Jonni Lohi

Sisäpistemenetelmät lineaarisessa optimoinnissa

Tietotekniikan kandidaatintutkielma

27. huhtikuuta 2018

Jyväskylän yliopisto

Informaatioteknologian tiedekunta

Tekijä: Jonni Lohi

Yhteystiedot: `jonni.j.lohi@student.jyu.fi`

Työn nimi: Sisäpistemenetelmät lineaarisessa optimoinnissa

Title in English: Interior point methods in linear programming

Työ: Kandidaatintutkielma

Sivumäärä: 24+0

Tiivistelmä: Sisäpistemenetelmät ovat menetelmäluokka optimointiongelmien ratkaisemiseen. Tässä tutkielmassa keskitytään sisäpistemenetelmiin lineaarisessa optimoinnissa ja käydään läpi tiettyjen menetelmien idea. Käytetyin sisäpistemenetelmä on ei-sallittu primaali-duaalimenetelmä, joka voidaan toteuttaa erittäin tehokkaasti. Sisäpistemenetelmien lisäksi lineaarinen optimointiongelma voidaan ratkaista Simplex-menetelmällä, ja molemmat tavat ovat laajalti käytössä. Myös sisäpistemenetelmien tehokas toteutus ja niiden hyvät ja huonot puolet Simplex-menetelmään verrattuna ovat tutkielmassa käsiteltäviä aiheita.

Avainsanat: lineaarinen optimointi, sisäpistemenetelmät

Abstract: Interior point methods are a class of methods for solving optimization problems. In this thesis we focus on interior point methods in linear programming and go through the ideas of certain methods. The most used interior point method is an infeasible primal-dual method, which can be implemented very efficiently. In addition to interior point methods, linear programs can be solved by the Simplex method, and both ways are widely used. Efficient implementation of interior point methods and their pros and cons in comparison with the Simplex method are also topics covered in the thesis.

Keywords: linear programming, interior point methods

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman aiheena on sisäpistemenetelmät lineaarisessa optimoinnissa. Esimerkiksi yritysmaailmassa on usein minimoitava kustannukset tai maksimoitava ansiot tiettyjen rajoitteiden puitteissa. Optimointi on matemaattinen apuväline päätöksenteossa, ja etenkin monet tuotannonsuunnitteluun liittyvät ongelmat voidaan muotoilla lineaarisina optimointiongelmina. Tyypillinen esimerkki tästä on artikkelissa Chen ja Wang (1997) käsitelty teräksen tuotannonsuunnitteluongelma.

Useimmat lineaariset optimointiongelmat voidaan ratkaista tehokkaasti Simplex-menetelmällä, jonka George Dantzig kehitti jo 1940-luvulla. Vaikka menetelmä toimii hyvin käytännössä, Klee ja Minty (1972) todistivat, että sen teoreettinen pahimman tapauksen aikavaativuus on eksponentiaalinen. Tämä sai tutkijat kehittämään uusia, polynomisen aikavaativuuden menetelmiä. Ellipsoidimenetelmä oli ensimmäinen näistä; Khachiyan (1979) osoitti sen polynomiaikaiseksi vuonna 1979. Käytännössä se osoittautui kuitenkin paljon huonommaksi kuin Simplex-menetelmä.

Vuonna 1984 Narendra Karmarkar esitti uuden polynomiaikaisen menetelmän (Karmarkar 1984), jonka hän väitti olevan huomattavasti Simplex-menetelmää tehokkaampi suurten lineaaristen ongelmien tapauksessa (Press ym. 2007, s. 537). Simplex-menetelmästä poiketen hänen menetelmässään ei kuljeta sallittujen pisteiden joukon kärkipisteestä toiseen, vaan kunkin iteraation tuottamat approksimaatiot ovat sen sisäpisteitä. Vaikka Karmarkarin menetelmä ei osoittautunutkaan niin tehokkaaksi kuin väitettiin, se oli käänteentekevä tutkimuksen kannalta ja johti uudentyyppisten, sisäpisteissä kulkevien menetelmien eli sisäpistemenetelmien kehitykseen.

Lineaaristen optimointiongelmien lisäksi sisäpistemenetelmillä voidaan ratkaista myös neliöllisiä ja epälineaarisia optimointiongelmia, ja niillä on paljon sovelluskohteita. Sisäpistemenetelmiä on sovellettu esimerkiksi lentokoneen osien kiinnityksen simuloinnissa (Stefanova ym. 2018) ja rakennusten LVI-järjestelmien suunnittelussa (Kusiak, Xu ja Zhang 2014). Tässä tutkielmassa kuitenkin rajoitutaan käsittelemään sisäpistemenetelmiä lineaarisen optimoinnin tapauksessa.

Tutkielma on lyhyt katsaus sisäpistemenetelmiin. Tarkoitus on määritellä sisäpistemenetelmät ja esitellä lyhyesti muutamien niihin kuuluvien menetelmien idea. Lisäksi tavoitteena on selvittää, miten ja mitkä sisäpistemenetelmät on tehokkainta toteuttaa ja mitkä ovat niiden hyvät ja huonot puolet Simplex-menetelmään verrattuna.

Luvussa 2 määritellään lineaarinen optimointiongelma ja siihen liittyviä käsitteitä. Luvussa 3 esitellään muutamia sisäpistemenetelmiä lyhyesti ja käsitellään niiden toteutukseen liittyviä seikkoja. Luvussa 4 vertaillaan sisäpistemenetelmiä Simplex-menetelmään ja esitetään niiden hyviä ja huonoja puolia. Luku 5 on lyhyt yhteenveto tutkielman keskeisistä johtopäätöksistä.

2 Lineaarinen optimointiongelma

Lineaarisessa optimoinnissa (LP, engl. *linear programming*) optimoitava kohdefunktio ja rajoitefunktiot ovat lineaarisia. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tehtävään liittyvät muuttujat. Yleisessä LP-ongelmassa on minimoitava tai maksimoitava kohdefunktio

$$\begin{aligned} & \zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \text{s.e.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ & \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Rajoitteita voi lisäksi olla yhtälömuodossa tai epäyhtälöinä toiseen suuntaan. Ongelman (2.1) sallittujen pisteiden joukko koostuu niistä pisteistä $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, jotka toteuttavat rajoitteet. Ongelman ratkaisujoukon muodostavat sallitut pisteet, joissa kohdefunktion ζ arvo on optimaalinen.

Lineaarisen optimointiongelman sallittujen pisteiden joukko on konveksi hypertahokas (engl. *polytope*). Myös ratkaisujoukko on konveksi; se voi olla yksittäinen kärkipiste (engl. *vertex*), särmä (engl. *edge*), tahko (engl. *face*) tai koko sallittujen pisteiden joukko (Nocedal ja Wright 2006, s. 356). Jos ongelman sallittujen pisteiden joukko on tyhjä, ongelmalla ei ole ratkaisua. Tällöin ongelma on ei-sallittu (engl. *infeasible*). Jos kohdefunktio on rajoittamaton sallittujen pisteiden joukossa, ei ongelmalla välttämättä ole myöskään ratkaisua. Tällöin se on rajoittamaton (engl. *unbounded*).

Jokaisella LP-ongelmalla on duaaliongelma (engl. *dual*), joka on myös LP-ongelma. Siinä jokaista alkuperäisen ongelman rajoitetta vastaa yksi duaalimuuttuja. LP-ongelman standardimuoto matriisimerkinnöin on

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ \text{s.e.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

missä A on $m \cdot n$-matriisi, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $b \in \mathbb{R}^m$. Tämän duaali on

$$\begin{aligned} & \max b^T \lambda \\ \text{s.e.} \quad & A^T \lambda + s = c, \\ & s \geq 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

missä A, b, ja c ovat alkuperäisestä ongelmasta, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ja $s \in \mathbb{R}^n$.

Tehtävää (2.2) kutsutaan primaaliongelmaksi sen erottamiseksi duaalista. Duaalin (2.3) duaali on alkuperäinen primaali (2.2) itse. Primaali- ja duaaliongelmaa yhdistävät seuraavat tulokset (S. J. Wright 1997, s. 23–25):

- Heikko duaalilause: jos x on primaalin (2.2) sallittu piste ja (λ, s) duaalin (2.3) sallittu piste, niin $b^T \lambda \leq c^T x$.
- Vahva duaalilause: jos primaalilla (2.2) on ratkaisu x, niin myös duaalilla (2.3) on ratkaisu (λ, s) ja $b^T \lambda = c^T x$.

Lisäksi pätee komplementaarisuusperiaate (S. J. Wright 1997, s. 23–24): tehtävien (2.2) ja (2.3) sallitut pisteet x ja (λ, s) ovat ratkaisuja, jos ja vain jos

$$x_j s_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

3 Sisäpistemenetelmät

Estefunktioon perustuvia sisäpistemenetelmiä käytettiin epälineaarisessa tilanteessa jo 1960-luvulla (M. Wright 2005). Niiden soveltaminen lineaariseen optimointiin ei kuitenkaan tullut kyseeseen Simplex-menetelmän ylivertaisuuden takia. Lineaarisessa optimoinnissa sisäpistemenetelmien (engl. *interior point methods*) kehitys lähti nousuun vuonna 1984 Karmarkarin menetelmän myötä.

Simplex-menetelmän teoreettinen heikkous on sen eksponentiaalinen pahimman tapauksen aikavaativuus. Siinä ratkaisua haetaan siirtymällä jokaisella iteraatiolla rajoitteiden määräämän joukon kärkipisteestä toiseen. Pahimmassa tapauksessa kaikki kärkipisteet tulee käytyä läpi.

Sisäpistemenetelmissä vastaavaa ongelmaa ei ole, sillä niissä ei seurata kärkipisteitä. Menetelmiä on kahdenlaisia; alun perin nimitys sisäpistemenetelmä tuli siitä, että ne kulkivat sallittujen pisteiden joukon sisäpisteissä. Osa menetelmistä kulkee epänegatiivisuusrajoitteiden määräämän joukon sisäpisteissä eli joukossa $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1, x_2, \ldots, x_n > 0\}$ mutta ei välttämättä sallittujen pisteiden joukossa (Press ym. 2007, s. 537–538). Näistä käytetään joskus nimitystä ei-sallitut sisäpistemenetelmät (engl. *infeasible interior point methods*) tai ulkopistemenetelmät.

Seuraavaksi esitellään lyhyesti muutamien sisäpistemenetelmien idea.

3.1 Karmarkarin menetelmä

Karmarkar (1984) esitteli kuuluisan menetelmänsä alun perin huhtikuussa vuonna 1984. Myöhemmin menetelmästä on julkaistu useita muunneltuja versioita. Tässä alaluvussa kuvataan menetelmän perusidea esitystä Nash ja Sofer (1996, Appendix E) mukaillen.

Oletetaan, että LP-ongelma on muotoa

$$
\begin{aligned}
\min \zeta &= c^T x \\
\text{s.e.} \quad Ax &= 0, \\
a^T x &= 1, \\
x &\geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

missä A on $m \cdot n$-matriisi, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että $x^{(0)}$ on sallittu sisäpiste ja että kohdefunktion ζ minimiarvo on nolla.

Algoritmi lähtee liikkeelle sallitusta sisäpisteestä $x^{(0)}$ ja tuottaa jonon pisteitä $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, missä $x^{(k)}$ on k. iteraation antama approksimaatio. Jokaisella iteraatiolla ongelma skaalataan ensin projektiokuvauksella siten, että $x^{(k)}$ kuvautuu pisteeseen e/n, missä $e = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ kpl}})$. Projektiivisen skaalauksen ansiosta on mahdollista ottaa sopivan pituinen askel joutumatta pois sisäpisteiden joukosta. Käytetään vastedes merkintää $X^{(k)} = \operatorname{diag}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. Projektiokuvaus kuvaa x:n pisteeksi $\tilde{x}$ seuraavasti:

$$x \mapsto \frac{X^{(k)^{-1}} x}{e^T X^{(k)^{-1}} x} = \tilde{x}.$$

Käänteiskuvauksen lauseke on

$$\tilde{x} \mapsto \frac{X^{(k)} \tilde{x}}{a^T X^{(k)} \tilde{x}} = x.$$

Alkuperäisestä ongelmasta (3.1) päädytään tehtävään (ks. Nash ja Sofer 1996, Appendix E)

$$
\begin{aligned}
\min \tilde{c}^T \tilde{x}& \\
\text{s.e.} \quad \tilde{A}\tilde{x} &= 0, \\
e^T \tilde{x} &= 1, \\
\tilde{x} &\geq 0,
\end{aligned}
$$

missä $\tilde{c} = X^{(k)} c$ ja $\tilde{A} = A X^{(k)}$.

Kohdefunktio pienenee nopeiten negatiivisen gradientin $-\tilde{c}$ suuntaan, joten lasketaan $-\tilde{c}$:n ortogonaaliprojektio rajoitematriisin ytimeen ja otetaan askel tähän suuntaan. Kun merkitään

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ e^T \end{bmatrix},$$

niin ortogonaaliprojektiota vastaa matriisi $P_B = I - B^T(BB^T)^{-1}B$. Suunnaksi saadaan

$$\Delta x = -\frac{P_B\tilde{c}}{\|P_B\tilde{c}\|}.$$

Siirrytään pisteestä e/n tähän suuntaan siten, että askeleen pituus on α:

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \frac{e}{n} + \alpha\Delta x.$$

Askelpituus α tulee määrätä siten, että epänegatiivisuusehto pysyy voimassa. Rajoitteiden $e^T\tilde{x} = 1$ ja $\tilde{x} \geq 0$ määräämään joukkoon sisältyvän e/n-keskisen pallon suurin mahdollinen säde $r = 1/\sqrt{n(n-1)}$. Voidaan siis valita $\alpha = \theta r$, missä $0 < \theta < 1$. Jotta menetelmän polynominen aikavaativuus saadaan voimaan, tulee θ:n arvo kuitenkin valita melko pieneltä väliltä. Karmarkar (1984) käytti arvoa $\theta = 1/4$, ja myös $\theta = 1/3$ kelpaa.

Lopuksi $\tilde{x}^{(k+1)}$ kuvataan takaisin alkuperäiseen avaruuteen, ja saadaan uusi approksimaatio

$$x^{(k+1)} = \frac{X^{(k)}\tilde{x}^{(k+1)}}{a^T X^{(k)}\tilde{x}^{(k+1)}}.$$

Näin saadut iteraatit $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ lähestyvät ongelman ratkaisua. Kun L on käytetyn bittiesityksen tarkkuus eli bittien lukumäärä, menetelmä tuottaa ratkaisun L:n bitin tarkkuudella ja sen aikavaativuus on $O(n^{3.5}L^2)$ (Karmarkar 1984).

Menetelmästä on myöhemmin esitetty standardimuotoisiin ongelmiin (2.2) soveltuvia versioita, kuten Anstreicher (1986), Gay (1987) sekä Yinyu ja Kojima (1987). Tehty oletus tehtävän muodosta (3.1) ei kuitenkaan ole rajoittava, sillä standardimuotoinen LP-ongelma (2.2) saadaan tähän muotoon lisäämällä yksi muuttuja ja muokkaamalla rajoitteita sopivasti (ks. Nash ja Sofer 1996, Appendix E). Oletus siitä, että kohdefunktion minimiarvo on nolla, sen sijaan on ongelmallinen, sillä käytännössä minimiarvoa ei usein etukäteen tiedetä. Tällöin joudutaan käyttämään menetelmän muunnelmaa, jossa minimiarvolle asetetaan ala- ja ylärajat ja tarkennetaan niitä asteittain, kunnes minimiarvo saadaan selville. Aikavaativuuden kertaluokka on kuitenkin sama $O(n^{3.5}L^2)$ (Karmarkar 1984).

Karmarkarin menetelmä ja sen muunnelmat eivät käytännössä ole yhtä tehokkaita kuin alaluvussa 3.3 käsiteltävät primaali-duaalimenetelmät (Nash ja Sofer 1996, Appendix E; Nocedal ja Wright 2006, s. 417). Menetelmä on kuitenkin historiallisesti merkittävä; se oli ensimmäinen polynomiaikainen sisäpistemenetelmä, joka pystyi haastamaan Simplex-menetelmän etenkin suurten ongelmien tapauksessa (Nocedal ja Wright 2006, s. 417), ja sisäpistemenetelmien tutkimus sai alkunsa pitkälti juuri Karmarkarin menetelmän innoittamana (Lagarias ja Vanderbei 1990; M. Wright 2005; Nocedal ja Wright 2006, s. 389).

3.2 Affiinin skaalauksen menetelmä

Pian Karmarkarin menetelmän julkaisemisen jälkeen tutkijat keksivät, että käyttämällä projektiivisen muunnoksen sijasta affiinia muunnosta saadaan menetelmän yksinkertaisempi versio, jota kutsutaan affiinin skaalauksen menetelmäksi. Menetelmää oli löytämässä useampi eri taho, kuten Vanderbei, Meketon ja Freedman (1986) sekä Barnes (1986) (Vanderbei 2001). Muutama vuosi myöhemmin huomattiin, että Dikin (1967) olikin esittänyt affiinin skaalauksen menetelmän jo lähes 20 vuotta aiemmin, mutta se oli jäänyt laajalti huomiotta (Lagarias ja Vanderbei 1990).

Seuraavassa on menetelmän idea kuten Vanderbei, Meketon ja Freedman (1986) sen esittivät. Oletetaan, että $x^{(k)}$ on sallittu sisäpiste ongelmalle (2.2). Käytetään affiinia muunnosta

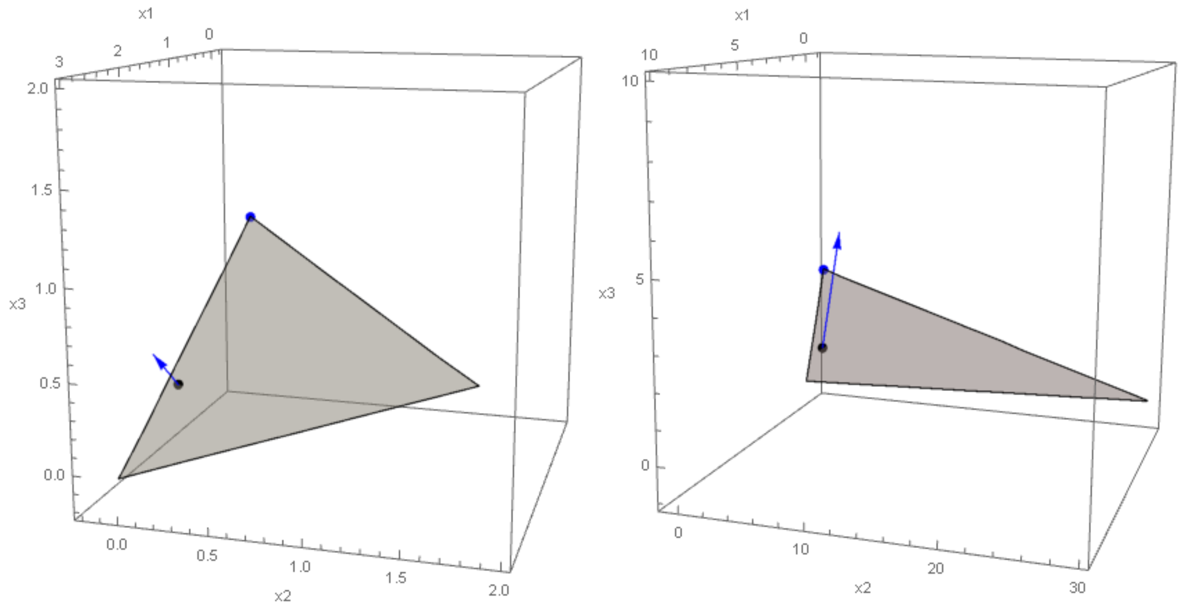
$$x \mapsto {X^{(k)}}^{-1} x = \tilde{x},$$

joka kuvaa pisteen $x^{(k)}$ pisteeksi, jonka kaikki komponentit ovat ykkösiä. Affiini skaalaus johtaa ongelmaan

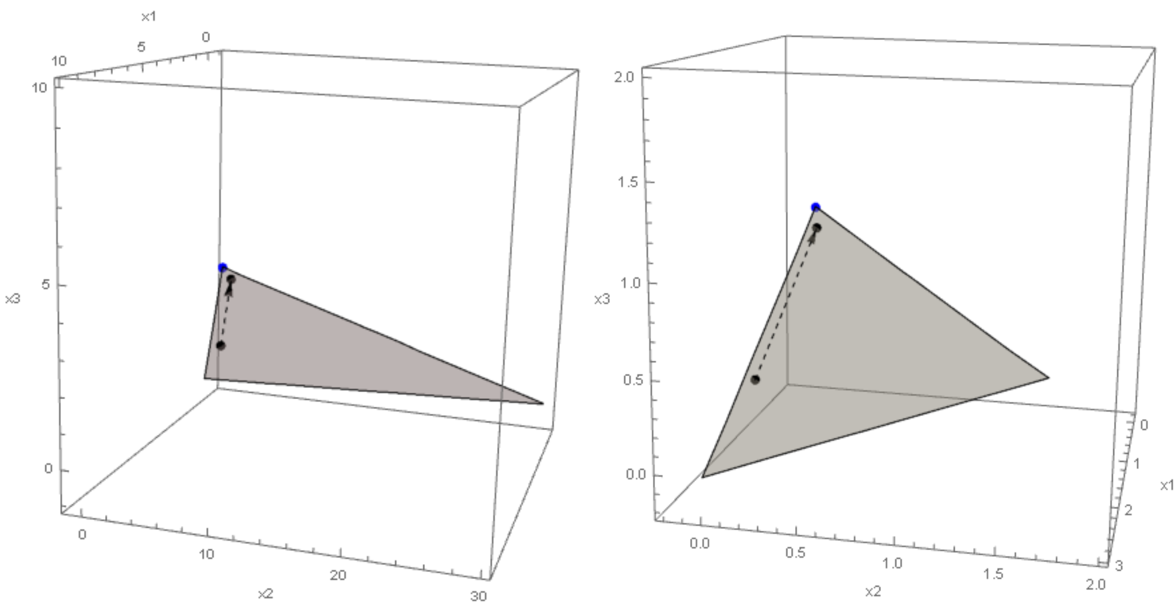
$$\begin{aligned} \min\ & (X^{(k)} c)^T \tilde{x} \\ \text{s.e.}\quad & A X^{(k)} \tilde{x} = b, \\ & \tilde{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tämän jälkeen lasketaan negatiivisen gradientin ortogonaaliprojektio rajoitematriisin ytimeen samaan tapaan kuin Karmarkarin menetelmässä ja otetaan sopivan pituinen askel tähän suuntaan. Kun saatu piste kuvataan takaisin alkuperäisiin yksiköihin, saadaan uusi approksimaatio $x^{(k+1)}$.

Affiini skaalaus mahdollistaa riittävän pituisen askeleen ottamisen joutumatta pois sallittujen pisteiden joukosta. Tätä on havainnollistettu kolmiulotteisessa tapauksessa kuvassa 1. Harmaa kolmio vastaa sallittujen pisteiden joukkoa. Projisoitu gradientti ja optimipiste on kuvattu sinisinä ja tämänhetkinen piste mustana.



Kuvio 1. Siirtyminen projisoidun gradientin suuntaan johtaisi pian ehdon $x_2 \geq 0$ rikkoutumiseen (vasen kuva). Muunnetun ongelman (3.2) tapauksessa voidaan ottaa pitempi askel (oikea kuva).



Kuvio 2. Vasemmalla askel projisoidun gradientin suuntaan kuvan 1 muunnetun ongelman tapauksessa ja oikealla vastaava askel alkuperäisissä yksiköissä.

Affiinin skaalauksen algoritmin idea on geometrisesti intuitiivinen, ja affiinia muunnosta käyttävät menetelmät ovat paljon yksinkertaisempia kuin projektiiviseen muunnokseen perustuva Karmarkarin menetelmä. Niiden analysointi on toisaalta paljon hankalampaa. Affiinin skaalauksen menetelmä suppenee optimiratkaisuun, kun askelpituus valitaan riittävän maltillisesti (Vanderbei 2001, s. 341). Menetelmää ei kuitenkaan ole todistettu polynomiaikaiseksi, ja Vanderbein (2001, s. 342–343) mukaan sen pahimman tapauksen aikavaativuus on luultavasti eksponentiaalinen. Tästä huolimatta se on keskimäärin tehokkaampi kuin projektiivisen skaalauksen menetelmät, ja lisäksi sitä voidaan käyttää suoraan standardimuotoisiin ongelmiin (2.2), joten käytännön toteutuksissa suosittiin aikanaan affiinia muunnosta projektiivisen muunnoksen sijaan (Lagarias ja Vanderbei 1990).

3.3 Primaali-duaalimenetelmät

Edellä esitetyt Karmarkarin menetelmä ja affiinin skaalauksen menetelmä ovat ns. primaalimenetelmiä; ongelman ratkaiseminen tapahtuu suoraan, eikä luvussa 2 määriteltyyn duaaliongelmaan periaatteessa viitata mitenkään. Tehokkaampia ovat primaali-duaalimenetelmät, joiden keskeiset ideat syntyivät vuosina 1987–1991 (S. J. Wright 1997, s. 43). Ne ovat sisäpistemenetelmiä, jotka hyödyntävät ongelman ratkaisemisessa duaaliongelmaa ja komplementaarisuusperiaatetta (2.4). Tässä alaluvussa käsitellään primaali-duaalimenetelmiä pääosin lähteeseen S. J. Wright (1997) perustuen.

Primaali-duaalimenetelmissä haetaan samanaikaisesti ratkaisua sekä primaaliongelmaan (2.2) että duaaliongelmaan (2.3). Komplementaarisuusperiaatteen (2.4) avulla nähdään, että x ja (λ, s) ovat ratkaisuja, jos

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T\lambda + s &= c, \\ x_j s_j &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ (x, s) &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Saadun yhtälöryhmän (3.3) ratkaisemiseen voidaan soveltaa Newtonin menetelmää, kunhan pidetään huolta epänegatiivisuusehdon $(x, s) \geq 0$ täyttymisestä. Suoraan yhtälöryhmään (3.3) sovellettuna Newtonin menetelmä mahdollistaa usein kuitenkin vain pienen askeleen ottamisen rikkomatta epänegatiivisuusehtoa. Siksi (3.3):n kolmas rivi korvataan ehdoilla $x_j s_j = \mu$, $j = 1, \ldots, n$, missä parametria $\mu \geq 0$ pienennetään vähitellen kohti nollaa. Päädytään ongelmaan

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T \lambda + s &= c, \\ x_j s_j &= \mu, \quad j = 1, \ldots, n, \\ (x, s) &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On hyvä huomata, että samaan yhtälöryhmään (3.4) päädytään myös, kun käytetään Lagrangen menetelmää optimointiongelmaan

$$\begin{aligned} \min \zeta &= c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \log x_i \\ \text{s.e.} \quad Ax &= b, \end{aligned} \tag{3.5}$$

jossa standardimuotoisen ongelman (2.2) epänegatiivisuusehto on korvattu optimoimalla alkuperäisen kohdefunktion sijaan logaritmista estefunktiota (engl. *barrier function*) (ks. Robere 2012). Kun $x_j \rightarrow 0$, ζ:n arvo kasvaa rajatta, ja tämän ansiosta (3.5):n ratkaisu pysyy joukon $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1, x_2, \ldots, x_n > 0\}$ sisäpisteissä riittävän etäisyyden päässä sen reunasta. Kun μ:n arvoa lasketaan kohti nollaa, (3.5):n ratkaisu lähestyy kuitenkin alkuperäisen ongelman (2.2) ratkaisua.

Ongelman (3.4) ratkaisut $(x_\mu, \lambda_\mu, s_\mu)$ eri μ:n arvoilla määräävät keskuspolun (engl. *central path*) $\mathcal{C} = \{(x_\mu, \lambda_\mu, s_\mu) : \mu > 0\}$. Useimmat primaali-duaalialgoritmit seuraavat tätä polkua kohti ratkaisua seuraavasti: kun $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})$ on sallittu sisäpiste, määritellään $\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i s_i$, valitaan parametri $\sigma_k \in [0, 1]$ ja otetaan Newtonin menetelmän askel kohti $\sigma_k \mu_k$:n määräämää $\mathcal{C}$:n pistettä $(x_{\sigma_k \mu_k}, \lambda_{\sigma_k \mu_k}, s_{\sigma_k \mu_k})$. Parametrin σ_k arvo 0 vastaa alkuperäistä tilannetta (3.3), jolloin on usein mahdollista ottaa vain pieni askel rikkomatta epänegatiivisuusehtoa. Tapaus $\sigma_k = 1$ sen sijaan johtaa askeleeseen kohti keskuspolkua $\mathcal{C}$ eikä välttämättä pienennä μ_k:n arvoa lainkaan mutta mahdollistaa suuremman askeleen ottamisen seuraavalla iteraatiolla. Eri tavat valita σ_k:n arvo tuottavat eri algoritmeja, ja useimmiten käytetään arvoja avoimelta väliltä $]0, 1[$.

Kun $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})$ on sallittu sisäpiste, edellä kuvatun perusteella saadaan seuraava algoritmi, joka on primaali-duaalimenetelmien perustana:

Kun $k = 0, 1, 2, \ldots$, ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^{(k)} & 0 & X^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^{(k)} S^{(k)} e + \sigma_k \mu_k e \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

ja aseta $(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)}) + \alpha_k (\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})$, missä askelpituus α_k on valittu siten, että ehto $(x^{(k+1)}, s^{(k+1)}) > 0$ pysyy voimassa.

Polunseuraamismenetelmissä (engl. *path-following methods*) keskuspolulle $\mathcal{C}$ määritellään jokin ympäristö $\mathcal{N}$ ja askelpituudet valitaan siten, että iteraatit pysyvät tässä ympäristössä. Epänegatiivisuusehdon toteutumisesta pidetään siis huolta seuraamalla keskuspolkua eksplisiittisesti. Osassa menetelmistä käytetään parametrin σ_k arvoja läheltä lukua 1, jolloin askel suuntautuu voimakkaasti kohti keskuspolkua $\mathcal{C}$. Tällöin on mahdollista ottaa täysi askel poistumatta ympäristöstä $\mathcal{N}$ mutta askeleella edetään kohti ratkaisua vain vähän. Vaihtoehtoisesti σ_k voidaan valita aggressiivisemmin eli pienemmäksi. Tällöin askelpituus on määrättävä siten, ettei poistuta ympäristöstä $\mathcal{N}$, mutta jos σ_k on sopivasti valittu, eteneminen kohti ratkaisua voi olla paljon nopeampaa.

Ennustus-korjausmenetelmissä (engl. *predictor–corrector methods*) käytetään kahta sisäkkäistä ympäristöä $\mathcal{N}(\alpha)$ ja $\mathcal{N}(\beta)$, $\mathcal{N}(\alpha) \subset \mathcal{N}(\beta)$. Joka toinen askel on ennustusaskel, joka otetaan $\mathcal{N}(\alpha)$:n pisteestä lähtien asettamalla $\sigma_k = 0$ ja määräämällä askelpituus siten, että pysytään ulomman ympäristön $\mathcal{N}(\beta)$ sisällä. Ennustusaskelta seuraa korjausaskel, joka lasketaan σ_k:n arvolla 1 ja joka johtaa takaisin sisempään ympäristöön $\mathcal{N}(\alpha)$. Kun ympäristöjen välillä on riittävästi tilaa, ennustusaskel on huomattava harppaus kohti ratkaisua. Korjausaskel mahdollistaa uuden ennustusaskeleen ottamisen seuraavalla iteraatiolla.

Tähän mennessä oletettiin, että alussa on tiedossa sallittu sisäpiste $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})$. Usein sallitun sisäpisteen löytäminen on kuitenkin hankalaa. Ei-sallituissa sisäpistemenetelmissä (engl. *infeasible interior point methods*) aloituspisteeltä vaaditaan vain ehto $(x^{(k+1)}, s^{(k+1)}) > 0$. Iteraatioiden tuottamat pisteet toteuttavat epänegatiivisuusehdon mutta eivät välttämättä yhtälörajoitteita $Ax = b$ ja $A^T \lambda + s = c$.

Määritellään jäännökset $r_b^{(k)} = Ax^{(k)} - b$ ja $r_c^{(k)} = A^T\lambda^{(k)} + s^{(k)} - c$ ja otetaan kullakin iteraatiolla Newtonin menetelmän askel kohti $\sigma_k\mu_k$:n määräämää $\mathcal{C}$:n pistettä $(x_{\sigma_k\mu_k}, \lambda_{\sigma_k\mu_k}, s_{\sigma_k\mu_k})$ kuten aiemminkin. Nyt yhtälö (3.6) tulee muotoon

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^{(k)} & 0 & X^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta\lambda^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_c^{(k)} \\ -r_b^{(k)} \\ -X^{(k)}S^{(k)}e + \sigma_k\mu_k e \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Askelpituuden valinnassa on huomioitava lisäehtoja, mutta muuten toimitaan samalla periaatteella kuin edellä. Menetelmä pienentää suureen μ_k lisäksi myös jäännökset $r_b^{(k)}$ ja $r_c^{(k)}$ vähitellen nollaan.

3.4 Sisäpistemenetelmien toteutus tehokkaasti

Sisäpistemenetelmien kehityksen myötä niiden teoreettinen pahimman tapauksen aikavaativuus on laskenut $O(\frac{n^3}{\log n}L)$ bittioperaatioon, missä L on käytetyn bittiesityksen tarkkuus (Anstreicher 1999; Potra ja Wright 2000). Käytännössä sisäpistemenetelmät toimivat kuitenkin lähes poikkeuksetta paljon paremmin kuin pahimman tapauksen aikavaativuus antaa olettaa (M. Wright 2005). Siksi teoreettisten menetelmien vaatimuksia usein lievennetään, jotta algoritmeista saadaan niin tehokkaita kuin mahdollista käytännön tilanteissa (Nocedal ja Wright 2006, s. 407; Gondzio 2012a).

Yleisesti tehokkaimpana sisäpistemenetelmänä pidetään ei-sallittua primaali-duaalimenetelmää (Gondzio 2012a). Sen käytännön toteutukset ovat vielä 2000-luvun alussa usein pohjautuneet Sanjay Mehrotran (1992) esittämään ennustus-korjausalgoritmiin (Potra ja Wright 2000), jossa kullakin iteraatiolla otettava askel koostuu ennustus-, keskistys- ja korjaustermeistä ja parametrin σ_k arvo määritetään adaptiivisesti.

Ensin ratkaistaan ennustustermi yhtälöstä (3.7) σ_k:n arvolla 0. Newtonin menetelmän antama askel on epätarkka, ja ennustustermin avulla voidaan laskea korjaustermi, joka kompensoi tehtyä virhettä. Parametrin σ_k arvo valitaan ennustustermin hyödyllisyyden mukaan eli riippuen siitä, kuinka pitkä askel siihen suuntaan voidaan ottaa rikkomatta epänegatiivisuusehtoa. Korjaustermin kanssa samalla kertaa voidaan sitten laskea σ_k:ta vastaava keskistystermi (ks. yksityiskohdat Nocedal ja Wright 2006, s. 407–408).

Sekä ennustustermin että korjaus- ja keskistystermien määräämiseksi on ratkaistava lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisi on molemmissa tapauksissa sama. Näin ollen matriisihajotelma tarvitsee laskea vain kerran. Matriisihajotelman muodostaminen on laskennallisesti vaativin osa algoritmia, ja ylimääräisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen tarvittava laskenta on pientä suhteessa saavutettuun hyötyyn (Press ym. 2007, s. 547).

Vaikka näin saatu algoritmi toimii valtaosassa tilanteista erinomaisesti, se on hyvin aggressiivinen ja saattaa joissakin tapauksissa epäonnistua (Colombo ja Gondzio 2008). Toinen lähestymistapa on käyttää useampia maltillisempia korjaustermejä, jotka lasketaan rekursiivisesti. Nyt samaa matriisihajotelmaa hyödynnetään useammin kuin kahdesti. Tätä menetelmää käsittelevät Colombo ja Gondzio (2008). Menetelmällä ratkaisun löytämiseen tarvitaan huomattavasti vähemmän iteraatioita, ja se on käytössä laajalti sekä akateemisissa että kaupallisissa LP-ratkaisijoissa (Gondzio 2012a).

Luvun lopuksi mainitaan vielä muutamia toteutukseen liittyviä seikkoja, jotka on hyvä huomioida. Aloituspisteen järkevä valinta on tärkeää algoritmin tehokkuuden kannalta. Hyvä aloituspiste vähentää tarvittavien iteraatioiden määrää, mutta huono valinta voi johtaa algoritmin epäonnistumiseen (Nocedal ja Wright 2006, s. 410; Press ym. 2007, s. 546). Aloituspisteen löytämiseen on esitetty hyviä heuristiikkoja esimerkiksi lähteissä Nocedal ja Wright (2006, s. 410) ja Gondzio (2016).

Ongelman esikäsittely voi usein pienentää sen kokoa. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi turhien rajoitteiden poistamista. Ennen algoritmin suorittamista voi olla hyvä tehdä myös ongelman sopiva skaalaaminen, sillä huonosti skaalatusta ongelmasta voi aiheutua numeerista epävakautta (Press ym. 2007, s. 546).

Erittäin suurten ongelmien tapauksessa muisti ei välttämättä riitä yhtälöryhmien ratkaisemiseen suoralla menetelmällä. Tällöin voidaan käyttää approksimatiivisia iteratiivisia menetelmiä sopivalla pohjustimella. Matriisia A ei tallenneta eksplisiittisesti, vaan riittää kun tarvittavat matriisi-vektoritulot Ax ja $A^T y$ ovat saatavilla. Tähän perustuvaa matriisitonta (engl. *matrix-free*) sisäpistemenetelmää käsittelee Gondzio (2012b), ja sitä on sovellettu menestyksekkäästi kvantti-informaatiotieteessä esiintyvien optimointiongelmien ratkaisemiseen (Gondzio ym. 2014).

Sisäpistemenetelmien matriisioperaatioissa voidaan hyödyntää moderneja laitteistokomponentteja ja niihin perustuvaa teknologiaa. Artikkelissa Cai ym. (2018) käsitellään ei-sallitun primaali-duaalimenetelmän toteutusta memristorien avulla. Artikkelin mukaan näin toteutetulla ratkaisijalla LP-ongelma voidaan ratkaista hyvällä tarkkuudella huomattavasti tavallista tehokkaammin.

4 Sisäpistemenetelmien vertailu Simplex-menetelmään

Sisäpistemenetelmien suosion kasvun myötä syntynyt kilpailu pakotti kaupallisten Simplex-ratkaisijoiden kehittäjät tehostamaan algoritmejaan, mikä johti merkittäviin parannuksiin Simplex-menetelmän toteutuksissa (Gondzio 2012a). Sisäpistemenetelmät ja Simplex-menetelmä ovat nykyään molemmat laajalti käytössä ja kilpailevat yhä keskenään. Seuraavaksi vertaillaan sisäpistemenetelmiä Simplex-menetelmään ja tarkastellaan niiden hyviä ja huonoja puolia.

Ongelman (2.2) yhtälöryhmä $Ax = b$ voidaan ratkaista valitsemalla m perusmuuttujaa joukosta $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, asettamalla loput $n - m$ muuttujaa nolliksi ja ratkaisemalla perusmuuttujat jäljelle jääneistä yhtälöistä. Näin saatua pistettä x kutsutaan perusratkaisuksi, ja jos $x \geq 0$, kyseessä on sallittu perusratkaisu. Simplex-menetelmässä jokaisella iteraatiolla siirrytään perusratkaisusta toiseen: valitaan yksi uusi perusmuuttuja, jolloin yksi aiemmista perusmuuttujista poistuu perusmuuttujien joukosta. Lisätietoa Simplex-menetelmän toiminnasta on esimerkiksi kirjassa Vanderbei (2001).

Yleensä Simplex-menetelmä on parempi pienille ja keskisuurille ongelmille ja sisäpistemenetelmät ovat tehokkaampia ongelman koon kasvaessa, mutta asia riippuu kuitenkin ongelman rakenteesta. Tämä on yleinen näkemys alan kirjallisuudessa, ja muiden muassa Vanderbei (2001, s. 365), Nocedal ja Wright (2006, s. 416) sekä Gondzio (2012a) ovat samaa mieltä asiasta.

Simplex-menetelmän iteraatiot ovat laskennallisesti halpoja, mutta niitä vaaditaan paljon — teoriassa pahimmillaan 2^n. Käytännössä ratkaisun löytämiseen tarvitaan kuitenkin harvoin yli $m + n$ iteraatiota (Gondzio 2012a). Sisäpistemenetelmissä iteraatioiden määrä on tyypillisesti suuruusluokkaa 15–30 (Illés ja Terlaky 2002), ja joissakin toteutuksissa riittää muutama iteraatio lähes riippumatta ongelman koosta (Gondzio 2012a). Toisaalta iteraatiot ovat työläämpiä, ja tarvittavien operaatioiden määrä iteraatiota kohti on kertaluokkaa $O(n^3)$, kun Simplex-iteraatioon riittää $O(n^2)$ operaatiota (Illés ja Terlaky 2002).

Sisäpistemenetelmissä iteraatioiden laskennallisesti vaativin osa on yhtälöryhmän ratkaisemisessa käytetyn matriisihajotelman muodostaminen. Tämä voidaan jossain määrin rinnakkaistaa hyödyntämällä rajoitematriisin jakoa lohkoihin. Simplex-menetelmä puolestaan on vaikea rinnakkaistaa, joten sisäpistemenetelmien etuna on rinnakkaislaskennan parempi hyödynnettävyys moniytimisillä alustoilla (Potra ja Wright 2000; Gondzio 2012a).

Tietyissä tilanteissa on tarpeen ratkaista sama ongelma useaan kertaan hieman eri lähtötiedoilla. Hyvä esimerkki tästä on lineaarisessa kokonais- ja sekalukuoptimoinnissa käytettävät menetelmät, joissa ratkaistaan joukko toisistaan vain vähän poikkeavia ongelmia. Tällöin aiemmin ratkaistun ongelman ratkaisua voidaan käyttää muunnellun ongelman ratkaisun arvioimiseen. Simplex-menetelmä on tällaisiin tilanteisiin parempi, sillä se pystyy hyödyntämään arviota ratkaisusta sisäpistemenetelmiä tehokkaammin (Illés ja Terlaky 2002; Nocedal ja Wright 2006, s. 416). Lineaarisen kokonais- ja sekalukuoptimoinnin menetelmiä ajatellen Simplexin etuna on myös se, että niissä ratkaistaville ongelmille tarvitaan perusratkaisu. Simplex-menetelmä antaa perusratkaisun suoraan, mutta sisäpistemenetelmien tuottama ratkaisu on erikseen muunnettava perusratkaisuksi (Illés ja Terlaky 2002).

Menetelmien välillä ei voi valita selkeää voittajaa, ja sekä Simplex että sisäpistemenetelmät ovat varmasti molemmat käytössä tulevaisuudessakin. Huolellisesti implementoituna kumpikin vaihtoehto toimii useimmiten riittävän hyvin, ja sisäpistemenetelmät yleensä päihittävät Simplexin suurissa ongelmissa. Menetelmää valitessa on hyvä muistaa, että tiettyihin erityisluokkiin kuuluviin ongelmiin kannattaa käyttää ongelman luonteen huomioon ottavia algoritmeja; esimerkiksi verkosto-ongelmat voidaan ratkaista tehokkaasti niitä varten erikseen optimoidulla Simplex-menetelmän versiolla.

5 Yhteenveto

Tutkielmassa tutustuttiin sisäpistemenetelmiin lineaarisen optimoinnin tapauksessa. Sisäpistemenetelmät kulkivat alun perin sallittujen pisteiden joukon sisäpisteissä, mutta ei-sallituissa sisäpistemenetelmissä iteraatit ovat epänegatiivisuusrajoitteiden määräämän joukon sisäpisteitä. Tehokkaimpana sisäpistemenetelmänä pidetään ei-sallittua primaali-duaalimenetelmää, jonka toteutuksissa kullakin iteraatiolla otettava askel jakautuu ennustus-, keskistys- ja korjaustermeihin.

Yleensä sisäpistemenetelmät ovat Simplex-menetelmää tehokkaampia suurissa ongelmissa ja Simplex puolestaan on parempi pienten ja keskisuurten ongelmien tapauksessa, mutta asia riippuu kuitenkin ongelman rakenteesta. Sisäpistemenetelmien etuna on niiden parempi rinnakkaistuvuus Simplex-menetelmään verrattuna. Simplex sen sijaan on parempi lineaarisessa kokonais- ja sekalukuoptimoinnissa, koska se pystyy hyödyntämään etukäteen saatua arviota ongelman ratkaisusta sisäpistemenetelmiä tehokkaammin.

Nykyään aktiivisuus sisäpistemenetelmien tutkimuksessa ei enää ole 1980- ja 1990-lukujen huippuvuosien tasolla, mutta tekniikka jatkaa kehittymistään, ja tätä kautta parannusta on odotettavissa myös sisäpistemenetelmien tehokkuuteen. Mielenkiintoinen tutkimusaihe koskeekin modernien laitteistokomponenttien hyödyntämistä sisäpistemenetelmien matriisioperaatioissa. Aiheeseen liittyvät tutkimustulokset vaikuttavat lupaavilta, ja lisäksi tutkimusongelma on varsin tuore, joten sen parissa riittää tutkittavaa vielä jatkossakin.

Lähteet

Anstreicher, Kurt M. 1986. "A monotonic projective algorithm for fractional linear programming". *Algorithmica* 1 (1-4): 483–498. doi:10.1007/BF01840458.

———. 1999. "Linear programming in O ([n3/ln n] L) operations". *SIAM Journal on Optimization* 9 (4): 803–812. doi:10.1137/S1052623497323194.

Barnes, Earl R. 1986. "A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems". *Mathematical programming* 36 (2): 174–182. doi:10.1007/BF02592024.

Cai, Ruizhe, Ao Ren, Sucheta Soundarajan ja Yanzhi Wang. 2018. "A low-computation-complexity, energy-efficient, and high-performance linear program solver based on primal dual interior point method using memristor crossbars". *Nano Communication Networks.* doi:10.1016/j.nancom.2018.01.001.

Chen, Mingyuan, ja Weimin Wang. 1997. "A linear programming model for integrated steel production and distribution planning". *International Journal of Operations & Production Management* 17 (6): 592–610. doi:10.1108/01443579710167276.

Colombo, Marco, ja Jacek Gondzio. 2008. "Further development of multiple centrality correctors for interior point methods". *Computational Optimization and Applications* 41 (3): 277–305. doi:10.1007/s10589-007-9106-0.

Dikin, I. 1967. "Iterative solution of problems of linear and quadratic programming". Teoksessa *Soviet Mathematics Doklady,* 8:674–675.

Gay, David M. 1987. "A variant of Karmarkar's linear programming algorithm for problems in standard form". *Mathematical Programming* 37 (1): 81–90. doi:10.1007/BF02591685.

Gondzio, Jacek. 2012a. "Interior point methods 25 years later". *European Journal of Operational Research* 218 (3): 587–601. doi:10.1016/j.ejor.2011.09.017.

———. 2012b. "Matrix-free interior point method". *Computational Optimization and Applications* 51 (2): 457–480. doi:10.1007/s10589-010-9361-3.

Gondzio, Jacek. 2016. “Crash start of interior point methods”. *European Journal of Operational Research* 255 (1): 308–314. doi:10.1016/j.ejor.2016.05.030.

Gondzio, Jacek, Jacek A. Gruca, J.A. Julian Hall, Wiesław Laskowski ja Marek Żukowski. 2014. “Solving large-scale optimization problems related to Bell’s Theorem”. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 263:392–404. doi:10.1016/j.cam.2013.12.003.

Illés, Tibor, ja Tamas Terlaky. 2002. “Pivot versus interior point methods: Pros and cons”. *European Journal of Operational Research* 140 (2): 170–190. doi:10.1016/S0377-2217(02)00061-9.

Karmarkar, Narendra. 1984. “A new polynomial-time algorithm for linear programming”. Teoksessa *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing,* 302–311. ACM. doi:10.1145/800057.808695.

Khachiyan, L. G. 1979. “A polynomial algorithm in linear programming”. *Soviet Mathematics Doklady* 20:191–194.

Klee, Victor, ja George J. Minty. 1972. “How good is the simplex algorithm?” Teoksessa *Inequalities,* III:159–175. New York: Academic Press.

Kusiak, Andrew, Guanglin Xu ja Zijun Zhang. 2014. “Minimization of energy consumption in HVAC systems with data-driven models and an interior-point method”. *Energy Conversion and Management* 85:146–153. doi:10.1016/j.enconman.2014.05.053.

Lagarias, J.C., ja R.J. Vanderbei. 1990. “II Dikin’s convergence result for the affine scaling algorithm”. *Contemporary Math* 114:109–119.

Mehrotra, Sanjay. 1992. “On the implementation of a primal-dual interior point method”. *SIAM Journal on optimization* 2 (4): 575–601. doi:10.1137/0802028.

Nash, S.G., ja A. Sofer. 1996. *Linear and Nonlinear Programming.* Industrial engineering series. McGraw-Hill. ISBN: 9780071145374.

Nocedal, J., ja S. Wright. 2006. *Numerical Optimization.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York. ISBN: 9780387303031.

Potra, Florian A., ja Stephen J. Wright. 2000. "Interior-point methods". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 124 (1-2): 281–302. doi:10.1016/S0377-0427(00)00433-7.

Press, William H., Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling ja Brian P. Flannery. 2007. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing.* 3. painos. New York, NY, USA: Cambridge University Press. ISBN: 0521880688, 9780521880688.

Robere, Robert. 2012. "Interior point methods and linear programming". *University of Toronto.*

Stefanova, Maria, Sergey Yakunin, Margarita Petukhova, Sergey Lupuleac ja Michael Kokkolaras. 2018. "An interior-point method-based solver for simulation of aircraft parts riveting". *Engineering Optimization* 50 (5): 781–796. doi:10.1080/0305215X.2017.1355367.

Vanderbei, R.J. 2001. *Linear Programming: Foundations and Extensions.* International Series in Operations Research & Management Science. Springer US. ISBN: 9780792373421.

Vanderbei, Robert J., Marc S. Meketon ja Barry A. Freedman. 1986. "A modification of Karmarkar's linear programming algorithm". *Algorithmica* 1 (1-4): 395–407. doi:10.1007/BF01840454.

Wright, Margaret. 2005. "The interior-point revolution in optimization: history, recent developments, and lasting consequences". *Bulletin of the American mathematical society* 42 (1): 39–56. doi:10.1090/S0273-0979-04-01040-7.

Wright, Stephen J. 1997. *Primal-dual interior-point methods.* Philadelphia (PA): SIAM.

Yinyu, Ye, ja Masakazu Kojima. 1987. "Recovering optimal dual solutions in Karmarkar's polynomial algorithm for linear programming". *Mathematical Programming* 39 (3): 305–317. doi:10.1007/BF02592079.