}^{b_j} g(x,y)dy = \sum_j \int_{a_j}^{b_j} \partial_n(\varphi f)(x,y)dy = \sum_j (\varphi(x,b_j^-)f(x,b_j^-) - \varphi(x,a_j^+)f(x,a_j^+)) = 0$$

kun $\operatorname{spt}\varphi \cap]a_j,b_j[\subseteq [a_j^+, b_j^-] \subseteq]a_j,b_j[$, jossa sopivat luvut a_j^+ ja b_j^- ovat olemassa, koska $\operatorname{spt}\varphi$ on kompakti.

3.1 Testifunktioavaruus $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$

Jatkossa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin joukko. Distribuutiot määritellään duaalina tietylle topologiselle vektoriavaruudelle $\mathcal{D}(\Omega)$, jota kutsutaan testifunktioavaruudeksi. Näin määriteltyinä distribuutiot itsekin muodostavat topologisen vektoriavaruuden. Johdannossa ilmeni kaksi keskeistä operaatiota, jotka tekevät distribuutioteoriasta mielenkiintoisen.

1. Jatkuva funktio $f \in C^0(\Omega)$ tulkitaan distribuutiona $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$.

2. Distribuutiota F voi derivoida kaavalla $\partial^\alpha F = (-1)^{|\alpha|} F \circ \partial^\alpha$.

Ehto 1 oleellisesti edellyttää, että testifunktiot ovat kompaktisti kannateltuja, koska jatkuva funktio voi kasvaa mielivaltaisen nopeasti Ω:n reunalla. Ehto 2 puolestaan edellyttää, että ∂^α kuvaa testifunktiot itselleen, eli toisin sanoen testifunktiot ovat sileitä. Vektoriavaruutena $\mathcal{D}(\Omega)$ tuleekin olemaan kompaktisti kannateltujen sileiden funktioiden avaruus $C_c^\infty(\Omega)$.

Hyvän topologian antaminen osoittautuu selvästi vektoriavaruuden valintaa haastavammaksi. Avaruuden topologisointi on välttämätöntä, jotta distribuutioille voidaan todistaa mitään jatkuvuustuloksia. Tarkasteltaessa äärellisen monta kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita käytetään usein seuraavaa normia.

Määritelmä 3.1.1. Funktiolle $\varphi \in C_c^N(\Omega)$ määritellään kertaluvun $N \in \mathbb{N}$ normi kaavalla

$$\|\varphi\|_N = \sup\{|\partial^\alpha\varphi(x)| \,\big|\, x \in \Omega \text{ ja } |\alpha| \leq N\}$$

Supremum yli kaikkien multi-indeksien ei ole toimiva yleistys sileille funktioille (Se pakottaisi funktion analyyttiseksi ja kompaktisti kannateltuna nollaksi). Sen sijaan normiperhe $\{\|\cdot\|_N \,\big|\, N \in \mathbb{N}\}$ antaa avaruudelle $C_c^\infty(\Omega)$ lokaalisti kuperan metrisoituvan topologian, jossa derivointi on jatkuva, koska $\|\partial^\alpha\varphi\|_N \leq \|\varphi\|_{N+|\alpha|}$. Mutta tämäkään ei toimi, koska kantajien kompaktiudelle ei anneta erityispainoarvoa. Esimerkiksi kun $\Omega = \mathbb{R}$, tarkastellaan vakiofunktiota 1 vastaavaa distribuutiota eli integrointia, jonka pitäisi siis olla jatkuva. Olkoot $\int_{\mathbb{R}}\varphi_1 \neq 0$ ja määritellään $\varphi_j(x) = \varphi_1(x/j)/j$, jolloin $\partial^k\varphi_j(x) = \partial^k\varphi_1(x/j)/j^{k+1}$. Nyt $\|\varphi_j\|_N \leq \|\varphi_1\|_N/j \to 0$, mutta $\int_{\mathbb{R}}\varphi_j = \int_{\mathbb{R}}\varphi_1 \not\to 0$ kun $j \to \infty$, joten integrointi ei ole jatkuva. Vastaava ongelma esiintyy rajoitetulla Ω distribuutiona tulkittavan funktion kasvaessa nopeasti reunaa kohti. Ongelma on kantajien kasvamisessa, ja osoittautuu, että jos kantajat rajataan etukäteen, saadaan hyvin käyttäytyvä aliavaruus.

Määritelmä 3.1.2. Olkoot $\mathcal{D}_K$ kompaktissa joukossa $K \subseteq \Omega$ kannateltujen sileiden funktioiden vektoriavaruus $\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \,\big|\, \operatorname{spt}\varphi \subseteq K\}$ varustettuna normiperheen $\{\|\cdot\|_N \,\big|\, N \in \mathbb{N}\}$ määräämällä topologialla.

Avaruus $\mathcal{D}_K$ ei riipu joukosta $\Omega \supseteq K$ käsiteltäessä funktioita ja niiden nollajatkoja samoin, mistä syystä Ω ei esiinny merkinnässä $\mathcal{D}_K$. Jos $f \in C^0(\Omega)$ on jatkuva funktio, on se integroituva yli kompaktin joukon K, joten $|\int_\Omega f\varphi| \leq \|\varphi\|_0 \int_K |f|$ eli f-painotettu integrointi on jatkuva avaruudella $\mathcal{D}_K$. Sama pätee lokaalisti integroituviin funktioihin.

Edelleen $\mathcal{D}_K$ on Fréchet-avaruus, mitä varten se on osoitettava täydelliseksi. Olkoot $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{D}_K$. Erityisesti $(\varphi_j)_j$ on Cauchy normin $\|\cdot\|_0$ suhteen, joten suppenee tasaisesti johonkin funktioon φ, jolle selvästi $\operatorname{spt}\varphi \subseteq K$. Normi $\|\cdot\|_1$ puolestaan takaa, että $(\partial_m \varphi_j)_j$ suppenee tasaisesti johonkin funktioon ψ_m, ja derivaattojen tasaisesta suppenemisesta seuraa $\partial_m \varphi = \psi_m$. Sama toistuu korkeammille derivaatoille osoittaen, että $\partial^\alpha \varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} \partial^\alpha \varphi$ tasaisesti jokaisella α, mikä vastaa täsmälleen suppenemista avaruudessa $\mathcal{D}_K$.

Määritelmä 3.1.3. Testifunktioavaruus $\mathcal{D}(\Omega)$ on vektoriavaruus $C_c^\infty(\Omega)$ varustettuna topologialla, jossa nollan ympäristökannan muodostavat epätyhjät tasapainoiset kuperat $U \subseteq C_c^\infty(\Omega)$, joille kaikilla kompakteilla $K \subseteq \Omega$ on $U \cap \mathcal{D}_K$ avoin avaruudessa $\mathcal{D}_K$. (Tasapainoisuus ja kuperuus ovat topologiasta riippumattomia ominaisuuksia.)

Lause 3.1.4. *$\mathcal{D}(\Omega)$ on lokaalisti kupera topologinen vektoriavaruus.*

Todistus. Olkoot $N = \{\text{tasapainoiset kuperat } U \neq \varnothing \,|\, \forall K \subseteq \Omega : U \cap \mathcal{D}_K \text{ on avoin } \mathcal{D}_K\text{:ssa}\}$ väitetty nollan ympäristökanta, jolloin topologian kannan on oltava $\{U + \varphi | U \in N, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$. Jotta tämä todella olisi kanta, on tarkistettava seuraava ehto. Olkoot ensin $U = (U_1 + \varphi_1) \cap (U_2 + \varphi_2)$ väitetyn kannan mielivaltaisten alkioiden leikkaus, jossa siis $U_1, U_2 \in N$ ja $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Jokaiselle $\varphi \in U$ on löydyttävä $V \in N$ ja $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ siten, että $\varphi \in V + \psi \subseteq U$. Odotetusti on helppo valita $\psi = \varphi$, mutta joukon V löytäminen vaatii enemmän työtä.

Olkoot kompakti $K = \operatorname{spt}\varphi \cup \operatorname{spt}\varphi_1 \cup \operatorname{spt}\varphi_2$, jolloin esikannan N määritelmän mukaan $U_j \cap \mathcal{D}_K \ni \varphi - \varphi_j$ on avoin $\mathcal{D}_K$:ssa $(j = 1,2)$. Koska skalaarilla kertominen on jatkuva operaatio topologisessa vektoriavaruudessa $\mathcal{D}_K$, on olemassa $\delta_j \in \,]0,1[$ siten, että $\varphi - \varphi_j \in (1-\delta_j)(U_j \cap \mathcal{D}_K) \subseteq (1-\delta_j)U_j$. Nyt $\delta_j U_j + \varphi - \varphi_j \subseteq \delta_j U_j + (1-\delta_j)U_j = U_j$, koska U_j on kupera. Valitaan $V = \delta_1 U_1 \cap \delta_2 U_2$, jolloin selvästi $V \in N$, ja $\varphi \in V + \varphi = \delta_1 U_1 \cap \delta_2 U_2 + \varphi \subseteq (U_1 + \varphi_1) \cap (U_2 + \varphi_2) = U$. Siis N kelpaa esikannaksi.

Olkoot $U \in N$. Kuperuuden nojalla $(\varphi + \frac{1}{2}U) + (\psi + \frac{1}{2}U) = (\varphi + \psi) + U$ kaikille $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, mikä osoittaa yhteenlaskun jatkuvuuden. Tuloa varten tarkastellaan pistettä (c, φ) ja merkitään $a = 1/(2+|c|)$. Koska $\mathcal{D}_{\operatorname{spt}\varphi} \cap U$ on avoin avaruudessa $\mathcal{D}_{\operatorname{spt}\varphi}$, on olemassa positiivinen $r < a < 1$ siten, että $\frac{r}{a}\varphi \in U$. Tasapainoisuuden ja kuperuuden nojalla saadaan nyt kaikille $c + x \in B(c,r)$

$$(c+x)(\varphi + aU) = c\varphi + x\varphi + caU + xaU \subseteq c\varphi + {}^{xa}\!/\!{}_{r}U + caU + raU \subseteq c\varphi + ({}^{x}\!/\!{}_{r} + |c| + r)aU \subseteq c\varphi + U$$

Siis $B(c,r)(\varphi + aU) \subseteq c\varphi + U$, ja tulo on jatkuva.

Lokaali kuperuus seuraa välittömästi ympäristökannan N valinnasta. On myös tietenkin tarkistettava, että $\mathcal{D}(\Omega)$ on Hausdorff. Joukko $U(t) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,|\, |\varphi| < t/2\}$ on selvästi tasapainoinen, kupera ja avoin. Jos nyt $\varphi \neq \psi$, niin $\varphi + U(\|\varphi - \psi\|_0)$ ja $\psi + U(\|\varphi - \psi\|_0)$ ovat erilliset ympäristöt funktioille φ ja ψ. $\square$

Avaruudelle $\mathcal{D}(\Omega)$ määritellyn melko teknisluonteisen topologian motivaattorina toimii sen seuraava niin sanottu universaaliominaisuus. Tästä esimerkiksi helposti seuraa, että millä tahansa jatkuvalla funktiolla painotettu integrointi on jatkuva operaatio, koska se on jatkuva avaruuksilta $\mathcal{D}_K$. Jatkuvat funktiot voidaan siis viimein nähdä distribuutioina.

Universaaliominaisuus $\mathcal{D}(\Omega)$:lle 3.1.5. *Olkoot X lokaalisti kupera topologinen vektoriavaruus. Tällöin funktio $L \in \mathcal{D}(\Omega) \to X$ on jatkuva lineaarikuvaus jos ja vain jos rajoittumat $L|_{\mathcal{D}_K} \in \mathcal{D}_K \to X$ ovat jatkuvia lineaarikuvauksia kaikille kompakteille $K \subseteq \Omega$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $L \in \mathcal{D}(\Omega) \to X$ on jatkuva lineaarikuvaus. Koska $L|_{\mathcal{D}_K} = L \circ \text{inc}$, jossa $\text{inc} \in \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega)$ on inkluusio, niin on vain osoitettava, että inc on jatkuva tai siis, että avaruuden $\mathcal{D}_K$ standarditopologia on sama kuin aliavaruusrelaation $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ antama. Jos $U \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ on avoin ja $\varphi \in U \cap \mathcal{D}_K$, niin nollan ympäristökannasta löytyy jokin V siten, että $\varphi \in \varphi + V \subseteq U$. Kun nyt $V \cap \mathcal{D}_K$ on avoin avaruudessa $\mathcal{D}_K$, on $\varphi + V \cap \mathcal{D}_K \subseteq U \cap \mathcal{D}_K$ avoin ympäristö funktiolle φ avaruudessa $\mathcal{D}_K$.

Kääntäen jos kukin $L|_{\mathcal{D}_K}$ on jatkuva lineaarikuvaus, niin L on selvästi ainakin lineaarinen. Jatkuvuus riittää nyt tarkistaa origossa. Olkoot $U \subseteq X$ avoin tasapainoinen kupera nollan ympäristö. Sitten jokaiselle $K \subseteq \Omega$ todetaan $L^{-1}U \cap \mathcal{D}_K = L|_{\mathcal{D}_K}{}^{-1}U$

avoimeksi avaruudessa $\mathcal{D}_K$. Lisäksi $L^{-1}U$ on tasapainoinen ja kupera, koska L on lineaarinen. Siis $L^{-1}U$ on nollan ympäristö avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$, mikä osoittaa, että L on jatkuva origossa. □

Kun X erikoistetaan skalaarikunnaksi, antaa edellinen lause perustyökalun lineaarikuvauksen osoittamiseksi jatkuvaksi ja siis distribuutioksi. Esimerkiksi määritellään Diracin distribuutio kaavalla $\delta_x\varphi = \varphi(x)$. Selvästi δ_x on lineaarinen ja $|\delta_x\varphi| \leq \|\varphi\|_0$, joten $\delta_x \in \mathcal{D}_K^*$ mielivaltaiselle kompaktille $K \subseteq \Omega$. Universaaliominaisuus takaa nyt, että $\delta_x \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ tarvitsematta palata avaruuden $\mathcal{D}(\Omega)$ topologian teknisiin yksityiskohtiin.

Soveltamalla lausetta toiseen suuntaan sen todistuksessakin osoitettu inkluusioiden $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ jatkuvuus seuraa identtisen kuvaksen $\mathrm{id} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega))$ jatkuvuudesta. Välttämättömäksi ominaisuudeksi nostin derivoinnin jatkuvuuden $\mathcal{D}(\Omega)$:lla. Tätä varten riittää taas tarkistaa sen jatkuvuus kuvauksena $\mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega)$, mikä seuraa siitä, että kyseessä on nyt yhdiste derivoinnista avaruudella $\mathcal{D}_K$ ja inkluusiosta $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$. Myös seuraavat ominaisuudet on hyvä tuntea avaruudesta $\mathcal{D}(\Omega)$, joskaan ne eivät ydinteorian kannalta ole tarpeellisia.

Lause 3.1.6. *Avaruudelle $\mathcal{D}(\Omega)$ pätevät seuraavat väitteet.*

- *Jokainen $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ on suljettu aliavaruus, ja $\mathcal{D}(\Omega)$:lta periytyvä aliavaruustopologia yhtyy alkuperäiseen.*
- *Jos $B \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ on rajoitettu, niin on olemassa kompakti $K \subseteq \Omega$ siten, että $B \subseteq \mathcal{D}_K$.*
- *Avaruudet $\mathcal{D}(\Omega)$ ja $\mathcal{D}_K$ ovat rajoitetusti kompakteja eli kaikki suljetut rajoitetut joukot ovat kompakteja.*

Todistus. Aliavaruus $\mathcal{D}_K$ on suljettu, koska $\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \notin K} \delta_x^{-1}\{0\}$, jossa $\delta_x\varphi = \varphi(x)$. Koska inkluusio $\mathrm{inc} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega))$ on jatkuva, aliavaruustopologiassa avoin joukko $U \cap \mathcal{D}_K = \mathrm{inc}^{-1}U$ on avoin myös avaruuden $\mathcal{D}_K$ perustopologiassa. Käänteistä varten merkitsen $B_X^N(0,r) = \left\{\varphi \in X \,\middle|\, \|\varphi\|_N < r\right\}$. Koska $B^N_{\mathcal{D}(\Omega)}(0,r) \cap \mathcal{D}_K = B^N_{\mathcal{D}_K}(0,r)$ on aina avoin $\mathcal{D}_K$:ssa, on $B^N_{\mathcal{D}(\Omega)}(0,r)$ avoin $\mathcal{D}(\Omega)$:ssa sen topologian määritelmän mukaisesti. Täten avaruudessa $\mathcal{D}_K$ nollan mielivaltaisen pieni ympäristö $B^N_{\mathcal{D}_K}(0,r)$ voidaan esittää leikkauksena $U \cap \mathcal{D}_K$, jossa $U = B^N_{\mathcal{D}(\Omega)}(0,r) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ on avoin. Siis $\mathcal{D}_K$:n avoimet joukot ovat avoimia myös aliavaruustopologiassa.

Olkoot $B \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ rajoitettu. Tehdään vastaväite, ettei $B \subseteq \mathcal{D}_K$ millekään kompaktille $K \subseteq \Omega$. Soveltamalla tätä mielivaltaisella $j \in \mathbb{Z}_+$ kompaktiin joukkoon $K_j = \overline{B}(0,j) \cap \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/j\right\}$ löydetään $\varphi_j \in B$ ja $x_j \in \Omega \setminus K_j$ siten, että $\varphi_j(x_j) \neq 0$. Koska joukot K_j täyttävät Ω:n, jono $(x_j)_j$ ei kasaannu siellä. Määritellään nyt lineaarikuvaus $L \in \mathcal{D}(\Omega) \to l^\infty$, $(L\varphi)_j = j\varphi(x_j)/\varphi_j(x_j)$. Kuvaus L on selvästi jatkuva aliavaruudelta $\mathcal{D}_K$, koska kompakti K voi sisältää vain äärellisen monta kasautumattoman jonon $(x_j)_j$ termiä. Sitten universaaliominaisuuden nojalla L on jatkuva koko avaruudelta $\mathcal{D}(\Omega)$. Mutta nyt rajoitetun joukon kuvana LB on rajoitettu, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $(L\varphi_j)_j = j$.

Oletetaan sitten rajoittuneisuuden lisäksi, että B on suljettu. Edellisen perusteella on olemassa kompakti $K \subseteq \Omega$ siten, että $B \subseteq \mathcal{D}_K$. Sitten B on suljettu ja rajoitettu myös $\mathcal{D}_K$:ssa—sen aliavaruustopologiassa, joka osoitettiin samaksi kuin normien $\|\cdot\|_N$ määräämä. Nyt riittää osoittaa, että B on kompakti avaruudessa $\mathcal{D}_K$. Olkoot $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$ joukon B mielivaltainen jono, jolle on löydettävä suppeneva osajono. Numeroidaan multi-indeksit bijektiolla $\alpha \in \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}^n$, ja merkitään $\varphi_j^0 = \varphi_j$. Sitten rekursiivisesti erotetaan jonon $(\varphi_j^k)_j$ osajono $(\varphi_j^{k+1})_j$ siten, että $(\partial^{\alpha(k)}\varphi_j^{k+1})_j$ suppenee tasaisesti. Tämä onnistuu Arzelà-Ascoli-lauseella, koska joukon $B \ni \varphi_j$ ollessa rajoitettu on se erityisesti rajoitettu normin $\|\cdot\|_{|\alpha(k)|+1}$ suhteen, mikä takaa, että $\left\{\partial^{\alpha(k)}\varphi_j^k \,\middle|\, j \in \mathbb{N}\right\}$ on rajoitettu ja yhtäjatkuva. Avaruudessa $\mathcal{D}_K$ suppeneva osajono on nyt $(\varphi_j^j)_j$, koska sen häntä on jonon $(\varphi_j^{k+1})_j$ osajono, jolloin $(\partial^{\alpha(k)}\varphi_j^j)_j$ suppenee tasaisesti mielivaltaisella multi-indeksillä $\alpha(k)$. □

3.2 Perusoperaatiot: derivointi, tulo, rajoittaminen

Kuten olen jo useasti maininnut, distribuutiot määritellään teknisesti duaaliavaruutena $\mathcal{D}(\Omega)^*$. Lykkäsin virallista määritelmää, koska sitä mutkistaa hyödyllinen käytäntö nähdä distribuutiot suoraan reaalifunktioiden yleistyksinä ja vasta toissijaisesti kuvauksina testifunktioilta (vrt. $\mathbb{C}$:n konstruktio).

Määritelmä 3.2.1. Distribuutioiden avaruus joukolla Ω on $\mathcal{D}'(\Omega) \cong \mathcal{D}(\Omega)^*$ varustettuna heikko*-topologialla. Distribuution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ arvoa pisteessä $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ merkitsen aina epäsuorasti $\langle f, \varphi \rangle$, ja määräytyvää kuvausta $\langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ nimitän f:n operoinniksi.

Funktion f operointi toiseen funktioon g määritellään $\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg$ integraalin supetessa. Tämän avulla lokaalisti integroituvista funktioista tulee distribuutioita, $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$. Samoin Radon-mitat μ tulkitaan distribuutioina määrittelemällä niiden operointi $\langle \mu, g \rangle = \int_\Omega g \, d\mu$.

Jos $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on suoraviivaista tarkistaa, että $\langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{D}^*_K$ kaikille kompakteille $K \subseteq \Omega$, mikä takaa $\langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Jotta tulkinta $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ olisi oikeutettu, on vielä tarkistettava, että eri funktiot vastaavat eri distribuutioita. Tätä varten riittää osoittaa, että jos $\langle f, \cdot \rangle = 0 \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, niin $f = 0 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Approksimoidaan ensin pallon $\overline{B}(v,r) \subseteq \Omega$ karakteristista funktiota testifunktioilla. Valitaan jokin sileä funktio g, joka on joissakin, muttei kaikissa pisteissä lokaalisti nolla, vaikkapa $g(x) = \chi_{\mathbb{R}_-}(x) e^{1/x}$. Määritellään sitten $h_\varepsilon(x) = g(x)/(g(x) + g(-x-\varepsilon))$, mikä takaa, että $h_\varepsilon \in \mathbb{R} \to [0,1]$ on sileä funktio, jolle $h_\varepsilon(x) = 1$ kun $x \leq -\varepsilon$, ja $h_\varepsilon(x) = 0$ kun $x \geq 0$. Nyt funktiota $\chi_{\overline{B}(v,r)}$ approksimoi $\varphi_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(|x-v| - r)$ siinä mielessä, että $0 \leq \chi_{\overline{B}(v,r)} - \varphi_\varepsilon \leq 1$ ja $\operatorname{spt}(\chi_{\overline{B}(v,r)} - \varphi_\varepsilon) = \overline{B}(v,r) \setminus B(v, r-\varepsilon)$. Tämä riittää osoittamaan, että

$$\int_{\overline{B}(v,r)} f = \langle f, \chi_{\overline{B}(v,r)} \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle f, \varphi_\varepsilon \rangle = 0$$

Nyt standardilla mittateorian argumentilla $\int_A f = 0$ kaikille Lebesgue-mitallisille $A \subseteq \Omega$, jolloin on oltava $f = 0$. Vastaava on voimassa myös Radon mitoille.

Määritelmä 3.2.2. Distribuution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ kertalukua α oleva derivaatta määräytyy kaavasta

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \text{kaikille } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Osittaisintegrointikaavan pätiessä—niin kuin jatkuvasti derivointuvien ja yleisemmin absoluuttisesti jatkuvien funktioiden kohdalla—nyt määritelty distribuutioderivaatta yhtyy perinteiseen derivaattaan. Esimerkiksi itseisarvofunktio $\operatorname{abs}(x) = |x|$ on absoluuttisesti jatkuva, joten $\operatorname{abs}' = \operatorname{sign}$ distribuutioina. Merkkifunktio sign toteuttaa $\operatorname{sign}'(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mutta tämä ei tarkoita, että sen derivaatta distribuutiona olisi 0. Sen sijaan

$$\langle \operatorname{sign}', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x) \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^{0} -\varphi' - \int_0^\infty \varphi' = 2\varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi \rangle$$

eli $\operatorname{sign}' = 2\delta_0$, jossa δ_0 on Diracin distribuutio. Korkeammat derivaatat on vain ymmärrettävä määritellyn operoinnin kautta, esimerkiksi $\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$.

Määritelmä 3.2.3. Distribuution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pisteittäinen tulo sileän funktion $g \in C^\infty(\Omega)$ kanssa määräytyy kaavasta

$$\langle gf, \varphi \rangle = \langle fg, \varphi \rangle := \langle f, g\varphi \rangle \quad \text{kaikille } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Jos f on lokaalisti integroituva, niin $\langle fg, \varphi \rangle = \int_\Omega fg\varphi = \langle f, g\varphi \rangle$, joten uusi määritelmä ei ole ristiriidassa vanhan kanssa. Distribuutioita ei yleisesti voi kertoa epäsileillä funktioilla puhumattakaan toisista distribuutioista, koska $g\varphi$:n on oltava testifunktio. Peruslaskukaavat on helppo tarkistaa, esimerkiksi derivointi on lineaarinen, tulo bilineaarinen, ja tulon derivointikaava voimassa:

$$\langle \partial_j(gf), \varphi \rangle = -\langle f, g\partial_j \varphi \rangle = \langle f, \varphi \partial_j g \rangle - \langle f, g\partial_j \varphi + \varphi \partial_j g \rangle = \langle f \partial_j g, \varphi \rangle - \langle f, \partial_j(g\varphi) \rangle = \langle f \partial_j g + g \partial_j f, \varphi \rangle$$

Lause 3.2.4. *Derivointi ∂^α ja kiinteällä funktiolla $g \in C^\infty(\Omega)$ kertominen ovat jatkuvia kuvauksia niin testifunktioilta kuin distribuutioiltakin itselleen.*

Todistus. Lineaarikuvaus $L \in \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ on testifunktioiden universaaliominaisuuden 3.1.5 nojalla jatkuva, jos jokainen $L|_{\mathcal{D}_K} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega))$ on jatkuva, mitä varten riittää osoittaa, että L on jatkuva avaruudelta $\mathcal{D}_K$ itselleen. Derivoinnin kohdalla tämä on triviaalia, koska $\|\partial^\alpha \varphi\|_N \leq \|\varphi\|_{N+|\alpha|}$. Tulon tapauksessa puolestaan lasketaan

$$|\partial^\alpha (g|_K \varphi)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta g|_K||\partial^{\alpha-\beta}\varphi| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|g|_K\|_N \|\varphi\|_N = 2^{|\alpha|} \|g|_K\|_N \|\varphi\|_N$$

aina kun $|\alpha| \leq N$. Siis $\|g\varphi\|_N \leq 2^N \|g|_K\|_N \|\varphi\|_N$ ja funktiolla g kertominen on jatkuva $\mathcal{D}_K$:lta itselleen.

Unohdetaan hetkeksi avaruuksien $\mathcal{D}(\Omega)^*$ ja $\mathcal{D}'(\Omega)$ formaali erottelu. Tällöin $\partial^\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)^* \to \mathcal{D}(\Omega)^*$ on kuvauksen $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega))$ liittokuvaus suoraan määritelmänsä nojalla. Erityisesti se on jatkuva. Vastaava argumentti osoittaa funktiolla g kertomisen olevan jatkuva distribuutioilta itselleen. □

Kolmas tuiki tarpeellinen operaatio distribuutioille on lähtöjoukon rajoittaminen. Distribuution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lähtöjoukolla tarkoitan tietenkin joukkoa Ω. Jos $U \subseteq \Omega$ on avoin osajoukko, voidaan jokainen $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ luonnollisesti nollajatkaa joukkoon Ω ja tulkita testifunktiona sielläkin. Duaaliavaruuksille suhde kääntyy laajentamisesta rajoittamiseksi.

Määritelmä 3.2.5. Olkoot $U \subseteq \Omega$ avoin. Distribuution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ rajoittuma joukkoon U on distribuutio $f|_U \in \mathcal{D}'(U)$, joka operoi kaavalla

$$\langle f|_U, \varphi|_U \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{jossa } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ ja } \operatorname{spt}\varphi \subseteq U.$$

On ilmeistä, että funktioiden kohdalla rajoittamisen uusi määritelmä käy yhteen vanhan kanssa. Lähtöjoukon rajoittaminen mahdollistaa puhumisen distribuution lokaaleista ominaisuuksista. Erityisesti kantajan käsite laajenee funktioilta distribuutioille.

Määritelmä 3.2.6. Distribuution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ kantaja on joukko, jossa f ei ole lokaalisti nollaa, tai toisin sanoen

$$\operatorname{spt} f = \{x \in \Omega \mid f|_U \neq 0 \text{ missään pisteen } x \text{ ympäristössä } U\}$$

Distribuution f kantaja on suljettu, koska jos f on lokaalisti nolla jossakin pisteessä, on f lokaalisti nolla myös sen ympäristössä. Esimerkiksi $\operatorname{spt}\delta_x = \{x\}$ kun $x \in \Omega$. Tämän toteamiseksi huomataan aluksi, että $\delta_x|_{\Omega\setminus\{x\}} = 0$, joten $\operatorname{spt}\delta_x \subseteq \{x\}$. Toisaalta pisteen x mielivaltaisen pienessä ympäristössä $B(x,r)$ on kannateltu testifunktio $\varphi(y) = \chi_{B(x,r)}(y)\exp(|y-x|^2 - r^2)^{-1}$, jolle $\delta_x\varphi = \exp(-r^{-2}) \neq 0$, joten $x \in \operatorname{spt}\delta_x$.

Derivoitaessa kantaja käyttäytyy kuten odottaa saattaa. Jos $f|_U = 0$, niin $(\partial^\alpha f)|_U = \partial^\alpha(f|_U) = 0$, minkä seurauksena $\operatorname{spt}\partial^\alpha f \subseteq \operatorname{spt} f$. Tulon kanssa on oltava hieman tarkempana, koska $g|_{\operatorname{spt} f} = 0$ ei tarkoita, että $gf = 0$. Esimerkiksi reaaliakselilla $\operatorname{id}\delta_0$ on kyllä nollaa, mutta sitten $0 = (\operatorname{id}\delta_0)' = \operatorname{id}'\delta_0 + \operatorname{id}\delta_0' = \delta_0 + \operatorname{id}\delta_0'$ eli $\operatorname{id}\delta_0' = -\delta_0 \neq 0$, vaikka $\operatorname{spt}\delta_0' \subseteq \operatorname{spt}\delta_0 = \{0\}$. Tämän selittää se, että $0 \in \operatorname{spt}\operatorname{id}$, mikä mahdollistaa, että $\operatorname{id}'(0) \neq 0$. Kantajien termein voidaan kyllä todistaa $\operatorname{spt} gf \subseteq \operatorname{spt} g \cap \operatorname{spt} f$. Jos nimittäin $x \notin \operatorname{spt} g \cap \operatorname{spt} f$, niin $g|_U = 0$ tai $f|_U = 0$ jollekin avoimelle $U \ni x$. Tällöin $(gf)|_U = g|_U \cdot f|_U = 0$, joten $x \notin \operatorname{spt} gf$.

Jos f on jatkuva funktio, on aivan triviaalia, että f häviää kantajansa ulkopuolella: $f|_{\Omega\setminus\operatorname{spt} f} = 0$. Kysymys on oleellisesti siitä, että lokaali häviäminen johtaa globaaliin häviämiseen, mikä ei yleisille distribuutioille olekaan aivan ilmeistä. Kiinnitetään testifunktio φ, ja olkoot $K = \operatorname{spt}\varphi$ sen kompakti kantaja. Jos f häviää lokaalisti jokaisessa joukon K pisteessä, löytyy kompaktiuden ansiosta äärellinen K:n peite $\mathcal{C}$ siten, että $f|_U = 0$ kaikille $U \in \mathcal{C}$. Jos f on lokaalisti integroituva funktio, on peitteen $\mathcal{C}$ paikallinen informaatio helppo koota yhteen osoittamaan $f|_{\bigcup\mathcal{C}} = 0$ ja erityisesti $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Joukot näet voidaan leikata teräväreunaisesti: valitaan yksi $U \in \mathcal{C}$ ja toistetaan kokoelmalle $\{V \setminus U \mid U \neq V \in \mathcal{C}\}$ kunnes kaikki äärellisen monta joukkoa on rajattu toisistaan erillisiksi. Loppu seuraa integraalin additiivisuudesta joukkoparametrinsa suhteen. Yleisille distribuutioille leikkaus on tehtävä sileästi, minkä mahdollistaa niin kutsuttu ykkösenositus.

Ykkösenosituslemma 3.2.7. *Olkoot $\mathcal{C}$ kokoelma avoimia joukkoja, joiden yhdiste on Ω. Tällöin on olemassa jono peitteen $\mathcal{C}$ joukoissa kannateltuja testifunktioita $(u_j)_{j=0}^{\infty}$, jotka osittavat ykkösen:*

$$u_j \geq 0 \quad ja \quad \sum_{j=0}^{\infty} u_j = 1$$

jossa sarja suppenee ja jopa saavuttaa raja-arvonsa lokaalisti. Toisin sanoen jokaisella $x \in \Omega$ on ympäristö, johon rajoitettuna vain äärellisen moni sarjan termeistä u_j ei ole nollafunktio.

Todistus. Murtolukukeskisiä ja -säteisiä palloja on numeroituva määrä, joten joukon

$$\left\{ B(c,r) \,\middle|\, c \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+, \overline{B}(c,r) \subseteq U \in \mathcal{C} \right\} =: \left\{ B_j \,\middle|\, j \in \mathbb{N} \right\}$$

alkiot voidaan luetella. Kiinnitetään eräs $U \supseteq B_j$ ja valitaan siinä kannateltu testifunktio $\varphi_j \geq 0$ siten, että $\varphi_j|_{B_j} = 1$. Tämä onnistuu, koska kompaktin joukon $\overline{B_j}$ etäisyys U:n reunasta on positiivinen. Määritellään sitten funktiot u_j induktiivisesti asettamalla $u_0 := \varphi_0$ ja

$$u_k := \prod_{j<k} (1-\varphi_j) - \prod_{j\leq k} (1-\varphi_j) = \varphi_k \prod_{j<k} (1-\varphi_j) \geq 0$$

Tämä takaa, että

$$\sum_{j<k} u_j = 1 - \prod_{j<k} (1-\varphi_j)$$

mikä puolestaan tarkoittaa, että $\sum_{j<k} u_j = 1$ joukossa $\bigcup_{j<k} B_j$. Väite seuraa nyt siitä, että $\Omega = \bigcup_{j<\infty} B_j$ ja että Ω on lokaalisti kompakti, koska tällöin mielivaltaisen pisteen kompaktin ympäristön on sisällyttävä johonkin äärelliseen yhdisteeseen $\bigcup_{j<k} B_j$. □

Seurauslause 3.2.8. *Distribuutio f häviää kantajansa ulkopuolella: $f|_{\Omega \setminus \operatorname{spt} f} = 0$.*

Todistus. Jokaiselle $x \notin \operatorname{spt} f$ löytyy avoin ympäristö U_x siten, että $f|_{U_x} = 0$. Olkoot $(u_j)_{j=0}^{\infty}$ joukon $\Omega \setminus \operatorname{spt} f$ peitteeseen $\left\{ U_x \,\middle|\, x \notin \operatorname{spt} f \right\}$ liittyvä ykkösenositus. Olkoot $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{spt} f)$ mielivaltainen testifunktio. Koska $\operatorname{spt} \varphi$ on kompakti, vain äärellinen määrä jonon $(u_j)_j$ termejä poikkeaa siinä nollasta, sanotaan $u_j|_{\operatorname{spt} \varphi} = 0$ kun $j > k$. Nyt

$$\langle f, \varphi \rangle = \left\langle f, \sum_{j=0}^{k} u_j \varphi \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} \left\langle f|_{U_{x_j}}, u_j \varphi \right\rangle = 0$$

jossa $x_j \in \Omega \setminus \operatorname{spt} f$ valitaan siten, että $U_{x_j} \supseteq \operatorname{spt} u_j \supseteq \operatorname{spt} u_j \varphi$. □

Jos f saadaan rajoittamalla distribuutiota g, voidaan käänteän sanoa, että g laajentaa distribuutiota f. Yleisesti distribuutioiden laajentamiseen liittyy huonosta reunakäytöksestä aiheutuvia ongelmia, kuten liittyy jatkuvien tai lokaalisti integroituvien funktioidenkin laajentamiseen. Huomion arvoisesti on silti joitakin funktioita, joita ei voi laajentaa lokaalisti integroituvina mutta distribuutioina kylläkin. Tällaisia ovat esimerkiksi funktiot $f_p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_p(x) = |x|^{-p}$ kun $p \geq n$. Koska f_p on jo määritelty melkein kaikkialla $\mathbb{R}^n$:ssä, sen laajennus funktiona origoon ei voi saavuttaa siinä lokaalia integroituvuutta. Integroituvuuden estävän singulariteetin koko kuitenkin muuttuu derivoitaessa, ja erityisesti on voimassa $\Delta f_p = p(p-n+2) f_{p+2}$, jossa $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$ on Laplace-operaattori. Kun nyt vaikkapa $p \in]n, n+2[\setminus \{2\}$, niin $f_p = \Delta F_p$ voidaan laajentaa koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$ lokaalisti integroituvan funktion $F_p = f_{p-2}/(p-2)(p-n)$ distribuutioderivaattojen summana. Rajatapauksessa $p = n \neq 2$ voidaan valita $F_p(x) = |x|^{2-n} \log|x|/(2-n)$, ja rajatapauksessa $p = n = 2$ puolestaan $F_p(x) = (\log|x|)^2/4$. Parametrin p arvot $(n+2)$:sta ylöspäin voidaan käsitellä derivoimalla toistuvasti.

Laajennus distribuutiona edes yksittäiseen pisteeseen ei koskaan ole yksikäsitteinen, koska nollasta poikkeava distribuutio voi olla kannateltu vain tuossa yksittäisessä pisteessä. Jos sen sijaan tavoitteena on tulkita ei lokaalisti integroituva funktio mahdollisimman luonnollisesti distribuutiona, on eri laajennoksista löydettävä silein. Mutta tämä lisärajoitekaan ei takaa yksikäsitteisyyttä: Koska $\Delta f_p = p(p-n+2)f_{p+2}$ funktioina, häviää distribuutio Δf_{n-2} origon ulkopuolella, vaikka operoimalla johonkin säteittäisesti vähenevään testifunktioon on helppo tarkistaa, ettei Δf_{n-2} ole nolladistribuutio (paitsi jos $n=2$, jolloin on käytettävä logaritmia). Kuitenkin f_{n-2} on—ilman tämän tarkempia määritelmiä—sileämpi kuin F_p kun $p \geq n \neq 2$. Näin ollen mikään distribuutioista $\Delta(F_p + cf_{n-2})$, parametrein $c \in \mathbb{R}$, ei ole sileyden näkökulmasta toistaan luonnollisempi tulkinta funktiolle f_p.

Tästä ei kuitenkaan pidä päätellä, että funktioista vain lokaalisti integroituvat vastaisivat yksikäsitteisesti jotakin distribuutiota. Olkoot $f(x) = x^2 \sin x^{-2}$, $f(0) = 0$, ja tarkastellaan derivaattafunktiota $f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka ei ole lokaalisti integroituva nollassa. Kriittinen ero edellisiin esimerkkeihin on, että f on määritelty ja jatkuva myös nollassa. Tällöin jos $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ toteuttaa $g' = f'$ joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, jossa tulkinta distribuutiona on yksikäsitteinen, niin $f - g$ on vakio komponenteissa $\mathbb{R}_-$ ja $\mathbb{R}_+$. Jos g on epäjatkuva, on se vähemmän sileä kuin f, mutta ollessaan jatkuva $g' = f'$ kaikkialla.

Lopuksi osoitan vielä, että jopa sileä funktio voi käyttäytyä lähtöjoukkonsa reunalla liian huonosti laajetakseen distribuutiona. Olkoot $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f(x) = e^{1/x}$, ja ristiriitaa hakien oletetaan, että $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ laajentaa funktiota f. Kiinnitetään epänegatiivinen $\varphi \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ siten, että $\varphi(x) = e^{-1/2x}$ kun $0 < x < 1/2$. Merkitsen lähtöjoukon siirtoa $T_s g(x) := g(x-s)$. Nyt $T_s\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ kaikilla $s > 0$, ja lisäksi $T_s\varphi \xrightarrow{s \searrow 0} \varphi$ avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, koska $\|T_s\varphi - \varphi\|_N \leq s\|\varphi\|_{N+1}$. Tästä saadaan

$$\langle F, \varphi \rangle \xleftarrow{s \searrow 0} \langle F, T_s\varphi \rangle = \int_0^\infty e^{1/x}\varphi(x-s)dx \geq \int_s^{1/2} e^{1/x}e^{-1/2(x-s)}dx \xrightarrow{s \searrow 0} \infty$$

mikä on ristiriita.

3.3 Esitys derivaattojen integroijina

Distribuutiot esiteltiin karkeasti, jotta funktioita voitaisiin derivoida rajoitteetta. Kuten tähän mennessä on nähty, distribuutiot kyllä mahdollistavat tämän. Tämä tarkoittaa, että "uusia olioita" tarvitaan ainakin sen verran, että kaikkien funktioiden derivaatat saadaan esitettyä. Toisaalta mitä vähemmän distribuutioita on, sitä vahvempia ominaisuuksia niiltä voidaan odottaa. Siksi on sitä parempi mitä vähemmän on ns. ylimääräisiä distribuutioita, joita ei suoraan tarvita minkään funktion derivaattoina. Kuten osoittautuu, distribuutioita ei juuri olekaan enempää kuin vaadittu minimi eli jatkuvien funktioiden derivaatat. Tarkemmin distribuutiot ovat aina lokaalisti funktioiden derivaattoja.

Lemma 3.3.1. *Olkoot f distribuutio ja K kompakti. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $F \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ja multi-indeksi α siten, että*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_K F \partial^\alpha \varphi \quad \textit{kaikille } \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

Siis f operoi avaruudessa $\mathcal{D}_K$ derivoinnin ja F:llä painotetun integroinnin yhdisteenä.

Todistus. Distribuutiona f operoi jatkuvasti avaruudelta $\mathcal{D}_K$. Täten löytyy $N \in \mathbb{N}$ ja $c > 0$, joille $|\langle f, \varphi \rangle| \leq c\|\varphi\|_N$ kun $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Ideana on sitten, että f laajenee "monimutkaisesta" Fréchet-avaruudesta $\mathcal{D}_K$ operoimaan "tavalliseen" Banach-avaruuteen $(C_0^N, \|\cdot\|_N)$. Sopivasti derivoimalla C_0^N saadaan vaihdettua C_0^0:ksi ja edelleen L^1:ksi, jonka duaali on helppo määrittää.

Voin olettaa joukon K olevan yksikkökuutio $[0,1]^n$ ensin venyttämällä ja siirtämällä koordinaatteja, ja sitten kasvattamalla K:ta (mikä vain vahventaa väitettä). Nyt väliarvolauseen nojalla kaikille $\varphi \in \mathcal{D}_K$ pätee $\sup|\varphi| \leq \sup|\partial_j\varphi|$ millä tahansa indeksillä j. Tätä toistamalla $\|\varphi\|_N \leq \sup|\partial^{N\beta}\varphi|$, jossa multi-indeksi $\beta = (1,\ldots,1)$. Siirryn vielä tästä L^∞-rajasta L^1-rajaan:

$$|\partial^{N\beta}\varphi(x)| = \Big|\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \partial^{(N+1)\beta}\varphi(y)dy_n \ldots dy_1\Big| \leq \int_K |\partial^{(N+1)\beta}\varphi|$$

Liittämällä f mukaan saadaan ratkaiseva arvio

$$\frac{1}{c}|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_N \leq \|\partial^{(N+1)\beta}\varphi\|_{L^1}$$

Ensinnäkin tästä seuraa, että $B := \partial^{(N+1)\beta}$ on injektiivinen avaruudelta $\mathcal{D}_K$, joten on mahdollista määritellä lineaarinen funktio T kaavalla $T(B\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$. Edelleen tehty arvio takaa, että T on jatkuva kuvaus aliavaruudelta $B\mathcal{D}_K \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ skalaareille: $|T(B\varphi)| = |\langle f, \varphi \rangle| \leq c\|B\varphi\|_{L^1}$. Hahn-Banach-lauseen nojalla T laajenee duaaliavaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)^*$ alkioksi, ja L^{1*} on tunnetusti karakterisoitavissa L^∞-painotettuina integraaleina. Täten on olemassa $G \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ siten, että

$$\langle f, \varphi \rangle = T(B\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} G \partial^{(N+1)\beta} \varphi$$

Siirtymällä antiderivaattaan koordinaatti kerrallaan voidaan G vaihtaa jatkuvaksi funktioksi F, jolle osittaisintegroinnin tuella pätee haluttu yhtälö $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F \partial^{(N+2)\beta} \varphi$. □

Lause 3.3.2. *Jokainen distribuutio $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ voidaan esittää summana jatkuvien funktioiden derivaattoja*

$$f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha$$

jossa kukin $f_\alpha \in C^0(\Omega)$ on jatkuva, ja lokaalisti vain äärellinen määrä termejä poikkeaa nollasta. Erityisesti jos f on kompaktisti kannateltu, globaalisti vain äärellinen määrä termejä poikkeaa nollasta.

Todistus. Olkoot $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ykkösenositus joukossa Ω siten, että jokaisen u_j kantaja $\operatorname{spt} u_j =: K(j) \subseteq \Omega$ on kompakti. Edellisen lemman nojalla on olemassa jatkuvat funktiot $F_j \in C^0(\mathbb{R}^n)$, joille

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{K(j)} F_j \partial^{\beta_j} \varphi = \int_\Omega F_j \partial^{\beta_j} \varphi \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}_{K(j)}$$

Paloitellaan $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ykkösenosituksen mukaisesti, jolloin $\operatorname{spt}(u_j \varphi) \subseteq \operatorname{spt} u_j = K(j)$ ja pätee

$$\langle f, \varphi \rangle = \left\langle f, \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j \varphi \right\rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle f, u_j \varphi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_\Omega F_j \partial^{\beta_j} (u_j \varphi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \int_\Omega \left(\sum_{j : \beta_j \geq \alpha} \binom{\beta_j}{\alpha} F_j \partial^{\beta_j - \alpha} u_j \right) \partial^\alpha \varphi$$

Kun määrittelen $f_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \sum_j \binom{\beta_j}{\alpha} F_j \partial^{\beta_j - \alpha} u_j$ (sarja suppenee, koska lokaalisti vain äärellinen määrä termejä poikkeaa nollasta), niin on siis voimassa $f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha$, jossa niin ikään lokaalisti vain äärellinen määrä termejä poikkeaa nollasta, koska sarja saatiin järjestelemällä ko. ominaisuuden omaava sarja uudelleen. Funktioiden F_j jatkuvuus periytyy funktioille f_α jälleen lokaalin äärellisyyden nojalla. □

Toinen lemman 3.3.1 seuraus on Fubinin lauseen yleistys distribuutioille. Tässä operandit käyvät monimutkaisemmiksi, ja alkaa olla tarpeen nimetä niiden syötteet. Mikä integraalina kirjoitettaisiin muodossa $\int f(x) E_x dx$ ottaa nyt distribuutioille muodon $\langle f, x \mapsto E_x \rangle$.

Lause 3.3.3. *Olkoot $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ja $g \in \mathcal{D}'(U)$ distribuutioita, ja olkoon $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times U)$ testifunktio tulojoukossa $\Omega \times U$. Tällöin f ja g operoivat vaihdannaisesti eri muuttujien suhteen:*

$$\langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x,y) \rangle \rangle = \langle g, y \mapsto \langle f, x \mapsto \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

Yhtälön molemmat puolet on aina määritelty. Toisin sanoen $\varphi(x, \cdot) \in \mathcal{D}(U)$ on g:n testifunktio kaikilla $x \in \Omega$ ja $x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x,y) \rangle \in \mathcal{D}(\Omega)$ on f:n testifunktio, sekä vastaavasti yhtälön oikealla puolella.

Todistus. Aloitan luonnollisesti tarkistamalla, että lausekkeet ovat määriteltyjä. Väite $\varphi(x, \cdot) \in \mathcal{D}(U)$ on triviaali. Selvästi on olemassa kompaktit joukot $K \subseteq \Omega$ ja $L \subseteq U$ siten, että $\operatorname{spt} \varphi \subseteq K \times L$. Jos nyt $x \notin K$, niin $\langle g, y \mapsto \varphi(x,y) \rangle = \langle g, y \mapsto 0 \rangle = 0$, joten $\operatorname{spt}(x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x,y) \rangle) \subseteq K$ on kompakti. Totean myös lauseen yhtälön oikean puolen määritellyksi vaihtamalla f:n ja g:n roolit.

Kun $\operatorname{spt}\varphi \subseteq K \times L \subseteq \Omega \times U$ kompakteille K ja L, niin kantajille pätee

$$\operatorname{spt}(y \mapsto \varphi(x,y)) \subseteq K \supseteq \operatorname{spt}(x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x,y)\rangle)$$
$$\operatorname{spt}(x \mapsto \varphi(x,y)) \subseteq L \supseteq \operatorname{spt}(y \mapsto \langle f, x \mapsto \varphi(x,y)\rangle)$$

Täten lauseen yhtälön kaikki alilausekkeet on määritelty. Lisäksi koska esiintyvät testifunktiot ovat avaruuksista $\mathcal{D}_K$ ja $\mathcal{D}_L$, niin lemmaa 3.3.1 on näppärä soveltaa. On siis olemassa funktiot F , G ja multi-indeksit α, β siten, että

$$\langle f, \psi\rangle = \int_K F\partial^\alpha \psi \quad \text{kaikille } \psi \in \mathcal{D}_K \text{ ja}$$
$$\langle g, \psi\rangle = \int_L G\partial^\beta \psi \quad \text{kaikille } \psi \in \mathcal{D}_L.$$

Nyt distribuutioiden vaihdannaisuus palautuu derivaattojen ja integraalien vaihdannaisuuteen keskenään sekä toistensa kanssa.

$$\begin{aligned}\langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x,y)\rangle\rangle &= \int_K F(x)\partial_x^\alpha \int_L G(y)\partial_y^\beta \varphi(x,y)dy\,dx = \\ &= \int_K\int_L F(x)G(y)\partial_x^\alpha\partial_y^\beta \varphi(x,y)dy\,dx = \int_L\int_K G(y)F(x)\partial_y^\beta\partial_x^\alpha \varphi(x,y)dx\,dy = \\ &= \int_L G(y)\partial_y^\beta \int_K F(x)\partial_x^\alpha \varphi(x,y)dx\,dy = \langle g, y \mapsto \langle f, x \mapsto \varphi(x,y)\rangle\rangle\end{aligned}$$

Derivaatan alaindeksi kertoo tässä muuttujan, jonka suhteen derivoidaan. Vaihdannaisuustulokset ovat ongelmitta käytettävissä, koska derivoitavat funktiot ovat sileitä, integrandit jatkuvia, ja integrointi yli kompaktien joukkojen. □

On hyvä muistaa, että derivointi kiinteässä pisteessä $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x)$ vastaa distribuutiota $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \delta_x$, ja integrointi puolestaan vakiodistribuutiota 1. Edellinen lause siis yhdistää derivoinnin ja integroinnin vaihdannaisuustulokset, joskin vain testifunktioille. Samasta syystä se pitää sisällään distribuutioiden vaihdannaisuuden derivoinnin ja integroinnin kanssa.

3.4 Konvoluutio

Tyypillinen käyttökohde konvoluutiolle on funktioiden silotus, joka yleistyy muitta mutkitta. Distribuutioiden myötä aukeaa ovi myös päinvastaiseen sileyttä vähentävään käyttöön, esimerkiksi konvolvoiminen distribuution δ_0' kanssa derivoi. Lukuisat tarkat yhtälöt mahdollistavat usein vahvojen tulosten saavuttamisen konvoluution avulla. Algebrallisesta näkökulmasta konvoluutio on tulo-operaatio, ja seuraavassa luvussa 4 käsiteltävä Fourier-muunnos yhdistääkin sen suoraan pisteittäiseen tuloon. Huomattava rajoite on, että konvoluutio on mahdollinen vain koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyjen funktioiden välillä, tai tietyissä erikoistapauksissa rajoittamalla lähtöjoukkoja.

Loppututkielman ajan rajoitunkin tarkastelemaan vain koko avaruudesta $\mathbb{R}^n$ lähteviä distribuutioita. (Konvoluution ohella myös Fourier-muunnos pakottaa tähän.) Samalla otan käyttöön periaatteen, että funktio- ja distribuutioavaruuksien lähtöjoukkoparametri on oletusarvoisesti $\mathbb{R}^n$, jollen sitä erikseen mainitse. Kirjoitan siis esimerkiksi pelkästään $\mathcal{D}$ pidemmän $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sijasta. Toistaiseksi tämä vain lyhentää merkintöjä, mutta myöhemmin vältän epäyhdenmukaisen esityksen käsitellessäni sekaisin avaruuksia, joilla on lähtöjoukkosyöte, sekä sellaisia, jotka riippuvat vain ulottuvuudesta n.

Kahden funktion välinen konvoluutio $f * g$ määritellään perinteisesti kaavalla

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Paremmin mm. symmetrian tuo esille mittojen välisen konvoluution kaava

$$(m*\mu)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A d(m*\mu) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x+y)dm(x)d\mu(y)$$

joka on myös suoraviivaista yleistää distribuutioille.

Määritelmä 3.4.1. Distribuutioiden $f, g \in \mathcal{D}'$ välinen konvoluutio $f * g$ operoi kaavalla

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

jossa tarvittaessa distribuution f operointi ymmärretään sen yksikäsitteisenä laajennoksena.

Sisin operandi tässä on testifunktion φ siirto $T_{-x}\varphi = y \mapsto \varphi(x+y)$ ja siis itsekin testifunktio. Täten ulompi operandi $x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi \rangle$ on aina määritelty, mutta yleisesti se ei ole testifunktio. Distribuution f operoinnin $\langle f, \cdot \rangle$ laajentaminen voi korjata ongelman joissakin tapauksissa—tilanne on vastaava kuin funktioille, joiden konvoluutio edellyttää määrittelevän integraalin suppenemista. Tärkeässä erikoistapauksessa, että g on kompaktisti kannateltu, osoitan distribuution f operandin $x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi \rangle$ olevan testifunktio, eli jokaista distribuutiota voi siis konvolvoida kompaktisti kannatellulla distribuutiolla. Tämä pitää sisällään silotuksessa käytettävän erikoistapauksen, jossa g on epänegatiivinen testifunktio. Lisäksi tällöin pätee suora vastine funktioiden konvoluutiokaavalle, nimittäin kun $(x,y) \mapsto g(y-x)\varphi(y)$ on sileä ja kompaktisti kannateltu, voidaan lauseen 3.3.3 nojalla distribuution ja integraalin järjestystä vaihtaa antaen

$$\begin{aligned}\langle f, x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi \rangle \rangle &= \left\langle f, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(y+x)dy \right\rangle = \\ &= \left\langle f, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\varphi(y)dy \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, x \mapsto g(y-x) \rangle \varphi(y)dy\end{aligned}$$

Siis $(f * g)(y) = \langle f, x \mapsto g(y-x) \rangle$. Sileys saadaan oheistuotteena seuraavasta lemmasta, jota tarvitaan useaan otteeseen yleisemmän tapauksen käsittelyssä.

Lemma 3.4.2. *Olkoot $g \in \mathcal{D}'$ distribuutio ja $\varphi \in \mathcal{D}$ testifunktio. Tällöin $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \langle g, T_{-x}\varphi \rangle = \langle g, T_{-x}\partial^\alpha \varphi \rangle$ ja lauseke on sileä muuttujan x suhteen.*

Todistus. Koska triviaalisti $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(T_{-x}\varphi) = T_{-x}\partial^\alpha \varphi$, niin väite voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$\langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle g, y \mapsto \langle f, x \mapsto \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

jossa $\langle f, \psi \rangle := \partial^\alpha \psi(x_0)$ ja x_0 on mielivaltainen kiinteä piste. Kyse on siis distribuutioiden vaihdannaisuudesta, muttei suoraan lauseen 3.3.3 erikoistapauksesta, koska $(x,y) \mapsto \varphi(x+y)$ ei oletettavasti ole kompaktisti kannateltu. Tämä voidaan kiertää hyödyntämällä sitä, että derivointidistribuutio f on kompaktisti kannateltu. Tällöin on olemassa testifunktio b siten, että $bf = f$ (eli $b = 1$ pisteen x_0 ympäristössä). Nyt

$$\begin{aligned}\langle f, x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi \rangle \rangle &= \langle f, x \mapsto b(x)\langle g, T_{-x}\varphi \rangle \rangle && f = bf \\ &= \langle f, x \mapsto \langle g, b(x)T_{-x}\varphi \rangle \rangle && \text{lineaarisuus} \\ &= \langle g, y \mapsto \langle f, x \mapsto b(x)\varphi(x+y) \rangle \rangle && \text{vaihdannaisuus} \\ &= \langle g, y \mapsto \langle f, x \mapsto \varphi(x+y) \rangle \rangle && bf = f\end{aligned}$$

jossa voin nojata distribuutioiden vaihdannaisuuteen, koska $(x,y) \mapsto b(x)\varphi(x+y)$ on kompaktisti kannateltu.

Sileyttä varten riittää todeta, että $\langle g, T_{-x}\varphi \rangle$ on jatkuva x:n suhteen. Tämä seuraa helposti väliarvolauseella saatavasta arviosta $\|T_{-x}\varphi - T_{-y}\varphi\|_N \leq |x-y| \|\varphi\|_{N+1}$. □

Lause 3.4.3. *Olkoot $f, g \in \mathcal{D}'$ distribuutioita, joista g on kompaktisti kannateltu. Tällöin konvoluutio $f * g \in \mathcal{D}'$ on määritelty.*

Todistus. On todistettava kaksi asiaa. Ensinnäkin, että lauseke $\langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y) \rangle \rangle$ on määritelty jokaiselle testifunktiolle $\varphi \in \mathcal{D}$, ja sen jälkeen, että pisteittäin määritelty $f * g$ on distribuutio eli operoi jatkuvasti. Ensimmäinen väittämä vaatii, että $x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi \rangle$ on testifunktio. Edellisen lemman nojalla se on sileä, joten tarkastellaan sitten kantajaa. Pätee

$\operatorname{spt}(x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi\rangle) \subseteq \operatorname{spt}\varphi - \operatorname{spt} g$, koska jos $\langle g, T_{-x}\varphi\rangle \neq 0$, niin $\varnothing \neq \operatorname{spt} g \cap \operatorname{spt} T_{-x}\varphi = \operatorname{spt} g \cap (\operatorname{spt}\varphi - x)$, jolloin $x \in \operatorname{spt}\varphi - \operatorname{spt} g$. Koska φ ja g omaavat kompaktit kantajat, on myös $x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi\rangle$ kompaktisti kannateltu.

Olkoot kompakti $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mielivaltainen. Nyt $f * g$ on distribuutio, jos ja vain jos se operoi jatkuvasti Fréchet-avaruuteen $\mathcal{D}_K$. Toisin sanoen on oltava olemassa vakiot C ja N siten, että kaikille $\varphi \in \mathcal{D}_K$ pätee $|\langle f*g, \varphi\rangle| = |\langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y)\rangle\rangle| \leq C\|\varphi\|_N$. Kuten kantajia laskiessani osoitin, $\operatorname{spt}(x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y)\rangle) \subseteq \operatorname{spt}\varphi - \operatorname{spt} g \subseteq K - \operatorname{spt} g$. Koska f on distribuutio ja $K - \operatorname{spt} g$ on kompakti, on olemassa vakiot C_f ja N_f siten, että riippumatta testifunktiosta φ

$$|\langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y)\rangle\rangle| \leq C_f \|x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y)\rangle\|_{N_f} \tag{f-arvio}$$

Jos $|\alpha| \leq N_f$ niin $\partial^\alpha(x \mapsto \langle g, y \mapsto \varphi(x+y)\rangle) = x \mapsto \langle g, T_{-x}\partial^\alpha\varphi\rangle$, jolla päästään arvioimaan distribuution g operointia derivaatan ohi. Kun $x \in K - \operatorname{spt} g$, niin $\operatorname{spt} T_{-x}\partial^\alpha\varphi \subseteq K - (K - \operatorname{spt} g)$, jossa $K - (K - \operatorname{spt} g)$ on jälleen kompakti. Siis on olemassa vakiot C_g ja N_g siten, että kaikille $\varphi \in \mathcal{D}_K$ pätee

$$\sup_{x \in K - \operatorname{spt} g} |\langle \partial^\alpha(x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi\rangle)\rangle| \leq \sup_{x \in K - \operatorname{spt} g} C_g \|T_{-x}\partial^\alpha\varphi\|_{N_g} \leq C_g\|\varphi\|_{N_f+N_g} \tag{g-arvio}$$

Yhdistämällä (f-*arvio*) ja (g-*arvio*) päästään päämäärään

$$|\langle f*g, \varphi\rangle| \leq C_f C_g \|\varphi\|_{N_f+N_g}$$

ja täten konvoluutio $f * g$ on distribuutio. □

Muiden distribuutioille laajennettujen operaatioiden tavoin funktioilta tutut laskukaavat säilyvät pääsääntöisesti voimassa distribuutioidenkin konvoluutiolle. Bilineaarisuus on triviaali todeta, mutta seuraavat vaativat enemmän perusteluja.

Lause 3.4.4. *Olkoot f, g ja h distribuutioita, joista ainakin g ja h ovat kompaktisti kannateltuja. Tällöin on voimassa*

1. $\operatorname{spt}(f*g) \subseteq \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$
2. $f * \delta_0 = f$
3. $(f*g)*h = f*(g*h)$
4. $g*h = h*g$
5. $\partial^\alpha(f*g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$

Todistus. Koska $\operatorname{spt} g$ on kompakti, niin $\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$ on suljettu. Oletan siis, että testifunktion φ kantaja on erillinen joukosta $\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$, ja osoitan, että $\langle f*g, \varphi\rangle = 0$. Kuten edellisessä todistuksessa $\operatorname{spt}(x \mapsto \langle g, T_{-x}\varphi\rangle) \subseteq \operatorname{spt}\varphi - \operatorname{spt} g$. Nyt $\operatorname{spt} f \cap (\operatorname{spt}\varphi - \operatorname{spt} g) = \varnothing$ on yhtäpitävä oletuksen $(\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g) \cap \operatorname{spt}\varphi = \varnothing$ kanssa, joten $\langle f*g, \varphi\rangle = 0$.

Lauseen toinen kohta saadaan triviaalilla laskulla

$$\langle f*\delta_0, \varphi\rangle = \langle f, x \mapsto \langle \delta_0, T_{-x}\varphi\rangle\rangle = \langle f, x \mapsto \langle \delta_x, \varphi\rangle\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

Myös kolmannen kohdan eli liitännäisyyden todistus on suoraviivainen lasku, jossa loppupään lausekkeet ovat määriteltyjä, koska $\operatorname{spt}(g*h)$ on ensimmäisen kohdan nojalla kompakti.

$$\begin{aligned}
\langle (f*g)*h, \varphi\rangle &= \langle f*g, v \mapsto \langle h, z \mapsto \varphi(z+v)\rangle\rangle \\
&= \langle f, x \mapsto \langle g, y \mapsto \langle h, z \mapsto \varphi(z+y+x)\rangle\rangle\rangle \\
&= \langle f, x \mapsto \langle g*h, v \mapsto \varphi(v+x)\rangle\rangle = \langle f*(g*h), \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Konvoluution vaihdannaisuus on melkein pelkkä erikoistapaus distribuutioiden vaihdannaisuudesta. Pieni ero on, ettei $(x,y) \mapsto \varphi(x+y)$ oletettavasti ole kompaktisti kannateltu, vaikka φ olisikin testifunktio. Palautus distribuutioiden vaihdannaisuuteen onnistuu kuten lemman 3.4.2 todistuksessa hyödyntämällä distribuution g kompaktia kantajaa. Olkoot b testifunktio, jolle $bg = g$, jollainen löytyy esim. osittamalla ykkönen g:n kantajan komplementin ja kantajan pullistuman suhteen. Sitten

$$\begin{aligned}
\langle g * h, \varphi \rangle &= \langle g, x \mapsto b(x)\langle h, y \mapsto \varphi(x+y)\rangle\rangle && g = bg \\
&= \langle g, x \mapsto \langle h, y \mapsto b(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle && \text{lineaarisuus} \\
&= \langle h, y \mapsto \langle g, x \mapsto b(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle && \text{vaihdannaisuus} \\
&= \langle h * bg, \varphi \rangle = \langle h * g, \varphi \rangle && bg = g
\end{aligned}$$

jossa distribuutioiden g ja h järjestys voidaankin vaihtaa, koska $(x,y) \mapsto b(x)\varphi(x+y)$ on kompaktisti kannateltu.

Vaihdannaisuus derivoinnin kanssa on helppo osoittaa esittämällä derivointi konvoluutiona.

$$\langle f * \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle = \langle f, x \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle \delta_0, \partial^\alpha T_{-x}\varphi \rangle\rangle = \langle f, x \mapsto (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(x+0)\rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle$$

Viides kohta ottaa nyt muodon

$$(f * g) * \partial^\alpha \delta_0 = (f * \partial^\alpha \delta_0) * g = f * (g * \partial^\alpha \delta_0)$$

joka seuraa välittömästi vaihdannaisuudesta ja liitännäisyydestä. □

3.4.1 Silotus ja approksimointi

Testifunktiot $\mathcal{D}(\Omega)$ ovat tiheässä avaruudessa $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ratkaiseva askel on tietenkin silotus konvolvoimalla, mutta tähän en heti pääse, koska $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ saa olla aito osajoukko. Osoitan ensin, ettei distribuutioiden reunakäytöksellä ole painoarvoa suppenemisessa, nimittäin jokaista distribuutiota voi lähestyä kompaktisti kannatelluilla distribuutioilla. Näiden nollajatkaminen koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$ mahdollistaa sitten silotuksen konvoluutiolla.

Lause 3.4.5. *Kompaktisti kannatellut distribuutiot ovat tiheässä avaruudessa $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Todistus. Olkoot $b_K \in \mathcal{D}(\Omega)$ siten, että $b_K|_K = 1$ kompaktille $K \subseteq \Omega$. Nyt mielivaltaista distribuutiota $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ voidaan approksimoida kompaktisti kannatelluilla distribuutioilla $b_K f$. Nimittäin olipa $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mikä hyvänsä, niin heti kun $K \supseteq \operatorname{spt}\varphi$, pätee

$$\langle b_K f, \varphi \rangle = \langle f, b_K \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

mikä tarkoittaa, että $b_K f \to f$ kun $K \nearrow \Omega$. □

Määritelmä 3.4.6. Testifunktio on kumpufunktio (engl. bump function), jos se on epänegatiivinen, ja se on silotusfunktio, jos lisäksi sen integraali on 1.

Silotusfunktion b venytys $b_t(x) = t^n b(tx)$ on myös silotusfunktio kaikille $t > 0$. Olkoot $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ kompaktisti kannateltu, jolloin se voidaan nollajatkaa koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Lisäksi kompaktiuden ansiosta löytyy $r > 0$ siten, että kantajan r-pullistuma $B(\operatorname{spt} f, r) \subseteq \Omega$. Kun nyt $t > \sup|\operatorname{spt} b|/r$, niin

$$\operatorname{spt}(f * b_t) \subseteq \operatorname{spt} f + B(0,r) = B(\operatorname{spt} f, r) \subseteq \Omega$$

eli $f * b_t$ voidaan rajoittaa avaruuden $\mathcal{D}'(\Omega)$ kompaktisti kannatelluksi alkioksi. Tämä osoittaa raja-arvon seuraavassa lauseessa mielekkääksi.

Lause 3.4.7. *Jos $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on kompaktisti kannateltu, niin $\lim_{t\to\infty} f * b_t = f$ avaruudessa $\mathcal{D}'(\Omega)$. Erityisesti $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ on tiheä.*

Todistus. Olkoot $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja t niin iso, että $f * b_t \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\langle f * b_t, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle = \langle f, x \mapsto \langle b_t, T_{-x}\varphi \rangle - \varphi(x) \rangle = \langle f, x \mapsto \langle b_t, T_{-x}\varphi - T_{-x}\varphi(0) \rangle \rangle$$

Distribuutiona f operoi jatkuvasti testifunktioihin, joten riittää osoittaa, että $(x \mapsto \langle b_t, T_{-x}\varphi - T_{-x}\varphi(0) \rangle) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$, mikä seuraa arviosta

$$\begin{aligned} \Big| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \langle b_t, y \mapsto \varphi(y+x) - \varphi(x) \rangle \Big| &\leq \Big\langle b_t, y \mapsto \int_0^1 \|\nabla \partial^\alpha \varphi(ty+x)\| |y| dt \Big\rangle \leq \\ &\leq \|\nabla \partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty} \sup_{y \in \operatorname{spt} b_t} |y| \langle b_t, 1 \rangle = \frac{1}{t} \|\nabla \partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty} \sup_{y \in \operatorname{spt} b} |y| \end{aligned}$$

Koska b_t on sileä, niin sitä on myös $f * b_t$. Siis testifunktioilla voi approksimoida kompaktisti kannateltuja distribuutioita, joilla puolestaan voi approksimoida edellisen lauseen mukaisesti muita distribuutioita. Täten $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ on tiheä. □

4 Fourier-muunnos

Fourier-muunnos on itsenäinen erityinen lineaarikuvaus samalla tavalla kuin derivointi. Kuten yleensäkin, merkittäväksi Fourier-muunnoksen tekee sen poikkeuksellisen laaja sovellusten kirjo. Tyypillisiä sovelluskohteita ovat mm. osittaisdifferentiaaliyhtälöt, kvanttimekaniikka, kuvankäsittely ja analyyttinen lukuteoria. Seuraavassa luvussa 5 esittelen sovelluksen sileyden mittaamiseksi jatkuvalla suureella—klassisestihan sileyttä mittaa diskreetti jatkuvien derivaattojen lukumäärä. Tämä perustuu yhteen Fourier-muunnoksen keskeisimmistä ominaisuuksista eli sileyden ja vähenemisnopeuden vaihtumiseen keskenään.

Teorian perustavanlaatuinen tulos on, että Fourier-muunnos on yleensä käännettävissä, ja käänteiskuvaus on lähes identtinen alkuperäisen muunnoksen kanssa. Klassisella lähestymistavalla tämä fundamentaali tulos vaatii kuitenkin teknisiä rajoitteita. Nimittäin Fourier-muunnoksen luonnollinen määritelmä on integroituville funktioille, mutta muunnetut funktiot eivät välttämättä olekaan integroituvia, jolloin niiden käänteismuunnos ei ole määritelty. Laajennus L^2-funktioille onnistuu, ja näille käänteiskaava toimii nätisti. Tämä ei silti korjaa alkuperäistä ongelmaa, ettei kaikkien L^1-funktioiden muunnoksia voi kumota. Täydellinen käänteiskaava ja teorian kokonaisvaltainen ymmärtäminen vaativatkin distribuutioita.

Skalaarikunta on tästä lähtien $\mathbb{C}$, koska Fourier-muunnos edellyttää kompleksilukujen käyttöä. Lisäksi muunnettavien funktioiden lähtöjoukon on oltava koko avaruus $\mathbb{R}^n$. Jatkankin käytäntöä, että funktio- ja distribuutioavaruuksien parametrisoinnissa $\mathbb{R}^n$ on oletusarvoinen lähtöjoukko.

4.1 Teoria funktioille

Määritelmä 4.1.1. Integroituvalle funktiolle $f \in L^1$ määritellään sen Fourier-muunnos kaavalla

$$\mathcal{F}f(t) = \widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i t \bullet x} dx$$

jossa $e_t(x) = e^{2\pi i t \bullet x}$, ja $x \bullet y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ sisätulo.

Vakion 2π sijoittamisesta ei vallitse yksimielistä käytäntöä. Jotkin tekstit, esimerkiksi tämän luvun päälähteeni [1], yksinkertaistavat tekijän $e_{-t}(x)$ muotoon $e^{-it\bullet x}$. Tällöin integraalia on kuitenkin painotettava jollakin 2π:n potenssilla Fourier-muunnoksessa, sen käänteismuunnoksessa tai molemmissa. Minusta on luonnollisempaa normalisoida eksponenttifunktion jaksoksi 1 kuin painottaa Lebesguen mittaa. Lisäksi antamani määritelmä on ainoa, jonka suhteen kuvauksen $\mathcal{F}$ normi on 1 sekä $L^2 \to L^2$ että $L^1 \to C_0^0$. Joka tapauksessa tekijä e_t on itsessään arvokas abstraktio, eikä vain lyhennysmerkintä, jonka ominaisuudet viimekädessä selittävät Fourier-muunnoksen käytöksen. Erityisesti e_t on sileä homomorfismi ryhmältä $(\mathbb{R}^n, +)$ kompleksitason yksikköympyrälle, ja se toteuttaa differentiaaliyhtälön $\partial_j e_t = 2\pi i t_j e_t$.

Valotan vielä, että muunnoksessa integrandin tekijänä esiintyy e_{-t} eikä e_t analogiasta Fourier-sarjoihin. Näitä en käsittele tätä kappaletta laajemmin, mutta "ylimääräinen" miinus vaatii perustelunsa. Pähkinänkuoressa funktiot e_t, $t \in \mathbb{Z}^n$, muodostavat Hilbert-avaruuden $L^2(]0,1[^n)$ ortonormaalin kannan. Jokainen $f \in L^2(]0,1[^n)$ voidaan esittää tässä kannassa $f = \sum_t \langle f|e_t\rangle e_t$. Sitten sisätulon antibilineaarisuuden takia sarjan ns. Fourier-kerrointen esitys integraalina ottaa muodon $\langle f|e_t\rangle = \langle f, \overline{e_t}\rangle = \int fe_{-t}$.

Vakion 2π sijoittaminen vaikuttaa myös Fourier-muunnoksen laskukaavoihin. Derivointikaavat sisältävät aina "ylimääräisen" imaginaarisen vakion. Jottei vakio saa turhaa huomiota, ja jotta voin työskennellä funktioiden tasolla, merkitsen skaalattuja projektiokuvauksia $p_j(x) = 2\pi i x_j$. Multi-indeksi-merkintä laajenee näille suoraviivaisesti: $p^\alpha(x) = (2\pi i)^{|\alpha|}x^\alpha$. Toisin kuin e_t nämä ovat puhtaasti lyhennysmerkintöjä.

Lause 4.1.2. *Fourier-muunnokselle ovat voimassa seuraavat laskukaavat, joissa $f,g \in L^1$.*
(Harmaat kaavat todistan vasta myöhemmin lisäoletuksin, mutta liitän kootusti tähän.)

$\mathcal{F}T_v f = e_{-v}\widehat{f}$ $\qquad$ $\mathcal{F}(e_v f) = T_v\widehat{f}$

$\mathcal{F}\partial^\alpha f = p^\alpha \widehat{f}$ *kunhan* $\partial^\alpha f \in L^1$ $\qquad$ $\mathcal{F}(p^\alpha f) = (-\partial)^\alpha \widehat{f}$ *kunhan* $p^\alpha f \in L^1$

$\mathcal{F}(f \circ L^{-1}) = |\det L|\widehat{f} \circ L$ *lineaariselle isomorfismille* L*. Erityisesti* $\mathcal{F}(x \mapsto f(x/s))(t) = |s|^n \widehat{f}(st)$.

$\langle \widehat{f}, g\rangle = \langle f, \widehat{g}\rangle$ $\qquad$ *Ideatasolla Fourier-muunnos on siis oma liittokuvauksena.*

$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ $\qquad$ $\mathcal{F}(f \cdot g) = \widehat{f} * \widehat{g}$

$\mathcal{F}\widehat{f} = Rf$ $\qquad$ $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$

Tässä $Rf(x) = f(-x)$ *peilaa lähtöjoukon, ja* L^T *on lineaarikuvauksen* L *transponaatio, jonka oleellisesti määrittelee* $L^T t \bullet x = t \bullet Lx$ *kaikille* $t, x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Nämä ovat suoraviivaisia laskuja.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}T_v f(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-v)e_{-t}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e_{-t}(x+v)dx = e_{-v}(t)\widehat{f}(t) \\
\mathcal{F}(e_v \cdot f)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e_v \cdot f \cdot e_{-t} = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot e_{v-t} = \widehat{f}(t-v) = T_v\widehat{f}(t) \\
\mathcal{F}\partial^\alpha f(t) &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \partial^\alpha e_{-t} = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot (-2\pi i t)^\alpha e_{-t} = p^\alpha(t)\widehat{f}(t) \\
\mathcal{F}(p^\alpha f)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(2\pi i x)^\alpha e_{-t}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha e_{-t}(x)dx = (-\partial)^\alpha \widehat{f}(t) \\
\mathcal{F}(f \circ L^{-1})(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(L^{-1}x)e_{-t}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e_{-t}(Lx)|\det L|dx = |\det L|\widehat{f}(L^T t) \\
\langle \widehat{f}, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e_{-t}(x)dx\, g(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{\mathbb{R}^n} g(t)e_{-x}(t)dt\ dx = \langle f, \widehat{g}\rangle \\
\mathcal{F}(f*g)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\ e_{-t}(x)dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e_{-t}(y)g(x-y)e_{-t}(x-y)dx\,dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e_{-t}(y)\widehat{g}(t)dy = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)
\end{aligned}$$

Viimeisessä kohdassa integraalit ovat määriteltyjä vastaavin perusteluin, joilla konvoluutio $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on integroituva. $\square$

Lasketaan esimerkin vuoksi $\mathcal{F}\chi_{[-a,a]}$:

$$\mathcal{F}\chi_{[-a,a]}(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x)e_{-t}(x)dx = \int_{-a}^{a} e_{-t} = \frac{e_{-t}(a) - e_{-t}(-a)}{-2\pi i t} = \frac{\sin(2\pi a t)}{\pi t}$$

Tämän jälkeen n-suorakulmion $Q = \prod_{j=1}^{n}[-a_n, a_n]$ karakteristisen funktion Fourier-muunnos saadaan tulona

$$\mathcal{F}\chi_Q(t) = \int_Q \exp\Big(2\pi i \sum_{j=1}^{n} t_j x_j\Big) dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{-a_n}^{a_n} \exp(2\pi i t_j x_j) dx_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(2\pi a_n t_j)}{\pi t_j}$$

Asymmetristen suorakulmioiden Fourier-muunnokset voidaan laskea symmetristen siirtoina.

Toisena esimerkkinä Gaussin funktion $g(x) = \exp(-\pi|x|^2)$ Fourier-muunnos on se itse:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e_{-t}(x) dx = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi(x_j + it_j)^2) dx_j}_{=1} e^{-\pi t_j^2} = e^{-\pi|t|^2}$$

jossa integraalin laskeminen onnistuu siirtämällä se suoralle $\mathbb{R} - it_j$ residylauseen avulla.

Riemann-Lebesgue lemma 4.1.3. *$\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1 \to C_0^0)$ ja $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \to C_0^0} = 1$*

Todistus. Kaikille $t \in \mathbb{R}^n$ pätee $|\widehat{f}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f||e_t| = \|f\|_{L^1}$, joten $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. Koska Fourier-muunnos on selvästi lineaarinen, tämä osoittaa, että $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1 \to L^\infty)$ ja $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \to L^\infty} \leq 1$. Käänteinen arvio operaattorinormille saadaan siitä, että kun $f \geq 0$, niin $\widehat{f}(0) = \|f\|_{L^1}$. Maaliavaruudeksi tarkentuu C_0^0 huomaamalla, että tämä on L^∞:n suljettu aliavaruus, $\mathcal{F}\chi_Q \in C_0^0$ kaikille n-suorakulmioille Q, ja funktiot χ_Q virittävät L^1:n tiheän aliavaruuden. □

Fourier-teorian päätulosten eli Fourier-käänteiskaavan ja L^2-isometrian todistamisen avuksi esittelen Schwartz-funktiot. Näitä kutsutaan myös nopeasti väheneviksi funktioiksi, mutta vältän tässä ko. termiä, koska tulevassa testifunktioiden roolissaan ne vähenevät hitaammin kuin tavalliset kompaktisti kannatellut testifunktiot.

Määritelmä 4.1.4. Sanotaan, että φ on Schwartz-funktio, jos $\varphi \in C^\infty$ on sileä, ja kaikille $N \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S},N} := \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty$$

Schwartz-funktioiden muodostama vektoriavaruus $\mathcal{S}$ varustetaan seminormien $\|\cdot\|_{\mathcal{S},N}$ määräämällä topologialla.

On selvää, että $\|\cdot\|_{\mathcal{S},N}$ ovat seminormeja. Lisäksi kannattaa huomata $\|\cdot\|_N \leq \|\cdot\|_{\mathcal{S},N} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{S},M}$, jossa $\|\cdot\|_N$ on avaruuden $\mathcal{D}_K$ seminormi, ja $N \leq M$. Avaruus $\mathcal{S}$ on Fréchet, eli siis täydellinen, vastaavalla argumentilla kuin avaruus $\mathcal{D}_K$. Schwartz-funktioista on hyötyä kahdella tapaa. Ensinnäkin ne tulevat olemaan seuraavassa alaluvussa määriteltävien temperoitujen distribuutioiden testifunktioita. Toiseksi ne yksinkertaistavat lauseiden oletuksia, koska $\mathcal{S}$ on suljettu useiden keskeisten operaatioiden suhteen, minkä osoitan seuraavaksi.

Lause 4.1.5. *Derivointi ja polynomilla kertominen ovat jatkuvia lineaarikuvauksia $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Pisteittäinen tulo ja konvoluutio ovat jatkuvia bilineaarikuvauksia $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Erityisesti Schwartz-funktioiden joukko on suljettu näiden operaatioiden suhteen.*

Todistus. Olkoot $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Derivoinnin jatkuvuus on selvää, koska $\|\partial^\alpha \varphi\|_{\mathcal{S},N} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{S},N+|\alpha|}$. Käyttämällä kolmioarviota riittää yleisten polynomien sijasta tarkastella monomeja p^α. Näillä kertomiselle on selvästi voimassa $\|p^\alpha \varphi\|_{\mathcal{S},N} \leq (2\pi)^{|\alpha|} \|\varphi\|_{\mathcal{S},N+|\alpha|}$, josta jatkuvuus seuraa. Käyttämällä yksinkertaista arviota $(1 + |x|) \leq (1 + |y|)(1 + |x - y|)$ voidaan konvoluution $\varphi * \psi$ seminormille johtaa yläraja tekijöiden seminormien tulona.

$$\begin{aligned}
(1 + |x|)^N |\partial^\alpha (\varphi * \psi)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^N |\varphi(y)| (1 + |x - y|)^N |\partial^\alpha \psi(x - y)| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^{N+n+1} |\varphi(y)| (1 + |x - y|)^N |\partial^\alpha \psi(x - y)| \frac{dy}{(1 + |y|)^{n+1}} \\
&\leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S},N+n+1} \|\psi\|_{\mathcal{S},N}
\end{aligned}$$

jossa $C := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{-n-1} dy < \infty$. Siis $\|\varphi * \psi\|_{\mathcal{S},N} \le C\|\varphi\|_{\mathcal{S},N+n+1}\|\psi\|_{\mathcal{S},N}$, mikä konvoluution ollessa bilineaarinen takaa jatkuvuuden. Pisteittäisen tulon jatkuvuuden voi osoittaa samaan tyyliin suoralla laskulla. Vaihtoehtoisesti lukija voi odottaa kunnes loput Fourier-muunnoksen laskukaavat on todistettu Schwartz-funktioille ja sitten palauttaa tulon konvoluutioksi: $f \cdot g = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} f \cdot \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} g = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} f * \mathcal{F}^{-1} g)$. □

Lause 4.1.6. *Fourier-muunnos $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S} \to \mathcal{S})$ on jatkuva lineaarikuvaus Schwartz-funktioilta niille itselleen.*

Todistus. Olkoot $\varphi \in \mathcal{S}$, $N \in \mathbb{N}$ ja $|\alpha|, |\beta| \le N$. Seminormin $\|\widehat{\varphi}\|_{\mathcal{S},N}$ arvioimiseksi riittää arvioida termejä $|x^\alpha||\partial^\beta \widehat{\varphi}(x)|$. Näille pätee

$$|x^\alpha||\partial^\beta \widehat{\varphi}(x)| = |x^\alpha \mathcal{F}(p^\beta \varphi)(x)| = (2\pi)^{-|\alpha|} |\mathcal{F}(\partial^\alpha (p^\beta \varphi))(x)| \le \|\partial^\alpha (p^\beta \varphi)\|_{L^1}$$

jossa arvio saadaan Riemann-Lebesgue lemmasta 4.1.3. Nyt upotus $\mathcal{S} \hookrightarrow L^1$ on selvästi jatkuva, ja niin on myös $\varphi \mapsto \partial^\alpha(p^\beta \varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{S} \to \mathcal{S})$ edellisen lauseen nojalla, joten ylärajaa $\|\partial^\alpha(p^\beta \varphi)\|_{L^1}$ dominoi jonkin seminormin $\|\cdot\|_{\mathcal{S},M}$ monikerta. Lauseen väite seuraa. □

Käänteiskaava $\mathcal{S}$:llä 4.1.7. *Fourier-muunnos $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S})$ on lineaarinen isomorfismi, jonka käänteiskuvaus saadaan Fourier-käänteiskaavasta $\mathcal{F}^{-1} = R \circ \mathcal{F}$. Tässä R on parametrin heijastus eli $Rf(x) = f(-x)$.*

Todistus. Olkoon $\varphi \in \mathcal{S}$ ja osoitetaan, että $\mathcal{F}\widehat{\varphi} = R\varphi$. Itse asiassa tämä yhtälö riittää osoittaa yhdessä pisteessä, esimerkiksi origossa muodossa $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi} = \varphi(0)$. Nimittäin sijoitettaessa tässä φ:n paikalle $T_x\varphi$ saadaan

$$R\varphi(x) = T_x\varphi(0) = (\mathcal{F}\mathcal{F}T_x\varphi)(0) = (\mathcal{F}(e_{-x}\mathcal{F}\varphi))(0) = (T_{-x}\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi)(0) = \mathcal{F}\widehat{\varphi}(x)$$

Kun käänteiskaava nyt riittää osoittaa origossa, voidaan hyödyntää venytystä. Olkoot $g_s(x) = e^{-\pi|sx|^2}$, jolloin $\widehat{g_{1/s}} = s^n g_s$, koska $\widehat{g_1} = g_1$. Sitten

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi} \xleftarrow{s\to\infty} \langle \widehat{\varphi}, g_{1/s} \rangle = \langle \varphi, \widehat{g_{1/s}} \rangle = \langle \varphi, s^n g_s \rangle \xrightarrow{s\to\infty} \varphi(0)$$

jossa ensimmäinen rajankäynti saadaan $2\widehat{\varphi}$-dominoidusta konvergenssista, ja toinen φ:n jatkuvuudesta. □

Alussa ohittamani kaava $\mathcal{F}(f \cdot g) = \widehat{f} * \widehat{g}$ on nyt helppo johtaa Schwartz-funktioille sen parista $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. Nimittäin kun $f, g \in \mathcal{S}$ niin myös $\widehat{f} * \widehat{g} \in \mathcal{S}$, ja käänteiskaavalla saadaan

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}(R\mathcal{F}\widehat{f} \cdot R\mathcal{F}\widehat{g}) = \mathcal{F}R(\mathcal{F}\widehat{f} \cdot \mathcal{F}\widehat{g}) = \mathcal{F}R\mathcal{F}(\widehat{f} * \widehat{g}) = \widehat{f} * \widehat{g}$$

Parsevalin yhtälö 4.1.8. *Fourier-muunnos säilyttää L^2-normin ja laajenee isometriaksi $L^2 \to L^2$. Siis kaikille $\varphi \in \mathcal{S}$ pätee $\|\widehat{\varphi}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$.*

Todistus. Normin säilyvyys on käänteiskaavan voimin suora lasku:

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2 = \langle \widehat{\varphi}, \overline{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle \widehat{\varphi}, \mathcal{F}\overline{R\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}\widehat{\varphi}, \overline{R\varphi} \rangle = \langle R\varphi, \overline{R\varphi} \rangle = \|R\varphi\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2$$

Välittömänä seurauksena $\mathcal{F} \in (\mathcal{S}, \|\cdot\|_{L^2}) \to L^2$ on tasaisesti jatkuva tiheältä aliavaruudelta $\mathcal{S} \subseteq L^2$ täydelliselle avaruudelle L^2, ja siis laajenee kuvaukseksi $L^2 \to L^2$. Lineaarisuus, L^2-normin-säilyttävyys ja yhtälö $\mathcal{F}^2 = R$ säilyvät rajankäynnissä, joten $\mathcal{F} \in L^2 \to L^2$ on isometria. □

Tätä Fourier-muunnoksen laajentumaa merkitään aivan kuten alkuperäistä muunnosta. Ensin on toki varmistettava, että laajentuma käy yhteen alkuperäisen määritelmän kanssa myös joukossa $L^1 \cap L^2 \setminus \mathcal{S}$. Olisi patologista, jollei näin kävisi, mutta todistus ei silti ole aivan triviaali. Oleellista on, että $\mathcal{S}$ on tiheä samalla tavalla avaruuksissa L^1 ja L^2 eli käytännössä, että $\mathcal{S} \subseteq L^1 \cap L^2$ on tiheä normin $\|\cdot\|_{L^1} + \|\cdot\|_{L^2}$ suhteen. Tämä on selvää, koska tyypilliset approksimaatiot L^p-funktioille suppenevat riippumatta eksponentista $p < \infty$. Tämän jälkeen tarkastellaan laajentumaa $\mathcal{F} \in L^1 \cap L^2 \to X$, jossa X on Banach-avaruus, joka sisältää maaliavaruudet $L^\infty \supseteq \mathcal{F}L^1$ ja $L^2 = \mathcal{F}L^2$ (esim. $\exp(-|\cdot|)$-painotettu L^2-avaruus). Tämä laajentuma vastaa alkuperäistä

$\mathcal{F} \in L^1 \to X$ kuin myös laajentumaa $\mathcal{F} \in L^2 \to X$, koska suppenemisesta avaruudessa $L^1 \cap L^2$ seuraa suppeneminen sekä L^1:ssä että L^2:ssa.

4.2 Teoria temperoiduille distribuutioille

Toistaiseksi selkeä vajaus teoriassa on käänteiskaavan puute L^1-funktioille. Esteenä ei ole jokin patologinen vastaesimerkki vaan se, ettei Fourier-muunnos ole vielä määritelty kuvajoukolla $\mathcal{F}L^1$. Samantyylistä välitulosten määrittelemättömyyttä esiintyy myös muissa kaavoissa, esimerkiksi tulo-konvoluutio-kaavassa L^2-funktioille. Nimittäin pisteittäisellä arviolla $L^2 \cdot L^2 \subseteq L^1$, ja Hölderin arviolla $L^2 * L^2 \subseteq L^\infty$, joten yhtälö $\mathcal{F}(fg) = \widehat{f} * \widehat{g}$ laajenee Schwartz-funktioilta L^2-funktioille, mutta sen vastinpari $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\widehat{g}$ ei, koska siinä konvoluution $f * g \in L^\infty$ Fourier-muunnosta ei ole määritelty. Nämä ongelmat saadaan kertaheitolla ratkaistua laajentamalla Fourier-muunnos seuraavaksi esiteltäville temperoiduille distribuutioille, jotka kattavat useimmat tärkeät distribuutiot.

Temperoidut distribuutiot saadaan Schwartz-funktioiden duaalina. Lineaarikuvaustulkinnan jätän jälleen operoinnilla $\langle \cdot, \cdot \rangle$ korostettavaksi, ja ensisijaisesti temperoidut distribuutiot muodostavat avaruuden $\mathcal{D}'$ osajoukon. Määrittelenkin kuvauksen $E \in \mathcal{S}^* \to \mathcal{D}'$, $\langle Ef, \varphi \rangle = f\varphi$. Temperoidut distribuutiot ovat nyt ne, jotka saadaan upotuksen E kuvina.

Määritelmä 4.2.1. Temperoitujen distribuutioiden joukko on $\mathcal{S}' = E\mathcal{S}^*$, joka varustetaan topologisella vektoriavaruusrakenteella siten, että $E \in \mathcal{S}^* \leftrightarrow \mathcal{S}'$ on isomorfismi, kun avaruudella $\mathcal{S}^*$ käytetään heikko*-topologiaa.

Esiehtona määritelmän mielekkyydelle kuvauksen $E \in \mathcal{S}^* \to \mathcal{D}'$ on oltava injektio, jolloin se on bijektio kuvalleen. Tämä edellyttää, että kuvausten $f, g \in \mathcal{S}^*$ yhtyessä testifunktioilla $\mathcal{D}$ pätee $f = g$, mikä puolestaan kysyy testifunktioiden tiheyttä Schwartz-funktioissa. Esitän tiheyden rutiininomaisen tarkistuksen kohta, mutta ensin selitän, miten temperoidut distribuutiot kelpaavat Fourier-muunnokselle.

Temperoitu distribuutio f erottuu muiden distribuutioiden seasta sillä, että sen operointi $\langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{D}^*$ laajenee Schwartz-funktioille. Kääntäen jos distribuution f operointi laajenee kuvaukseksi $F \in \mathcal{S}^*$, niin $f = EF$ on temperoitu. Lisäksi koska $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ on tiheä, operoinnin laajentuma on yksikäsitteinen. Laajempi operointijoukko tulee tarpeeseen määritellessäni temperoidun distribuution Fourier-muunnoksen. Tämän saan tavalliseen tapaan sopivasta tulon integraali -kaavasta, tällä kertaa "itseliittoisuudesta" $\langle \widehat{g}, h \rangle = \langle g, \widehat{h} \rangle$ funktioille $g, h \in L^1$. Jatkuvuutensa ansiosta sama kaava pätee myös kun $g, h \in L^2$, mikä takaa, että seuraava määritelmä yhtyy aiempiin avaruuksilla L^1 ja L^2.

Määritelmä 4.2.2. Temperoidun distribuution $f \in \mathcal{S}'$ Fourier-muunnos $\widehat{f}$ on temperoitu distribuutio, joka määräytyy kaavasta

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle \quad \text{kaikille } \varphi \in \mathcal{S} \supseteq \mathcal{D}.$$

Lause 4.2.3. *$\mathcal{D}$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{S}$, ja upotuskuvaus* inc $\in \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$ *on jatkuva.*

Todistus. Olkoot $f \in \mathcal{S}$ ja $\varphi \in \mathcal{D}$ siten, että $\varphi|_{B(0,1)} = 1$. Määritellään funktion f sileät katkaisut $f_r \in \mathcal{D}$, $f_r(x) = f(x)\varphi(rx)$, jossa $r \in]0,1[$. Jos P on polynomi ja α multi-indeksi, niin tulon derivointikaavalla saadaan

$$P(x)\partial^\alpha(f - f_r)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (P(x)\partial^{\alpha-\beta} f(x)) \underbrace{r^{|\beta|}}_{<1} \partial^\beta (1 - \varphi)(rx)$$

Funktion φ valinnasta johtuen $\partial^\beta(1-\varphi)(rx) = 0$ kun $|x| \leq 1/r \xrightarrow{r \to 0} \infty$. Koska $f \in \mathcal{S}$, niin $P\partial^{\alpha-\beta} f \in C^0$, ja siten $P\partial^\alpha(f - f_r) \xrightarrow{r \to 0} 0$ tasaisesti. Tämä on yhtäpitävää väitteeseen $f - f_r \xrightarrow{r \to 0} 0$ avaruudessa $\mathcal{S}$, joten $\mathcal{D}$ on tiheä.

Upotuskuvaus on suoraviivaista todeta jatkuvaksi: jokaiselle kompaktille $K \subseteq \mathbb{R}^n$ upotus $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{S}$ on jatkuva, koska $(1 + |\cdot|)^N$ on rajoitettu K:ssa, jonka jälkeen upotuksen $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$ jatkuvuus seuraa universaaliominaisuudesta. □

Temperoituja distribuutioita on paljon: ne sisältävät lähes kaikki analyysissä vastaan tulevat funktioavaruudet. Lisäksi $\mathcal{S}'$ on suljettu monien samojen keskeisten operaatioiden suhteen kuin $\mathcal{D}'$, esimerkiksi derivoinnin. Kun Fourier-muunnos vielä toimii vain temperoiduille distribuutioille, on $\mathcal{S}'$ pääsääntöisesti avaruutta $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ parempi. Tässä toki hyvin rajoittava oletus on, että työskennellään koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Jatkan osoittamalla väittämäni temperoitujen distribuutioiden runsauden.

Lause 4.2.4. *Kaikki seuraavat ovat temperoituja distribuutioita:*

- kompaktisti kannatellut distribuutiot,
- L^p-funktiot kaikille $p \in [1, \infty]$,
- polynomit sekä yleisemmin polynomisesti rajoitetut funktiot,
- Borel-mitat μ, joille $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-m} d\mu(x) < \infty$ jollekin $m \in [0, \infty[$,
- tuplaavat mitat.

Todistus. Merkitkööt f distribuutiota, joka on tarkoitus osoittaa temperoiduksi. On osoitettava operoinnin $\langle f, \cdot \rangle$ laajenevan avaruuteen $\mathcal{S}'$, mihin riittää löytää vakiot $C, N \geq 0$ siten, että $|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S},N}$ kaikille $\varphi \in \mathcal{D}$. Kompaktisti kannatellulle f vakiot C ja N löytyvät vahvemmallekin normille $\|\cdot\|_N$, joten $|\langle f, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_N \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{S},N}$, ja f on tällöin temperoitu.

Käsittelen sitten yleisten Borel-mittojen tapauksen, koska loput on nopeaa palauttaa siihen. Olkoon Borel-mitalle f suure $C := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-m} df(x) < \infty$. Sitten

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| df \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-m} \|\varphi\|_{\mathcal{S},\lceil m \rceil} df(x) = C\|\varphi\|_{\mathcal{S},\lceil m \rceil}$$

ja siis f on temperoitu distribuutio. Välittömänä seurauksena $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-m} |f(x)| dx < \infty$ takaa funktion f olevan temperoitu. Siten $L^1 \subseteq \mathcal{S}'$ valitsemalla $m = 0$. Koska $(1+|\cdot|)^{-2n}$ on integroituva, saadaan $L^\infty \subseteq \mathcal{S}'$ valitsemalla $m = 2n$, ja tästä edelleen $L^p \subseteq L^1 + L^\infty \subseteq \mathcal{S}'$. Polynomi P tai mikä tahansa sen rajoittama funktio todetaan temperoiduksi valitsemalla $m = 2n + \deg P$. Lopuksi jos f on vakiolla C tuplaava mitta, niin $fB(0, 2^k) \leq C^k fB(0,1)$ ja

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-m} df(x) &\leq fB(0,1) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(0,2^{k+1}) \setminus B(0,2^k)} (1+2^k)^{-m} df \\
&\leq fB(0,1) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(0,2^{k+1})} 2^{-mk} df \\
&\leq fB(0,1) + \sum_{k=0}^{\infty} fB(0,1) C^{k+1} 2^{-mk} \quad < \infty
\end{aligned}$$

kun valitaan $m > \log_2 C$. □

Huomautus 4.2.5. Funktio, joka on temperoitu distribuutio, voi kasvaa superpolynomisestikin, jos se heilahtelee nopeasti. Esimerkiksi kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ saadaan osittaisintegroimalla $|\int \exp(x + ie^x)\varphi(x)dx| = |i \int \exp(ie^x)\varphi'(x)dx| \leq \|\varphi\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{S},2}$, joten $x \mapsto \exp(x + ie^x)$ on temperoitu.

Lause 4.2.6. *Olkoot $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$ ja P polynomi. Sitten $\partial^\alpha f, Pf, \varphi f, f * \varphi \in \mathcal{S}'$, ja nämä ovat f:n suhteen jatkuvia.*

Todistus. Lyhyesti sanottuna kaikki lauseen käsittelemät operaatiot ovat liittokuvauksia samankaltaisista Schwartz-funktioiden jatkuvista operaatioista. Negatoidun derivoinnin $(-\partial)^\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{S} \to \mathcal{S})$ liittokuvaus $((-\partial)^\alpha)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*)$ vastaa derivointia temperoiduilla distribuutioilla, koska $\langle \partial^\alpha f, \cdot \rangle = \langle f, \cdot \rangle \circ (-\partial^\alpha)$. Funktiolla $g = P, \varphi$ kertominen on isomorfismia $\mathcal{S}' \leftrightarrow \mathcal{S}^*$ vaille g:llä kertomisen liittokuvaus. Konvoluutio puolestaan vastaa konvoluutiota peilatun funktion kanssa:

$$\langle f * \varphi, \psi \rangle = \langle f, x \mapsto \langle \varphi, y \mapsto \psi(x+y) \rangle \rangle = \left\langle f, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} R\varphi(-y)\psi(x-(-y))dy \right\rangle = \langle f, R\varphi * \psi \rangle$$

□

Huomautus 4.2.7. Polynomien ja Schwartz-funktioiden lisäksi temperoituja distribuutioita voi kertoa monilla muillakin funktioilla. Itse asiassa kaikilla sellaisilla, joilla Schwartz-funktioita voi kertoa jatkuvasti, joita ovat edellisten lisäksi mm. sini ja kosini.

Fourier-muunnos laajenee temperoiduille distribuutioille siis kaavalla $\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle$. Lukuisten mutkikkaiden distribuutioiden lisäksi laajennus on tarpeen myös hyvin tavallistenkin funktioiden Fourier-muuntamiseksi. Esimerkiksi $\widehat{1} = \delta_0$:

$$\langle \widehat{1}, \varphi\rangle = \langle 1, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi} = \widehat{\widehat{\varphi}}(0) = \varphi(0)$$

Määritelmän suoran käytön sijasta rajankäynnillä vältetään usein epäkonkreettinen lauseke $\widehat{\varphi}$, kuten sign-funktion tapauksessa esityksellä $\operatorname{sign} = \lim_{a\to\infty} \chi_{[-a,a]} \operatorname{sign}$.

$$\langle \mathcal{F}(\chi_{[-a,a]} \operatorname{sign}), \varphi\rangle = \langle \chi_{[0,a]} - \chi_{[-a,0]}, \widehat{\varphi}\rangle = \langle \chi_{[0,a]}, \mathcal{F}(\varphi - R\varphi)\rangle = \langle \widehat{\chi_{[0,a]}}, \varphi - R\varphi\rangle$$

jossa on konkreettisesti laskettavissa $\widehat{\chi_{[0,a]}}(t) = (1 - e_{-t}(a))/2\pi it$. Koska $\psi(t) := (\varphi(t) - \varphi(-t))/2\pi it$ määrittelee Schwartz-funktion, voin arvioida osittaisintegroiden:

$$\Big|\Big\langle t \mapsto \frac{e_{-t}(a)}{2\pi it}, \varphi - R\varphi\Big\rangle\Big| = |\langle e_{-a}, \psi\rangle| = \Big|\frac{1}{-2\pi ia}(\psi(0) - \langle e_{-a}, \psi'\rangle)\Big| \leq \frac{|\psi(0)| + \|\psi'\|_{L^1}}{2\pi a} \xrightarrow{a\to\infty} 0$$

Siispä $\langle \mathcal{F}\operatorname{sign}, \varphi\rangle = \langle t \mapsto 1/2\pi it, \varphi - R\varphi\rangle$, tai yhtäpitävästi $\pi i\mathcal{F}\operatorname{sign}$ on käänteislukufunktio tulkittuna ns. parittomana distribuutiona, joka kuvaa parilliset Schwartz-funktiot nollalle.

Edellisen luvun 3 lopussa totesin tiheyden $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ johtavan systemaattiseen tapaan laajentaa kuvaus funktioilta distribuutioille. Fourier-muunnoksen kohdalla piti kuitenkin jälleen turvautua erikoismenettelyihin, koska muunnosta ei laajennettu kaikille distribuutioille. Eksponenttifunktiot ovat perusesimerkkejä temperoimattomista distribuutioista, ja näiden avulla osoitan, ettei Fourier-muunnos voi laajentua jatkuvana kaikille distribuutioille. Olkoot $b > 1$ ja $\exp_b x = b^x$. Erityisesti lineaarisuuden ja siirtokaavan pitäisi säilyä jatkuvassa laajennuksessa, jolloin pätisi

$$b\widehat{\exp_b} = \mathcal{F}(b\exp_b) = \mathcal{F}T_{-1}\exp_b = e_1\widehat{\exp_b}$$

lineaarisuuden ja siirtokaavan $\mathcal{F}T_{-v}f = e_v\widehat{f}$ avulla. Siis $(b - e_1)\widehat{\exp_b} = 0$, ja kertomalla sileällä funktiolla $1/(b - e_1)$ olisi oltava $\widehat{\exp_b} = 0$. Tämä osoittaa mahdottomaksi paitsi injektiivisyyden myös jatkuvuuden, koska rajalla $b \searrow 1$ saadaan $\widehat{\exp_1} = \widehat{1} = \delta_0 \neq 0$.

Suurin osa Fourier-muunnoksen peruskaavoista 4.1.2 laajenee temperoiduille distribuutioille jatkuvuuden ansiosta. Tätä varten tarvitsee vain avaruudessa $\mathcal{S}'$ osoittaa tiheiksi L^1- tai vahvemmin Schwartz- tai vieläkin vahvemmin testifunktiot.

Lause 4.2.8. *Testifunktioiden joukko $\mathcal{D}$ on tiheä temperoitujen distribuutioiden avaruudessa $\mathcal{S}'$.*

Todistus. Todistus on vastaava kuin distribuutioiden tapauksessa, ja käsittelen sen suurpiirteisesti. Ensinnäkin kompaktisti kannatellut distribuutiot ovat tiheässä leikkausargumentilla, ja sitten kompaktisti kannateltuja distribuutioita voi approksimoida testifunktioilla konvoluution avulla. Ainoa ero on, että suppenemiset on tarkistettava temperoitujen distribuutioiden vahvemmassa topologiassa. Todistaessani testifunktioiden tiheyttä Schwartz-funktioiden avaruudessa 4.2.3 osoitin, että $\mathcal{D} \ni \varphi b_r \xrightarrow{r\to 0} \varphi \in \mathcal{S}$ eräille testifunktioille b_r. Kompaktisti kannateltu approksimointi seuraa tästä, sillä $fb_r \xrightarrow{r\to 0} f \in \mathcal{S}'$, koska $\langle fb_r, \varphi\rangle = \langle f, b_r\varphi\rangle \xrightarrow{r\to 0} \langle f, \varphi\rangle$. Sitten kompaktisti kannatellun distribuution approksimointi testifunktiolla hoituu aivan kuten yleisten distribuutioiden tapauksessa 3.4.7, joka voidaan vaihtaa käyttämään Schwartz-seminormeja ongelmitta, koska kiinteällä kompaktilla joukolla lisätekijä $(1 + |\cdot|)^N$ on rajoitettu. □

Seurauslause 4.2.9. *Seuraavat yhtälöt ovat voimassa kaikille $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, $v \in \mathbb{R}^n$ ja multi-indekseille α:*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}T_v f = e_{-v}\widehat{f} & \mathcal{F}\partial^\alpha f = p^\alpha \widehat{f} & \mathcal{F}(f * \varphi) = \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi} & \partial^\alpha (f * \varphi) = \partial^\alpha f * \varphi = f * \partial^\alpha \varphi \\ \mathcal{F}(e_v f) = T_v \widehat{f} & \mathcal{F}(p^\alpha f) = (-\partial)^\alpha \widehat{f} & \mathcal{F}(f \cdot \varphi) = \widehat{f} * \widehat{\varphi} & (f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi) \end{array}$$

Todistus. Kaikki yhtälöt pätevät ainakin kun f, φ ja ψ ovat testifunktioita. Koska $\mathcal{D}$ on tiheä avaruuksissa $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{S}'$, voidaan jatkuvuuden nojalla φ ja ψ ensin laajentaa Schwartz-funktioiksi ja f sitten temperoiduksi distribuutioksi. $\square$

Lause 4.2.10. *Olkoot $f \in \mathcal{S}'$ ja $\varphi \in \mathcal{S}$. Tällöin $f * \varphi \in C^\infty$ on sileä ja polynomisesti rajoitettu.*

Todistus. Derivointikaavasta $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$ johtuen riittää osoittaa, että $f * \varphi$ on polynomisesti rajoitettu funktio. Distribuution f operoinnin jatkuvuuden nojalla on olemassa $N, C \geq 0$ siten, että $|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S},N}$ kaikille $\varphi \in \mathcal{S}$. Jos $\varphi \in \mathcal{D}$ on kompaktisti kannateltu, niin $f * \varphi$ tunnetaan jo entuudestaan funktioksi, ja voidaan arvioida

$$\begin{aligned} |(f * \varphi)(x)| = |\langle f, T_x R\varphi \rangle| \leq C \|T_x R\varphi\|_{\mathcal{S},N} = C \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|)^N \sup_{|\alpha| \leq N} |\partial^\alpha \varphi(x - y)| \leq \\ \leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N (1 + |x - y|)^N \sup_{|\alpha| \leq N} |\partial^\alpha \varphi(x - y)| = C(1 + |x|)^N \|\varphi\|_{\mathcal{S},N} \end{aligned}$$

Määrittelemällä $\|g\| = \|(1 + |\cdot|)^{-N} g\|_{L^\infty}$ ottaa edellinen muodon $\|f * \varphi\| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S},N}$. Täten $f*$ laajenee kuvaamaan avaruuden C_c^∞ täyttymältä normin $\|\cdot\|_{\mathcal{S},N}$ suhteen, mikä kattaa kaikki Schwartz-funktiot. Maaliavaruus on tällöin painotettu L^∞, jonka alkiot ovat polynomisesti rajoitettuja funktioita. Laajennus yhtyy alkuperäiseen konvoluutioon Schwartz-funktioilla, koska $(1 + |\cdot|)^N L^\infty \subseteq \mathcal{S}'$ jatkuvasti, ja näin ollen todistus on valmis. $\square$

5 Funktioavaruuksia jatkuvalla sileysparametrilla

Perusesimerkki sileysparametrisoiduista joukoista ovat s kertaa jatkuvasti derivoituvat funktiot C^s. Hienostuneempaa teoriaa edustavat Sobolev-avaruudet $W^{s,p}$ tarjoavat toisen esimerkin. Molemmissa tapauksissa $s \in \mathbb{N}$ on mielivaltainen luonnollinen luku. On kuitenkin mahdollista laajentaa Sobolev-avaruuksien hierarkiaa, ja määritellä $W^{s,p}$ kaikille reaaliluvuille $s \in \mathbb{R}$. Tällainen laajennus on tarpeen mm. esitettäessä tarkkoja arvioita Sobolev-funktion rajoittumalle määrittelyjoukkonsa reunalle. Näiden murto-Sobolev-avaruuksien lisäksi esittelen Hölder-avaruudet sekä näitä molempia yleistävät Triebel-Lizorkin-avaruudet. Vielä neljäs perhe ovat Besov-Lipschitz-avaruudet, joilla on läheinen tekninen yhteys Triebel-Lizorkin-avaruuksiin.

Perustan teorian Fourier-muunnoksen kykyyn vaihtaa äärettömyydessä väheneminen ja sileys keskenään. Muunnos tosin edellyttää lähtöjoukon olevan $\mathbb{R}^n$, mistä syystä se on tässäkin luvussa distribuutioavaruuksien oletusarvoinen lähtöjoukko.

Monissa tilanteissa—erityisesti normeja vertailtaessa—multiplikatiiviset vakiot eivät ole kiinnostavia. Normien kohdallahan kysymys on määräytyvien topologioiden yhtymisestä eli normien ekvivalenssista. Tätä epäoleellisuutta on hyvä heijastaa myös merkinnöissä, minkä vuoksi määrittelen relaatiot $\lesssim$, $\gtrsim$ ja $\approx$.

Määritelmä 5.1. Merkintä $x \underset{p}{\lesssim} y$ tarkoittaa, että on olemassa kerroinvakio $C_p > 0$, joka riippuu vain parametrista p, siten että $x \leq C_p y$. Relaation $\lesssim$ peilikuva on $\gtrsim$, ja näiden leikkausta merkitsen $\approx$.

Yleensä ne muuttujat, joista piilotettava kerroin saa riippua, käyvät selville kontekstista. Tässä tekstissä esimerkiksi vakiot saavat riippua vain funktioavaruuksien parametreista (ulottuvuudesta n, integroituvuuspotenssista (mm. p), sileysindeksistä (mm. s), jne.). Tästä syystä en lainkaan käytä alaindeksejä näissä “vakiota vaille” -relaatioissa.

5.1 Murto-Sobolev-avaruudet

Ensimmäisenä yrityksenä kohti jatkuvaa sileyden käsitettä tarkastelen derivaatan ilmaisua Fourier-muunnoksen avulla. Peruskaavoihin 4.1.2 kuuluu derivoinnin vaihtuminen tuloksi: $\widehat{f'}(x) = 2\pi i x \widehat{f}(x)$. Toistettu derivointi on siis kirjoitettavissa muotoon $\partial^k f = \mathcal{F}^{-1}(x \mapsto (2\pi i x)^k \widehat{f}(x))$. Ideaalisesti derivoinnin murtopotenssit voisi nyt määritellä korvaamalla luonnollinen luku k reaaliarvoisella, mutta kantalausekkeen $2\pi i x$ imaginaarisuus vaatii huolellisuutta. Yleisesti kompleksisen z-kantaisen eksponenttifunktion määrittely edellyttää jonkin z:n logaritmin $\log z$ kiinnittämistä, jonka jälkeen voidaan asettaa $z^s := e^{s \log z}$. Esimerkiksi kun $x > 0$, voisin valita $\log ix = \log x + \pi i/2$, ja kun $x < 0$, voisin valita $\log ix = \log|x| - \pi i/2$, jolloin saisin murtoderivaatan määritelmäksi

$$\partial^s f = \mathcal{F}^{-1}(x \mapsto e^{s i \pi \operatorname{sign} x/2} |2\pi x|^s \widehat{f}(x)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tässä on muutama ongelma. Ensinnäkin lausekkeelle $(2\pi i x)^s$ oli useita vaihtoehtoisia yhtä hyviä määritelmiä, mikä vähentää mielenkiintoa juuri tätä operaattoria kohtaan. Toisena ∂^s:n määrittelyjoukko riippuu nyt parametrista s, koska temperoitua distribuutiota $\widehat{f}$ ei voi aina kertoa epäsileällä lausekkeella $(2\pi i x)^s$. Tämä hankaloittaa laskusääntöjen kuten $\partial^s \circ \partial^r = \partial^{s+r}$ tulkintaa ja hukkaa distribuutioteorian keskeiset hyödyt, jotka ehdoitta määritelty derivointi antaa.

Bessel-potentiaalien käyttö paitsi välttää edelliset ongelmat myös huomattavasti yksinkertaistaa murto-Sobolev-avaruuksien määrittelyä. Bessel-potentiaalit ovat samantyylinen perhe toistoeksponentilla parametrisoituja operaattoreita kuin edellä määrittelemäni ∂^s. Näissä kuitenkin $2\pi i x$ korvataan sileällä positiivisella lausekkeella $\sqrt{1 + |2\pi x|^2} =: k(x)$, jolle sileät positiiviset potenssit on yksikäsitteistä määritellä. Asetan

$$J^{-s} f = \mathcal{F}^{-1}(k^s \widehat{f})$$

jossa ∂^s:ään nähden vaihdoin Bessel-potentiaalin J^{-s} eksponentin merkkiä johtuen yleisestä käytännöstä tulkita J^1 derivaatan sijasta integraalin kaltaiseksi. Koska k^{-s} on sileä ja polynomisesti kasvava kaikilla $s \in \mathbb{R}$, on $J^s \in \mathcal{L}(\mathcal{S}' \to \mathcal{S}')$ määritelty kaikille temperoiduille distribuutioille. Pätee

$$J^{-2} f = \mathcal{F}^{-1}(k^2 \widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} + 4\pi^2 |\cdot|^2 \widehat{f}) = f + \mathcal{F}^{-1}(x \mapsto -(2\pi i x)^2 \widehat{f}) = (\mathrm{id} - \partial^2) f$$

joten J^s ei esitäkään derivoinnin toistoa, vaan hieman muttei paljon monimutkaisemman operaattorin $\mathrm{id} - \partial^2$ toistoa.

Perinteiset Sobolev-avaruudet määritellään seuraavasti mittaamalla derivaattojen säännöllisyyttä L^p-normilla.

Määritelmä 5.1.1. Olkoot $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko, $k \in \mathbb{N}$ ja $p \in [1, \infty]$. Sobolev-avaruus $W^{k,p}(\Omega)$ koostuu funktioista, joiden (distribuutio)derivaatat kertalukuun k asti ovat L^p-funktioita. Normi avaruudelle $W^{k,p}(\Omega)$ saadaan yhdistämällä derivaattojen L^p-normit (tarkka käytäntö ei ole vakiintunut vain normin ekvivalenssiluokan ollessa yleensä oleellinen).

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \,\middle|\, \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ aina kun } |\alpha| \le k \right\}$$
$$\|f\|_{W^{k,p}} = \max_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$$

Tärkein syy Bessel-potentiaalien käyttöön on, että J^{-s} onnistuu normien näkökulmasta yhdistämään kaikki derivaatat 0–s yhteen funktioon. Tämä voi olla yllättävää, sillä esimerkiksi eksponenttifunktiolle Bessel-potentiaali $J^{-2} = \mathrm{id} - \partial^2$ olisi nolla—mutta eksponenttifunktiohan ei ole temperoitu distribuutio eikä siis $J^s \exp$ määritelty. Perustelen muun muassa edellisen väitteen todistamatta jäävällä Mihlinin lauseella, mutta hyvin rajattuna erikoistapauksena voi avaruudessa $W^{2,2}(\mathbb{R})$ helposti nähdä Bessel-potentiaalin J^{-2} yhdistävän eri derivaatat:

$$\begin{aligned} \|J^{-2} f\|_{L^2}^2 \;&=\; \int_{\mathbb{R}} |f - f''|^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}} (|f|^2 - \overline{f} f'' - f \overline{f''} + |f''|^2) \;= \\ &=\; \|f\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} (-\overline{f'} f' - f' \overline{f'}) + \|f''\|_{L^2}^2 \;=\; \|f\|_{L^2}^2 + 2\|f'\|_{L^2}^2 + \|f''\|_{L^2}^2 \;\approx\; \|f\|_{W^{2,2}}^2 \end{aligned}$$

jossa osittaisintegroin rivinvaihdon kohdalla tavallisen laajennusargumentin turvin.

Bessel-potentiaali yleistyy useampaan ulottuvuuteen ideaalisesti korvaamalla ∂^2 Laplace-operaattorilla Δ. Bessel-potentiaalin kyky yhdistää derivaatat tekee murto-Sobolev-avaruuksien määrittelemisestä hyvin yksinkertaista. Tosin tässä tekstissä esitettävä teoria ei toimi sellaisenaan integroituvuuseksponentin ääriarvoille 1 ja ∞, mikä heijastuu jo seuraavaan määritelmään, ja minkä suhteen lukijan on hyvä pysyä valppaana.

Määritelmä 5.1.2. Olkoot $s \in \mathbb{R}$ ja $p \in]1,\infty[$. Murto-Sobolev-avaruus $W^{s,p}$, toiselta nimeltään Bessel-potentiaaliavaruus, on normiavaruuden L^p isometrinen kuva Bessel-potentiaalissa:

$$\begin{aligned} W^{s,p} &= \left\{ f \in \mathcal{S}' \,\middle|\, J^{-s} f \in L^p \right\} = J^s L^p \\ \|f\|_{W^{s,p}} &= \|J^{-s} f\|_{L^p} \end{aligned}$$

Tässä esiintyvä Bessel-potentiaali $J^s \in \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ määritellään kaavalla

$$J^s f = \mathcal{F}^{-1}(k^{-s}\widehat{f}), \quad k(x) = \sqrt{1 + 4\pi^2 |x|^2}$$

Merkitsen murto-Sobolev-avaruuksia kuten perinteisiä Sobolev-avaruuksia, koska kyseessä on tarkoitus olla laajennus, ja jatkossa $W^{s,p}$ viittaa aina murto-Sobolev-avaruuteen. Bessel-potentiaalin triviaalit kaavat $J^{r+s} = J^r \circ J^s$ ja $(J^s)^{-1} = J^{-s}$ voi kiteyttää sanomalla, että $s \mapsto J^s \in (\mathbb{R},+) \to (\mathcal{S}' \leftrightarrow \mathcal{S}', \circ)$ on homomorfismi. Lisäksi J^s on usein oma liittokuvauksensa, koska käyttämällä Fourier-muunnoksen vastaavaa ominaisuutta pätee

$$\langle J^s f, g \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(k^{-s}\widehat{f}), g \rangle = \langle k^{-s}\widehat{f}, \mathcal{F}^{-1} g \rangle = \langle \widehat{f}, k^{-s} R\widehat{g} \rangle = \langle f, \mathcal{F}R(k^{-s}\widehat{g}) \rangle = \langle f, J^s g \rangle$$

kaikille f ja g, joille esiintyvät lausekkeet ovat määriteltyjä. Ainakin kaikille Schwartz-funktioille, joilta yhtälön voi yleensä tarvittaessa laajentaa. Murto-Sobolev-avaruuksien perusominaisuudet esitän omana lauseenaan.

Lause 5.1.3. *Murto-Sobolev-avaruuksille pätevät seuraavat, joissa $s, r \in \mathbb{R}$ ja $p \in]1,\infty[$:*

- *$W^{s,p}$ on aina Banach-, ja lisäksi Hilbert-avaruus jos $p = 2$,*
- *$W^{0,p} = L^p$ normeja myöten,*
- *$J^s \in W^{r,p} \to W^{r+s,p}$ on isometria,*
- *${W^{s,p}}^*$ on $W^{-s,q}$ normaalilla parituksella $\langle \cdot, \cdot \rangle$, jossa $1/p + 1/q = 1$.*

Todistus. Avaruus $W^{s,p}$ on Banach tai Hilbert, koska $J^s \in L^p \to W^{s,p}$ on isometria määritelmän nojalla. Toinen kohta seuraa myös tästä. Kolmannessa kohdassa on kyse esityksestä:

$$\begin{tikzcd} W^{r,p} \arrow[rr, bend right, "J^s = J^{r+s} \circ (J^r)^{-1}"'] & L^p \arrow[l, "J^r"'] \arrow[r, "J^{r+s}"] & W^{r+s,p} \end{tikzcd}$$

Viimeistä kohtaa varten jos $f \in W^{s,p}$ ja $g \in W^{-s,q}$, niin $J^{-s} f \in L^p$ ja $J^s g \in L^q$, joten $\langle f, g \rangle = \langle J^s J^{-s} f, g \rangle = \langle J^{-s} f, J^s g \rangle$ on määritelty (muistutan määritelleeni parituksen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ laajennuksen kautta kun mahdollista). Tämä osoittaa, että ${W^{s,p}}^*$ sisältää $W^{-s,q}$:n. Toiseen suuntaa jos $L \in {W^{s,p}}^*$, niin $L \circ J^s \in {L^p}^*$, joten on olemassa $g \in L^q$ siten, että $LJ^s f = \langle f, g \rangle$ kaikille $f \in L^p$. Toisin sanoen $Lf = \langle f, J^{-s} g \rangle$ kaikille $f \in W^{s,p}$, jossa $J^{-s} g \in W^{-s,q}$. $\square$

Bessel-potentiaalin käytön ansiosta tämä oli helppoa. Jatkoa varten tarvitsen kuitenkin lisää työkaluja Fourier-puolella funktioita kertovien operaattorien käsittelyyn.

5.1.1 Mihlinin kertojalause

Bessel-potentiaali, derivointi, Laplace-operaattori ja edellisen alaluvun alussa ideoitu murtoderivaatta ovat kaikki yleistä muotoa $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}(m\widehat{f})$ jollekin funktiolle m. Esimerkiksi Bessel-potentiaalille J^s lauseke $m(x)$ on $k(x)^{-s} = \left(1+4\pi^2|x|^2\right)^{-s/2}$, derivoinnille ∂^α se on $p^\alpha(x) = (2\pi i)^{|\alpha|}x^\alpha$ ja Laplace-operaattorille $-4\pi^2|x|^2$. Tällaiset operaatiot ovat nyt keskeisessä roolissa, joten annetaan niille nimi.

Määritelmä 5.1.4. Funktioon (tai distribuutioon) m liittyvän Fourier-kertojaoperaattorin määrittelen pisteittäisenä tulona m:n kanssa Fourier-puolella: $m_\mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1}(m\widehat{f})$. Yhtäpitävästi konvoluution avulla ilmaistuna $m_\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}m*$. Kertojaoperaattori kuvaa temperoiduille distribuutioille parametrin m mukaan vaihtelevalta oletusarvoisesti mahdollisimman suurelta avaruudelta.

Fourier-kertojat ovat siis melkein mitä tahansa konvoluutio-operaattoreita ja näin ollen yleistävät sekä vakiokertoimisia differentiaali- että integraalioperaattoreita. Tämän uuden määritelmän tehtävänä on korostaa parametrifunktioiden ja vastaavien kertojaoperaattoreiden algebrojen yhteyttä. Selvän lineaarisuuden $(m+cl)_\mathcal{F} = m_\mathcal{F} + cl_\mathcal{F}$ lisäksi näet tulo vastaa yhdistettä: $(ml)_\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}(ml)* = \mathcal{F}^{-1}m * \mathcal{F}^{-1}l* = m_\mathcal{F} \circ l_\mathcal{F}$, minkä seurauksena erityisesti $(1/m)_\mathcal{F} = m_\mathcal{F}^{-1}$ ollessaan määritelty. Esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden ratkaisu Fourier-muunnoksen avulla perustuu juuri edelliseen kaavaan, tosin yleensä ilman Fourier-kertojaterminologiaa.

Perusongelma on määrittää Fourier-kertojaoperaattorille kelvolliset lähtö-/maaliavaruus -parit. Koska Fourier-kertojaoperaattorien joukko on suljettu yhdisteen suhteen, voi Bessel-potentiaalin kaltaisilla bijektioilla yleensä palauttaa ongelman muutaman yksinkertaisen perusavaruuden välisten kertojaoperaattorien kuvailemiseen.

Määritelmä 5.1.5. Funktio $m \in L^1_{\text{loc}}$ on L^p-Fourier-kertoja, jos $m_\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^p \to L^p)$.

L^p-Fourier-kertojien kuvailu olisi monella tapaa hyödyllistä, mutta toistaiseksi erinomaista tunnistuskeinoa ei ole löydetty, ja ongelmaa pidetään avoimena. Vaikeus juontaa juurensa siihen, että vaikka kertominen m:llä lausekkeessa $\mathcal{F}^{-1}(m\widehat{f})$ on yleensä yksinkertaista, kuva-avaruus $\mathcal{F}L^p \ni \widehat{f}$ ymmärretään liian huonosti edes tämän operaation suhteen. Jos kuitenkin $p=2$, niin $\mathcal{F}L^p = L^2$, ja ongelmaan saadaan tyhjentävä vastaus:

Lause 5.1.6. *Funktio m on L^2-Fourier-kertoja jos ja vain jos $m \in L^\infty$.*

Todistus. Koska $\mathcal{F}L^2 = L^2$, niin $m_\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}m* \in \mathcal{L}(L^2 \to L^2)$ täsmälleen silloin kun $m\cdot \in \mathcal{L}(L^2 \to L^2)$. Hölderin arviolla nähdään heti, että $m \in L^\infty$ on riittävä ehto. Kääntäen jos m on rajoittamaton, on olemassa erilliset positiivimittaiset joukot $A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ kullekin $j \in \mathbb{N}$ siten, että $|m|_{A_j}| \geq 2^j$. Määrittelen

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j}\,\mathrm{sign}(\overline{m(x)})\,\frac{\chi_{A_j}(x)}{\sqrt{\mathcal{M}A_j}}$$

jossa $\mathcal{M}$ on Lebesgue-mitta ja $\mathrm{sign}\, z = z/|z| \in S_\mathbb{C}(0,1)$. Nyt $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} 4^{-j}\frac{\mathcal{M}A_j}{\sqrt{\mathcal{M}A_j}^2} < \infty$ eli $f \in L^2$, mutta

$$(mf)(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j}|m(x)|\frac{\chi_{A_j}(x)}{\sqrt{\mathcal{M}A_j}} \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\chi_{A_j}(x)}{\sqrt{\mathcal{M}A_j}}$$

eli $mf \notin L^2$. Siis $m\cdot \notin L^2 \to L^2$, joten $m \in L^\infty$ on myös välttämätön ehto. □

Joitakin tekniikoita L^p-Fourier-kertojien tunnistamiseen kyllä on, ja käyttökelpoisen riittävän ehdon tarjoaa Mihlinin kertojalause. Tämä lause myös toimii keskeisenä työkaluna todistaessani murto-Sobolev-avaruuksien laajentavan perinteisiä Sobolev-avaruuksia, sekä myöhemmin todistaessani edelleen Triebel-Lizorkin-avaruuksien laajentavan murto-Sobolev-avaruuksia. Valitettavasti Mihlinin lauseen takana on paljon teoriaa, jota en tässä tekstissä käsittele, enkä näin ollen myöskään todista Mihlinin lausetta. Todistusta varten ks. esim. [3].

Mihlinin kertojalause (perusmuoto) **5.1.7.** *Olkoon m origon ulkopuolella $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ kertaa derivoituva funktio. Tällöin kaikille $p \in]1,\infty[$ pätee*

$$\|m_{\mathcal{F}}\|_{\mathcal{L}(L^p \to L^p)} \lesssim \sup_{|\alpha| \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1} \sup_{x \neq 0} |x|^{|\alpha|} |\partial^\alpha m(x)|$$

Erityisesti m on L^p-Fourier-kertoja, jos arvion oikea puoli on äärellinen.

Tarvitsen myös vektoriversiota tästä lauseesta. Suuri osa analyysistä voitaisiin esittää skalaariarvoisten funktioiden sijasta vektoriarvoisille. Muunnos on yleensä suoraviivainen: korvataan skalaarioperaatiot vektorioperaatioilla, esim. itseisarvo normilla. Näin kuitenkin harvoin tehdään, koska koko taustateoria—tässä tapauksessa distribuutiot ja Fourier-muunnos—pitäisi muotoilla uudestaan, ja on yleensä selvästi helpompaa kiertää vektoriesitys tilanteeseen räätälöidyllä ad hoc ratkaisulla. Niin toimin nyt itsekin, mutta esitän myös Mihlinin lauseen yleisen muodon niitä lukijoita varten, jotka tuntevat vektoroidun taustateorian, sekä selkeyttämään yhteyttä skalaariversioon.

Mihlinin kertojalause (vektorimuoto) **5.1.8.** *Olkoot X ja H Hilbert-avaruuksia ja $m \in \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(X \to H)$ origon ulkopuolella $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ kertaa derivoituva funktio. Tällöin kaikille $p \in]1,\infty[$ pätee*

$$\|m_{\mathcal{F}}\|_{\mathcal{L}(L^p(\to X) \to L^p(\to H))} \lesssim \sup_{|\alpha| \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1} \sup_{x \neq 0} |x|^{|\alpha|} \|\partial^\alpha m(x)\|_{\mathcal{L}(X \to H)}$$

jossa $L^p(\to X)$ on X-arvoinen L^p-avaruus, Fourier-muunnos määritellään "pisteittäin" eli $v^* \circ \widehat{f} = \mathcal{F}(v^* \circ f)$ kaikille duaalialkioille v^*, ja Fourier-kertojaoperaattorissa $m_{\mathcal{F}}$ tulo korvataan funktiosyötöllä.

Tarvitsen ainoastaan erikoistapausta, jossa $X = \mathbb{C}$ ja $H = l^2$, jonka muotoilen skalaariarvoisena.

Mihlinin kertojalause (l^2-muoto) **5.1.9.** *Olkoot kullekin $j \in \mathbb{N}$ funktio m^j origon ulkopuolella $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ kertaa derivoituva. Tällöin kaikille $p \in]1,\infty[$ ja $f \in L^p$ pätee*

$$\left\| \sqrt{\sum_{j \in \mathbb{N}} |m^j_{\mathcal{F}} f|^2} \right\|_{L^p} \lesssim M \|f\|_{L^p} \quad \textit{jossa} \quad M = \sup_{|\alpha| \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1} \sup_{x \neq 0} |x|^{|\alpha|} \sqrt{\sum_{j \in \mathbb{N}} |\partial^\alpha m^j(x)|^2}$$

5.1.2 Sobolev-avaruudet ovat murto-Sobolev-avaruuksia

Kun murto-Sobolev-avaruudet on nyt määritelty Bessel-potentiaalin $J^s = k_{\mathcal{F}}^{-s}$ avulla, on luonnollisesti hyödyllistä tietää, milloin k^{-s} on L^p-Fourier-kertoja. Intuitiohan on, että J^s derivoi kun $s < 0$, jolloin L^p:n ei selvästikään pitäisi kuvautua itselleen, ja J^s integroi kun $s > 0$, jolloin ainakin sileyden puolesta L^p voi kuvautua itselleen. Näin todella käy seuraavan lemman mukaisesti. Mukana on lisäksi polynomikerroin, mikä Fourier-kertojaoperaattorina vastaa tavallisten toistettujen derivaattojen lineaarikombinaatioita.

Lemma 5.1.10. *Funktio P/k^s on L^p-Fourier-kertoja kaikille monen muuttujan polynomeille P, joille $\deg P \leq s$. (Monen muuttujan polynomin aste on maksimi sen monomien asteista, jotka määrittelen siten, että $\deg p^\alpha = |\alpha|$.)*

Todistus. Mihlinin kertojalauseen soveltamiseksi on arvioitava derivaattoja $\partial^\alpha(P/k^s)$. Osoitan induktiolla $|\alpha|$:n suhteen, että $\partial^\alpha(P/k^s)$ on muotoa $R_\alpha/k^{s+2|\alpha|}$, jossa polynomin R_α aste on korkeintaan $s + |\alpha|$. Lähtötapaus $|\alpha| = 0$ on selvä. Induktioaskeleessa merkitsen $t = s + 2|\alpha|$ ja lasken

$$\partial_j(R_\alpha/k^t) = \partial_j R_\alpha/k^t - R_\alpha t \partial_j k/k^{t+1} = \partial_j R_\alpha/k^t - R_\alpha t \frac{2\pi p_j}{ik}/k^{t+1} = (k^2 \partial_j R_\alpha + 2\pi i t p_j R_\alpha)/k^{t+2}$$

Pätee $\deg(k^2 \partial_j R_\alpha + 2\pi i t p_j R_\alpha) \leq \max\{2 + \deg R_\alpha - 1, 1 + \deg R_\alpha\} = \deg R_\alpha + 1$ eli osoittajapolynomin aste pysyy sallituissa rajoissa, ja induktio on valmis. Koska k dominoi sekä monomeja että euklidista normia, on helppo arvioida

$$\sup_{\substack{x\neq 0\\ |\alpha|\leq \lfloor n/2\rfloor+1}} |x|^{|\alpha|}|\partial^\alpha(P/k^s)(x)| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ |\alpha|\leq \lfloor n/2\rfloor+1}} \frac{|x|^{|\alpha|}}{k(x)^{|\alpha|}}\frac{|R_\alpha(x)|}{k(x)^{s+|\alpha|}} \leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ |\alpha|\leq \lfloor n/2\rfloor+1}} \frac{|R_\alpha(x)|}{k(x)^{\deg R_\alpha}} < \infty$$

Lemman väite seuraa nyt Mihlinin lauseesta. □

Edellisellä lemmalla on nyt helppo todistaa, että murto-Sobolev-avaruudet muodostavat sileyden suhteen vähenevän hierarkian.

Lause 5.1.11. *Jos $s \leq r$, niin $W^{r,p} \subseteq W^{s,p}$.*

Todistus. Edellisen lemman nojalla $k^{s-r} = 1/k^{r-s}$ on L^p-Fourier-kertoja. Sitten kaikille $f \in W^{r,p}$ pätee $\|f\|_{W^{s,p}} = \|J^{-s}f\|_{L^p} = \|k^{s-r}_{\mathcal{F}}J^{-r}f\|_{L^p} \lesssim \|J^{-r}f\|_{L^p} = \|f\|_{W^{r,p}}$ eli $f \in W^{s,p}$. □

Vielä on jäljellä tärkeä tulos, joka osoittaa, että nyt esittelemäni murtosileys todella laajentaa perinteistä sileyden käsitettä.

Lause 5.1.12. *Murto-Sobolev-avaruudet yleistävät Sobolev-avaruuksia. Siis kaikille $p \in]1,\infty[$ ja $s \in \mathbb{N}$ on voimassa normien ekvivalenssi*

$$\|J^{-s}f\|_{L^p} \approx \max_{|\alpha|\leq s}\|\partial^\alpha f\|_{L^p}$$

Tulkinta on, että toinen puoli on määritelty jos ja vain jos toinenkin on.

Todistus. Olkoot $|\alpha| \leq s$. Ekvivalenssin toista suuntaa varten riittää arvioida $\|J^{-s}f\|_{L^p} \gtrsim \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$. Merkitsen $g = J^{-s}f \in L^p$, jolloin väite ottaa muodon $\|g\|_{L^p} \gtrsim \|\partial^\alpha J^s g\|_{L^p} = \|(p^\alpha k^{-s})_{\mathcal{F}}g\|_{L^p}$. Tämä pätee, koska $p^\alpha k^{-s}$ on L^p-Fourier-kertoja lemman 5.1.10 nojalla.

Käänteistä arviota varten $J^{-s} = k^s_{\mathcal{F}}$ on jaettava paloihin, joita voi arvioida derivaatoilla $\partial^\alpha = p^\alpha_{\mathcal{F}}$. Binomikaavan yleistyksellä tai yksinkertaisella induktiolla pätee

$$k^{2s} = \left(1+\sum_{j=1}^n |p_j|^2\right)^s = \sum_{|\alpha|\leq s} c_{s,\alpha}|p^\alpha|^2$$

joillakin kertoimilla $c_{s,\alpha}$. Nyt kolmioarviolla saadaan

$$\|J^{-s}f\|_{L^p} = \left\|\left(\frac{k^{2s}}{k^s}\right)_{\mathcal{F}}f\right\|_{L^p} = \left\|\sum_{|\alpha|\leq s}\left(\frac{c_{s,\alpha}\overline{p^\alpha}}{k^s}p^\alpha\right)_{\mathcal{F}}f\right\|_{L^p} \leq \sum_{|\alpha|\leq s} c_{s,\alpha}\left\|\left(\frac{\overline{p^\alpha}}{k^s}\right)_{\mathcal{F}}p^\alpha_{\mathcal{F}}f\right\|_{L^p}$$

Tässä $p^\alpha_{\mathcal{F}} = \partial^\alpha$, ja $\overline{p^\alpha}/k^s$ on L^p-Fourier-kertoja, kuten todistuksen ensimmäisessä suunnassa osoitin. Täten

$$\|J^{-s}f\|_{L^p} \leq \sum_{|\alpha|\leq s} c_{s,\alpha}\left\|\left(\frac{\overline{p^\alpha}}{k^s}\right)_{\mathcal{F}}\partial^\alpha f\right\|_{L^p} \lesssim \sum_{|\alpha|\leq s} c_{s,\alpha}\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \lesssim \max_{|\alpha|\leq s}\|\partial^\alpha f\|_{L^p}$$

jossa arviointien $\|(\overline{p^\alpha}k^{-s})_{\mathcal{F}}\partial^\alpha f\|_{L^p} \lesssim \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$ piilokertoimet voidaan ottaa samoiksi, koska α saa rajallisen määrän eri arvoja kiinteällä s. □

5.2 Littlewood-Paley-teoria

Littlewood-Paley-teoria tarjoaa työkalut joustavaan ja tarkkaan murtosileyden mittaamiseen. Sekin perustuu sileyden ja asymptoottinen vähenemisen vaihtumiseen Fourier-muunnoksessa, mutta siinä missä Bessel-potentiaali kytkeytyy suoraan derivaattaan kaavalla $J^{-2} = \mathrm{id} - \Delta$, Littlewood-Paley-teorian ideana eritellä ja tutkia taajuuksia. Temperoitu distribuutio paloitellaan

Fourier-puolella vyöhykkeisiin, mikä siellä diskretisoi muunnetun distribuution vähenemisen. Alkuperäisen distribuution kohdalla diskretisoituukin sileys eri taajuuksiksi. Tarkastelen teoriaa Triebel-Lizorkin- ja Besov-Lipschitz-avaruushierarkioiden kautta, jotka osoittavat lähestymistavan tarkkuuden pitämällä sisällään murto-Sobolev-avaruudet sekä seuraavassa alaluvussa esiteltävät Hölder-avaruudet.

Paloitteluun käytän annulaarista ykkösenositusta, jonka termit ovat toistensa venytyksiä. Koska ykkönen ositetaan Fourier-puolella suhteessa funktioon, jonka sileyttä tutkitaan, korostan tätä esittämällä leikkaavat kummut Fourier-muunnoksina joistakin Schwartz-funktioista. Tarkemmin olkoot säteittäinen kumpufunktio $\widehat{b} \in C_c^\infty$ kannateltu n-annuluksessa $\overline{B}(0,2) \setminus B(0,1/2)$ ja toteuttakoot yhtälön

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{b}(2^j x) = 1 \quad \text{kaikille } x \neq 0.$$

Tällaisia on olemassa, minkä näkee lähtemällä liikkeelle vähenevästä funktiosta $a \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, jolle $a]0,1] = \{1\}$ ja $a[2,\infty[= \{0\}$, ja määrittelemällä sitten $\widehat{b}(x) = a(|x|) - a(2|x|)$. Kiinnitän pysyvästi tällaisen $\widehat{b}$ parametriksi ja merkitsen

$$\widehat{b}_j(x) = \widehat{b}(2^{-j}x) \quad \text{jos } j \in \mathbb{Z}_+$$
$$\widehat{b}_0(x) = \sum_{j\leq 0} \widehat{b}(2^{-j}x), \quad \widehat{b}_0(0) = 1$$

Määritelmä 5.2.1. Temperoidun distribuution f Littlewood-Paley-osat ovat sen kuvat kumpujen $\widehat{b}_j$ Fourier-kertojaoperaattoreissa eli lausekkeet $b_j * f$ indekseille $j \in \mathbb{N}$.

Littlewood-Paley-osat nimensä mukaisesti osittavat distribuution: $f = \sum_j b_j * f$ temperoituina distribuutioina, mikä on helppo tarkistaa Fourier-puolen yhtälönä $\widehat{f} = \sum_j \widehat{b}_j \widehat{f}$. Ideana on, että $b_j * f$ esittää distribuution f taajuusluokan 2^j komponenttia. Korkeiden taajuuksien ollessa vahvasti edustettuina on distribuutio karkea, ja kääntäen. Käyttöön saadaan näin uusi parametri j, jonka suhteen tapahtuva vaihtelu kertoo jokseenkin suoraan distribuution sileydestä. Kuten edellisessä alaluvussa käsittelin Bessel-potentiaalia murto-Sobolev-avaruuksien kautta, tarkastelen myös Littlewood-Paley-osia rajoittuen seuraaviin niiden kautta määriteltyihin avaruusperheisiin.

Määritelmä 5.2.2. Olkoot $p,q \in [1,\infty]$, $s \in \mathbb{R}$ ja $\widehat{b}$ annulaarinen kumpufunktio kuten edellä. Triebel-Lizorkin-avaruuden muodostavat ne temperoidut distribuutiot, joilla on äärellinen Triebel-Lizorkin-normi

$$\|f\|_{F_q^{s,p}} := \|x \mapsto \|j \mapsto 2^{sj}(b_j * f)(x)\|_{l^q}\|_{L^p}$$

Vastaavasti Besov-Lipschitz-avaruuden muodostavat ne temperoidut distribuutiot, joilla on äärellinen Besov-Lipschitz-normi

$$\|f\|_{B_q^{s,p}} := \|j \mapsto \|2^{sj} b_j * f\|_{L^p}\|_{l^q}$$

Triebel-Lizorkin-avaruudet yleistävät murto-Sobolev-avaruuksia, mikä on tämän luvun päätuloksia. Besov-Lipschitz-avaruudet liittyvät murto-Sobolev-avaruuksiin epäsuoremmin ja nousevat esiin interpoloitaessa niitä [3]. Lisäksi L^p-normin esiintyminen sisempänä normina on usein laskuteknisesti helpompaa, mistä Besov-Lipschitz- ja Triebel-Lizorkin-avaruuksien vahvan yhteyden takia voi olla hyötyä pelkkiä Triebel-Lizorkin-avaruuksiakin tutkittaessa. Esimerkiksi jo merkinnöiden vihjaama fakta, että $B_q^{s,p}$ on riippumaton parametrista b, on huomattavasti helpompi todistaa kuin avaruudelle $F_q^{s,p}$.

Todistus on seuraava: Olkoot β toinen mahdollinen kumpu. Sitten kantajarajoitteista johtuen $\widehat{b}_j\widehat{\beta}_l = 0$ kun $|j-l| \geq 2$. Yhdistämällä tämä yhtälöön $\sum_l \widehat{\beta}_l = 1$ tulee voimaan $\widehat{b}_j = \widehat{b}_j \sum_l \widehat{\beta}_l = \widehat{b}_j(\widehat{\beta}_{j-1} + \widehat{\beta}_j + \widehat{\beta}_{j+1})$ kaikille $j \geq 1$. Tapaus $j = 0$ saadaan saman kaavan alle määrittelemällä $\widehat{\beta}_{-1} = 0$. Tällainen kummun leventäminen on muuten hyödyllistä useaan otteeseen myöhemminkin erikoistapauksessa $\beta = b$. Nyt pätee

$$\|2^{sj} b_j * f\|_{L^p} \le \sum_{a=-1,0,1} \|2^{sj} b_j * \beta_{j+a} * f\|_{L^p} \lesssim \sum_{a=-1,0,1} \|2^{sj+sa} \beta_{j+a} * f\|_{L^p}$$

jossa käytetään konvoluutioarviota $\|g*h\|_{L^p} \le \|g\|_{L^1} \|h\|_{L^p}$ ja faktaa, että $\|b_j\|_{L^1}$ on vakio indekseille $j \ge 1$. Sitten l^q-normin kolmioarvio osoittaa, että

$$\|j \mapsto \|2^{sj} b_j * f\|_{L^p}\|_{l^q} \lesssim \sum_{a=-1,0,1} \|j \mapsto \|2^{sj+aj} \beta_{j+a} * f\|_{L^p}\|_{l^q} \le 3\|j \mapsto \|2^{sj} \beta_j * f\|_{L^p}\|_{l^q}$$

Käänteinen arvio normien ekvivalenssia varten seuraa symmetriasta. Huomaa, että ekvivalenssia hienosyisemmin b voi vaikuttaa normeihin. Vastaava tulos Triebel-Lizorkin-avaruuksille on paljon monimutkaisempi ja vaatisi lisätekniikoita, joita en tässä tekstissä käsittele, joten kiinnostuneen lukijan on perehdyttävä muuhun kirjallisuuteen kuten [2].

Sileysparametrin s suhteen normit $\|\cdot\|_{F^{s,p}_q}$ ja $\|\cdot\|_{B^{s,p}_q}$ ovat tekijän 2^{sj} johdosta kasvavia, ja avaruudet siis pieneneviä. Integroituvuusparametri p vaikuttaa L^p-normin kautta samaan tyyliin kuin L^p-avaruuksissa. Kolmannen parametrin q suhteen normit ovat l^q-normin vaikutuksesta väheneviä. Tämä parametri hienosäätää sileyttä ja tuo sileysparametriin s ns. infinitesimaalisen lisän ollessaan sille alisteinen. Nimittäin kaikille $\varepsilon > 0$ pätevät sisältyvyydet $F^{s,p}_q \subseteq F^{s-\varepsilon,p}_r$ ja $B^{s,p}_q \subseteq B^{s-\varepsilon,p}_r$, jotka ovat vahvimmillaan ja helpoimmat todistaa kun $q = \infty$ ja $r = 1$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{F^{s-\varepsilon,p}_1} &= \Big\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon j} |2^{sj} b_j * f| \Big\|_{L^p} \le \Big\| \frac{1}{1-2^{-\varepsilon}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |2^{sj} b_j * f| \Big\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{F^{s,p}_\infty} \\
\|f\|_{B^{s-\varepsilon,p}_1} &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon j} \|2^{sj} b_j * f\|_{L^p} \le \frac{1}{1-2^{-\varepsilon}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \|2^{sj} b_j * f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{B^{s,p}_\infty}
\end{aligned}$$

Samoilla parametreilla Triebel-Lizorkin- ja Besov-Lipschitz-avaruudet ovat aina verrannolliset seuraavan lauseen mukaisesti. Visualisoituna Besov-Lipschitz-avaruudet muuttuvat jyrkemmin parametrin q suhteen ja kohtaavat Triebel-Lizorkin-avaruudet kun $q = p$. Tätä voidaan toisinaan käyttää Triebel-Lizorkin-avaruuksia koskevien väitteiden johtamiseen yleensä helpommin käsiteltävistä Besov-Lipschitz-avaruuksista. Esimerkiksi jos $f \in B^{s,p}_1$, niin $f \in F^{s,p}_q$ kaikille $q \in [1,\infty]$.

Lause 5.2.3. *$B^{s,p}_q \subseteq F^{s,p}_q$ kun $q \le p$ ja $B^{s,p}_q \supseteq F^{s,p}_q$ kun $q \ge p$, erityisesti $B^{s,p}_p = F^{s,p}_p$.*

Todistus. Lauseen kohdat ovat oleellisesti identtiset yleistyksen $l^q = L^q(\mathbb{N},\#)$ jälkeen, jossa $\#$ on lukumäärämitta. Oletan $q \le p$ ja osoitan, että $\|f\|_{F^{s,p}_q} \le \|f\|_{B^{s,p}_q}$. Jos $p = q = \infty$, on kyse triviaalista supremumien vaihdannaisuudesta, joten oletan lisäksi $q < \infty$. Ratkaiseva askel on avata L^q-normi integraaliksi ja vaihtaa tämä $L^{p/q}$-normin kanssa. Tähän tarvitsen arviota

$$\Big\|y \mapsto \int F_x(y)dx\Big\|_{L^{p/q}} \le \int \|F_x\|_{L^{p/q}} dx$$

jossa $F_x(y)$ on, sanotaan, jatkuva muuttujien x ja y suhteen. Olkoot r ja p/q toistensa duaalieksponentit, jolloin $\|g\|_{L^{p/q}} = \sup\big\{|\langle X, g\rangle| \,\big|\, X \in L^r, \|X\|_{L^r} = 1\big\}$ (myös kun $p = \infty$, muuten yksittäinenkin X riittäisi per g). Näin normi vaihtuu lineaarikuvaukseksi, ja vaihto onnistuu Fubinin lauseella:

$$\Big|\Big\langle X, y \mapsto \int F_x(y)dx \Big\rangle\Big| = \Big|\int\int X(y)F_x(y)dx\, dy\Big| \le \int\Big|\int X(y)F_x(y)dy\Big|dx = \int |\langle X, F_x\rangle| dx$$

Liitän vielä supremumin mukaan ja käytän Hölderin arviota saaden

$$\Big\|y \mapsto \int F_x(y)dx\Big\|_{L^{p/q}} = \sup_{\|X\|_{L^r}=1} \Big|\Big\langle X, y \mapsto \int F_x(y)dx\Big\rangle\Big| \le \sup_{\|X\|_{L^r}=1} \int \|X\|_{L^r} \|F_x\|_{L^{p/q}} dx = \int \|F_x\|_{L^{p/q}} dx$$

Lyhennän $E \equiv |2^{sj}\Delta_j f(x)|$ ja johdan pääväitteen nokkelalla laskulla

$$\|f\|_{F^{s,p}_q} = \|x \mapsto \|j \mapsto E\|_{L^q}\|_{L^p} = \Big\|x \mapsto \big(\int E^q dj\big)^{1/q}\Big\|_{L^p} = \Big\|x \mapsto \int E^q dj\Big\|^{1/q}_{L^{p/q}} \leq$$
$$\leq \big(\int \|x \mapsto E^q\|_{L^{p/q}} dj\big)^{1/q} = \|j \mapsto \|x \mapsto E\|_{L^p}\|_{L^q} = \|f\|_{B^{s,p}_q}$$

□

Esimerkki 5.2.4. $\delta_0 \in B^{s,p}_q$ jos ja vain jos $s + n/p' < 0$ tai $s + n/p' = 0$ ja $q = \infty$ (“ja” on sitovampi kuin “tai”), jossa p' on duaali eksponentille p. Tämän todistaminen käy suoraviivaisesti. Kun $p < \infty$ ja $j \geq 1$ lasken:

$$\|2^{sj} b_j * \delta_0\|^p_{L^p} = 2^{spj} \int_{\mathbb{R}^n} |2^{nj} b(2^j x)|^p dx = 2^{spj+npj} \int_{\mathbb{R}^n} |b(x)|^p 2^{-nj} dx = (2^{pj})^{s+n/p'} \|b\|^p_{L^p}$$

Yhtälö $\|2^{sj} b_j * \delta_0\|_{L^p} = (2^j)^{s+n/p'} \|b\|_{L^p}$ pätee myös kun $p = \infty$. Ensimmäinen Littlewood-Paley-osa on merkityksetön äärellinen vakio, koska $b_0 * \delta_0 = b_0$ on Schwartz-funktio. Siis $\delta_0 \in B^{s,p}_q$ jos ja vain jos $((2^j)^{s+n/p'})^\infty_{j=1} \in l^q$. Tämä taas pätee jos ja vain jos joko $s + n/p' < 0$, jolloin jono suppenee eksponentiaalisesti, tai $s + n/p' = 0$ ja $q = \infty$, jolloin kyseessä on vakiojono.

Edellisen lauseen turvin voin nyt vetää johtopäätöksiä myös siitä, milloin $\delta_0 \in F^{s,p}_q$. Jos $s + n/p' < 0$, niin $\delta_0 \in B^{s,p}_1 \subseteq F^{s,p}_1 \subseteq F^{s,p}_q$ kaikille $q \in [1,\infty]$. Jos puolestaan $s + n/p' > 0$ tai $s + n/p' = 0$ ja $p, q < \infty$, niin $\delta_0 \notin B^{s,p}_{\max\{p,q\}} \supseteq F^{s,p}_q$. Auki jää vielä tapaus $s + n/p' = 0$, jossa lisäksi $p = \infty$ tai $q = \infty$, paitsi, että jos $p = q = \infty$, niin $\delta_0 \in B^{s,\infty}_\infty = F^{s,\infty}_\infty$.

Oletan ensin, että $p = \infty$, $q < \infty$ ja $s + n = 0$. Tässä tapauksessa Triebel-Lizorkin-normi on äärellinen, jos lauseke

$$\sum_{j=1}^\infty |2^{sj} b_j(x)|^q = \sum_{j=1}^\infty |2^{sj+nj} b(2^j x)|^q = \sum_{j=1}^\infty |b(2^j x)|^q$$

on rajoitettu—ensimmäinen Littlewood-Paley-osa oli jälleen triviaalia sivuuttaa. Koska $b(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{b} > 0$, sarja ilmeisesti hajaantuu kun $x = 0$, ja $\delta_0 \notin F^{s,\infty}_q$.

Olkoot sitten $p < \infty$, $q = \infty$ ja $s + n/p' = 0$. Nyt ehtona on, että $\sup_j 2^{sj}|b_j|$ on p-integroituva. Koska b on säteittäisen funktion $\widehat{b}$ Fourier-muunnoksena säteittäinen, löytyy ohut n-annulus $A \subseteq \mathbb{R}^n$ siten, että $|b|_A| \geq m \in \mathbb{R}_+$. Sitten $|b_j|_{2^{-j}A}| \geq 2^{nj} m$ kaikille $j \geq 1$, ja

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{sj}|b_j|\Big)^p \geq \sum_{j=1}^\infty 2^{-nj} \mathcal{M}A \cdot 2^{spj+npj} m^p = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{M}A \cdot m^p = \infty$$

osoittaen jälleen, että $\delta_0 \notin F^{s,p}_\infty$. Siis kootusti $\delta_0 \in F^{s,p}_q$ jos ja vain jos $s + n/p' < 0$ tai $s + n/p' = 0$ ja $p = q = \infty$.

Käänteislukufunktion, tulkittuna distribuutiona $\mathrm{inv} = \partial \log|\cdot|$, Fourier-muunnos on $-\pi i \,\mathrm{sign}$ kuten aiemmin osoitin. Näin ollen inv ja δ_0 käyttäytyvät samoin Fourier-puolella normituksessa tyypillisen itseisarvo-operaation jälkeen. Ne kuuluvatkin pääasiassa samoihin Besov-Lipschitz- ja Triebel-Lizorkin-avaruuksiin muutamalla poikkeuksella. Keskeistä on, että inv ja δ_0 venyvät samalla tavalla, jolloin

$$(b_j * \mathrm{inv})(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} 2^j b(2^j y) \log|x - y| dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} b(y)(\log|2^j x - y| + \log 2^{-j}) dy = 2^j (b * \mathrm{inv})(2^j x)$$

kaikille $j \geq 1$. Tässä $b * \mathrm{inv}$ on Schwartz, koska sen Fourier-muunnos $-\pi i \widehat{b}\,\mathrm{sign}$ on sileä ja kompaktisti kannateltu rajoitteen $\mathrm{spt}\,\widehat{b} \subseteq \overline{B}(0,2) \setminus B(0, 1/2)$ johdosta. Dirac-distribuution δ_0 analyysi voidaan nyt pääpiirteissään toistaa käyttäen konvoluutiota $b * \mathrm{inv}$ funktion b paikalla. Kaksi poikkeamaa ilmenee.

Ensinnäkään $b_0 * \mathrm{inv}$ ei nyt ole Schwartz, vaikka onkin sileä. Itse asiassa $\mathcal{F}(b_0 * \mathrm{inv}) = -\pi i \widehat{b_0}\,\mathrm{sign}$ on epäjatkuva, joten Riemann-Lebesgue-lemman 4.1.3 nojalla $b_0 * \mathrm{inv}$ ei ole integroituva. Siis $\mathrm{inv} \notin B^{s,1}_q \supseteq F^{s,1}_q$. Kun $p > 1$, on $b_0 * \mathrm{inv}$ kuitenkin p-integroituva, minkä näkee esittämällä inv summana kompaktisti kannatellusta piikkiosasta P ja rajoitetusta hännästä H. Tällöin $b_0 * P \in \mathcal{S}$ ja $\|b_0 * \mathrm{inv}\|_{L^p} \leq \|b_0 * P\|_{L^p} + \|b_0\|_{L^1} \|H\|_{L^p} < \infty$.

Toinen eroavaisuus on tapaus $p=\infty$, $q<\infty$ ja $s=-1$. Nimittäin siinä missä $b(0)>0$ päteekin $(b*\mathrm{inv})(0)=0$, mikä johtaa päinvastaiseen lopputulokseen. Riittää tarkastella positiivisia $x\in\mathbb{R}$, joille sileyden turvin saadaan arvio $|(b*\mathrm{inv})(x)|\lesssim \min\{|x|,|x|^{-1}\}$. Nyt

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(b*\mathrm{inv})(2^jx)|\lesssim \sum_{j=-\infty}^{\infty}\min\{|2^jx|,|2^jx|^{-1}\}\le 2\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}=4$$

katkaisemalla sarja suurimman termin kohdalta, joten $\mathrm{inv}\in F_q^{-1,\infty}$. Nämä päätelmät paljastavat myös milloin $\delta_0,\mathrm{inv}\in W^{s,p}$, sillä seuraava lause liittää murto-Sobolev-avaruudet osaksi Triebel-Lizorkin-avaruuksien hierarkiaa.

Lause 5.2.5. *Olkoot $s\in\mathbb{R}$ ja $1<p<\infty$. Tällöin murto-Sobolev-avaruus $W^{s,p}$ sisältää samat distribuutiot kuin Triebel-Lizorkin-avaruus $F_2^{s,p}$, ja lisäksi normit ovat ekvivalentit $\|\cdot\|_{W^{s,p}}\approx\|\cdot\|_{F_2^{s,p}}$.*

Todistus. Riittää tietenkin osoittaa normilausekkeiden verrannollisuus. Aloitan arviosta $\|\cdot\|_{F_2^{s,p}}\lesssim\|\cdot\|_{W^{s,p}}=\|J^{-s}(\cdot)\|_{L^p}$. Vaativan osuuden saan olettamastani Mihlinin l^2-kertojalauseesta 5.1.9. Käännän Bessel-potentiaalin relaation toiselle puolelle ja lasken:

$$\|J^sf\|_{F_2^{s,p}}=\|x\mapsto\|j\mapsto 2^{sj}(b_j*\widehat{k^{-s}}*f)(x)\|_{l^2}\|_{L^p}=\left\|\sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}\left|\mathcal{F}(2^{sj}k^{-s}\widehat{b}_j)*f\right|^2}\right\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^p}$$

jossa viimeisen arvion edellytys on Mihlinin lauseen mukaisesti

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\partial^\alpha(2^{sj}k^{-s}\widehat{b}_j)\right|^2\lesssim|\cdot|^{-2|\alpha|}\tag{ehto}$$

aina kun $|\alpha|\le\lfloor n/2\rfloor+1$. Sarjan termit ovat sileitä ja kompaktisti kannateltuja, joten yksittäisinä ne toteuttavat vaaditun arvion triviaalisti, ja haaste tulee skaalautumisesta j:n funktiona. Tästä havainnosta on se hyöty, että voin jättää poikkeavan indeksin $j=0$ termin sivuun.

Kummun $\widehat{b}_j$ kantajalla on keskeinen rooli kaavan (*ehto*) todistamisessa. Ensinnäkin sarjasta päästään eroon, koska sen termit menevät päällekkäin vain vähän. Tarkemmin $\operatorname{spt}\partial^\alpha(2^{sj}k^{-s}\widehat{b}_j)\subseteq\operatorname{spt}\widehat{b}_j\subseteq\overline{B}(0,2^{j+1})\setminus B(0,2^{j-1})$, ja $\partial^\alpha(2^{sj}k^{-s}\widehat{b}_j)$ poikkeaa nollasta siis vain avoimessa annuluksessa $B(0,2^{j+1})\setminus\overline{B}(0,2^{j-1})$. Parillisille eriäville indekseille nämä annulukset ovat erilliset, ja vastaavasti parittomille indekseille. Jos siis $|\partial^\alpha(2^{sj}k^{-s}\widehat{b}_j)|\le C_{n,s,b}|\cdot|^{-|\alpha|}$, niin summaamalla parilliset ja parittomat termit erikseen pätee (*ehto*) piilokertoimella $2C_{n,s,b}^2$ ilman sarjan ensimmäistä termiä.

Seuraavaksi kummun $\widehat{b}_j$ kantajassa saadaan rajat lausekkeelle $k^{-s}(x)=(1+|2\pi x|^2)^{-s/2}$. Kun $2^{j-1}\le|x|\le2^{j+1}$, niin

$$2^{-sj-5s/2}\pi^{-s}=(2^{2j+4}\pi^2+2^{2j+4}\pi^2)^{-s/2}\le k(x)^{-s}\le(0+2^{2j}\pi^2)^{-s/2}=2^{-sj}\pi^{-s}$$

Siis k^{-s} juurikin kumoaa painokertoimen 2^{sj}, ja jäljelle jäävä $\widehat{b}_j(x)=\widehat{b}(2^{-j}x)$ on rajoitettu. Tapaus $\alpha=0$ oli tässä. Derivaatat käsitellään yllätyksettömästi: Tulon derivointisäännön mukaisesti derivoidaan joko rationaalifunktiota alkaen k^{-s}:stä tai testifunktiota alkean $\widehat{b}_j$:stä. Ensimmäinen muuttuu asymptoottisesti tekijällä $\approx|\cdot|^{-1}$ ja toinen kertoimella $2^{-j}\approx|\cdot|^{-1}$ kantajalle antamieni rajojen pysyessä samoina. Koska derivointeja riittää toistaa äärellinen määrä $\lfloor n/2\rfloor+1$, on kiinnitettävä huomiota vain indeksistä j riippuviin kertoimiin, kuten juuri tein. Nyt (*ehto*) ja edelleen puolet normien ekvivalenssista $\|\cdot\|_{F_2^{s,p}}\lesssim\|\cdot\|_{W^{s,p}}$ on todistettu.

Toisen puolen ekvivalenssista saan ensimmäisestä duaalisuusargumentilla. Olkoot $q=p/(p-1)$ duaali eksponentille p. Avaan $W^{s,p}$-normin tuloksi $W^{-s,q}$-alkion kanssa 5.1.3, jonka jälkeen pääsen Fourier-puolelle itseliittoisuuden ja käänteiskaavan avulla.

$$\|f\|_{W^{s,p}}=\sup_{\|g\|_{W^{-s,q}}=1}|\langle g,f\rangle|=\sup_{\|g\|_{W^{-s,q}}=1}|\langle\widehat{Rg},\widehat{f}\rangle|\tag{normi$\to\langle,\rangle$}$$

Seuraavaksi lisään kumpufunktiot $\widehat{b}_j$ mukaan tekijöiksi, ja sitten arvioin tuloa Triebel-Lizorkin-normien tulolla. Summalla $\sum_j\widehat{b}_j=1$ voi tietenkin vapaasti kertoa, mutta tarvitsen lisätekijät molemmille distribuutioille f ja g. Tässä auttaa yhtälö $\widehat{b}_j=\widehat{c}_j\widehat{b}_j$, jossa $\widehat{c}_j=\widehat{b}_{j-1}+\widehat{b}_j+\widehat{b}_{j+1}$, joka seuraa kantajarajoitteesta $\operatorname{spt}\widehat{b}_j\subseteq\overline{B}(0,2^{j+1})\setminus B(0,2^{j-1})$ kaikille $j\ge1$. Tapaus

$j=0$ saadaan saman kaavan alle määrittelemällä $\widehat{b}_{-1}=0$. Nyt

$$\langle \widehat{Rg}, \widehat{f}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_j \widehat{b}_j \langle \widehat{Rg}, \widehat{f}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle 2^{-sj}\mathcal{F}^{-1}c_j \cdot \mathcal{F}^{-1}g,\ 2^{sj}\widehat{b}_j \cdot \widehat{f}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle 2^{-sj}c_j * g, 2^{sj}b_j * f\rangle$$

Sitten Schwartzin arvio jättää jälkeensä Triebel-Lizorkin-normin l^2-osan, ja yleisempi Hölderin arvio L^p-osan:

$$|\langle \widehat{Rg}, \widehat{f}\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} |2^{-sj}c_j * g||2^{sj}b_j * f| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{-sj}c_j * g|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{sj}b_j * f|^2\Big)^{1/2} \leq$$
$$\leq \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{-sj}c_j * g|^2\Big)^{1/2} \Big\|_{L^q} \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{sj}b_j * f|^2\Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \leq (2^s+1+2^{-s})\|g\|_{F_2^{-s,q}} \|f\|_{F_2^{s,p}}$$

Lopuksi $\|g\|_{F_2^{-s,q}} \lesssim 1$ kun $\|g\|_{W^{-s,q}}=1$ todistuksen alkupuolen nojalla, joten yhdistämällä viimeisin arvio kaavaan (*normi*$\to\langle,\rangle$) saadaan toinenkin puoli ekvivalenssista $\|\cdot\|_{F_2^{s,p}} \approx \|\cdot\|_{W^{s,p}}$ todistetuksi. □

5.3 Hölder-avaruudet

Hölder-jatkuvuus on itse asiassa murtosileyden muoto, joka ei edellytä Fourier-teoriaa sen enempää kuin edes differentiaalilaskentaa. Käsitteen alkeellisuuden ansiosta sen voi esittää hyvin yleisessä kontekstissa.

Määritelmä 5.3.1. Metristen avaruuksien X ja Y välinen funktio $f \in X \to Y$ on s-Hölder-jatkuva ($s>0$), jos on olemassa $C>0$ siten, että $d(f(x),f(y)) \leq Cd(x,y)^s$ kaikille $x,y \in X$.

Euklidisessa avaruudessa Hölder-jatkuvuus on kiinnostavaa vain eksponenteille $s \in]0,1]$. Jos näet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin, ja $f \in \Omega \to Y$ on s-Hölder-jatkuva jollekin $s>1$, niin f on vakio. Tämä seuraa siitä, että kun lähekkäisille pisteille x ja y löytyy puoliväli $z=(x+y)/2$, niin Hölder-jatkuvuuden kerrointa voidaan aina parantaa arvioimalla $d(f(x),f(y)) \leq C|x-z|^s + C|z-y|^s = C2^{1-s}|x-y|^s$. Hieman muokkaamalla määritelmää on kuitenkin mahdollista saada Hölder-jatkuvuus paremmin vastaamaan jo esillä olleita sileyden määritelmiä suurillakin sileyseksponentin arvoilla. Idea, joka esiintyy sellaisenaan myös käytännössä, on vaatia kertaluvun $\lfloor s \rfloor$ derivaattojen olevan $(s-\lfloor s \rfloor)$-Hölder-jatkuvia. Tässä korvaan kuitenkin lähdettäni [2] mukaillen derivaatan erotusosamäärällä. Esimerkiksi kun $1<s<2$ tuloksena on ehto

$$\Big|\frac{f(x+(x-y))-f(y+(x-y))}{x-y} - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big| \lesssim |x-y|^{s-1} \quad \text{eli} \quad |f(x+(x-y))-2f(x)+f(y)| \lesssim |x-y|^s$$

jossa jälkimmäinen muoto toimii myös kun x ja y ovat vektoreita. Määrittelen tarkasti tämän Hölder-jatkuvuuden muunnelman Hölder-avaruuksien muodossa.

Määritelmä 5.3.2. Olkoot $s>0$. Hölder-avaruus C_*^s muodostuu niistä funktioista $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, joilla on äärellinen Hölder-normi

$$\|f\|_{C_*^s} := \|f\|_{L^\infty} + \sup_{t \neq 0} |t|^{-s} \|d_t^{\lfloor s \rfloor + 1} f\|_{L^\infty}$$

jossa $d_t f(x) = f(x+t) - f(x)$.

Hölder-normissa esiintyvä supremumlauseke on pienin C siten, että $|d_{|x-y|}^{\lfloor s \rfloor} f(x+v) - d_{|x-y|}^{\lfloor s \rfloor} f(y+v)| \leq C|x-y|^s$ kaikille $x,y,v \in \mathbb{R}^n$. Ensimmäinen termi $\|f\|_{L^\infty}$ on mukana, jotta nollasta poikkeavat vakiofunktiot saavat positiivisen normin. Lipschitz- on toki sama kuin 1-Hölder-jatkuvuus. Kuitenkaan $C_*^1(\Omega)$ ei ole Lipschitz-avaruus, koska erotusoperaatio d_t lasketaan $\lfloor 1 \rfloor + 1 = 2$ kertaa. Tämä on tarkoituksellista, jotta Hölder-avaruudet sopisivat Triebel-Lizorkin-skaalaan. C_*^1 tunnetaan Zygmund-avaruutena, ja koska $\|d_t^2 f\|_{L^\infty} \leq 2\|d_t f\|_{L^\infty}$, se sisältää Lipschitz-funktiot.

Lause 5.3.3. *Olkoot $s > 0$. Tällöin Hölder-avaruus C^s_* sisältää samat funktiot kuin $F^{s,\infty}_\infty = B^{s,\infty}_\infty$, ja normit ovat ekvivalentit:*

$$\|f\|_{C^s_*} \approx \|f\|_{F^{s,\infty}_\infty} = \|f\|_{B^{s,\infty}_\infty} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|2^{sj} b_j * f\|_{L^\infty}$$

Todistus. Haasteeton yhtälö $\|\cdot\|_{F^{s,\infty}_\infty} = \|\cdot\|_{B^{s,\infty}_\infty}$ on todistettu jo aiemmin. Olkoot $k = \lfloor s \rfloor + 1 > s$. On myös hyödyllistä määritellä venytysoperaattori 2_j kaavalla $\langle 2_j f, \varphi\rangle = \langle f, x \mapsto \varphi(2^{-j}x)\rangle$, jotta funktioiden $b_j = 2_j b$ ($j \geq 1$) venytyksiä on helppo siirrellä lausekkeiden eri osiin.

Todistan ensin $\|f\|_{C^s_*} \lesssim \|f\|_{B^{s,\infty}_\infty}$. Olkoot $\widehat{c}_0 = \widehat{b}_0 + \widehat{b}_1$ ja $\widehat{c}_j = \widehat{b}_{j-1} + \widehat{b}_j + \widehat{b}_{j+1}$ positiivisille j, jolloin pätee $\widehat{c}_j \widehat{b}_j = \widehat{b}_j$ kaikille $j \in \mathbb{N}$. Nyt voidaan kirjoittaa $f = \sum_j b_j * f = \sum_j c_j * b_j * f$. Tästä konvoluutiohajotelmasta on se hyöty, että Hölder-normin mukanaan tuoma erotusoperaattori d^k_t voidaan siirtää konvoluution ylimääräiseen hallittuun tekijään c_j.

$$\|d^k_t f\|_{L^\infty} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \|d^k_t(c_j * b_j * f)\|_{L^\infty} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|d^k_t c_j * b_j * f\|_{L^\infty} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \|d^k_t c_j\|_{L^1} \|b_j * f\|_{L^\infty} \qquad (d^k_t siirto)$$

Arvioin kerrointa $\|d^k_t c_j\|_{L^1}$ kahdella eri tavalla. Ensinnäkin triviaalisti $\|d_t g\|_{L^1} \leq \|T_{-t} g\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} = 2\|g\|_{L^1}$ kaikille $g \in L^1$, jota toistamalla $\|d^k_t c_j\|_{L^1} \leq 2^k \|c_j\|_{L^1} \approx 1$, koska $\|c_j\|_{L^1}$ on vakio kun $j \geq 2$. Tämä on hyvä arvio suurelle t, mutta kun t on pieni, erotuksen $T_{-t} g - g = d_t g$ termien kumoava vaikutus jää huomiotta. Toisessa arviossa otan kumoutumisen huomioon derivaatan avulla. Tämäkin arvio on iteratiivinen, mutta nyt vaihtuvalla maalijoukolla, minkä takia tarkastelen kompleksiarvoisen sijasta vektoriarvoista funktiota $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to V)$ äärellisulotteiselle normiavaruudelle V.

$$\begin{aligned}\|d_t g\|_{L^1(\to V)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \|g(x+t) - g(x)\|_V \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 \|Dg(x+rt)\|_{\mathcal{L}(\to V)} |t| \, dr \, dx = \\ &= |t| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \|Dg(x)\|_{\mathcal{L}(\to V)} \, dx \, dr = |t| \|Dg\|_{L^1(\to \mathcal{L}(\to V))}\end{aligned}$$

Koska d_t on vaihdannainen kokonaisdifferentiaalin D kanssa, niin iteroimalla saadaan $\|d^k_t g\|_{L^1} \leq |t|^k \|D^k g\|_{L^1}$. Siis

$$\|d^k_t c_j\|_{L^1} \leq |t|^k \|D^k 2_j 2_{-j} c_j\|_{L^1} = |t|^k \|2^{jk} 2_j D^k 2_{-j} c_j\|_{L^1} = |t|^k 2^{jk} \|D^k 2_{-j} c_j\|_{L^1} \approx |2^j t|^k$$

jossa $2_{-j} c_j = 2_{-l} c_l$ kun $j, l \geq 2$. Kokonaisuudessaan kertoimelle $\|d^k_t c_j\|_{L^1}$ pätee nyt

$$\|d^k_t c_j\|_{L^1} \lesssim \min\{1, |2^j t|^k\}$$

ja sijoittamalla ensimmäiseen arvioon ($d^k_t siirto$) saadaan

$$\begin{aligned}\|f\|_{C^s_*} - \|f\|_{L^\infty} &= \sup_{t\neq 0} |t|^{-s} \|d^k_t f\|_{L^\infty} \lesssim \sup_{t\neq 0} |t|^{-s} \sum_{j\in\mathbb{N}} \min\{1, |2^j t|^k\} \|b_j * f\|_{L^\infty} \leq \\ &\leq \Big(\sup_{t\neq 0} \sum_{j\in\mathbb{N}} \min\{|2^j t|^{-s}, |2^j t|^{k-s}\}\Big) \sup_{j\in\mathbb{N}} \|2^{sj} b_j * f\|_{L^\infty} \lesssim \sup_{j\in\mathbb{N}} \|2^{sj} b_j * f\|_{L^\infty} = \|f\|_{B^{s,\infty}_\infty}\end{aligned}$$

Sarjan $\sum_j \min\{|2^j t|^{-s}, |2^j t|^{k-s}\}$ arvon rajoittamiseksi huomataan, että suurin termi on ≤ 1. Pois päin maksimista termit suppenevat eksponentiaalisesti, koska $-s < 0$ ja $k - s > 0$. Tämä takaa kiinteän ylärajan $1/(1-2^{-s}) + 1/(1-2^{s-k})$. Lopuksi muistetaan vielä rajoittaa L^∞-normi

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \|c_j\|_{L^1} \|b_j * f\|_{L^\infty} \approx \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-sj} \|2^{sj} b_j * f\|_{L^\infty} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-sj} \|f\|_{B^{s,\infty}_\infty} \approx \|f\|_{B^{s,\infty}_\infty}$$

Käänteisen arvion $\|f\|_{C^s_*} \gtrsim \|f\|_{B^{s,\infty}_\infty}$ todistuksessa Fourier-muunnos saa jälleen tärkeän osan. Ensin käsittelen Besov-

Lipschitz-normin poikkeavan ensimmäisen termin pois alta:

$$\|b_0 * f\|_{L^\infty} \leq \|b_0\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{C^s_*}$$

Kun $j \geq 1$, yksinkertaistan termien $\|2^{sj} b_j * f\|_{L^\infty}$ arviointia siirtämällä venytykset b:stä f:ään, johon ne f:n mielivaltaisuuden takia häviävät. On jokseenkin vääjäämätöntä, että tällainen muunnos toimii, koska ekvivalenttien normien on skaalauduttava samoin. Suora lasku osoittaa, että

$$\|2^{sj} 2_j b * f\|_{L^\infty} = 2^{sj+nj} \|b * 2_{-j} f\|_{L^\infty} \quad \text{ja} \quad \sup_{t \neq 0} |t|^{-s} \|d_t^k f\|_{L^\infty} = 2^{sj+nj} \sup_{t \neq 0} |t|^{-s} \|d_t^k 2_{-j} f\|_{L^\infty}$$

Vaihtamalla f:ksi $2_{-j} f$ riittää siis osoittaa, että $\|b * f\|_{L^\infty} \lesssim \sup_{|t|=1/3} \|d_t^k f\|_{L^\infty}$, jossa jo tulevaa varten valitsin $|t| = 1/3$.

Fourier-puolella operaattori d_t^k ottaa funktiolla $(e_t - 1)^k$ kertomisen muodon, koska $T_{-t} f = \mathcal{F}^{-1}(e_t \cdot \widehat{f})$. Jos $\widehat{b}$ olisi jaettavissa $(e_t - 1)^k$:lla, voitaisiin laskea

$$b * f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{b}\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{b}(e_t - 1)^{-k}(e_t - 1)^k \widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{b}(e_t - 1)^{-k}) * d_t^k f$$

mikä juurikin mahdollistaisi $\|b * f\|_{L^\infty}$:n arvioinnin $\|d_t^k f\|_{L^\infty}$:llä. Funktiolla $(e_t - 1)^k$ on kuitenkin nollakohtia, jotka itse asiassa muodostavat parven yhdensuuntaisia hypertasoja $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, t \bullet x \in \mathbb{Z}\}$. Ongelmallisia nämä ovat vain osuessaan kummun $\widehat{b}$ kantajaan $\operatorname{spt}\widehat{b} \subseteq \overline{B}(0,2) \setminus B(0,1/2)$. Kun $|t| = 1/3$, on hypertasojen välinen etäisyys parvessa $3 > 2$, jolloin vain origon kautta kulkeva taso leikkaa $\operatorname{spt}\widehat{b}$:tä. Ratkaisu nollakohtien välttämiseksi on jakaa $\widehat{b}$ paloihin, joilla on pienemmät kantajat, ja valita kullekin palalle sopiva eri t. Tarkemmin peitetään $\operatorname{spt}\widehat{b}$ avoimilla joukoilla $(U_m)_{m=1}^M$, joista kullekin on olemassa $t_m \in S(0,1/3)$ siten, ettei funktiolla $e_{t_m} - 1$ ole nollakohtia joukossa U_m. Joukot U_m löytyvät kompaktiusargumentilla, tai ne voidaan konkreettisesti valita origokeskisen hyperkuution tahkojen mukaisten sektorien pullistumiksi. Esitetään $\widehat{b}$ nyt ykkösenosituksen mukaisesti summana

$$\widehat{b} = \sum_{m=1}^M B_m \quad \text{jossa } \operatorname{spt} B_m \subseteq U_m.$$

Erityisesti $B_m(e_{t_m} - 1)^{-k}$ on määritelty Schwartz-funktio, ja voidaan tehdä lopullinen arvio

$$b * f = \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{m=1}^M B_m \widehat{f}\Big) = \sum_{m=1}^M \mathcal{F}^{-1}(B_m(e_{t_m} - 1)^{-k}(e_{t_m} - 1)^k \widehat{f}) = \sum_{m=1}^M \mathcal{F}^{-1}(B_m(e_{t_m} - 1)^{-k}) * d_{t_m}^k f$$

$$\implies \|b * f\|_{L^\infty} \leq \sum_{m=1}^M \|\mathcal{F}^{-1}(B_m(e_{t_m} - 1)^{-k})\|_{L^1} \sup_{|t|=1/3} \|d_t^k f\|_{L^\infty} \lesssim \sup_{|t|=1/3} \|d_t^k f\|_{L^\infty}$$

□

Viitteet

[1] Functional Analysis , Walter Rudin, McGraw-Hill 2. painos 1973

[2] Modern Fourier Analysis , Loukas Grafakos, Springer 2. painos 2008

[3] Interpolation spaces, an introduction , Jöran Bergh ja Jörgen Löfström, Springer-Verlag 1976

[4] Harmonic analysis in the phase plane: notes 2 for 254A , Terence Tao, 2001