Tason isometriat ja similariteetit kompleksiluvuilla

Mikko Takkinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2018

Tiivistelmä: Mikko Takkinen *Tason isometriat ja similariteetit kompleksiluvuilla* (engl. *Isometries and similitudes in plane with complex numbers*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 35. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2018.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella isometrioita ja similariteettejä tasossa kompleksilukujen avulla. Tässä kirjoitelmassa tarvitaan kompleksilukujen ominaisuuksista ainakin kompleksiluvun käänteisluku ja argumenttien laskusäännöt. Lisäksi isometrioiden tulosten todistamista helpottavat erilaiset kompleksilukujen esitystavat, kuten napakoordinaattiesitys ja imaginääriyksikön avulla esittäminen. Isometriat ovat kuvauksia, jotka säilyttävät jokaisen pisteen välisen etäisyyden kuvauksen aikana. Tason isometrioita ovat siirto, kierto, peilaus ja peilauksen ja siirron yhdisteenä saatava liukupeilaus.

Edellä mainitut kaikki Gaussin tason isometriat voidaan jakaa kahteen luokkaan: suoriin tai vastakkaisiin isometrioihin. Suoriin isometrioihin kuuluvat siirrot ja kierrot. Vastakkaisiin kuuluvat peilaukset ja liukupeilaukset.

Isometriat jaotellaan myös tarkemmin vielä kiintopisteiden avulla. Jos suoralla isometrialla on kiintopiste, se on tämän kiintopisteen suhteen kierto, ja jos sillä ei ole kiintopistettä, se on siirto. Vastakkaiset isometriat jaotellaan kiintopisteen suhteen liukupeilaukseen ja suoran suhteen peilaukseen. Suoran suhteen peilauksilla on kiintopiste ja liukupeilauksilla ei ole kiintopistettä. Lisäksi siirto ja kierto voidaan ilmoittaa kahden suoran suhteen peilauksen avulla. Näiden tietojen avulla saadaan, että jokainen isometria voidaan esittää korkeintaan kolmen suoran suhteen peilauksen avulla.

Similariteetit joko venyttävät tai kutistavat kuvia. Similariteetit jaetaan suoriin ja vastakkaisiin similariteetteihin, kuten isometriatkin. Kummatkin kuvaukset säilyttävät kolmioiden kulmien suuruudet samana kuvautuessa. Lisäksi näille kummallekin kuvaukselle voidaan muotoilla Hjelmslevin lause. Isometroille tämä tarkoittaa sitä, että kuvatun suoran kuvapisteiden ja alkuperäisen suoran pisteiden välisten janojen keskipisteet ovat joko samalla suoralla tai kulkevat yhden ainoan pisteen kautta. Similariteeteille nämä eivät ole keskipisteitä, vaan janat jaetaan samassa suhteessa.

Sisältö

Johdanto

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on tarkastella tason isometrioita ja similariteetteja kompleksilukujen avulla. Nämä kuvaukset voidaan luokitella koulumatematiikan yhtenevyyskuvauksiin ja yhdenmuotoisiin kuvauksiin siten, että isometriat ovat yhtenevien kuvioiden välillä olevia kuvauksia ja similariteetit ovat yhdenmuotoisten kuvioiden välillä olevia kuvauksia. Perinteisesti tason isometroita ja simileriteettaja käsitellään reaalisessa tasossa. Tällöin täytyy tietää esitietoina monia lineaarialgebran tuloksia, kuten isometrioiden ja similariteettien lineaarisuus. Reaalisessa tapauksessa käytetään lineaarikuvauksia ja niitä vastaavia matriiseja. Siispä myös matriisilaskennan perustulokset ovat tarpeellisia. Matriisilaskut ovat joskus pitkiä ja hieman monimutkaisia. Toisaalta kompleksilukujen tapauksessa esitietoina tarvitaan kompleksilukujen perustietoja; konjugaatti, kompleksilukujen summan ja tulon säännöt. Lisäksi avuksi tarvitaan joukko trigonometrian kaavoja, joita löytyy kirjotelman lopusta liitteestä A. Tämän jälkeen muutamien kompleksilukujen ominaisuuksien osoittamisen jälkeen voi jo kehittää hyvää teoriaa isometrioista.

Tutkielmassa tarkastellaan pääasiassa Dan Pedoen kirjan [**4**] tuloksia isometrioista ja similariteeteista. Esitysjärjestystä on muutettu mielekkäämmäksi ja johdonmukaisesti käymällä yksi päätulos kerrallaan lävitse. Lisäksi Pedoen kirjan rinnalla käytetään apuna Keith Conradin artikkelia [**2**], jossa on tiivistetysti käsitelty osa päätuloksista.

Aluksi tutkitaan kompleksilukujen perusominaisuuksia. Tämän jälkeen määritellään isometria luvussa 1 ja käydään läpi tarkasti määritellen erilaisia kuvauksia, jotka todetaan lopuksi isometrioiksi. Kuvaukset ovat siirto, kierto pisteen suhteen, peilaus suoran suhteen ja siirrosta ja peilauksesta yhdisteenä saatava liukupeilaus. Lisäksi määritellään identtinen kuvaus siirroksi, jossa siirretään nollavektorin verran pistettä.

Luvussa kaksi tarkastellaan tarkemmin isometrioiden kahteen luokkaan jaosta syntyviä tuloksia. Lisäksi tarkastelemme näihin liittyviä yleisiä yksikäsitteisyystuloksia, jotka pätevät Gaussin tasossa. Nämä ovat myös perinteisen Euklidisen tasogeometrian ominaisuuksista tulevia tuloksia. Tarkastelu aloitetaan sillä, että on olemassa täsmälleen yksi suora isometria sekä yksi vastakkainen isometria, jotka toteuttavat isometrian määritelmän pisteparin etäisyyden. Tämän jälkeen jatketaan tarkastelua suorien avulla. Aluksi saadaan tulokseksi, että samalla suoralla olevat pisteet säilyvät samalla suoralla, kun kuvataan pisteitä isometrialla. Tästä saadaan jatkettua tuloksella, että yhdensuuntaiset suorat kuvautuvat yhdensuuntaisiksi suoriksi, jonka todistamisessa käytetään apuna tietoa tasogeometriasta, että jos suoran ulkopuolella olevan pisteen ja suoran välinen jana mahdollisimman lyhyt, niin tämän suoralla olevan pisteen kautta piirretty suora on kohtisuorassa valitun suoran suhteen. Näiden jälkeen saamme tietää, että jokainen isometria määräytyy yksikäsitteisesti kolmen annetun pisteen avulla. Tällöin voidaan tutkia yleistä kolmioiden teoriaa, johon kuuluu esimerkiksi kolmioiden yhtenevyys. Tällöin myös kolmioiden kulmat säilyvät ja erityisesti kaikkien suorien väliset kulmat säilyvät.

Sitten palataan takaisin ensimmäisen lauseen pariin, ja tähän liittyen saadaan tälle tarkempi tulos. Kun on kaksi pisteparia, joiden pisteparien pisteiden etäisyys on sama, niin on olemassa täsmälleen kaksi isometriaa näiden pisteparien välillä. Näiden edellä olevien tuloksien avulla saamme luvun ensimmäisen kappaleen päätuloksen, että kaikkien isometrioiden joukko muodostuu vastakkaisista isometriosta ja suorista isometrioista. Lisäksi helpottavana tietona saamme, että kaikki suorat isometriat ovat muotoa $f(z) = az + b$ ja vastakkaiset isometriat ovat muotoa $f(z) = a\overline{z} + b$. Nämä muodot ovat huomattavasti helpompia käsitellä kuin neliömatriisit reaalisen tason tapauksessa.

Luvun kaksi toisessa kappaleessa tarkennetaan isometrioiden jaottelua kiintopisteiden avulla. Piste z on kuvauksen f kiintopiste, jos $f(z) = z$. Suorat isometriat jaoteltuna kiintopisteiden avulla saadaan siirtoihin ja kiertoihin. Kun suoralla isometrialla on kiintopiste, niin se on kierto pisteen suhteen ja muulloin siirto. Vastakkainen isometria on peilaus suoran suhteen, jos vastakkaisella isometrialla on kiintopiste. Muulloin vastakkainen isometria on liukupeilaus. Lisäksi tulemme todistamaan, että siirto ja kierto pisteen suhteen voidaan ilmoittaa kahden peilauksen avulla ja päinvastoin. Näiden kaikkien tietojen avulla saamme lopulta todistettua kappaleen päälauseen, jonka mukaan jokainen isometria voidaan lausua korkeintaa kolmen suoran suhteen peilauksen avulla.

Lopulta tutkielman kolmannessa luvussa tarkastellaan similariteetteja. Aluksi käydään läpi samoja jaotteluja kuin isometrioilla, kuten similariteettien jako suoriin ja vastakkaisiin similariteetteihin. Similariteeteillä on hyvin samanlaisia ominaisuuksia kuin isometrioilla ja niiden todistaminen menee hyvin samaan tapaan kuin isometrioille. Vaikka similaritteettien tapauksessa janat ja kolmiot venyvät tai kutistuvat, niin pituuksien suhde pysyy samana. Tällöin myös kolmion janojen muodostamat kulmat säilyvät samaan tapaan kuin isometrioilla. Luvun kolme toisessa kappaleessa tutustutaan vielä kirjoitelman viimeiseen päätulokseen: Hjelmslevin lauseeseen. Se sanoo, että isometrialla kuvatun suoran ja alkuperäisen suoran välillä pisteiden ja kuvapisteiden keskipisteet ovat joko erillisiä ja samalla suoralla tai kulkevat saman pisteen kautta. Tämä tullaan todistamaan isometrioille geometrisesti. Hjelmlevin lausetta vastaava tulos pätee myös similariteeteille, ja tämä todistetaan lopulta algebrallisesti.

LUKU 1

Alkumääritelmiä

1.1. Kompleksiluvuista

Määritellään aluksi kompleksiluvut tason $\mathbb{R}^2$ avulla eli merkitään $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tällöin saadaan määriteltyä kompleksiluvut geometrisesti tasossa pisteinä.

Määritelmä 1.1. Kompleksiluku z on tason $\mathbb{R}^2$ piste (x_1, x_2), missä $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Pisteen z osaa x_1 kutsutaan kompleksiluvun reaaliosaksi ja lukua x_2 kutsutaan imaginääriosaksi. Jos kompleksiluvussa z on pelkästään reaaliosaa, niin $z = (x_1, 0) = x_1 \in \mathbb{R}$. Jatketaan tästä kompleksiluvun itseisarvon määrittelemisellä. Tähän käytetään jo hyvin tutuksi tullutta euklidista normia eli pituutta, jota kutsutaan yleensä kompleksilukujen yhteydessä **moduuliksi**.

Määritelmä 1.2. Kompleksiluvun $z = (x_1, x_2)$ moduuli on

$$\|z\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksilukujen summaa ja tuloa, joista summa saadaan samaan tapaan kuin euklidinen vektorisumma. Tulo taas määritellään eri tapaan kuin perinteinen kahden vektorin välinen tulo.

Määritelmä 1.3 (Kompleksilukujen summa ja tulo). Olkoon $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ kompleksilukuja. Kompleksilukujen summa on $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ja tulo on $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Olemme saaneet nyt määriteltyä kompleksilukujen laskutoimitukset ja pituuden. Määritellään seuraavaksi kahden pisteen välinen etäisyys. Tämä määritellään samaan tapaan kuin euklidisessa tasossa.

Määritelmä 1.4. Kahden kompleksiluvun $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ välinen etäisyys on

$$\|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Edellä oleva määritelmä auttaa meitä määrittelemään vielä milloin kolme pistettä ovat samalla suoralla. Kompleksiluvuista käytämme synonyyminä pistettä geometrissä tapauksissa, mikä on perusteltua kappaleen ensimmäisen määritelmän mukaan.

Määritelmä 1.5. Piste z_2 on pisteiden z_1 ja z_3 välissä, jos

$$\|z_1 - z_3\| = \|z_1 - z_2\| + \|z_2 - z_3\|.$$

Tällöin erityisesti pisteet ovat samalla suoralla.

Olemme saaneet esitettyä tärkeitä geometrisia määritelmiä. Jatketaan laskennallista puolta helpottavilla tuloksilla ja määritellään seuraavaksi imaginääriyksikkö i, ja lasketaan sille edellä olevan kompleksisen tulon perusteella yksi erityinen ominaisuus.

Huomautus 1.6. Merkitään kompleksilukua $(0,1) = i$ ja sanotaan, että i on imaginääriyksikkö. Lasketaan i^2, jolloin saadaan kompleksilukujen tulon määritelmän perusteella, että $i^2 = i \cdot i = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1$, joten

$$i^2 = -1.$$

Nyt voidaan näiden edellä olevien tietojen avulla esittää kompleksiluvut toisella tavalla, joka ei ole niin geometrinen, mutta se on hyvin yleinen tapa ja laskennallisesti kätevä.

Lause 1.7. *Jokainen kompleksiluku $z = (a,b)$ on muotoa*

$$z = a + bi,$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja i on imaginääriyksikkö.

Todistus. Tarkastetaan lause kompleksilukujen laskusääntöjen avulla:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0)(1,0) + (b,0)(0,1) = a + bi.$$

$\square$

Edellä oleva tulos auttaa nyt meitä laskemaan kompleksilukuja helpommin, koska voimme laskea kompleksilukuja kuin reaalilukuja, kun muistaa peruskaavan $i^2 = -1$. Lisäksi ei tarvitse muistaa hieman hankalaa tulon laskusääntöä. Jatketaan tästä tarkastelemalla kompleksiluvun konjugaattia.

Määritelmä 1.8. Kompleksiluvun $z = a + bi$ konjugaatti on $\overline{z} = a - ib$, missä $a, b \in \mathbb{R}$.

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksikonjugaatin ominaisuuksia.

Lause 1.9. *Olkoon $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ja $w = c + di \in \mathbb{C}$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Seuraavat kompleksikonjugaatin ominaisuudet pätevät:*

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
(2) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
(3) $\|\overline{z} - \overline{w}\| = \|z - w\|$
(4) $z\overline{z} = \|z\|^2$
(5) $\overline{\overline{z}} = z$

Todistus. Ominaisuudet nähdään seuraavilla laskuilla kohta kohdalta:

(1) $\overline{z+w} = \overline{a+c+bi+di} = a + c - bi - di = a - bi + c - di = \overline{z} + \overline{w}$
(2) $\overline{zw} = \overline{ac - bd + (ad+bc)i} = ac - bd - (ad+bc)i = \overline{z} \cdot \overline{w}$
(3) $\|\overline{z} - \overline{w}\| = \|a - c + (-b+d)i\| = \sqrt{(a-c)^2 + (d-b)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \|a - c + (b-d)i\| = \|z - w\|$
(4) $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = \|z\|^2$
(5) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a + bi = z$

$\square$

Seuraavaksi halutaan tietää, mitä muotoa on kompleksiluvun käänteisluku. Tiedetään, että luvun z käänteisluku on luku z^{-1}, jos $zz^{-1} = 1$.

Lemma 1.10. *Kompleksiluvun $z \neq 0$ käänteiluku on $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}$.*

Todistus. Käytetään edellistä lausetta apuna ja lasketaan tulos seuraavalla laskulla

$$z\frac{\overline{z}}{\|z\|^2} = z\frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{z\overline{z}}{z\overline{z}} = 1,$$

joten $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}$.

□

Edellisen lemman seurauksena saadaan ominaisuus, jota tullaan käyttämään jatkossa.

Seuraus 1.11. *Olkoon $\|z\| = 1$. Tällöin $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2} = \overline{z}$. Tästä vielä seuraa imaginääriyksikölle seuraava ominaisuus: $\overline{i} = \frac{1}{i}$.*

Jatketaan seuraavaksi vielä yhdellä tavalla esittää kompleksiluvut. Tässä tavassa käytetään apuna x-akselin ja halutun pisteen välistä kulmaa θ. Tähän tarvitsemme myös edellä määriteltyä kompleksilukujen moduulia, josta saamme $\|(\cos\theta, \sin\theta)\| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1$. Näillä tiedoilla saamme määriteltyä napakoordinaattiesityksen.

Määritelmä 1.12 (Napakoordinaattiesitys). Olkoon kompleksiluku $z = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ ja $z \neq 0$. Tällöin z voidaan esittää muodossa

$$z = \|z\|(\cos\theta, \sin\theta),$$

missä kulma $\theta \in [0, 2\pi[$ on x-akselin ja pisteen (x_1, y_1) välinen kulma kierrettäessä vastapäivään x-akselilta. Kulma θ voidaan ratkaista geometrian avulla: $\theta = \arctan(\frac{y_1}{x_1})$, jos $x_1 \neq 0$. Jos taas $x_1 = 0$, niin tällöin kompleksiluku on imaginäärisuoralla, jolloin kulma $\theta = \frac{\pi}{2}$, jos $y_1 > 0$ ja $\theta = \frac{3\pi}{2}$, jos $y_1 < 0$. Tätä kulmaa kutsutaan argumentiksi ja merkitään tätä $\theta = am(z)$.

Osoitetaan hyödyllinen tulos käyttäen apuna napakoordinaattiesitystä.

Lemma 1.13. *Olkoon $z, w \in \mathbb{C}$, ja $z \neq 0 \neq w$. Tällöin*

$$am(zw) = am(z) + am(w).$$

Todistus. Olkoon $z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ja $w = \|w\|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Lasketaan ensiksi kompleksilukujen z ja w tulo käyttäen napakoordinaattiesitystä:

$$\begin{aligned} zw =& \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)\|w\|(\cos\phi + i\sin\phi) \\ =& \|z\|\|w\|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ =& \|z\|\|w\|(\cos\theta\cos\phi + i\cos\theta\sin\phi + i\sin\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) \\ =& \|z\|\|w\|(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)) \end{aligned}$$

Yhtälön viimeinen yhtäsuuruus saadaan sinin ja kosinin yhteenlaskukaavasta. Nyt yhtälöstä voidaan päätellä, että $am(zw) = \theta + \phi = am(z) + am(w)$.

□

Gaussin taso on tapa ilmaista kompleksilukujen joukko. Euklidisen tason geometriassa koordinaatit ovat kohtisuorassa x- ja y-akselin kanssa. Gaussin tasossa y-akselia vastaa imaginääriluvut ja x-akselia reaaliluvut.

Määritelmä 1.14 (Gaussin taso). Gaussin taso on reaaliluvun 1 ja imaginääriyksikön i virittämä avaruus, jossa nämä ovat vektorit kohtisuorassa toisiaan vasten.

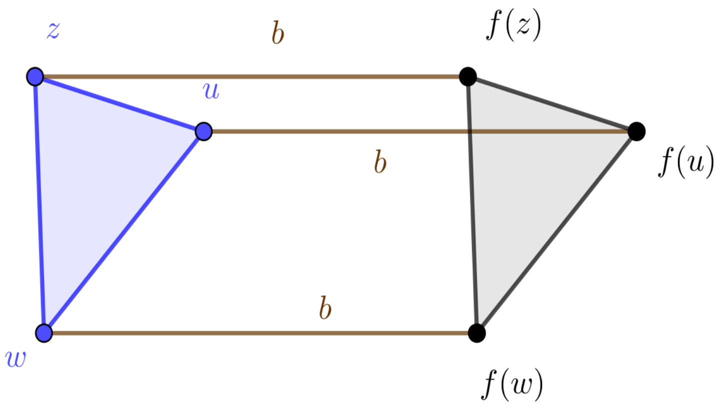
1.2. Isometrioista

MÄÄRITELMÄ 1.15. Kuvaus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on isometria, jos

$$\|f(z) - f(w)\| = \|z - w\|, \text{ kaikilla } z, w \in \mathbb{C}.$$

Nyt meille on annettu isometrian määritelmä. Tarkastellaan seuraavaksi kuvauksia, jotka ainakin vaikuttavat isometrioilta. Otetaan ensiksi tarkasteluun siirto, joka nimensä mukaisesti siirtää jokaista kompleksitason pistettä halutun kompleksiluvun verran.

MÄÄRITELMÄ 1.16 (Siirto). Olkoon b kiinnitetty kompleksitason piste. Jos kuvaus f on muotoa $f(z) = z + b$, niin se on siirto.



KUVA 1.1. Pisteet z, w ja u kuvautuvat siirrolla f. Kuvassa vektorit b ovat siirtovektoreita.

Erikoistapaus $b = 0$ lasketaan myös siirroksi, mistä seuraa, että identtinen kuvaus on myös siirto.

Seuraavaksi määritellään kierto minkä tahansa kulman θ verran. Tarkastellaan aluksi kiertoa origon suhteen, koska jokainen kierto voidaan siirtojen avulla palauttaa tilanteeseen, jossa kierto tapahtuu origossa. Tulemme näyttämään myöhemmin, että samat kierrot voidaan tehdä kaikissa muissa pisteissä kuin origossa. Ilmoitetaan nyt kompleksiluku z napakoordinaattiesityksen avulla. Tällöin $z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)$, missä $\theta \in [0, 2\pi[$. Kerrotaan nyt kompleksilukua z kompleksiluvulla $w = (\cos\phi + i\sin\phi)$. Tällöin

$$z(\cos\phi + i\sin\phi) = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$= \|z\|(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)),$$

mistä saadaan lopulta trigonometristen summakaavojen avulla

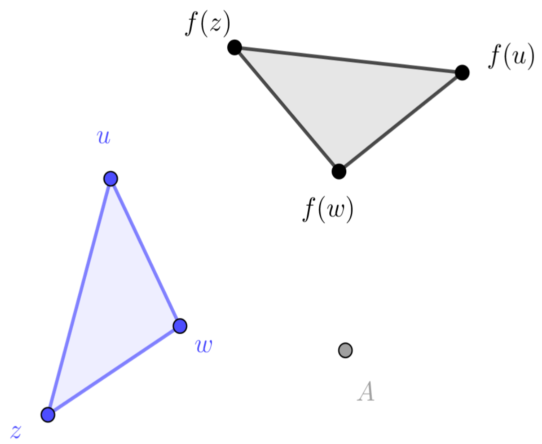
$$zw = \|z\|(\cos(\theta + \phi) + i(\sin(\theta + \phi))).$$

Siis kertomalla kompleksilukua z kompleksiluvulla w saamme kierrettyä kulman ϕ verran lisää, joten olemme saaneet kierron määriteltyä.

Määritelmä 1.17 (Kierto origon suhteen). Kuvaus

$$f(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)z$$

on kierto origon suhteen, missä $\theta \in \mathbb{R}$.



Kuva 1.2. Pisteet z, w ja u kuvautuvat kierrolla f pisteen A suhteen.

On olemassa myös kierrosta erikoistapaus, kun kulma $\theta = \pi$. Tätä tapausta kutsutaan pisteen suhteen peilaukseksi.

Kierron jälkeen haluamme määritellä suoran suhteen peilauksen, joka vaikuttaa isometrialta. Tiedetään, että kuvaus $f(z) = \overline{z}$ muuttaa imaginääriosan merkin, jolloin tämän tapainen kuvaus peilaa pisteet x-akselin suhteen. Tämä voidaan helposti todeta sillä, että pisteiden z ja $\overline{z}$ etäisyydet x-akselista ovat samat. Lähestytään tilannetta minkä tahansa origon kautta kulkevan suoran suhteen peilauksella. Tällöin kierrämme haluttua suoraa l x-akselin päälle. Jos suoran l ja x-akselin välinen kulma on $\theta > 0$ vastapäivään nähden, niin kierrämme suoraa l myötäpäivään kulman $-\theta$ verran. Kulma $\theta < 0$, kun suoran l ja x-akselin välinen kulma on myötäpäivään nähden. Nyt yhdistämällä edellisen kiertokuvauksen g alussa esitellyn konjugaattikuvauksen f kanssa saamme

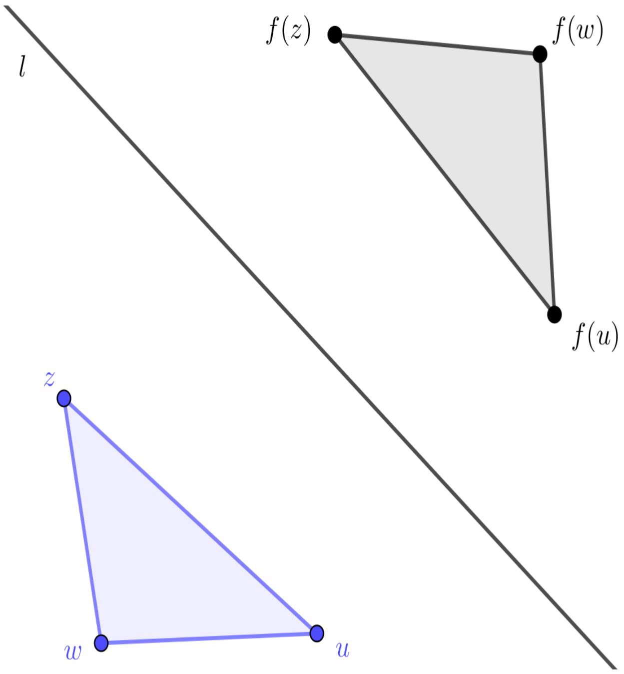
$$\begin{aligned}
h(z) &= g^{-1}(f(g(z))) = g^{-1}(f((\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)z)) \\
&= g^{-1}(\overline{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)z}) \\
&= \cos(\theta) + i\sin(\theta)(\overline{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)z}) \\
&= \cos(\theta) + i\sin(\theta)(\cos(-\theta) - i\sin(-\theta)\overline{z}) \\
&= [\cos(\theta)^2 + 2i\sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)^2]\overline{z} = (\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))\overline{z}
\end{aligned}$$

Lopulta saamme kaksinkertaisten kulmien trigonometristen sääntöjen avulla määriteltyä peilauksen origon kautta kulkevan suoran suhteen.

Määritelmä 1.18 (Peilaus origon kautta kulkevan suoran suhteen). Kuvaus

$$f(z) = (\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))\overline{z}$$

on peilaus origon kautta kulkevan suoran suhteen, missä kulma θ on suoran ja x-akselin välinen kulma.



Kuva 1.3. Pisteet z, w ja u kuvautuvat peilauksella suoran l suhteen

Jos taas peilauksen suora ei kulje origon kautta, niin voimme siirron T avulla siirtää suoran origon kautta kulkevaksi ja tämän jälkeen tehdä peilauksen. Peilauksen jälkeen voimme siirtää pisteet vastakkaisella siirrolla T^{-1} takaisin suoran vanhalle paikalle ja pisteet on peilattu suoran suhteen.

Nyt olemme saaneet osan isometrialta vaikuttavista kuvauksista määrilteltyä. Tämän jälkeen haluamme myös yhdistellä näitä, jolloin tarvitsemme seuraavan tuloksen.

Lemma 1.19. *Kahden tai useamman isometrian yhdiste on isometria.*

Todistus. Todistetaan tapaus, kun kyseessä on kaksi isometriaa. Useamman isometrian tapaus käsitellään samaan tapaan. Olkoon f ja g isometrioita ja pisteet $z, w \in \mathbb{C}$. Näille pätee määritelmän mukaan $\|f(z) - f(w)\| = \|z - w\|$ ja $\|g(z) - g(w)\| = \|z - w\|$. Tutkitaan yhdistettyä kuvausta $g \circ f$. Tällöin määritelmän mukaan

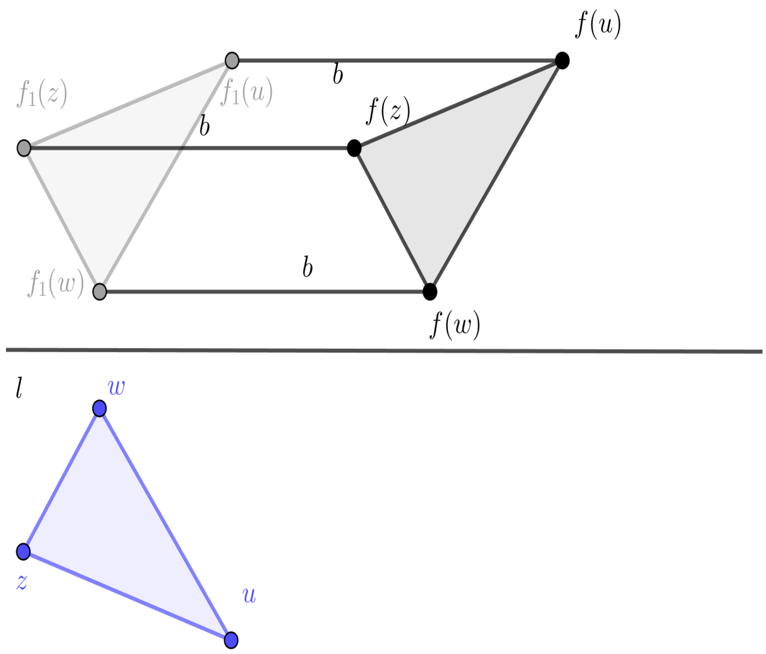
$$\|g(f(z)) - g(f(w))\| = \|f(z) - f(w)\| = \|z - w\|.$$

Siispä kahden isometrian yhdistetty kuvaus on myös isometria.

$\square$

Nyt edellisen lemman avulla voimme voimme rohkeasti yhdistellä esiteltyjä kuvauksia. Eräs tärkeä erikoistapaus tästä on siirron ja peilauksen yhdisteenä saatava kuvaus nimeltä liukupeilaus.

Määritelmä 1.20 (Liukupeilaus). Kuvaus, joka on yhdiste suoran suhteen peilauksesta ja siirrosta, joka on yhdensuuntainen peilattavan suoran kanssa, on liukupeilaus.



Kuva 1.4. Pisteet z, w ja u kuvautuvat ensiksi peilauksella f_1 suoran l suhteen ja sitten siirron avulla liukupeilauksen f pisteiksi $f(z), f(w)$ ja $f(u)$.

Todistetaan vielä edellä olevat kuvaukset isometrioiksi.

Lause 1.21. *Siirto, kierto origon suhteen ja peilaus origon kautta kulkevan suoran suhteen ovat isometrioita. Lisäksi liukupeilaus on isometria.*

Todistus. Todistetaan aluksi siirto isometriaksi. Olkoon $z, w \in \mathbb{C}$. Nyt

$$\|f(z) - f(w)\| = \|z + b - (w + b)\| = \|z - w\|.$$

Kierron osoittaminen isometriaksi saadaan myös suoralla laskulla samaan tapaan

$$\|f(z) - f(w)\| = \|(\cos\theta + i\sin\theta)z - (\cos\theta + i\sin\theta)w\| = \|z - w\|,$$

koska $\|\cos\theta + i\sin\theta\| = 1$, mikä seuraa suoraan kolmpeksilukujen modulin määritelmästä ja trigonometrian tuloksesta $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Lasketaan vielä suoran suhteen peilaus isometriaksi:

$$\begin{aligned}\|f(z) - f(w)\| &= \|(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))\overline{z} - (\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))\overline{w})\| \\ &= \|(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))(\overline{z} - \overline{w})\| \\ &= \|\overline{z} - \overline{w}\| = \|z - w\|.\end{aligned}$$

Lauseen 1.9 ja tiedon $\|(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\| = 1$ avulla saamme loppullisen tuloksen. Näin ollen määritelmän mukaan kolme ensimmäistä kuvausta ovat isometrioita.

Tiedetään, että siirto ja peilaus ovat isometrioita, joten lemman 1.19 perusteella myös liukupeilaus on isometria. □

Otetaan tähän vertailun vuoksi tarkasteluun vielä reaalinen tapa todistaa kierto isometriaksi.

Huomautus 1.22 (Kierron isometriaksi toteaminen reaalisessa tapauksessa). Aluksi tarvitaan tietoa, että matriisi $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ vastaa kiertoa kulman α verran origon ympäri vastapäivään. Lisäksi täytyy tietää, että matriisi A on kiertoa vastaava lineaarikuvaus. Tämän jälkeen täytyy vielä kertoa vektoria $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ matriisilla A, jolloin saamme kierron tehtyä mille tahansa vektorille x. Otetaan lisäksi suoraan edellä olevasta tulosta pituus, jolloin saamme:

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \left\| \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{bmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{x_1^2 \cos^2\alpha - 2x_1x_2 \sin\alpha\cos\alpha + x_2^2 \sin^2\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha + 2x_1x_2 \sin\alpha\cos\alpha + x_2^2 \cos^2\alpha} \\
&= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\|
\end{aligned}$$

Siispä huomataan, että kierron lineaarikuvausta vastaava matriisi säilyttää minkä tahansa vektorin pituuden, joten sen vastaava kuvaus on isometria.

Edellä olevasta huomatuksesta nähdään, että isometriaksi todistaminen reaalisessa tasossa on hieman työläämpää jo matriisilaskujen vuoksi. Lisäksi tarvitaan lisätietoja matriisien muuntamisesta lineaarikuvauksiksi ja päinvastoin kun taas kompleksisessa tarkastelussa riittää käyttää kompleksilukujen laskuja.

Kirjassa [**1**] tarkastellaan reaalisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$ tapahtuvia isometrioita. Tutkitaan kyseisiä kuvauksia tässä tapauksessa kompleksitasossa. Olkoon funktio h siirto eli $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, h(x) = x + b$, missä $b \in \mathbb{C}$. Olkoon taas funktio g isometria, jolle $g(0) = b$. Määritellään funktio f siten, että $f = h^{-1} \circ g$, jolloin se siirtää funktion g takaisin origoon. Funktio f on isometria lemman 1.19 nojalla. Tämä tapa on hyvin yleinen tapa tarkastella isometrioita. Olkoon pisteet $s = (1, 0)$ ja $r = (0, 1)$. Tällöin pisteen x sijainnin määräävät seuraavat kolme pituutta:

$$\|x\|, \ \|x - s\| \text{ ja } \|x - r\|.$$

Tiedetään, että funktio f on isometria, jolloin seuraavat yhtälöt ovat voimassa

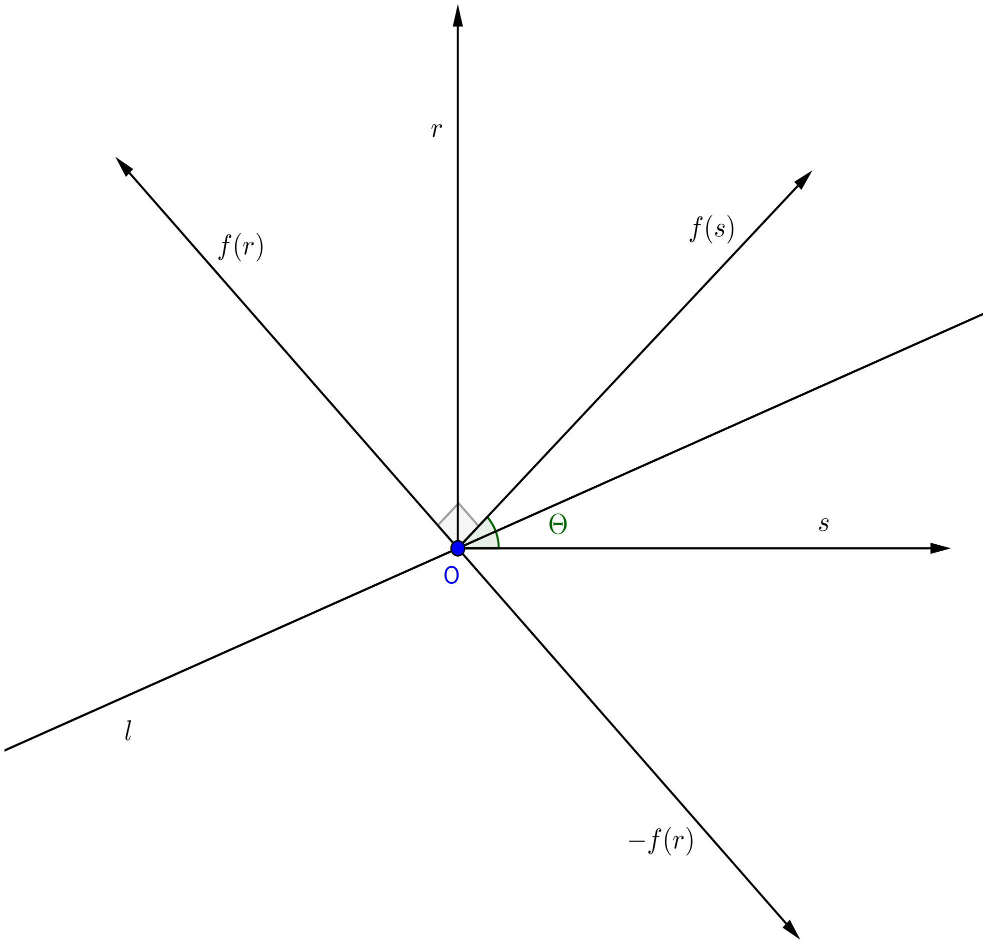
$$\|f(x)\| = \|x\|, \ \|f(x) - f(s)\| = \|x - s\| \text{ ja } \|f(x) - f(r)\| = \|x - r\|.$$

Pisteiden s ja r valinan nojalla

$$\|f(s)\| = \|s\| = 1, \|f(r)\| = \|r\| = 1 \text{ ja } \|f(r) - f(s)\| = \|r - s\| = \sqrt{2}.$$

Olkoon kulman $\sphericalangle(f(s)0s))$ suuruus θ ja olkoon $\tilde{f}$ kierto origon ympäri kulman θ verran. Tällöin siis piste s kuvautuu pisteeksi $\tilde{f}(s)$ ja piste r kuvautuu pisteeksi $\tilde{f}(r)$ tai pisteeksi $-\tilde{f}(r)$.

Tapauksessa, jossa $f(r) = -\tilde{f}(r)$, piste r peilautuu suoran l suhteen, joka muodostaa positiivisen x-akselin kanssa $\theta/2$ suuruisen kulman. Pisteiden sijoittumista



Kuva 1.5. Piste r kuvautuu joko pisteeksi $f(r)$ tai $-f(r)$, kuvassa pisteet on merkattu vektoreilla

on tarkasteltu vielä tarkemmin kuvassa 1.2. Nyt näiden tarkasteluiden jälkeen voidaan määritellä suora ja vastakkaisisometria riippuen funktiosta f. Jos nyt $g = hf$ ja funktio f on kierto, niin funktio g on suora isometria. Jos taas funktio f on peilaus, niin funktio g on vastakkaisisometria. Määritellään seuraavaksi nämä isometriatyypit kompleksitasossa puhtaasti algebrallisesti.

Määritelmä 1.23 (Suora ja vastakkainen isometria). Kaikki muotoa

$$f(z) = az + b,$$

missä $\|a\| = 1$, olevat kuvaukset ovat suoria isometrioita. Taas muotoa

$$f(z) = c\overline{z} + d,$$

missä $\|c\| = 1$, olevat kuvaukset ovat vastakkaisia isometrioita. Merkintä I_+ tarkoittaa kaikkien suorien isometrioiden joukkoa ja merkinnällä I_- tarkoitetaan kaikkien vastakkaisten isometrioiden joukkoa.

Näiden määritelmien avulla pystymme jakamaan isometriat näihin kahteen eri kategoriaan ja tulemme todistamaan myöhemmin, että isometriat voidaan jakaa pelkästään näihin kahteen kategoriaan. Varmistetaan seuraavaksi, että suora ja vastakkainen isometria ovat isometrioita.

LAUSE 1.24. *Muotoa $f(z) = az + b$ ja $g(z) = c\overline{z} + d$ olevat kuvaukset ovat isometrioita, kun $\|a\| = 1 = \|c\|$.*

TODISTUS. Olkoon $z, w \in \mathbb{C}$. Saadaan suoralla laskulla seuraavasti:

$$\|f(z) - f(w)\| = \|az + b - aw - b\| = \|a(z - w)\|.$$

Tiedetään, että $\|a\| = 1$, jolloin $\|f(z) - f(w)\| = \|z - w\|$. Tarkastetaan seuraavaksi vielä kuvaus g:

$$\|g(z) - g(w)\| = \|c\overline{z} + d - c\overline{w} - d\| = \|c(\overline{z} - \overline{w})\|.$$

Nyt lauseen 1.9 kohdan (2) ja tiedon $\|c\| = 1$ perusteella $\|g(z) - g(w)\| = \|z - w\|$. □

Tarkastellaan seuraavaksi karteesisia koordinaatteja, joiden avulla voidaan ilmoittaa piste $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin x_1 ja x_2 ovat pisteen x karteesiset koordinaatit. Karteesiset koordinaatit voidaan ilmoittaa vastakkaisen ja suoran isometrian avulla seuraavan lauseen mukaan.

LAUSE 1.25. *Olkoon $z = (x, y)$, missä x ja y ovat karteesisia koordinaatteja. Tällöin karteesisten koordinaattien uudet koordinaatit voidaan määrätä suorassa isometriassa $f(z) = (x', y')$ seuraavasti:*

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta + p \quad ja \quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta + q.$$

Vastakkaisisometriassa $g(z) = (x', y')$ voidaan esittää karteesiset koordinaatit muodossa

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta + p \quad ja \quad y' = x\sin\theta - y\cos\theta + q.$$

TODISTUS. Tiedetään, että kaikki suorat isometriat ovat muotoa $f(z) = az + b$. Nyt voidaan valita, että $b = p + qi$, koska tämä siirtää haluttuun paikkaan koordinaatiston. Lisäksi valitaan $a = \cos\theta + i\sin\theta$. Nyt edellä määrätty a käy läpi kaikki arvot kaikilla $\theta \in [0, 2\pi[$ ja toteuttaa ehdon $\|a\| = 1$. Olkoon $z = x + iy$. Tällöin suoraan laskemalla saamme, että

$$\begin{aligned} f(z) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) + p + iq \\ &= x\cos\theta + ix\sin\theta + yi\cos\theta - y\sin\theta + p + iq. \end{aligned}$$

Muunnetaan edellä saatu tulos koordinaattiesitykseksi, jolloin saamme:

$$(x\cos\theta - y\sin\theta + p, x\sin\theta + y\sin\theta + q).$$

Siispä saadut uudet koordinaatit ovat halutut.

Samaan tapaan voidaan laskea vastakkaisille isometrioille, mutta korvataan z nyt konjugaatilla $\overline{z} = x - yi$. Siispä saamme laskusta

$$\begin{aligned} g(z) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) + p + iq \\ &= x\cos\theta + ix\sin\theta + yi\cos\theta + y\sin\theta + p + iq. \end{aligned}$$

Tämä voidaan muuttaa koordinaatistoesitykseksi, jolloin saamme:

$$g(z) = (x\cos\theta + y\sin\theta + p, x\sin\theta - y\sin\theta + q).$$

Tällöin olemme saaneet todistettua lauseen molemmat kohdat. $\square$

LUKU 2

Isometrioiden luokittelua

Edellisessä luvussa esittelimme erilaisia isometrioita ja todistimme muutaman perustuloksen. Jatketaan nyt yleisemmin isometrioiden tarkastelua.

2.1. Gauss-tason isometriat

Osoitetaan seuraavaksi, että suorille ja vastakkaisille isometrioille pätee yksikäsitteisyys.

LAUSE 2.1. *Olkoon pisteparit* $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ *ja* $w_0, w_1 \in \mathbb{C}$ *siten, että*

$$\|z_0 - z_1\| = \|w_0 - w_1\| \neq 0.$$

Tällöin on olemassa vain yksi kuvaus joukossa I_+ *sekä yksi kuvaus joukossa* I_-*, jotka kuvaavat pisteen* z_0 *pisteeksi* w_0 *ja pisteen* z_1 *pisteeksi* w_1*.*

TODISTUS. Määritellään vakiot $a, b \in \mathbb{C}$ joukossa I_+ oleville kuvauksille, jolloin täytyy olla $az_0 + b = w_0$ ja $az_1 + b = w_1$, missä $\|a\| = 1$. Vähentämällä ensimmäisen yhtälön toisella yhtälöllä saamme $a(z_0 - z_1) = w_0 - w_1$ ja tästä ratkaistua vakion a ja se on muotoa

$$a = \frac{w_0 - w_1}{z_0 - z_1}, \text{ kun } z_0 - z_1 \neq 0.$$

Lisäksi tämä antaa vakiolle a vaaditun ehdon $\|a\| = 1$. Tämän jälkeen voimme ratkaista vakion b yhtälöstä $az_0 + b = w_0$, kun tiedämme vakion a arvon. Tällöin saadaan $b = w_0 - az_0$. Tällöin olemme saaneet kummatkin vakiot ratkaistua yksikäsitteisesti.

Otetaan käsittelyyn seuraavaksi vastakkaisten isometrioiden tapaus. Tällöin vakiot $c, d \in \mathbb{C}$ ovat joukossa I_- olevien kuvauksien vakioita. Siis pisteparien täytyy olla muotoa $c\overline{z_0} + d = w_0$ ja $c\overline{z_1} + d = w_1$, missä $\|c\| = 1$. Ratkaistaan vakio c vähentämällä ensimmäinen yhtälö toisella yhtälöllä ja ratkaistaan samaan tapaan kuin vakio a. Tällöin vakio

$$c = \frac{w_0 - w_1}{\overline{z_0} - \overline{z_1}} = \frac{w_0 - w_1}{\overline{z_0 - z_1}}, \text{ kun } z_0 - z_1 \neq 0.$$

Tämä antaa myös vakiolle c vaaditun ehdon $\|c\| = 1$. Nyt olemme ratkaisseet vakion c, jolloin voimme ratkaista ensimmäisen yhtälön avulla vakion d samaan tapaan kuin vakion b, jolloin saamme $d = w_0 - cz_0$.

Näin ollen olemme ratkaisseet yksikäsitteisesti kaikki vakiot a, b, c ja d joukkojen I_+ ja I_- kuvausille, jolloin lauseen väittämä on oikea.

□

Tulemme käyttämään tätä suorien ja vastakkaisten isometrien ominaisuutta myöhemmin yleisessä tapauksessa. Tutkitaan seuraavaksi yleisesti isometrioiden ominaisuuksia Gaussin tasossa.

Lause 2.2. *Jokainen Gauss-tason isometria kuvaa samalla suoralla olevat pisteet samalle suoralle.*

Todistus. Olkoon u, v, w kompleksilukuja, jotka ovat eri pisteitä ja ovat samalla suoralla. Tiedetään, että piste v on pisteiden u ja w välissä, jos ja vain jos

$$\|u - v\| + \|v - w\| = \|u - w\|$$

Kuvataan näitä kaikkia isometrialla f, niin saadaan

$$\begin{aligned}\|f(u) - f(v)\| + \|f(v) - f(w)\| &= \|u - v\| + \|v - w\| \\ &= \|u - w\| = \|f(w) - f(u)\|.\end{aligned}$$

Määritelmän mukaan siis piste $f(v)$ on pisteiden $f(u)$ ja $f(w)$ välissä, joten erityisesti kaikki pisteet ovat samalla suoralla.

□

Nyt tiedetään, että jokainen suora kuvautuu suoraksi. Tehdään seuraavaksi yleistys yhdensuuntaisille suorille.

Lause 2.3. *Jokainen Gaussin tason isometria kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi.*

Todistus. Olkoon piste P Gaussin tasossa ja suora l, joka ei kulje pisteen P kautta. Olkoon piste R suoralla l siten, että jana PR on mahdollisimman lyhyt. Tällöin jana PR on kohtisuorassa suoran l kanssa. Kun kuvataan pisteitä P, R ja suoraa l isometrialla, niin päästään pisteisiin P', R' ja suoraan l', missä R' sijaitsee suoralla l'. Koska isometria säilyttää pituudet ja etäisyydet, niin jana $P'R'$ on lyhin mahdollinen etäisyys suoran l' ja pisteen P' välillä, joten jana $P'R'$ on kohtisuorassa suoran l' kanssa. Siten pisteen P' etäisyys suorista l' on sama kuin pisteen P etäisyys suorasta l.

Olkoon sitten annettuna kaksi yhdensuuntaista suoraa l ja m. Olkoon pisteet P ja Q suoralla l ja pisteet R ja S suoralla m siten, että janat PR ja QS ovat kohtisuorassa suoraa l vasten. Tällöin janat ovat yhtä pitkät eli $PR = QS$ ja suorat kuvautuvat isometrisellä kuvauksella suoriksi l' ja m', jotka ovat myös yhtä etäällä toisistansa. Siispä nämä suorat ovat keskenään yhdensuuntaisia.

□

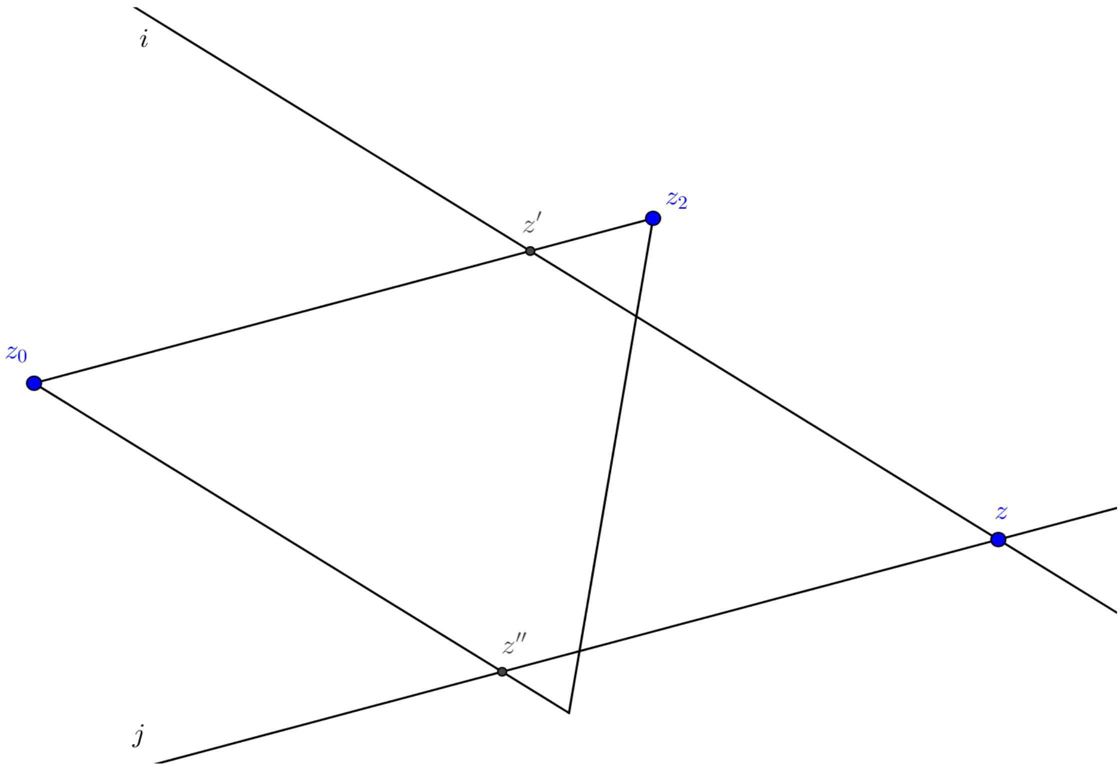
Olemme saaneet nyt kuvautumaan yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi. Tämä ei ole kuitenkaan riittävä siihen, että saataisiin tasossa kaikki kuviot kuvautumaan yhteneviksi. Tätä varten tarvitaan vielä vähän lisää tuloksia ja siksi tutkitaan seuraavaksi kolmion kuvautumista. Tällöin saadaan kuvattua myös tason kaikki muut kuviot.

Lause 2.4. *Jokainen Gaussin tason isometria määräytyy yksikäsitteisesti kolmen annetun pisteen kuvapisteiden avulla.*

Todistus. Olkoon z_0, z_1 ja z_2 pisteitä siten, että näistä kaikki eivät ole samalla suoralla. Kuvataan näitä pisteitä isometrialla f, jolloin saamme pisteet $f(z_0), f(z_1)$ ja $f(z_2)$. Näille taas pätee, että

$$\|z_i - z_j\| = \|f(z_i) - f(z_j)\|, \text{ kaikilla } i, j = 0, 1, 2$$

Nyt kuvataan pistettä z, joka on erillään annetuista pisteistä z_i. Tämän kuvan $f(z)$



Kuva 2.1. Pisteen z kautta piirretyt suorien z_0z_1 ja z_0z_2 kanssa yhdensuuntaiset suorat

täytyy olla yksikäsitteisesti määritelty. Tarkastellaan aluksi tapausta, jossa piste z on pisteiden z_i määräämillä suorilla. Tämä tapaus palautuu lauseeseen 2.2, jonka todistuksessa todetaan, että kahden pisteen välissä oleva piste kuvautuu isometriassa myös näiden kahden pisteen kuvapisteiden väliin ja se kuvautuu myös yksikäsitteisesti.

Olkoon sitten piste z kolmion kärkien z_0, z_1 ja z_2 muodostamien suorien ulkopuolella. Piirretään pisteen z kautta kaksi yhdensuuntaista suoraa, joista toinen on yhdensuuntainen suoran z_0z_1 ja toinen suoran z_0z_2 kanssa. Edellä olevat suorat leikkaavat suoria z_0z_1 ja z_0z_2 ja merkitään näitä leikkauspisteitä z' ja z''. Tällöin saamme kuvan 2.1 näköisen tilanteen. Tarkastetaan nyt, että saamme kuvattua isometrian f avulla pisteen z yksikäsitteisesti samaan tapaan. Tiedetään lauseen 2.2 perusteella, että piste $f(z')$ on suoralla $f(z_0)f(z_2)$ ja piste $f(z'')$ on suoralla $f(z_0)f(z_1)$. Nyt piirretään pisteen $f(z')$ kautta suora l, joka on yhdensuuntainen suoran $f(z_0)f(z_1)$ kanssa. Lisäksi piirretään pisteen $f(z'')$ kautta kulkeva suora m, joka on yhdensuuntainen suoran $f(z_0)f(z_2)$ kanssa. Tällöin suorilla l ja m on yksi ainoa leikkauspiste. Olkoon tämä piste w. Osoittautuu, että piste w on $f(z)$, koska tiedetään lauseen 1.15. perusteella, että yhdensuuntaiset suorat kuvautuvat yhdensuuntaisiksi suoriksi. Tällöin alkuperäinen kuvio pysyy samana ja leikkauspisteen yksikäsitteisyyden nojalla isometrialla f piste z kuvautuu yksikäsitteisesti pisteeksi $f(z)$.

$\square$

Edellä oleva lause antaa meille varmistuksen siitä, että pysymme tasossa isometrisellä kuvauksella. Siis ei voi käydä kuvauksen aikana, että kaikki tason pisteet kuvautuisivat pelkäksi yhdeksi suoraksi eli vaikka reaaliakseliksi. Nyt edellisen lauseen avulla voidaan palata takaisin parantamaan lauseen 2.1 tulosta.

LAUSE 2.5. *On olemassa täsmälleen kaksi isometriaa Gaussin tasossa, jotka kuvaavat pisteet z_0 ja z_1 pisteiksi w_0 ja w_1, missä $\|z_0 - z_1\| = \|w_0 - w_1\| \neq 0$.*

TODISTUS. Lauseen 2.1 perusteella on olemassa ainakin kaksi isometriaa $f(z) = az + b$ ja $g(z) = c\overline{z} + d$, jotka toteuttavat lauseen. Todistetaan, että nämä kaksi ovat ainoat vaihtoehdot. Tiedetään, että kahden annetun pisteen välinen etäisyys lasketaan kaavasta $\|z - w\|$. Tarkastellaan nyt pistettä z, joka ei ole suoralla z_0z_1. Olkoon pisteen z kuva w. Kuvan w paikka määräytyy sen etäisyyksien $\|z - z_1\|$ ja $\|z-z_0\|$ mukaan, koska isometrioissa etäisyydet säilyvät. Tällöin voidaan piirtää kaksi ympyrää, joista toisen keskipiste on w_0 ja säde $\|z-z_0\|$ ja toisen keskipiste w_1 ja säde $\|z-z_1\|$. Tällöin näillä kahdella ympyrällä on kaksi leikkauspistettä. Merkitään näitä leikkauspisteitä w ja w', jotka ovat mahdolliset pisteet, johon piste z voi kuvautua. Nyt edellisen lauseen mukaan kuvapisteet w_0, w_1 ja w on määritelty yksikäsitteisesti isometrialla pisteistä z_0, z_1 ja z. Lisäksi kuvapisteryhmä w_0, w_1 ja w' on määritelty yksikäsitteisesti isometrialla pisteistä z_0, z_1 ja z. Tiedetään entuudestaan, että on olemassa nämä kaksi isometriaa, jotka kuvaavat pisteen z_0 pisteeksi w_0 ja pisteen z_1 pisteeksi w_1, jotka ovat nyt edellä olevan perusteella ainoat mahdolliset ja näiden muodot ovat $f(z) = az + b$ ja $g(z) = c\overline{z} + d$, missä $\|a\| = 1 = \|c\|$.

□

Edellisessä lauseessa tarkastelimme, että kahden samalla etäisyydellä olevan pisteparin välillä on olemassa täsmälleen kaksi isometriaa Gaussin tasossa. Nyt voimme todeta, että nämä kaksi isometriaa ovat vastakkainen ja suora isometria muiden tämän aliluvun lauseiden avulla.

LAUSE 2.6. *Olkoon kaikki Gaussin tason isometriat luokassa I. Tällöin luokat I_+ ja I_- muodostavat kaikki joukon I isometriat.*

TODISTUS. Tiedetään, että isometrialuokkien I_- ja I_+ kuvaukset ovat ainakin isometrioita. Nyt täytyy vielä osoittaa, että nämä ovat kaikki isometriat, joita on Gaussin tasossa. Tämä taas on todistettu lauseessa 2.5 eli, että on olemassa täsmälleen kahden tyyppisiä isometrioita $f(z) = az+b$ ja $g(z) = c\overline{z}+d$, missä $\|a\| = 1$ ja $\|c\| = 1$. Luokassa I_+ kuvaukset ovat muotoa $f(z) = az + b$ ja luokassa I_- ne ovat muotoa $f(z) = a\overline{z} + b$. Tällöin tätä muotoa olevat kuvaukset ovat siis ainoat Gaussin tason isometriat.

□

2.2. Isometrioiden jaottelu kiintopisteiden avulla

Edellisessä kappaleessa saatiin yksi isometrioiden päätuloksista todistettua. Seuraavaa päätulosta varten meidän täytyy jaotella vastakkaiset ja suorat isometriat kiintopisteiden avulla. Tätä varten määritellään aluksi kuvauksen kiintopiste.

MÄÄRITELMÄ 2.7 (Kiintopiste). Olkoon f mikä tahansa Gaussin tason kuvaus. Piste z on kiintopiste, jos $f(z) = z$.

Lisäksi suoraa l kutsutaan kiintosuoraksi, jos suoran l pisteet kuvautuvat suoraksi l kuvauksella f. Silti kaikki suoran l pisteet eivät välttämättä ole kiintopisteitä. Kiintopisteiden avulla pystymme jaottelemaan tarkemmin isometriat eli pystymme vielä tarkemmin sanomaan, mitä ominaisuuksia on suorilla ja vastakkaisilla isometrioilla.

LAUSE 2.8. *Olkoon I_1 joukko suoria isometrioita, jotka ovat muotoa $f(z) = az+b$, missä $a \neq 1$ ja $\|a\| = 1$. Tällöin funktiolla f on ainoastaan yksi kiintopiste ja se on muotoa $w = b(1-a)^{-1}$. Tällöin funktio f on muotoa $f(z) = a(z-w)+w$, jolloin joukon I_1 isometriat ovat kiertoja pisteen w ympäri.*

TODISTUS. Oletuksesta $a \neq 1$ seuraa, että joukossa I_1 ei ole siirtoja. Lisäksi tiedetään, ettei siirrolla ole olemassa yhtään kiintopistettä, ellei se ole identtinen kuvaus. Voimme siis tarkastella nyt joukossa I_1 pistettä w. Jos $w = aw + b$, niin ratkaisemalla pisteen w saamme $w = b(1-a)^{-1}$. Kääntäen huomataan, että

$$f(w) = f\left(\frac{b}{1-a}\right) = a\left(\frac{b}{1-a} - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a} = w.$$

Vähennetään tämä kiintopiste funktion arvosta, jolloin saamme

$$f(z) - w = az + b - w = az + b - aw - b = a(z-w).$$

Nyt siirtämällä origon kiintopisteeseen w voimme siirron g avulla kirjoittaa edellä olevan yhtälön muodossa

$$g(f(z)) = ag(z),$$

missä $g(z) = z - w$, siten $f(z) = g^{-1}a(g(z))$. Tämä suora isometria on kierto pisteen w suhteen. Siispä pisteen w suhteen kierto on muotoa $f(z) = a(z-w)+w$.

□

Edellisestä lauseesta saamme yleistettyä kiertoja koskevan tuloksen.

SEURAUS 2.9. *Jokainen suora isometria, joka ei ole siirto, on kierto kiintopisteen suhteen.*

HUOMAUTUS 2.10. Seurauksen 2.9 mukaan tiedetään, että suorat isometriat ovat joko siirtoja tai kiertoja. Tämä johtuu siitä, että olettaen, että suorista isometrioista otettiin pois siirrot, saimme pelkästään kiertoja käytettäväksi. Lisäksi lauseen 2.8 mukaan jokainen suora isometria, joka ei ole siirto, voidaan kirjoittaa muodossa $f(z) = a(z-w)+w$, missä $a \neq 1$.

Tehdään seuraavaksi samantapaiset tarkastelut vastakkaisisometrioille, jolloin saamme jaettua nämäkin kahteen eri tapaukseen.

LAUSE 2.11. *Vastakkaisisometrialla $f(z) = a\overline{z}+b$ ($\|a\| = 1$) on kiintopisteitä, jos ja vain jos $a\overline{b} + b = 0$. Jos on olemassa kiintopiste, niin kuvaus f on peilaus suoran suhteen ja jokainen tämän suoran piste on kiintopiste. Toisaalta jokainen peilaus suoran suhteen on vastakkaisisometria.*

TODISTUS. Todistetaan aluksi lauseen ensimmäinen kohta. Määritelmän mukaan piste w on kiintopiste, jos $w = a\overline{w} + b$. Sijoittamalla kuvaukseen pisteen w saamme

$$f(w) = a(\overline{a}w + b) + b = a\overline{a}w + a\overline{b} + b$$

Lauseen 1.9 avulla tiedämme, että $\overline{a}a = \|a\|^2 = 1$. Tästä saamme, että $w + a\overline{b} + b = w$. Nyt vielä vähentämällä molemmin puolin pisteen w saamme $0 = a\overline{b} + b$. Samaan tapaan menee toisin päin todistus, kunhan ensiksi lisätään yhtälöön $0 = a\overline{b} + b$ piste w molemmille puolille yhtälöä.

Oletetaan, että annetulla isometrialla on kiintopiste w. Tällöin $w = a\overline{w} + b$. Koska $f(z) = a\overline{z} + b$, voimme vähentää ensimmäinen yhtälön toisesta, jolloin saamme:

$$f(z) - w = a(\overline{z} - \overline{w}) = a(\overline{z - w}).$$

Tämä muoto oli lauseessa 2.8, paitsi nyt kyseiset pisteet ovat konjugaatissa. Nyt täytyy tehdä ensiksi siirto, kuten lauseessa 2.8 eli $g(z) = z - w$. Lisäksi haluamme peilauksen $M(z) = a\overline{z}$. Yhdistämällä nämä kuvaukset seuraavalla tavalla saamme vastakkaisisometrian kirjoitettua seuraavassa muodossa:

$$f(z) = g^{-1}(M(g(z))).$$

Siispä voimme kirjoittaa edelleen

$$g(f(z)) = a\overline{g(z)},$$

missä $g(z) = z - w$ ja $\|a\| = 1$. Tällöin huomataan, että tämä on yksi suoran suhteen peilauksista, missä pisteen w kautta menevä suora muodostaa x-akselin kanssa $am(a)/2$ suuruisen kulman. Siispä vastakkaisisometria on suoran suhteen peilaus, kun sillä on olemassa kiintopiste.

Olkoon nyt kuvaus g peilaus suoran m suhteen ja oletetaan, että suora m kulkee origon kautta. Tapaus, jossa suora m ei kulje origon kautta tehdään peilaus, palautuu ensimmäiseen tilanteeseen lemman 1.19 avulla, kun siirretään kahdella siirrolla siten, että ensiksi siirretään suora kulkemaan origon kautta ja tämän jälkeen siirretään takaisin alkuperäiselle paikalle. Tätä tapaa käytetään yleisesti monessa tapauksessa. Lisäksi olkoon piste $w \in m$. Nyt tiedetään lauseen 2.6 perusteella, että on olemassa vain yksi ainoa suora ja yksi vastakkaisisometria, joka kuvaa suoran m itsellensä. Tässä tapauksessa suora isometria on identtinen kuvaus $f(z) = z$, joten peilauksen täytyy olla vastakkaisisometria. Siten jokainen peilaus on vastakkaisisometria, jolla on kiintopiste.

□

Seuraavaksi tarkastellaan vielä liukupeilausta. Tämä oli siis määritelty siten, että se on yhdiste siirrosta ja peilauksesta. Tällöin on mahdollista, että kuvaus f voidaan lausua joko ensin peilauksena ja sitten siirtona tai ensiksi siirtona ja sitten peilauksena. Tällöin siis kuvauksen voi lausua seuraavasti:

$$f(z) = a\overline{z} + b = a(\overline{z + b}) = a\overline{z} + \overline{b}.$$

Tästä saamme, että $a\overline{b} = b$ tai $a = b/\overline{b}$, josta seuraa, että $am(a) = 2(am(b))$. Tämä nähdään siitä, että $a = \frac{b}{\overline{b}} = \frac{b^2}{\|b\|^2}$, jolloin $am(a) = am(b^2) = 2am(b)$, mikä seuraa lemmasta 1.13.

Seuraavaksi halutaan tutustua tilanteeseen, jossa ei ole kiintopisteitä, jolloin ei ole voimassa tapaus $a\overline{b} + b = 0$.

Lause 2.12. *Peilaus suoran l suhteen siirron T kanssa antaa tulokseksi vastakkaisen isometrian ilman kiintopisteitä, paitsi jos l ja siirron T siirtovektori b ovat* *kohtisuorassa toisiansa vasten. Lisäksi tämä vastakkaisisometria ilman kiintopisteitä on liukupeilaus.*

TODISTUS. Oletaan ensin, että vastakkaisella isometrialla g on olemassa kiintopiste. Lauseen 2.11 nojalla kuvaus g on muotoa $g(z) = a\overline{z} + b$. Tällöin kiintopisteen olemassaolosta olisi yhtälö $a\overline{b} + b = 0$ voimassa. Tästä seuraa, että $am(a) - am(b) = am(-b) = am(b) \pm \pi$, jolloin olisi $am(a)/2 = am(b) \pm \pi/2$. Kun kulma $am(a/2)$ on x-akselin ja suoran l välissä, niin suora l on kohtisuorassa siirtovektoria b vasten.

Toisaalta jos suora l on kohtisuorassa siirtovektoria b vasten, niin voimme päästä samaan lopputulokseen $a\overline{b} + b = 0$ menemällä edellä olevalla tavalla takaperin. Siirtämällä nyt suoraa l kompleksiluvun $\frac{b}{2}$ verran saamme suoran l', jonka suhteen peilatessa saamme samat kuvapisteet kuin kuvauksella g. Olkoon nyt piste w mikä tahansa piste suoralla l. Tällöin suoran l suhteen peilaus vie pisteen $w+b/2$ pisteeseen $w - b/2$ ja siirto T taas siirtää takaisin tämän pisteen pisteeseen $w + b/2$. Tällöin ollaan saatu suora, jolla on kiintopisteitä, joten lauseen 2.11 nojalla g on peilaus suoran l' suhteen.

Jatketaan seuraavaksi tapaukseen, jossa meillä ei ole kiintopisteitä, jolloin meillä on kuvaus $f(z) = a\overline{z} + b$, missä $\|a\| = 1$ ja $a\overline{b} + b \neq 0$. Tällöin pätee

$$a\overline{z} + b = a\overline{z} + \frac{a\overline{b}}{2} - \frac{a\overline{b}}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = a\overline{(z - b/2)} + \frac{b}{2} + \frac{a\overline{b} + b}{2}.$$

Merkitään $c = \frac{a\overline{b}+b}{2} \neq 0$, jolloin saamme kuvauksen f muodossa $f(z) = a\overline{(z - b/2)} + \frac{b}{2} + c$, missä siis aluksi kuvaa siirretään $b/2$ verran, jonka jälkeen tehdään suoran suhteen peilaus, jonka jälkeen tehdään siirto $b/2$ verran ja lopuksi siirretään vielä vektorin c verran. Tämä kuvaus on peilaus suoran suhteen muodostaa, joka kulman $(am(a))/2$ x-akselin kanssa yhdistettynä siirrolla luvun c verran. Siten vastakkaisisometria ilman kiintopisteitä on yhdiste suoran suhteen peilauksesta ja siirrosta vektorin c verran. Lisäksi halutaan, että vektori c on kohtisuorassa suoraa, jonka suhteen peilataan, joten meidän täytyy vielä osoittaa, että $2am(c) = am(a)$. Tiedetään, että

$$\left(\frac{c}{\|c\|}\right)^2 = \frac{c^2}{c\overline{c}} = \frac{c}{\overline{c}} = \frac{(a\overline{b} + b)}{\overline{a}b + \overline{b}} \overset{(*)}{=} a.$$

Viimeinen yhtäsuuruus saadaan kertomalla molemmin puolin yhtälöä (*) kompleksiluvulla $\overline{a}b + \overline{b}$ ja tiedolla, että $a\overline{a} = 1$. Tällöin lemman 1.13 perusteella

$$am(a) = am((c/\|c\|)^2) = 2am(c/\|c\|) = 2am(c),$$

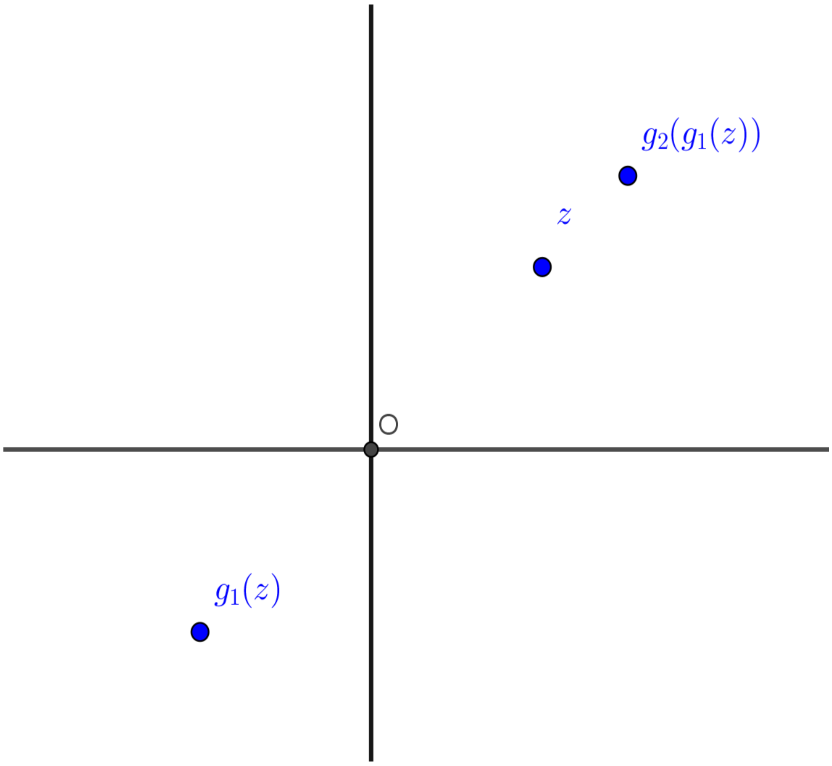
jolloin olemme saaneet halutun tuloksen, joten vastakkaisisometria on peilaus tai liukupeilaus riippuen kiintopisteistä. Jos sillä on kiintopiste se on peilaus ja se on liukupeilaus, jos ei ole kiintopisteitä.

□

2.3. Isometriat luokiteltuina peilausten avulla

Olemme saaneet luokiteltua isometriat yhdellä tapaa. Palataan vielä takaisin kierron ja siirron tapauksiin. Osoitetaan vielä luvun lopuksi, miten kaikki isometriat saadaan peilauksien avulla. Aloitetaan osoittaminen kahden suoran suhteen peilauksesta.

LAUSE 2.13. *Siirto ja kierto voidaan ilmoittaa kahden peilauksen avulla.*



KUVA 2.2. Pisteen z kuvautuminen kuvauksien g_1 ja g_2 avulla lauseen 2.13 todistuksessa

TODISTUS. Olkoon siirto muotoa $g(z) = z + b$. Osoitetaan tapaus $b = 0$ eli identtinen kuvaus voidaan ilmoittaa kahden peilauksen avulla. Tämän nähdään selvästi sillä, että yhdistetään kaksi samaa kuvausta $h(z) = \overline{z}$, jolloin saadaan

$$h(h(z)) = \overline{\overline{z}} = z.$$

Siispä identtinen kuvaus voidaan lausua kahden peilauksen avulla.

Olkoon $b \neq 0$. Tiedetään, että peilaukset ovat muotoa $cz + d$. Tiedetään, että d on peilauksessa siirto-objekti, niin olkoon ainakin toisessa peilauksessa $d = 0$. Tarkastellaan nyt kahta peilausta $g_1(z) = -(b/\overline{b})\overline{z}$ ja $g_2(z) = -(\overline{b}/b)\overline{z} + b$. Yhdistetään nämä kaksi kuvausta, jolloin saamme

$$g_2 \circ g_1(z) = -(\overline{b}/b)(-(b/\overline{b}))z + b = z + b = f(z).$$

Siispä ainakin algberallisesti tämä on hyvin selkeätä, että yhdistämällä kuvaukset g_1 ja g_2 saadaan haluttu siirto f. Geometrisesti kuvaus g_1 tarkoittaa sitä, että se peilaa pisteen z siirron b vastakkaiseen suuntaan eli kuvan 2.2 tilanteessa vaihtaa sekä reaaliosan että imaginääriosan merkit. Sama tapahtuu kuvauksessa g_2 ja siihen lisätään vielä tämä siirto b. Toisin sanoen yhdistetty kuvaus $g_1 \circ (g_2(z) - b)$ on itse asiassa identtinen kuvaus. Kuvassa 2.3 asia on havainnollistettu tarkemmin.

Olkoon kierto muotoa $f(z) = az+b$. Ottamalla mallia siirron tapauksesta valitaan peilauksiksi tällä kertaa $f_1(z) = \overline{az} + \overline{b}$ ja $f_2(z) = \overline{z}$. Tällöin yhdistetty kuvaus

$$f_2(f_1(z)) = f_2(\overline{az} + \overline{b}) = \overline{\overline{az} + \overline{b}} = az + b = f(z).$$

Edellä olevat laskut pätevät lauseen 1.13 perusteella. Siispä ollaan saatu kahdella peilauksella esitettyä kierto. □

Edellinen lause auttaa tutkimaan lisää kolmen suoran suhteen peilauksen yhdistettyä kuvausta. Yhdistämällä lauseiden 2.12 ja 2.13 tiedot saadaan liukupeilauksesta kolmen peilauksen yhdistetty kuvaus. Jaotellaan nämä kolmen suoran suhteen peilauksen yhdistetyt kuvaukset kahteen luokkaan.

LAUSE 2.14. *Jokainen kolmen suoran suhteen peilauksen yhdistetty kuvaus on joko liukupeilaus tai suoran suhteen peilaus.*

TODISTUS. Olkoon kolme suoran suhteen peilausta muotoa $R_i(z) = a_i\overline{z}+b_i$, missä $i = 1, 2, 3$ ja $\|a_i\| = 1$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Tällöin yhdistetty kuvaus R saadaan näistä kaikista kuvauksista ja se on muotoa

$$\begin{aligned} R(z) &= a_3[\overline{a_2(\overline{a_1\overline{z}+b_1})+b_2}]+b_3 \\ &= a_3[\overline{a_2(\overline{a_1}z+\overline{b_1})+b_2}]+b_3 \\ &= a_3\overline{a_2}a_1\overline{z}+\overline{a_2}a_3b_1+a_3\overline{b_2}+b_3 \end{aligned}$$

Huomataan, että tämä on vastakkaisisometria, koska voidaan merkitä, että $a = a_3\overline{a_2}a_1$ ja $b = \overline{a_2}a_3b_1 + a_3\overline{b_2} + b_3$. Siispä saadaan yhdistetty kuvaus R muotoon $R(z) = a\overline{z} + b$, missä $\|a\| = 1$. Tämä pätee, koska $\|a_i\| = 1$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Tästä saadaan lauseiden 2.11 ja 2.12 perusteella, että tämä vastakkaisisometria on joko liukupeilaus tai suoran suhteen peilaus. Jos kuvauksella R on kiintopiste, niin se on suoran suhteen peilaus. Jos taas kuvauksella R ei ole kiintopisteitä, niin se on liukupeilaus. □

Edellä saatiin jaettua kolmen suoran suhteen peilaukset kahteen luokkaan ja siten on käsitelty kaikki mahdolliset kolmen suoran suhteen peilaukset. Jatketaan vielä kahden suoran suhteen peilausten tarkastelua. Haluamme tietää, että milloin kaksi suoraan suhteen peilausta voidaan lausua kiertona ja milloin siirtona. Tämä riippuu suorista, jonka suhteen peilataan.

LAUSE 2.15. *Yhdistetty kuvaus kahden suoran m ja l suhteen peilauksista antaa tulokseksi siirron, jos ja vain jos suorat ovat yhdensuuntaiset. Toisaalta se on kierto pisteen suhteen, jos ja vain jos suorat leikkaavat toisensa, ja tällöin kierto tapahtuu suorien leikkauspisteen suhteen.*

TODISTUS. Olkoon suoran l suhteen peilaus muotoa $f(z) = a\overline{z}+b$, missä $\|a\| = 1$ ja $a\overline{b} + b = 0$ ja taas suoran m suhteen muotoa $g(z) = c\overline{z} + d$, missä $\|c\| = 1$ ja $c\overline{d} + d = 0$. Tällöin yhdistetty kuvaus h saadaan näistä kahdesta kuvauksesta f ja g ja se on muotoa:

$$h(z) = f(g(z)) = c(\overline{a\overline{z}+b}) + d = \overline{a}cz + \overline{b}c + d.$$

Kun merkitään $s = \overline{a}c$ ja $r = \overline{b}c + d$, saadaan kuvaus muodossa $sz + r$. Tällöin huomataan, että näiden kahden kuvauksen yhdiste antaa meille suoran isometrian. Tarkastellaan nyt tapauksia riippuen luvusta s. Jos $s = 1$, niin yhdistetty kuvaus $h(z) = z + r$ on siirto. Jotta $s = 1$, niin täytyy siis olla $\overline{a}c = 1$. Kun tätä yhtälöä kertotaan molemmin puolin luvulla a, saamme $a\overline{a}c = a$, josta seuraa tiedolla $a\overline{a} =$

$\|a\|^2 = 1$, että $c = a$. Siispä $am(a)/2 = am(c)/2$, joten suorilla l ja m on sama kulmakerroin, jolloin ne ovat yhdensuuntaisia.

Tämä toimii myös toiseen suuntaan eli jos suorat l ja m ovat yhdensuuntaisia, niin $a = c$ ja $\overline{a}c = 1$. Tällöin siis yhdiste peilauksista on siirto.

Tutkitaan seuraavaksi tapaus $s = \overline{a}c \neq 1$. Tässä tapauksessa yhdistetty kuvaus $h(z)$ on suora isometria, joka ei ole siirto. Siispä seurauksen 2.9 mukaan sen täytyy olla kierto jonkin pisteen suhteen. Koska kyseessä on kierto, niin sillä on olemassa kiintopiste. Etsitään nyt tämä kiintopiste yhtälön $h(z) = z$ avulla. Tällöin $\overline{a}cz + \overline{b}c + d = z$, jolloin siirtämällä lauseke $\overline{a}cz$ vasemmalle ja jakamalla saatu yhtälö luvulla $(1 - \overline{a}c) \neq 0$ saamme, että

$$z = \frac{\overline{b}c + d}{1 - \overline{a}c},$$

joka on etsitty kiintopiste.

Tarkistetaan vielä, että tämä piste on suorien l ja m leikkauspiste. Siis riittää osoittaa, että piste $z = \frac{\overline{b}c+d}{1-\overline{a}c}$ on sekä suoralla l että m. Osoitetaan, että $z = \frac{\overline{b}c+d}{1-\overline{a}c}$ on kuvausten f ja g kiintopiste tarkastelemalla ensiksi erotusta $f(z) - z$. Alla olevissa laskuissa käytetään apuna lauseen oletuksena olevia ehtoja $a\overline{a} = 1 = c\overline{c}$ ja $b + \overline{b}a = 0 = d + \overline{d}c$.

$$\begin{aligned}
a\overline{\frac{\overline{b}c + d}{1 - \overline{a}c}} + b - \frac{\overline{b}c + d}{1 - \overline{a}c} &= \frac{a(b\overline{c} + \overline{d})(1 - \overline{a}c)}{\|1 - \overline{a}c\|^2} + \frac{b\|1 - \overline{a}c\|^2}{\|1 - \overline{a}c\|^2} - \frac{(\overline{b}c + d)(\overline{1 - \overline{a}c})}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{a(b\overline{c} + \overline{d})(1 - \overline{a}c) + b\|1 - \overline{a}c\|^2 - (\overline{b}c + d)(\overline{1 - \overline{a}c})}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{ab\overline{c} + a\overline{d} - ab\overline{c}\overline{a}c - a\overline{d}\overline{a}c - \overline{b}c + \overline{b}ca\overline{c} - d + a\overline{c}d + b\|1 - \overline{a}c\|^2}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{ab\overline{c} + a\overline{d} - b - \overline{d}c - \overline{b}c + \overline{b}a - d + a\overline{c}d + b\|1 - \overline{a}c\|^2}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{ab\overline{c} + a\overline{d} + \overline{b}a - \overline{b}c + \overline{b}a + a\overline{c}d + b\|1 - \overline{a}c\|^2}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{ab\overline{c} + a\overline{d} + \overline{b}a - \overline{b}c + \overline{b}a + a\overline{c}d + b(1 - \overline{a}c)(1 - a\overline{c})}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{ab\overline{c} + a\overline{d} + \overline{b}a - \overline{b}c + \overline{b}a + a\overline{c}d + 2b - ab\overline{c} - \overline{a}bc}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{ab\overline{c} + a\overline{d} - \overline{b}c + a\overline{c}d - ab\overline{c} - \overline{a}bc}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{a\overline{d} - \overline{b}c + a\overline{c}d - \overline{a}bc}{\|1 - \overline{a}c\|^2} \\
&= \frac{a(\overline{d} + \overline{c}d) - c(\overline{b} + \overline{a}b)}{\|1 - \overline{a}c\|^2} = 0
\end{aligned}$$

Edellä oleva siis tarkoittaa määritelmän mukaan, että piste z on kuvauksen f kiintopiste, joten $z \in l$. Tarkastellaan vielä seuraavaksi, että $z \in m$. Tämä yhtälö menee lähes samaan tapaan, joten käydään pääkohdat:

$$\begin{aligned}
c\overline{\frac{\overline{b}c+d}{1-\overline{a}c}}+d-\frac{\overline{b}c+d}{1-\overline{a}c} &= \frac{c(b\overline{c}+\overline{d})(1-\overline{a}c)}{\|1-\overline{a}c\|^2}+\frac{b\|1-\overline{a}c\|^2}{\|1-\overline{a}c\|^2}-\frac{(\overline{b}c+d)(\overline{1-\overline{a}c})}{\|1-\overline{a}c\|^2}\\
&= \frac{c(b\overline{c}+\overline{d})(1-\overline{a}c)+d\|1-\overline{a}c\|^2-(\overline{b}c+d)(\overline{1-\overline{a}c})}{\|1-\overline{a}c\|^2}\\
&= \frac{cb\overline{c}+c\overline{d}-cb\overline{c}\overline{a}c-c\overline{d}\overline{a}c-\overline{b}c+\overline{b}ca\overline{c}-d+a\overline{c}d+2d-ad\overline{c}-\overline{a}dc}{\|1-\overline{a}c\|^2}\\
&= \frac{b+c\overline{d}-b\overline{a}c-c\overline{d}\overline{a}c-\overline{b}c+\overline{b}a-d+a\overline{c}d+2d-ad\overline{c}-\overline{a}cd}{\|1-\overline{a}c\|^2}\\
&= \frac{-b\overline{a}c-c\overline{d}\overline{a}c-\overline{b}c-\overline{a}cd}{\|1-\overline{a}c\|^2}\\
&= \frac{-c(b\overline{a}+a)-\overline{a}c(c\overline{d}+d)}{\|1-\overline{a}c\|^2}=0.
\end{aligned}$$

Tämän perusteella myös $z \in m$, joten väite selvä. □

Kootaan nyt edellä olevista tuloksista tämän kappaleen päätulos.

LAUSE 2.16. *Jokainen isometria koostuu korkeintaan kolmesta peilauksesta. Jos isometrialla on kiintopiste, niin isometria koostuu korkeintaan kahdesta suoran suhteen peilauksesta.*

TODISTUS. Jos isometria on suora, niin se on joko siirto tai kierto. Tiedetään, että siirto voidaan ilmoittaa kahden suoran suhteen peilauksen avulla lauseen 2.15 nojalla, missä suorat ovat yhdensuuntaisia ja kohtisuorassa annettua siirtovektoria vasten. Lauseessa 2.15 saimme myös osoitettua, että jokainen kierto voidaan esittää kahden peilauksen avulla. Tällöin suora isometria voidaan ilmoittaa kahden peilauksen avulla.

Jos taas kyseessä on vastakkaisisometria, niin sillä joko on kiintopisteitä tai ei ole. Jos sillä ei ole kiintopisteitä, niin se on liukupeilaus. Kun siirto voidaan ilmaista kahden suoran suhteen peilauksen avulla ja liukupeilaus on siirron ja peilauksen yhdiste, niin se koostuu kolmesta peilauksesta. Jos taas vastakkaisella isometrialla on kiintopiste, niin se on suoran suhteen peilaus, jolloin tarvitaan tietenkin vain yksi peilaus.

□

LUKU 3

Similariteetit ja Hjelmslevin lause

3.1. Similariteetit

Tarkastellaan seuraavaksi similariteetteja. Similariteeteillä on lähes samat ominaisuudet kuin isometrioilla, mutta similariteetit voivat lisäksi venyttää tai kutistaa kuvaa. Ne voivat kiertää ja peilata samaan aikaan. Toisaalta voidaan myös mieltää, että isometriat ovat erityistapaus similariteeteistä. Tämä huomataan helposti, kun tarkastellaan similariteetin määritelmää.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Kuvaus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on Gaussin tason similariteetti, jos

$$\|f(z) - f(w)\| = k\|z - w\|, \text{ kaikilla } z, w \in \mathbb{C}, \text{ missä } k > 0.$$

Kun $k = 1$, niin similariteetti on isometria. Jos taas $k > 1$, niin kyseessä on suurennos, ja jos $k < 1$, niin kyseessä on pienennös. Jatketaan seuraavaksi isometrioista tuttujen ominaisuuksien tarkastelua similariteeteille.

Olemme jakaneet alussa isometriat suoriin ja vastakkaisiin isometrioihin. Jaetaan similariteetit samaan tapaan kuin isometriat suoriin ja vastakkaisiin similariteetteihin, paitsi ilman ehtoa $\|a\| = 1$.

MÄÄRITELMÄ 3.2 (Suora ja vastakkainen similariteetti). Kuvaus f on suora similariteetti, jos se on muotoa

$$f(z) = az + b, \text{ missä } a, b \in \mathbb{C} \text{ ja } a \neq 0.$$

Merkitään näiden kuvausten joukkoa S_+. Kuvaus g on vastakkainen similariteetti, jos se on muotoa

$$g(z) = c\bar{z} + d, \text{ missä } c, d \in \mathbb{C} \text{ ja } c \neq 0.$$

Merkitään näiden kuvausten joukkoa S_-.

Aletaan näiden määritelmien avulla tekemään tarkempaa teoriaa. Tarkastellaan aluksi lauseen 2.1 vastinetta similariteeteille. Tällöin on olemassa ainoastaan yksi kuvaus joukosta S_+ ja ainoastaan yksi kuvaus joukosta S_-, jotka kuvaavat pisteen z_0 pisteeksi w_0 ja pisteen z_1 pisteeksi w_1.

LAUSE 3.3. *Olkoon annettuna pisteparit z_0, z_1 ja w_0, w_1, jotka toteuttavat ehdon*

$$\|z_0 - z_1\| = k\|w_0 - w_1\| \neq 0.$$

Tällöin on olemassa ainoastaan yksi kuvaus joukosta S_+ ja ainoastaan yksi kuvaus joukosta S_-, jotka kuvaavat pisteen z_0 pisteeksi w_0 ja pisteen z_1 pisteeksi w_1.

TODISTUS. Todistus menee samaan tapaan kuin lauseen 2.1 todistus, mutta nyt $\|a\| = \|c\| = k$. Tällä kertaa myös ratkaisuissa $a = \frac{w_0 - w_1}{z_0 - z_1}$, kun $z_0 - z_1 \neq 0$, ja $c = \frac{w_0 - w_1}{\overline{z_0} - \overline{z_1}} = \frac{w_0 - w_1}{\overline{z_0 - z_1}}$, kun $z_0 - z_1 \neq 0$, toteutuvat vaatimukset $\|a\| = \|c\| = k$, koska lauseen oletuksessa $\|z_0 - z_1\| = k\|w_0 - w_1\| \neq 0$. □

Jatketaan samaan tapaan kuin isometrioidenkin tapauksessa eli tarkastellaan similariteettien vastine lauseelle 2.2.

LAUSE 3.4. *Jokainen Gauss-tason similariteetti kuvaa samalla suoralla olevat pisteet samalle suoralle.*

TODISTUS. Olkoon pisteet u, v ja w samalla suoralla ja piste v pisteiden u ja w välissä. Kuvataan näitä similariteetilla f, jolloin niiden kuvapisteet ovat $f(u), f(v)$ ja $f(w)$. Tälllöin similariteetin määritelmän mukaan $\|f(u) - f(v)\| = k\|u - v\|$, $\|f(v) - f(w)\| = k\|v - w\|$ ja $\|f(u) - f(w)\| = k\|u - w\|$. Lisäksi oletuksesta, että piste v pisteiden u ja w välissä seuraa, että

$$\|u - v\| + \|v - w\| = \|u - w\|.$$

Nyt käyttämällä tähän edellä olevaa similariteettien määritelmää ja jakamalla saatu yhtälö tämän jälkeen luvulla k saamme

$$\|f(u) - f(v)\| + \|f(v) - f(w)\| = \|f(u) - f(w)\|.$$

Siten huomataan, että määritelmän mukaan piste $f(v)$ samalla suoralla pisteiden $f(u)$ ja $f(w)$ kanssa ja näiden välissä. Tällöin siis similariteetti kuvaa samalla suoralla olevat pisteet suoralle, jossa kaikki kuvapisteet ovat. □

Laajennetaan edellistä tulosta, että saadaan yhdensuuntaiset suorat kuvattua yhdensuuntaisiksi suoriksi.

LAUSE 3.5. *Jokainen Gaussin tason similariteetti kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi.*

TODISTUS. Todistus menee samaan tapaan kuin lauseen 2.3 todistus. On huomioitavaa, että similariteetit joko venyttävät tai kutistavat janoja, joten $PR \neq P'R'$. Silti piste R' on lähimpänä pistettä P' suoralla l' myös, kun kuvataan toisessa tilanteessa suoria l ja m suoriksi l' ja m'. Similaariteeteilla kuvatteasssa $PR \neq P'R'$ ja $QS \neq Q'S'$, mutta silti $P'R' = Q'S'$, jolloin suorat l' ja m' ovat yhdensuuntaisia. □

Nyt tarvitaan teoriaa täydentääksemme samanmuotoisten kolmoiden teoriaa. Tiedetään Euklidisesta tasogeometriasta, että kolmiot ovat samanmuotoiset, kun niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret. Kuvataan nyt kolmiota ABC similariteetilla f, niin saamme kolmion $f(A)f(B)f(C)$ ehdoilla

$$\|f(A)f(B)\| = k\|AB\|,\ \|f(B)f(C)\| = k\|BC\| \text{ ja } \|f(C)f(A)\| = k\|CA\|.$$

Tällöin siis kolmio $f(A)f(B)f(C)$ on samanmuotoinen kolmion ABC kanssa, koska jokainen alkuperäisen kolmion jana muuttuu suhteessa k yhtä aikaa. Tällöin myöskään kulmat eivät muutu yhtään. Tarkastellaan lauseen 2.4 vastinetta similariteeteille.

LAUSE 3.6. *Gaussin tason similariteetti on yksikäsitteisesti määritelty kuvauksella, joka kuvaa annetun kolmion samanmuotoiseksi kolmioksi.*

TODISTUS. Todistus on juuri sama kuin lauseen 2.4, mutta nyt kuvaus ei säilytä pituuksia, vaan joko venyttää tai kutistaa pituuksia, kuten edellä samanmuotoisten kolmioiden tapauksessa tarkasteltiin. Silti todistuksessa tilanne ei muutu millään tavalla oli sitten neljäs piste z kolmion sivujen määräämällä suoralla tai niiden ulkopuolella.

□

Tarkastellaan seuraavaksi yleisemmin similariteetteja, kun olemme jo jakaneet ne aiemmin kahteen eri similariteettiluokkaan S_- ja S_+.

Lause 3.7. *On olemassa täsmälleen kaksi Gaussin tason similariteettia, jotka kuvaavat kahden annetun pisteen z_0 ja z_1 kuvapisteiksi w_0 ja w_1, missä $\|w_0 - w_1\| = k\|z_0 - z_1\| \neq 0$.*

Todistus. Lause todistetaan samaan tapaan kuin lause 2.5.

□

Nyt päästään yhteen similariteettien päälauseista, jota vastaava on myös käyty läpi isometrioiden kanssa.

Lause 3.8. *Kaikki Gaussin tason similariteetit S voidaan jakaa kahteen luokkaan S_+ ja S_-.*

Todistus. Kaikkien edeltävien lauseiden perusteella askel askeleelta saadaan todistettua tämä lause, kuten teimme isometrioiden tapauksessa.

□

Tarkastellaan vielä similariteetteja yhdenmuotoisiin kolmioihin liittyen.

Lause 3.9. *Kolmion kärjet z_1, z_2 ja z_3 kuvataan suoralla similariteetilla f toiseen kolmioon kärkipisteillä $f(z_1), f(z_2)$ ja $f(z_3)$, jos ja vain jos*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_1)}.$$

Todistus. Oletetaan, että suora similariteetti kuvaa pisteet z_1, z_2 ja z_3 vastaaviksi pisteiksi $f(z_1), f(z_2)$ ja $f(z_3)$. Tiedetään, että jokainen suora similariteetti on muotoa $f(z) = az + b$, missä $a \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_1)} = \frac{az_2 - az_1}{az_3 - az_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

Siis olemme saaneet todistettua ensimmäisen osan todistuksesta.

Oletaan seuraavaksi, että lauseen yhtälö on voimassa. Nyt täytyy etsiä suora isometria, joka kyseisen yhtälön avulla kuvaa pisteet z_i pisteiksi $f(z_i)$. Tarkastellaan kuvausta

$$g(z) = \frac{f(z_3) - f(z_1)}{z_3 - z_1}(z - z_1) + f(z_1).$$

Tämä on hyvin määritelty suora similariteettikuvaus, kunhan $z_3 \neq z_1$ ja $f(z_3) \neq f(z_1)$. Nämä ehdot taas ovat jo voimassa alkuperäisessä yhtälössä, joten niiden kanssa ei ole ongelmia. Täytyy vielä tarkistaa, että kuvaus g kuvaa pisteen z_i pisteeksi $f(z_i)$. Sijoitetaan aluksi $z = z_3$, jolloin saadaan

$$g(z_3) = \frac{f(z_3) - f(z_1)}{z_3 - z_1}(z_3 - z_1) + f(z_1) = f(z_3) - f(z_1) + f(z_1) = f(z_3).$$

Saatiin tämä ainakin halutuksi. Sijoitetaan vuorostaan $z = z_2$. Tällöin saadaan alkuperäisen yhtälön avulla, että

$$\begin{aligned} g(z_2) &= \frac{f(z_3) - f(z_1)}{z_3 - z_1}(z_2 - z_1) + f(z_1) \\ &= \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_1)}[f(z_2) - f(z_1)] + f(z_1) = f(z_2). \end{aligned}$$

Nyt vielä on jäljellä tapaus $z = z_1$. Tällöin selvästi huomataan, että

$$g(z_1) = \frac{f(z_3) - f(z_1)}{z_3 - z_1}(z_1 - z_1) + f(z_1) = f(z_1).$$

Olemme saaneet kaikki pisteet z_i kuvattua kuvauksella g, jolloin kaikilla $i = 1, 2, 3$ olemme saaneet $g(z_i) = f(z_i)$. Tällöin olemme löytäneet suoran similariteetin, joka vastaa lauseen haluttua kuvausta.

□

3.2. Hjelmslevin lause

Olemme tarkastelleet similariteetteja. Jatketaan tästä etenemällä Hjelmslevin lauseeseen, joka liittyy suoralla olevien pisteiden kuvautumiseen ja kuvapisteiden ja alkuperäisten pisteiden välisiin janoihin. Tulemme muotoilemaan sen kahdella tavalla, sekä isometrioille että similariteeteille. Osoitetaan aluksi isometrioiden tapaus.

Lause 3.10 (Hjelmslevin lause). *Olkoon P joukko pisteitä, jotka ovat suoralla l. Nämä pisteet kuvataan Gaussin tason isometrialla pistejoukkoon P', jotka ovat toisella suoralla l'. Tällöin keskipisteet janoista PP' ovat joko erillisiä ja samalla suoralla tai sitten kaikki janat PP' leikkaavat yhdessä samassa pisteessä ja tämä yhteinen leikkauspiste on jokaisen janan keskipiste. Jälkimmäinen tapaus voi olla voimassa vain silloin, kun suorat ovat yhdensuuntaiset.*

Perustellaan geometrisesti isometrioiden tapaus yhtä poikkeusta lukuunottamatta.

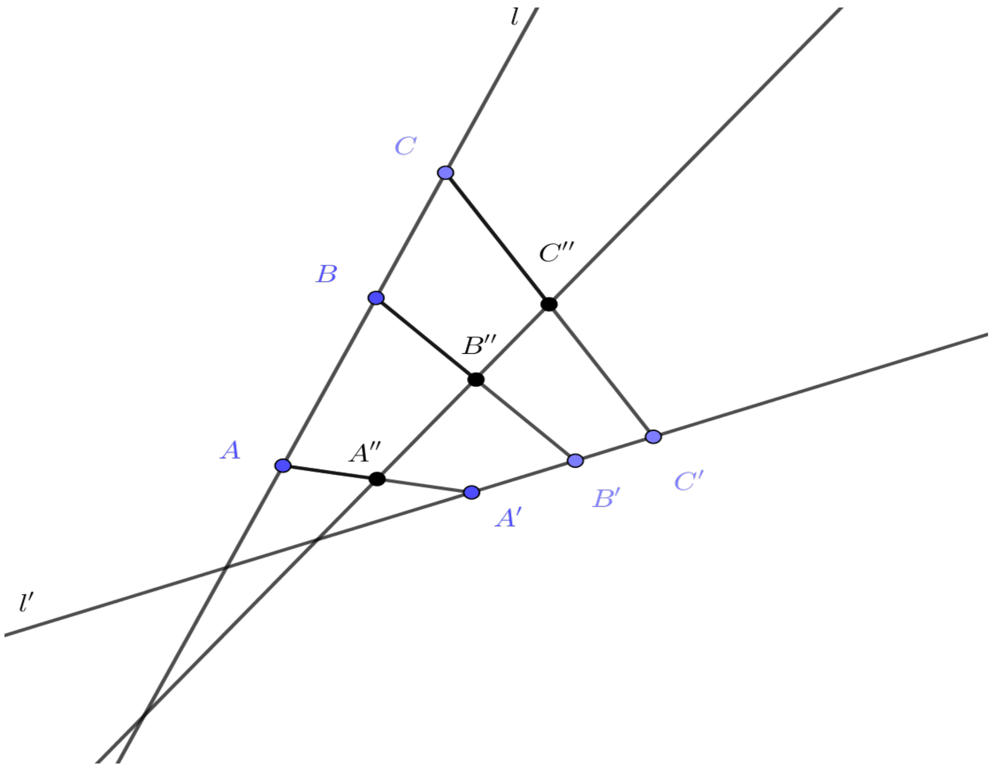
Todistus. Suora isometria on joko siirto tai kierto kiintopisteen suhteen. Ensimmäisessä tapauksessa pistejoukko $P = \{A, B, C, \cdots\}$ kuvautuu siirrolla pistejoukoksi $P' = \{A', B', C', \cdots\}$, missä pistejoukon P' muodostama suora on yhdensuuntainen pistejoukon P muodostaman suoran kanssa. Tällöin on selvää, että janojen PP' keskipisteet ovat näiden suorien puolivälissä olevalla suoralla. Toisessa tapauksessa kierretään kierrolla kulman $\theta \neq \pi$ verran, jolloin meidän täytyy näyttää, että keskipisteet janoista $AA', BB', \cdots$ ovat suoralla. Merkitään näitä keskipisteitä joukolla P^*. Jos taas kulma $\theta = \pi$, niin kuvaus on pisteen suhteen peilaus ja keskipisteet ovat kierron keskuksessa.

Jos taas isometria on vastakkainen, niin se on joko peilaus suoran l suhteen tai liukupeilaus suoran l suhteen. Peilaukselle on selvää, että kaikki pisteet P^* ovat suoralla l. Jos taas kuvaus on liukupeilaus, niin aluksi tapahtuu peilaus taas suoran l suoran suhteen. Tämän jälkeen tehdään siirto, joka on suoran l suhteen yhdensuuntainen, jolloin keskipisteet siirron jälkeen siirtyvät pitkin suoraa l.

□

Tämän jälkeen tehdään yleistys isometrioista similariteetteihin ja todistetaan similariteettien tapaus algebrallisesti, mikä täydentää myös edellisen todistuksen kierron tapauksessa.

LAUSE 3.11. *Olkoon P joukko pisteitä, jotka ovat suoralla l. Nämä pisteet kuvataan Gaussin tason similariteetilla pistejoukkoon P', jotka ovat toisella suoralla l'. Jos janat PP' jaetaan samassa suhteessa, niin jakopisteet ovat kaikki erillisiä ja yhdellä samalla suoralla tai yksi ja sama piste.*



KUVA 3.1. Hjelmslevin lauseen tilanne similariteeteille

TODISTUS. Tehdään todistus algebrallisesti, niin saadaan toinen lähestymistapa ongelmalle verrattuna lauseen 3.10 todistukseen. Merkitään nyt alussa olevia pisteitä $P = \{A, B, C, \cdots\}$ kompleksilukuina $a, b, c, \cdots$ ja kuvapisteitä $P' = \{A', B', C', \cdots\}$ kompleksilukuina $a', b', c', \cdots$. Koska pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, piste c voidaan lausua janan AB avulla, jolloin saadaan, että $c = ta + (1-t)b$, missä t on reaaliluku. Reaalilukujen t ja $1-t$ suhde $\frac{1-t}{t}$ on sama kuin janojen AC ja CB pituuksien suhde $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Nyt kuvataan pistettä c suoralla similariteetilla $f(z) = pz + q$, missä $p \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} f(c) = c' = pc + q &= p(ta + (1-t)b) + q \\ &= t(pa + q) + (1-t)(pb + q) = tf(a) + (1-t)f(b) \\ &= ta' + (1-t)b'. \end{aligned}$$

Siispä kuvapiste c' voidaan lausua janan $A'B'$ avulla. Seuraavaksi haluamme vielä tarkastella pisteiden $f(c) = c'$ ja c välisen janan jakautumisen pisteiden A ja B sekä näiden kuvauspisteiden avulla. Olkoon k, k' reaalilukuja siten, että $k + k' = 1$. Tällöin saamme

$$\begin{aligned} k'c + kc' = k'c + kf(c) &= k'(ta + (1-t)b) + k(t(f(a) + (1-t)f(b)) \\ &= t[k'a + kf(a)] + (1-t)[kf(b) + k'b] \\ &= t[k'a + ka'] + (1-t)[kb' + k'b]. \end{aligned}$$

Merkitään $k'a + ka' = A'', k'b + kb' = B''$ ja $k'c + kc' = C''$, kuten kuvassa 3.1. Tästä kiinnitetyillä k ja k' saamme ehdolla $k'a + ka' \neq k'b + kb'$, että piste C'' voidaan lausua pisteiden A'' ja B'' avulla, joten nämä kaikki pisteet ovat samalla suoralla ja ovat erillisiä jokaisella reaaliluvun t eri arvolla. Jos taas $k'a + ka' = k'b + kb'$, niin

$$k'c + kc' = k'a + ka' = k'b + kb'.$$

Tällöin kaikki janat AA', BB' ja CC' jakautuvat samassa suhteessa $\frac{k}{k'}$. Tällöin $k'c+kc'$ on tämä sama piste, kun janoilta CC' otetaan piste, niin se on sama piste kaikilla $k'a + ka' = k'b + kb'$. Lisäksi yhtälöstä seuraa, että $k'(a - b) = -k(a' - b')$, jolloin voidaan todeta, että janat $k'AB$ ja $kB'A'$ ovat yhtä pitkät, mutta ne ovat vektoreina eri suuntaiset.

Seuraavaksi tarkastellaan vielä tapaus, kun similariteetti on vastakkainen. Tällöin edellä oleva todistustapa ei muutu, mutta kuvaus tulee muuttumaan muotoon $g(z) = p\bar{z} + q$. Tällöin kuvaus on pisteelle c muotoa:

$$\begin{aligned} f(c) = c' = p\bar{c} + q &= p(t\bar{a} + (1-t)\bar{b}) + q \\ &= t(p\bar{a} + q) + (1-t)(p\bar{b} + q) = tf(a) + (1-t)f(b) \\ &= ta' + (1-t)b', \end{aligned}$$

joten saatiin sama yhtälö $c' = ta' + (1-t)b'$ kuin aiemmin. Pääasiassa tämä johtuu sitä, että kun otetaan reaaliluvusta t konjugaatti, niin se ei muutu ollenkaan. Tällöin vastaavat päätelmät kuin edellä pätevät myös vastakkaisille similariteeteille ja tapauksessa $k'a + ka' = k'b + kb'$ janat $k'AB$ ja $kB'A'$ ovat yhtä pitkät ja erisuuntaiset vektoreina. $\square$

LIITE A

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko
$\overline{z}$	Kompleksiluvun z konjugaatti
$am(z)$	Kompleksiluvun z argumentti
I_+	Kaikkien suorien isometroiden joukko
I_-	Kaikkien vastakkaisten isometrien joukko
S_+	Kaikkien suorien similariteettien joukko
S_-	Kaikkien vastakkaisten similariteettien joukko

Trigonometrian kaavoja:

$\sin x = -\sin(-x)$
$\cos x = \cos(-x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Kirjallisuutta

[1] M.A Armstrong: *Groups and Symmetry*, toinen laitos, Springer-Verlag, New York, 1988.

[2] Keith Conrad: *Plane isometries and the complex numbers*, http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/isometrycpx.pdf .

[3] George E. Martin: *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag, New York Inc., 1982.

[4] Dan Pedoe: *Geometry A Comprehensive Course*, toinen laitos, Cambridge University Press, 1970.