Eukleideen geometriaa

Elina Joutsen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2018

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
JOUTSEN, ELINA: Eukleideen geometriaa
Pro gradu -tutkielma, 45 s.
Matematiikka
Maaliskuu 2018

Tiivistelmä

Eukleides Aleksandrialainen oli kreikkalainen matemaatikko, joka loi noin 300 eaa. euklidisen geometrian. Hän julkaisi euklidisen geometrian perustana olevat aksioomat ja perusolettamukset teoksessaan *Alkeet*. Eukleideen teos on säilynyt koulujen geometrian opetuksen pohjana jopa 1800–luvulle asti. Päälähteenä tutkielmassa on käytetty Eukleideen teoksen Pekka Aschanin suomennosta ja sen nykysuomennosta kommentteineen, jonka on toimittanut Lauri Kahanpää teoksessa *Alkeet, Kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometria*.

Tutkielma tarkastelee Eukleideen muodostamaa teoriaa. Tavoitteena on ratkaista neljä vaativaa ympyrän ja kolmion välistä ongelmaa Eukleideen teorian pohjalta. Eukleideen aksioomajärjestelmä perustuu viiteen aksioomaan, joiden perusteella geometria pyritään määrittelemään täydellisesti. Alussa esitellään aksioomajärjestelmän kannalta tärkeät yleiset käsitteet, minkä jälkeen kerrotaan lyhyesti aksioomajärjestelmästä ja sen vaatimuksista sekä esitellään Eukleideen viisi aksioomaa.

Tutkielman tärkein teema on tarvittavan euklidisen teorian kokoaminen geometristen ongelmien ratkaisemiseksi. Tutkielman seuraavassa vaiheessa tarkastellaan kolmioiden ja ympyröiden geometrisia ominaisuuksia. Lisäksi esitellään kyseisten ongelmien ratkaisemisen kannalta tarpeellisia käytännön esimerkkejä, jotka perustuvat harppi–viivain konstruktioihin. Teorian pohjalta ratkaistaan nämä neljä ongelmaa: annetun ympyrän sisään on piirrettävä kolmio, annetun ympyrän ympäri on piirrettävä kolmio, annetun kolmion sisään on piirrettävä ympyrä sekä annetun kolmion ympäri on piirrettävä ympyrä.

Tarkastelun lopuksi esitellään Eukleideen aksioomajärjestelmää nykyaikaisempi Hilbertin aksioomajärjestelmä euklidiselle geometrialle. David Hilbertin aksioomajärjestelmä julkaistiin vuonna 1899 ja se on huomattavasti laajempi ja tarkempi kuin Eukleideen aksioomajärjestelmä. Lopuksi verrataan Eukleideen aksioomajärjestelmää Hilbertin aksioomajärjestelmään ja erityisesti tarkastellaan Eukleideen viidettä aksioomaa. Vertailun tarkoituksena on havainnollistaa Eukleideen teorian mahdollisia ongelmakohtia.

Asiasanat: Geometria, Eukleideen geometria, Hilbertin aksioomajärjestelmä

Sisältö

Johdanto

Geometria on vanhimpia matematiikan osa-alueita, minkä sanotaan syntyneen antiikin aikaisesta maanmittauksesta [**6**, s. 6]. Tuohon aikaan oli tärkeää, että maa-alueet mitataan tarkasti esimerkiksi verotusta varten. Geometria, matematiikan alana pyrkii siis tutkimaan erilaisia kuvioita, kappaleita ja niiden ominaisuuksia.

Varhaisimpia geometriastaan tunnettuja tieteen tekijöitä ovat Thales Miletolainen ja Pythagoras Samoslainen 500–luvulta eaa. sekä Platon noin 400 eaa. Tässä tutkielmassa päästään perehtymään 300–luvun eaa. tunnetuimman kreikkalaisen matemaatikon ja geometrian isän Eukleides Aleksandrialaisen matemaattisiin tuotoksiin. Eukleides esitti ensimmäisen selkeän kokonaisuuden geometriasta kirjassaan Stoikheia (lat. Elementa, suom. Alkeet), joka on ollut pohjana koulujen geometrian oppikirjoille jopa 1800–luvulle asti. Oppikirjat perustuivat siis hyvin pitkään Eukleideen kehittämään geometrian järjestelmään. Tietenkään kaikki kirjan sisältämä matematiikka ei ollut Eukleideen omaa tuotosta vaan perustui aikaisempien matemaatikoiden tietoihin. [**3**].

Eukleideen kirjassa Stoikheia lähtökohtana ovat aksioomat ja lausumat, jotka hyväksyttiin tosiksi ilman perusteluja. Myöhemmin tätä ollaan kritisoitu ja kävikin niin, että aksioomien pohjalta todistettiin geometrisia väittämiä, joita ei voitu pitää itsestään selvinä. Tyypillistä näille geometrisille ongelmille oli tehdä ratkaisuja harppiviivain konstruktioilla. Tämä ei tietenkään nykymatematiikassa ole kovinkaan hyvä tapa, sillä todistus perustui tällöin osaksi kuvasta katsomiseen. Toisaalta Eukleideen Stoikheia loi nyky-matematiikan kannalta olennaisen todistamiseen liittyvän tavan, deduktiivisen päättelyn [**3**, s. 20]. Deduktiivisuus perustuu siihen, että uusien tulosten todistaminen pohjautuu aiempien tunnettujen tulosten loogiseen käyttämiseen päättelyssä.

Kouluissa opetettava geometria perustuu euklidiseen geometriaan, mikä on ymmärrettävää tarkasteltaessa elinympäristömme geometrioita. Tähän on johtanut osaksi se, että euklidinen geometria on aina ollut ihmiselle tutuinta. Nykykäsityksen mukaan elämme kuitenkin paljon monimutkaisemmassa geometriassa kuin se, mitä tasogeometria ja euklidinen geometria tutkii [**4**, s. 2]. Tutkielmassa riittää kuitenkin tarkastella asioita euklidisen geometriaa näkökulmasta, minkä avulla ihminen voi pienessä mittakaavassa havannoida ympäristönsä geometrioita melko tarkasti.

Viimeistään yliopiston matematiikan opinnoissa ymmärrämme, että todistaminen on tärkeä osa matematiikkaa. Jokaiseen todistukseen liittyy monia oletuksia ja määritelmiä, jolloin on tarpeen määritellä aksioomajärjestelmä. Tämän varaan myös geometria rakentuu. Aksiomaattisen järjestelmän otti siis ensimmäisenä käyttöön Eukleides, jonka järjestelmään perehdymme myöhemmin. Aksioomalla tarkoitetaan asiaa, jonka pohjalle todistus rakennetaan ja aksioomajärjestelmä taas on joukko keskenään riippumattomia ja ristiriidattomia aksioomia. Aksioomajärjestelmiä on useita ja tärkeimpänä tässä pro gradu-tutkielmassa on Eukleideen aksiomaattinen järjestelmä. Järjestelmän avulla voidaan luoda määritelmiä ja niistä edelleen lauseita, jotka todistetaan vetoamalla aksioomiin, määritelmiin tai aikaisemmin todistettuihin lauseisiin. Eukleideen teorian avulla pyrimme todistamaan muutamia hänen tunnetuimpia harppi-viivain konstruktioita.

Aksioomia ei voida valita aivan mielivaltaisesti ja niiden tulee täyttää muutamia kriteereitä [**7**, s. 8]. Ristiriidattomuus, täydellisyys ja riippumattomuus ovat tärkeitä ominaisuuksia aksioomille ja näihin palaammekin myöhemmin. Tarkoituksena on myös vertailla tunnettua David Hilbertin[1] aksioomajärjestelmää Eukleideen aksiomaattiseen järjestelmään. Tällöin voidaan havaita, että pienikin poikkeama esimerkiksi riippumattomuusvaatimuksessa saattaa yksinkertaistaa teorian luomista. Lisäksi tutkimme Eukleideen todistamista ja sen jokseenkin hämäriä yksityiskohtia Hilbertin aksioomajärjestelmään verraten.

[1]David Hilbert (1862–1943), saksalainen matemaatikko.

LUKU 1

Esitietoja

1.1. Eukleideen viisi aksioomaa

Eukleideen geometria perustuu viiteen aksioomaan sekä muutamiin esioletuksiin. Eukleides listasi ensimmäisen kirjansa [**1**] alussa yli kaksikymmentä määritelmää liittyen geometrian peruskäsitteisiin. Määritelmiä on käännöksestä riippuen hiukan eri määrä, mikä johtunee siitä, että alkuperäisiä Eukleideen kirjoituksia ei ole olemassa. Oletamme määritelmien perusteella tunnetuksi, että on olemassa pistejoukko, jota kutsumme *euklidiseksi tasoksi.* Joukossa on olemassa suoran, ympyrän, pituuden, kulmien suuruuden sekä yhtenevyyden käsitteet ja kyseinen taso on kaksiulotteinen. Oletetuissa Eukleideen määritelmissä on jonkin verran eroa nykypäivän vastaaviin, joten tarkastelemme määritelmien sisältöä seuraavaksi hiukan tarkemmin.

Eukleideen *Alkeiden* vanhemmissa käännöksissä on esitetty *pisteelle* kaksi eri määritelmää, missä olennaista on huomata ettei kumpikaan tarkastele pisteen muodostumista leikkauspisteenä kuten nykyään on tapana. Piste on siis joko sellainen, jossa ei ole osia tai viivan pää, missä viivalla tarkoitetaan lähinnä suoraa tai ympyrää osineen. *Suora* tai *jana* on *viiva*, mikä on hieman tulkinnanvaraista, sillä Eukleideen ei tiedetä maininneen mitään päätepisteistä. *Pinnan* käsite liittyy *tasoon*, mitä käytetään esimerkiksi tasokulman määritelmässä. *Tasokulma* on *Alkeiden* määritelmän mukaan viivojen välinen kaltevuus eikä se pysty käsittämään oikokulman tai sitä suuremman kulman olemassaoloa. Määritelmät eivät perustele *käyräviivaisten kulmien* yhtäsuuruuksia tai suorakulmaisuutta, joten ne jäävät hiukan epäselviksi tässä vaiheessa. *Suoralle kulmalle* asetetaan kuitenkin ehto. Sen mukaan, jos kaksi suoraa leikkaavat toisensa siten, että kummallakin puolella on yhtä suuret kulmat, niin nämä kulmat ovat suoria kulmia. Tämä ehto asettaa myös määritelmän *normaalin* käsitteelle. Suoran kulman määritteleminen tässä vaiheessa on varsin oleellista, sillä se on pohjana Eukleideen neljännelle aksioomalle. *Alkeissa* on lisäksi esitetty termit *tylppä kulma* ja *terävä kulma*, vaikka varsinaisesti ei kerrota, millä ehdoilla kaksi kulmaa ovat yhtäsuuret tai erisuuret. *Ympyrän* käsite kuviona esittää *keskipisteen*, *halkaisijan*, *puoliympyrän* sekä *segmentin* käsitteet, mutta esimerkiksi säteen käsitettä ei *Alkeiden* pohjalta tunneta.

Suoraviivainen kuvio muodostuu suorista viivoista ja niiden perusteella Eukleideen teoria esittää *kolmion*, *nelikulmion* sekä *monikulmion* käsitteet. Lisäksi mainitaan erikoistapauksina *tasasivuinen* ja *tasakylkinen* kolmio sekä *suorakulmainen*, *tylppäkulmainen* ja *teräväkulmainen* kolmio. Nelikulmiohin liittyvät erikoistapaukset *neliö*, *suorakulmio*, *vinoneliö* ja *vinokaide* sekä *epäkäs* poikkeavat osaksi nykypäivän määritelmistä. Vinokaide ja epäkäs ovat Aschanin suomennoksessa esiintyviä käsitteitä ja jääneet pois nykykielestä lähes kokonaan. Eukleideen teorian kannalta vinokaide on kuitenkin tärkeä nelikulmio, koska Eukleideen ei tiedetä maininneen määritelmissään yleistä suunnikasta.[**1**, s. 7–16]. Kulmiot ovat mielenkiintoinen osa-alue Alkeissa, sillä niiden määrittelyssä Aschan poikkeaa Eukleideesta määrittelemällä *suunnikkaan* yhdensuuntaisuutta käyttäen. Tällöin Aschan joutuu määrittelemään yhdensuuntaisuuden jo varhaisessa vaiheessa poiketen siis tiedetystä Eukleideen järjestyksestä. Suorien yhdensuuntaisuuden Aschan määrittelee seuraavasti: tason suorat ovat *yhdensuuntaiset*, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä, vaan ne ovat aina yhtä kaukana toisistaan. Aschanin versio poikkeaa myös *Alkeiden* englanninkieleisestä käännöksestä *Elements* [**2**]. Englanninkielinen teos noudattaa tarkemmin oletettua Eukleideen määritelmien järjestystä ja asettaa yhdensuuntaisuuden määritelmän viimeiseksi *Alkeiden* ensimmäisen kirjan määritelmistä. Teoksessa *Elements* on alussa 23 määritelmää, kun Aschanin suomennoksesa niitä on 34. Ero teosten välillä syntyy juuri näiden kulmioiden, kolmioiden ja nelikulmioiden määrittelystä, jotka Aschan asettaa jokaisen omiksi määritelmiksiin kun taas englanninkielinen versio sisällyttää yhteen määritelmään monta osaa. Esimerkiksi Aschan määrittelee suorakulmaisen, tylppäkulmaisen ja teräväkulmaisen kolmion erikseen, kun taas englanninkielinen versio sisällyttää ne Eukleideen tapaan yhteen määritelmään. Englanninkieleisessä teoksessa ympyrän segmentin määritelmä on jätetty pois ensimmäisestä kirjasta, sillä sitä tarvitaan vasta myöhemmin ja esitellään Aschanista poiketen kolmannessa kirjassa. Tämä taisi kuitenkin olla myös Eukleideen tapa käsitellä asia.

Eukleideen tunnetut viisi aksioomaa on nimetty *Alkeissa* postulaateiksi kuten myös englanninkielisessä teoksessa. Lisäksi teosten alkuun on listattu joitakin aksioomia, joita Aschan kutsuu selviöiksi ja englanninkielisessä teoksessa niitä nimitetään sanoilla ”common notions”. Näitäkin on teoksesta riippuen eri määrä, sillä Aschanilla selviöitä on 11 kun taas englanninkielisessä teoksessa niitä on viisi. Tämä johtunee siitä, että Aschan listaa selviöihin kohtia, jotka on osittain luettavissa postulaattien rivien välistä. Tärkeimpänä huomiona molemmissa teoksissa on selviöihin liittyen niiden asettama yhtenevyyden käsite, jonka mukaan yhtenevien kuvioiden sanotaan olevan yhtä suuria.

Esitellään seuraavaksi nykypäivänä tunnetut Eukleideen aksioomat ([**1**, s. 14]):

EA1: Kahden pisteen välille voidaan piirtää jana.
EA2: Janaa voidaan jatkaa kumpaankin suuntaan yli päätepisteidensä.
EA3: Pisteen ympäri voidaan piirtää minkä tahansa toisen pisteen kautta kulkeva ympyrä.
EA4: Kaikki suorat kulmat ovat yhteneviä.
EA5: Yhdensuuntaisuus- eli paralleeliaksiooma: Jos suora viiva leikkaa kahta muuta suoraa eri pisteissä siten, että muodostuu kaksi kulmaa (yhteensä alle kaksi suoraa kulmaa) samalle puolelle suoraa viivaa, niin suorat leikkaavat toisensa ja leikkauspiste on samalla puolella viivaa kuin muodostuneet kulmat (leikkauspisteeseen muodostunut kulma on alle kaksi suoraa kulmaa).

Näissä Eukleideen aksioomissa on kuvattu konstruktiotehtäviä varten säännöt viivaimen ja harpin käytölle. Ensimmäisen aksiooman tulkinnassa on huomattava, että Eukleides tarkoittaa yksikäsitteistä janaa, vaikka hän ei sitä ilmaissutkaan [**1**, s. 14]. Eukleideen neljäs aksiooma on tärkeä, koska se asettaa käyttöön suoran kulman käsitteen.

Paralleeliaksiooma EA5 oli yli kahden tuhannen vuoden ajan matemaatikkojen mielenkiinnon kohteena. Paralleeliaksiooma vaikutti lauseelta, joka voitaisiin todistaa muiden aksioomien avulla. Näin ei kuitenkaan käynyt, mutta lopulta 1800-luvulla matemaatikot onnistuivat näyttämään, että paralleeliaksiooma on riippumaton neljästä muusta aksioomasta. Riippumattomuus takoittaa tässä sitä, että paralleeliaksioomaa ei voida todistaa sen enempää oikeaksi kuin vääräksikään muiden aksioomien avulla. Näin huomattiin, että geometrinen väite voidaan konstruoida korvaamalla paralleeliaksiooma jollakin muulla sen kanssa ristiriidassa olevalla suorien yhdensuuntaisuuteen liittyvällä väitteellä. On siis mahdollista luoda teoria, joka poikkeaa *euklidisesta geometriasta* ja tätä teoriaa kutsutaan *epäeuklidiseksi geometriaksi* [**4**]. Tässä työssä emme kuitenkaan perehdy epäeuklidiseen geometriaan juuri tämän enempää.

Eukleideen aksiomaattista järjestelmää voidaan pitää matematiikan kannalta merkittävänä saavutuksena. On havaittu, että järjestelmä on osittain epätarkka ja sitä ovat useat matemaatikot pyrkineet parantelemaan, toisinaan virheellisestikin. Erityisesti Eukleideen deduktiivinen esitystapa on muodostunut merkitykselliseksi matematiikan kehittymisen kannalta. [**3**, s. 20].

Palaamme Eukleideen aksioomiin ja erityisesti viidenteen aksioomaa myöhemmin, sillä se on ollut ongelmallisin ja samalla mielenkiintoisin osa Eukleideen aksioomajärjestelmää. Seuraavaksi lähdemme tarkastelemaan Eukleideen teorian kehittymistä ja poimimme siitä tutkielman konstruktioiden kannalta olennaiset määritelmät ja lauseet.

1.2. Kolmioiden ja kulmien ominaisuuksia

Tässä luvussa tarkastelemme työn jatkon kannalta tärkeimpiä monikulmioihin ja erityisesti kolmioihin liittyviä perusominaisuuksia.

Kolmiot ovat monikulmioita, joiden ominaisuuksia voidaan tutkia helpoin menetelmin ja niiden kautta luotu tasogeometrian yleistyy myös suurimmaksi osaksi muille monikulmioille. Monet kulmia koskevat lauseet voidaan todistaa kolmioiden avulla ja toisinpäin. Erityisesti myöhemmin käsiteltävä kolmioiden yhtenevyys on tärkeä työkalu laajennettaessa monikulmioihin liittyvää teoriaa. Erästä kolmioiden yhtenevyyteen liittyvää sääntöä tarvitsemme jo tässä kappaleessa, joten esittelemme sen lyhyesti seuraavaksi. [**1**, s. 19].

LAUSE 1.1 (Sivu-kulma-sivu–sääntö). *Jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtäsuuret kuin vastaavat osat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

Lauseen 1.1 todistus sivuutetaan, koska käsittelemme säännön todistuksineen kolmioiden yhtenevyyksiä käsittelevän kappaleen lauseessa 1.12.

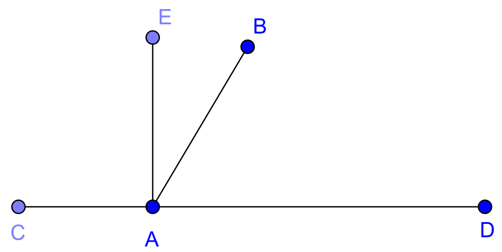
Seuraava määritelmä on olennainen osa Eukleideen matematiikkaa. Se erottaa nykypäivän matematiikan ja Eukleideen aikaisen matematiikan. Eukleideen teoria ei nimittäin käsittele kulmien astemittoja. Näin ollen mekään emme ota käyttöön astemittoja kulmia tarkasteltaessa, eikä se ole oikeastaan jatkon kannalta mitenkään tarpeellistakaan. [**1**, s. 9].

MÄÄRITELMÄ 1.2. Jos puolisuora leikkaa toista suoraa siten, että kummallekin puolelle muodostuvat kulmat ovat yhtä suuret, sanotaan, että kulmat ovat suoria kulmia ja suorat toistensa normaaleja.

Määritelmään 1.2 liittyvä tärkeä suoran kulman konstruointi esitellään tehtävässä 2.3.

Seuraava lause 1.3 tuo esille kulmien suuruuteen liittyviä käsitteitä [**1**, s. 29]. Niinkuin aiemmin jo totesimme Eukleideen ei tiedetä esittäneen kulmille lukuihin perustuvaa mittaa vaan hänen aksioomajärjestelmänsä yhteenlasku perustuu kulmien vierekkäin asettamiseen. Todistuksissa ei siis esiinny kulma-asteiden summia, mikä toisinaan saattaa aiheuttaa hankaluuksia.

LAUSE 1.3 (Vieruskulmalause). *Jos suora viiva kulkee toisen suoran viivan yli ja muodostaa molemmille puolille kulman, niin nämä kulmat ovat yhteensä kahden suoran kulman kokoiset.*



Kuva 1.1. Lauseen 1.3 konstruktio.

TODISTUS. Olkoon piste A suoralla CD sekä sen ulkopuolinen piste B. Näin muodostuvat vieruskulmat $\angle CAB$ ja $\angle BAD$. Jos vieruskulmat ovat yhtäsuuret, niin ne ovat määritelmän 1.2 nojalla suoria. Muussa tapauksessa piirretään suoralle CD normaali AE, jolloin kulmat $\angle CAE$ ja $\angle EAD$ ovat suoria. Kulma $\angle EAD$ on kulmien $\angle EAB$ ja $\angle BAD$ summa. Jos kulmaan $\angle EAD$ lisätään kulma $\angle CAE$ niin havaitaan, että kulmat $\angle CAE$ ja $\angle EAD$ ovat yhteensä niin paljon kuin kolme kulmaa $\angle CAE$, $\angle EAB$ ja $\angle BAD$ yhteensä. Havaitaan, että myös kulmat $\angle CAE$ ja $\angle EAB$ ovat yhteensä kulma $\angle CAB$, johon lisäämällä kulma $\angle BAD$ saadaan kulmat $\angle CAE$, $\angle EAB$ ja $\angle BAD$. Nämä ovat siis yhteensä yhtä paljon kuin kulmat $\angle CAB$ ja $\angle BAD$, mutta osoitimme myös, että kulmat $\angle CAE$ ja $\angle EAD$ ovat yhteensä yhtä paljon kuin kulmat $\angle CAE$, $\angle EAB$ ja $\angle BAD$. On siis selvää, että vieruskulmat $\angle CAB$ ja $\angle BAD$ ovat yhtä paljon kuin kaksi suoraa kulmaa. $\square$

Seuraavaksi esiteltävän ristikulmalauseen [**1**, s. 31] tarkastelu vaaditaan, jotta voimme todistaa jatkon kannalta tärkeän lauseen 1.5.

LAUSE 1.4 (Ristikulmalause). *Jos kaksi suoraa leikkaavat toisensa, niin leikkauspisteen vastakkaiset kulmat eli ristikulmat ovat yhtä suuret.*

TODISTUS. Ristikulmalause seuraa vieruskulmalauseesta 1.3 sekä muutamista yhteneväisyyteen liittyvistä selviöistä [**1**, s. 15]. Esimerkiksi, jos suorat AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä E, niin vieruskulmalauseen 1.3 nojalla kaksi vierekkäistä kulmaa muodostavat yhteensä kaksi suoraa kulmaa. Saman kanssa yhtä suuret ovat yhtä suuret eli jos, $\angle CEA + \angle CEB = \angle CEB + \angle BED$, niin poistamalla yhtä suuret yhtä suurista saadaan, että $\angle CEA = \angle BED$. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että myös ristikulmat $\angle CEB$ ja $\angle AED$ ovat yhtä suuret. □

Vieruskulmalauseelle ja ristikulmalauseelle hyvänä jatkona on ulkokulmaan liittyvä lause, joka käsitellään seuraavaksi [**1**, s. 31].

LAUSE 1.5 (Ulkokulmaepäyhtälö). *Kolmion ΔABC kulman $\angle ACB$ ulkokulma on suurempi kuin kumpikaan sisäkulmista $\angle ABC$ tai $\angle BAC$.*

TODISTUS. Olkoon siis kolmio ΔABC, jonka sivua BC on jatkettu pisteeseen D. Väitetään siis, että kulma $\angle ACD$ on suurempi kuin kolmion kaksi muuta kulmaa. Olkoon piste E janan AC keskipiste ja piste F suoralla BE yhtä kaukana pisteestä E kuin piste B. Nyt siis $AE = EC$ ja $BE = EF$ ja lisäksi kulma $\angle AEB$ ja $\angle CEF$ ovat ristikulmina yhtä suuret. Nyt SKS-säännön 1.1 nojalla kolmiot ΔAEB ja ΔCEF ovat yhtenevät ja siis kulmat $\angle BAE$ ja $\angle FCE$ ovat yhtä suuret. Eukleideen asettamien selviöiden [**1**, s. 15–16] avulla huomataan, että kulma $\angle ACD$ sisältää kulman $\angle FCE$ ja on suurempi kuin kulma $\angle ACF$ ja siten suurempi kuin $\angle BAE = \angle BAC$. Vastaavasti todistetaan, että kulma $\angle ACF$ on suurempi kuin kulma $\angle CBA$. □

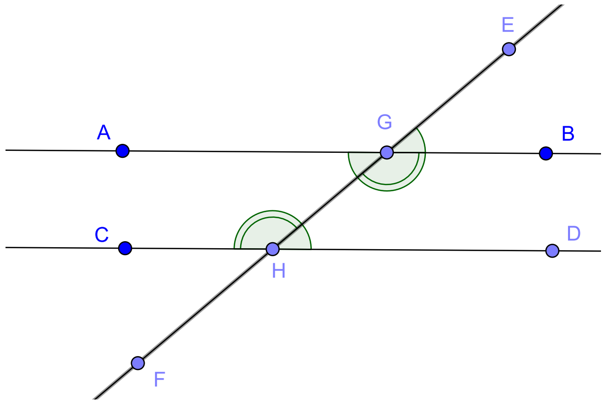
Seuraava lause on mielenkiintoinen, sillä se on oikeastaan käänteinen tulos Eukleideen yhdensuuntaisuusaksioomalle [**1**, s. 32]. Yhdensuuntaisuusaksioomahan sanoo lyhykäisyydessään seuraavaa: jos kahden sisäkulman summa on alle kaksi suoraa kulmaa, niin muodostuu kolmio [**1**, s. 32].

LAUSE 1.6. *Kolmion kahden kulman summa on aina vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.*

Todistus sivuutetaan, koska lauseen 1.6 tieto esitellään myöhemmin laajempana versiona lauseessa 1.9. Aschan käsittelee edellisen lauseen jälkeen Eukleideen viidennen aksiooman, mutta me esittelimme sen jo aiemmin ja palaamme siihen tarkemmin vielä myöhemmin. Seuraava lause käsittelee yhdensuuntaisuutta ja on aiemmasta lauseesta 1.6 poiketen asiasisällöltään lähes sama kuin Eukleideen viides aksiooma [**1**, s. 43].

LAUSE 1.7 (Käänteinen vuorokulmalause). *Olkoot suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ yhdensuuntaiset ja suora $\overleftrightarrow{EF}$, joka leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ pisteessä G ja suoraa $\overleftrightarrow{CD}$ pisteessä H. Tällöin kulma $\angle DHG = \angle BGE$ sekä $\angle DHG = \angle HGA$ ja $\angle DHG$ ja $\angle HGB$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa.*

TODISTUS. Muodostetaan antiteesi, missä kulmat $\angle AGH$ ja $\angle GHD$ ovat erisuuret, niin toinen niistä on siis suurempi. Olkoon kulma $\angle AGH$ suurempi. Lisätään molempiin kulmiin kulma $\angle BGH$, jolloin kulmat $\angle AGH$ ja $\angle BGH$ ovat yhteensä enemmän kuin kulmat $\angle BGH$ ja $\angle GHD$. Nyt kulmat $\angle AGH$ ja $\angle BGH$ ovat vieruskulmia eli yhteensä kaksi suoraa kulmaa, joten $\angle BGH$ ja $\angle GHD$ ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Tällöin siis suorat AB ja CD kohtaavat toisensa aksiooman EA5 nojalla, mutta tämä on mahdotonta, koska oletimme suorat yhdensuuntaisiksi. Näin ollen kulmat $\angle AGH$ ja $\angle GHD$ eivät ole erisuuret. Kulmat $\angle AGH$ ja $\angle EGB$ ovat ristikulmina yhtä suuret, joten kulma $\angle EGB$ on yhtä suuri kuin $\angle GHD$. Lisäämällä edellisiin kahteen kulmaan kulma $\angle BGH$ havaitaan, että kulmat $\angle EGB$ ja $\angle BGH$ ovat yhtä suuria kuin kulmat $\angle BGH$ ja $\angle GHD$. Kulmat



Kuva 1.2. Lauseen 1.7 konstruktio.

$\angle EGB$ ja $\angle BGH$ ovat siis vieruskulmia, jolloin ne ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa ja näin ollen myös kulmat $\angle BGH$ ja $\angle GHD$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa. □

Edellinen lause 1.7 on tutkielman kannalta tärkeä, mutta myös sen toista versiota eli vuorokulmalausetta tarvitaan tarkasteltaessa ympyröiden ominaisuuksia. Esittelemmekin tämän lauseen seuraavaksi, mutta palaamme vuorokulmalauseen todistamiseen myöhemmin Hilbertin aksioomajärjestelmää käsittelevässä kappaleessa ja lauseessa 4.5. [**1**, s. 42].

Lause 1.8 (Vuorokulmalause). *Jos kahta suoraa leikkaa sama suora ja muodostuvat vuorokulmat ovat yhtäsuuret, niin nämä kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset.*

Seuraava lause liittyy kulmien summiin [**1**, s. 46]. Kulmasumman arvellaan olleen tiedossa jopa muinaisessa Egyptissä ja sen tunnetumpi versio Eukleideen versioon verrattuna on Pythagoraan[1] todistus [**3**]. Pythagoraan todistus esitellään tyypillisesti myös oppikirjoissa. Me tarkastelemme nyt kuitenkin Eukleideen tapaa esittää kulmasumma.

Lause 1.9 (Kulmasummalause). *Kolmion ulkokulma on yhtä suuri kuin kolmion kaksi muuta kulmaa yhteensä ja kolmion kaikkien kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa.*

Todistus. Olkoon kolmion ΔABC ulkokulma $\angle ACD$ ja konstruoidaan suoralle AB yhdensuutainen suora, joka kulkee pisteen C kautta (Konstruktio 1.31). Lauseen 1.7 nojalla kulmat $\angle BAC$ ja $\angle ACE$ sekä kulmat $\angle ABC$ ja $\angle ECD$ ovat yhtä suuret. Kulmien $\angle ACE$ ja $\angle ECD$ summa $\angle ACD$ on yhtä suuri kuin kulmat $\angle BAC$ ja $\angle ABC$ yhteensä. Kulman $\angle ACB$ ulkokulma on siis yhtäsuuri kuin kolmion muut kulmat yhteensä. Nyt edellisen ja vieruskulmalauseen 1.3 nojalla kulmasummalause pätee. □

Kulmasummalause 1.9 on tärkeä, koska sillä on useita Eukleideen trigonometrian kannalta tärkeitä seurauksia. Seuraavaksi mainitsen niistä tämän työn kannalta oleellisimmat [**1**, s. 47–48]. Nämä seuraukset tulevat käyttöön ympyrän ja kolmion välisissä harppi-viivain konstruktioissa hieman myöhemmin.

[1] Pythagoras (n.500 eaa.) oli antiikin Kreikan filosofi ja tutkija.

SEURAUS 1.10. *Olkoon kaksi kolmiota, joiden kaksi kulmaa ovat yhtä suuret. Tällöin myös kolmannet kulmat ovat yhtä suuret.*

SEURAUS 1.11. *n-kulmion kulmien summa on $(n-2)$ kertaa kaksi suoraa kulmaa.*

Edellä otimme haltuun kulmiin ja kolmiohin liittyvää Euklidista geometriaa. Seuraavaksi siirrymme hiukan syvemmälle teoriaan ja otamme käyttöön yhtenevyyden käsitteen.

1.3. Kolmioiden yhtenevyys

Kolmioiden ΔABC ja ΔDEF yhtenevyyttä merkitään seuraavasti, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Kolmioiden yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio, joka seuraa janojen ja kulmien ominaisuuksista. Seuraavaksi käsittelemme kolmioihin liittyviä yhtenevyyskriteereitä, joista ensimmäisenä on sivu-kulma-sivu–sääntö [**1**, s. 19].

LAUSE 1.12 (SKS–sääntö). *Jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin näitä vastaavat osat toisesssa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

TODISTUS. Olkoon kolmiot ΔABC ja ΔDEF. Olkoon sivut AB ja DE sekä AC ja DF keskenään yhtä pitkät ja kulmat $\angle BAC$ ja $\angle EDF$ yhtä suuret. Asetetaan kolmio ΔABC kolmion ΔDEF päälle siten, että piste A on pisteen D päällä, puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on puolisuoran $\overrightarrow{DE}$ päällä ja siten piste B on pisteen E päällä. Lisäksi, koska kulmat $\angle BAC$ ja $\angle EDF$ ovat yhtä suuret niin sivut AC ja DF ovat samaan suuntaan. Nyt piste C on pisteen F päällä, koska sivut AC ja DF ovat yhtä pitkät. Näin ollen kanta BC ja siirretty EF ovat samat ja yhtä pitkät. Kolmiot ovat yhtenevät. □

Lauseen 1.12 todistus on epämääräinen. Eukleideen tiedetään käyttäneen todistuksessa kuvion siirtämisen periaatetta [**1**, s. 15], mikä on hyvin kyseenalainen. Näin toimii myös Aschan suomennoksessaan. Hilbertin aksioomajärjestelmässä, johon palaamme myöhemmin lause 1.12 on asetettu aksioomaksi. Tällöin vältytään todistuksessa esiintyvältä hankalalta kuvion siirtämiseltä.

Yhtenevyyssäännöstä SKS seuraa kolmioiden yhtenevyyskriteeri KSK ja KKS, joka esitellään seuraavaksi [**1**, s. 40].

LAUSE 1.13 (KSK– ja KKS–sääntö). *Jos kahdella kolmiolla on yksi yhteinen sivu ja kaksi yhtä suurta kulmaa, siten että*

1. *(KSK) yhteinen sivu on kummassakin kolmiossa edellä mainittujen kulmien välissä,*
2. *(KKS) yhteinen sivu on kummankin kolmion yhtä suuren kulman vastapäinen sivu,*

niin kolmiot ovat yhtenevät.

Vaikka KSK-sääntö voitaisiin todistaa samaan tapaan kuin SKS–sääntö 1.12 käyttämällä siirtämisen periaatetta, niin todistamme sen nyt erikseen huomattavasti paremmalla ja luotettavammalla tavalla.

TODISTUS. Olkoon siis aluksi kaksi kolmiota ΔABC ja $\Delta A'B'C'$. Jos sivut CB ja $C'B'$ eivät ole yhtä pitkät, niin toinen on pidempi. Olkoon siis sivu $C'B'$ pidempi. Valitaan pisteiden C' ja B' välistä piste P siten, että $PB' = CB$. Kolmiot ΔABC ja $\Delta A'B'P$ ovat tällöin SKS-säännön 1.12 nojalla yhtenevät. Näin ollen kulmille pätee

$\angle CAB = \angle PA'B'$ eli $\angle C'A'B' = \angle PA'B'$, mutta koska jälkimmäinen on edellisen osa tämä on mahdotonta. Välttämättä siis sivut CB ja $C'B'$ ovat yhtä pitkät.
Jotta saamme todistettua koko väitteen on meidän tarkasteltava myös tilannetta KKS eli kun yhteinen sivu ei ole yhteisten kulmien välissä. Olkoon nyt kulmaa $\angle CAB$ vastaava sivu yhteinen. Nyt siis jos $AB = A'B'$, niin kolmiot ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ ovat SKS-säännön 1.12 nojalla yhtenevät, joten tarkastellaan vain tapausta $AB \neq A'B'$. Esimerkiksi jos sivu AB on lyhyempi kuin sivu $A'B'$ niin olkoon piste Q siten, että $AB = B'Q$. SKS-säännön nojalla kolmiot ΔABC ja $\Delta QB'C'$ ovat yhtenevät ja siten $\angle CAB = \angle C'QB'$. Oletimme kuitenkin alussa, että $\angle CAB = \angle C'A'B'$, joten $\angle C'QB' = \angle C'A'B'$, mikä on ulkokulmalauseen 1.5 nojalla kolmiossa $\Delta C'A'Q$ mahdotonta. □

Kolmioiden yhtenevyyteen liittyy vielä yksi kriteerio SSS [**1**, s. 24]. Ennen sen esittämistä tarvitsemme pisteelle aiempaa hiukan tarkemman määritelmän, joka esitellään seuraavassa lauseessa. [**1**, s. 22].

LAUSE 1.14. *Piste riippuu kahden kiinteän pisteen etäisyydestä ja siitä, kummalla puolella niitä yhdistävää suoraa se sijaitsee.*

Lauseen todistus sivuutetaan, koska kyseessä on SSS-säännön todistamisessa tarvittava apulause, joka ei ole tutkielman kannalta muuten oleellinen.

LAUSE 1.15 (SSS–sääntö). *Jos kahden kolmion sivut ovat yhtä suuret, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

TODISTUS. Olkoon kaksi kolmiota ΔABC ja ΔDEF ja sivujen AB ja AC kanssa yhtä suuret sivut DE ja DF. Olkoon myös kanta BC yhtä suuri kannan EF kanssa. Tällöin voidaan todeta että myös kolmio ΔABC on yhtä suuri kolmion ΔDEF kanssa.

Jos kolmio ΔABC asetetaan kolmion ΔDEF päälle, niin piste B on pisteen E päällä ja kanta BC on kannan EF päällä. Tällöin siis piste C vastaa pistettä F, koska kanta BC on yhtä suuri kuin kanta EF. Koska kanta BC vastaa kantaa EF, niin sivut BA ja CA vastaavat sivuja ED ja DF. Jos kanta BC vastaa kantaa EF, mutta sivut AB ja AC eivät vastaa sivuja ED ja DF, niin olemme konstruoineet kannalle kaksi muuta sivua EG ja FG vastaavasti kahden annetun sivun kanssa niin, että sivut kohtaavat eri pisteissä samalla puolella kantaa, mutta sivuilla olisi samat päätepisteet kannalla EF. Tämä on kuitenkin mahdoton konstruktio edellisen lauseen 1.14 nojalla. Tällöin, kanta BC voidaan asettaa kannan EF päälle, mutta sivuja BA ja AC ei voida asettaa sivujen ED ja DF päälle. Täten, sivujen on oltava samat. Tällöin myös kolmio ΔBAC on sama kolmio kuin kolmio ΔEDF, sillä kuviot jotka voi asettaa päällekkäin niin, että ne peittävät toisensa, ovat yhtä suuret [**1**, s. 15]. □

Lauseen 1.15 todistus seuraa lauseesta 1.12, mutta sekä Aschanin että englanninkielisen Alkeiden versiossa todistus on käsitelty erikseen, joten näin teemme mekin. Lauseen todistus perustuu valitettavasti myös kyseenalaiselle siirtämisoperaatiolle kuten aiemman SKS-säännön 1.12 todistus ja tässä on lisäksi hyväksyttävä siirroksi myös kääntävät kuvaukset, kuten peilaus. Mikäli kääntäviä kuvauksia ei hyväksyttäisi, niin piste G kuvautuisi välttämättä pisteen D kanssa samalle puolelle kantaa EF. Tässä on kuitenkin huomioitava tilanne, jossa pisteet voivat kuvautua myös eri puolille kantaa EF ja siihen tarvitsemme peilausta.

Voidaksemme tutkia miten kolmiot ja ympyrät suhteutuvat toisiinsa täytyy meidän tutustua kolmioiden lisäksi myös ympyröihin, joiden ominaisuuksia tarkastelemme seuraavaksi.

1.4. Ympyröiden ominaisuuksia

Ympyrälle pätee monia perusominaisuuksia, joita on esitelty lähinnä määritelminä ja aksioomina Eukleideen *Alkeiden* suomennoksessa [**1**, s.86–88]. Esitellään seuraavaksi muutamia tämän työn kannalta tärkeimpiä ympyröihin liittyviä ominaisuuksia. Ensimmäinen määritelmä esittelee ympyröihin liittyviä käsitteitä [**1**, s. 87].

MÄÄRITELMÄ 1.16. Segmentin kulmaksi sanotaan käyräviivaista kulmaa, jonka kyljet ovat jänne ja ympyrän kaari.

Edellisessä määritelmässä puhutaan käyräviivaisesta kulmasta, mikä ei ollut erityisen tunnettu Eukleideen matematiikassa sen hankaluutensa vuoksi. Eukleideen tiedetään käsitelleen koko Alkeet-teoksessaan käyräviivaisuutta ainoastaan ympyröiden tapauksessa. Käyräviivaisuudella tarkoitetaan tässä lähinnä ympyrän kaarta ja sen osia. Seuraavassa lauseessa esittelemme ympyrän halkaisijan käsitteen [**1**, s. 92].

LAUSE 1.17. *Jos kaksi ympyrän jännettä puolittavat toisensa, niin ainakin toinen niistä on halkaisija.*

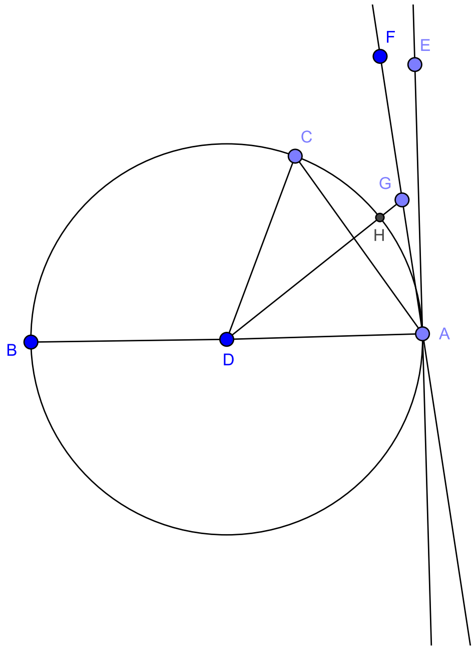
TODISTUS. Todistus perustuu vuorokulmalauseeseen 1.8. Jos kumpikaan jänteistä ei sisällä ympyrän keskipistettä, niin jana jänteiden leikkauspisteestä keskipisteeseen on kohtisuorassa jänteitä vastaan. Tämä on vuorokulmalauseen nojalla mahdotonta, koska ne leikkaavat toisensa. □

Seuraavan lauseen todistusta tarkastellessa on hyvä muistaa, että kulmien vertailu perustuu niiden asettamiseen sisäkkäin [**1**, s. 102]. Voidaan siis luonnollisesti ajatella, että kokonainen on osaansa suurempi [**1**, s. 16].

LAUSE 1.18. *Ympyrän sädettä vastaan piirretty normaali, joka sivuaa ympyrää, on kehäpistettä lukuun ottamatta ympyrän ulkopuolella. Ei siis ole olemassa janaa, joka kuulkisi ympyrän ja normaalin välissä sekä kehäpisteen kautta. Määritelmää 1.16 käyttämällä voidaan sanoa, että puoliympyrän kulma on suurempi kuin mikään terävä kulma ja säteen normaalin sekä kehän välinen käyräviivainen kulma on pienempi kuin mikään terävä kulma.*

TODISTUS. Todistetaan lause vaiheittain.

(1) Olkoon ympyrä, jonka keskipiste on D ja halkaisija BA. Osoitetaan, että pisteeseen A piirretty janan BA normaali kulkee ympyrän ulkopuolella. Muodostetaan antiteesi, janan BA normaali kulkee ympyrän sisäpuolen kautta. Tällöin normaali leikkaa kehää uudelleen pisteessä C, joten muodostuu tasakylkinen kolmio ΔADC. Kantakulma $\angle DCA$ on siis yhtä suuri kuin kantakulma $\angle DAC$, mutta jana AC on janan AB normaali eli $\angle DAC$ on suora, mikä on ristiriidassa lauseen 1.6 kanssa.
(2) Osoitetaan, että ei ole olemassa janaa AF, joka kulkisi ympyrän ja normaalin AE välissä. Muodostetaan antiteesi, jos jana AF on olemassa, niin $\angle DAF$ on terävä, koska se on osa suoraa kulmaa $\angle DAE$. Piirretään ensin normaali



Kuva 1.3. Lauseen 1.18 konstruktio.

suoralle FA, joka kulkee pisteen D kautta. Näin muodostuu kantapiste G ja normaalin ja ympyrän leikkauspiste H sekä suorakulmainen kolmio ΔDGA. Jana DA on kolmion ΔDGA hypotenuusa, joten $DG < DA = DH$. Tämä on ristiriita, koska DH on DG:n osa.

(3) Osoitetaan, että puoliympyrän kulma on suurempi kuin mikään suoraviivainen terävä kulma. Muodostetaan jälleen antiteesi, missä jokin suoraviivainen terävä kulma on suurempi tai yhtä suuri kuin kaaren CHA ja halkaisijan BA rajaama puoliympyrän käyräviivainen kulma. Tällöin olisi siis ympyrän ja sen tangentin välissä suora, joka kohdassa 2 todistettiin mahdottomaksi.

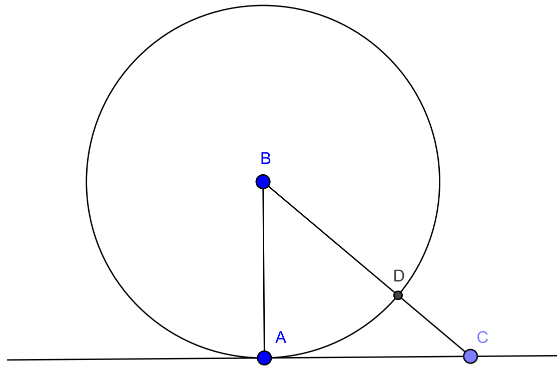
(4) Osoitetaan, että säteen normaalin ja kehän välinen käyräviivainen kulma on pienempi tai yhtä suuri kuin mikään suoraviivainen terävä kulma. Tämä todistetaan kuten kohta kolme eli jokin suoraviivainen terävä kulma on pienempi tai yhtä suuri kuin käyräviivainen kulma. Tällöin olisi suora normaalin ja kaaren välissä, mikä todettiin mahdottomaksi kohdassa 2.

Edellisten nojalla lause on todistettu. □

Lause 1.18 osoittaa, että kehäpisteeseen piirretty normaali on ympyrän tangentti. Seuraava lause käsittelee tangenttia ja suoraa kulmaa tarkemmin [**1**, s. 104].

LAUSE 1.19. *Pisteestä, jossa tangentti sivuaa ympyrää, ympyrän keskipisteeseen kulkeva säde on suorassa kulmassa tangenttia vastaan.*

TODISTUS. Olkoon piste A tangentin sivuamispiste ympyrän kehällä ja B ympyrän keskipiste. Olkoon lisäksi piste C ympyrän tangentilta, kuten kuvassa 1.4. Tällöin, jos kulma $\angle BAC$ ei olisi suora, niin tangentille pisteestä B piirretyn normaalin kantapiste ei olisi A vaan jokin muu piste C. Koska tangentti on ympyrän ulkopuolella niin tällöin myös tämä piste C on ulkopiste ja siis janalla BC on kehäpiste D. Nyt



Kuva 1.4. Lauseen 1.19 konstruktio.

kulma $\angle ACB$ on suora, joten kulma $\angle BAC$ on terävä (Lause 1.6) ja kateetti BC lyhyempi kuin hypotenuusa BA. Koska BD on BC:n osa, niin $BC > BD = BA$. Tämä on mahdotonta, joten antiteesi on väärä. □

Lauseet 1.18 ja 1.19 sanovat käytännössä saman asian hiukan eri sanoin, joten ne eivät tarvitsisi välttämättä uutta todistusta. Aschan jakaa ne kuitenkin Eukleideeta seuraten kahdeksi eri lauseeksi, jotka hän todistaa.

Seuraava lause vie Eukleideen teorian uuteen aiheeseen, sillä aloitetaan käsittelemään ympyrän sisään muodostuvia kehäkulmia sekä keskuskulmaa [**1**, s. 105].

LAUSE 1.20 (Kehäkulmalause). *Ympyrän tietyn kaaren keskipisteen kulma on kaksinkertainen vastaavan kaaren kehäpisteen kulmaan verrattuna.*

TODISTUS. Olkoon BC D-keskisen ympyrän kaari ja piste A vastakkaisella ympyrän kaarella. Olkoon jana AE ympyrän halkaisija, jolloin jos E on kaarella BC niin muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat ovat $\angle DBA = \angle DAB$. Lauseen 1.9 nojalla $\angle EDB = \angle DBA + \angle DAB$. Lisäksi vastaavasti $\angle EDC = 2\angle DAC$, joten $\angle BDC = \angle EDB + \angle EDC = 2(\angle DAB + \angle DAC) = 2\angle BAC$. Mikäli piste E taas on kaaren BC ulkopuolella, niin tasakylkisen kolmion kantakulmina on $\angle DBA = \angle DAB$ ja lauseen 1.9 nojalla $\angle EDB = \angle DBA + \angle DAB$. Vastaavasti saadaan, että $\angle EDC = 2\angle DAC$. Näin ollen $\angle BDC = \angle EDC - \angle EDB = 2(\angle DAC - \angle DAB) = 2\angle BAC$. □

Edellisessä todistuksessa tarkastelemme vain yhtä tapausta kun kulma on alle kaksi suoraa kulmaa. Lause 1.20 pätee kuitenkin myös suurille kulmille, mutta *Alkeiden* kulmakäsite rajoittuu kahden suoran kulman suuruisiin kulmiin. Aschan tiedostaa nämä yli kahden suoran kulman suuruiset kulmat, mutta seuraa Eukleideen tapaa käsitellä asioita. Kehäkulmalauseella on myös muutamia jatkon kannalta tärkeitä seurauksia [**1**, s. 106], jotka esittelemme seuraavaksi.

SEURAUS 1.21. *Saman lohkon kehäkulmat ovat yhtä suuret.*

SEURAUS 1.22. *Jos kaksi yhtä suurta kulmaa ovat samalla janalla ja samalla puolella, niin on olemassa ympyrä, joka kulkee janan päätepisteiden ja kummankin kulman kärjen kautta. Kulmat ovat siis kehäkulmat.*

Seuraavaksi tarkastelemme nelikulmiota ympyrän sisällä [**1**, s. 107].

LAUSE 1.23. *Nelikulmiolle, jonka jokainen kärki on ympyrän kehällä pätee, että vastakkaisten kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa.*

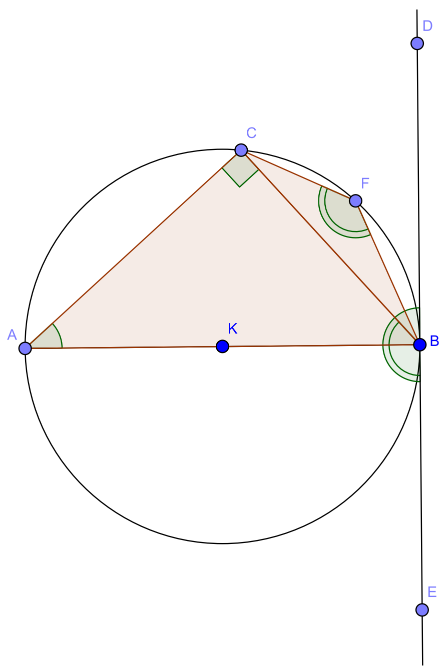
TODISTUS. Olkoon ympyrän sisään piirretty nelikulmio $ABCD$ ja osoitetaan, että $\angle ABC + \angle ADC$ on kaksi suoraa kulmaa. Jänteet AC ja BD jakavat nelikulmion osiin, jossa kolmion ΔABC kulmien summa on lauseen 1.9 nojalla kaksi suoraa kulmaa. Lisäksi kehäkulmalauseen 1.20 nojalla $\angle CAB = \angle BDC$ ja $\angle ACB = \angle ADB$. Näin ollen $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$ eli $\angle ABC + \angle ADC$ on kaksi suoraa kulmaa. □

Lauseiden 1.20 ja 1.23 väite seuraa myös suuremmille kulmille. Erityisesti lause 1.23 seuraa yleistetystä kehäkulmalauseesta sekä siitä, että samaan jänteeseen liittyvien keskuskulmien summa on neljä suoraa kulmaa. Seuraava lause on hyvin kuuluisa ympyrään liittyvää geometriaa tutkittaessa [**1**, s. 113].

LAUSE 1.24 (Thaleen puoliympyrälause). *Puoliympyrän kehäkulma on suora.*

Thaleen lauseen todistus sivuutetaan, koska kyseessä on kehäkulmalauseen 1.20 erikoistapaus. Seuraavassa lauseessa tarkastelemme tangentin ja ympyrän jänteen välistä kulmaa [**1**, s. 114].

LAUSE 1.25. *Tangentin ja jänteen välinen kulma on yhtä suuri kuin jännettä vastaava kehäkulma.*



Kuva 1.5. Lauseen 1.25 konstruktio.

Todistus. Olkoon ympyrä, jonka keskipiste on K ja halkaisija jana AB sekä ympyrälle piirretty jänne BC. Tällöin pisteeseen B piirretty ympyrän tangentti DE sivuaa ympyrää siten, että pisteet D ja C ovat samalla puolella suoraa AB. Osoitetaan, että jänteen ja tangentin väliset kulmat ovat yhtä suuret kuin jänteen lohkojen kehäkulmat.

Saman lohkon kehäkulmat ovat yhtä suuria, joten riittää tutkia yhtä kulmaa kummassakin lohkossa. Isomman lohkon kehäkulman kärjeksi valitaan A, jolloin lauseen 1.18 nojalla kulma $\angle DBA$ on suora. Pienemmän lohkon kehäkulman kärki on F, joka voidaan valita vapaasti. Lauseen 1.24 mukaan nyt myös kulma $\angle BCA$ on suora. Tällöin kulmasummalauseen 1.9 mukaan $\angle BAC + \angle CBA = \angle DBA$, jolloin $\angle BAC + \angle CBA = \angle DBA = \angle DBC + \angle CBA$. Näin ollen $\angle BAC = \angle DBC$, kuten väitettiin. Nelikulmion $ABFC$ kärjet ovat ympyrän kehällä, joten $\angle BAC + \angle BFC$ on kaksi suoraa kulmaa eli yhtä paljon kuin vieruskulmien $\angle DBC$ ja $\angle CBE$ summa. [1.23] Edellisen nojalla

$$\angle BAC + \angle BFC = \angle DBC + \angle CBE = \angle BAC + \angle CBE,$$

josta saadaan edelleen $\angle BFC = \angle CBE$. Näin myös toinen väite on todistettu. $\square$

Ympyröihin liittyy paljon eri ominaisuuksia, käsitteitä ja määritelmiä, joiden havainnollistamiseen on käytetty jo vuosituhansien ajan konstruointia harpin ja viivaimen avulla [**3**]. Perehdytään seuraavaksi konstruointiin tarkemmin.

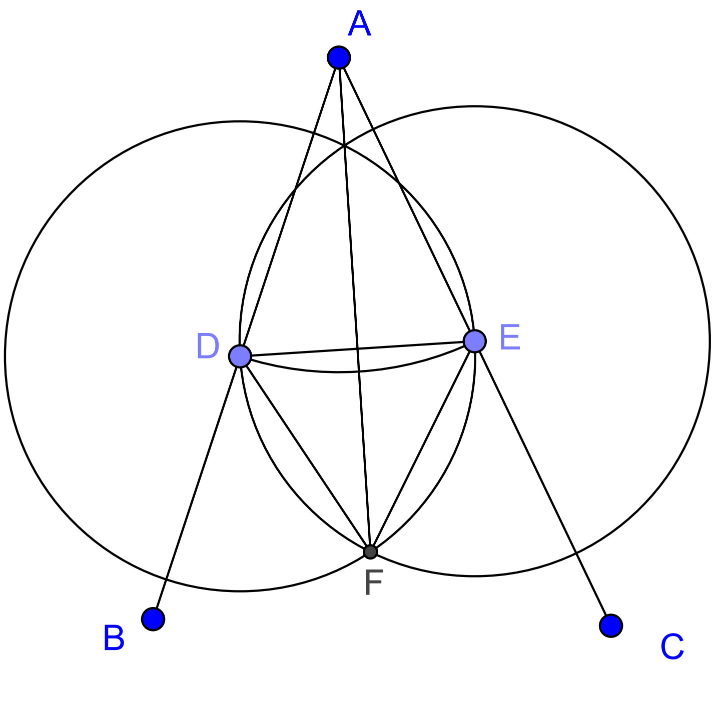
LUKU 2

Konstruointeihin liittyviä esimerkkejä

Tavoitteenamme tässä tutkielmassa on konstruoida neljä kolmion ja ympyrän välistä yhteyttä, joten on tärkeää esitellä konstruktioiden kannalta tärkeitä peruskonstruktioita. Kuten tiedämme klassiset konstruoinnin ja geometrian työvälineet ovat harppi ja viivain, eikä muita välineitä ole sallittua käyttää. Tämä seuraa suoraan Eukleideen aksioomista. Viivaimen käyttö on perusteltua, koska se on tarpeellinen geometrian peruskäsitteen *suoran* piirtämisessä. Harpille selkein perustelu olisi tietenkin ympyrän havainnollistaminen, mutta oikeastaan oleellisempaa geometrian kannalta on harpin käyttö pituuksien eli mittayksikön määrittämisessä. Ratkaistaessa konstruktiotehtävää pyritään palauttamaan annettu tehtävä aksioomiin, lauseisiin tai aiemmin ratkaistuihin konstruktiotehtäviin. Seuraavaksi siirrymme ratkaisemaan jatkon kannalta tärkeitä konstruktiotehtäviä, joissa harpin ja viivaimen käyttö tulee tutuksi.

Ensimmäisessä tehtävässä esittelemme kulman puolittamiseen johtavan konstruoinnin [**1**, s. 25].

TEHTÄVÄ 2.1. Annettu terävä kulma on puolitettava.

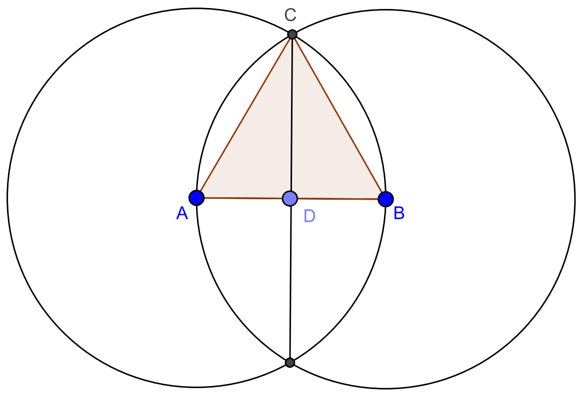


Kuva 2.1. Tehtävän 2.1 konstruktio.

Ratkaisu. Olkoon kahteen osaan jaettava kulma $\angle BAC$. Valitaan mielivaltainen piste D kyljeltä AB ja kyljeltä AC piste E samalta etäisyydeltä kärjestä A kuin piste D. Jana DE muodostaa kärjen A kanssa tasakylkisen kolmion ja näin janalle DE voidaan konstruoida tasasivuinen kolmio ΔDEF. Osoitetaan, että jana AF jakaa kulman $\angle BAC$ kahteen yhtä suureen osaa. Janat AE ja AD ovat yhtä pitkät sekä janat FE ja FD ovat yhtä pitkät ja jana AF on yhteinen kummallekkin kolmiolle. Näin ollen SKS-säännön 1.12 nojalla kolmiot $\angle EAF$ ja $\angle DAF$ ovat yhtenevät, joten vastinkulmat $\angle DAF$ ja $\angle EAF$ ovat yhtä suuret.

Jatketaan puolittamiseen liittyvällä tehtävällä, jossa tavoitteena on puolittaa jana kahteen yhtä suureen osaa [**1**, s. 26].

Tehtävä 2.2. Annettu jana on puolitettava.



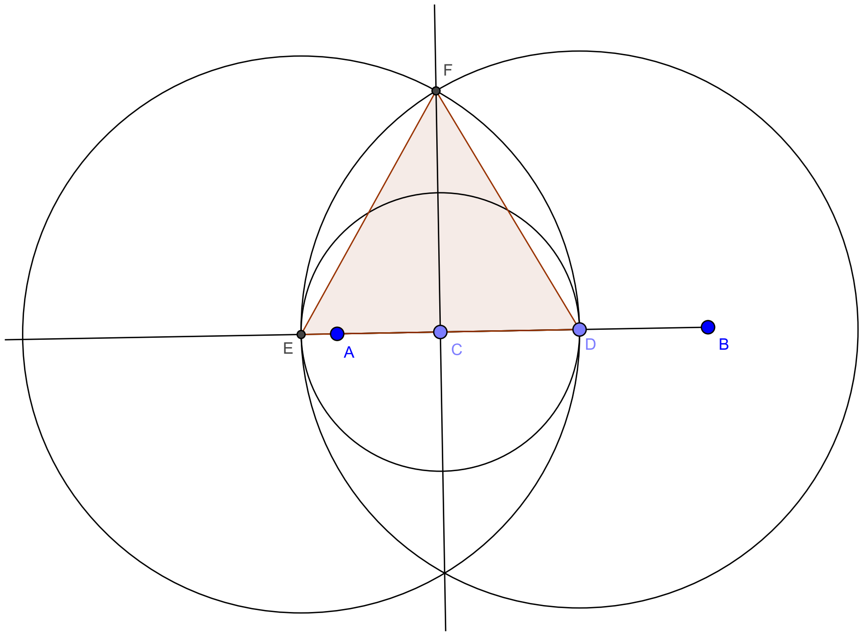
Kuva 2.2. Tehtävän 2.2 konstruktio.

Ratkaisu. Olkoon jana AB ja konstruoidaan sille tasasivuinen kolmio ΔABC. Konstruoidaan kulmalle $\angle ACB$ puolittaja, joka leikkaa janaa AB pisteessä D. Nyt janat AD ja DB ovat yhtä pitkät, koska kolmiot ΔACD ja ΔBCD ovat SKS-lauseen 1.12 nojalla yhtenevät.

Seuraava tehtävä 2.3 on käytännön kannalta merkityksellinen, sillä se yhdessä tehtävän 2.4 avulla osoittaa, että yhdensuuntaisuusaksioomasta perustelematta jää tässä vaiheessa vain sen yksikäsitteisyys. Toisinsanoen, käyttämällä tehtävien 2.3 ja 2.4 tietoja voidaan konstruoida ainakin yksi annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkeva yhdensuuntainen suora. Tarkasteltaessa erityisesti Eukleideen teoriaa tehtävä 2.3 ratkaisee suoran kulman olemassaolon ja yksikäsitteisyyden [**1**, s. 27].

Tehtävä 2.3. Suoran mielivaltaisen pisteen kautta on konstruoitava normaali.

Ratkaisu. Olkoon piste C suoralla AB. Valitaan suoralta jokin C:stä eroava piste D ja jatketaan janaa DC pisteen C yli janan CD pituuden verran pisteeseen E. Muodostetaan tasasivuinen kolmio ΔDEF ja osoitetaan että suora CF on AB:n normaali. Vieruskulmat $\angle DCF$ ja $\angle ECF$ ovat määritelmän 1.2 nojalla yhtäsuuret. Kolmiot ΔDCF ja ΔECF ovat SSS-lauseen 1.15 nojalla yhtenevät. Erityisesti kulmat $\angle DCF$ ja $\angle ECF$ ovat yhtä suuret. Nyt määritelmän 1.2 nojalla nämä kulmat ovat suoria ja jana CD on janan AB normaali.



Kuva 2.3. Tehtävän 2.3 konstruktio.

Edellisessä tehtävässä on myös hyvä huomata, että Eukleideen neljännen aksiooman EA4 mukaan on siis olemassa korkeintaan yksi suora, joka toteuttaa tehtävän 2.3 ehdot.

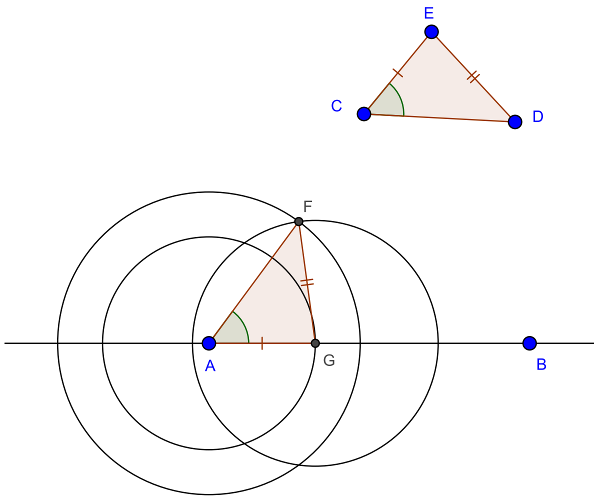
On huomattava, että näissä tehtävissä Eukleideen tapaan oletetaan jatkuvuus. Pidetään siis selvänä, että suora AB leikkaa ympyrää jopa kahdesti, jos ympyrän keskipiste ja kehäpiste ovat eri puolilla suoraa AB. Tämä on Euklidisen geometrian historian tärkein tutkimuskohde, joka perustuu paralleeliaksioomaan ja sen todistamiseen [**1**, s. 27]. Seuraavan tehtävän 2.4 aikana kannattaa pohtia normaalin yksikäsitteisyyttä [**1**, s. 27].

TEHTÄVÄ 2.4. Annetun suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkevalle suoralle on konstruoitava normaali.

RATKAISU. Olkoon suora AB ja sen ulkopuolinen piste C. Valitaan lisäksi piste D eri puolelta suoraa AB kuin piste C. Eukleideen kolmannen aksiooman EA3 nojalla on olemassa pisteen D kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on C. Ympyrä leikkaa suoraa AB kahdessa pisteessä E ja F, kuten tehtävässä 2.2. Olkoon piste G janan EF keskipiste. Janat FG ja GE ovat yhtä pitkät ja jana CG on yhteinen kolmioille ΔCGE ja ΔCGF. Lisäksi, koska janat CE ja CF ovat yhtä pitkät, niin SSS-lauseen 1.15 nojalla kolmiot ΔCGE ja ΔCGF ovat yhtenevät ja siis kulmat $\angle CGE$ ja $\angle CGF$ ovat yhtä suuret. Kulmat ovat vieruskulmat, joten määritelmän 1.2 nojalla ne ovat myös suoria kulmia, joten jana CG on janan AB normaali.

Normaali on todella yksikäsitteinen, mikä on osoitettu Eukleideen tapaan lauseessa 1.6. Eukleides osoitti normaalin yksikäsitteisyyden Alkeiden alussa, mutta vasta tehtävän 2.4 jälkeen käyttämättä yhdensuuntaisuusaksioomaa. Tämä merkitsee siis sitä, että normaalin yksikäsitteisyys on voimassa myös *hyperbolisessa geometriassa* [**1**, s.28]. Seuraavaksi tutkimme konstruktiota, jossa tapahtuu kulman siirtämistä [**1**, s. 38]

TEHTÄVÄ 2.5. Kulma on siirrettävä haluttuun kärkeen siten, että kylkenä on kärjestä alkava annettu puolisuora.



Kuva 2.4. Tehtävän 2.5 konstruktio.

RATKAISU. Olkoon suora $\overleftrightarrow{AB}$ ja kulma $\angle DCE$. Valitaan suoralta $\overleftrightarrow{AB}$ piste G siten, että $AG = CE$ ja konstruoidaan kolmio ΔAGF, jossa $AG = CE$ ja $GF = ED$. Lisäksi kolmion konstruktioehdon [**1**, s. 37] mukaisesti on oltava kolmas jana AF, joka toteuttaa kolmioepäyhtälön. Näistä kolmesta janasta voidaan siis muodostaa haluttu kolmio ΔAGF. Nyt SSS-lauseen 1.15 nojalla kolmiot ΔAGF ja ΔCED ovat yhtenevät, joten pätee $\angle BAF = \angle GAF = \angle ECD$.

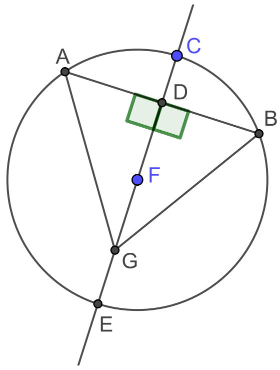
Edellisessä tehtävässä 2.5 on hyvä huomata, että Eukleides ei huomioi todistuksessa sitä, että kolmio voidaan siirtää kummallekin puolelle suoraa. Tällä kertaa se ei varsinaisesti haittaa, mutta joissakin todistuksissa se on hyvinkin oleellinen tieto. Seuraavassa tehtävässä siirrymme tarkastelemaan tarkemmin ympyrän konstruktioita [**1**, s. 89]

TEHTÄVÄ 2.6. Annetulle ympyrälle on määritettävä keskipiste.

RATKAISU. Valitaan ympyrän kehältä pisteet A ja B sekä olkoon janan AB keskipiste D. Janan AB keskipisteen D kautta kulkeva suora leikkaa ympyrää pisteissä E ja C. Osoitetaan, että janan CE keskipiste F on myös ympyrän keskipiste.

Muodostetaan antiteesi, annetun ympyrän keskipiste on jossain muussa pisteessä G. Tällöin $GA = GB$, $DA = DB$ ja $DG = DG$. SSS–säännön 1.15 nojalla $\Delta ADG \cong \Delta BDG$, joten $\angle ADG = \angle BDG$. Erityisesti siis suoran kulman määritelmän nojalla kulmat $\angle ADG$ ja $\angle BDG$ ovat suoria. Nyt myös kulma $\angle ADF$ on suora, jolloin $\angle ADF = \angle ADG$, mikä on mahdotonta, koska toinen on toisen osa. Näin ollen alkuperäinen väite on tosi.

Eukleides pitää itsestään selvänä, että ympyrän keskipiste on edellisen todistuksen nojalla janan CE keskellä [**1**, s. 90]. Tämä onkin aika selvää. Pahempi puute on



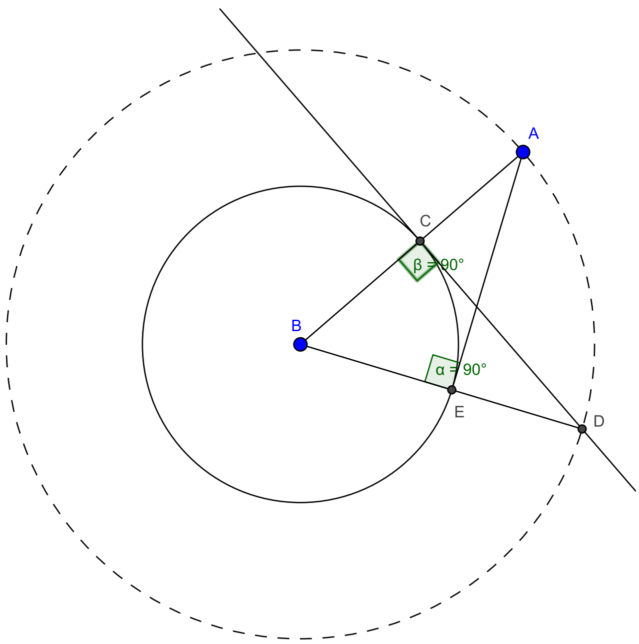
Kuva 2.5. Tehtävän 2.6 konstruktio.

se, että ei osoiteta ympyrän janan AB keskinormaalin CE leikkaavan ympyrää. Erityisesti vajaaksi jää tieto siitä, onko leikkauspiste D todella ympyrän sisällä. Tämä on kuitenkin helppo osoittaa tasakylkisen kolmion ja sen tiedon avulla, että kolmion pisintä sivua vastaa aina suurin kulma.

Tarkastellaan vielä viimeiseksi ympyrän tangenttiin liittyvää konstruointia [**1**, s. 103].

Tehtävä 2.7. Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä on piirrettävä tangentti ympyrälle.

Tehtävä 2.7 voidaan ratkaista kahdella eri tavalla, joista tunnetumpi on kehäkulmalauseen avulla todistaminen, joka on käsitelty Thaleen puoliympyrälauseessa 1.24 [**1**, s. 113]. Esitellään kuitenkin tehtävän 2.7 ratkaisu ja konstruktio ilman kehäkulmalausetta, kuten Eukleides sen teki.



Kuva 2.6. Tehtävän 2.7 konstruktio.

Ratkaisu. Olkoon piste A ympyrän ulkopuolella, jolloin esimerkin 2.6 nojalla on mahdollista löytää ympyrän keskipiste B. Janan AB ja ympyrän leikkauspiste on C. Määrätään janalle AB normaali pisteeseen C ja ympyrä, jonka keskipiste on B ja kulkee pisteen A kautta. Normaali ja uusi ympyrä leikkaavat pisteessä D, jolloin jana DB leikkaa alkuperäisen ympyrän pisteessä E. Väitetään nyt, että jana AE sivuaa alkuperäistä ympyrää. Ympyrän säteet ovat aina yhtä pitkiä, joten kolmiot ΔABE ja ΔDBC ovat SKS-säännön 1.12 nojalla yhtenevät eli $\angle AEB = \angle DCB$. Näin ollen kulma $\angle AEB$ on suora, joten lauseen 1.18 nojalla AE on alkuperäisen ympyrän tangentti.

Tästä tehtävästä seuraa myös, että ympyrän ulkopisteestä voidaan piirtää ainakin kaksi eri tangenttia kyseiselle ympyrälle. Tämä tapahtuu niin, että valitaan piste D toiselta puolelta suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ kuin edellisessä tehtävässä. Tällöin löydetään eri piste E sekä eri tangentti.

Edellä käsitellyt konstruktiotehtävät olivat peruskonstruktioita ja esittelivät hyödyllisiä välineitä konstruktiotehtävien ratkaisemiseen. Tärkeää on kuitenkin huomata, että ratkaisuksi ei riitä pelkkä konstruktio ja sen esittely. Ratkaisun tärkeä osa on konstruktion pätevyyden todistaminen aksioomiin ja aiemmin todistettuihin lauseisiin vedoten. Seuraavassa kappaleessa tarkastelemme mielenkiintoisia ja haasteellisempia konstruktioita, joissa apuna käytämme tämän kappaleen tehtävien ratkaisuja.

LUKU 3

Ympyrän ja kolmion väliset harppi-viivain konstruktiot

Lähdemme liikkeelle muutamista määritelmistä, jotka on hyvä asettaa ennen konstruktioihin siirtymistä. Eukleides asetti monikulmioille (erityisesti siis kolmioille) ja ympyröille perusolettamuksia, joista mainitsemme tässä vain tärkeimmät [**1**, s. 120].

MÄÄRITELMÄ 3.1. Monikulmio on *piirretty ympyrän sisään*, jos sen kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä.

MÄÄRITELMÄ 3.2. *Ympyrän ympäri on piirretty* monikulmio, jos monikulmion kaikki sivut ovat ympyrän tangentteja.

MÄÄRITELMÄ 3.3. Monikulmion *ympäri on piirretty* ympyrä, jos monikulmio on *piirretty ympyrän sisään.*

MÄÄRITELMÄ 3.4. Ympyrä on *piirretty monikulmion sisään*, jos monikulmio on *piirretty ympyrän ympäri.*

MÄÄRITELMÄ 3.5. Jana on *sovitettu ympyrään*, jos se on ympyrän jänne, eli kun sen päätepisteet ovat ympyrän kehällä.

Seuraavaksi käsiteltävät harppi-viivain konstruktiot on esitetty Eukleideen Alkeiden neljännessä kirjassa [**1**, s.121–124]. Käymme seuraavissa tehtävissä läpi ympyröiden ja kolmioiden piirtämisen toitensa sisään.

3.1. Annetun ympyrän sisään piirretään kolmio, jonka kulmat on annettu

Tehtävänä on siis siirtää annettu kolmio ympyrän sisään siten, että kolmion kaikki kolme kärkeä ovat annetun ympyrän kehällä.

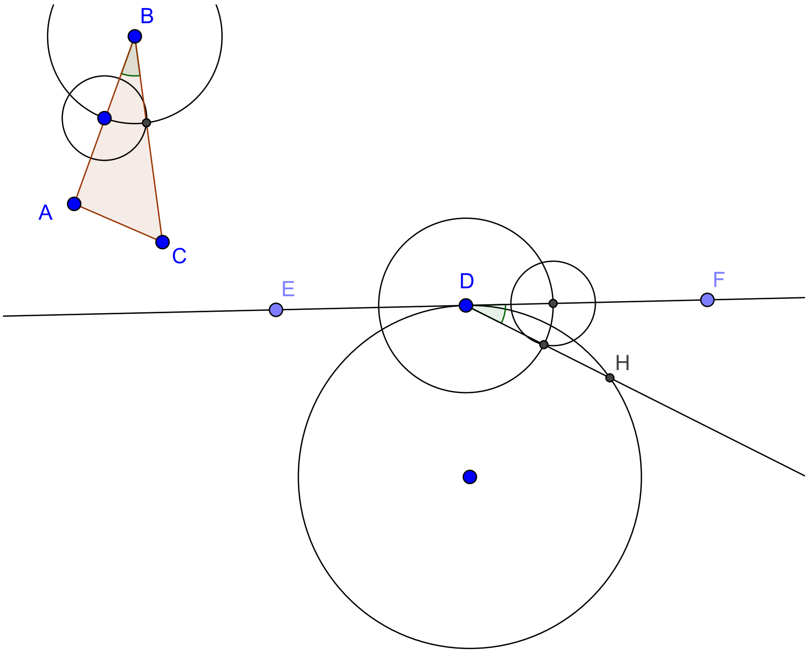
RATKAISU. Olkoon siis annettuna kolmio ΔABC ja ympyrä kuten kuvassa 3.1. Määrätään ympyrälle tangentti EF haluttuun kehäpisteeseen D kuten tehtävässä 2.7. Ympyrän tangentille voidaan nyt kopioida kulma $\angle ABC$ vastaamaan kulmaa $\angle FDH$ siten, että piste H on ympyrän toinen leikkauspiste.

Samaan tapaan kopioidaan myös toinen jäljelle jääneistä kolmion kulmista $\angle ACB$ kulmaksi $\angle EDG$. Näin saadaan määriteltyä kolmio ympyrän sisälle. Ongelmaksi jää kysymys siitä, onko kulma $\angle DGH$ sellainen kuin haluttiin.

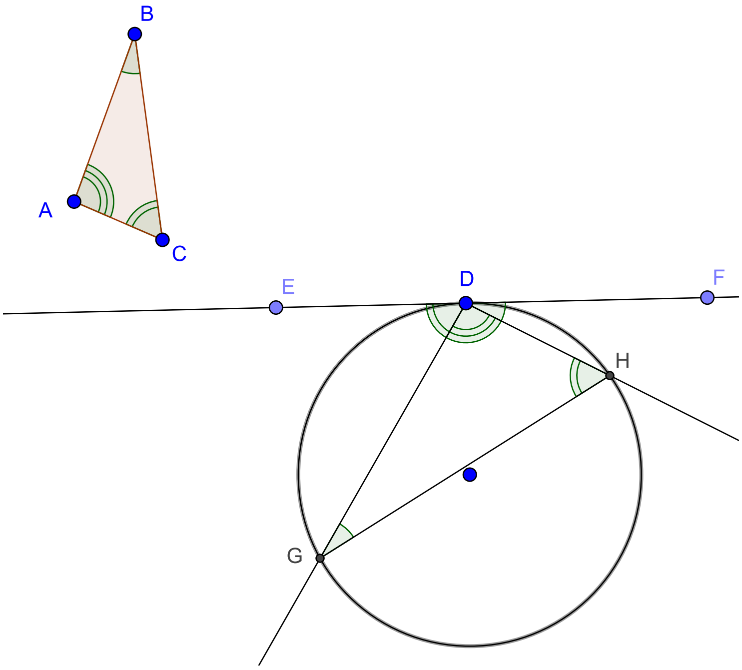
Lauseen 1.25 nojalla $\angle DGH = \angle FDH$, joka konstruktion nojalla on kulma $\angle ABC$. Lisäksi $\angle DHG = \angle EDG = \angle ACB$. Näin ollen kulmasummalauseen 1.9 ja erityisesti sen seurauksen 1.10 nojalla $\angle CAB = \angle HDG$.

3.2. Annetun ympyrän ympäri on piirrettävä kolmio, jonka kulmat on annettu

Seuraavaksi tehtävänä on suorittaa vastaavanlainen operaatio kuin edellä, mutta niin että haluttu kolmio piirretään ympyrän ulkopuolelle.

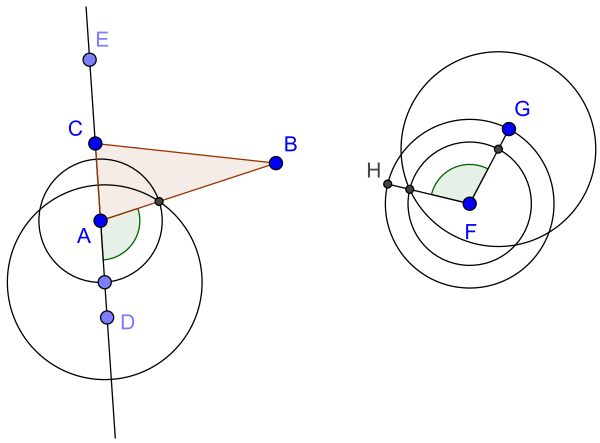


Kuva 3.1. Halutun kulman konstruoiminen ympyrän sisään.



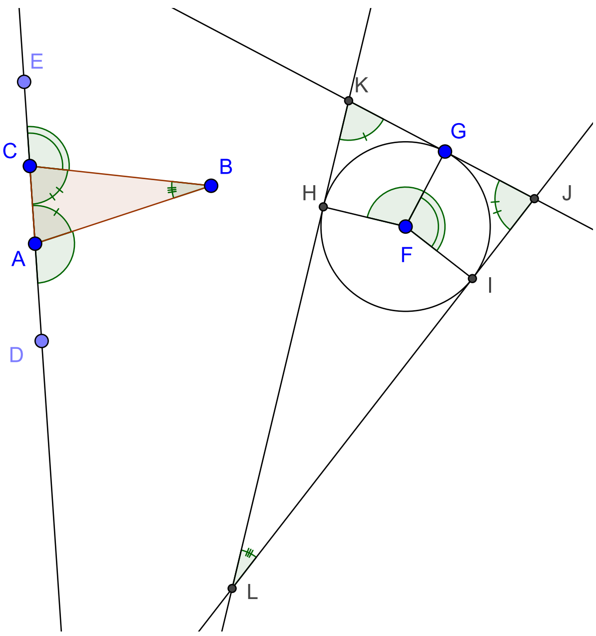
Kuva 3.2. Annetun ympyrän sisään on konstruoitu haluttu kolmio.

Ratkaisu. Olkoon siis annettuna ympyrä ja kolmio siten, että kolmion sivu CA on jatkettu molemmista päistä janaksi ED kuten kuvassa 3.3. Valitaan ympyrältä kehäpiste G. Kopioidaan haluttu ulkokulma $\angle BAD$ kulmaksi $\angle GFH$ kuten tehtävässä 2.5, missä H on siis vapaan kyljen ja annetun ympyrän leikkauspiste ja F on ympyrän keskipiste.



Kuva 3.3. Ympyrän sisään konstruoitu kulma $\angle BAD$

Samalla tavalla voidaan kopioida kulma $\angle BCE$ kulmaksi $\angle GFI$. Piirtämällä tangentit saatuihin pisteisiin G, H ja I muodostuu tangenttien leikkauspisteistä J, L ja K kolmio, kuten kuvassa 3.4.



Kuva 3.4. Annetun ympyrän ympärille on konstruoitu haluttu kolmio.

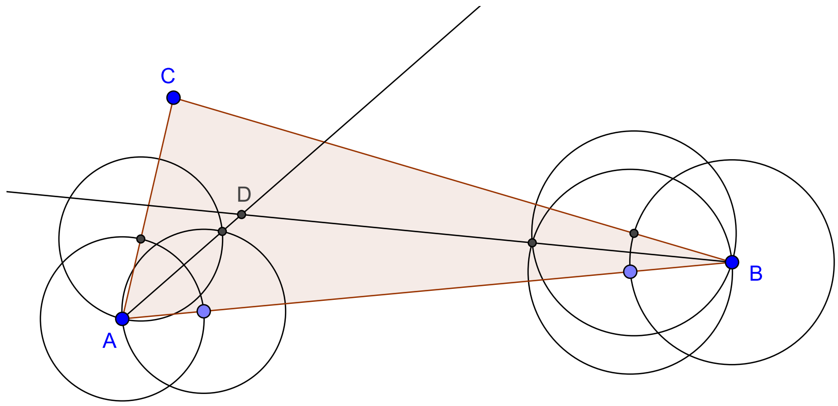
Täytyy vielä osoittaa, että konstruoinnilla ja lauseen 1.18 nojalla saatu kolmio on halutunlainen. Lauseen 1.19 nojalla tangenttien ja ympyrän säteiden väliset kulmat ovat suoria. Erityisesti siis pisteisiin G, H ja I piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa säteisiin nähden. Lisäksi lause 1.9 ja sen seuraus 1.11 osoittavat, että nelikulmion $GFHK$ kulmien summa on neljä suoraa kulmaa. Näin ollen kulmat $\angle GFH$ ja $\angle GKH$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa eli lauseen 1.3 mukaan ne muodostavat vieruskulmien summan. Tästä voidaankin päätellä, että $\angle GFH + \angle GKH = \angle BAD + \angle BAC$. Konstruktion nojalla pätee kuitenkin, että $\angle GFH = \angle BAD$, joten täytyy olla, että

$\angle GKH = \angle BAC$. Samalla tavalla voidaan todeta myös kulmien $\angle GJI$ ja $\angle BCA$ yhtäsuuruus. Kulmasummalauseen 1.9 nojalla voidaan siis todeta, että $\angle ILH = \angle ABC$.

3.3. Annetun kolmion sisään piirretty ympyrä

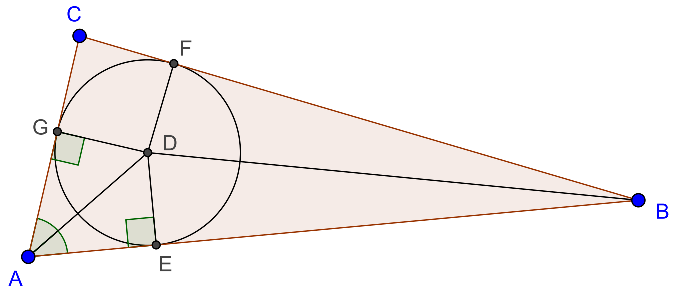
Seuraavassa tehtävässä käsitellään tilannetta, jossa annettuna on kolmio ja tavoitteena on piirtää ympyrä sen sisään.

Ratkaisu. Olkoon siis kolmio ΔABC, kuten kuvassa 3.5. Puolitetaan kolmion kulmat $\angle CAB$ ja $\angle CBA$ samaan tapaan kuin aiemmin tehtävässä 2.1. Kulmien puolittajajanat kohtaavat pisteessä D, koska kahden kulman puolikkaiden summa on puolet kulmien kokonais summasta, joka on lauseen 1.6 mukaan alle kaksi suoraa kulmaa.



Kuva 3.5. Kolmion kulman puolituksen konstruktio.

Piirtämällä pisteestä D jokaiselle kolmion sivulle normaali kuten tehtävissä 2.3 ja 2.4 saadaan kantapisteet F, G ja E. Väitetään nyt, että suorat DG, DE ja DF ovat halutun ympyrän säteitä ja että kolmion sivut ovat ympyrän tangentteja.



Kuva 3.6. Annetun kolmion sisään piiretyn ympyrän konstruktio.

Kuvan 3.6 mukaisen konstruktion nojalla pätee, että $\angle EAD = \angle GAD$ sekä kulmat $\angle DGA$ ja $\angle DEA$ ovat suorina kulmina yhtä suuret. Lisäksi pätee, että sivu AD on yhteinen kolmioille ΔAED ja ΔAGD, joten lauseen 1.13 KKS-säännön nojalla kolmiot ovat yhtenevät eli myös $DE = DG$. Samoin osoitetaan, että $DE = DF$.

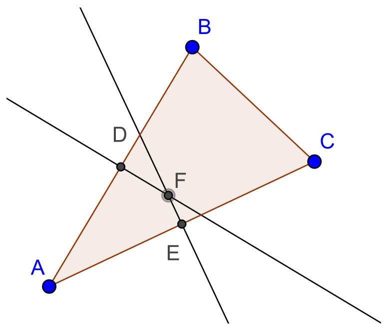
Näin ollen ympyrä kulkee pisteiden E, F ja G kautta ja koska kulmat näissä pisteissä ovat suoria niin lauseen 1.18 sekä määritelmän 3.2 nojalla kolmion ΔABC sivut ovat ympyrän tangentteja.

Kulmien puolittajien leikkaaminen on haastavin kohta perustella tässä tehtävässä. Tiedetäänkin, että Eukleides ei alkuperäisissä kirjoituksissaan perustele kulmien puolittajien leikkaamista.

3.4. Annetun kolmion ympäri piirretty ympyrä

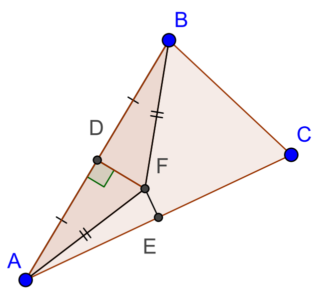
Viimeisenä tarkastelemme tilannetta, jossa annettuna on kolmio ja sen ympäri piirretään ympyrä. Tämän tehtävän ratkaisussa on *Alkeissa* hiukan puutteita, mutta tarkastellaan niitä myöhemmin.

Ratkaisu. Olkoon siis kolmio ΔABC ja sen sivuille AC ja AB konstruoidut keskinormaalit EF ja DF tehtävän 2.2 mukaisesti kuten kuvassa 3.7. Lisäksi keskinormaalien leikkauspiste on piste F. Osoitetaan, että piste F on halutun ympyrän keskipiste.



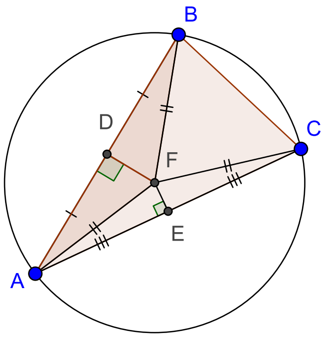
Kuva 3.7. Kolmion ΔABC sivujen AC ja AB keskinormaalit.

Tarkastellaan annettua kolmiota ΔABF, jolle pätee $AD = DB$ ja kulma $\angle ADF$ on suora, kuten kuvassa 3.8. Lisäksi suora DF on yhteinen kolmioille ΔADF ja ΔBDF, joten ne ovat yhtenevät SKS-säännön nojalla (lause 1.12). Näin ollen siis $BF = AF$.



Kuva 3.8. Kolmion sisään konstruoitu kaksi yhtenevää kolmiota.

Samaan tapaan voidaan osoittaa, että $CF = AF$, jolloin $AF = BF = CF$. Näin voidaan konstruoida ympyrä jonka keskipiste on F, kuten kuvassa 3.9.



Kuva 3.9. Kolmio ΔABC on ympyrän sisällä jonka keskipiste on F.

Ongelmana tässä tehtävässä on se, että alkuperäisissä teksteissä Eukleides ei perustele sitä leikkaavatko keskinormaalit toisensa [**1**, s.124]. Tämä on kuitenkin hyvin tärkeää tehtävän kannalta, koska se osoittaisi ympyrän keskipisteen olemassaolon. On oletettava, että tässä käsitellään ainoastaan euklidisen geometrian mukaisia tapauksia. Lisäksi on olennaista huomata, että ympyrän keskipiste voi sijaita annetun kolmion sisällä, reunalla tai ulkona sen mukaan, onko kolmio teräväkulmainen, suorakulmainen vai tylppäkulmainen. Aschan esittää asian seurauksessa sekä kuvasarjassaan, mutta alun perin keskipisteen sijainnin tarkastelu ei kuulunut osaksi *Alkeita* [**1**, s. 124]. Englannin kielisessä versiossa *Elements* ympyrän keskipisteen tapaukset on käsitelty erikseen [**2**, s. 114].

Edellä olemme tarkastelleet neljää ympyrään ja kolmioon liittyvää konstruktiotehtävää ja osoittaneet ne oikeiksi Eukleideen aksioomajärjestelmää hyväksi käyttäen. Jotta voisimme pohtia Eukleideen aksiomatiikan hyvyyttä, tarvitsemme työkaluksi jonkin muun järjestelmän. Seuraavaksi tutustumme menetelmään, jossa peruskäsitteitä ei määritellä vaan niiden väliset suhteet esitetään aksioomilla. Hilbertin geometria perustuu tämän menetelmän soveltamiseen, jota hän esitteli vuonna 1899 kirjassaan Grundlagen der Geometrie [**10**].

LUKU 4

Hilbertin aksioomajärjestelmä

Eukleideen jälkeen useat matemaatikot ovat yrittäneet aksiomatisoida euklidista geometriaa. Saksalainen David Hilbert 1800– ja 1900–lukujen vaihteessa kokosi aksioomajärjestelmän, josta tuli kuuluisin tunnettu euklidisen geometrian järjestelmä. Hilbert oli hyvin kiinnostunut järjestelmänsä riippumattomuudesta ja ristiriidattomuudesta, joten hänelle ei riittänyt pelkkä aksioomien valinta. Ero Eukleideen määrittämään järjestelmään on selvä, sillä Hilbertin aksioomajärjestelmä on paljon monimutkaisempi ja tarkempi. [**7**]. Hilbertin on kuultu toteavan aksioomajärjestelmästä osuvasti:

> One must be able to say at all times–instead of points, lines and planes–tables, chairs and beer mugs [**6**, s. 72].

Tällä lausahduksella hän varmasti ajoi takaa sitä, että ainoastaan aksioomien antamat ominaisuudet määrittävät pisteitä, suoria ja tasoja, joten ei ole väliä millä nimillä näitä määrittelemättömiä asioita kutsutaan. Kaikkea ei siis voi määritellä ja siksi nykyaikaisessa aksiomaattisessa järjestelmässä ensimmäisiä peruskäsitteitä ei määritellä vaan niiden väliset yhteydet esitetään aksioomina.

Niinkuin aiemmin totesimme todistaminen perustuu loogiseen päättelyyn. Looginen päättely taas koostuu äärellisestä määrästä todistettuja lauseita, joista yhdessä seuraa halutun lauseen todistus. On oletettava joitakin lauseita tosiksi, jotta tiettyjen lauseiden joukko ei olisi vain kokoelma tautologioita. Näitä oletettavia lauseita kutsutaan aksioomiksi [**7**, s. 8]. Eukleideen aksioomat, jotka hän itse nimesi postulaateiksi, eivät vaatineet perusteluja. Erityisesti Eukleideen neljää ensimmäistä aksioomaa pidettiin tosiasioina, joita ei voi tai edes tarvitse todistaa [**7**, s. 4]. Näin ei kuitenkaan aina ole vaan osa aksioomista voi vaikuttaa jopa ristiriitaisilta intuitioomme nähden. Tästä esimerkkinä on yhdensuuntaisuusaksiooma (EA5) 1.1, jonka esittelimme jo alussa ja johon palaamme vielä myöhemmin.

Yksittäisiin aksioomiin ei kohdistu varsinaisesti mitään erikoisvaatimuksia, kunhan peruskäsitteet ovat selvästi esillä. Tärkeää on, että aksioomien seuraukset eivät ole ristiriidassa keskenään. Mikäli näin olisi, voitaisiin kyseisistä aksioomasta päätellä loogisesti mikä tahansa lause. Esimerkiksi, jos aksioomat koostuisivat väitteistä, "jokaisella suoralla on tasan kaksi pistettä", "on olemassa suora" ja "jokaisella suoralla on äärettömän monta pistettä", niin teoria olisi täysin järjetön. Aksioomajärjestelmän täytyy siis olla ristiriidaton. [**7**]. Aksioomien ristiriidattomuuden osoittamiseksi on kehitetty keino, mallien käyttäminen. Tämä tarkoittaa sitä, että aksioomajärjestelmä on ristiriidaton, jos sillä on vähintään yksi *malli*, jossa sen kaikki aksioomat ovat tosia. Malli voi olla esimerkiksi jokin todeksi osoitettu lause tai esimerkkitehtävä, jonka avulla voidaan todeta tietyn aksioomajärjestelmän ristiriidattomuus. Matematiikassa tällainen malli on hyvä apuväline aksioomajärjestelmien tutkimiseen. Muodostamme myöhemmin mallin jonka avulla tutkimme Hilbertin aksioomajärjestelmää.

Aksioomajärjestelmän ongelma liittyy yleensä sen laajuuteen ja aksioomien asettamiseen. Mallin avulla voidaan tarkastella aksiooman tarpeellisuutta ja ristiriidattomuutta aksioomajärjestelmässä. Jos esimerkiksi voidaan muodostaa konkreettinen malli, joka on olemassa ja jossa järjestelmän aksioomat ovat voimassa, niin mallin avulla voidaan todeta askioomajärjestelmän ristiriidattomuus. Jos siis aksioomien välillä olisi ristiriitaisuuksia se näkyisi myös mallissa ristiriitana. Aksioomajärjestelmän laajuudessa pyritään siihen, että järjestelmässä ei ole ”turhia” aksioomia eli yhtään aksioomaa ei voida päätellä muista aksioomista. Seuraavaksi tarkastelemme Hilbertin aksioomia tarkemmin jaottelemalla ne sisällön mukaan neljään ryhmään liitännäisaksioomiin, välissäoloaksioomiin sekä janoja ja kulmia käsitteleviin yhtenevyysaksioomiin.

4.1. Hilbertin aksioomat

Hilbertin aksioomajärjetelmä sisältää sekä taso– että avaruusgeometrian, mutta avaruusgeometrian tarkastelu on jäännyt vähemmälle. Hilbert kuitenkin osoittaa muutamalla lauseella, että tasoa koskevat aksioomat yleistyvät myös avaruusgeometriaan. Peruskäsitteet *piste*, *suora* ja *taso* oletetaan tunnetuiksi. On myös hyvä huomata, että pisteen ja suoran välisen yhteyden ei tarvitse olla sama kuin joukko-opin vastaavassa relaatiossa. Riittää siis, että se toteuttaa Hilbertin aksioomat. Seuraavaksi esiteltävät Hilbertin aksioomat seuraavat Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään teosta Geometria [**1**, s. 9–28].

4.1.1. Hilbertin kolme ensimmäistä aksioomaa.

H1: Jos pisteet P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora, joka kulkee molempien pisteiden kautta.
H2: Suoralla on ainakin kaksi pistettä.
H3: On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

Ensimmäinen Hilbertin aksiooma on siis täysin sama kuin Eukleideen ensimmäinen aksiooma EA1. Osoitetaan seuraavaksi esimerkkitehtävän avulla mitä aiemmin esitetty keino *mallin* käyttämisestä aksioomajärjestelmän ristiriidattomuuden perustelussa tarkoittaa [**1**, s. 10]. Tarkastellaan siis Hilbertin kolmea ensimmäistä aksioomaa ja osoitetaan ne mallin avulla ristiriidattomiksi. Oletetaan, että joukko-opin perusteet sekä lukujoukkojen $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^n$ ominaisuudet ovat tunnettuja.

TEHTÄVÄ 4.1. Etsitään aksioomille (H1)–(H3) malli, jossa ne ovat tosia.

RATKAISU. **Malli**: Olkoon joukko $\{A,B,C\}$, missä A, B, C ovat eri alkioita. Sovitaan, että alkiot ovat pisteitä ja joukot $\{A,B\}$, $\{A,C\}$ ja $\{B,C\}$ suoria. Lisäksi, olkoon piste P suoralla l jos $P \in l$. [**7**, s.10].
Voidaan suoraan todeta, että kahden eri pisteen kautta kulkee aina tasan yksi suora, jolloin (H1) pätee ja jokaisella suoralla on tasan kaksi pistettä eli (H2) pätee. Lisäksi mikään mallin suorista ei kulje kaikkien pisteiden A, B, C kautta, joten (H3) pätee. Siispä kyseinen malli toteuttaa aksioomat (H1)–(H3) ja ne ovat ristiriidattomia.

Edellä tehtävässä 4.1 esitellään siis malli ja sen käyttö hyvin yksinkertaisen esimerkin avulla. On hyvä huomata, että tehtävän 4.1 mallissa ei ole lainkaan yhdensuuntaisia suoria. Näin ollen mallissa ei toteudu yhdensuuntaisuusaksiooma eikä myöskään Eukleideen toinen aksiooma janan jatkamisesta.

Mallin avulla voidaan myös osoittaa muita aksioomajärjestelmän ominaisuuksia. Riippumattomuus järjestelmässä voidaan osoittaa käymällä jokainen aksiooma erikseen läpi. Tällöin jokaista aksioomaa varten muodostetaan malli, jossa se on voimassa ja erilainen malli, jossa se ei ole voimassa. Täydellisyys taas voidaan osoittaa mallien avulla siten, että osoitetaan aksioomia koskevat mallit keskenään isomorfisiksi.

Seuraavaksi haluamme määritellä tavallisen kolmion ΔABC aksioomajärjestelmässä, jotta tämä olisi mahdollista tarvitsemme lisää aksioomia. Lisäksi määrittelemme peruskäsitteen *välissäolo*, joka tarkoittaa, että "piste B on pisteiden A ja C välissä", lyhyemmin $A * B * C$ [**7**, s. 12].

4.1.2. Hilbertin aksioomat (H4)–(H7). Seuraavien aksioomien ns. *välissäoloaksioomien* tulee olla voimassa yhdessä edellä esiteltyjen Hilbertin kolmen ensimmäisen aksiooman sekä peruskäsitteiden kanssa.

H4: Jos piste B on pisteiden A ja C välissä, niin ne ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.

H5: Jos pisteet A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.

H6: Jos A, B ja C ovat eri pisteitä samalla suoralla, niin täsmälleen yksi seuraavista on voimassa: $A * B * C$, $A * C * B$ tai $B * A * C$.

Ennen aksiooman (H7) esittelyä tarkennamme siinä käytettävää merkintätapaa [**7**, s. 15]. Haluamme merkitä lyhyesti sen, että pisteet A ja B ovat samalla puolella suoraa l ja merkitsemme ABl tai BAl, jos pisteet ovat samat tai suora l ei sisällä janan AB pisteitä. Muussa tapauksessa pisteet A ja B ovat eri puolilla suoraa l ja merkitsemme BlA tai AlB.

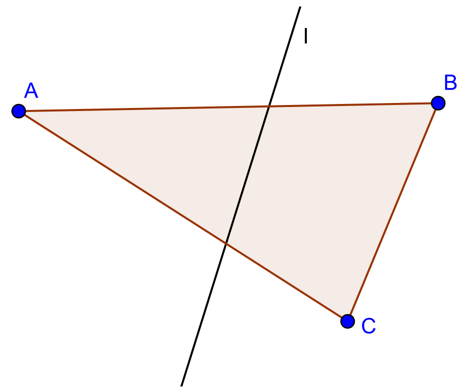
H7: Jos suora l ei kulje pisteiden A, B ja C kautta niin pätee seuraavat:
(1) jos ABl ja BCl, niin ACl
(2) jos AlB ja BlC, niin ACl.

Seuraamme Hilbertin aksiomatiikan esittämisessä Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään luentomonistetta Geometria [**7**], jossa aksiooma (H7) on muotoiltu kuten edellä. Alkuperäisessä Hilbertin aksiomatiikassa tämän aksiooman paikalla on kuitenkin Moritz Paschin[1] mukaan nimetty aksiooma. Pasch muotoili aksiooman vuonna 1882 ja se on esitetty Nevanlinnan teoksessa Geometrian perusteet [**5**, s. 14] lähes seuraavasti:

Aksiooma 4.2 (Paschin aksiooma). *Olkoon pisteet A, B ja C, jotka eivät ole samalla suoralla sekä suora l, joka ei kulje näiden pisteiden kautta. Jos suoralla l on piste P pisteiden A ja B välissä, niin suoralla l on piste Q, joka täyttää ehdon $A * Q * C$ tai $B * Q * C$.*

Paschin aksiooma kuuluu niin sanottuihin järjestysaksioomiin ja määrittelee siis suorien leikkaamisen, mikä Eukleideen järjestelmässä jää määrittelemättä. Aksiooma siis käytännössä ilmaisee, että jos suora työntyy kolmion sisään, se tulee myös

[1] Moritz Pasch (1843–1930) oli saksalainen erityisesti geometriaan erikoistunut matemaatikko.



Kuva 4.1. Paschin aksiooman 4.2 graafinen havainnollistus.

sieltä ulos, mitä tarvitaan erityisesti tutkittaessa pisteiden järjestystä suoralla. Ongelma on kuitenkin se, että Hilbertin aksiomatiikka ei ole vielä määritellyt kolmiota, joten tämä on vain intuitiivinen päätelmä. Paschin aksiooma on ekvivalentti aksiooman (H7) kanssa, joka on vain hiukan yksinkertaistettu versio alkuperäisesti Paschin aksioomasta. Oleellisesti aksioomasta seuraa se, että pisteitä, suoria ja tasoja on ääretön määrä. Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään teoksessa Geometria Paschin aksiooma on laajennettu kolmioille päteväksi Paschin lauseeksi, jonka todistamiseen käytetään aksioomaa (H7). Esittelemme seuraavaksi kyseisen lauseen ja sen todistuksen, joka seuraa Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään [**7**, s. 20] muotoilemaa todistusta.

LAUSE 4.3 (Paschin lause). *Olkoon kolmio ΔABC ja suora $l \neq \overleftrightarrow{AB}$, joka leikkaa sivua AB pisteessä D ja $A \neq D \neq B$. Silloin suora l leikkaa myös sivua AC tai BC. Jos suora l ei kulje kärjen C kautta, leikkaa suora l vain toista sivuista AC tai BC.*

TODISTUS. Jos suora l kulkee pisteen C kautta, niin lause on selvä. Tarkastellaan tapausta, jossa suora l ei siis kulje pisteen C kautta. Koska piste D on pisteiden A ja B välissä ja suora l kulkee pisteen D kautta, niin AlB.
Tällöin pätee joko AlC tai ACl. Ensimmäisessä tapauksessa suora l leikkaa janaa AC, jolloin aksiooman (H7) nojalla pätee BCl, joten suora l ei leikkaa janaa BC ja lause pätee. Jälkimmäisessä tapauksessa suora l ei leikkaa janaa AC. Lause [**7**, s. 17,L2.3.2] sanoo että, jos ABl ja BlC, niin AlC, jolloin tämän lauseen nojalla ClB ja lause pätee. □

Kysymys siitä kumpi tavoista on parempi, esittää aksiooma (H7) kuten me sen teemme vai Paschin aksioomana kuten alkuperäisessä Hilbertin aksiomatiikassa, on mielenkiintoinen. Tärkeintä on huomioida se, että aksioomaa pidetään siis selviönä ja lause todistetaan, joten olisi hyvä että aksiooma on mahdollisimman yksinkertainen. Tärkeintä teorian kannalta on kuitenkin se, että Paschin aksiooma esiintyy jossain muodossa, sillä vasta se asettaa äärelliset geometriat mahdottomiksi. Lisäksi on hyvä huomata, että Paschin lause ja aksiooma ovat siis eri asia. Monet tunnetutkin matemaatikot ovat niitä väärin käyttäneet, josta esimerkkinä Greenberg teoksessaan Euclidean and Non-Euclidean Geometries [**6**, s. 80].

4.1.3. Hilbertin aksioomat (H8)–(H10). Otetaan käyttöön vielä yksi peruskäsite *yhtenevyys* ($\cong$), joka on tullut esille jo aiemmin, mutta nyt se on osa Hilbertin aksioomajärjestelmää. Seuraavat kolme aksioomaa ovat erityisesti janojen yhtenevyyteen liittyviä aksioomia.

H8: Olkoot pisteet A ja B eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ mielivaltainen puolisuora. Tällöin on täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.
H9: Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.
H10: Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

Kolme edellistä aksioomaa asettavat janan yhtenevyydelle tarkat rajoitteet. Konkreettisissa malleissa janojen yhtenyys voi tarkoittaa suoraan janan pituutta, mutta näin ei aina ole.

4.1.4. Hilbertin aksioomat (H11)–(H13). Seuraavat Hilbertin aksioomat ovat myös yhtenevyysaksioomia, mutta ne liittyvät erityisesti kulmien yhtenevyyteen.

H11: Olkoon kulma $\angle ABC$ ja piste P, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overline{DE}$ ja $\angle ABC \cong \angle FDE$
H12: Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.
H13: (SKS–sääntö 1.12) Olkoot kolmiot ΔABC ja ΔDEF siten, että $\angle BAC \cong \angle EDF$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin siis $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Aksiooma (H13) on siis sama kuin SKS-sääntö, jonka Eukleides asetti lauseeksi. Eukleides siis pyrki todistamaan SKS-säännön kuten lauseen, minkä totesimme aiemmin jo kyseenalaiseksi. SKS–sääntö on hyödyllistä ottaa aksioomaksi ensinnäkin edellisen nojalla ja lisäksi se antaa syvällistä tietoa kolmioiden yhtenevyydestä. SKS–sääntö on riippumaton muista Hilbertin aksioomista sekä myös Eukleideen yhdensuuntaisuusaksioomasta. Näin ollen aksiooman (H13) nojalla on helppo todistaa muita kolmioiden yhtenevyyteen liittyviä tuloksia. Esimerkiksi eräs seuraus SKS–säännöstä on seuraava lause 4.4 [**6**, s. 85].

LAUSE 4.4. *Olkoon kolmio ΔABC ja jana $DE \cong AB$, tällöin on täsmälleen yksi piste F halutulta puolelta suoraa $\overleftrightarrow{DE}$ siten, että $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.*

TODISTUS. On siis täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $\angle CAB \cong \angle FDE$. Lisäksi piste F voidaan valita puolisuoralta $\overrightarrow{DF}$ aksioomien (H11) ja (H8) nojalla siten, että $AC \cong DF$. Näin ollen SKS-säännön (H13) nojalla $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. □

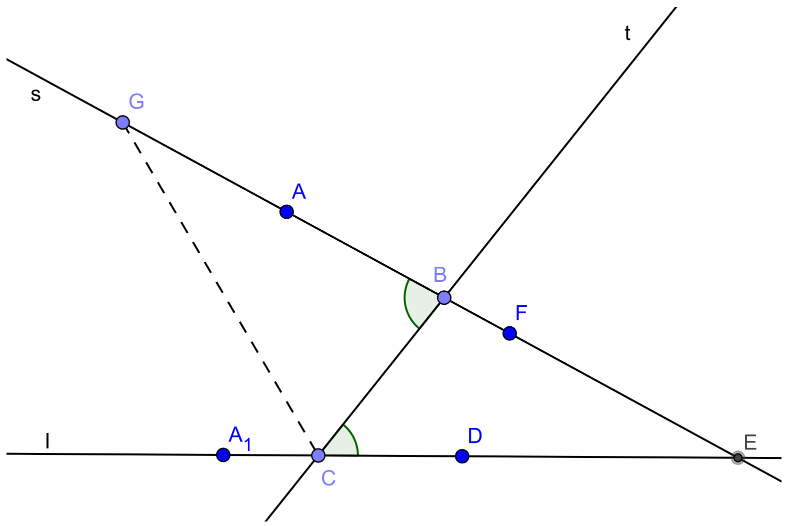
Edellä olemme käsitelleet yhteensä 13 Hilbertin aksioomaa ja esittäneet niistä joitakin tarkennuksia ja huomioita. Näiden aksioomien pohjalta rakentuu Hilbertin teoria.

4.1.5. Hilbertin teorian avulla todistaminen. Tarkastellaan tässä kappaleessa Hilbertin teorian rakentumista sekä todistamista aksioomien avulla.

Hilbert rakentaa teoriansa peruskäsitteistä, mutta ei varsinaisesti määrittele mitä ovat pisteet, suorat ja tasot. Hän jakaa aksioomansa viiteen ryhmään liitännäisaksioomiin, järjestysaksioomiin, yhtenevyysaksioomiin, yhdensuuntaisuusaksioomaan ja jatkuvuusaksioomiin. Näistä olemme edellä käsitelleet kolme ensimmäistä. Kaikki Hilbertin järjestelmän aksioomat ovat koordinaattigeometrian mallin avulla todistettavissa riippumattomiksi toisistaan. Hän tarkentaa teoriaansa lauseilla ja määritelmillä sitä mukaa kun aksioomajärjestelmä kasvaa ja mahdollistaa lauseiden todistamisen. Todistettuja lauseita hän käyttää laajentaakseen teoriaansa eteenpäin.

Seuraavaksi pyrimme todistamaan tavallisen vuorokulmalauseen Hilbertin teorian pohjalta [**1**, s. 42]. Vertaamme tätä todistusta myöhemmin Eukleideen hiukan suppeampaa aksiomatiikkaa perustuvaan todistukseen.

LAUSE 4.5 (Vuorokulmalause). *Jos kahta suoraa leikkaa sama suora ja muodostuvat vuorokulmat ovat yhtä suuret, niin nämä kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset.*



Kuva 4.2. Lauseen 4.5 konstruktio.

TODISTUS. Olkoon kulma $\angle ABC \cong \angle DCB$. Tehdään vastaoletus, että suorat $\overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{AB}$ leikkaavat pisteessä E. Lisäksi piste E on samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{BC}$ kuin pisteet D ja F. Olkoon piste G yhtenevyysaksiooman (H8) nojalla puolisuoralla $\overrightarrow{BA}$ siten, että $BG \cong CE$. Jana BC on yhtenevä itsensä kanssa, jolloin SKS-säännön (H13) nojalla $\Delta BCE \cong \Delta CBG$. Erityisesti siis, $\angle EBC \cong \angle GCB$. Koska kulma $\angle EBC$ on kulman $\angle GBC$ vieruskulma, niin yhtenevyysaksiooman (H11) ja väitelauseen [**7**, s. 30,L2.4.5], jonka mukaan yhtenevien kulmien vieruskulmat ovat yhtenevät, nojalla kulman $\angle GCB$ täytyy olla kulman $\angle ECB$ vieruskulma. Tämä tarkoittaisi sitä, että piste G olisi suoralla $\overleftrightarrow{CD}$ ja suorilla $\overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{AB}$ olisi tällöin kaksi yhteistä pistettä G ja E. Tämä on kuitenkin ristiriidassa väitelauseen [**6**, s. 51,P2.1] kanssa, jonka mukaan jos on olemassa kaksi eri suoraa, jotka eivät ole yhteneviä, niin niillä on täsmälleen yksi yhteinen leikkauspiste. Suorat $\overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{AB}$ ovat siis yhdensuuntaiset. □

Edellisen lauseen 4.5 todistus perustuu siis Hilbertin aksioomiin ja niiden perusteella osoitettuihin lauseisiin. Koska emme käsittele Hilbertin teoriaa kokonaisuudessaan olen todistuksessa viitannut Greenbergin teokseen Euclidean and Non-Euclidean Geometries [**6**], jotta todistaminen olisi sujuvampaa.

Seuraavassa luvussa tarkastelemme Eukleideen ja Hilbertin aksiomatiikkaa syvällisemmin ja otamme käyttöön Eukleideen viidennen aksiooman eli yhdensuuntaisuusaksiooman. Ennen sen käyttöönottoa vertailemme edellistä vuorokulmalauseen todistusta Aschanin suomenkieliseen versioon Eukleideen vuorokulmalauseen todistuksesta [**1**, s. 42]. Englanninkielisessä Alkeiden käännöksessä todistus on käyty hieman tarkemmin läpi, joten poimimme sieltä muutamia yksityiskohtia [**2**, s. 30–31].

Eukleideen versio vuorokulmalauseen todistuksesta. Jos suorat $\overleftrightarrow{AF}$ ja $\overleftrightarrow{A_1D}$ eivät ole yhdensuuntaiset, niin yhdensuuntaisuuden määritelmän mukaan on olemassa suorien leikkauspiste E, joka on jommalla kummalla puolella leikkaavaa suoraa $\overleftrightarrow{BC}$, esimerkiksi samalla puolella kuin piste D, kuten kuvassa 4.2. Tällöin syntyy kolmio ΔEBC, jossa ulkokulma $\angle ABC$ on yhtäsuuri kuin sisäkulma $\angle BCE$, mikä on vastoin ulkokulmalausetta 1.5 ja siis mahdoton. Tämä osoittaa, että suorat $\overleftrightarrow{AF}$ ja $\overleftrightarrow{A_1D}$ eivät kohtaa pisteiden F ja D puolella. Samaan tapaan voidaan todistaa, että ne eivät kohtaa myöskään pisteiden A ja C puolella. Puolisuorat eivät siis kohtaa kummallakaan puolella ja ovat siis yhdensuuntaiset, joten suorat $\overleftrightarrow{AF}$ ja $\overleftrightarrow{A_1D}$ ovat yhdensuuntaisuuden määritelmän nojalla yhdensuuntaiset. Täten, jos suora leikkaa kahta muuta suoraa muodostaen niiden kanssa kaksi yhtä suurta kulmaa, niin nämä kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset. Kuten haluttiinkin. □

Molemmissa todistuksissa lähdetään liikkeelle antiteesin muodostamisesta, mikä onkin tässä tapauksessa järkevintä. Aschan ei suomennuksessaan todista tai edes mainitse leikkaavan suoran toista puolta, joten se jää ehdottomasti vajaaksi. Englanninkielisessä versiossa tämä on mainittu [**2**, s. 31]. Eukleideen järjestelmään perustuva todistus pohjautuu yhdensuuntaisuuden määritelmään sekä ulkokulmaepäyhtälöön. Toisaalta, tarkasteltaessa ulkokulmaepäyhtälölauseen 1.5 todistusta voimme havaita, että se on oikeastaan yhtäpitävä vuorokulmalauseen kanssa. Tällöin voimme tarkastella enemmän lauseen 1.5 todistusta kuin itse vuorokulmalauseen todistusta. Lauseen 1.5 todistuksen alussa on kiinnitettävä huomiota siihen, että suorien yhtäsuuruudet perustuvat konstruktion tarkasteluun. Hilbert taas perustelee yhtäsuuruudet huolellisesti käyttäen aksioomaa (H8). Seuraavassa vaiheessa molemmissa todistuksissa käytetään SKS-sääntöä, jonka Hilbert on asettanut aksioomaksi (H13) ja Eukleides huolimattomasti todistetuksi lauseeksi 1.12. Lauseen 1.5 todistuksessa halutut kulmat saadaan yhtäsuuriksi käyttämällä ristikulmien yhtenevyyttä, kun taas Hilbert käyttää todistuksessa vieruskulmien yhtenevyyttä eli aksioomaa (H11) sekä propositiota. Lopuksi Hilbert käyttää vielä toista propositiota, jonka sisältö on lähes sama kuin Alkeissa käytetty yhdensuuntaisuuden määritelmä. Näin ollen Eukleideen vuorokulmalauseen todistus vaatii ehdottomasti lauseen 1.5 käyttöä sekä loppupäätelmän tekeminen yhdensuuntaisuuden määritelmää. Hilbert taas todistaa vuorokulmalauseen ilman ulkokulmaepäyhtälöä 1.5, käyttämällä loogisella tavalla aksioomajärjestelmää.

Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan Eukleideen sekä Hilbertin aksiomatiikan yksityiskohtia. Erityisesti perehdymme yhdensuuntaisuusaksioomaa ja sen mielenkiintoiseen historiaan osana aksioomajärjestelmää.

LUKU 5

Eukleideen ja Hilbertin aksiomatiikkaa

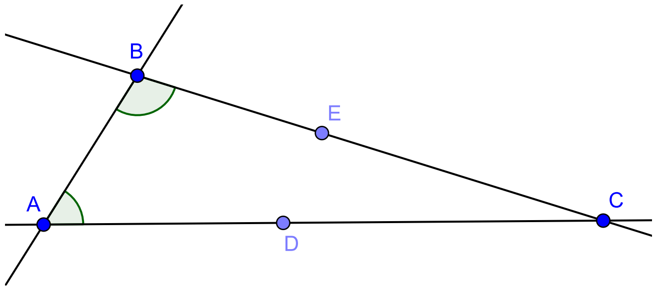
5.1. Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma (EA5)

Luodaksemme aksiomatiikan, jolla pystytään toteuttamaan euklidista geometriaa kokonaisuudessaan, tarvitsemme vielä yhden merkittävän aksiooman. Kyseessä on Eukleideen viides aksiooma eli yhdensuuntaisuusaksiooma, joka on tuhansia vuosia aiheuttanut päänvaivaa matemaatikoille. Syy tähän on kyseisen aksiooman yhteys muihin aksioomajärjestelmän aksioomiin. Tarkoituksenahan on, että kaikki aksioomat olisivat toisistaan riippumattomia, mutta onko Eukleideen viides aksiooma riippumaton muista aksioomista [**6**, s. 21]. Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooman voidaan ajatella olevan käänteistulos lauseelle 1.6 ja hän käytti sitä sujuvasti esimerkiksi käänteisen vuorokulmalauseen 1.7 todistamisessa. Eukleideen muotoilemasta yhdensuuntaisuusaksioomasta on lukuisia versioita, joista eräs vanhimmista versioista on Procluksen[1] esittämä paralleeliaksiooma. Yhdensuuntaisuusaksiooma ja Procluksen aksiooma ovat sanamuodoltaan hiukan erilaiset, mutta sisällöltään yhtäpitävät. Hilbert tarvitsi yhdensuuntaisuusaksioomaa avuksi joidenkin yhtenevyysaksioomien seurauksien todistamiseen. Procluksen aksiooma on oleellisesti sama, kuin Hilbertin käyttämä yhdensuuntaisuusaksiooma. Eukleideen ja Hilbertin aksiomatiikka eroaa siis yhdensuuntaisuusaksiooman osalta hiukan. Tämä ei kuitenkaan ole ratkaiseva eroavaisuus näiden kahden aksioomajärjestelmän välillä. Tarkastellaan kuitenkin yhdensuuntaisuusaksiooman kahta eri muotoa. Seuraavaksi esitettävä yhdensuuntaisuusaksiooma on nykyaikainen versio Eukleideen alkuperäisestä viidennestä aksioomasta [**1**, s. 33].

Aksiooma 5.1 (Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma (EA5)). *Jos suora $\overleftrightarrow{AB}$ leikkaa kahta muuta suoraa $\overleftrightarrow{AD}$ ja $\overleftrightarrow{BE}$ pisteissä A ja B siten, että D ja E ovat samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ ja kulmat $\angle BAD$ ja $\angle ABE$ ovat yhteensä alle kaksi suoraa kulmaa niin suorat $\overleftrightarrow{AD}$ ja $\overleftrightarrow{BE}$ leikkaavat toisensa ja leikkauspiste C on samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ kuin pisteet D ja E.*

Tämä alkuperäinen versio vaatii runsaasti lisää määritelmiä, jotta sen ymmärtäminen olisi mahdollista. Tästä syystä tutkimme seuraavaksi hiukan yksinkertaisempaa ja Procluksen aksiooman verraten tuoreempaa yhdensuuntaisuusaksiooman versiota eli Playfairin[2] aksioomaa.

[1]Proclus Diadochus (411–485 jaa.) oli kreikkalainen matemaatikko
[2]John Playfair (1748–1819) oli Skotlantilainen tutkija ja matemaatikko.



Kuva 5.1. Yhdensuuntaisuusaksiooman 5.1 konstruktio.

5.1.1. Playfairin aksiooma. Playfairin aksiooma on siis yksinkertaisempi versio, mutta silti yhtäpitävä Alkeissa esitetyn Eukleideen viidennen aksiooman kanssa. Playfair julkaisi euklidiselle geometrialle olennaisen yhdensuuntaisuusaksioomansa vuonna 1795 [**6**, s. 19]. On kuitenkin hyvä huomata, että kyseessä on aiemmin mainitsemani Procluksen aksiooma eli paralleeliaksiooma, jolle käytämme jatkossa nimitystä Playfairin aksiooma. Seuraava aksiooma 5.2 on myös Hilbertin käyttämä yhdensuuntaisuusaksiooma.

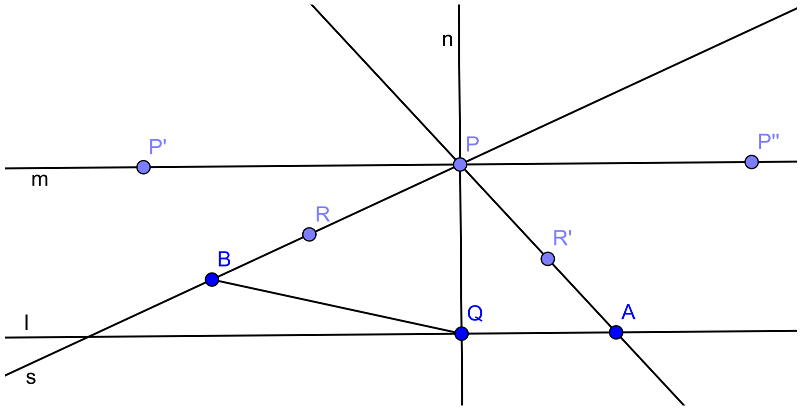
Aksiooma 5.2 (Playfairin aksiooma). *Olkoon suora l ja piste P, joka ei ole suoralla l. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi suora m, joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran l kanssa.*

Playfairin aksiooma on siis aika turvallisen kuuloinen, mutta ei kuitenkaan yhtä ilmeinen kuin muut Eukleideen aksioomat EA1–EA4. Eukleideen kaksi ensimmäistä aksioomaa muodostuvat suoran piirtämisen avulla, kolmas aksiooma taas ympyrän piirtämisen pohjalta. Neljäs aksiooma on vähemmän ilmeinen kuin aiemmat abstraktiot, mutta sekin on selvä tarkasteltaessa kulmien mittaamista. Viides aksiooma on erilainen, koska emme voi piirtäen jatkaa suoria loputtomasti, emme voi myöskään olla varmoja leikkaavatko suorat toisiaan jossain pisteessä.

Ainoa vaihtoehto on tarkistaa yhdensuuntaisuus epäsuorasti käyttämällä muita perusteita kuin yhdensuuntaisuuden määritelmää. Eräs vaihtoehto on, että piirretään poikittainen suora ja mitataan sisäkulmat samalta puolelta poikittaista suoraa. Tällöin, jos sisäkulmien summa on alle kaksi suoraa kulmaa niin suorat leikkaavat toisensa mitattujen kulmien puolella. Ongelmana on, että tämä ehdotus osoittautuu yhteneväksi Eulkeideen yhdensuuntaisuusaksiooman kanssa. Emme siis voi käyttää kyseistä ehdotusta osoittamaan yhdensuuntaisuusaksioomaan paikkansapitävyyttä. Aschan antaa ymmärtää, että Eukleides tiedosti tämän ongelman, koska siirsi tarkastelua kunnes sai todistettua käänteisen vuorokulmalauseen [**1**, s. 43].

Aksiooman pitäisi olla mahdollisimman yksinkertainen ja intuitiivisesti selvä, jotta kukaan ei voi epäillä sen paikkansapitävyyttä. Yhdensuuntaisuusaksiooma on kuitenkin ollut alusta asti kyseenalainen. Todistusyrityksiä Playfairin aksioomalle on lukuisia ja eräs niistä on Legendren[3] todistus 1700–luvulta. Tarkastelemme tätä todistusta tarkemmin siitä näkökulmasta, miten Hilbertin aksioomajärjestelmä voisi parantaa todistusta. Todistus on esitetty kokonaisuudessaan Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään kirjoittamassa luentomonisteessa Geometria [**7**, s. 5–6].

[3]Adrien-Marie Legendre (1752–1833) oli ranskalainen matemaatikko.



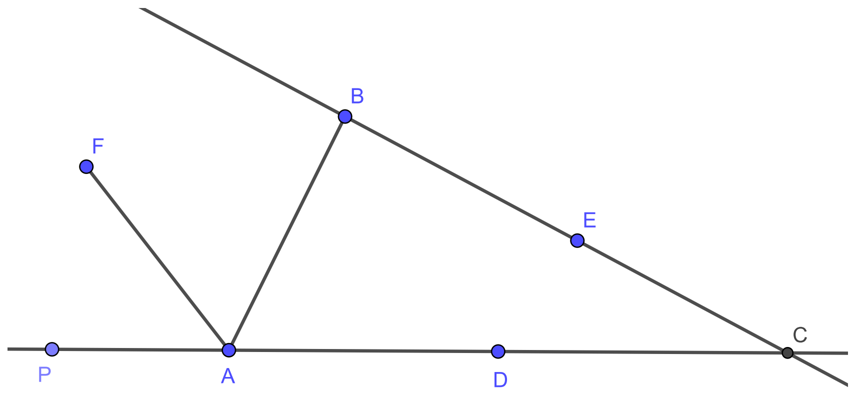
Kuva 5.2. Legendren todistusyrityksen apukonstruktio.

Todistus lähtee liikkeelle suoran l ulkopuolisen pisteen P kautta piirretyn normaalin n konstruoimisesta sekä tälle normaalille normaalin m konstruoimisesta pisteeseen P. Tällä konstruoinnilla on osoitettu suorien l ja m yhdensuuntaisuus ja perusteluna on käytetty suorien l ja m yhteistä normaalia n. Käytössä on kuitenkin vain aiemmin mainitut Eukleideen perusolettamukset ja määritelmät sekä tietysti aksioomat EA1–EA4. Tällöin monikin asia jo todistuksen alussa herättää epäilyksiä. Suurimmat ongelmat aiheutuvat normaalin määritelmästä tai määrittelemättömyydestä, jotta normaali olisi hyvin määritelty vaatii se erityisesti Hilbertin aksioomien (H11), (H8) ja (H7) käyttöä [**7**, s. 38]. Nämä kolme Hilbertin aksioomaa takaavat normaalin olemassaolon ja yksikäistteisyyden.
Käytössä ovat siis ainoastaan Eukleideen aksioomat EA1–EA4 sekä perusolettamukset, joiden avulla pyritään Legendren todistuksen seuraavassa vaiheessa osoittamaan halutun yhdensuuntaisen suoran m yksikäsitteisyys. Ensinnäkin Eukleideen aksioomat eivät kerro, että suoralla m on olemassa toinen piste $P' \neq P$, jonka toteamiseen tarvitaan aksioomaa (H2). Lisäksi aksiooman (H5) nojalla saadaan vielä kolmaskin piste P'' halutulle suoralle sekä osoitettua, että piste P on näiden kahden pisteen välissä. Välissäolosta Eukleideen aksioomat eivät sano oikeastaan mitään, joten aksioomat (H4)–(H7) ovat tärkeitä välineitä tutkittaessa suoran ja pisteiden suhdetta toisiinsa. Seuraavaksi Legendre valitsee pisteen R suoralta s suorien l ja m välistä, missä suora s kulkee pisteen P kautta, mutta $s \neq \overleftrightarrow{PQ}$ $(Q \notin m)$ ja $s \neq m$. Aksiooman (H7) nojalla tämä on mahdollista ja saadaan RQm. Tällöin siis piste R on joko kulman $\angle P'PQ$ tai kulman $\angle P''PQ$ sisässä. Lisäksi, jotta toiselta puolelta normaalia voidaan valita piste R' tarvitaan aksioomien (H5) ja (H11) tietoja siitä, että muodostuvat kulmat $\angle R'PQ$ ja $\angle RPQ$ ovat todella yhtenevät. Seuraavassa kohdassa Legendre väittää, että jos suora l leikkaa kyljen PR niin se leikkaa myös suoraa s, mikä sinänsä EA1 nojalla vaikuttaisi selvältä. Tässä Legendre kuitenkin olettaa, että suora l leikkaa myös kyljen $\overrightarrow{PR'}$ eli toisinsanoen suora l leikkaisi välttämättä ainakin toista kolmion $\angle RPR'$ kyljistä. Tämä on kuitenkin vaarallinen kehäpäätelmä, sillä paralleeliaksiooma ei ole vielä voimassa ja tuhoaa siten koko todistuksen. Neutraalissa geometriassa eli geometriassa, jossa ei oleteta Eukleideen viidettä asioomaa, tämä ei pidä paikkansa. Tarkastellaan kuitenkin vielä lopputodistusta ja lopuksi sitä saataisiinko kehäpäätelmä jotenkin korjattua.

Todistus jatkuu siten, että Legendre haluaa etsiä pisteen B puolisuoralta $\overrightarrow{PR}$. Erityisesti siis niin, että $PB = PA$, missä piste A on puolisuoran $\overrightarrow{PR'}$ ja suoran l leikkauspiste. Aksiooman (H8) nojalla piste B voidaan tosiaan valita todistuksessa halutulla tavalla, mutta ainoastaan aksiooma EA1 ei siihen riitä kuten Legendre väittää. Hilbertin aksioomajärjestelmässä SKS-sääntö on asetettu aksioomaksi (H13), joten kulmien yhtäsuuruudet on helposti osoitettavissa tällä aksioomalla. Eukleides taas asetti SKS-säännön lauseeksi ja yritti todistaa sitä aksioomien avulla, mikä ei kuitenkaan ole mahdollista niinkuin tutkielman alussa jo totesimme [**6**, s. 21]. Viimeisenä ongelmana todistuksessa ovat kulman $\angle BQP$ suorakulmaisuus sekä puolisuorien vastakkaisuudet, jotka Legendre toteaa vain suorien kulmien avulla todeksi. Kulmien $\angle AQP$ ja $\angle BQP$ yhteneväisyydestä seuraa helposti, että myös kulma $\angle BQP$ on suora. Vastakkaisuuden osoittaminen taas vaatii hiukan perusteluja, missä olennaista on suorien kulmien yhtenevyys sekä aksioomat (H7) ja (H11). Näin olemme päässeet Legendren todistuksen loppuun ja tarkennettavaa todella löytyi. Huomasimme todistuksessa perustavanlaatuisen ongelman, kehäpäätelmän.
Legendren todistuksessa on siis aukko, jota ei voidakaan korjata [**6**, s. 23]. Hilbertin tai muidenkaan aksioomien nojalla ei ole mahdollista todistaa Playfairin aksioomaa todeksi neutraalissa geometriassa. Playfairin aksiooma ei kuitenkaan ole ristiriidassa muiden Hilbertin aksioomien kanssa, sillä koordinaattigeometria toteuttaa muiden Hilbertin aksioomien tapaan myös Playfairin aksiooman [**7**, s. 10]. Mikäli kuitenkin oletamme Playfairin aksiooman todeksi ja asetamme sen siis osaksi aksioomajärjestelmää, saamme todistettua Eukleideen viidennen aksiooman.

5.1.2. Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooman (EA5) pätee. Näytetään tässä kappaleessa Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään teosta Geometria [**7**, s. 84] mukaillen, että aiemmin esitetty Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma 5.1 pätee kun käytössä on Hilbertin aksioomien lisäksi Playfairin aksiooma 5.2. Osoitetaan väite myös toisinpäin eli, jos Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma on voimassa, niin Playfairin aksiooma pätee.

TODISTUS. Oletetaan siis Playfairin aksiooma todeksi. Olkoon pisteet A, B, E ja D kuten kuvassa 5.3. Valitaan piste P siten, että $P*A*D$. Tällöin lauseen 1.3 nojalla kulmat $\angle PAB$ ja $\angle BAD$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa. Lisäksi, aksiooman 5.1 oletusten nojalla saadaan, että kulma $\angle EBA$ on vähemmän kuin kulma $\angle PAB$. Sisäkkäisten kulmien määritelmän nojalla kulman $\angle PAB$ sisällä on piste F siten, että $\angle EBA \cong \angle BAF$. Tällöin aksiooman (H7) ja oletusten $PF\overleftrightarrow{AB}$, $P\overleftrightarrow{AB}D$ ja $DE\overleftrightarrow{AB}$ nojalla $F\overleftrightarrow{AB}E$. Vuorokulmalauseen 4.5 nojalla suorat $\overleftrightarrow{AF}$ ja $\overleftrightarrow{BE}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska piste F on kulman $\angle PAB$ sisällä niin $\overleftrightarrow{AF} \neq \overleftrightarrow{AP}$, jolloin Playfairin aksiooman 5.2 nojalla suora $\overleftrightarrow{AP}$ ei voi olla yhdensuuntainen suoran $\overleftrightarrow{BE}$ kanssa. Suora $\overleftrightarrow{AP}$ leikkaa siis suoraa $\overleftrightarrow{BE}$. Olkoon tämä leikkauspiste C. Näytetään vielä, että $CD\overleftrightarrow{AB}$ ja $CE\overleftrightarrow{AB}$. Tiedetään, että $ED\overleftrightarrow{AB}$, joten riittää näyttää $CD\overleftrightarrow{AB}$. Tehdään antiteesi $C\overleftrightarrow{AB}D$. Koska $P\overleftrightarrow{AB}D$, niin $PC\overleftrightarrow{AB}$, joten $\angle CAB = \angle PAB$. Lisäksi pätee $C\overleftrightarrow{AB}E$, joten $C*B*E$. Tällöin soveltamalla ulkokulmaepäyhtälöä 1.5 kolmioon ΔCAB saadaan, että $\angle CAB$ on pienempi kuin kulma $\angle ABE$. Tällöin kulma $\angle PAB$ on pienempi kuin kulma $\angle EBA$, mikä on ristiriita aiemmin todetun kanssa ja koska tällöin kulma $\angle ABE$ olisi pienempi kuin se itse. $\square$



Kuva 5.3. Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooman todistus.

Edellä todistimme, että Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma pätee, kun Playfairin aksiooma on voimassa. Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta toisinpäin. Osoitetaan siis, että Playfairin aksiooma pätee, kun oletetaan muiden aksioomien lisäksi, että EA5 on voimassa.

Todistus. Oletetaan siis, että Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma on voimassa. Tarkastellaan jälleen kuvan 5.3 mukaista tilannetta. Eukleideen vuorokulmalauseen 4.5 nojalla kaksi suoraa $\overleftrightarrow{BE}$ ja $\overleftrightarrow{AD}$ ovat yhdensuuntaisia, jos kulmat $\angle EBA$ ja $\angle DAB$ ovat suoria kulmia. Jos siis kulmat $\angle EBA$ ja $\angle DAB$ ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, niin suorat $\overleftrightarrow{BE}$ ja $\overleftrightarrow{AD}$ leikkaavat toisensa suoran $\overleftrightarrow{AB}$ oikealla puolella. Jos taas kulmat $\angle EBA$ ja $\angle DAB$ ovat yhteensä enemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, niin suorat $\overleftrightarrow{BE}$ ja $\overleftrightarrow{AD}$ leikkaavat toisensa suoran $\overleftrightarrow{AB}$ vasemmalla puolella. Tällöin suora $\overleftrightarrow{BE}$ on yhdensuuntainen suoran $\overleftrightarrow{AD}$ kanssa jos ja vain jos kulmat $\angle EBA$ ja $\angle DAB$ ovat yhteensä täsmälleen kaksi suoraa kulmaa. Näin on siis olemassa täsmälleen yksi yhdensuuntainen suora, joka kulkee halutun pisteen kautta. $\square$

Näin olemme saaneet todistettua, että Playfairin aksiooma 5.2 ja Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma 5.1 ovat ekvivalentteja keskenään.

Lopuksi tarkastelemme vielä Eukleideen ja Hilbertin aksioomajärjestelmien eroja.

5.2. Eukleideen ja Hilbertin aksiomatiikan eroja

Edellä käsitellyt luvut ovat varmasti tehneet selväksi, että Eukleideen aksiomatiikka oli Euklidisen geometrian ja matematiikan kannalta uraauurtavaa. Eukleideen aksiomaattinen esitystapa koostuu suuresta määrästä käsitteitä ja määritelmiä. Matemaattisessa nykykirjallisuudessa määritelmät ja käsitteet otetaan käyttöön sitä mukaa kun niitä tarvitaan. Eukleideen esityksessä määritelmistä osan voisi siis jättää käsiteltäväksi myöhemminkin, sillä niitä seuraavat viisi aksioomaa eivät vaadi kaikkia aikaisempia määritelmiä. Aksioomien tarkoituksena on tässä tapauksessa kuvata viivaimen ja harpin käytön säännöt konstruktioita varten. Konstruktioiden avulla taas voidaan todistaa matemaattisten olioiden olemassaolo.

Hilbertin aksiomatiikka koostuu suuremmasta määrästä aksioomia kuin Eukleideen järjestelmä. Lisäksi Hilbertin järjestelmän aksioomat käsittävät peruskäsitteiden määrittelyn sekä niille asetetut rajoitteet. Perusidea on kuitenkin sama molemmissa aksioomajärjestelmissä, ensin esitellään peruskäsitteiden määritelmät ja sitten listataan olioiden välisistä suhteista kertovat aksioomat. Näiden kahden järjestelmän välillä on vuosien mittaan ollut lukuisia muita aksiomatiikan järjestelmiä, mutta niinkuin tiedetään Eukleideen aksioomajärjestelmä piti pintansa lähes Hilbertin aksioomajärjestelmän julkituloon asti. Aikojensa kuuluisimmiksi ja tärkeimmiksi euklidisen geometrian teorioiksi tituleerattuina ne ovat paikkansa ansainneet.

Voisimme nyt luetella lukuisia tapauksia, joissa Hilbert teki tarkempaa ja läpinäkyvämpää työtä kuin Eukleides, mutta se ei taida olla tarpeen. Mielenkiintoisempaa on pohtia sitä, miksi aksioomia tarvitaan enemmän kuin viisi. Eukleides ohitti joitakin haasteellisempia yksityiskohtia todistuksissaan vain käyttämällä tietoa, joka ei kuitenkaan seurannut hänen laatimista aksioomista. Esimerkiksi jotkin kuvioiden leikkausominaisuudet Eukleideen järjestelmässä ovat käytössä ilman perusteluja. Myöhemmin Paschin aksiooma korjasi nämä puutteet Hilbertin aksiomatiikassa [**9**, s. 15–16]. Tämä on siis eräs syy sille, että aksioomia todellakin tarvitaan lisää.

Hilbertin aksioomajärjestelmässä tätä asiaa on parannettu. Hilbert pyrki rakentamaan Eukleidesta täsmällisemmän perustan geometrialle ja sai näin korjattua Eukleideen aksiomatiikan puutteita. Toisin sanoen kun Hilbert oli korjannut Alkeiden virheet täsmällisemmällä aksiomatiikalla, loput Eukleideen geometriasta voitiin lukea Alkeista. Tästä hyvänä esimerkkinä on se, että Alkeiden kolmannen kirjan lauseet ja tehtävät 1–19 pätevät Hilbertin aksiomatiikassa, lukuunottamatta tehtäviä 1 ja 17 jotka tarvitsevat yhden aksiooman lisää [**8**, s. 111]. Suurin osa Alkeiden alun lauseista on todistettavissa ainoastaan Hilbertin aksioomia käyttäen, kun taas Eukleides on joutunut käyttämään niihin jo runsaasti muita lauseita ja määritelmiä [**8**, s. 102–111]. Voidaan siis ajatella, että Eukleideen aksioomajärjestelmä on ikään kuin erikoistapaus Hilbertin aksiomatiikasta.

Nykypäivän matematiikka on tarkkasanaista ja todistaminen perustuu loogiseen päättelyketjuun aksioomista ja niitä seuraavista lauseista. Eukleides saattoi toisinaan hairahtaa kuvien tarkastelun avulla pitämään jotakin asiaa itsestäänselvänä, vaikka sitä ei ollut aiemmin todettu. Eukleideen aksioomia tarkasteltaessa huomaa, että jotkin asiat on jätetty arvailun varaan. Aksioomat eivät esimerkiksi kerro, mitä ovat pisteet, suorat tai janat. Muitakin epätäsmällisyyksiä löytyy, mutta löytyy näitä myös Hilbertiltä. Hilbertkään ei esimerkiksi määrittele pistettä ja suoraa, mutta asettaa niiden käyttämiselle rajoitteet aksioomien avulla. Vaikka Hilbert on onnistunut hyvin asettamaan rajoitteet käytetyille olioille niin joitakin poikkeuksia kuitenkin on. Esimerkiksi kulman puolittajan olemassaolo ja sen suoran leikkaavuus ovat ongelmallisia. Hilbert nimittäin sortuu tässä kuviosta katsomiseen ja siitä syystä todistuksessa on aukko.

Palataan vielä kysymykseen, miksi Hilbertillä on enemmän aksioomia kuin Eukleideella. Joissain kohdissa Hilbert on tehnyt järkeviä valintoja ottamalla esimerkiksi SKS-säännön aksioomaksi. Eukleideella se on kehnosti todistettuna lauseena, mutta yksin tämä ei riitä tekemään eroa. Suurin ero lienee se, että Eukleides korosti tasogeometriaa, mutta ei pyrkinyt kehittämään sitä eteenpäin. Hilbert taas kehitti tasogeometriaa edelleen ja täydensi siitä syystä aksioomajärjestelmäänsä tasogeometrian osalta. Eukleideen ei kuitenkaan voida sanoa tehneen tässä virhettä, sillä aksiomaattinen matematiikka oli tuolloin vasta alussa.

Eukleidesta voidaan pitää tasogeometrian isänä ja hänen luomaansa aksiomaattistajärjestelmää perustana matematiikan loogiselle päättelylle. Nykyisin geometria on laajentunut uusille aloille ja varsin kauas Eukleideen geometriasta. Voidaankin ajatella, että nykymatematiikan suunnannäyttäjänä on pitkälti toiminut Hilbert. Hän on rakentanut matematiikalle perustan, jossa todistaminen perustuu vakaasti aksioomiin eikä vain intuition varaan. On kuitenkin hyvä muistaa, että Eukleideen tasogeometria on kivijalka geometrian opiskelussa.

Kirjallisuutta

[1] Eukleides Aleksandrialainen, Suom. Pekka Aschan ja Nykysuom. Lauri Kahanpää: *Alkeet. Kuusi ensimmäistä kirjaa eli Tasogeometria.* Toinen painos, Grano Helsinki, 2016.

[2] Richard Fitzpatrick *Euclid's elements of geometry.* Ensimmäinen painos, 2007; sisältää myös Greek. J.L. Heibergin kreikan kielisen tekstin. [http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf]

[3] Lehtinen, Matti, *Matematiikan lyhyt historia.* Yliopistopaino, Helsinki, 1995.

[4] Baragar, Arthur, *A Survey of Classical and Modern Geometries with Computer Activities.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.

[5] Nevanlinna, Rolf, *Geometrian perusteet.* WSOY, Helsinki, 1973.

[6] Marvin Jay Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* W.H.Freeman and Company, New York, Third Edition, 1994.

[7] Lassi Kurittu, Veli-matti Hokkanen, Lauri Kahanpää, *Geometria.* Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 2006.

[8] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer, 2000.

[9] Matti Lehtinen, Jorma Merikoski, Timo Tossavainen, *Johdatus tasogeometriaan.* WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2007.

[10] David Hilbert *The Foundations of Geometry.* Reprint edition. The Open Court Publ. Co., 1950. [http://www.gutenberg.org/ebooks/17384].