Minimointiongelmien ratkaiseminen variaatiolaskentaa käyttäen

Veera Partanen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2017

Tiivistelmä: Veera Partanen, *Minimointiongelmien ratkaiseminen variaatiolaskentaa käyttäen* (engl. *Solving minimizing problems by using calculus of variations*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 37. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2018.

Tämän tutkielman tarkoituksena on osoittaa, kuinka variaatiolaskentaa voidaan hyödyntää etsittäessä ratkaisuja minimointiongelmiin. Tutkielmassa johdetaan yksi variaatiolaskennan keskeisimmistä tuloksista, joka on Euler-Lagrangen yhtälö. Yhtälö saadaan johdettua varioimalla ja tarkastelemalla minimoitavan funktionaalin sopivaa derivaatan nollakohtaa.

Tutkielmassa tutustuaan muutamaan mekaniikan ja geometrian minimointiongelmaan. Nämä ääriarvo-ongelmat sisältävät tietyt alku- ja reuna-arvot, jotka ratkaisufunktion on toteutettava. Näiden ehtojen ja Euler-Lagrangen yhtälön avulla saadaan differentiaaliyhtälö, joka voidaan ratkaista. Nopeimman radan ongelmassa ratkaisufunktio osoittautuu sykloidikäyräksi. Valon nopeinta reittiä ratkaistessa muodostuu x:stä riippumaton Euler-Lagrangen yhtälön muunnos, joka voidaan ratkaista differentiaalilaskennan avulla. Päistä ripustettu naru muodostaa yhtälön, jossa ratkaisufunktion on kahdesta edellisestä esimerkistä poiketen toteutettava reunaehtojen lisäksi vielä kolmas ehto, joka saadaan narun pituudesta. Saippuakalvon esimerkissä minimoitava integraali onkin nyt pintaintegraali. Ratkaisufunktio voidaan etsiä jälleen Euler-Lagrangen yhtälöä käyttäen. Muodostuu divergenssimuodossa oleva osittaisdifferentiaaliyhtälö.

Avainsanat: Variaatiolaskenta, variaatiomuoto, minimointiongelma, ääriarvot, Euler-Lagrangen yhtälö, brakistokroniongelma, valon nopein reitti, päistä ripustettu naru, saippuakalvo, minimipinta

Sisältö

Johdanto

Variaatiolaskenta on apuväline ääriarvo-ongelmien ratkaisujen etsimisessä. Voidaan sanoa, että se käsittää lähes kaiken teorian liittyen reaaliarvoisten funktionaalien minimien ja maksimien olemassaoloon ja ratkaisuun. Erityisesti geometrian ja differentiaaliyhtälöiden sekä fysiikan puolelta mekaniikan ääriarvo-ongelmien selvittämisessä se on ollut hyödyllinen työkalu. Nykyään myös muun muassa elektroniikan ja taloustieteiden alat hyödyntävät variaatiolaskennan menetelmiä [6].

Tässä tutkielmassa tarkastellaan kuinka variaatiolaskennan avulla voidaan ratkaista minimointiongelmia. Ensin tutkitaan, miten minimointiongelmat liittyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöihin. Tutkimme muotoa

$$J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx$$

olevia funktionaaleja, jossa haettua ratkaisufunktiota $u(x)$ voidaan varioida variaatioiden joukkoon V kuuluvien funktioiden $v(x)$ avulla. Variaatioiden $u(x) + \epsilon v(x)$ avulla saadaan johdettua funktionaalille $J(u)$ ensimmäinen variaatio, joka on esitetty määritelmässä 1.2. Variaatiomuodon taustalla on siis idea, että pienet muutokset funktionaalissa eivät saa parantaa haettua minimikohtaa. Funktionaalien ääriarvo-ongelmat voidaan ratkaista samantapaisten ehtojen avulla kuin funktioiden ääriarvotapaukset. Tässä tutkielmassa johdetaan funktionaaleille välttämätön ehto, joka ratkaisufunktion tulee toteuttaa, jotta se olisi funktionaalin ääriarvo. Välttämätön ehto tunnetaan myös Euler-Lagrangen yhtälönä ja se on esitetty lauseessa 1.3. Lauseessa siis osoitetaan, että jos funktio u on funktionaalin ääriarvo, niin se toteutaa Eule-Lagrangen yhtälön. Tämä lause on yksi keskeisimmistä tuloksista ja on hyödyllinen työkalu tutkielman esimerkkien ratkaisemisessa. Ääriarvo-ongelmille voitaisiin osoittaa myös toinen suunta eli välttämättömän ehdon avulla voidaan selvittää ratkaisufunktio u. Tätä emme kuitenkaan todista tässä työssä, mutta siihen voi tutustua lähdekirjallisuuden avulla, esimerkiksi Juutisen luentomoniste [6].

Erilaisiin minimointiongelmiin tutustutaan siis tässä tutkielmassa esimerkkien avulla. Euler-Lagrangen yhtälö sai alkunsa brakistokroniongelmasta, joka on klassinen esimerkki variaatiolaskennan ääriarvo-ongelmasta. Johann Bernoulli (1667-1748) esitti nopeimman radan ongelman vuonna 1696 sen ajan matemaatikoille [1]. Ongelmassa halutaan löytää reitti, jota pitkin kappale kulkee pelkän painovoiman ansiosta nopeiten pisteestä A pisteeseen B. Brakistokroniongelman ratkaisivat useat tunnetut matemaatikot kuten Leonhard Euler (1707-1783), joka oli Bernoullin oppilas. Eulerin kehittelemä metodi ongelman ratkaisulle julkaistiin hänen teoksessaan $Mechanica$, 1736 [3]. Myöhemmin tämä metodi on tunnettu Euler-Lagrangen yhtälönä ja se on perusta koko variaatiolaskennalle. Brakistokroniongelma esitetään kappaleessa 2.1 ja siihen liittyvät tulokset pohjautuvat Bruntin kirjaan [1] ja Nishiyaman artikkeliin [11].

Tässä työssä tutkitaan myös, kuinka Eulerin esittämän menetelmän avulla voidaan määrittää valon nopein reitti, kun valo kulkee vain yhdessä väliaineessa. Lisäksi tutkitaan, mihin asentoon molemmista päistään ripustettu naru asettuu. Nämä ongelmat ovat esitetty esimerkeissä 2.2 ja 2.3. Kuten brakistokroniongelmassakin, näissä ongelmissa johdetaan ensin variaatiomuoto funktionaalille. Variaatiomuodosta saadaan Euler-Lagrangen yhtälön muunnos, joka on osittaisdifferentiaaliyhtälö. Tämä yhtälö voidaan ratkaista differentiaalilaskennan keinoin. Viimeisenä esimerkki 2.4, jossa tutkitaan minimipintoja käyttäen apuna työssä johdettavaa saippuakalvon yhtälöä. Minimipinnan yhtälö saadaan ratkaistua samalla menetelmällä kuin edellisten esimerkkien minimointiongelmat. Kaikki tutkielmassa esitetyt esimerkit käydään läpi samassa järjestyksessä. Eli ensin johdetaan minimointiongelmalle variaatiomuoto, josta saadaan ratkaistavaksi differentiaaliyhtälö. Nämä esimerkit on kirjoitettu Eirolan luentomonisteen [2] pohjalta.

LUKU 1

Ensimmäinen variaatio ja Euler-Lagrangen yhtälö

Variaatiolaskenta on funktionaalin ääriarvojen etsimiseen erikoistunut matematiikan ala. Yksi sen keskeisimmistä tuloksista on Eulerin kehittelemä metodi, joka tunnetaan nykyään Euler-Lagrangen yhtälönä. Yhtälön taustalla on differentiaalilaskentaan liittyviä peruskäsitteitä ja -tuloksia sekä funktion ääriarvotarkastelussa käytettäviä menetelmiä. Euler-Lagrangen yhtälöön ja variaatiolaskentaan liittyviä taustatietoja on koottu liitteeseen B.

1.1. Ensimmäinen variaatio

Ennen Euler-Lagrangen yhtälön määrittelemistä johdetaan funktionaalin variaatiomuoto. Tutkitaan funktionaalia J ja sen ääriarvoja. Funktionaalin ääriarvojen määritelmä menee vastaavasti kuten funktioille [ks. liite B]:

Määritelmä 1.1. [1, kappale 2.2] Olkoon $(X, ||\cdot||)$ funktioavaruus ja $S \subseteq X$ joukko. Olkoon lisäksi $J : X \to \mathbb{R}$ funktionaali. Funktionaalilla J on lokaali maksimi $u \in S$, jos on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että $J(\hat{u}) - J(u) \leq 0$ kaikilla $\hat{u} \in S$ ja $||\hat{u} - u|| < \epsilon$.
Vastaavasti samoilla oletuksilla funktionaalille J voidaan määritellä lokaali minimi $u \in S$. Tällöin pätee $J(\hat{u}) - J(u) \geq 0$ kaikille $\hat{u} \in S$, joille $||\hat{u} - u|| < \epsilon$.

Etsimme ratkaisuja minimointiongelmiin sellaisista joukoista S, jotka muodostuvat tietyt ehdot toteuttavista funktioista. Tarkastellaan hieman näitä joukkoja S ja määritellään funktionaalien variaatiomuodon muodostamiseen tarvittavat joukot V.

Joukko S sisältää funktiot $\hat{u}$, jotka kuuluvat funktion $u \in S$ ϵ-ympäristöön. Funktiot $\hat{u}$ voidaan esittää myös funktioiden u ja $v \in X$ avulla.

$$\hat{u} = u + \epsilon v$$

Määritellään joukko V_ϵ, joka koostuu sopivista funktioista v:

$$V_\epsilon = \{v \in X : u + \epsilon v \in S \text{ ja } ||v|| < 1\}.$$

Määritelmässä 1.1 esiintyvien epäyhtälöiden on oltava tosia myös mille tahansa $\hat{\epsilon}$, joille $0 < \hat{\epsilon} < \epsilon$. Koska ϵ on mielivaltainen luku, niin voidaan joukko V_ϵ sopivissa tilanteissa korvata joukolla

$$V = \{v \in X : u + \epsilon v \in S\}.$$

Tässä tutkielmassa joukko X on useimmiten välillä $[x_1, x_2]$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituvien funktioiden joukko $C^2[x_1, x_2]$. Seuraavaksi tutkitaan tarkemmin funktionaaleja joukossa $C^2[x_1, x_2]$.

Olkoon funktionaali $J : C^2[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ muotoa

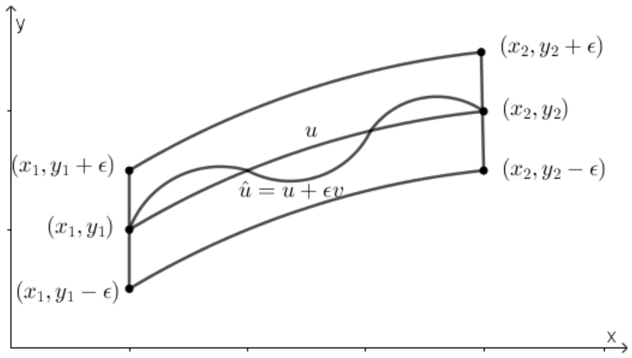
$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u, u')dx. \tag{1.1}$$

Funktiolla f oletetaan siis olevan vähintään toisen kertaluvun jatkuva derivaatta. Tutkimme variaatio-ongelmia, joille on annettu tietyt ehdot, jotka ratkaisun tulee toteuttaa. Olkoon $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Ratkaisufunktion $u \in C^2[x_1, x_2]$ tulee täyttää siis ehdot $u(x_1) = y_1$ ja $u(x_2) = y_2$. Lisäksi funktionaalilla J on lokaali ääriarvo joukossa S kohdassa $u \in S$. Joukko S määritellään nyt seuraavasti

$$S = \{u \in C^2[x_1, x_2] : u(x_1) = y_1 \text{ ja } u(x_2) = y_2\}. \tag{1.2}$$

Joukko S on siis haettujen ratkaisujen joukko. Myös variaatioiden joukko V voidaan määritellä:

$$V = \{v \in C^2[x_1, x_2] : v(x_1) = v(x_2) = 0\}. \tag{1.3}$$



Kuva 1.1. Reuna-arvot ja funktion $\hat{u}$ approksimaatio

Kuva 1.1 havainnollistaa reunaehtojen vaikutuksen ja funktion $\hat{u}$ approksimaation funktion u avulla esitettynä.

Oletetaan, että funktionaalilla J on olemassa ääriarvo joukossa S. Olkoon tämä ääriarvo $u \in S$, joka on lokaali maksimi. (Lokaalin minimin tapauksessa voitaisiin tehdä vastaavanlainen päättely määritelmän 1.1 perusteella.) Tällöin määritelmän 1.1 mukaan on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että $J(\hat{u}) - J(u) \leq 0$ kaikilla $\hat{u} \in S$ joille $||\hat{u} - u|| < \epsilon$. Funktiolle $\hat{u}$ voidaan löytää approksimaatio

$$\hat{u}(x) = u(x) + \epsilon v(x). \tag{1.4}$$

Nyt saadaan funktiolle f muoto

$$f(x, \hat{u}, \hat{u}') = f(x, u + \epsilon v, u' + \epsilon v'). \tag{1.5}$$

Taylorin lauseen mukaan saadaan edelleen (ks. liite B, lause B.13)

$$f(x,\hat{u},\hat{u}') = f(x,u,u') + \epsilon(vf_u(x,u,u') + v'f_{u'}(x,u,u')) + R_{1,x,\hat{u},\hat{u}'}. \tag{1.6}$$

Taylorin polynomi avulla voidaan arvioida määritelmän 1.1 erotusta $J(\hat{u}) - J(u)$:

$$\begin{aligned}
J(\hat{u}) - J(u) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x,\hat{u},\hat{u}')dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x,u,u')dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (f(x,u,u') + \epsilon(vf_u(x,u,u') + v'f_{u'}(x,u,u')) + R_{1,x,\hat{u},\hat{u}'} - f(x,u,u'))dx \\
&= \epsilon \int_{x_1}^{x_2} (vf_u(x,u,u') + v'f_{u'}(x,u,u'))dx + R_{1,x,\hat{u},\hat{u}'}.
\end{aligned}$$

Yhtälössä viimeisin integraali, jota merkataan nyt $\xi J(v,u)$,

$$\xi J(v,u) = \int_{x_1}^{x_2} (f_u(x,u,u')v + f_{u'}(x,u,u')v')dx, \tag{1.7}$$

on funktionaalin *ensimmäinen variaatio.*

Määritelmä 1.2. ([1], kappale 2.2) Olkoon $J : C^2[x_1,x_2] \to \mathbb{R}$ funktionaali ja $S = \{u \in C^2[x_1,x_2] : u(x_1) = y_1 \text{ ja } u(x_2) = y_2\}$ joukko. Olkoon lisäksi $u \in S$ funktionaalin J ääriarvo. Tällöin funktionaalin

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,u,u')dx$$

ääriarvo-ongelman ratkaisulle voidaan esittää funktionaalin ensimmäinen variaatio, joka on muotoa

$$\xi J(v,u) = \int_{x_1}^{x_2} (f_u(x,u,u')v(x) + f_{u'}(x,u,u')v'(x))dx \tag{1.8}$$

ja jossa v on kuten edellä.

1.2. Euler-Lagrangen yhtälö

Ääriarvoja ratkottaessa täytyy muistaa, että funktion on täytettävä välttämätön ehto $f'(x) = 0$, jotta löydetty ratkaisu voi edes olla ääriarvo. Euler-Lagrangen yhtälö johdetaan samantapaisesta ehdosta funktionaaleille.

Lause 1.3. *[1, lause 2.2.3] Olkoon $J : C^2[x_1,x_2] \to \mathbb{R}$ funktionaali muotoa*

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,u,u')dx.$$

Oletetaan, että funktiolla f on toisen kertaluvun osittaisderivaatat olemassa muuttujien x,u,u' suhteen ja $x_1 < x_2$. Olkoon joukko

$$S = \{u \in C^2[x_1,x_2] : u(x_1) = y_1 \text{ ja } u(x_2) = y_2\},$$

missä $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Jos $u \in S$ on funktionaalin J ääriarvo, niin se toteuttaa seuraavan yhtälön kaikilla $x \in [x_1,x_2]$:

$$f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}(f_{u'}(x, u, u')) = 0. \tag{1.9}$$

Lause siis sanoo, että ääriarvo u toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön. Lauseen osoittamiseksi tarvitsemme avuksi kaksi lemmaa.

LEMMA 1.4. *[1, lemma 2.2.1] Olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\alpha < \beta$. Tällöin on olemassa funktio $g \in C^2(\mathbb{R})$ siten, että $g(x) > 0$ kaikilla $x \in (\alpha, \beta)$. Lisäksi $g(x) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}\backslash(\alpha, \beta)$.*

TODISTUS. Määritellään aluksi funktio g, jolla on kaikki lemmassa mainitut ominaisuudet. Tälläinen funktio on esimerkiksi

$$g(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3(\beta - x)^3 & \text{jos } x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

Osoitetaan vielä, että funktio $g(x)$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva pisteissä $x = \alpha$ ja $x = \beta$. Erotusosamäärällä saadaan ensimmäisen kertaluvun toispuoleisille derivaatoille

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \alpha+} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} &= \lim_{x \to \alpha+} \frac{(x-\alpha)^3(\beta - x)^3 - 0}{x - \alpha} \\ &= \lim_{x \to \alpha+} (x - \alpha)^2(\beta - x)^3 = 0 \end{aligned}$$

ja

$$\lim_{x \to \alpha-} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha-} \frac{0 - 0}{x - \alpha} = 0.$$

Joten ensimmäisen kertaluvun derivaatta $g' = 0$. Samalla tavalla voidaan laskea toisen kertaluvun derivaatta.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \alpha+} \frac{g'(x) - g'(\alpha)}{x - \alpha} &= \lim_{x \to \alpha+} \frac{3(x-\alpha)^2(\beta - x)^2(\beta + \alpha - 2x) - 0}{x - \alpha} \\ &= \lim_{x \to \alpha+} 3(x - \alpha)(\beta - x)^2(\beta + \alpha - 2x) = 0 \end{aligned}$$

ja

$$\lim_{x \to \alpha-} \frac{g'(x) - g'(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha-} \frac{0 - 0}{x - \alpha} = 0$$

eli $g''(\alpha) = 0$. Samoilla perusteilla voidaan osoittaa, että $g''(\beta) = 0$. Tällöin funktion g toinen derivaatta on

$$g''(x) = \begin{cases} 6(x-\alpha)(\beta - x)[(x-\alpha)^2 + (\beta - x)^2 - 3(x-\alpha)(\beta - x)] & \text{jos } x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

Tästä saadaan

$$\lim_{x \to \alpha} g''(x) = g''(\alpha) = 0$$

ja

$$\lim_{x\to\beta} g''(x) = g''(\beta) = 0,$$

joten selvästi funktio g on vähintään kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva.

□

LEMMA 1.5. *[1, lemma 2.2.2] Merkitään* $\langle v, w\rangle = \int_{x_1}^{x_2} v(x)w(x)dx$, *kun* $v \in V$. *Oletetaan, että* $\langle v, w\rangle = 0$ *kaikilla* $v \in V$. *Jos* $w : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva funktio, niin* $w = 0$ *välillä* $[x_1, x_2]$.

TODISTUS. Oletetaan, että $w \neq 0$ jollekin $c \in [x_1, x_2]$. Voidaan tehdä oletus, että $w(c) > 0$ ja funktion w jatkuvuuden nojalla $c \in (x_1, x_2)$. Koska w on jatkuva suljetulla välillä $[x_1, x_2]$, niin on olemassa luvut α, β siten, että $x_1 < \alpha < c < \beta < x_2$ ja $w(x) > 0$ kaikilla $x \in (\alpha, \beta)$. Edellinen lemma 1.4 sanoo, että on olemassa funktio $g \in C^2[x_1, x_2]$ siten, että $g(x) > 0$ kaikilla $x \in (\alpha, \beta)$ ja $g(x) = 0$ kaikilla $x \in [x_1, x_2]\backslash(\alpha, \beta)$. Tällöin $g \in V$ ja

$$\langle g, w\rangle = \int_{x_1}^{x_2} g(x)w(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)w(x)dx > 0.$$

Tämä on ristiriidassa lemman oletuksen, $\langle v, w\rangle = 0$ kaikilla $v \in V$, kanssa. Niinpä $w = 0$ avoimella välillä (x_1, x_2) ja jatkuvuuden perusteella $w = 0$ suljetulla välillä $[x_1, x_2]$. □

TODISTUS. (Lause 1.3) Johdimme edellisessä kappaleessa funktionaalin variaatiomuodon

$$\xi J(v, u) = \int_{x_1}^{x_2} (v(x)f_u(x, u, u') + v'(x)f_{u'}(x, u, u'))dx.$$

Haluamme siis löytää ehdon, jonka on toteuduttava, jotta funktio u voisi olla ratkaisu funktionaalin ääriarvo-ongelmaan. Huomataan aluksi, että jos $v \in V$, niin myös $-v \in V$ ja $\xi J(v, u) = -\xi J(-v, u)$. Jotta funktionaalin lokaali maksimi olisi $J(u)$, niin erotuksen $J(\hat{u}) - J(u)$ merkki ei saa vaihtua millekään $\hat{u} \in S$, jolle $||\hat{u} - u|| < \epsilon$. Tällöin siis pienelle ϵ, erotuksen $J(\hat{u}) - J(u)$ etumerkin määrää ensimmäisen variaation merkki, paitsi jos $\xi J(v, u) = 0$ kaikille $v \in V$. Täytyy siis olla, että jos $J(u)$ on lokaali maksimi, niin kaikille $v \in V$ pätee

$$\xi J(v, u) = \int_{x_1}^{x_2} (v(x)f_u(x, u, u') + v'(x)f_{u'}(x, u, u'))dx = 0 \tag{1.10}$$

Samanlainen päättely voidaan tehdä funktionaalin minimille. Funktionaalin ääriarvon välttämätön ehto 1.10 on nyt pätevä myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin tulee muistaa, että ehdon

$$(v_1, v_2, ..v_n) \cdot (f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n}) = 0,$$

tulee päteä kaikilla $v \in \mathbb{R}^n$. Variaatiojoukon V valinta voi olla hankalaa tällaisessa tilanteessa. Laskemalla kuitenkin yhtälöä 1.10 auki, huomataan, että tilanne helpottuu hieman. Käyttämällä osittaisintegrointia integraalin toiseen termiin, saadaan tekijä $v'(x)$ eliminoitua yhtälöstä. Lisäksi käytetään ehtoja $v(x_1) = 0$ ja $v(x_2) = 0$. Saadaan

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} f_{u'}(x,u,u')v'(x)dx &= \Big/_{x_1}^{x_2} f_{u'}(x,u,u')v(x) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u'))v(x)dx \\ &= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(f_{u'}(x,u,u'))v(x)dx.\end{aligned}$$

Kun toinen termi sijoitetaan takaisin alkuperäiseen integraaliin 1.10, saadaan se muotoon

$$\xi J(v,u) = \int_{x_1}^{x_2} (f_u(x,u,u')v(x) - \frac{d}{dx}(f_{u'}(x,u,u')v(x))dx \tag{1.11}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (f_u(x,u,u') - \frac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u'))v(x)dx = 0. \tag{1.12}$$

Tutkitaan vielä funktion v vaikutusta integraalissa 1.12. Määritellään seuraavaksi funktio $E : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$,

$$E(x) = f_u(x,u,u') - \frac{d}{dx}(f_{u'}(x,u,u')),$$

jossa mikä tahansa kiinnitetty $u \in C^2[x_1, x_2]$, on jatkuva välillä $[x_1, x_2]$. Tällöin funktion E määrittävät osittaisderivaatat kiinnitetyllä funktiolla u ovat määriteltyjä pisteessä $(x, u(x), u'(x))$. Tutkittava integraali voidaan kirjoittaa nyt muodossa

$$\langle v, E\rangle = \int_{x_1}^{x_2} v(x)E(x)dx = 0. \tag{1.13}$$

Lemman 1.5 nojalla $E(x) = 0$ eli saatiin osoitettua, että funktio u on funktionaalin ääriarvo, kun se toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön

$$f_u(x,u,u') - \frac{d}{dx}(f_{u'}(x,u,u')) = 0.$$

$\square$

Euler-Lagrangen yhtälö sisältää reunaehdot $u(x_1) = y_1$ ja $u(x_2) = y_2$.

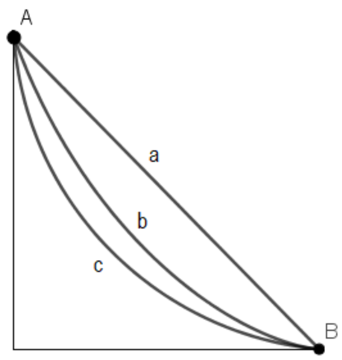
Huomautus 1.6. Ratkaisufunktiota u selvitettäessä on siis välttämättömän ehdon (Lause 1.3) toteuduttava. Tässä työssä pidämme yleisenä oletuksena, että Euler-Lagrangen yhtälöstä seuraa ratkaisufunktio u. Osoitus toiseen suuntaan löytyy esimerkiksi Juutisen luentomonisteesta [6].

LUKU 2

Esimerkkejä

2.1. Nopeimman radan ongelma (Brakistokroniongelma)

2.1.1. Mallin johtaminen. [11] Brakistokroniongelmassa lähtökohtana on löytää reitti, jossa kappale kulkee nopeiten pisteestä A pisteeseen B. Kuva 2.1.1 esittää eri ratkaisuvaihtoehtoja nopeimman radan ongelmaan. Kappaleen kulkeman reitin käyrää ei tiedetä, joten on löydettävä jokin keino, miten ratkaista ongelma. Merkataan tässä vaiheessa nopeimman radan käyrää funktiolla $u(x)$. Funktio u siis kertoo siis korkeuden, jossa kappale on kohdassa x.



Kuva 2.1. Reitti b on ratkaisu nopeimman radan ongelmaan

Merkataan kappaleen liikkeeseen kulunutta aikaa T:n avulla. Kun kappale kulkee matkan x, voidaan matkaan kulunut aika laskea seuraavan lausekkeen avulla

$$T(u) = \int_0^x \sqrt{\frac{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{2gu}}dx = \int_0^x \sqrt{\frac{1+u'^2}{2gu}}dx. \tag{2.1}$$

Johdetaan seuraavaksi lauseke (2.1): Kun kappale on lähtöpisteessä A, voidaan ajanhetkeä siinä pisteessä merkata t_A:n avulla. Samalla tavoin pisteessä B ajanhetkeä t_B:llä. Kun kappale kulkee matkan pisteestä A pisteeseen B, voimme laskea liikkeen kestoa, T, integraalin avulla:

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt. \tag{2.2}$$

Integroimismuuttujaa dt voidaan kirjoittaa auki muuttujien x ja u avulla. Lisäksi apuna tarvitaan Pythagoraan lausetta sekä fysiikan puolelta kappaleen mekaniikkaan liittyviä tunnettuja yhtälöitä. Kappaleen kulkema matka voidaan laskea, kun huomataan Pythagoraan lauseen avulla, että

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{2.3}$$

Mekaniikassa kappaleen nopeus, v, voidaan ilmaista kuljetun matkan, s, ja siihen käytetyn ajan, t, avulla. Toisaalta nopeus voidaan ilmaista myös kuljetun matkan aikaderivaattana eli

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2.4}$$

Nopeuden yhtälö saadaan ketjusäännöllä muotoon, jota on helpompi hyödyntää myöhemmin:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}. \tag{2.5}$$

Kappaleen nopeuden laskemiseen voidaan myös hyödyntää energiansäilymislakia [8]. Kun kappale on lähtöpisteessä A, on sillä pelkästään potentiaalienergiaa. Kuljettaessa pisteestä A pisteeseen B kappaleen potentiaalienergia muuttuu liike-energiaksi ja pisteessä B kappaleella on pelkkää liike-energiaa. (Oletetaan, että pisteen B korkeus on valittu nollatasoksi.) Energiansäilymislain nojalla saamme yhtälön

$$mgu = \frac{1}{2}mv^2. \tag{2.6}$$

Tässä yhtälössä u on kappaleen sijainti nollatasoon nähden, m on kappaleen massa ja g maan putoamiskiihtyvyys. Yhtälöstä (2.6) voidaan laskea nopeudelle v myös toisenlainen lauseke

$$v = \sqrt{2gu}. \tag{2.7}$$

Käyttämällä edellä annettuja yhtälöitä ja sijoittamalla ne lausekkeeseen (2.2) saadaan:

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}dx.$$

Edelliseen yhtälöön sijoitetaan yhtälöstä (2.4) saatu $\frac{1}{v} = \frac{dt}{ds}$ ja yhtälöstä (2.3) $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}$. Kun vielä sijoitetaan yhtälöstä (2.7) saatu kaava nopeudelle ja merkataan $u' = \frac{du}{dx}$, niin saadaan haettu malli (2.1)

$$\begin{aligned}&\int_0^x \frac{1}{v}\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}dx\\ =&\int_0^x \sqrt{\frac{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{2gu}}dx\\ =&\int_0^x \sqrt{\frac{1+u'^2}{2gu}}dx.\end{aligned}$$

Ratkaisua $u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ rajoittaa kappaleen kulkeman reitin lähtö-ja päätepisteet. Eli ratkaisulle u saadaan reuna-arvot $u(x_1) = y_1$ ja $u(x_2) = y_2$. Tällöin ratkaisufunktio u kuuluu siis joukkoon

$$S = \{u \in C^2[x_1, x_2] : u(x_1) = y_1 \text{ ja } u(x_2) = y_2\}. \tag{2.8}$$

2.1.2. Mallin ratkaiseminen Euler-Lagrangen yhtälön avulla. Nopeimman radan ongelmassa saadaan siis integraali, joka ei riipu muuttujasta x. Tällaisille funktionaaleille löytyy Euler-Lagrangen yhtälön muunnos, jonka avulla ratkaisu on helpompi löytää.

LAUSE 2.1. *[1, lause 2.3.1] Olkoon $J : C^2[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ funktionaali, joka on muotoa*

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(u, u')dx. \tag{2.9}$$

Olkoon lisäksi H muotoa

$$H(u, u') = u'f_{u'} - f. \tag{2.10}$$

H on vakio kaikilla funktionaalin J ääriarvoilla $u \in C^2[x_1, x_2]$.

TODISTUS. Oletetaan, että u on funktionaalin $J(u)$ jokin ääriarvo. Ääriarvokohdassa funktion derivaatta on nolla, joten nyt tulisi olla $\frac{d}{dx}H(u, u') = 0$. Nyt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}H(u, u') &= \frac{d}{dx}\big(u'f_{u'} - u\big)\\ &= u'f_{u'} + \frac{d}{dx}f_{u'} - \big(uf_u + u''f_{u'}\big)\\ &= u'\big(\frac{d}{dx}f_{u'} - f_u\big).\end{aligned}$$

Sulkujen sisälle jäävä yhtälö on saa arvon nolla Euler-Lagrangen yhtälön (1.9) nojalla, sillä oletimme funktion u olevan ääriarvo. Saadaan siis

$$\frac{d}{dx}H(u,u') = u' \cdot 0$$
$$\frac{d}{dx}H(u,u') = 0,$$

mikä tarkoittaa, että $H(u,u')$ on vakio, kun u on ääriarvo.

□

Nopeimman radan ongelmassa minimoitava integraali on muotoa

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1+u'^2}{2gu}}dx,$$

joten funktio f on

$$f(x,u,u') = \sqrt{\frac{1+u'^2}{2gu}}. \tag{2.11}$$

Funktionaaleille, jotka vastaavat muotoa (2.11) olevia funktioita, voidaan löytää ratkaisu lauseen 2.1 avulla. Sijoitetaan funktio f yhtälöön (2.10) ja merkataan saatavaa vakiota kirjaimella c. Sijoituksesta saadaan

$$\sqrt{\frac{1-u'^2}{2gu}} - u'\left(\frac{u'}{\sqrt{2gu(1+u'^2)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2gu(1+u'^2)}} = c.$$

Kun molemmat puolet korotetaan neliöön ja järjestämällä muuttujat u ja u' samalle puolelle ja vakiot g ja c toiselle puolelle, saadaan

$$\frac{1}{2gu(1+u'^2)} = c^2$$

$$\Leftrightarrow u(1+u'^2) = \frac{1}{2gc^2}. \tag{2.12}$$

Lause 2.2. *Olkoon $S \subset C^2[x_1,x_2]$ joukko. Olkoon lisäksi $u \in S$ funktionaalin $J : C^2[x_1,x_2] \to \mathbb{R}$ minimoiva ääriarvo, missä*

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}dx.$$

Tällöin funktio $u : [x_1,x_2] \to \mathbb{R}$ toteuttaa yhtälön

$$u(1+u'^2) = c, \tag{2.13}$$

missä c on jokin vakio. Yhtälön ratkaisut voidaan esittää parametrimuodossa

$$x(\theta) = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \tag{2.14}$$

$$u(\theta) = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta), \tag{2.15}$$

joissa $\theta \in [0, 2\pi]$ *ja* $k = \frac{1}{c^2}$.

Ennen lauseen todistamista määritellään sykloidikäyrä.

MÄÄRITELMÄ 2.3. [11, kappale 6] Olkoon $\theta \in [0, 2\pi]$ ympyrän vaihekulma. Tällöin sykloidikäyrä voidaan esittää parametrimuodossa

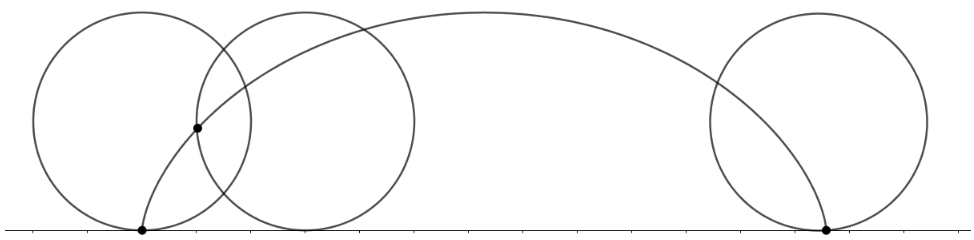
$$x(\theta) = r(\theta - \sin\theta) \tag{2.16}$$

$$y(\theta) = r(1 - \cos\theta). \tag{2.17}$$

Sykloidin yhtälö voidaan esittää myös differentiaalimuodossa, jolloin

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(dy/d\theta)^2}{(dx/d\theta)^2} = \frac{2r - y}{y}. \tag{2.18}$$

Kuva 2.1.2 esittää sykloidikäyrän muodostumista. Käyrä syntyy, kun r-säteinen ympyrä liikkuu tasaisella alustalla. Ympyrän kehälle kiinnitetyn pisteen liikerata muodostaa ympyrän liikkuessa sykloidikäyrän.



KUVA 2.2. Sykloidikäyrän muodostuminen

Nyt voimme todistaa lauseen 2.2.

TODISTUS. Todistetaan lauseen väite käyttämällä apuna nopeimman radan ongelmaa, jossa vakiota voidaan merkata $\frac{1}{2gc^2} =: 2A$. Tämä vakion valinta tullaan perustelemaan myöhemmin, kun ratkaistaan y:n derivaattaa. Järjestämällä yhtälöä (2.12) uudelleen ja sijoittamalla vakio $2A$, voidaan yhtälöstä ratkaista u':

$$u' = \sqrt{\frac{2A - u}{u}}. \tag{2.19}$$

Differentiaaliyhtälön (2.19) avulla on helppo määrittää u välille

$$2A \geq u \geq 0. \tag{2.20}$$

Nopeimman radan selvittämistä varten valittiin alussa kappaleen lähtökohdaksi piste A ja päätekohdaksi piste B. Ratkaisu saadaan yhdistettyä nopeimman radan ongelmassa asetettuihin ehtoihin, kun valitaan vakio uudelleen. Kun tulkitaan kappaleen kulkema reitti sykloidikäyränä, niin kappaleen lähtöpisteessä $u = 0$ ja $\theta = 0$. Sykloidikäyrän parametrimuodosta (2.17) saadaan ratkaisulle u muoto

$$u = A - A\cos\theta. \tag{2.21}$$

Saadaan

$$du = A\sin\theta d\theta. \tag{2.22}$$

Palataan takaisin differentiaaliyhtälöön (2.19). Samoin merkinnöin, saadaan yhtälö esitettyä myös parametrimuodossa:

$$\begin{aligned} u' &= \sqrt{\frac{2A - u}{u}} \\ &= \sqrt{\frac{2A - (A - A\cos\theta)}{A - A\cos\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{A + A\cos\theta}{A - A\cos\theta}}. \end{aligned}$$

Neliöjuuren sisällä tehtävä vähennyslasku $2A - (A - A\cos\theta)$ perustelee nyt vakion $2A$ valinnan.

Trigonometriassa on olemassa kaksinkertaisten kulmien muunnos, jota voidaan käyttää myös kulmaan θ. Ensimmäisenä saadaan yhtälöstä (2.22):

$$du = 2A\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta. \tag{2.23}$$

Lisäksi u' voidaan esittää nyt muodossa

$$u' = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{2.24}$$

Yhtälöiden (2.24) ja (2.23) avulla voidaan osoittaa yhteys muuttujan x ja kulman θ välillä. Sitä ennen on kuitenkin ratkaistava du yhtälöstä (2.24):

$$du = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}dx. \tag{2.25}$$

Nyt yhdistämällä yhtälöt (2.23) ja (2.25) saadaan ratkaistua dx:

$$2A\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}dx$$
$$2A\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = dx.$$

Kun käytetään puolikkaiden kulmien laskusääntöä $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$, niin saadaan

$$dx = A - A\cos\theta d\theta. \tag{2.26}$$

Integroimalla molemmat puolet, voidaan vielä ratkaista x:

$$x(\theta) = A(\theta - \sin\theta) + D, D = vakio. \tag{2.27}$$

Vakio D saa arvon nolla, sillä lähtöpisteessä myös $x = 0$ ja lähtökulma $\theta = 0$. Euler-Lagrangen yhtälölle saatiin parametrimuotoiset ratkaistut

$$x(\theta) = A(\theta - \sin\theta) \tag{2.28}$$
$$u(\theta) = A(1 - \cos\theta). \tag{2.29}$$

Koska merkkaamamme $2A$ on vakio, voidaan se kirjoittaa merkinnän $2A = k$ avulla, jolloin $A = \frac{k}{2}$. Nyt saadut parametrimuotoiset ratkaisut (2.28) ja (2.29) palautuvat lauseessa esitetyiksi ratkaisuiksi

$$x(\theta) = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \tag{2.30}$$
$$u(\theta) = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta). \tag{2.31}$$

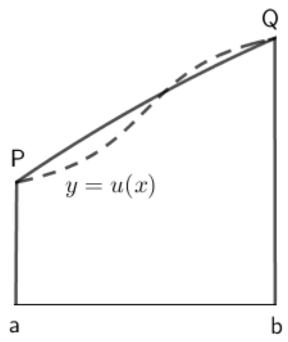
$\square$

Sykloidi voidaan esittää myös differentiaalimuodossa (2.18), joka vastaa yhtälöä (2.19). Koska ääriarvo-ongelmien ratkaisun täytyy toteuttaa differentiaaliyhtälö,sykloidi on ratkaisu nopeimman radan minimointiongelmaan. Kun kappale laitetaan liikkeelle pisteestä A ja annetaan sen vapaasti liukua, niin se saavuttaa päätepisteen nopeiten liikkumalla sykloidikäyrän muotoista rataa pitkin.

Edellä siis osoitettiin, että minimoijafunktio u, joka oli nyt sykloidikäyrä, toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön. Ongelman ratkaisufunktio johdettiin kuitenkin oletuksella, että Euler-Lagrangen yhtälöstä saadaan ratkaistua minimoijafunktio u. Tätä ei kuitenkaan tässä työssä todisteta, mutta osoitus toiseen suuntaan löytyy lähdekirjallisuudesta [6].

2.2. Valon nopein reitti

Fermat'n periaatteen mukaan valo pyrkii aina kulkemaan sellaista reittiä pitkin, johon kulutettu aika on mahdollisimman lyhyt. Valon nopeus on tunnetusti vakio, mutta voimme myös merkata valon nopeutta pisteessä (a, b) a:n ja b:n funktiona $c(a, b)$.



KUVA 2.3. Valon kulkiessa pisteestä P pisteeseen Q mahdollisia kulkureittejä kuvataan funktiolla $u(x)$.

Siirrytään tutkimaan reittiä, jota pitkin valo kulkee pisteestä $P = (x_1, y_1)$ pisteeseen $Q = (x_2, y_2)$. Koska mahdollisia reittejä on monta, merkataan niitä yleisesti funktiolla $u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. Funktion u tulee täyttää seuraavat reunaehdot, jotta se voisi olla ratkaisu nopeimman reitin ongelmaan:

$$u(x_1) = y_1 \tag{2.32}$$

$$u(x_2) = y_2. \tag{2.33}$$

Valo kulkee matkan $ds = \sqrt{1 + u'(x)^2}dx$. Matkaan kulutetun ajan differentiaali saadaan yhtälöstä $dt = \frac{ds}{dv}$. Tällöin siis

$$dt = \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{c(x, u(x))}dx. \tag{2.34}$$

Koko matkaan kulunut aika saadaan näin ollen integroimalla yhtälö (2.34):

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{c(x, u(x))}dx. \tag{2.35}$$

Minimoimalla yhtälö (2.35) saadaan reitti, jota pitkin valo kulkee [2, esimerkki 16.1]. Minimointiongelma voidaan ratkaista jälleen variaatiomuotoa käyttäen kuten kappaleessa 2.1 nopeimman radan ongelman kanssa.

Integroitava funktionaali on nyt muotoa

$$f(x, u, u') = \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}dx}{c(x, u(x))}. \tag{2.36}$$

Minimoitava integraali on siis

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x), u'(x))dx \tag{2.37}$$

ehdoilla $u(x_1) = y_1$ ja $u(x_2) = y_2$.

LAUSE 2.4. *Olkoon $u \in C^2[x_1, x_2]$ funktio. Oletetaan, että funktio u minimoi funktionaalin J, joka on muotoa*

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+u'^2}}{u} dx.$$

Lisäksi funktio u toteuttaa reunaehdot $u(x_1) = y_1$ ja $u(x_2) = y_2$. Tällöin ratkaisufunktio u toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön

$$\sqrt{1+u'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}u}\right) = 0. \tag{2.38}$$

TODISTUS. Lause 1.3 antaa välttämättömän ehdon ääriarvoratkaisun olemassaololle

$$f_u(x,u,u') - \frac{d}{dx}(f_{u'}(x,u,u')) = f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} = 0.$$

Kun asetetaan f:n paikalle funktio $f(x,u,u') = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{u}$, niin saamme välttämättömän ehdon muotoon

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{1+u'^2}}{u}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{1+u'^2}}{u}\right)\right) = 0.$$

Laskemalla osittaisderivaatat auki saadaan haettu yhtälö

$$\sqrt{1+u'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}u}\right) = 0.$$

□

Valon nopeimman reitille Euler-Lagrangen yhtälö on siis muotoa [2]

$$c_u(x,u)\frac{\sqrt{1+u'^2}}{c(x,u)^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}c(x,u)}\right) = 0. \tag{2.39}$$

Tässä muodossa oleva differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista tavallisen differentiaaliyhtölän reuna-arvotehtävän muodossa vain, jos f on riittävän sileä ja $u \in C^2$. Yhtälöä (2.39) derivoimalla ja sieventämällä saadaan se siis muotoa $G(x,u,u',u'') = 0$ olevaksi differentiaaliyhtälöksi reuna-ehdoilla $u(a) = A$ ja $u(b) = B$.

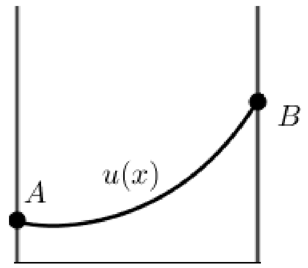
$$u''(x) = \frac{1+u'(x)^2}{c(x,u(x))}(c_x(x,u(x))u'(x) - c_u(x,u(x))). \tag{2.40}$$

Jos valonnopeus on vakio eli valo kulkee vain yhdessä väliaineessa niin tällöin $u''(x) = 0$. Tällöin valon nopein reitti olisi suora, mikä on ratkaisuna järkevä.

Esimerkissä todistettiin lause 2.4, joka osoittaa, että minimoijafunktio u toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön muunnoksen. Minimointiongelman ratkaisua varten kuitenkin oletetaan myös toinen suunta: jos Euler-Lagrangen yhtälö toteutuu, niin voidaan ratkaista minimoijafunktio u.

2.3. Päistä ripustettu naru

Tutkitaan seuraavaksi narua, joka on kiinnitetty molemmista päistään ja saa muuten roikkua vapaasti. Narun pituus on vakio L. Kun naruun ei kohdistu muita ulkopuolisia voimia kuin maan vetovoima $\vec{G}$, asettuu se vapaasti asentoon, jota voidaan kuvata funktiolla $u(x), x \in [0, c]$. Narulle voidaan laskea potentiaalienergia pisteessä x. Fysiikasta tuttujen yhtälöiden avulla kappaleen potentiaalienergia voidaan laskea, kun tiedetään kappaleen massa m ja korkeus h, jossa kappale on nollatasoon nähden. Narulle saadaan massa, kun tiedetään narun tiheys ρ sekä narun pätkän pituus $ds = \sqrt{1 + u'(x)^2}dx$. Tällöin



Kuva 2.4. Päistään ripustettu naru asettuu asentoon, jota voidaan kuvata funktiolla $u(x)$.

$$m = \rho V = \rho\sqrt{1 + u'(x)^2}dx. \tag{2.41}$$

Kappaleen eli tässä tapauksessa narun pätkän korkeus nollatasoon nähden on $u(x)$. Joten potentiaalienergialle saadaan yhtälö

$$E_p = mgh = g\rho u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}dx. \tag{2.42}$$

Fysiikan lakien mukaan kappale pyrkii minimoimaan energian, eli naru asettuu muotoon, jossa potentiaalienergia on pienin. Minimoitava integraali on nyt siis

$$\int_0^c u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}dx. \tag{2.43}$$

Ehtoina minimoitavalle integraalille (2.43) on $u(0) = y_1$ ja $u(c) = y_2$. Lisäksi narun pituudesta saamme vielä, että $\int_0^c \sqrt{1 + u'(x)^2}dx = L$. Nämä kolme ehtoa tulee siis ottaa huomioon ratkaisufunktiota u etsittäessä.

Esimerkissä käytettävät alkuarvot voidaan esittää myös yleisessä muodossa:

$$u(a) = A, u(b) = B \text{ ja } \int_a^b \eta(x, u(x), u'(x))dx = C.$$

Päistä ripustetun narun tapauksessa on siis $\eta(x, u(x), u'(x)) = \sqrt{1 + u'(x)^2}$. Seuraava lause kertoo kuinka muotoa (2.43) oleville integraaleille voidaan löytää ratkaisufunktio u Euler-Lagrangen yhtälön avulla ottaen huomioon annetut alkuarvot.

LAUSE 2.5. [2, *esimerkki* 16.4] *Olkoon* $u : C^2[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ *funktio, joka minimoi funktionaalin*

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}dx \tag{2.44}$$

alkuarvoilla $u(a) = A, u(b) = B$ *ja* $\int_a^b \eta(x, u(x), u'(x))dx = C$.

Tällöin se toteuttaa yhtälön

$$f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}f_{u'}(x, u, u') = \lambda[\eta_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}\eta_{u'}(x, u, u')], \tag{2.45}$$

jossa $\lambda \in \mathbb{R}$, *funktio* $f(x, u, u') = u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}$ *ja* η *kuten edellä.*

TODISTUS. Integraalia $\int_a^b \eta(x, u, u')dx$ voidaan kutsua myös rajoitusintegraaliksi, sillä se antaa myös ehdon ratkaisulle u. Funktioista f ja η on oletettava, että ne ovat riittävän sileitä eli tässä tapauksessa vähintään C^2-funktioita.

Jälleen määritellään variaatioavaruus V:

$$V = \{v \in C^1[a, b] | v(a) = 0, v(b) = 0\}$$

Minimointiongelmia ratkottaessa ratkaisufunktion u on toteutettava Euler-Lagrangen yhtälö

$$f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}f_{u'}(x, u, u') = 0$$

tai kuten Euler-Lagrangen yhtälön todistuksessa sivulla 8 kävi ilmi

$$\int_a^b ((f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}f_{u'}(x, u, u'))v(x))dx = 0. \tag{2.46}$$

Päistä ripustetun narun tapauksessa on lisäksi vielä otettava kolmas alkuehto huomioon. Rajoitusintegraalin arvo on oltava vakio eli sen derivaatta on nolla. Tämä tarkoittaa sitä, että ehto (2.46) toteutuu vain niillä vektoreilla $v \in V$, joille

$$\frac{d}{d\epsilon}\int_a^b \eta(x, u + \epsilon v, u' + \epsilon v')dx = 0. \tag{2.47}$$

Integraali (2.47) voidaan integroida osittain, jolloin kaikille mahdollisille variaatiosuunnille v pätee pisteessä $\epsilon = 0$

$$\int_a^b [\eta_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}\eta_{u'}(x, u, u')]vdx = 0. \tag{2.48}$$

Käyttämällä samaa esitystapaa kuin lemmassa 1.5 välttämättömälle ehdolle, saadaan se muotoon

$$\langle q(f), v\rangle = 0 \text{ kaikilla } v \in V, \text{ joilla } \langle \eta(f), v\rangle = 0. \tag{2.49}$$

Tässä $q(f)(x) = f_u(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} f_{u'}(x, u(x), u'(x))$. Välttämättömätön ehto (2.49) voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} f_{u'}(x, u, u') = \lambda[\eta_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}\eta_{u'}(x, u, u')], \tag{2.50}$$

jossa $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Päistä ripustetun narun ongelmalle saadaan näin ollen välttämättömän ehdon muotoon

$$\sqrt{1 + u'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{uu'}{\sqrt{1 + u'^2}}\right) = -\lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\right),$$

joka siis on Euler-Lagrangen yhtälön muunnos [2]. Edelleen derivoimalla

$$(u + \lambda)u'' = 1 + u'^2. \tag{2.51}$$

Yhtälöstä (2.51) saadaan selvitettyä funktio u ratkaisemalla toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.

Päistä ripustetun narun ongelma voidaan myös ratkaista yksinkertaistamalla integroitavaa differentiaaliyhtälöä. Tässä käytetään samaa lausetta kuin nopeimman radan ongelmassa eli lausetta 2.1. Lause sanoo, että funktio

$$H(u, u') = u' f_{u'} - f \tag{2.52}$$

on vakiofunktio, jos u minimoi funktionaalin $J(u)$.

Lause 2.6. [1, *kappale* 2.3.3] *Olkoon $u \in C^2[x_1, x_2]$ funktio, joka minimoi muotoa*

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} u\sqrt{1 + u'^2}dx \tag{2.53}$$

olevan funktionaalin. Tällöin se toteuttaa yhtälön

$$\frac{u^2}{1 + u'^2} = c^2, \tag{2.54}$$

missä c on jokin vakio.

Todistus. Yhtälö (2.54) saadaan, kun sijoitetaan $f(x, u, u') = u\sqrt{1 + u'^2}$. Tällöin

$$\begin{aligned}H(u,u') &= uf_{u'}(x,u,u') - f(x,u,u')\\ &= u'\frac{uu'}{\sqrt{1+u'^2}} - u\sqrt{1+u'^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}}(uu'^2 - u - uu'^2)\\ &= -\frac{u}{\sqrt{1+u'^2}} = c.\end{aligned}$$

Jos $c = 0$, niin selvästi ainoa ratkaisu yhtälölle on $u = 0$. Oletetaan, että $c \neq 0$. Ratkaistaan yhtälöstä (2.54) u':

$$u' = \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}. \tag{2.55}$$

Koska $u' = \frac{du}{dx}$, niin integroimalla edellinen yhtälö saadaan

$$x = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}} = c\log\left(\frac{u + \sqrt{u^2 - c^2}}{c}\right) + d.$$

Vakio d on integroimisvakio. Ratkaistaan yhtälöstä u, sillä haluamme osoittaa, että u toteuttaa yhtälön (2.54). Siirretään vakio toiselle puolelle ja jaetaan c:llä. Logaritmi saadaan eliminoitua eksponenttifunktion avulla.

$$\begin{aligned}\frac{x-d}{c} &= \log\left(\frac{u + \sqrt{u^2 - c^2}}{c}\right)\\ \Leftrightarrow e^{\frac{x-d}{c}} &= \frac{u + \sqrt{u^2 - c^2}}{c}\\ \Leftrightarrow ce^{\frac{x-d}{c}} &= u + \sqrt{u^2 - c^2}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Lisäksi

$$ce^{-\frac{x-d}{c}} = \frac{c^2}{u + \sqrt{y^2 - c^2}}. \tag{2.57}$$

Kun yhdistetään yhtälöt (2.56) ja (2.57) saadaan ratkaistua u:

$$c\big(e^{\frac{x-d}{c}} + e^{-\frac{x-d}{c}}\big) = u + \sqrt{y^2 - c^2} + \frac{c^2}{u + \sqrt{u^2 - c^2}} = 2u.$$

Tästä saadaan ratkaisufunktioksi $u(x)$

$$u(x) = c\cosh\big(\frac{x-d}{c}\big).$$

Näin löydettiin funktionaalin minimoiva funktio $u(x)$, joka toteuttaa yhtälön (2.54). $\square$

Asettamalla edellä johdettu ratkaisufunktio $u(x)$ funktionaaliin $J(u) = \int_0^c u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}dx$ ja laskemalla integraali, saadaan tulokseksi potentiaalienergian minimi. Funktio u on siis käyrä, jonka mukaisesti naru asettuu potentiaalienergian ollessa minimissä.

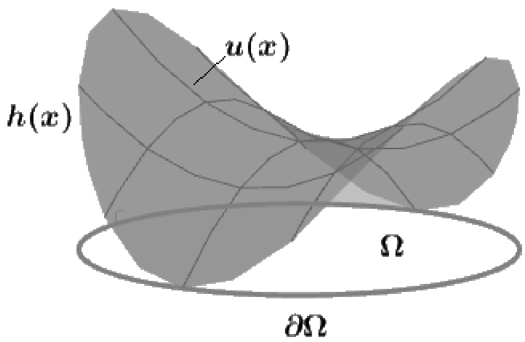
Kuten edellisissä esimerkeissä, päistä ripustetun narun esimerkissä osoitettiin jälleen, että ratkaisufunktio u toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälön. Ratkaisua varten oletettiin, että myös toinen suunta toteutuu.

2.4. Saippuakalvon yhtälö

Tutkitaan vielä yhtä minimointiongelmaa. Nyt minioitava integraali onkin minimipinta. Yksinkertainen esimerkki on saippuakalvo, joka muodostuu umpinaisen rautalangan sisään. Kalvo pyrkii tilaan, jossa sen pinta-ala olisi mahdollisimman pieni.

Oletetaan, että rautalanka on tason $\Omega \in \mathbb{R}^2$ yläpuolella. Rautalangan projektio pinnalle $\mathbb{R}^2$ on tason Ω reuna $\partial\Omega$. Eli jos tason reuna on $\partial\Omega$, niin korkeutta, jossa rautalanka on pisteessä $x \in \partial\Omega$, voidaan merkata funktiolla $h(x)$. Lisäksi, jos piste $x \in \Omega/\partial\Omega$, niin kalvon korkeutta tässä pisteessä merkataan funktiolla $u(x)$. Koska nyt halutaan minimoida kalvon pinta-alaa, niin on sillekin löydettävä funktio. Kyseessä on nyt C^1-funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ graafipinta eli

$$G_u = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^3 : x \in \Omega\}.$$



KUVA 2.5. Saippuakalvon korkeus reunalla $x \in \partial\Omega$ on $h(x)$ ja kohdassa $x \in \Omega/\partial\Omega$ on $u(x)$.

Seuraavien määritelmien avulla saadaan graafipinnalle pinta-ala sekä integraali yli graafipinnan.

MÄÄRITELMÄ 2.7. [15, määritelmä 7.2] Olkoon vektori $\varphi_i(x)$ C^1-kuvaus, $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ ja $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko. Kuvaus φ on alkeispinnan S parametriesitys. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileän alkeispinnan $S = \varphi(U)$ parametriesityksen suurennussuhde pisteessä $x \in U$ on

$$||\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)||,$$

jossa normi on määritelmän B.2 mukainen ja $\times$ on ristitulo. Vektori $\partial_1\varphi(x)\times\partial_2\varphi(x) = (-\partial_1 y(x), -\partial_2 y(x), 1)$ on pinnan normaalivektori.

MÄÄRITELMÄ 2.8. [15] Olkoon $S = \varphi(U)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä kaksiulotteinen alkeispinta. Joukon $T = \varphi(\Omega) \subset S, \Omega \subset U$ pinta-ala on

$$A(T) = \int_\Omega ||\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)||dx. \tag{2.58}$$

Funktion $f : T \to \mathbb{R}$ pintaintegraali yli osan T on

$$\int_T f dS := \int_\Omega f(\varphi(x))||\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)||dx. \tag{2.59}$$

Nyt pinta S on graafipinta eli $S = G_f$. Tällöin

$$||\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)|| = \sqrt{1 + (\partial_1 f(x))^2 + (\partial_2 f(x))^2}$$

ja määritelmän 2.8 joukon $T = \varphi(\Omega) \subset S = G_f$ pinta-ala saadaan muotoon

$$A(T) = \int_\Omega \sqrt{1 + (\partial_1 f(x))^2 + (\partial_2 f(x))^2}dx. \tag{2.60}$$

Pinta-alan yhtälössä esiintyville differentiaaleille voidaan käyttää merkintää

$$||Df(x)||^2 = \sum_{i=1}^{2}(\partial_i f(x))^2 = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2. \tag{2.61}$$

Jos tasosta Ω otetaan pinta-ala-alkio dx, niin sen yläpuolella olevan kalvon osan pinta-ala on määritelmän 2.8 mukaan $\sqrt{1 + ||Du||^2}dx$. Kun käydään kaikki tason Ω pinta-alkiot läpi saadaan kalvolle pinta-ala

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + ||Du(x)||^2}dx, \tag{2.62}$$

joka on nyt siis haettu minimoitava integraali. Reunaehtoina minimoitavalle integraalille on

$$u(x) = h(x), \text{ kun } x \in \partial\Omega.$$

Ylläolevaa minimointiongelmaa annetuilla ehdoilla voidaan lähteä ratkaisemaan samaan tapaan kuin aikaisempiakin minimointitehtäviä.

Määritellään variaatioavaruus V:

$$V = \{v \in C^1(\Omega \cup \partial\Omega)|v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \tag{2.63}$$

jossa $v \in V$. Variaatiomuoto saadaan kuten edellisissäkin esimerkeissä:

Funktionaalilla

$$J(u + \epsilon v) = \int_\Omega f(x, u(x) + \epsilon v(x), Du(x) + \epsilon Dv(x))dx$$

on oltava minimi kohdassa $\epsilon = 0$. Derivoidaan funktionaalia $J(u + \epsilon v)$ epsilonin suhteen ja asetetaan $\epsilon = 0$. Derivaatan tulee olla nolla, sillä haemme funktionaalin minimiä. Saadaan

$$\frac{dJ(u + \epsilon v)}{d\epsilon} = \int_\Omega (f_u v + f_{Du} \cdot Dv) dx = 0, \tag{2.64}$$

jossa voidaan tulkita, että f_{Du} on pystyvektori.

Seuraavaa lemmaa voidaan käyttää yhtälön (2.64) integraalin toiseen termiin.

Lemma 2.9. *[2, lemma 16.2] Olkoon $\Omega \in \mathbb{R}^d$ joukko. Olkoon v funktio, jolle pätee $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Olkoon lisäksi $w \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. Tällöin funktioille v, w pätee*

$$\int_\Omega w \cdot Dv dx = -\int_\Omega vD \cdot w dx + \int_{\partial\Omega} vw \cdot n d\sigma,$$

missä $D\cdot$ on divergenssi ja n on pinnasta ulospäin osoittava yksikkönormaali.

Todistus. Lemma voidaan osoittaa todeksi Gaussin divergenssilauseen avulla. Lause sanoo

$$\int_\Omega D \cdot F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n d\sigma. \tag{2.65}$$

Asetetaan funktio $F(x) = v(x)w(x)$, jolloin

$$\int_\Omega D \cdot (vw) dx = \int_{\partial\Omega} vw \cdot n d\sigma.$$

Divergenssi tulofunktiosta $v(x)w(x)$ on

$$D \cdot (vw) = vD \cdot w + w \cdot Dv.$$

Yhdistämällä tämä yhtälön (2.65) kanssa saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega D \cdot vw dx = \int_{\partial\Omega} vw \cdot n d\sigma \\
\Leftrightarrow &\int_\Omega \Big(vD \cdot w + w \cdot Dv \Big) dx = \int_{\partial\Omega} vw \cdot n d\sigma \\
\Leftrightarrow &\int_\Omega w \cdot Dv dx = -\int_\Omega vD \cdot w dx + \int_{\partial\Omega} vw \cdot n d\sigma.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 2.10.

(1) Divergenssiä merkitään jatkossa merkinnällä

$$D \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i = \mathrm{div} f.$$

(2) Yhtälö on divergenssimuodossa, jos differentiaaliyhtälön korkeimman kertaluvun termi voidaan kirjoittaa muodossa [12]

$$\operatorname{div}(f(x,u,Du)).$$

Käyttämällä lemmaa 2.9 integraaliin (2.64) toiseen termiin saadaan

$$\int_\Omega \big(f_{Du}\cdot Dv\big)dx = -\int_\Omega v\operatorname{div}(f_{Du})dx + \int_{\partial\Omega} vf_{Du}\cdot n d\sigma.$$

Asettamalla tämä lauseke alkuperäiseen yhtälöön (2.64), saadaan

$$\int_\Omega (f_u - \operatorname{div}(f_{Du}))vdx + \int_{\partial\Omega} vf_{Du}\cdot n d\sigma = 0 \tag{2.66}$$

kaikilla $v \in V$. Integraali yli reunan $\partial\Omega$ on nolla, sillä v häviää mentäessä joukon Ω reunalle. Tällöin siis

$$\int_\Omega (f_u - \operatorname{div}(f_{Du}))vdx = 0. \tag{2.67}$$

Nyt saadaan Euler-Lagrangen yhtälö saippuakalvolle käyttämällä apuna lemmaa 1.5

$$f_u - \operatorname{div}(f_{Du}) = 0. \tag{2.68}$$

Saippuakalvon esimerkissä minimoitava funktionaali on muotoa

$$\int_\Omega f(x,u(x),Du(x))dx = \int_\Omega \sqrt{1+||Du(x)||^2}dx.$$

Seuraava lause toteaa, että ratkaisufunktio u toteuttaa minimipinnan yhtälön:

LAUSE 2.11. [2] *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että funktio u minimoi funktionaalin, joka on muotoa*

$$J(u) = \int_\Omega \sqrt{1+||Du(x)||^2}.$$

Tällöin u toteuttaa minimipinnan yhtälön

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du(x)}{\sqrt{1+||Du(x)||^2}}\right) = 0. \tag{2.69}$$

TODISTUS. Olkoon $v \in C^1(\Omega\cup\partial\Omega)$. Saippuakalvon pinta-alalle voidaan etsiä variaation avulla derivaatan nollakohtia, joissa lauseen B.18 mukaan on funktion ääriarvo. Variaatio saadaan funktion v avulla.

$$\frac{d}{d\epsilon}A(u+\epsilon v) = \sqrt{1+||D(u+\epsilon v)||^2}. \tag{2.70}$$

Lasketaan aluksi $\frac{d}{d\epsilon}||D(u+\epsilon v)||^2$ käyttämällä apuna yhtälöä (2.61).

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}||D(u+\epsilon v)||^2 &= \frac{d}{d\epsilon}\sum_{i=1}^{2}\big(u_{x_i}+\epsilon v_{x_i}\big)^2\\ &= \sum_{i=1}^{2} 2\big(u_{x_i}+\epsilon v_{x_i}\big)v_{x_i}\\ &= 2(Du+\epsilon Dv)\cdot Dv.\end{aligned}$$

Nyt saadaan pinta-alalle $A(u+\epsilon v)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}A(u+\epsilon v) &= \frac{d}{d\epsilon}\int_\Omega \sqrt{1+||D(u+\epsilon v)||^2}dx\\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}(1+||D(u+\epsilon v)||^2)^{-\frac{1}{2}}2(Du+\epsilon Dv)\cdot Dvdx.\end{aligned}$$

Lauseen B.18 nojalla derivaatan tulisi olla nolla, jotta saippuakalvon yhtälö olisi minimissään. Tällöin siis tulisi olla

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{d\epsilon}A(u+\epsilon v)\bigg|_{\epsilon=0} &= \int_\Omega (1+||Du||^2)^{-\frac{1}{2}}Du\cdot Dvdx\\ &= -\int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}\right)vdx.\end{aligned}$$

Koska edellisen täytyy päteä kaikille variaatioille v, niin saadaan

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}\right) = 0.$$

□

Yllä johdettu yhtälö on minimipinnan yhtälö, josta ratkaisufunktio u voidaan selvittää. Jos u halutaan ratkaista, niin se antaan pinnan funktion, jonka mukaisesti kalvo asettuu rautalangan sisällä. Kuten aikaisemmissakin esimerkeissä, osoitimme että ratkaisufunktio u toteuttaa minimipinnan yhtälön. Voisimme jälleen tietyin oletuksin osoittaa, että minimipinnan yhtälöstä voidaan johtaa ratkaisufunktio u, mutta sitä emme kuitenkaaan tässä yhteydessä tee.

LIITE A

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
Lx	$L(x_1, x_2, x_3, ...)$ kun $x \in \mathbb{R}^n$
$\lvert\alpha\rvert$	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, kun $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
x^α	$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, ja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$, kun $x_1 \in \mathbb{R}^n$
Df	gradientti $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n})$, kun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\mathrm{div} f$	$\mathrm{div} f = D \cdot f = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$

LIITE B

Esitietoja ja taustaa

2.1. Määritelmiä ja merkintöjä

Tässä tutkielmassa etsimme ratkaisuja funktionaalien minimointiongelmiin variaatiolaskennan ja sitä kautta osittaisdifferentiaaliyhtälöiden avulla. Jotta ymmärtäisimme paremmin näitä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, määritellään tavallisen yksiulotteisen funktion derivoituvuus ja differentiaalilaskennan peruskäsitteitä.

Reaaliarvoisen funktion derivaatta pisteessä x voidaan määritellä lineaarikuvausten avulla. Määritelmässä esiintyvät normit määritellään seuraavasti:

Määritelmä B.1. [13] Lineaarikuvaukset $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ muodostavat lineaariavaruuden

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{L : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \text{L on lineaarinen}\}.$$

Tässä avaruudessa voidaan määritellä normi

$$||L|| := \sup\{||L|| : u \in \mathbb{R}^n, ||u|| = 1\}.$$

Lineaarikuvaukselle pätee, kun $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$L(x + y) = L(x) + L(y) \text{ ja } \lambda L(x) = L(\lambda x).$$

Määritelmä B.2. [13] Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorille x voidaan määritellä normi $||\cdot||$:

$$||x|| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Määritelmä B.3. [13] Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Funktiolla $f : G \to \mathbb{R}$ on derivaatta pisteessä $x \in G$, jos

$$f(x + h) = f(x) + Lh + ||h||\epsilon(h)$$

kaikilla $h \in \mathbb{R}^n$, joille $x + h \in G$. Lisäksi on oltava, että $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Tällöin $f'(x) := L$ ja $\text{mat}f'(x) = \text{mat}L$ on funktion f Jacobin matriisi pisteessä x.

Kun funktion derivoituvuus pisteessä x on määritelty, voidaan määritellä funktion differentioituvuus tietyssä pisteessä ja joukossa sekä yleisesti.

Määritelmä B.4. [13] Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja f kuvaus $f : G \to \mathbb{R}$. Funktio f on

(i) differentitoituva pisteessä $x \in G$, jos sillä on olemassa derivaatta $f'(x)$
(ii) differentioituva joukossa $F \subset G$, jos sillä on derivaatta jokaisessa pisteessä $x \in F$

(iii) differentioituva, jos se on differentioituva koko määrittelyjoukossa G. Tällöin siis

$$f' : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : x \to f'(x)$$

on derivaattakuvaus.

Differentioituvuus useamman reaalimuuttujan funktiolle merkitsee myös osittaisderivaattojen olemassaoloa. Derivaatan $f'(x)$ olemassaolo eli funktion f differentioituvuus on vahva ominaisuus, joka takaa esimerkiksi funktion jatkuvuuden.

Lause B.5. *[13, lause 1.7] Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Funktio $f : G \to \mathbb{R}$ on jatkuva, jos se on differentioituva eli derivaatta f' on olemassa.*

Todistus. Koska funktio f on differentioituva, niin se on differentioituva myös pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + ||x - a||\epsilon(x - a)$$

kaikille $x \in B(a, r) \subset G$. Tällöin

$$||f(x) - f(a)|| \leq ||f'(a)(x - a)|| + ||x - a||||\epsilon(x - a)|| \to 0$$

kun $x - a \to 0$, sillä lineaarikuvaus on jatkuva. □

Funktion jatkuvuus ei takaa differentioituvuutta, mutta jos voidaan osoittaa että funktion osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia, niin tällöin se on myös differentioituva. Funktion derivaatta kuvaa funktion kasvunopeutta ja suuntaa. Monessa tilanteessa on hyödyllistä, että myös derivaattakuvaus on jatkuva. Määritellään seuraavaksi funktion jatkuva differentioituvuus aluksi ensimmäisen kertaluvun derivaatalle ja myöhemmin korkeammille kertaluvuille.

Määritelmä B.6. [13] (C^1-kuvaukset) Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja f kuvaus $f : G \to \mathbb{R}$. Jos f on differentioituva ja sen derivaattakuvaus $f' : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : x \to f'(x)$ on jatkuva, niin f on *jatkuvasti differentioituva*. Tällöin voidaan merkata, että f on $C^1 - kuvaus$.

Toisin sanoen funktion f kaikkien komponenttifunktioiden f_k osittaisderivaatat $\partial_i f_k, i = 1, ..., n$, ovat olemassa ja jatkuvia joukossa G.

Lause B.7. *Funktio f on C^1-kuvaus jos ja vain jos sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia.*

Todistus löytyy lähdekirjallisuudesta [10, lause 5.2].

Ennen varsinaiseen differentiaalilaskentaan ja variaatioihin siirtymistä on hyvä vielä määritellä, mikä differentiaali on sekä muutamia differentiaalilaskentaan liittyviä lauseita.

Määritelmä B.8. [13] (Differentiaali) Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Differentiaali on reaaliarvoisen funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ derivaatta ja sitä merkataan tutulla merkinnällä $d\varphi := \varphi'$.

Jos funktio φ on differentioituva pisteessä $x \in G$ niin sille pätee

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = d\varphi(x)h + ||h||\epsilon(h), \text{ kun } x + h \in G,$$

kun $h \in \mathbb{R}^n$. Differentiaalitermi $d\varphi(x)h$ voidaan esittää myös gradientin avullla

$$d\varphi(x)h = D\varphi(x) \cdot h,$$

missä gradientti on vektori

$$D\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \dots \varphi_{x_n}).$$

Differentiaali kuvaa siis funktion muutosnopeutta pisteessä x vektorin h suuntaan.

Usein ratkaistavana differentiaaliyhtälönä on toisen tai jopa korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, joten korkeamman asteen osittaisderivaattojen ja C^k-funktioiden määritteleminen on tässä kohtaa järkevää.

MÄÄRITELMÄ B.9. [13] Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Oletetaan että joukon G reaaliarvoisella funktiolla $f : G \to \mathbb{R}$ on pisteen $x \in G$ avoimessa ympäristössä $U \subset G$ osittaisderivaatta $\partial_i f$. Funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaatta pisteessä x voidaan määritellä seuraavasti: Jos funktiolla

$$g_i := \partial_j f : U \to \mathbb{R} : y \to \partial_i f(y)$$

on osittaisderivaatta $\partial_j g_i(x)$ pisteessä x, niin funktiolle f toisen kertaluvun osittaisderivaatta on

$$\partial_j g_i(x) = \partial_j(\partial_i f)(x) = \partial_j \partial_i f(x).$$

Toisen kertaluvun osittaisderivaattaa merkataan jatkossa merkinnällä

$$\partial_j \partial_i f(x) =: f_{x_j x_i}(x).$$

MÄÄRITELMÄ B.10. [13] (C^k-kuvaukset) Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $k \in \mathbb{N}$. Funktio $f : G \to \mathbb{R}$ on k kertaa jatkuvasti differentioituva, jos sen kaikki osittaisderivaatat kertalukuun k asti ovat olemassa joukossa G ja ne ovat lisäksi jatkuvia. Tällöin f on C^k-funktio ja voidaan merkata, että $f \in C^k(G)$. Funktion voidaan sanoa myös olevan C^∞-kuvaus, jos f on C^k-funktio kaikille $k \in \mathbb{N}$. Eli siis sen kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

ESIMERKKI B.11. Funktioavaruus $C^2[x_0, x_1]$ koostuu kaksi kertaa jatkuvasti differentioituvista funktioista $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$.

Seuraava lauseen avulla voidaan löytää funktiolle f approksimaatio. Variaatiolaskennassa Taylorin lausetta voidaan myös hyödyntää funktionaalien tutkimiseen.

MÄÄRITELMÄ B.12 (Taylorin polynomi). Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : G \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että f on C^{k+1}-funktio välillä $[x_1, x_2]$. Tällöin funktion f Taylorin polynomi pisteessä $x_0 \in (x_1, x_2)$ on

$$T_{k,x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{B.1}$$

Funktion f jäännöstermi on

$$R_{k,x_0}f(x) = f(x) - T_{k,x_0}f(x) = \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi). \tag{B.2}$$

Lause B.13 (Taylorin lause). *[9, lause 2.3] Olkoon kuvaus $f : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ C^{k+1}-funktio. Jos piste $x_0 \in (x_1, x_2)$, niin tällöin kaikille $x \in (x_1, x_2)$ on voimassa Taylorin kaava*

(B.3)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{k,x_0}f(x)$$

missä jäännöstermille $R_{k,x_0}f(x)$ pätee

$$\frac{R_{k,x_0}f(x)}{||x-x_0||^k} \to 0, \ \text{kun } x \to x_0.$$

Approksimaation tarkkuus riippuu yhtälön B.3 jälkimmäisen termin eli jäännöstermin tarkkuudesta.

Todistuksen apuna tarvitaan seuraavaa lemmaa, joka esittää jäännöstermin integraalimuodossa.

Lemma B.14 (Taylorin kaava, integroitu muoto). *Olkoon funktio f C^{k+1}-funktio välillä (x_1, x_2). Kun $x_0 \in (x_1, x_2)$, niin*

$$f(x) = T_{k,x_0}f(x) + R_{k,x_0}f(x) \ \text{kaikilla } x \in (x_1, x_2).$$

Lausekkeessa jäännöstermille pätee

$$R_{k,x_0}f(x) = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^k f^{k+1}(\xi)d\xi. \tag{B.4}$$

Todistus. Todistus löytyy lähdekirjallisuudesta ([9], lause 2.5.) □

Nyt voidaan esittää todistus Taylorin lauseelle.

Todistus. (Taylorin lause) Käyttämällä edellisen lemman B.14 integraalimuotoa ja sijoittamalla k:n paikalle $k-1$ saadaan jäännöstermi muotoon

$$R_{k-1,x_0} = \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{k-1}f^k(\xi)d\xi. \tag{B.5}$$

Tällöin funktio f pisteessä x voidaan esittää Taylorin polynomin avulla seuraavasti:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$
$$+ \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{k-1}f^k(\xi)d\xi.$$

Haluamme osoittaa, että jäännöstermi $R_{k,x_0}f(x)$ lähestyy nollaa kun $x \to x_0$. Jäännöstermiä (B.5) voidaan muokata hieman erilaiseen muotoon, kun muistetaan, että

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1}d\xi = \frac{1}{k!}(x-x_0)^k. \tag{B.6}$$

Lisäämällä ja vähentämällä jäännöstermin integraalin sisällä termit $f^{(k)}(x_0)$ saadaan

$$\begin{aligned} R_{k-1,x_0} &= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(k-1)!}(f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0) + f^{(k)}(x_0))(x-\xi)^{k-1}d\xi \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(k-1)!}(f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0))(x-\xi)^{k-1}d\xi + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(x_0)(x-\xi)^{k-1}d\xi. \end{aligned}$$

Ensimmäinen integraali on sama kuin jäännöstermi $R_{k,x_0}f(x)$ ja jälkimmäiseen voidaan käyttää integraalia (B.6). Saadaan

$$R_{k-1,x_0} = R_{k,x_0}f(x) + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Oletuksen mukaan funktio $f^{(k)}$ on kerran jatkuvasti differentioituva, joten jatkuvuuden nojalla pisteessä x_0 on jokaiselle $\epsilon > 0$ olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$||f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)|| < \epsilon, \text{ kun } ||\xi - x_0|| < \delta.$$

Koska tutkitaan jäännöstermille tapausta, jossa $x \to x_0$, niin voidaan olettaa, että $|x - x_0| < \delta$. Tällöin

$$\begin{aligned} ||R_{k,x_0}f(x)|| &\leq \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(k-1)!}||f^k(\xi) - f^{(k)}(x_0)||(x-\xi)^{k-1}d\xi \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(k-1)!}\epsilon(x-\xi)^{k-1}d\xi \\ &= \frac{1}{k!}\epsilon(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä, kun $x \to x_0$, niin $\frac{R_{k,x_0}f(x)}{||x-x_0||^k} \to 0$.

□

Taylorin approksimaatiota tarvitaan seuraavassa kappaleessa, kun todistetaan funktion ääriarvoihin liittyviä ehtoja.

2.2. Ääriarvoista

Variaatiolaskennassa ongelmia käsitellään yleensä vektoriavaruuksissa, joiden dimensio on ääretön. Tutkimme niin kutsuttuja funktionaaleja ja etsimme ratkaisufunktioita niiden minimointiongelmiin. Näiden ääriarvo-ongelmien käsittelyyn äärettömissä avaruuksissa on hyvä hakea ideoita äärellisistä tilanteista.

Yhden muuttujan funktioilla tilanne on helppo käsitellä. Määritellään aluksi lokaalit minimit ja maksimit reaaliarvoiselle funktiolle f avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$.

MÄÄRITELMÄ B.15. Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$. Funktiolla f on *lokaali maksimi* pisteessä $x \in I$, jos on olemassa $\epsilon > 0$, jolle kaikilla $\hat{x} \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset I$ pätee $f(\hat{x}) \leq f(x)$.

Vastaavasti, funktiolla f on *lokaali minimi* pisteessä $x \in I$, jos funktiolla on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että kaikilla $\tilde{x} \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset I$ pätee $f(x) \leq f(\tilde{x})$.

Näiden ääriarvojen etsiminen onnistuu helposti, jos funktio f on derivoituva, eli erotusosamäärällä on olemassa raja-arvo välillä $I \subset \mathbb{R}$.

LAUSE B.16. *[1, lause 2.1.1] Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ ja $f : I \to \mathbb{R}$. Olkoon lisäksi f on derivoituva avoimella välillä I. Jos funktio f saavuttaa jonkin ääriarvonsa pisteessä $x \in I$, niin tällöin $f'(x) = 0$.*

TODISTUS. Todistus on vastaavanlainen sekä lokaalille minimille että maksimille. Oletetaan, että funktion f lokaali maksimi on piste $x_1 \in I$ ja lokaali minimi piste $x_2 \in I$. Todistetaan aluksi lokaalin maksimin tapaus.

Piste $x_1 \in I$ on oletuksen mukaan funktion f lokaali maksimi. Tällöin määritelmän mukaan on olemassa luku $\epsilon_1 > 0$ siten, että kaikilla $\hat{x} \in (x_1 - \epsilon_1, x_1 + \epsilon_1) \subset I$ pätee $f(\hat{x}) \leq f(x_1)$. Kun lasketaan funktion f derivaatta erotusosamäärän avulla pisteessä x_1 saadaan

$$f'(x_1) = \lim_{\hat{x} \to x_1} \frac{f(\hat{x}) - f(x_1)}{\hat{x} - x_1}.$$

Osoittaja on kaikilla muuttujan x_1 arvoilla negatiivinen, sillä oletuksen mukaan funktiolla f on lokaali maksimi kyseisessä pisteessä. Nimittäjä voi kuitenkin saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Koska funktio f on derivoituva pisteessä x_1, niin on sillä näin ollen olemassa sekä vasemman- että oikeanpuoleiset derivaatat, jotka saavat arvon $f'(x_1)$. Tällöin ainoa vaihtoehto, jolla edellä mainitut ehdot täyttyvät, on $f'(x_1) = 0$.

Osoitetaan vielä, että väite pätee myös lokaalille minimille.

Piste $x_2 \in I$ on funktion f lokaali minimi. Tällöin määritelmän mukaan on olemassa luku $\epsilon_2 > 0$ siten, että kaikilla $\hat{x} \in (x_2 - \epsilon_2, x_2 + \epsilon_2) \subset I$ pätee $f(x_2) \leq f(\hat{x})$. Kun lasketaan funktion f derivaatta erotusosamäärän avulla pisteessä x_2, saadaan

$$f'(x_2) = \lim_{\hat{x} \to x_2} \frac{f(\hat{x}) - f(x_2)}{\hat{x} - x_2}.$$

Lokaalin minimin tapauksessa osoittaja on kaikilla muuttujan x_2 arvoilla positiivinen. Nimittäjä voi kuitenkin saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Oletuksen mukaan funktio f on derivoituva pisteessä x_2, joten sillä on olemassa sekä vasemman- että oikeanpuoleiset derivaatat, jotka saavat arvon $f'(x_2)$.Tällöin ainoa vaihtoehto, jolla edellä mainitut ehdot täyttyvät, on $f'(x_2) = 0$.

$\square$

Ääriarvotarkastelussa on siis huomattava, että jos funktio f on differentiotuva avoimella välillä I ja sillä tiedetään olevan ääriarvoja kyseisellä välillä, niin täytyy olla $f'(x) = 0$. Usein voi kuitenkin olla, että funktio saavuttaa ääriarvonsa välin päätepisteissä, joissa funktion derivaatasta ei voida sano mitään.

Useamman muuttujan funktioille ääriarvotarkastelu on hyvin vastaavanlaista kuin yhden muuttujan funktioille. Määritellään seuraavaksi lokaalit ääriarvot useamman muuttujan funktiolle.

MÄÄRITELMÄ B.17. [1, kappale 2.1.2] Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ joukko ja funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Olkoon piste $x = (x_1, ...x_n) \in \Omega$ ja $\epsilon > 0$. Määritellään palloympäristö

$$B(x, \epsilon) = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : ||\hat{x}_1 - x_1||^2 + ... + ||\hat{x}_n - x_n||^2 < \epsilon^2\}.$$

Funktiolla f on lokaali maksimi pisteessä $x \in \Omega$, jos on olemassa $\epsilon > 0$ kaikilla $\hat{x} \in B(x, \epsilon) \subset \Omega$ siten, että $f(\hat{x}) \leq f(x)$.

Vastaavasti, samoilla oletuksilla, funktiolla f on pisteessä $x \in \Omega$ lokaali minimi, jos on olemassa $\epsilon > 0$ kaikilla $\hat{x} \in B(x, \epsilon) \subset \Omega$ siten, että $f(\hat{x}) \geq f(x)$.

Differentioituvilla funktioilla voi olla myös niin kutsuttuja kriittisiä pisteistä, joissa funktion ensimmäinen derivaatta menee nollaan. Nämä kriittiset pisteet ovat siis joko ääriarvopisteitä tai satulapisteitä, joissa funktion kulkusuunta ei vaihdu. Kriittisten pisteiden määritelmän avulla saadaan välttämätön ehto ääriarvopisteille. Määritellään tämä ehto vain useamman muuttujan funktioille. Yksiulotteisessa tilanteessa määritelmä on vastaavanlainen.

Tutkitaan ensin kaksiulotteisessa reaaliavaruudessa $\mathbb{R}^2$, kuinka funktion derivaatta käyttäytyy ääriarvopisteessä ja sen läheisyydessä. Tästä tilanne on helppo yleistää useampiuloitteiseen avaruuteen. Oletetaan, että funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on sileä joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Lisäksi oletetaan, että funktiolla f on lokaali ääriarvopiste kohdassa $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Tällöin on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että erotus $f(\hat{x}) - f(x)$ on kokoajan joko positiivinen tai negatiivinen kaikilla $\hat{x} \in B(x, \epsilon)$. Koska piste $\hat{x}$ on jossain pisteen x läheisyydessä, niin voidaan se esittää pisteen x avulla $\hat{x} = x + \epsilon v$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Taylorin lauseen B.13 nojalla funktiolle $f(\hat{x})$ saadaan muodostettua approksimaatio. Taylorin kaavassa B.3 esiintyvä erotus $x - x_0$ on nyt $\hat{x} - x = \epsilon v$. Approksimaatioon saadaan ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaattoja, kun funktiota f derivoidaan muuttujan $x = (x_1, x_2)$ suhteen.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= f(x) + \epsilon(v_1 f_{x_1} + v_2 f_{x_2}) \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2}\left(v_1^2 f_{x_1x_1} + 2v_1v_2 f_{x_1x_2} + v_2^2 f_{x_2x_2}\right) \\ &+ R_{2,x} f(\hat{x}). \end{aligned}$$

Jos Taylorin polynomin ensimmäisen asteen termi erisuurta kuin nolla, niin se määrää erotuksen $f(\hat{x}) - f(x)$ merkin. Lisäksi, jos pisteen $\hat{x}$ variaatio $x + \epsilon v$ kuuluu palloon $B(x, \epsilon)$, niin myös $x - \epsilon v \in B(x, \epsilon)$. Tällöin näissä pisteissä ensimmäisen kertaluvun termi saa erimerkkiset arvot. Jotta funktiolla f olisi ääriarvo kohdassa $x = (x_1, x_2)$, täytyy seuraavan yhtälön toteutua kaikilla $v \in \mathbb{R}^2$:

$$(v_1, v_2) \cdot \left(f_{x_1}, f_{x_2}\right) = 0.$$

Erityisesti yksikkövektoreille $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$ täytyy päteä: $\partial_e f(x) = 0$. Esimerkiksi pinnoille tämä tarkoittaa geometrisesti, että pisteeseen x, jossa ääriarvon pitäisi sijaita, piirretty tangenttitaso on vaakasuorassa. Siis, jos funktiolla f on lokaali ääriarvopiste $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, niin on oltava

$$Df(x) = 0. \tag{B.7}$$

Tulos yleistyy n-uloitteiseen avaruuteen.

LAUSE B.18. *[1, lause 2.1.2] Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio. Jos $x \in \Omega$ on funktion f lokaali ääriarvopiste, niin*

$$Df(x) = 0. \tag{B.8}$$

TODISTUS. Todistetaan lause kantavektoreiden avulla. Lause sanoo siis, että jos x on lokaali ääriarvopiste, niin jokaiselle yksikkövektorille $e \in \mathbb{R}^n$ pätee $\partial_e f(x) = 0$ ja erityisesti $f_{x_i}(x) = 0$ kaikille $i = 1, ..., n$.

Olkoon x funktion f lokaali minimipiste. Tällöin sopivasti valitulle $\epsilon > 0$ on olemassa palloympäristö $B(x, \epsilon) \subset \Omega$ ja määritelmän B.17 mukaan $f(x) \leq f(\hat{x})$ kaikilla $\hat{x} \in B(x, \epsilon)$.

Kun on olemassa luku δ, jolle $0 < \delta < \epsilon$, niin

$$\frac{f(x + \epsilon\delta) - f(x)}{\delta} \geq 0$$

ja

$$\frac{f(x - \epsilon\delta) - f(x)}{-\delta} \leq 0.$$

Eli luvun δ etumerkki määrää erotuksen etumerkin, kuten oli kaksiulotteisessakin tilanteessa. Koska $\partial_e f(x)$ on olemassa, niin toisaalta pätee

$$\partial_e f(x) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{f(x + \epsilon\delta) - f(x)}{\delta} \geq 0$$

ja toisaalta

$$\partial_e f(x) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{f(x - \epsilon\delta) - f(x)}{-\delta} \leq 0.$$

Jotta funktio f olisi differentioituva pisteessä x, niin on toispuoleisten raja-arvojen oltava samat pisteessä x, joten on oltava

$$\partial_e f(x) = 0.$$

Tällöin siis erityisesti pätee $f_{x_i}(x) = 0$ jokaiselle $i = 1, .., n$ ja $Df(x) = 0$.

Jos piste x on funktion f lokaali maksimi, niin tällöin voidaan tulkita pisteen x olevan funktion $-f$ lokaali minimi ja $\partial_e(-f)(x) = -\partial_e f(x)$. Tällöin todistus menee vastaavasti.

□

Kirjallisuutta

[1] Bruce van Brunt: *The Calculus of Variations.* ensimmäinen painos, Springer, 2004.
[2] Timo Eirola: *Osittaisdifferentiaaliyhtälöt.* luentomoniste, Teknillinen Korkeakoulu, 2003.
[3] Leonhard Euler: *Mechanica.* 1736. Kääntänyt Ian Bruce, http://www.17centurymaths.com/contents/mechanica2.html
[4] Lawrence C. Evans: *Partial Differential Equations.* toinen painos, American Mathematical Society, 2010.
[5] George M. Ewing: *Calculus of Variations with Applications.* Dover publications, inc. New York, 1985.
[6] Petri Juutinen: *Variaatiolaskenta*, luentomoniste, Jyväskylän Yliopisto, 2005.
[7] Tero Kilpeläinen: *Analyysi 3*, luentomoniste, Jyväskylän Yliopisto, 2005.
[8] Randall D. Knight: *Physics for Scientists an Engineer, A Strategic Approach with Modern Physics*, kolmas painos, Pearson Custom Library, 2014
[9] Ari Lehtonen: *Taylorin kaava ja lause*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto: *http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/sl2010/A3_Taylorin_kaava.pdf*
[10] Ari Lehtonen: *Differentiaalilaskenta 3: Osittaisderivaatat*, Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto 2011 *http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/kl2011/DL3_Osittaisderivaatat.pdf*
[11] Yutaka Nishiyama: *The Brachistochrone Curve: The Problem of Quickest Descent*, artikkeli, Osaka University of Econimics.
[12] Mikko Parviainen: *Partial Differential Equations, MATS230*, luentomoniste, Jyväskylän Yliopisto, 2017.
[13] Veikko T. Purmonen: *Differentiaalilaskentaa 1*, luentomoniste, Jyväskylän Yliopisto, 2012.
[14] Veikko T. Purmonen: *Differentiaalilaskentaa 2*, luentomoniste, Jyväskylän Yliopisto, 2011.
[15] Veikko T. Purmonen: *Integraalilaskentaa 2*, luentomoniste, Jyväskylän Yliopisto, 2013.