

Charmonium-hiukkasen energiatilojen määrittäminen Cornellin potentiaalin avulla

Kandidaatintutkielma, 12.6.2018

Tekijä:

JANI PENTTALA

Ohjaaja:

TUOMAS LAPPI



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

© 2018 Jani Penttala

Julkaisu on tekijänoikeussäännösten alainen. Teosta voi lukea ja tulostaa henkilökohtaista käyttöä varten. Käyttö kaupallisiin tarkoituksiin on kielletty. This publication is copyrighted. You may download, display and print it for Your own personal use. Commercial use is prohibited.

Tiivistelmä

Penttala, Jani

Charmonium-hiukkasen energiatilojen määrittäminen Cornellin potentiaalin avulla
LuK-tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2018, 44 sivua

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutkia charmonium-hiukkasen energiatiloja Cornellin potentiaalin avulla. Potentiaalin parametrit määritetään kokeellisesti mitattujen energiatilojen ja hajoamisleveyksien avulla. Hajoamisleveyksille käytetään QCD:n häiriöteorian antamia lausekkeita. Parametrien ratkaisemista varten kirjoitetaan charmoniumin Schrödingerin yhtälö dimensiottomasta muodosta, jolloin Schrödingerin yhtälön ratkaiseminen on mahdollista tehdä numeerisesti. Aaltofunktion ja ominaisenergioiden numeerisessa ratkaisemisessa käytetään MATLAB-ohjelmaa. Ratkaistuilla parametrien arvoilla on laskettu charmoniumin alimpien energiatilojen massoja, jotka yleisesti ottaen noudattavat mitattujen ja muiden teoreettisten mallien antamien massojen arvoja. Tämän perusteella Cornellin potentiaali toimii hyvin charmoniumin karkeana mallina, jonka avulla voidaan selittää mitattujen energiatilojen rakennetta.

Avainsanat: Charmonium, Cornellin potentiaali, hiukkasfysiikka, hajoamisleveys

Abstract

Penttala, Jani

Determining the energy states of the charmonium particle using the Cornell potential
Bachelor's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2018, 44 pages.

The purpose of this thesis is to examine the energy states of the charmonium particle using the Cornell potential. The potential contains unknown parameters which have to be determined in order to use the potential. This is done by using the measured energy states and decay widths. The decay widths are made coincide with the theoretical values calculated from formulas given by perturbative QCD. In order to solve for the parameters, the Schrödinger equation for the charmonium particle is written in a dimensionless form allowing a numerical solution of the Schrödinger equation. The corresponding wave function and the eigenenergies are solved numerically using a MATLAB program. The solved parameter values are then used to calculate the masses of the lowest energy states. These masses generally agree with the measured values and the values calculated from other theoretical models. Based on this, the Cornell potential works well as a rough model for charmonium and can be used to explain the structure of the measured energy states.

Keywords: Charmonium, Cornell potential, particle physics, decay width

Sisältö

Tiivistelmä	3
Abstract	5
1 Johdanto	9
2 Teoreettinen tausta	11
2.1 Cornellin potentiaali	11
2.2 Schrödingerin yhtälö charmoniumille	13
2.3 Charmoniumin energiatilojen massat	16
2.4 Hajoamisleveydet	16
3 Menetelmät ja aineisto	19
3.1 Kokeellinen aineisto	19
3.2 Schrödingerin yhtälön numeerinen ratkaiseminen	21
3.3 Parametrien ratkaiseminen	22
4 Tulokset	29
4.1 Mallin antamat massat	29
4.2 Tulosten tarkastelu	31
5 Päätäntö	35
Lähteet	36
A Ohjelmakoodit	39
A.1 Schrödingerin yhtälön ratkaisija	39
A.2 Funktioiden λ -riippuvuuden määrittäminen	41
A.3 Polynomisovitus ja energiatilojen ratkaiseminen	42

1 Johdanto

Charmonium-hiukkanen on mesoni, joka koostuu c -kvarkista (engl. *charm quark*) ja c -kvarkin antikvarkista (\bar{c}). Kvarkit jaetaan tavallisesti kevyisiin kvarkkeihin (u -, d - ja s -kvarkit) ja raskaisiin kvarkkeihin (c -, b - ja t -kvarkit) niiden massojen perusteella. C -kvarkin massa on selvästi suurempi kuin kevyiden kvarkkien, minkä vuoksi charmoniumia on mahdollista tarkastella yhden kvarkkilajin kvarkki-antikvarkkiparina. Samoin b -kvarkki pystyy muodostamaan antikvarkkinsa kanssa bottonium-hiukkasen, jonka ominaisuudet ovat samankaltaisia charmoniumin kanssa. Näiden hiukkasten suuri massa mahdollistaa myös sen, että niitä voidaan tarkastella epärelativistisina systeemeinä. T -kvarkin ei puolestaan ole mahdollista muodostaa tällaista hiukkasta, sillä kyseisen tilan elinaika olisi liian pieni. [1, s. 168]

Charmonium on historiallisesti tärkeä hiukkanen. Ennen c -kvarkin havaitsemista ainoat löydetty kvarkit olivat u -, d - ja s -kvarkit. Vuonna 1970 Glashow, Iliopoulos ja Maiani kuitenkin ehdottivat neljännen kvarkin olemassaoloa teoreettisten lähtökohtien perusteella [2]. Ennusteet uudesta kvarkista saivatkin tukea vuonna 1974, kun sekä Brookhaven National Laboratory että Stanford Linear Accelerator Center löysivät uuden hiukkasen toisistaan riippumatta [1, s. 63]. Hiukkasen havaittiin muodostuvan aiemmin tuntemattomasta kvarkista ja sen antikvarkista, ja näin löydetyn kvarkin massa oli paljon suurempi kuin s -kvarkin massa. Havainto oli merkittävä, sillä kyseessä oli ensimmäinen havaittu c -kvarkin sisältävä hiukkanen. Hiukkanen sai myöhemmin nimen J/ψ , ja kyseessä on yksi tutkituimmista charmoniumin energiatioista. Burton Richter ja Samuel Chao Chung Ting jakoivat vuonna 1976 fysiikan Nobel-palkinnon J/ψ -hiukkasen löytämisestä.

Charmoniumia on sen löytämisen jälkeen tutkittu paljon. Sille on löydetty monia eri energiatioja, joita on pyritty sovittamaan erilaisiin teoreettisiin malleihin. Pyrin tässä työssä selittämään eri energiatiolat käyttämällä Cornellin potentiaalia, joka oli eräs ensimmäisistä charmoniumille käytetyistä malleista [3]. Lisäksi tarkastelen J/ψ -hiukkasen hajoamista ja sille saatavia ennusteita Cornellin potentiaalilla avulla.

Käytän tässä työssä hiukkasfysiikassa yleisesti käytössä olevia luonnollisia yksiköitä, joissa $c = \hbar = 1$. Tällöin kirjallisuudessa saatujen tulosten käyttö on suoravi-

vaisempaa ja lisäksi käytetyt yhtälöt yksinkertaistuvat. Näissä yksiköissä pituudella, ajalla ja energialla on sama yksikkö, joten käytän näiden suureiden yksikkönä lähinnä energian yksikköä GeV.

Tutkielman rakenne jakautuu siten, että luvussa 2 käyn ensin läpi Cornellin potentiaalin muodon ja perustelen sen käytön. Johdan myös charmonium-hiukkaselle tarvitsemani Schrödingerin yhtälön sekä käyn läpi tarvittavia tuloksia charmoniumin energiatiloihin ja hajoamisleveyksiin liittyen. Luvussa 3 puolestaan kerron käyttämästäni kokeellisesta aineistosta, jota tarvitsen muiden energiatilojen määrittämiseksi. Lisäksi ratkaisen Schrödingerin yhtälön numeerisesti, jolloin pystyn määrittämään kokeellisen aineiston avulla Cornellin potentiaalin tarkan muodon. Luvussa 4 käyn läpi Cornellin potentiaalin avulla saamani tulokset charmoniumin energiatiloille ja vertaan niitä mitattuihin arvoihin. Tarkastelen samalla Cornellin potentiaalin toimivuutta.

2 Teoreettinen tausta

2.1 Cornellin potentiaali

Charmonium-hiukkasessa kvarkit vaikuttavat toisiinsa sähköisen ja vahvan vuorovaikutuksen avulla. Vahva vuorovaikutus on kuitenkin niin voimakas sähköiseen verrattuna, että käytännössä systeemissä vaikuttava sähkömagneettinen voima voidaan jättää huomiotta. Tällöin riittää tarkastella vahvasta vuorovaikutuksesta aiheutuvaa potentiaalia. Charmoniumin käyttäytymisen kuvaamista varten sille on kehitetty useita eri potentiaalimalleja, joissa potentiaali riippuu ainoastaan c -kvarkin ja sen antikvarkin välisestä etäisyydestä. Eräs yksinkertaisimmista potentiaaleista on Cornellin potentiaali, joka perustuu potentiaalın muotoon lyhyillä ja pitkillä etäisyyksillä.

Lyhyillä etäisyyksillä kvarkki-antikvarkkipotentiaali on Coulombin potentiaalın kaltainen, ja sen voidaan näyttää olevan muotoa

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}. \quad (1)$$

Yhtälössä (1) r on c -kvarkin ja sen antikvarkin välinen etäisyys ja α_s on vahvan vuorovaikutuksen kytkentävakio, joka kuvaa vuorovaikutuksen voimakkuutta. Kytkentävakion α_s arvo itse asiassa riippuu tutkittavasta energiaskaalasta. Tämä vaihtelu on kuitenkin melko pientä charmoniumin energiaskaalalla, joten jatkossa oletan kytkentävakion olevan sama charmoniumin eri energiatiloille. Pitkillä etäisyyksillä potentiaali on puolestaan likimain lineaarinen, jolloin se voidaan kirjoittaa muodossa

$$V(r) = \sigma r, \quad (2)$$

missä σ on vakio. [1, s. 182–184]

Charmoniumia kuvaava potentiaali saadaan yhdistämällä lyhyitä ja pitkiä etäisyyksiä kuvaavat potentiaalit. Tämä ei kuitenkaan ole yksiselitteistä, sillä potentiaalın muodosta ei ole varmaa tietoa keskipitkillä etäisyyksillä. Cornellin potentiaalın tapauksessa potentiaalit (1) ja (2) summataan yhteen, jolloin saadaan potentiaaliksi [3]

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \sigma r = -\frac{\kappa}{r} + \sigma r, \quad (3)$$

missä on merkitty

$$\kappa = \frac{4}{3} \alpha_s. \quad (4)$$

Cornellin potentiaali (3) noudattaa potentiaalin käyttäytymistä lyhyillä ja pitkillä etäisyyksillä. Potentiaalin lausekkeen termit α_s ja σ ovat vakioita, joiden arvoa ei tunneta. Jotta potentiaalia voitaisiin käyttää esimerkiksi energiatilojen laskemista varten, täytyy näiden vakioiden arvot ensin määrittää.

Pitkän ja lyhyen etäisyyden termien lisäksi Cornellin potentiaaliin voidaan lisätä vakiotermin V_0 , jolloin potentiaali on kokonaisuudessaan [4]

$$V_{\text{tot}}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \sigma r + V_0 = V(r) + V_0. \quad (5)$$

Vakiotermi kuitenkin vaikuttaa potentiaalia vastaaviin ominaisenergian arvoihin ainoastaan korottamalla niitä vakiotermin verran, eikä sillä puolestaan ole vaikutusta aaltofunktion käyttäytymiseen. Tämän vuoksi vakiotermi voidaan pitää potentiaalista erillisenä ja lisätä se potentiaalille (3) saatuihin ominaisenergian arvoihin jälkikäteen, mikä helpottaa potentiaalin tarkastelua. Viittaankin jatkossa potentiaaliin (3) Cornellin potentiaalina ja lisään vakiotermin V_0 vasta tällä potentiaalilla saatuihin ominaisenergioihin.

Pelkästään Cornellin potentiaali ei kuitenkaan ole riittävä kuvaamaan charmoniumia. Tämä johtuu siitä, että Cornellin potentiaali ei ota huomioon c -kvarkin spinistä aiheutuva vuorovaikutuksia. Cornellin potentiaali nimittäin ennustaa, että pelkästään n - ja L -kvanttiluvut riittävät määrittämään charmoniumin energiatilat. Näin ei kuitenkaan ole, vaan energiatilat riippuvat myös S -kvanttiluvusta. Lisäksi Cornellin potentiaali on epärelativistinen, mikä puolestaan vähentää Cornellin potentiaalilla saatavien tulosten tarkkuutta. Cornellin potentiaalin käyttö on kuitenkin perusteltua energiatilojen yleisen käyttäytymisen tutkimista varten, sillä muiden termien vaikutus energiatiloihin on pienempi.

2.2 Schrödingerin yhtälö charmoniumille

Koska charmonium on lähes epärelativistinen kahden hiukkasen systeemi, voidaan sitä tarkastella systeemin massakeskipistekoordinaateissa. Oletetaan lisäksi charmoniumia kuvaavan potentiaalin olevan Cornellin potentiaali (3), jolloin potentiaali riippuu ainoastaan hiukkasten etäisyydestä toisistaan. Tällöin systeemin energiatilat voidaan selvittää ratkaisemalla Schrödingerin yhtälö muodossa [5, s. 101]

$$-\frac{1}{2\mu}\nabla_{\mathbf{r}}^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (6)$$

missä

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{\bar{c}} \quad (7)$$

kuvaa hiukkasten välistä etäisyyttä ja μ on redusoitu massa. Charmoniumin tapauksessa redusoiduksi massaksi tulee

$$\mu = \frac{m_c m_{\bar{c}}}{m_c + m_{\bar{c}}} = \frac{1}{2}m_c, \quad (8)$$

sillä kvarkin ja antikvarkin massa on sama eli $m_c = m_{\bar{c}}$. Koska näissä koordinaateissa potentiaali on pallosymmetrinen, aaltofunktio on mahdollista separoida radiaaliseen osaan ja kulmaosaan [6, s. 123]:

$$\psi(r, \phi, \theta) = R(r)Y_L^m(\theta, \phi), \quad (9)$$

missä $R(r)$ on aaltofunktion radiaalinen osa ja Y_L^m on palloharmoninen funktio, joka riippuu kokonaissivukvanttiluvusta L ja magneettisesta kvanttiluvusta m . Palloharmoniset funktiot ovat riippumattomia potentiaalista. Aaltofunktion radiaalinen osa puolestaan riippuu potentiaalista, ja sille pätee radiaalinen Schrödingerin yhtälö [5, s. 102]

$$-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{2\mu}\frac{L(L+1)}{r^2}R + VR = ER. \quad (10)$$

Yhtälössä (10) L on systeemiä vastaava sivukvanttiluku. Sijoituksella

$$u(r) = rR(r) \quad (11)$$

yhtälö (10) voidaan sieventää muotoon [6, s. 129]

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{2\mu} \frac{L(L+1)}{r^2} + V(r) \right) u = Eu. \quad (12)$$

Sijoittamalla Cornellin potentiaali (3) ja c-kvarkin massa m_c yhtälöön (12) saadaan

$$-\frac{1}{m_c} \frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{m_c} \frac{L(L+1)}{r^2} - \frac{\kappa}{r} + \sigma r \right) u = Eu. \quad (13)$$

Yhtälö (13) on toisen asteen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisemiseksi täytyy tietää aaltofunktion $u(r)$ toteuttamat reunaehdot. Radiaalisen osan $R(r)$ äärellisyyden ja aaltofunktion normittumisen perusteella vaaditaan reunaehdot

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0. \quad (14)$$

Yhtälössä (13) σ ja κ ovat vakioita, joiden arvoa ei tiedetä. Lisäksi c-kvarkin massa m_c on tuntematon vakio. Tämä johtuu siitä, että kvarkin massa riippuu tarkasteltavasta hadronista, eikä c-kvarkin massa ole siten yksikäsitteisesti määritelty [7, s. 135]. Yhtälössä (13) on siis kolme määritettävää parametriä: κ , σ ja m_c . Numeerisen ratkaisemisen helpottamiseksi muutan edellisen yhtälön dimensiottomaan muotoon. Kertomalla yhtälö (13) puolittain luvulla $(m_c/\sigma^2)^{1/3}$ saadaan:

$$-(m_c\sigma)^{-2/3} \frac{d^2u}{dr^2} + \left((m_c\sigma)^{-2/3} \frac{L(L+1)}{r^2} - \left(\frac{m_c}{\sigma^2} \right)^{1/3} \frac{\kappa}{r} + (m_c\sigma)^{1/3} r \right) u = \left(\frac{m_c}{\sigma^2} \right)^{1/3} Eu. \quad (15)$$

Valitaan vielä uudet muuttujat

$$\rho = (m_c\sigma)^{1/3} r, \quad (16)$$

$$\zeta = \left(\frac{m_c}{\sigma^2} \right)^{1/3} E, \text{ ja} \quad (17)$$

$$\lambda = \left(\frac{m_c^2}{\sigma} \right)^{1/3} \kappa. \quad (18)$$

Näillä muuttujanvaihoilla yhtälö (15) tulee muotoon

$$-\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(\frac{L(L+1)}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\rho} + \rho \right) u = \zeta u. \quad (19)$$

ρ siis vastaa dimensiotonta etäisyyttä ja ζ dimensiotonta ominaisenergiaa. Dimensiottomasta yhtälöstä (19) huomataan, että tietyllä kvanttiluvulla ominaisarvo ζ riippuu ainoastaan parametristä λ .

Schrödingerin yhtälön ratkaisuna saatu aaltofunktio voidaan normittaa. Pallo-symmetrisessä tapauksessa pätee

$$\int |\psi(r, \phi, \theta)|^2 d\mathbf{r}^3 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R(r)Y_L^m(\theta, \phi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta = 1. \quad (20)$$

Tällöin voidaan vaatia, että sekä radiaalinen osa että kulmaosa normittuvat erikseen eli

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{ja} \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_L^m(\theta, \phi)|^2 \sin\theta d\phi d\theta = 1. \quad (21)$$

Käyttämällä yhtälöä (11) voidaan radiaalisen osan normitus kirjoittaa muodossa

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = \int_0^\infty |u(r)|^2 dr = 1. \quad (22)$$

Dimensiottoman differentiaaliyhtälön (19) ratkaisu on helppo normittaa muuttujan ρ avulla. Merkitään tällä tavoin normitettua funktiota \tilde{u} , jolloin pätee

$$\int_0^\infty |\tilde{u}(\rho)|^2 d\rho = \int_0^\infty |\tilde{u}|^2 \frac{\partial\rho}{\partial r} dr = 1. \quad (23)$$

Koska normittamisessa funktiota kerrotaan pelkällä vakiolla, täytyy päteä

$$|\tilde{u}(\rho)|^2 \frac{\partial\rho}{\partial r} = |u(r)|^2, \quad (24)$$

josta saadaan

$$|R(r)|^2 = \frac{|u(r)|^2}{r^2} = \frac{|\tilde{u}(\rho)|^2}{r^2} \frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{|\tilde{u}(\rho)|^2}{\rho^2} \frac{\rho^2}{r^2} \frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{|\tilde{u}(\rho)|^2}{\rho^2} m_c \sigma. \quad (25)$$

2.3 Charmoniumin energiatilojen massat

Charmoniumin-hiukkasen energiatilojen massa voidaan laskea, jos tiedetään hiukkasen potentiaaliin liittyvä energia. Energiatilan massa saadaan tällöin yksinkertaisesti lisäämällä c-kvarkin ja sen antikvarkin massaan hiukkaseen liittyvä sidosenergia eli [8, s. 375]

$$M = m_c + m_{\bar{c}} + E_{\text{sidos}} = 2m_c + E_{\text{sidos}}. \quad (26)$$

Yhtälössä (26) on käytetty tietoa, että hiukkasen ja antihiukkasen massa on sama. Sidosenergia saadaan ratkaisemalla Schrödingerin yhtälön ominaisenergia käytetyllä potentiaalilla.

Potentiaalin (5) tapauksessa $E_{\text{sidos}} = E_{nL} + V_0$, missä E_{nL} on yhtälöstä (13) saatu ominaisenergia ja V_0 potentiaalin vakiotermi. Tällöin ominaisenergia riippuu kvanttiluvuista n ja L , missä pääkvanttiluku n kertoo kuinka mones ominaisenergia on kyseessä alimmasta tilasta $n = 1$ lähtien. Massan arvo kvanttiluvuilla n ja L on siis

$$M_{nL} = 2m_c + V_0 + E_{nL}. \quad (27)$$

V_0 voitaisiin määritellä myös osaksi Cornellin potentiaalia ja siten ominaisenergiaa E_{nL} , mutta sen käsitteleminen erillisenä helpottaa charmonium-hiukkasen tarkastelua. Tällöin nimittäin kahden eri energiatilan massojen erotus ei riipu vakiotermistä V_0 vaan erotukseksi saadaan

$$M_{nL} - M_{n'L'} = E_{nL} - E_{n'L'}. \quad (28)$$

Käyttämällä yhtälöä (17) voidaan massojen erotus kirjoittaa muodossa

$$M_{nL} - M_{n'L'} = \left(\frac{\sigma^2}{m_c} \right)^{1/3} (\zeta_{nL} - \zeta_{n'L'}). \quad (29)$$

2.4 Hajoamisleveydet

Hiukkasen todennäköisyyttä hajota muiksi hiukkasiksi voidaan kuvata hajoamisleveydellä. Hajoamisleveys Γ määritellään lausekkeella

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}, \quad (30)$$

missä τ on hiukkasen keskimääräinen elinaika [1, s. 67]. Hiukkasen jokaiselle eri hajoamiskanavalle voidaan määrittää oma hajoamislevytyensä. Hiukkasen kokonais-hajoamislevydydellä puolestaan kuvataan hiukkasen todennäköisyyttä hajota miksi tahansa hiukkaseksi. Yhtälöstä (30) nähdään, että pienen kokonaishajoamislevyden omaavalla hiukkasella keskimääräinen elinaika on suuri. Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen mukaan epästabiilin hiukkasen massaa ei voida mitata tarkasti, vaan mittauksessa massalle saatava jakauma riippuu hiukkasen keskimääräisestä elinajasta. Hajoamislevyys itse asiassa kuvaakin massan todennäköisyysjakauman levytyttä, jolloin hiukkasen massa voidaan määrittää sitä tarkemmin, mitä pienempi sen hajoamislevyys on.

Charmoniumin tapauksessa eri hajoamislevyyksille on mahdollista johtaa lausekkeitä häiriöteorian avulla. Tässä työssä tarvitsemani lausekkeet liittyvät J/ψ -tilan hajoamiseen. Eräs J/ψ -hiukkasen hajoamisista on hajoaminen elektroniksi ja positroniksi. Alimman kertaluvun häiriöteorian avulla tämän hajoamislevyden lausekkeeksi voidaan johtaa

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 Q_c^2 \frac{|\psi(\mathbf{r}=0)|^2}{M^2}. \quad (31)$$

Lausekkeen johto on esitetty lähteessä [9]. Lausekkeessa (31) M on J/ψ -hiukkasen massa ja Q_c on c-kvarkin sähkövarauksen suhde alkeisvaraukseen eli $+2/3$. Vakio α on sähkömagneettinen hienorakennevakio, jonka arvo on [10]

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7,297\,353 \cdot 10^{-3}. \quad (32)$$

Yhtälössä (31) α on itse asiassa QED:n kytkentävakio, minkä vuoksi sen arvo riippuu tutkittavasta energiaskaalasta [11]. Tämä vaihtelu on kuitenkin niin pientä, että käytän jatkossa sille lausekkeen (32) arvoa. Viimeinen termi yhtälössä (31) eli $\psi(\mathbf{r}=0)$ kertoo J/ψ -hiukkasen aaltofunktion arvon origossa.

Muita tapoja J/ψ -hiukkasen hajoamiselle ovat hajoaminen kolmeksi gluoniksi (ggg) ja hajoaminen yhdeksi fotoniksi ja kahdeksi gluoniksi (γgg). Käyttämällä ensimmäisen kertaluvun häiriöteoriaa myös näille hajoamisille on mahdollista johtaa hajoamislevyysien lausekkeiksi

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg) = \frac{160}{81}(\pi^2 - 9)\alpha_s^3 \frac{|\psi(\mathbf{r}=0)|^2}{M^2}, \text{ ja} \quad (33)$$

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma gg) = \frac{128}{9}(\pi^2 - 9)Q_c^2\alpha_s^2 \frac{|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2}{M^2}. \quad (34)$$

Lausekkeiden johdot on esitetty lähteessä [9]. Lausekkeissa (33) ja (34) esiintyvät termit ovat samoja kuin hajoamislevydessä (31) sillä erolla, että niissä esiintyy lisäksi vahvan vuorovaikutuksen kytkentävakio α_s .

Edellisissä hajoamislevyden lausekkeissa esiintyy jokaisessa J/ψ -hiukkasen aaltofunktion arvo origossa $\psi(\mathbf{r} = 0)$. Kyseiselle tilalle on päätelty kvanttiluvuiksi $n = 1$ ja $L = 0$, jolloin $m = 0$ ja vastaava palloharmoninen funktio on [6]

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (35)$$

Aaltofunktion arvo origossa on tällöin

$$\psi(\mathbf{r} = 0) = \psi(0, \phi, \theta) = R(0)Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}R(0), \quad (36)$$

missä on käytetty yhtälöä (9). Ratkaisemalla dimensioton Schrödingerin yhtälö (19) ja vaatimalla aaltofunktiolle $\tilde{u}(\rho)$ normitus (23) voidaan $|R(0)|^2$ laskea yhtälöä (25) käyttämällä:

$$|R(0)|^2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|u|^2}{r^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\tilde{u}}{\rho} \right|^2 m_c \sigma = \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}(0) \right|^2 m_c \sigma, \quad (37)$$

missä käytettiin reunaehtoa $\lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{u} = 0$. Yhtälön (37) avulla aaltofunktion normi origossa saadaan muotoon

$$|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2 = \frac{1}{4\pi} |R(0)|^2 = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}(0) \right|^2 m_c \sigma, \quad (38)$$

mikä on numeerista ratkaisemista varten hyödyllisempi muoto.

3 Menetelmät ja aineisto

3.1 Kokeellinen aineisto

Charmoniumille on löydetty kokeellisesti paljon eri energiatiloja. Alimmille tiloille on onnistuttu tunnistamaan myös energiatilaa vastaavat kvanttiluvut. Nämä energiatilat massoineen on esitetty taulukossa 1. Eri energiatilat pystytään erottamaan toisistaan niitä vastaavien kvanttilukujen perusteella.

Taulukossa 1 käytetään vakiintunutta merkintätapaa, jossa kvanttiluvut merkitään muodossa $n^{2S+1}L_J$. Tässä n on pääkvanttiluku ja L ja S merkitsevät hiukkasen kokonaissivu- ja kokonaisspinkvanttilukuja. Sivukvanttiluvulle käytetään spektroskooppista merkintätapaa, jossa esimerkiksi S, P ja D vastaavat kvanttilukuja $L = 0, 1$ ja 2 . Kvanttiluku J puolestaan kuvaa S - ja L -kvanttilukujen yhdistelmää, joka voi saada arvot lukujen $\min\{0, |L - S|\}$ ja $L + S$ välillä.

E erityisen tärkeitä ovat charmoniumin alimmat energiatilat, sillä niiden massat on pystytty määrittämään hyvällä tarkkuudella. Sen sijaan korkeammilla energiatiloilla massojen epätarkkuus on suurempi. Tämä johtuu siitä, että energiaa $3,73$ GeV suuremmat energiatilat pystyvät hajoamaan D -mesoneiksi [1, s. 170]. Täten korkeilla energiatiloilla on myös suurempi hajoamisleveys, joten massan epätarkkuus on

Taulukko 1. Tunnistettujen energiatilojen massoja. Kullekin energiatilalle on merkitty sitä vastaavat kvanttiluvut sekä energiatilaa vastaavan hiukkasen nimi. [12]

Tila	Hiukkanen	Massa (MeV)
1^1S_0	$\eta_c(1S)$	$2983,4 \pm 0,5$
1^3S_1	$J/\psi(1S)$	$3096,90 \pm 0,06$
1^1P_1	$h_c(1P)$	$3525,38 \pm 0,11$
1^3P_0	$\chi_{c0}(1P)$	$3414,75 \pm 0,31$
1^3P_1	$\chi_{c1}(1P)$	$3510,66 \pm 0,07$
1^3P_2	$\chi_{c2}(1P)$	$3556,20 \pm 0,09$
2^1S_0	$\eta_c(2S)$	$3639,2 \pm 1,2$
2^3S_1	$\psi(2S)$	$3686,097 \pm 0,025$

Taulukko 2. J/ψ -hiukkasen hajoamisleveyksiä. Hajoamisleveydet on merkitty prosenttiosuutena kokonaishajoamisleveydestä $(92,9 \pm 2,8)$ keV.[12]

Hajoamistuotteet	Hajoamisleveys (%)
e^+e^-	$5,971 \pm 0,032$
ggg	$64,1 \pm 1,0$
γgg	$8,8 \pm 1,1$

suurempi.

Käyttämäni Cornellin potentiaali ei ota huomioon charmoniumin spiniä ollenkaan. Tämän vuoksi sen käyttäminen antaa charmoniumin eri spinkvanttilukua vastaaville tiloille samat tulokset eli massan tulisi riippua ainoastaan n - ja L -kvanttiluvuista. Taulukon 1 perusteella näin ei kuitenkaan ole, vaan spinistä aiheutuva ero massoihin on yllättävän suuri.

Myös charmoniumin hajoamisleveyksiä on mitattu paljon. Taulukossa 2 on esitetty J/ψ -hiukkasen eri hajoamisleveyksiä. Koska J/ψ -hiukkasen kokonaishajoamisleveys $(92,9 \pm 2,8)$ keV on melko pieni muihin energiatiloihin verrattuna, sen massa on yksi tarkimmin määritettyjä charmoniumin energiatiloista. Tämä näkyikin taulukossa 1.

Cornellin potentiaalın parametrien määrittämistä varten käytän charmoniumille kokeellisesti mitattuja arvoja. Massoista käytän J/ψ -hiukkasen massaa sekä $\psi(2S)$ -hiukkasen massaa energiatilojen $n = 1, L = 0$ ja $n = 2, L = 0$ massoina niiden pienen mittausvirheen vuoksi. Todellisuudessa mitattuihin massoihin vaikuttaa esimerkiksi myös spin-vuorovaikutus, joten mitatut massat eivät täysin vastaa Cornellin potentiaalın ennustamia. Tarkoitus on kuitenkin nähdä, miten hyvin Cornellin potentiaalın avulla saatavat tulokset vastaavat energiatilojen yleistä järjestystä, mihin käytettyjen massojen pienten erojen ei tulisi vaikuttaa. Mitattujen massojen lisäksi käytän parametrien määrittämisessä myös mitattuja hajoamisleveyksiä $\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)$ ja $\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg)$ niiden tarkkuuden vuoksi. Jätän jatkossa kokeellisesti mitattujen arvojen virheet huomioimatta laskuissa, sillä tarkoituksena on saada vain arvio charmoniumin energiatiloille.

3.2 Schrödingerin yhtälön numeerinen ratkaiseminen

Schrödingerin yhtälön (19) ratkaiseminen käsin on hankalaa, minkä vuoksi kannattaa sen sijaan käyttää numeerisia menetelmiä. Tässä työssä ratkaistaan Schrödingerin yhtälön ominaisenergiat siten, että etsin tähtäysmenetelmän avulla ominaisarvon, jolla Schrödingerin yhtälön reunaehdot täyttyvät. Tässä tapauksessa reunaehdot tarkoittavat pisteitä ρ_1 ja ρ_2 , joissa aaltofunktion $\tilde{u}(\rho)$ arvo on nolla.

Tähtäysmenetelmässä aaltofunktiota ei aseteta toteuttamaan reunaehtoja suoraan vaan ratkaistaan alkuarvo-ongelma, jossa aaltofunktiolle ja sen derivaatalle asetetaan arvo pisteessä ρ_1 . Aaltofunktion arvo valitaan toteuttamaan toinen reunaehdoista, kun taas derivaatan arvo vaikuttaa ainoastaan aaltofunktion normitukseen Schrödingerin yhtälön lineaarisuuden vuoksi. Lisäksi ominaisarvolle asetetaan yrite, jolloin kyseinen alkuarvo-ongelma voidaan ratkaista. Ratkaisuna saatu aaltofunktio ei todennäköisesti kuitenkaan toteuta pisteessä ρ_2 vaadittua reunaehtoakaan, sillä se toteutuu vain differentiaaliyhtälön ominaisarvoilla. Aaltofunktio on siis positiivinen tai negatiivinen tässä pisteessä, vaikka sen reunaehtoisten perusteella pitäisi olla nolla. Tämän vuoksi valitaan toinen ominaisarvon yrite, jolla aaltofunktion arvo pisteessä ρ_2 on vastakkaismerkkinen. Tällöin näiden kahden ominaisarvorytteen välissä on todellinen ominaisarvo, jolla aaltofunktio saavuttaa nollan pisteessä ρ_2 . Ominaisarvon hakeminen onnistuu etsimällä nollakohta ominaisarvorytteen väliltä esimerkiksi puolitusmenetelmällä.

Schrödingerin yhtälön (19) tapauksessa reunaehdot (14) tuottavat ongelmia numeerisen ratkaisemisen kannalta. Numeerisessa ratkaisemisessa aaltofunktion arvoja voidaan tarkastella vain äärellisellä välillä, joten ehto $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho) = 0$ ei ole mahdollista tarkastella numeerisesti. Tässä riittää kuitenkin vain valita tarpeeksi suuri ρ_2 ja vaatia, että aaltofunktio on tässä pisteessä nolla. Tämä johtuu siitä, että aaltofunktion täytyy olla likimain nolla jo ennen äärettömyyttä. Toinen ongelma puolestaan on, että pisteessä $\rho_1 = 0$ Schrödingerin yhtälöllä (19) on singulariteetti. Myös tässä riittää vaatia, että aaltofunktio on nolla origon lähellä. Aaltofunktion tarkastelu rajoitetaan siis äärelliselle välille $[\rho_1, \rho_2]$, missä $\rho_1 > 0$. Lisäksi reunaehdot tulevat muotoon

$$\tilde{u}(\rho_1) = 0 \quad \text{ja} \quad \tilde{u}(\rho_2) = 0. \quad (39)$$

Toteutin edellä kuvattua menetelmää Schrödingerin yhtälön ratkaisemiseksi käyttäen MATLAB-ohjelmaa. Ohjelmakoodi on kuvattu liitteessä A.1. Ohjelmassa käytetään

tään MATLABin Runge-Kutta-menetelmään perustuvaa `ode45`-funktioita alkuarvo-ongelman ratkaisemiseksi ja `fzero`-funktioita ominaisarvon löytämiseksi. Ohjelma myös normittaa ratkaisuna saadun aaltofunktion tarvittaessa yhtälön (23) mukaisesti.

3.3 Parametrien ratkaiseminen

Mitattujen hajoamisleveyksien avulla pystytään yksinään jo ratkaisemaan vahvan vuorovaikutuksen kytkentävakio α_s ja J/ψ -hiukkasen aaltofunktion arvo origossa. Tämä voidaan tehdä käyttämällä hajoamisleveyksien $\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)$ ja $\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg)$ lausekkeita. Jakamalla lauseke (31) puolittain lausekkeella (33) saadaan yhtälö

$$\frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg)} = \frac{16 \cdot 81}{160} \frac{\pi}{\pi^2 - 9} \frac{Q_c^2 \alpha^2}{\alpha_s^3}. \quad (40)$$

Yhtälössä (40) muut suureet ovat tiedossa, joten on mahdollista ratkaista vahvan vuorovaikutuksen kytkentävakioiksi

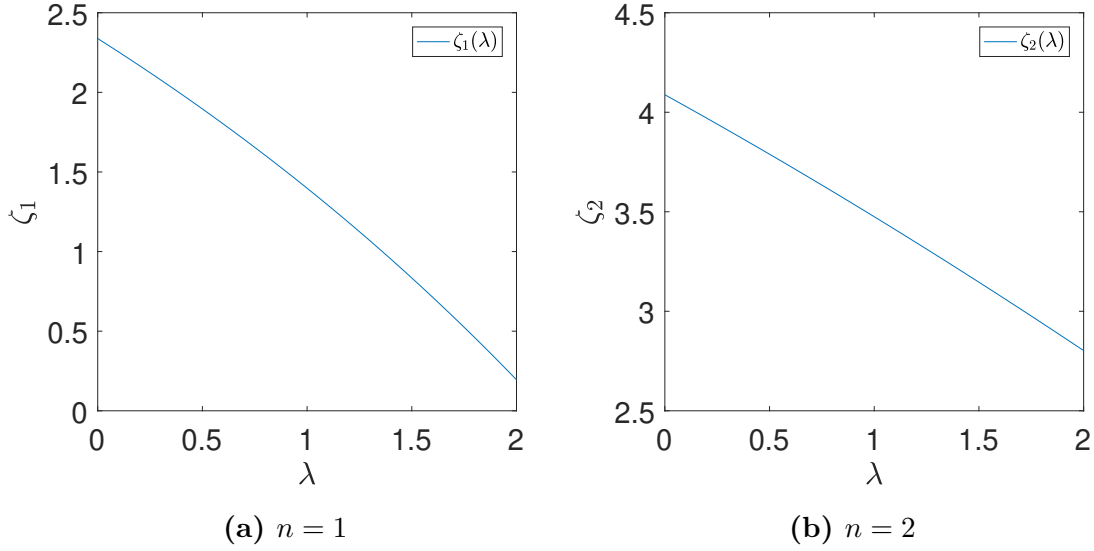
$$\alpha_s = \left(\frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)} \frac{16 \cdot 81}{160} \frac{\pi}{\pi^2 - 9} Q_c^2 \alpha^2 \right)^{1/3} = 0,195. \quad (41)$$

Aaltofunktion normin neliön arvoksi origossa saadaan lauseketta (31) muokkaamalla

$$|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2 = \Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-) \cdot \frac{M^2}{16\pi\alpha^2 Q_c^2} = 4,47 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^3. \quad (42)$$

Energiatilojen laskemista varten tarvitsee vielä ratkaista c -kvarkin massa m_c ja Cornellin potentiaalin (3) vakio σ . Näiden ratkaisemista varten täytyy selvittää Schrödingerin yhtälön (13) ominaisenergioiden riippuvuus edellisistä parametreistä. On kuitenkin helpompi ratkaista Schrödingerin yhtälön dimensiottomassa muodossa (19) esiintyvän ominaisarvon ζ riippuvuus parametrin λ . Tämän tiedon avulla on puolestaan mahdollista ratkaista m_c ja σ .

Selvittääkseni ominaisarvon $\zeta(\lambda)$ käyttäytymisen ratkaisin dimensiottoman Schrödingerin yhtälön numeerisesti useilla eri parametrin λ arvoilla. Koska tämä on mahdollista tehdä vain äärelliselle määrälle parametrin λ arvoja, on järkevää keskittyä tarkastelemaan funktiota $\zeta(\lambda)$ vain tietyllä välillä. Vaikka parametrin λ arvoa ei tiedetä täsmällisesti, on sen kokoluokkaa mahdollista arvioida. Pelkän c -kvarkin massaksi on mitattu $m'_c = (1,27 \pm 0,03) \text{ GeV}$ [12], ja parametrin σ arvoksi on muilla tavoin laskettuna saatu arvio $\sigma' \approx 0,18 \text{ GeV}^2$ [13, s. 97]. Kun sijoitetaan nämä arvot



Kuvio 1. Ominaisarvon käyttäytyminen parametrin λ funktiona, kun $n = 1, 2$ ja $L = 0$.

yhtälöön (18), saadaan parametrin λ arvioksi

$$\lambda' = \left(\frac{m_c'^2}{\sigma'} \right)^{1/3} \frac{4}{3} \alpha_s \approx 0,6. \quad (43)$$

Tämän perusteella riittää tutkia parametrin λ arvoja välillä $[0, 2]$, joten keskityn jatkossa tutkimaan funktioiden käyttäytymistä tällä välillä.

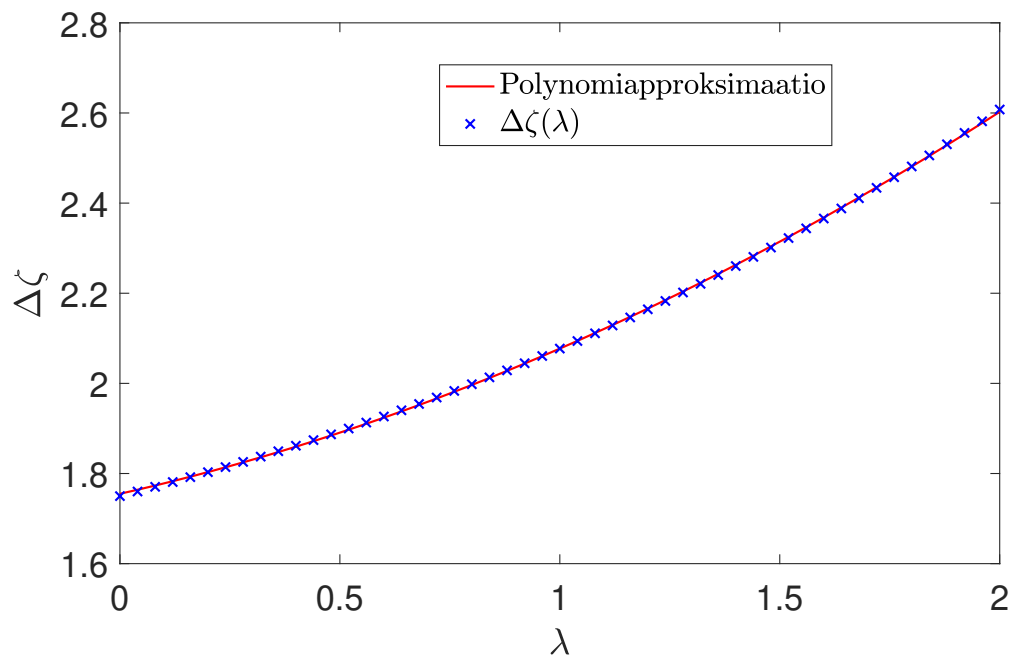
Ratkaisin numeerisesti kahden pienimmän ominaisarvon $\zeta(\lambda)$ riippuvuuden parametrin λ liitteen A.2 ohjelman avulla. Käytin sivukvanttiluvulle arvoa $L = 0$, jolloin nämä ominaisarvot vastaavat siis tilojen $n = 1, L = 0$ ja $n = 2, L = 0$ ominaisenergioita. Merkitsen saatuja funktioita $\zeta_1(\lambda)$ ja $\zeta_2(\lambda)$ tiloille $n = 1$ ja $n = 2$. Nämä funktiot on esitetty kuviossa 1a ja 1b. Olkoon näiden funktioiden erotus

$$\Delta\zeta(\lambda) = \zeta_2(\lambda) - \zeta_1(\lambda). \quad (44)$$

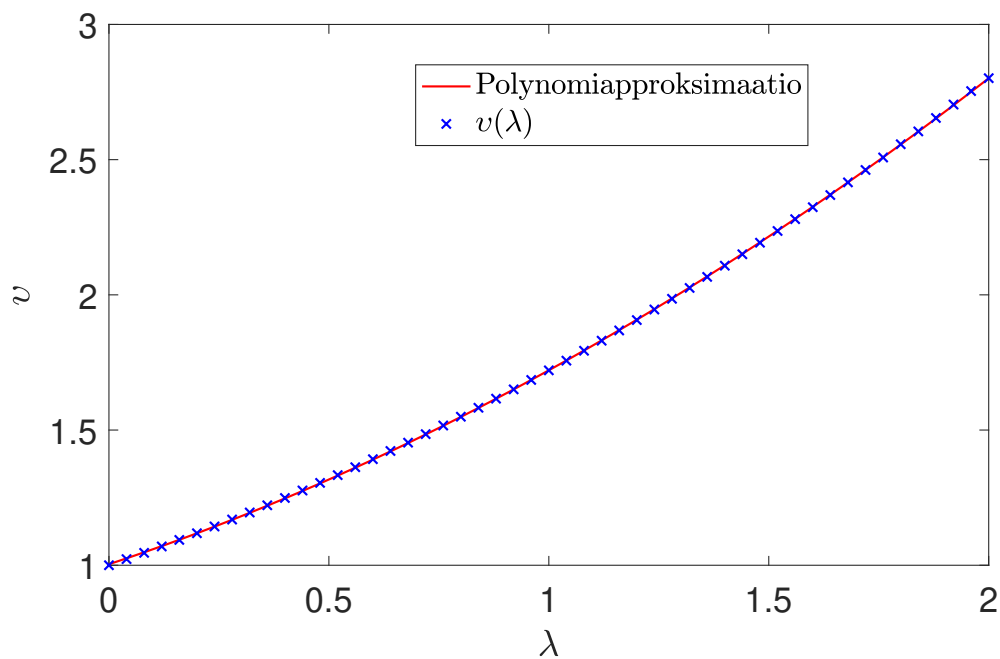
Tämä voidaan sijoittaa yhtälöön (29), jolloin saadaan

$$M_{20} - M_{10} = \left(\frac{\sigma^2}{m_c} \right)^{1/3} \Delta\zeta(\lambda). \quad (45)$$

Funktion $\Delta\zeta(\lambda)$ käyttäytyminen on tasaista tutkitulla välillä, mikä voidaan havaitaan kuvioista 2. Tämän vuoksi sovitin funktion $\Delta\zeta(\lambda)$ toisen asteen polynomin



Kuvio 2. Funktio $\Delta\zeta(\lambda)$ parametrin λ funktiona sekä siihen tehty polynomiap-
proksimaatio.



Kuvio 3. Funktio $v(\lambda)$ parametrin λ funktiona sekä siihen tehty polynomiap-
proksimaatio.

pienimmän neliösumman menetelmällä. Tällöin saadaan polynomiapproksimaatioksi

$$\Delta\zeta(\lambda) \approx 1,754\,972 + 0,220\,700\lambda + 0,101\,526\lambda^2. \quad (46)$$

Sovitettu polynomi on myös esitetty kuviossa 2. Tästä huomataan, että polynomisovituksessa tehty virhe on pieni. Tämän vuoksi käytän jatkossa funktion $\Delta\zeta(\lambda)$ sijaan siihen tehtyä polynomisovitusta, mikä helpottaa parametrien ratkaisemista.

Dimensiottomasta muodosta pystytään ratkaisemaan kullekin parametrin λ arvolle aaltofunktio, joka voidaan normittaa yhtälön (23) mukaisesti. Kvanttilukuja $n = 1$, $L = 0$ vastaava aaltofunktio on tällöin J/ψ -hiukkasen aaltofunktio, sillä tässä mallissa aaltofunktio ei riipu spinkvanttiluvusta. Aaltofunktiota ratkaistaessa saadaan samalla selville sen derivaattafunktio. Merkitään normitetun aaltofunktion $\tilde{u}(\rho)$ derivaatan arvoa nollassa

$$v = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}(0), \quad (47)$$

jolloin yhtälö (38) tulee muotoon

$$|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2 = \frac{1}{4\pi}|v|^2 m_c \sigma. \quad (48)$$

Aaltofunktion derivaatta v on parametrin λ funktio. Ratkaisin myös tämän käyttäytymisen eri parametrin λ arvoilla liitteen A.2 ohjelmalla ja tein saatuun funktioon toisen asteen polynomisovituksen samoin kuin aiemmin. Polynomiapproksimaatioksi saadaan tällöin

$$v(\lambda) \approx 1,004\,048 + 0,534\,677\lambda + 0,182\,208\lambda^2. \quad (49)$$

Sekä $v(\lambda)$ että polynomisovitus on esitetty kuviossa 3. Myös tälle polynomisovitus toimii hyvin, minkä vuoksi polynomiapproksimaation käyttäminen on perusteltua. Käytän jatkossa funktion v sijasta sen polynomiapproksimaatiota.

Edellisten tulosten avulla ratkaistavana on yhtälöistä (18), (45) ja (48) muodostuva yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} \lambda = \left(\frac{m_c^2}{\sigma}\right)^{1/3} \kappa \\ M_{20} - M_{10} = \left(\frac{\sigma^2}{m_c}\right)^{1/3} \Delta\zeta(\lambda) \\ |\psi(\mathbf{r} = 0)|^2 = \frac{1}{4\pi}v(\lambda)^2 m_c \sigma \end{cases} \quad (50)$$

Yhtälöryhmässä (50) on kolme tuntematonta: λ , m_c ja σ . Näiden ratkaisemiseksi kirjoitetaan ensin yhtälöryhmän ensimmäinen yhtälö muodossa

$$\sigma = \frac{\kappa^3}{\lambda^3} m_c^2. \quad (51)$$

Sijoittamalla σ yhtälöryhmän viimeiseen yhtälöön saadaan

$$|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2 = \frac{1}{4\pi} v(\lambda)^2 \frac{\kappa^3 m_c^3}{\lambda^3}, \quad (52)$$

josta voidaan puolestaan ratkaista massaksi

$$m_c = \frac{\lambda}{\kappa} \left(4\pi \frac{|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2}{v(\lambda)^2} \right)^{1/3}. \quad (53)$$

Sijoittamalla σ ja m_c yhtälöistä (51) ja (53) yhtälöryhmän keskimäinen yhtälö tulee muotoon

$$M_{20} - M_{10} = \frac{\kappa^2 m_c}{\lambda^2} \Delta\zeta(\lambda) = \frac{\kappa}{\lambda} \left(4\pi \frac{|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2}{v(\lambda)^2} \right)^{1/3} \Delta\zeta(\lambda) \quad (54)$$

eli

$$\frac{\Delta\zeta(\lambda)}{\lambda(v(\lambda))^{2/3}} = \frac{M_{20} - M_{10}}{\kappa(4\pi|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2)^{1/3}} = \frac{3}{4\alpha_s} \frac{M_{20} - M_{10}}{(4\pi|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2)^{1/3}}. \quad (55)$$

Yhtälön (55) vasen puoli yhtälö on tunnettu muuttujan λ funktio, kun taas oikealla puolella kaikki suureet on aiemmin laskettu. Sijoittamalla polynomiapproksimaatiot (46) ja (49) ja laskemalla oikean puolen arvo saadaan yhtälö

$$\frac{1,754\,972 + 0,220\,700\lambda + 0,101\,526\lambda^2}{\lambda(1,004\,048 + 0,534\,677\lambda + 0,182\,208\lambda^2)^{2/3}} = 2,743\,646. \quad (56)$$

Tämän ratkaiseminen on helpointa tehdä numeerisesti. Välillä $[0, 2]$ ainoa ratkaisu on

$$\lambda = 0,566\,362. \quad (57)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (53) saadaan

$$m_c = 1,46 \text{ GeV}, \quad (58)$$

jolloin yhtälöstä (51) voidaan laskea

$$\sigma = 0,206 \text{ GeV}^2. \quad (59)$$

Tällä tavoin määritettyjen parametrien suuruusluokka vaikuttaa oikealta aiemmin tehtyjen arvioiden perusteella.

4 Tulokset

4.1 Mallin antamat massat

Taulukossa 3 on esitetty alaluvussa 3.3 ratkaisemani arvot c-kvarkin massalle m_c , vahvan vuorovaikutuksen kytkentävakiolle α_s ja parametrille σ . Jotta Cornellin potentiaalin avulla voidaan ennustaa charmoniumin energiatilojen massat, täytyy vielä ratkaista vakion V_0 arvo yhtälöstä (27). Tämän vakion oletetaan olevan kaikille energiatiloille sama, joten se voidaan laskea käyttäen tilan $n = 1, L = 0$ energian ja massan arvoja. Käyttämällä ratkaisemiani parametrien arvoja voidaan laskea ominaisarvoksi $\zeta_{10} = 1,833\,226$, jolloin yhtälöiden (27) ja (17) avulla saadaan nyt vakion V_0 arvoksi

$$V_0 = M_{10} - 2m_c - E_{10} = M_{10} - 2m_c - \left(\frac{\sigma^2}{m_c}\right)^{1/3} \zeta_{10} = -0,383 \text{ GeV}. \quad (60)$$

Myös tämä on esitetty taulukossa 3.

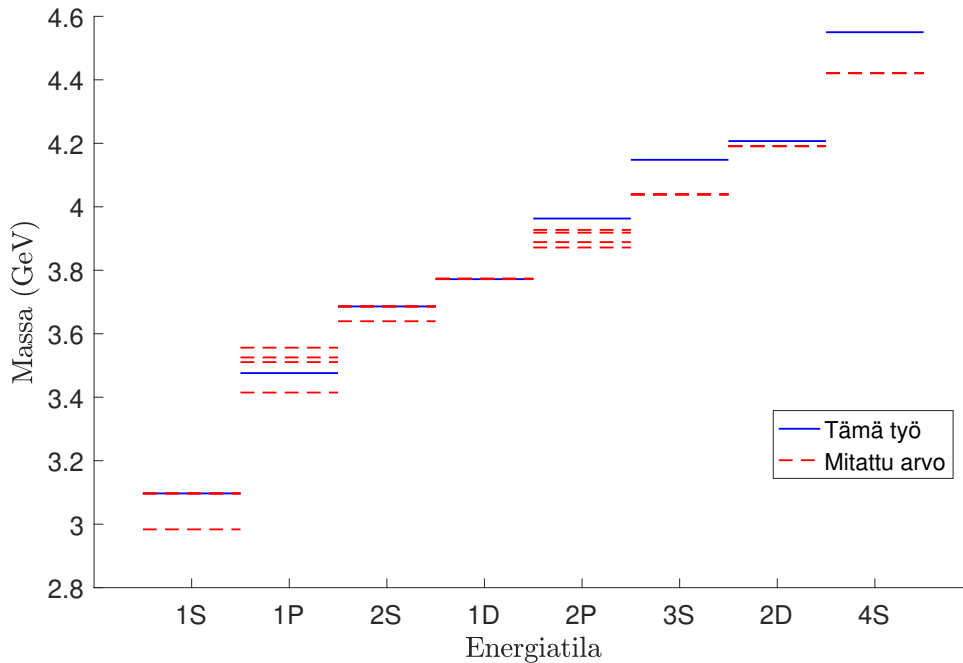
Cornellin potentiaalin käyttämistä varten tarvittavat parametrit ovat tiedossa, joten sen ennustamat energiatilat voidaan nyt laskea. Ratkaisemalla numeerisen Schrödingerin yhtälön (19) ominaisarvo ζ laskemallani parametrin λ arvolla pystytään laskemaan ominaisenergia kullekin kvanttilukujen n ja L arvolle. Ominaisarvojen ζ laskemisessa käytin apuna liitteessä A.3 kuvattua ohjelmaa, jolloin saadaan laskettua ominaisenergiat ja siten myös yhtälön (27) avulla vastaavat massat. Saamani tulokset charmoniumin alimmille energiatiloille on esitetty taulukossa 4.

Taulukko 3. Cornellin potentiaalin käyttämistä varten ratkaisemani parametrit.

α_s	m_c (GeV)	σ (GeV ²)	V_0 (GeV)
0,195	1,46	0,206	-0,383

Taulukko 4. Saamani tulokset charmoniumin energiatiloille sekä mitattuja ja teoreettisilla malleilla saatuja arvoja. Mitatuissa ja teoreettisilla malleilla saaduissa massoissa on otettu huomioon charmoniumin hienorakenne, jolloin yhtä nL -kvanttilukuparia vastaa useampi energiatila ja siten massa.

Tila	Massa (GeV)			
	Tämä työ	Mitattu [12]	Relativistinen malli [14]	Valokartiomalli [15]
1S	3,097	2,983–3,097	2,975–3,098	3,069–3,176
2S	3,686	3,639–3,686	3,623–3,676	3,668–3,721
3S	4,148	4,039	4,064–4,100	4,150–4,187
4S	4,550	4,421	4,425–4,450	
1P	3,476	3,415–3,556	3,445–3,550	3,329–3,535
2P	3,963	3,872–3,927	3,916–3,979	3,823–4,006
3P	4,381		4,292–4,337	
1D	3,772	3,773	3,819–3,849	3,727–3,830
2D	4,207	4,191	4,194–4,217	
1F	4,031		4,092–4,097	
2F	4,432		4,422–4,426	
1G	4,268		4,312–4,323	



Kuvio 4. Saamani tulokset massoille sekä vastaavat mitatut arvot lähteestä [12]. Hienorakenteen vuoksi kutakin nL -tilaa vastaa useampi massa, joista kaikkia ei ole vielä onnistuttu havaitsemaan kokeellisesti.

4.2 Tulosten tarkastelu

Charmoniumin energiatiloja on mitattu paljon kokeellisesti, ja charmoniumille on kehitetty useita teoreettisia malleja. Tämän vuoksi saamiani tuloksia on mahdollista verrata muiden tutkimuksiin. Erityisesti laskemani energiatilat antavat suoraviivaisen tavan mitata käyttämäni mallin toimivuutta. Tämän lisäksi on mahdollista verrata mallin ennustamia hajoamisleveyksiä sekä Cornellin potentiaalin parametrien arvoja. Lisäksi energiatiloja vastaavat aaltofunktiot antavat tietoa numeerisen ratkaisutavan onnistumisesta.

Taulukossa 4 on esitetty saamieni massojen lisäksi vastaavat kokeellisesti mitatut massat sekä kahdella eri teoreettisella mallilla saadut massan arvot, ja kuviossa 4 puolestaan on esitetty saamieni tulosten lisäksi mitatut massat vertaamisen helpottamiseksi. Mitatuissa massoissa ja teoreettisissa malleissa on otettu huomioon charmoniumin hienorakenne, jolloin massa ei riipu pelkästään n - ja L -kvanttiluvuista. Tämä näkyy taulukossa 4 siten, että kullekin nL -tilalle on merkitty väli, jolle yhtä nL -tilaa vastaavat massojen arvot kuuluvat. Mitattujen massojen tapauksessa monia korkeimpia tiloja ei ole vielä havaittu tai havaituille massoille ei ole onnistuttu määrittämään vastaavaa tilaa. Itse asiassa ei ole täysin varmaa, vastaavatko taulukkoon merkityt tilojen 3S, 4S, 2P, 1D ja 2D mitatut massat kyseisiä tiloja. Näin on kuitenkin merkitty lähteissä [14] ja [15], joten olen merkinnyt ne sekä taulukkoon että kuvioon vertaamista varten. Mitattujen massojen lisäksi taulukkoon on merkitty sekä relativistisella mallilla [14] että valokartiomallilla [15] saadut massat. Taulukosta nähdään, että saamani massat osuvat yleisesti ottaen hyvin yhteen sekä mitattujen että teoreettisten mallien massojen kanssa. 1S- ja 2S-tilojen massoja käytettiin määrittämään parametrien arvot, joten nämä on asetettu suoraan vastaamaan mitattuja massoja. Suurimmat erot mitattuihin massoihin ovat korkeimmilla energiatiloilla, mikä näkyy parhaiten kuviossa 4. Näiltä tiloilta ei kuitenkaan ole löydetty kaikkia tilaa vastaavia massoja, joten ero saattaa johtua charmoniumin hienorakenteesta. Muiden tilojen massojen vertaamisesta voidaan kuitenkin päätellä, että näinkin yksinkertainen malli pystyy selittämään charmoniumin massojen jakautumisen melko hyvin.

Massojen lisäksi on luonnollista tarkastella hajoamisleveyksiä. Alaluvun 2.4 lausekeiden avulla voidaan laskea arvoja J/ψ -hiukkasen hajoamisleveyksille. Hajoamisleveydet $\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)$ ja $\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg)$ saavat tällöin kokeellisesti mitatut arvot, sillä näitä käytettiin parametrien määrittämisessä. Sen sijaan hajoamisleveyden

$\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma gg)$ arvoa ei käytetty, ja sille saadaan lausekkeella (34) arvo

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma gg) = \frac{128}{9}(\pi^2 - 9)Q_c^2\alpha\alpha_s^2 \frac{|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2}{M^2} = 7,125 \text{ keV} = 7,67 \% \cdot \Gamma_{\text{tot}}. \quad (61)$$

Tässä merkinnällä Γ_{tot} tarkoitetaan J/ψ -hiukkasen kokonaishajoamisleveyttä. Osuuksi kokonaishajoamisleveydestä on mitattu $(8,8 \pm 1,1) \%$ [12], joten saamani tulos jää juuri virherajojen ulkopuolelle. Tällä tavalla laskettuna hajoamisleveys $\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma gg)$ saadaan itse asiassa suoraan käyttämällä hajoamisleveyksien $\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)$ ja $\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg)$ lausekkeita ja mitattuja arvoja, joten ero saattaa johtua siitä, että en huomionnut parametrejä laskiessani mitattujen hajoamisleveyksien virheitä. Ero saattaa johtua myös siitä, että käyttämäni hajoamisleveyksien lausekkeet on johdettu alimman kertaluvun häiriöteorian avulla, joten niiden antamat arvot saattavat poiketa todellisista.

Alaluvun 2.4 lausekkeita voidaan itse asiassa käyttää myös $\psi(2S)$ -hiukkasen hajoamisleveyksien laskemiseen sillä erotuksella, että lausekkeissa esiintyvät termit $\psi(\mathbf{r} = 0)$ ja M korvataan $\psi(2S)$ -hiukkasen aaltofunktiolla ja massalla [9, s. 58]. $\psi(2S)$ -hiukkasen tilaa vastaavat kvanttiluvut ovat $n = 2$ ja $L = 0$, jolloin käyttämällä määrittämiäni parametrien arvoja aaltofunktion neliöksi origossa saadaan $|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2 = 3,74 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^{-2}$. Hajoamisleveydelle $\Gamma(\psi(2S) \rightarrow e^+e^-)$ saadaan tällöin arvo

$$\Gamma(\psi(2S) \rightarrow e^+e^-) = 16\pi\alpha^2Q_c^2 \frac{|\psi(\mathbf{r} = 0)|^2}{M^2} = 3,28 \text{ keV}. \quad (62)$$

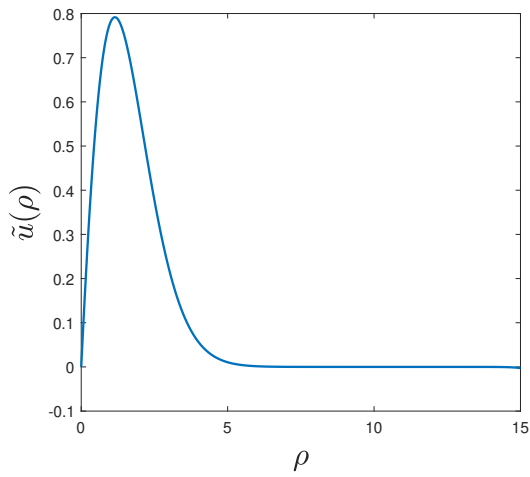
Tämä eroaa mitatusta tuloksesta $(2,34 \pm 0,04) \text{ keV}$ [12]. Syyt eroon ovat todennäköisesti samanlaisia kuin hajoamisleveyden $\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma gg)$ tapauksessa. Tämän lisäksi ero saattaa aiheutua myös määritetyistä parametrien arvoista, sillä $\psi(2S)$ -hiukkasen hajoamisleveyksiä ei käytetty parametrien määrittämisessä.

Myös Cornellin potentiaalın parametrien arvoja on mahdollista verrata, sillä niitä on tutkittu hyvinkin paljon. Tärkeimmät näistä ovat α_s ja m_c , sillä nämä pystytään mittaamaan myös ilman Cornellin potentiaalia. Paljaan c-kvarkin massaksi on mitattu $m_c = (1,27 \pm 0,03) \text{ GeV}$ [12]. Tämä eroaa saamastani arvosta $1,46 \text{ GeV}$, mutta kokoluokka on kuitenkin sama. Eroa voidaan kuitenkin selittää sillä, että c-kvarkin massa riippuu tutkittavasta tilanteesta. Saamani massa on kuitenkin melko lähellä mitattua arvoa, mikä vaikuttaa järkevältä. Vahvan vuorovaikutuksen kytkentävakion arvo puolestaan riippuu tutkittavasta energiaskaalasta. Charmoniumin energiaskaalalla sille on saatu arvo $0,336_{-0,008}^{+0,012}$ [16], mikä eroaa määrittämästäni arvosta $0,195$.

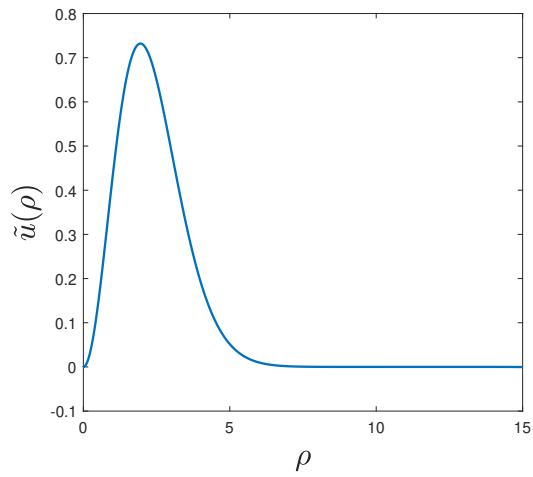
Määritin kytkentävakion arvon J/ψ -hiukkasen hajoamisleveyksien avulla, joten ero arvoissa johtuu todennäköisesti hajoamisleveyksille käyttämäni lausekkeiden virheestä. Parametrille σ on useissa malleissa saatu arvoksi noin $0,18 \text{ GeV}^2$ [13, s. 97], mikä on lähellä saamaani arvoa $0,206 \text{ GeV}^2$. Vakiotermin V_0 puolestaan asetetaan usein Cornellin potentiaalin tapauksessa nolaksi, mutta eräässä mallissa tälle on saatu arvoksi $-0,29 \text{ GeV}$ [17], mikä ei suuresti eroa saamastani arvosta $-0,383 \text{ GeV}$. Kaiken kaikkiaan määrittämäni parametrien arvot kuulostavat oikean suuruisilta lukuun ottamatta vahvan vuorovaikutuksen kytkentävakiota α_s .

Edellä käsiteltyjen tulosten lisäksi on tärkeää myös varmistua numeeristen menetelmien onnistumisesta. Tätä voidaan tarkastella energiatiloja vastaavien aaltofunktioiden avulla. Kuviossa 5 on esitetty alimpien energiatilojen aaltofunktioita, jotka saadaan Schrödingerin yhtälön dimensiottoman muodon (19) ratkaisuna. Kuvaajien perusteella saadut aaltofunktiot toteuttavat vaaditut reunaehdot (14) eli aaltofunktion arvo on nolla origossa sekä äärettömyydessä. Nämä aaltofunktiot näyttävät tyypillisiltä Schrödingerin yhtälön ratkaisuilta, minkä perusteella Schrödingerin yhtälön numeerinen ratkaiseminen on onnistunut.

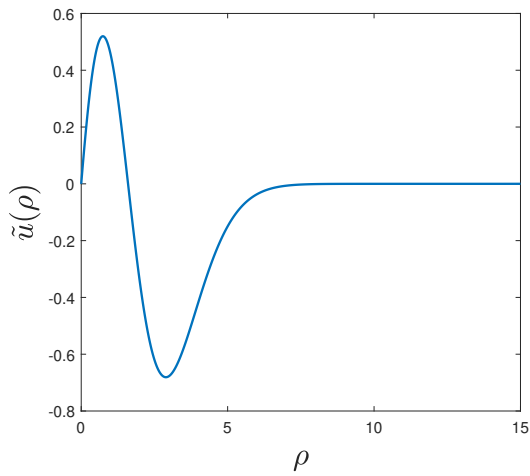
Kaiken kaikkiaan Cornellin potentiaalin avulla saamani tulokset ovat siis linjassa kokeellisten tulosten kanssa. Tämän perusteella Cornellin potentiaalin avulla pystytään kuvaamaan charmoniumia melko hyvin, ja sen avulla pystytään selittämään mitatut energiatilat. Saamistani tuloksista ainoastaan kytkentävakion α_s arvo poikkeaa merkittävästi oletetusta, mikä puolestaan saattaa johtua mitattujen tai teoreettisten hajoamisleveyksien virheestä.



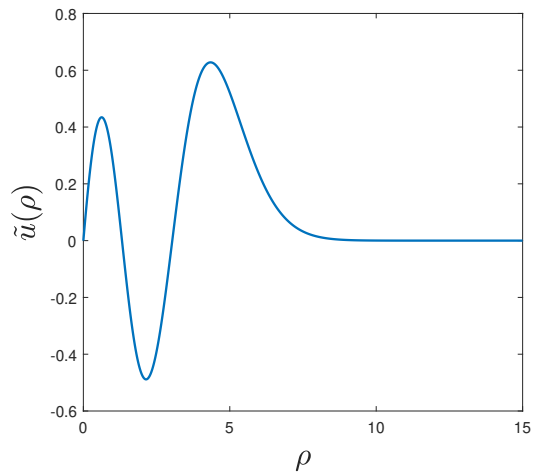
(a) 1S-tilan aaltofunktio



(b) 1P-tilan aaltofunktio



(c) 2S-tilan aaltofunktio



(d) 3S-tilan aaltofunktio

Kuvio 5. Aaltofunktion $\tilde{u}(\rho)$ käyttäytyminen eri kvanttiluvuilla.

5 Päätäntö

Charmonium-hiukkanen on vahvan vuorovaikutuksen säätelemä systeemi, minkä vuoksi sen käsitteleminen tarkasti on hankalaa. Cornellin potentiaali antaa kuitenkin charmoniumille yksinkertaisen lähestymistavan, jonka avulla voidaan ymmärtää charmoniumin mitattujen massojen spektri. Vaikka Cornellin potentiaali onkin epärelativistinen ja sen käyttö perustuu potentiaalin asymptoottisen käyttäytymiseen, saatujen tulosten perusteella se on riittävä kuvaamaan charmoniumin yleisiä ominaisuuksia. Tämän vuoksi Cornellin potentiaali onkin ollut käytössä charmoniumin tutkimuksessa sen julkaisemisesta aina tähän päivään asti.

Tässä tutkielmassa käytettyä lähestymistapaa on vielä mahdollista tarkentaa ottamalla huomioon charmoniumin hienorakenne. Tällöin voitaisiin käyttää esimerkiksi artikkelissa [18] esiteltyä tapaa laskea hienorakenteesta aiheutuvat korjaukset. Olenaisesti tämä vaikuttaisi tuloksiin siten, että massoihin lisättäisiin hienorakenteesta aiheutuva korjaustermi, joka pystytään laskemaan potentiaalin avulla.

Cornellin potentiaali ei kuitenkaan rajoitu pelkästään charmoniumin tapaukseen. Kvarkkien välinen vuorovaikutus on kvarkkilajista riippumaton, joten Cornellin potentiaali kuvaa potentiaalia kvarkin ja antikvarkin välillä riippumatta kvarkin lajista [1, s. 180]. Tämän vuoksi Cornellin potentiaalia voidaan samalla tavoin soveltaa bottonium-hiukkasen tutkimiseen, jolloin tilanne on hyvin samankaltainen kuin charmoniumin tapauksessa. Erityisesti bottoniumin Schrödingerin yhtälö on samaa muotoa, joten Cornellin potentiaalin soveltaminen bottoniumiin pitäisi olla hyvin suoraviivaista.

Uusia charmoniumin massoja havaitaan edelleen, mutta niitä vastaavien tilojen määrittäminen ei ole yksinkertaista. Lisäksi monet löydetyistä massoista kuvaavat monimutkaisempia tiloja, joita ei yksinkertaisilla hiukkasemalleilla voida selittää. Esimerkiksi charmoniumin $X(3872)$ -tilan tapauksessa saattaa yksinkertaisen $c\bar{c}$ -tilan sijaan olla kyse jonkinlaisesta neljän kvarkin molekyylistä [19]. Näiden ymmärtämiseksi tullaan tarvitsemaan kattavampia malleja, mutta charmoniumin alempien tilojen selittämiseksi ovat jo potentiaalimallit riittäviä. Tämän vuoksi Cornellin potentiaali on edelleen ajankohtainen, sillä se tarjoaa helpon ja yksinkertaisen tavan

lähestyä charmoniumin kaltaisia hiukkasia.

Lähteet

- [1] B. R. Martin ja G. Shaw, *Particle Physics*, 3. painos. Wiley, 2008.
- [2] S. L. Glashow, J. Iliopoulos ja L. Maiani, ”Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry”, *Phys. Rev.*, vol. D2, s. 1285–1292, 1970. DOI: 10.1103/PhysRevD.2.1285.
- [3] E. Eichten ym. ”Charmonium: Comparison with Experiment”, *Phys. Rev.*, vol. D21, s. 203, 1980. DOI: 10.1103/PhysRevD.21.203.
- [4] T. Kawanai ja S. Sasaki, ”Potential description of charmonium and charmed-strange mesons from lattice QCD”, *Phys. Rev.*, vol. D92, nro 9, s. 094 503, 2015. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.094503. arXiv: 1508.02178 [hep-lat].
- [5] L. D. Landau ja E. M. Lifshitz, *Quantum Mehcanics*, 2. painos. Pergamon, 1965.
- [6] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 1. painos. Pearson Education Limited, 1995.
- [7] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2. painos. Wiley-VCH, 2008.
- [8] K. Krane, *Modern Physics*, 3. painos. Wiley, 2012.
- [9] T. Löytäinen, ”Lowest order perturbative quantum field theory calculations of bound state decay widths”, pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2017.
- [10] D. R. Lide, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 84. painos. CRC Press, 2004.
- [11] M. Acciarri ym. ”Measurement of the running of the fine structure constant”, *Phys. Lett.*, vol. B476, s. 40–48, 2000. DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00122-2. arXiv: hep-ex/0002035 [hep-ex].
- [12] C. Patrignani ym. ”Review of Particle Physics”, *Chin. Phys.*, vol. C40, nro 10, s. 100 001, 2016. DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.

- [13] N. Brambilla *et al.* "Heavy quarkonium physics", 2004. arXiv: hep-ph/0412158 [hep-ph].
- [14] T. Barnes, S. Godfrey *et al.* E. S. Swanson, "Higher charmonia", *Phys. Rev.*, vol. D72, s. 054026, 2005. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.054026. arXiv: hep-ph/0505002 [hep-ph].
- [15] Y. Li *et al.* "Heavy Quarkonium in a Holographic Basis", *Phys. Lett.*, vol. B758, s. 118–124, 2016. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.04.065. arXiv: 1509.07212 [hep-ph].
- [16] A. Bazavov *et al.* "Determination of α_s from the QCD static energy: An update", *Phys. Rev.*, vol. D90, nro 7, s. 074038, 2014. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.074038. arXiv: 1407.8437 [hep-ph].
- [17] R. N. Faustov *et al.* "Algebraic approach to the spectral problem for the Schrodinger equation with power potentials", *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A15, s. 209–226, 2000. DOI: 10.1142/S0217751X00000094. arXiv: hep-ph/9705421 [hep-ph].
- [18] J. T. Pantaleone, S. H. H. Tye *et al.* Y. J. Ng, "Spin Splittings in Heavy Quarkonia", *Phys. Rev.*, vol. D33, s. 777, 1986. DOI: 10.1103/PhysRevD.33.777.
- [19] E. S. Swanson, "The New heavy mesons: A Status report", *Phys. Rept.*, vol. 429, s. 243–305, 2006. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.04.003. arXiv: hep-ph/0601110 [hep-ph].

A Ohjelmakoodit

Olen jakanut käyttämäni ohjelman kolmeen osaan. Liitteessä A.1 on esitetty Schrödingerin yhtälön (19) ratkaisija, jota käytetään liitteen A.2 ohjelmassa laskemaan funktioiden $\zeta_1(\lambda)$, $\zeta_2(\lambda)$ ja $v(\lambda)$ käyttäytyminen. Liitteessä A.3 puolestaan on esitetty ohjelmakoodi, joka alaluvun 3.3 mukaisesti tekee tarvittavat polynomisovitukset, ratkaisee parametrin λ arvon sekä laskee tämän avulla charmoniumin energiatilojen massat.

A.1 Schrödingerin yhtälön ratkaisija

```
function [ E0,x,y] = SYratkaisija( E1,E2,lambda1,L1, normitus )
global E L x1 x2 lambda
L = L1;                %L-kvanttiluku
lambda = lambda1;     %parametrin lambda arvo
eps = 1e-16;          %tarkkuus
x1 = 1e-13;           %reunaehtopiste x=0
x2 = 15;              %reunaehtopiste x=ääretön

optfzero = optimset('TolX',eps);
optode45 = odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-12);

%Etsitään energia, jolla jäännösvirhe on mahdollisimman pieni.
E0 = fzero( @residuaali, [E1 E2], optfzero );

if nargin < 5
    normitus = false;
end

if normitus
    % Selvitetään funktion kuvaaja ratkaistulla energian arvolla.
```

```

[x y] = ode45( @dydx, [x1 x2], [0 1],optode45);
%Normitetaan ratkaisuna saatu funktio. Loppuosa funktiosta jätetään
%huomioimatta, sillä sen tulisi olla likimain nolla.
%Differentiaaliyhtälön ratkaisemisessa tulevasta virheestä johtuen näin
%ei kuitenkaan välttämättä ole, joten virhe vältetään jättämällä loppu
%pois.
raja = floor(0.9*length(x));
% Integroidaan aaltofunktion neliö normittamista varten.
c = trapz( x(1:raja) ,y(1:raja,1).^2);
y = y/sqrt(c);
end

end

% Potentiaalifunktio, joka riippuu lambdan arvosta.
function v = V(x)
global lambda L
v = L*(L+1)/x.^2.+x-lambda./x;
end

% Ratkaistava differentiaaliyhtälöryhmä eli Schrödingerin yhtälö.
function F = dydx( x, y )
global E
F = zeros(2,1);
F(1) = y(2);
F(2) = (V(x)-E)*y(1);
end

% Kokeiltavalla energian arvolla saatava jäännösvirhe.
function R = residuaali( E_yrite )
global E x1 x2
opts = odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-12);
% Ratkaistaan DY energialla E_yrite
E = E_yrite;

```



```
[~,y] = ode45( @dydx, [x1 x2], [0 1],opts);
R = y(end,1); % Lasketaan poikkeama nolasta loppuarvossa
end
```

A.2 Funktioiden λ -riippuvuuden määrittäminen

```
valeja = 51; %kuinka monella lambdan arvolla lasketaan
E0 = zeros(valeja,2);
lambdat = linspace(0,2,valeja);
alkuarvaus = [2.4 4.1];
u0 = zeros(valeja,1);
lambda = lambdat(1);
L = 0;

% Ratkaistaan ominaisenergiat ja derivaatta nollassa lambdan funktiona,
% kun N=1, L=0.
[E0(1,1),~,y] = SYratkaisija(0, alkuarvaus(1),lambda,L,true);
u0(1) = y(1,2);
for i = 2:valeja
    lambda = lambdat(i);
    [E0(i,1),x,y] = SYratkaisija(0, E0(i-1,1)-0.01,lambda,L,true);
    u0(i) = y(1,2);
    % Tarkastellaan saatujen funktioiden oikeellisuutta piirtämällä
    % kuvaaja.
    if mod(i,10) == 0
        plot(x,y(:,1))
        hold on
    end
end

% Ratkaistaan ominaisenergiat lambdan funktiona, kun N=2 ja L=0.
lambda = lambdat(1);
E0(1,2) = SYratkaisija(E0(1,1)+0.01, alkuarvaus(2),lambda,L);
for i = 2:valeja
    lambda = lambdat(i);
```

```

[E0(i,2),x,y] = SYratkaisija(E0(i,1)+0.01, E0(i-1,2)-0.01,...
    lambda,L,true);
if mod(i,10) == 0
    plot(x,y(:,1))
    hold on
end
end
hold off

% Kerätään saatu tieto yhteen matriisiin ja tallennetaan se
% tekstitiedostoon.
dataMatriisi = zeros(valeja,4);
dataMatriisi(:,1) = lambdat;
dataMatriisi(:,2:3) = E0;
dataMatriisi(:,4) = u0;

fileID = fopen('data.txt','w');
fprintf(fileID,'%10s %12s %12s %12s\r\n','%lambda','zeta1','zeta2', ...
    'ypsilon');
fprintf(fileID,'%10.8f %12.8f %12.8f %12.8f\r\n',dataMatriisi');
fclose(fileID);

```

A.3 Polynomisovitukset ja energiatilojen ratkaiseminen

```

function Energiatilat
format long %Lisätään näytettävien desimaalien määrää.
M = 3.0969; %J/psi-hiukkasen massa

AlphaS = 0.19517496;
psi0 = sqrt(4.4719723e-2); %Aaltofunktion arvo nollassa

% Luetaan funktiot zeta1, zeta2 ja ypsilon tekstitiedostosta.
data = load('data.txt');
lambdas = data(:,1);
ypsilon = data(:,end);

```

```

zeta1 = data(:,2);
zeta2 = data(:,end-1);

% Luodaan polynomivektori polynomisovitusta varten.
polynomi = zeros(length(lambdas),3);
for i = 1:length(lambdas)
    polynomi(i,:) = [1 lambdas(i) lambdas(i)^2];
end

% Polynomisovitusten vakiokertoimien määrittäminen PNS-menetelmällä.
Cypsilon = (polynomi)\ypsilon;
Cerotus = (polynomi)\(zeta2-zeta1);

% Ratkaistaan saadun funktion nollakohta, joka kertoo lambdan arvon.
function z=f(x)
    vakio = 2.7436457;
    z = (Cerotus(1)+Cerotus(2)*x+Cerotus(3)*x^2)/(Cypsilon(1)+...
        Cypsilon(2)*x+Cypsilon(3)*x^2)^(2/3)/x-vakio;
end
lambda = fzero( @f, [0.01 2])

% Lasketaan saadulla lambdan arvolla parametrit.
alkuarvaus = [2.4 3.9 4.3 4.9 5.7]; % Alkuarvaukset ominaisenergioille
%Ratkaistaan ensin N=1, L=0 -tilan aaltofunktio.
[~,~,y]= SYratkaisija(0, alkuarvaus(1),lambda,0,true);
ypsilon0 = y(1,2)
mc = (lambda/(4/3*AlphaS))*(4*pi*(ypsilon0/psi0)^(-2))^(1/3)
sigma = (4/3*AlphaS/lambda)^3*mc^2

% Lasketaan alimpia ominaisenergioita.
Zetat = zeros(5,5);
% Perustilojen ominaisenergiat, N=1, L=0-4
for L = 0:4
    [Zetat(1,L+1),x,y]= SYratkaisija(0, alkuarvaus(L+1),lambda,L,true);

```

```

end
%Viritystilojen ominaisenergiat, N=2-4, L=0-4
for N = 2:4
    for L = 0:4
        [Zetat(N,L+1),x,y]= SYratkaisija(Zetat(N-1,L+1)+0.1, ...
            Zetat(N-1,L+1)+2,lambda,L,true);
    end
end
%Viritystilojen ominaisenergiat, N=5, L=0-4
N=5;
for L = 0:4
    [Zetat(N,L+1),x,y]= SYratkaisija(Zetat(N-1,L+1)+0.1, ...
        Zetat(N-1,L+1)+1.5,lambda,L,true);
end
Zetat
V0 = M-2*mc- (sigma^2/mc)^(1/3)*Zetat(1,1)
Energiat = V0 + 2*mc + (sigma^2/mc)^(1/3)*Zetat
end

```