Koeben 1/4-lause ja Blochin lause

Jaakko Turja

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2018

Tiivistelmä: Jaakko Turja, *Koeben 1/4-lause ja Blochin lause* (engl. *Koebe 1/4 theorem and Bloch's theorem*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 36. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, tammikuu 2018.

Tämän tutkielman kaksi päätulosta ovat Koeben 1/4-lause ja Blochin lause. Koeben lauseen mukaan yksikkökiekossa määritellylle analyyttiselle injektiolle f, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$, pätee myös, että sen kuvajoukko $f(B(0,1))$ sisältää ainakin $\frac{1}{4}$-säteisen kiekon. Blochin lause puolestaan kertoo, että on olemassa aidosti positiivinen vakio B siten, että suljetussa yksikkökiekossa määritellylle analyyttiselle funktiolle f, jolle $f'(0) = 1$, on jokin kiekko $S \subset B(0,1)$, jonka kuvajoukko $f(S)$ sisältää vähintään B-säteisen kiekon siten, että f on injektiivinen kiekossa S. Näiden tulosten todistamisen lisäksi kerrotaan, miten näiden lauseiden oletuksista voidaan tarvittaessa jättää pois ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Väitteessä näistä oletuksista luopuminen vaikuttaa kuitenkin kuvajoukon sisältämän kiekon suuruuteen. Lisäksi Blochin lauseessa on tällöin kuitenkin oletettava, että $f'(0) \neq 0$.

Näiden tulosten lisäksi tässä tutkielmassa todistetaan Koeben lauseen todistuksessa tarvittavat Grönwallin pinta-alalause ja Bieberbachin kerroinlause, sekä näistä tuloksista seurauksena saatavat Koeben distortiolause ja Littlewoodin lause. Bieberbachin kerroinlauseen mukaan Koeben lauseen ehdot täyttävän funktion sarjaesityksen toisen kertoimen moduli on korkeintaan 2. Littlewoodin lause yleistää Bieberbachin kerroinlausetta, mutta ei kuitenkaan parhaalla mahdollisella tavalla, kertomalla, että ehdot täyttävän funktion sarjaesityksen n. kertoimen moduli on pienempi kuin ne. Koeben distortiolause puolestaan antaa rajat Koeben lauseen ehdot täyttävän funktion derivaatan itseisarvolle, funktion itseisarvolle sekä näiden osamäärälle.

Lisäksi tarkastellaan, miten Blochin lauseesta seuraa Picardin suuri lause, ja miten Picardin pieni lause saadaan seurauksena Picardin suuresta lauseesta. Picardin suuren lauseen mukaan analyyttinen funktio saavuttaa oleellisen erikoispisteen ympäristössä kaikki kompleksitason pisteet korkeintaan yhtä pistettä lukuunottamatta. Picardin pienen lauseen mukaan kokonainen ei-vakio funktio saavuttaa kaikki kompleksitason pisteet korkeintaan yhtä pistettä lukuunottamatta.

Varsinaisten lauseiden lisäksi tässä tutkielmassa määritellään täsmällisesti Blochin lauseessa esiintyvä Blochin vakio B, sekä hieman määritelmältään poikkeava Landaun vakio L. Näistä vakioista ei kuitenkaan ole tiedossa tarkkoja arvoja, mutta tässä tutkielmassa kerrotaan parhaat tiedossa olevat rajat näille vakioille. Nämä rajat jätetään todistamatta ja tyydytään mainitsemaan näiden rajojen alkuperäiset todistajat ja todistusajankohdat.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Koeben 1/4-lause 3
1.1. Esitietoja 3
1.2. Grönwallin pinta-alalause 5
1.3. Bieberbachin kerroinlause 8
1.4. Koeben 1/4-lause 10
1.5. Koeben distortiolause 12
1.6. Littlewoodin lause 15

Luku 2. Blochin lause 19
2.1. Esitietoja 19
2.2. Blochin lause 20
2.3. Blochin ja Landaun vakiot 23

Luku 3. Picardin lauseet 25
3.1. Picardin pieni lause 27
3.2. Schottkyn lause 27
3.3. Picardin suuri lause 29

Luku 4. Merkintöjä 33

Lähdeluettelo 35

Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan analyyttisiä funktioita, erityisesti tarkoituksena on todistaa Koeben 1/4-lause ja Blochin lause. Koeben lause sanoo seuraavaa:

Lause 0.1 (Koeben 1/4-lause). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio. Tällöin pätee*

$$B\left(f(0), \frac{|f'(0)|}{4}\right) \subset f(B(0,1)).$$

Blochin lause puolestaan sanoo seuraavaa:

Lause 0.2 (Blochin lause). *On olemassa aidosti positiivinen vakio B siten, että jos $f : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, jolle $f'(0) \neq 0$, niin tällöin on olemassa kiekko $S \subset B(0,1)$ siten, että funktio f on injektiivinen kiekossa S ja kuvajoukko $f(S)$ sisältää $B|f'(0)|$-säteisen kiekon.*

Ensimmäisessä luvussa Koeben lauseessa oletetaan lisäksi $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Vastaavasti toisessa luvussa esitettävässä Blochin lauseessa oletetaan lisäksi $f'(0) = 1$. Näistä oletuksista voidaan tarvittaessa kuitenkin tässä tapauksessa luopua, sillä jos funktio g täyttää Koeben tai Blochin lauseen ehdot tässä johdannossa esitetyssä muodossa, niin tällöin funktio

$$f = \frac{g - g(0)}{g'(0)}$$

täyttää vastaavan lauseen tarvittavat ehdot myöhemmin tässä tutkielmassa todistettavassa muodossa. Vastaavasti tällä tavalla voitaisiin moni muukin tässä tutkielmassa esitettävä tulos yleistää koskemaan laajempaa joukkoa funktioita, kunhan väite muotoillaan oletuksia vastaavaan muotoon.

Koeben lauseessa vakiota $\frac{1}{4}$ ei voida parantaa, mikä näytetään tarkastelemalla Koeben funktiota. Blochin lauseen tapauksessa ei tiedetä tarkkaa arvoa vakiolle B, jota sanotaan Blochin vakioksi. Toisen luvun lopulla määritellään myös Landaun vakio L, joka on vastaava vakio ilman oletusta, että funktio f olisi injektiivinen kiekossa S, sekä tarkastellaan, mitä Blochin ja Landaun vakioista tiedetään.

Vaikka Koeben ja Blochin lauseiden sisällöt vaikuttavat melko samankaltaisilta, niin niiden taustat ovat varsin erilaisia. Ensimmäisessä luvussa todistetaan Koeben lause, samalla tutustuen myös muutamaan muuhun analyyttisille injektioille, eli konformikuvauksille, pätevään tulokseen. Konformikuvaukset ovat kiinnostaneet matemaatikoita erityisesti Riemannin kuvauslauseen esityksen jälkeen. Vuonna 1851 Riemann esitti kuvauslauseensa, mutta todistus kaipasi vielä täydennystä. Carathéodory ja Koebe täydensivät todistuksen vuonna 1912. Koska tämän tutkielman tulosten todistamisessa ei tarvita Riemannin kuvauslausetta, niin tyydytään esittämään sen muotoilu ilman todistusta.

Lause 0.3 (Riemannin kuvauslause). *Olkoon $G \neq \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin on olemassa konformikuvaus $f : G \to B(0,1)$.*

Koeben lauseen todistusta kohti edetessä todistetaan Grönwallin pinta-alalause, sekä Bieberbachin kerroinlause. Bieberbach esitti kerroinlauseensa todistuksen yhteydessä konjektuurinsa, joka on kiehtonut ja inspiroinut matemaatikkoja, ja jonka todistamiseen kului lähes 70 vuotta, kunnes 1980-luvulla Louis de Branges todisti kyseisen konjektuurin todeksi. Luonnollisesti tämäkin tulos jätetään tässä todistamatta.

Lause 0.4 (de Brangesin lause/Bieberbachin konjektuuri). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ ja lisäksi*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin $|a_n| \leq n$ kaikilla $n \geq 2$.

Näiden tulosten lisäksi todistetaan Koeben lauseen seurauksena Koeben distortiolause, sekä Littlewoodin lause, joka on vuonna 1925 todistettu tulos, joka kertoo, että Bieberbachin konjektuurin arvion suuruusluokka on oikea.

Toisessa luvussa todistetaan Blochin lause, jota J. E. Littlewood on lähteen [24] mukaan kuvaillut sanoin ”One of the queerest things in mathematics. ... the proof itself is crazy”. Sattumaa tai ei, Bloch todisti lauseensa mielisairaalassa, jossa vietti elämänsä viimeiset vuosikymmenensä. Blochin lauseen todistus mahdollisti myös Picardin lauseiden todistamisen alkeellisin keinoin, mitä tarkastellaankin tämän tutkielman kolmannessa luvussa.

Tämän tutkielman kirjoittamisessa keskeisimpiä lähteitä ovat olleet erityisesti [12, 8, 6, 19]. Lähteet [12, 8] ovat olleet tärkeitä ensimmäisen luvun kannalta. Toisessa ja kolmannessa luvussa lähde [6] on ollut tärkein yksittäinen lähde. Lähdettä [19] on hyödynnetty pääasiassa Picardin suuren lauseen todistuksessa. Lukijan oletetaan tuntevan kompleksianalyysin kursseilla käsitellyt asiat. Käytännössä siis luentomonisteessa [14] käsiteltävät asiat sisäistänyt lukija pystyy luultavasti ymmärtämään tässä tutkielmassa käsiteltävät asiat.

LUKU 1

Koeben 1/4-lause

Tässä luvussa todistetaan Koeben 1/4-lause ja sen todistuksessa tarvittavat Grönwallin pinta-alalause ja Bieberbachin kerroinlause. Lisäksi todistetaan Koeben lauseelle seurauksena Koeben distortiolause, jonka avulla todistetaan myös Littlewoodin lause. Tämän luvun kirjoittamisessa on käytetty lähteitä [12, 10, 8, 21, 20, 11]. Tämän luvun todistusten ideat perustuvat lähteestä riippumatta enemmän tai vähemmän samoihin alkuperäisten todistajien ideoihin.

1.1. Esitietoja

Kerrataan seuraavaksi tässä luvussa tarvittavia esitietoja, joiden pitäisi olla tuttuja kompleksianalyysien kursseilta, poikkeuksena seuraavaksi esitettävä Greenin lause, jonka pitäisi olla tuttu kurssilta, joka saattaa ajasta ja paikasta riippuen olla nimetty muun muassa integraalilaskentaan tai vektorifunktioiden analyysiin viittaavalla nimellä.

LAUSE 1.1 (Greenin lause). *Olkoon $\gamma : I \to \mathbb{C}$ positiivisesti suunnistettu (paloittain) sileä umpinainen Jordan-polku, ja alue A olkoon käyrän $\gamma(I)$ sisäpuoli. Oletetaan, että funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on jatkuvasti differentioituva avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{C}$, jolle $\overline{A} \subset G$. Tällöin on voimassa yhtälö*

$$\int_\gamma (\mathrm{Re}(f)dx_1 + \mathrm{Im}(f)dx_2) = \int_A (\partial_1 \mathrm{Im}(f) - \partial_2 \mathrm{Re}(f)).$$

TODISTUS. Ks. [22, Lause 5.4] tai [1, Chapter 16, Theorem 6]. □

Greenin lausetta voidaan käyttää pinta-alan laskemiseen: Merkitään $z = x + iy$. Tällöin saadaan Greenin lauseen nojalla muuten samoja merkintöjä hyödyntäen

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}\,dz &= \int_\gamma (x-iy)(dx+idy) = \int_\gamma x\,dx + y\,dy + i\int_\gamma -y\,dx + x\,dy \\ &= \int_A \partial_1 y - \partial_2 x\,dx\,dy + i\int_A \partial_1 x - \partial_2(-y)\,dx\,dy. \\ &= 0 + i\int_A 2\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Tällöin siis alueen A pinta-ala on

$$\int_A 1\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}\,dz. \tag{1.1}$$

LAUSE 1.2 (Cauchyn lauseen lokaali muoto). *Olkoon funktio f analyyttinen kiekossa $B(z_0, r)$. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

kaikilla suljetuilla teillä γ kiekossa $B(z_0, r)$.

TODISTUS. Ks. [14, Lause 4.6] tai [12, Theorem 2.4.3]. □

Tästä saadaan suorana seurauksena seuraava tulos:

SEURAUS 1.3.

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\theta = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{Z}\diagdown\{0\} \\ 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

TODISTUS. Merkitään $\gamma(t) = e^{ik2\pi t}$. Kun $k \in \mathbb{Z}\diagdown\{0\}$, niin hyödyntämällä muuttujanvaihtoa $z = e^{ik\theta}$ saadaan lauseen 1.2 nojalla

$$0 = \int_{\gamma([0,1])} \frac{-i}{k} dz = \int_0^{2\pi} \frac{-i}{k} ike^{ik\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\theta.$$

Tapaus $k = 0$ on triviaali. □

LAUSE 1.4 (Potenssisarjakehitelmä). *Olkoon f analyyttinen joukossa G ja olkoon $B(z_0, r) \subset G$. Tällöin funktiolla f on potenssisarjaesitys pisteen z_0 ympärillä ja f määrää potenssisarjan yksikäsitteisesti: Kun $z \in B(z_0, r)$, niin*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

missä

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

TODISTUS. Ks. [14, Lause 7.20] tai [12, Theorem 3.3.1]. □

LAUSE 1.5 (Analyyttisen funktion Laurentin sarjakehitelmä). *Olkoot luvut a ja b siten, että $0 \leq a < b \leq \infty$. Olkoon funktio f analyyttinen renkaassa*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}.$$

Tällöin f voidaan esittää Laurent-sarjana joukossa D,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kun $z \in D$. Esitys on yksikäsitteinen: kaikilla $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kun $a < r < b$.

TODISTUS. Ks. [14, Lause 7.27] tai [12, Theorem 4.3.2 ja Proposition 4.3.3]. □

LAUSE 1.6. *Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja olkoon funktio f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Tällöin z_0 on funktion f k. kertaluvun napa jos ja vain jos on olemassa analyyttinen funktio g kiekossa $B(z_0, r)$ siten, että $g(z_0) \neq 0$ ja*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

kaikilla $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

TODISTUS. Ks. [14, Lause 8.9] tai [6, Luku V, Proposition 1.4]. □

HUOMAUTUS 1.7. Olkoon z_0 funktion f k. kertaluvun napa ja g pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen siten, että kaikilla $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z).$$

Tällöin

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n,$$

mikä on funktion f Laurentin sarja.

LEMMA 1.8. *Olkoon G avoin joukko ja $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio. Tällöin*

$$f'(z) \neq 0$$

kaikilla $z \in G$.

TODISTUS. Ks. [14, Seuraus 9.8] tai [10, Theorem 2.1]. □

Tässä luvussa tarkastellaan analyyttisiä injektioita $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$, joille pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Näitä funktioita sanotaan konformikuvauksiksi (univalent, schlicht). Lauseen 1.4 mukaan näiden funktioiden potenssisarjakehitelmä on muotoa

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = (z - 0)(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}),$$

jolloin siis lauseen 1.6 perusteella voidaan päätellä, että piste 0 on funktiolle $\frac{1}{f}$ 1. kertaluvun napa. Tällöin siis huomautuksen 1.7 perusteella funktion $\frac{1}{f}$ Laurentin sarja on muotoa

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z)^n.$$

1.2. Grönwallin pinta-alalause

Todistetaan seuraavaksi kaksi eri pinta-alalausetta. Ensimmäistä tarvitaan Koeben 1/4-lauseen todistuksessa ja toista käytetään myöhemmin Littlewoodin lauseen todistuksessa. Ruotsalainen Thomas Hakon Grönwall todisti nimeään kantavan pinta-alalauseensa vuonna 1914 [13]. Grönwallin todistuksesta tietämättä myös Bieberbach todisti saman tuloksen vuonna 1916 ja käytti sitä kerroinlauseensa todistamiseen [3]. Lähteen [11] mukaan tässä toisena esitettävän pinta-alalauseen todisti unkarilainen Lipót Fejér vuonna 1913, joskin tulos esiintyy myös Grönwallin artikkelissa [13] ilman viittauksia.

Lause 1.9 (Grönwallin pinta-alalause). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ ja lisäksi*

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1.$$

Todistus. Koska

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

niin voidaan määritellä funktio $g : \mathbb{C}\diagdown\overline{B}(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Olkoon nyt $E = g(\mathbb{C}\diagdown\overline{B}(0,1))$ ja olkoon $\gamma_r = g(\{z : |z| = r\})$, missä $r > 1$. Tällöin Greenin lauseen nojalla alueen E pinta-ala saadaan kaavasta (1.1) eli pinta-ala on siis

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_r} \overline{w}dw,$$

kun $r \to 1$, mistä muuttujanvaihdolla saadaan

$$\begin{aligned}
A_r &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_r} \overline{w}dw = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)}g'(z)dz \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \overline{\left(re^{i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^{-n}\right)} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k (re^{i\theta})^{-k-1}\right) ire^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^{-n}e^{in\theta}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k r^{-k-1}e^{-i(k+1)\theta}\right) re^{i\theta}d\theta
\end{aligned}$$

Kun tarkastellaan integraalin sisällä olevaa kolmen luvun tuloa, saadaan

$$\begin{aligned}
&r^2 - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k r^{-k+1}e^{-i(k)\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^{-n+1}e^{i(n+1)\theta} \\
&\qquad - \left(\sum_{k=1}^{\infty} ka_k r^{-k-1}e^{-i(k+1)\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^{-n+1}e^{i(n+1)\theta}\right) \\
&= r^2 - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k r^{-k+1}e^{-i(k)\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^{-n+1}e^{i(n+1)\theta} - \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} ka_k\overline{a_n} r^{-k-n}e^{i(n-k)\theta}\right).
\end{aligned}$$

Koska seurauksen 1.3 mukaan $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$, jos $k \neq 0$, niin termeittäin integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} 0 \le A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \overline{a_k} r^{-k-k} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 r^{-2k} d\theta \\ &= \pi \left(r^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 r^{-2k} \right). \end{aligned}$$

Kun $r \to 1$, niin tästä saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 \le 1. \quad \square$$

Tästä saadaan suorana seurauksena myös arvio funktion $\frac{1}{f}$ sarjaesityksen kertoimille:

SEURAUS 1.10. *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ ja lisäksi*

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin

$$|a_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}},$$

kun $n \ge 1$.

Seuraavasta esimerkistä nähdään, että Grönwallin pinta-alalausetta ei voi parantaa.

ESIMERKKI 1.11. Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z}{1 + e^{i\theta} z^2},$$

missä $\theta \in [0, 2\pi]$. Tällöin siis f on injektio. Lisäksi $f(0) = 0$ ja

$$f'(z) = \frac{1(1 + e^{i\theta} z^2) - 2z e^{i\theta} z}{(1 + e^{i\theta} z^2)^2} = \frac{1 - e^{i\theta} z^2}{(1 + e^{i\theta} z^2)^2},$$

eli siis $f'(0) = 1$, joten f toteuttaa Grönwallin pinta-alalauseen ehdot. Siispä koska

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1 + e^{i\theta} z^2}{z} = \frac{1}{z} + e^{i\theta} z,$$

niin Grönwallin pinta-alalauseen merkintöjä hyödyntämällä saadaan tästä laskettua

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 = |a_1|^2 = 1^2 = 1.$$

Siispä Grönwallin pinta-alalausetta ei voi parantaa.

Seuraavasta tuloksesta, ja erityisesti vertaamalla sen todistusta edellisen pinta-alalauseen todistukseen, nähdään, miksi näitä lauseita nimitetään pinta-alalauseiksi.

LAUSE 1.12 (Pinta-alalause, toinen versio). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja lisäksi*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin alueen $f(B(0,r))$ pinta-ala A_r on

$$A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n},$$

kun $0 < r \leq 1$.

TODISTUS. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(\theta) = f(re^{i\theta})$, kun $0 < r < 1$. Tällöin Greenin lauseen nojalla joukon $f(B(0,r))$ pinta-ala A_r saadaan kaavan (1.1) avulla muuttujanvaihtoa hyödyntäen

$$\begin{aligned}
A_r &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma_r} \overline{w}\, dw = \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{f(z)} f'(z)\, dz \\
&= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n \right)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (re^{i\theta})^{k-1} \right) ire^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k r^k e^{ik\theta} \right) d\theta,
\end{aligned}$$

mistä auki laskettuna ja integroituna saadaan seurauksen 1.3 nojalla

$$A_r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k k a_k r^k = \pi \sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k}.$$

Tapaus $r = 1$ saadaan, kun $r \to 1$. □

1.3. Bieberbachin kerroinlause

Todistetaan seuraavaksi Bieberbachin kerroinlause, jonka todisti saksalainen matemaatikko Ludwig Bieberbach vuonna 1916 [3]. Todistuksensa alaviitteessä hän esitti tunnetuksi tulleen konjektuurinsa: Ehkä konformikuvaksen, jonka derivaatta origossa on 1, sarjaesitykselle pätee yleisemminkin $|a_n| \leq n$. Lähteen [10] mukaan Bieberbach todisti itse vuonna 1918, että $|a_n| < 5,1n^2$. Tästä seuranneiden vuosikymmenten aikana todistettiin parempiakin rajoja, kuten tässä tutkielmassa käsiteltävä Littlewoodin lause, kunnes lopulta konjektuurin todisti oikeaksi Louis de Branges vuonna 1985 [7]. Tarkempaa tietoa näiden tulosten historiasta löytyy lähteistä [16, 10].

Todistetaan kuitenkin aluksi tarvittava lemma.

LEMMA 1.13. *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Tällöin on olemassa analyyttinen injektio $g : B(0,1) \to \mathbb{C}$, jolle pätee $g(0) = 0$ ja $g'(0) = 1$ ja lisäksi $g^2(z) = f(z^2)$*

TODISTUS. Merkitään $f(z) = z \cdot \mu(z)$, missä μ on analyyttinen alueessa $B(0,1)$. Koska $f'(0) = 1$, niin $\mu(0) = 1$. Lisäksi $\mu(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B(0,1)$, koska jos olisi jokin $z_0 \in B(0,1)\setminus\{0\}$, jolla $\mu(z_0) = 0$, niin tällöin myös $f(z_0) = z_0\mu(z_0) = 0 = f(0)$, jolloin f ei olisi injektio. Siispä koska $\mu \neq 0$ ja koska funktio μ on analyyttinen, niin funktiolla μ'/μ on olemassa yksikkökiekossa määritelty primitiivi $\log(\mu)$, jonka avulla voidaan määritellä neliöjuuren haara

$$r(z) := \sqrt{\mu(z)} := e^{\frac{1}{2}\log(\mu)},$$

joka on kahden analyyttisen funktion yhdisteenä analyyttinen alueessa $B(0,1)$, jolle pätee $r(0) = 1$. Olkoon $g(z) = z \cdot r(z^2)$. Tällöin

$$g^2(z) = z^2 r^2(z^2) = z^2\mu(z^2) = f(z^2).$$

Lisäksi $g(0) = 0$ ja $g'(0) = r(0) = 1$.

Tarkistetaan vielä, että g on injektiivinen. Jos $g(a) = g(b)$, niin $f(a^2) = f(b^2)$, jolloin siis funktion f injektiivisyyden nojalla $a^2 = b^2$, mistä saadaan että $a = \pm b$. Jos $a = b$ kaikilla $a, b \in B(0,1)$, niin g on injektiivinen. Jos $a = -b$, niin funktion g määritelmästä nähdään, että $g(a) = a \cdot r(a^2) = -b \cdot r(b^2) = -g(b)$, jolloin $g(b) = g(a) = -g(b)$, joten $g(a) = g(b) = 0$. Koska $r(z) \neq 0$ kaikilla z, niin tällöin on siis oltava $a = b = 0$, jolloin siis g on myöskin injektiivinen. $\square$

LAUSE 1.14 (Bieberbachin kerroinlause). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ ja lisäksi*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin $|a_2| \leq 2$.

TODISTUS. Lemman 1.13 nojalla on olemassa analyyttinen ja injektiivinen funktio $g : B(0,1) \to \mathbb{C}$, jolle pätee $f(z^2) = g^2(z)$ ja jolle voidaan merkitä

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Tällöin Grönwallin pinta-alalauseen nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1,$$

joten $|b_1| \leq 1$. Nyt siis

$$\frac{1}{g^2(z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{2b_0}{z} + (b_0^2 + 2b_1) + \ldots$$

Olkoon h_f se analyyttinen funktio, jolle pätee

$$\frac{1}{f(z^2)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{h_f(z)}.$$

Tällöin funktion f potenssisarjaesityksestä nähdään lauseen 1.4 nojalla, että $h_f(0) = 1$, $h_f'(0) = 0$ ja $h_f''(0) = 2a_2$. Siispä saadaan

$$\left(\frac{1}{h_f}\right)(0) = 1,$$

$$\left(\frac{1}{h_f}\right)'(0) = -\frac{h'_f(0)}{(h_f(0))^2} = 0$$

ja

$$\left(\frac{1}{h_f}\right)''(0) = \frac{-h''_f(0)(h_f(0))^2 + 2h'_f(0)h_f(0)h'_f(0)}{(h_f(0))^4} = \frac{-2a_2+0}{1} = -2a_2.$$

Tällöin siis funktio $\frac{1}{f(z^2)}$ saadaan funktion $\frac{1}{h_f}$ potenssisarjaesitystä hyödyntämällä lauseen 1.4 nojalla muotoon

$$\frac{1}{f(z^2)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{h_f(z)} = \frac{1}{z^2}\cdot(1 - a_2z^2 + \dots)$$

Koska $f(z^2) = g^2(z)$, niin saadaan, että $b_0 = 0$ ja $-a_2 = b_0^2 + 2b_1 = 2b_1$, mistä saadaan

$$|a_2| = 2|b_1| \leq 2. \quad \square$$

1.4. Koeben 1/4-lause

Vuonna 1907 saksalainen Paul Koebe todisti, että on olemassa vakio $0 < k \leq \frac{1}{4}$, siten että konformikuvaukselle f, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$, pätee myös $B(0,k) \subset f(B(0,1))$ [15]. Arvon $k = \frac{1}{4}$ todisti Bieberbach vuonna 1916 kerroinlauseensa avulla [3].

Lause 1.15 (Koeben 1/4-lause). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Tällöin pätee*

$$B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset f(B(0,1)).$$

Todistus. Olkoon $w \notin f(B(0,1))$. Tällöin voidaan siis määritellä analyyttinen funktio $g : B(0,1) \to \mathbb{C}$ siten, että

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)}.$$

Tällöin g on injektio, koska jos $g(z_1) = g(z_2)$ joillakin $z_1, z_2 \in B(0,1)$, niin tällöin myös $f(z_1) = f(z_2)$, mistä funktion f injektiivisyyden nojalla seuraa $z_1 = z_2$. Lisäksi $g(0) = \frac{wf(0)}{w-f(0)} = \frac{0}{w} = 0$. Lasketaan seuraavaksi myös $g'(0)$ ja $g''(0)$. Koska

$$g'(z) = \frac{wf'(z)(w - f(z)) - wf(z)(-f'(z))}{(w-f(z))^2} = \frac{w^2f'(z)}{(w-f(z))^2},$$

niin $g'(0) = \frac{w^2f'(0)}{(w-f(0))^2} = \frac{w^2}{(w-0)^2} = 1$. Koska

$$g''(z) = \frac{w^2f''(z)(w-f(z))^2 - w^2f'(z)2(w-f(z))(-f'(z))}{(w-f(z))^4},$$

niin kun merkitään $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, niin lauseen 1.4 mukaan $f''(0) = 2a_2$, jolloin siis saadaan

$$\begin{aligned} g''(0) &= \frac{w^2 f''(0)(w-f(0))^2 - w^2 f'(0)2(w-f(0))(-f'(0))}{(w-f(0))^4} \\ &= \frac{w^2(2a_2)(w-0)^2 - w^2 2(w-0)(-1)}{(w-0)^4} \\ &= 2a_2 + \frac{2}{w}. \end{aligned}$$

Koska g on analyyttinen injektio ja koska $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ ja $g''(0) = 2a_2 + \frac{2}{w}$, niin lauseen 1.4 avulla käyttämällä Bieberbachin kerroinlausetta funktioon g, saadaan

$$\left| a_2 + \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{g''(0)}{2} \right| \leq 2.$$

Vastaavasti käyttämällä Bieberbachin kerroinlausetta funktioon f, saadaan $|a_2| \leq 2$, joten kolmioepäyhtälöä hyödyntämällä saadaan

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \left| a_2 + \frac{1}{w} - a_2 \right| \leq \left| a_2 + \frac{1}{w} \right| + |-a_2| \leq 2 + 2 = 4,$$

eli siis

$$|w| \geq \frac{1}{4}.$$

Tällöin siis

$$\mathbb{C} \setminus f(B(0,1)) \subset \{z : |z| \geq \frac{1}{4}\},$$

joten siis

$$B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset f(B(0,1)). \quad \square$$

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkinä Koeben funktiota, jonka avulla nähdään, että Koeben lauseen vakiota $\frac{1}{4}$ ei voi parantaa, ja että Bieberbachin kerroinlauseen ja konjektuurin rajoja ei voi parantaa.

Esimerkki 1.16 (Koeben funktio). Määritellään Koeben funktio $k : B(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Koska

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z},$$

niin Koeben funktiolle saadaan sarjaesitys kirjoittamalla

$$k(z) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

Tästä sarjaesityksestä nähdään, että Bieberbachin kerroinlauseen ja konjektuurin rajoja ei voi parantaa. Kun tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

ja huomataan, että kuvajoukko $f(B(0,1))$ on oikea puolitaso $\mathrm{Re}(z) > 0$, niin kirjoittamalla

$$k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

nähdään, että Koeben funktion kuvajoukko on

$$k(B(0,1)) = \mathbb{C} \diagdown]-\infty, \frac{1}{4}],$$

mikä osoittaa, että Koeben lauseen vakiota $\frac{1}{4}$ ei voi parantaa.

1.5. Koeben distortiolause

Todistetaan seuraavaksi Koeben distortiolause. Lähteen [10] mukaan Koebe todisti, että on olemassa positiivset rajat arvoille $|f(z)|$ ja $|f'(z)|$, mutta tarkat arvot distortiolauseen rajoille todistivat Grönwall ja Bieberbach vuonna 1916. Todistetaan aluksi tarvittava lemma.

Lemma 1.17. *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) =$ ja $f'(0) = 1$. Tällöin*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2},$$

kun $r = |z| < 1$.

Todistus. Olkoon $w \in B(0,1)$ ja olkoon

$$F(z) = \frac{f\left(\frac{z+w}{1+\overline{w}z}\right) - f(w)}{(1-|w|^2)f'(w)}. \tag{1.2}$$

Tällöin

$$F(0) = \frac{f(w) - f(w)}{(1-|w|^2)f'(w)} = 0,$$

sekä

$$F'(z) = \frac{\frac{1(1+\overline{w}z)-(z+w)\overline{w}}{(1+\overline{w}z)^2} \cdot f'(\frac{z+w}{1+\overline{w}z})}{(1-|w|^2)f'(w)} = \frac{f'(\frac{z+w}{1+\overline{w}z})}{(1+\overline{w}z)^2 f'(w)}$$

eli siis

$$F'(0) = \frac{f'(\frac{0+w}{1+\overline{w}\,0})}{(1+\overline{w}\,0)^2 f'(w)} = \frac{f'(w)}{f'(w)} = 1.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} F''(z) &= \frac{\frac{1(1+\overline{w}z)-(z+w)\overline{w}}{(1+\overline{w}z)^2} \cdot f''(\frac{z+w}{1+\overline{w}z})((1+\overline{w}z)^2 f'(w)) - f'(\frac{z+w}{1+\overline{w}z}) \cdot f'(w)(2\overline{w}^2 z + 2\overline{w})}{(1+\overline{w}z)^4 f'(w)^2} \\ &= \frac{(1-|w|^2)f''(\frac{z+w}{1+\overline{w}z}) - f'(\frac{z+w}{1+\overline{w}z})(2\overline{w}^2 z + 2\overline{w})}{(1+\overline{w}z)^4 f'(w)} \end{aligned}$$

eli siis

$$F''(0) = \frac{(1-|w|^2)f''(\frac{0+w}{1+\overline{w}\,0}) - f'(\frac{0+w}{1+\overline{w}\,0})(2\overline{w}^2\,0 + 2\overline{w})}{(1+\overline{w}\,0)^4 f'(w)} = \frac{(1-|w|^2)f''(w) - f'(w)2\overline{w}}{f'(w)}.$$

Tällöin siis lauseen 1.4 ja Bieberbachin kerroinlauseen nojalla

$$\left|\frac{(1-|w|^2)f''(w)}{f'(w)} - 2\overline{w}\right| \leq 4,$$

mistä kertomalla puolittain luvulla $\frac{w}{1-|w|^2}$ saadaan

$$\left|\frac{wf''(w)}{f'(w)} - \frac{2|w|^2}{1-|w|^2}\right| \leq \frac{4w}{1-|w|^2},$$

mistä saadaan väite merkitsemällä $r = |w|$. □

Lause 1.18 (Koeben distortiolause). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Merkitään $r = |z|$. Tällöin pätee seuraavat epäyhtälöt*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{1.3}$$

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{1.4}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{1.5}$$

Todistus. Todistetaan ensin (1.3). Koska epäyhtälöstä $|\alpha| \leq c$ seuraa, että $-c \leq Re(\alpha) \leq c$ niin lemmasta 1.17 seuraa

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}.$$

Koska $f'(0) = 1$ ja lemman 1.8 mukaan $f'(z) \neq 0$, niin voidaan valita haara $\log(f'(z))$, joka siis määritellään analyyttisen funktion f''/f' primitiivinä. Tällöin koska

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}(\log(f'(z))) = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|,$$

kun $z = re^{i\theta}$, niin saadaan siis

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}. \tag{1.6}$$

Koska

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log\left(\frac{1-z}{(1+z)^3}\right) &= \frac{(-1)(1+z)^3-(1-z)3(1+z)^2}{(1+z)^6}\cdot\frac{(1+z)^3}{1-z}\\ &= \frac{-1-z-3+3z}{(1+z)(1-z)} = \frac{2z-4}{1-z^2}\end{aligned}$$

ja koska

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log\left(\frac{1+z}{(1-z)^3}\right) &= \frac{1(1-z)^3-(1+z)(-1)3(1-z)^2}{(1-z)^6}\cdot\frac{(1-z)^3}{1+z}\\ &= \frac{1-z+3+3z}{(1-z)(1+z)} = \frac{2z+4}{1-z^2},\end{aligned}$$

niin integroimalla epäyhtälön (1.6) puolet muuttujan r suhteen pisteestä 0 pisteeseen R, saadaan

$$\log\frac{1-R}{(1+R)^3}\le \log|f'(R\cdot e^{i\theta})|\le \log\frac{1+R}{(1-R)^3},$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön (1.3) kanssa.

Todistetaan seuraavaksi (1.4). Olkoon $0<|z|<1$. Merkitään $z=|z|e^{i\theta}$. Tällöin siis voidaan merkitä

$$f(z)=\int_0^{|z|} f'(re^{i\theta})e^{i\theta}dr.$$

Siispä epäyhtälön (1.3) nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\le \int_0^{|z|}|f'(re^{i\theta})|dr\le\int_0^{|z|}\frac{1+r}{(1-r)^3}dr\\
&=\int_0^{|z|}\frac{2}{(1-r)^3}+\frac{r-1}{(1-r)^3}dr=\int_0^{|z|}\frac{2}{(1-r)^3}-\frac{1}{(1-r)^2}dr\\
&=\left(\frac{1}{(1-|z|)^2}-\frac{1}{1-|z|}\right)-\left(\frac{1}{(1-0)^2}-\frac{1}{1-0}\right)\\
&=\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.
\end{aligned}$$

Siispä epäyhtälön (1.4) yläraja on todistettu. Todistetaan seuraavaksi alaraja. Koska

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\le\frac{1}{4},$$

niin jos $|f(z)|\ge\frac{1}{4}$, niin väite pätee. Jos taas $|f(z)|<\frac{1}{4}$, niin Koeben 1/4-lauseen nojalla jana $[0,f(z)]$ on kokonaan kuvajoukossa $f(B(0,1))$. Olkoon γ se injektiivinen polku, joka on kyseisen janan alkukuva. Tällöin siis

$$f(z)=\int_\gamma f'(w)dw.$$

Tällöin siis epäyhtälön (1.3) nojalla

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \int_\gamma|f'(w)||dw|\ge\int_0^{|z|}\frac{1-r}{(1+r)^3}dr\\
&=\int_0^{|z|}\frac{2}{(1+r)^3}-\frac{r+1}{(1+r)^3}dr=\int_0^{|z|}\frac{2}{(1+r)^3}-\frac{1}{(1+r)^2}dr\\
&=\left(-\frac{1}{(1+|z|)^2}+\frac{1}{1+|z|}\right)-\left(-\frac{1}{(1+0)^2}+\frac{1}{1+0}\right)\\
&=\frac{|z|}{(1+|z|)^2}.
\end{aligned}$$

Siispä epäyhtälön (1.4) alaraja on todistettu.

Todistetaan seuraavaksi (1.5). Olkoon funktio F kuten lemman 1.17 todistuksessa kohdassa (1.2), eli siis

$$F(z)=\frac{f\left(\frac{z+w}{1+\overline{w}z}\right)-f(w)}{(1-|w|^2)f'(w)}$$

Tällöin epäyhtälön (1.4) nojalla

$$\frac{|w|}{(1+|w|)^2} \le |F(-w)| \le \frac{|w|}{(1-|w|)^2},$$

eli siis

$$\frac{|w|}{(1+|w|)^2} \le \left| \frac{-f(w)}{(1-|w|^2)f'(w)} \right| \le \frac{|w|}{(1-|w|)^2},$$

mistä kertomalla kaikki puolet luvulla $\frac{1-|w|^2}{|w|}$ saadaan

$$\frac{1-|w|}{1+|w|} = \frac{(1-|w|)(1+|w|)}{(1+|w|)^2} \le \left| \frac{f(w)}{wf'(w)} \right| \le \frac{(1-|w|)(1+|w|)}{(1-|w|)^2} = \frac{1+|w|}{1-|w|},$$

mistä seuraa (1.5). □

Yleistetään seuraavaksi Koeben funktiota määrittelemällä esimerkkinä kierretyt Koeben funktiot, joiden avulla nähdään, että Koeben distortiolauseen rajoja ei voi parantaa.

Esimerkki 1.19 (Kierretyt Koeben funktiot). Määritellään kierretyt Koeben funktiot $k_\theta : B(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$k_\theta(z) = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{i\theta(n-1)} z^n,$$

missä $\theta \in [0, 2\pi]$. Kun valitaan $\theta = 0$, niin kyseessä on siis jo aiemmin mainittu Koeben funktio, jonka derivaatta on siis

$$k'(z) = \frac{1 \cdot (1-z)^2 - z(-1)2(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Tästä siis nähdään, että Koeben funktion kohdalla epäyhtälön (1.3) yhtäsuuruus tulee kyseeseen sekä ylä- että alarajalle. Lisäksi Koeben funktion määritelmästä huomataan, että rajojen yhtäsuuruudet tulevat kyseeseen myös epäyhtälön (1.4) kohdalla. Koska

$$z\frac{k'(z)}{k(z)} = z\frac{1+z}{(1-z)^3} \cdot \frac{(1-z)^2}{z} = \frac{1+z}{1-z},$$

niin myös epäyhtälön (1.5) tapauksessa Koeben funktion kohdalla yhtäsuuruudet tulevat kyseeseen. Siispä distortiolauseen rajoja ei voi parantaa.

Voidaan itseasiassa todistaa, että Bieberbachin kerroinlauseen, ja samalla myös Koeben lauseen, reunatapaukset tulevat kyseeseen, jos ja vain jos kyseessä on kierretty Koeben funktio. Lisäksi distortiolauseen epäyhtälöiden yhtäsuuruudet tulevat kyseeseen ainoastaan sopivilla kierretyillä Koeben funktioilla, ks. [8, §2.2 ja §2.3, sivut 30-36].

1.6. Littlewoodin lause

Todistetaan seuraavaksi Littlewoodin lause, jonka englantilainen John Edensor Littlewood todisti vuonna 1925 [18]. Lauseesta nähdään, että Bieberbachin konjektuurin antaman arvion suuruusluokka on oikea. Todistetaan kuitenkin aluksi pari Littlewoodin lauseen todistuksessa tarvittavaa tulosta.

LAUSE 1.20 (Parsevalin lause). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja olkoon funktion f sarjaesitys*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Olkoon lisäksi $0 < r < 1$. Tällöin

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

TODISTUS. Koska

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}, \end{aligned}$$

niin seurauksen 1.3 nojalla integroimalla termeittäin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \end{aligned}$$

□

LEMMA 1.21. *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ ja olkoon $0 < r < 1$. Tällöin*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{1-r}.$$

TODISTUS. Lemman 1.13 mukaan on olemassa analyyttinen ja injektiivinen funktio $g : B(0,1) \to \mathbb{C}$, jolle pätee $g(0) = 0$ ja $g'(0) = 1$ ja lisäksi $g^2(z) = f(z^2)$. Tällöin lauseen 1.18 nojalla

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2},$$

mistä saadaan

$$|g(z)| \leq \frac{r}{1-r^2},$$

kun $|z| = r < 1$. Tällöin siis $g(B(0,r)) \subset B(0, \frac{r}{1-r^2})$, mistä saadaan, että joukon $g(B(0,r))$ pinta-ala A_r on korkeintaan

$$A_r \leq \pi \left(\frac{r}{1-r^2} \right)^2.$$

Lisäksi pinta-alalauseen toisen version nojalla pinta-ala A_r on

$$A_r = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 r^{2k}.$$

Siispä saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k-1} \leq \frac{r}{(1-r^2)^2}. \tag{1.7}$$

Koska

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right) = \frac{2r(1-r^2)-r^2(-2r)}{(1-r^2)^2} = \frac{2r}{(1-r^2)^2},$$

niin integroimalla epäyhtälön (1.7) molemmat puolet muuttujan r suhteen välin $[0,\rho]$ yli, ja muistamalla että $a_0 = 0$, saadaan

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \rho^{2k} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{1-\rho^2},$$

mistä Parsevalin lauseella saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\rho\cdot e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Koska $g^2(z) = f(z^2)$, niin tämä epäyhtälö saadaan siis muotoon

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{i2\theta})| d\theta \leq \frac{\rho^2}{1-\rho^2},$$

mistä merkitsemällä $\rho^2 = R$ ja muuttujanvaihdolla $2\theta = \phi$ saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(R\cdot e^{i\phi})| d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} |f(R\cdot e^{i\phi})|\cdot\frac{1}{2} d\phi \leq \frac{R}{1-R}. \quad \square$$

LAUSE 1.22 (Littlewoodin lause). *Olkoon $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ ja lisäksi*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin $|a_n| < en$, kun $n \geq 2$.

TODISTUS. Hyödyntämällä lausetta 1.5, muuttujanvaihtoa $z = re^{i\theta}$ ja lemmaa 1.21 saadaan

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}} rie^{i\theta} d\theta\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^n} d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{|(re^{i\theta})^n|} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n} d\theta = \frac{1}{r^n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \frac{1}{r^n}\cdot\frac{r}{1-r} = \frac{1}{r^{n-1}(1-r)},
\end{aligned}$$

kun $0 < r < 1$. Valitsemalla $r = 1 - \frac{1}{n}$, tästä saadaan

$$|a_n| \leq n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+1} = n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < ne. \quad \square$$

LUKU 2

Blochin lause

Tässä luvussa todistetaan Blochin lause ja tarkastellaan hieman Blochin ja Landaun vakioita.

2.1. Esitietoja

Kerrataan seuraavaksi tässä luvussa tarvittavia esitietoja, joiden pitäisi olla pääosin tuttuja kompleksianalyysin kursseilta.

LAUSE 2.1 (Cauchyn estimaatti). *Olkoon f analyyttinen kiekossa $B = B(z_0, r)$. Jos $|f(z)| \le M$ kaikilla $z \in B$, niin*

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!Mr}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

kaikilla $z \in B$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Erityisesti

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!M}{r^k}.$$

TODISTUS. Ks. [14, Lause 5.12] tai [12, Theorem 3.4.1]. $\square$

LAUSE 2.2 (Algebran peruslause). *Olkoon p polynomi*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

missä $a_n \neq 0$ ja $n \ge 1$. Tällöin on olemassa $z \in \mathbb{C}$, jolle $p(z) = 0$.

TODISTUS. Ks. [14, Lause 5.15] tai [12, Theorem 3.4.5]. $\square$

LAUSE 2.3 (Maksimiperiaate/Maksimimodulilause). *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon funktio $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Jos on olemassa sellainen $z_0 \in D$, että $|f(z)| \le |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D$, niin f on vakio alueessa D.*

TODISTUS. Ks. [14, Lause 5.16] tai [12, Theorem 5.4.2]. $\square$

LAUSE 2.4 (Casorati-Weierstrass). *Jos funktio f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ja jos z_0 on funktion f oleellinen erikoispiste, niin kuvajoukko $f(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ on tiheä kompleksitasossa $\mathbb{C}$, ts.*

$$\overline{f(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}.$$

TODISTUS. Ks. [14, Lause 8.13] tai [12, Theorem 4.1.4]. $\square$

LEMMA 2.5 (Schwarzin lemma). *Jos $f : B(0,1) \to B(0,1)$ on analyyttinen ja $f(0) = 0$, niin $|f'(0)| \le 1$ ja $|f(z)| \le |z|$ kaikilla $z \in B(0,1)$.*

TODISTUS. Ks. [14, Lemma 9.29] tai [12, Proposition 5.5.1]. $\square$

LAUSE 2.6 (Rouchén lause). *Olkoot f ja g analyyttisiä funktioita joukossa $\overline{B}(a,r)$, lukuunottamatta eristettyjä erikoispisteitä, joilla ei ole nollakohtia eikä napoja ympyrällä $\gamma = \{z : |z-a| = r\}$. Olkoot Z_f, Z_g funktioiden f ja g nollakohtien lukumäärä ympyrän γ sisällä ja olkoot P_f, P_g vastaavasti funktioiden f ja g napojen lukumäärä ympyrän γ sisällä kertalukunsa huomioiden. Jos*

$$|f(z)+g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

ympyrällä γ, niin

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

TODISTUS. Ks. [6, Luku V §3.8] tai [17, Lause 13.6]. $\square$

2.2. Blochin lause

Todistetaan seuraavaksi Blochin lauseen todistuksessa tarvittavia lemmoja, minkä jälkeen todistetaan itse Blochin lause. Ranskalainen André Bloch todisti nimeään kantavan lauseen vuonna 1925 [4]. Tässä esitetyt todistukset mukailevat pääosin lähteen [6] todistuksia.

LEMMA 2.7. *Olkoon f analyyttinen kiekossa $B(0,1)$ ja olkoon $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Jos on $M > 0$ siten, että $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in B(0,1)$, niin tällöin $M \geq 1$ ja $B(0, \frac{1}{6M}) \subset f(B(0,1))$.*

TODISTUS. Olkoon $0 < r < 1$ ja merkitään $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$. Tällöin Cauchyn estimaatin mukaan $|a_k| = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \leq \frac{M}{r^k}$ kaikille $k \geq 1$. Siis koska $|a_1| \leq \frac{M}{r}$ kaikilla $r < 1$, niin $1 = |a_1| \leq M$. Jos $|z| = \frac{1}{4M}$, niin

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\geq |z| - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k z^k| \\
&\geq \frac{1}{4M} - \sum_{k=2}^{\infty} M \left(\frac{1}{4M}\right)^k \\
&= \frac{1}{4M} - \left(\frac{M}{1-\frac{1}{4M}} - M\left(\frac{1}{4M}\right)^0 - M\left(\frac{1}{4M}\right)^1 \right) \\
&= \frac{1}{4M} - \left(\frac{4M^2}{4M-1} - M - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{4M} - \frac{4M^2 - M(4M-1) - \frac{1}{4}(4M-1)}{4M-1} \\
&= \frac{1}{4M} - \frac{\frac{1}{4}}{4M-1} = \frac{1}{4M} - \frac{1}{16M-4} \\
&\geq \frac{1}{4M} - \frac{1}{16M-4M} = \frac{3}{12M} - \frac{1}{12M} \\
&= \frac{1}{6M}
\end{aligned}$$

koska $M \geq 1$. Olkoon $|w| < \frac{1}{6M}$ mielivaltainen ja olkoon $g(z) = f(z) - w$. Kun $|z| = \frac{1}{4M}$, niin tällöin

$$|f(z) - g(z)| = |w| < \frac{1}{6M} \leq |f(z)|.$$

Tällöin siis Rouchén lauseen mukaan funktioilla f ja g on yhtä monta nollakohtaa joukossa $B(0, \frac{1}{4M})$. Koska $f(0) = 0$, niin on oltava $g(z_0) = 0$ jollakin $z_0 \in B(0, \frac{1}{4M})$. Tällöin siis jokaisella $w \in B(0, \frac{1}{6M})$ on olemassa jokin $z_0 \in B(0,1)$, jolle pätee $f(z_0) = w$, eli siis

$$B\left(0, \frac{1}{6M}\right) \subset f\left(B(0,1)\right). \quad \square$$

Lemma 2.8. *Olkoon funktio f analyyttinen kiekossa $B(0,r)$ ja olkoot $f(0) = 0$ ja $|f'(0)| > 0$. Jos on $M > 0$ siten, että $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in B(0,r)$, niin*

$$B\left(0, \frac{r^2|f'(0)|^2}{6M}\right) \subset f(B(0,r)).$$

Todistus. Olkoon $g : B(0,1) \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{f(rz)}{rf'(0)}$. Tällöin g on analyyttinen, ja lisäksi $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ ja $|g(z)| \leq \frac{M}{r|f'(0)|}$ kaikilla $z \in B(0,1)$. Tällöin lemman 2.7 mukaan $B(0, \frac{r|f'(0)|}{6M}) \subset g(B(0,1))$. Koska funktion g määritelmästä saadaan, että $g(B(0,1)) = \frac{f(B(0,r))}{r|f'(0)|}$, niin saadaan siis $B(0, \frac{r^2|f'(0)|^2}{6M}) \subset f(B(0,r))$. $\square$

Lemma 2.9. *Olkoon $f : B(a,r) \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio siten, että jokaiselle $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$ pätee $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$. Tällöin f on injektio.*

Todistus. Olkoot z_1, $z_2 \in B(a,r)$, $z_1 \neq z_2$ ja olkoon jana $\gamma = [z_1, z_2]$. Tällöin oletuksesta saadaan

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \int_\gamma f'(z)dz \right| \\
&\geq \left| \int_\gamma f'(a)dz \right| - \left| \int_\gamma (f'(z) - f'(a))dz \right| \\
&\geq |f'(a)||z_1 - z_2| - \int_\gamma |f'(z) - f'(a)||dz| > 0
\end{aligned}$$

Siispä $f(z_1) \neq f(z_2)$ eli f on injektio. $\square$

Lause 2.10 (Blochin lause). *Olkoon $f : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolle pätee $f'(0) = 1$. Tällöin on olemassa kiekko $S \subset B(0,1)$ siten, että f on injektiivinen kiekossa S ja kuvajoukko $f(S)$ sisältää kiekon, jonka säde on $\frac{1}{72}$.*

Huomautus 2.11. Funktion analyyttisyys on määritelty ainoastaan avoimessa joukossa. Tässä kuitenkin käytetään merkintää, että funktio f on analyyttinen suljetussa kiekossa $\overline{B}(0,1)$, millä tarkoitetaan, että funktio f on analyyttinen avoimessa kiekossa $B(0, 1+\epsilon)$ jollakin $\epsilon > 0$.

Todistus. Merkitään

$$m(r,g) = \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

Koska derivaattakuvaus f' on jatkuva, niin $r \to m(r, f')$ on jatkuva, jolloin myös $r \to (1-r)m(r, f')$ on jatkuva. Koska lisäksi $(1-0)m(0, f') = |f'(0)| = 1$ ja koska $(1-1)m(1, f') = 0$, niin on olemassa $0 \leq r_0 < 1$ siten, että r_0 on suurin luku, jolle $(1-r_0)m(r_0, f') = 1$. Tällöin kaikille $r > r_0$ pätee Bolzanon lauseen perusteella $(1-r)m(r, f') < 1$, jolloin siis kaikille $|z| > r_0$ pätee

$$|f'(z)| \leq m(|z|, f') < \frac{1}{1-|z|}. \tag{2.1}$$

Tarkastellaan seuraavaksi arviota derivaatalle $|f'(z)|$ kun $|z| \leq r_0$. Jatkuvana funktiona $|f'(z)|$ saavuttaa suurimman arvonsa kompaktissa joukossa $\{z : |z| \leq r_0\}$. Jos $|f'(z)|$ saavuttaa avoimessa joukossa $B(0, r_0)$ suurimman arvonsa, niin maksimiperiaatteen mukaan $|f'(z)|$ on vakio joukossa $B(0, r_0)$. Tällöin

$$|f'(z)| = |f'(0)| = 1 = (1-r_0)m(r_0, f') \leq m(r_0, f') = \frac{1}{(1-r_0)} \tag{2.2}$$

kaikilla $z \in B(0, r_0)$. Jos taas $|f'(z)|$ ei saavuta avoimessa joukossa $B(0, r_0)$ suurinta arvoaan, niin se saavuttaa kompaktin joukon $\{z : |z| \leq r_0\}$ suurimman arvonsa joukon reunalla, eli joukossa $|z| = r_0$. Tällöin siis on $|z_0| = r_0$, jolle

$$|f'(z)| \leq |f'(z_0)| = m(r_0, f') = \frac{1}{(1-r_0)} \tag{2.3}$$

kaikilla $z \leq r_0$. Kun yhdistetään (2.1), (2.2) ja (2.3), saadaan

$$|f'(z)| \leq \max\left(\frac{1}{1-|z|}, \frac{1}{1-r_0}\right) = \frac{1}{1-\max(|z|, r_0)}$$

kaikilla $z \in \overline{B}(0, 1)$. Kun $|z| < \frac{1}{2}(1+r_0)$, niin

$$|z| < \frac{1}{2}(1+r_0) \Leftrightarrow \frac{1}{1-|z|} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+r_0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_0} = \frac{2}{1-r_0}. \tag{2.4}$$

Merkitään $\rho = (\frac{2}{1-r_0})^{-1} = \frac{1}{2}(1-r_0)$.

Olkoon nyt $a \in B(0, 1)$ siten, että $|a| = r_0$ ja $|f'(a)| = m(r_0, f') = \frac{1}{1-r_0} = \frac{1}{2\rho}$. Tällöin siis kun $|z-a| < \rho = \frac{1}{2}(1-r_0) = \frac{1}{2}(1+r_0) - r_0$, niin saadaan

$$|f'(z) - f'(a)| \leq |f'(z)| + |f'(a)| < \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho} = \frac{3}{2\rho}.$$

Merkitsemällä $w = \frac{z-a}{\rho}$ ja soveltamalla Schwartzin lemmaa analyyttiseen funktioon $w \to \frac{2\rho}{3}(f'(\rho w + a) - f'(a))$ saadaan edellisestä siis

$$\frac{|f'(\rho w + a) - f'(a)|}{\frac{3}{2\rho}} \leq |w|,$$

mistä saadaan

$$|f'(z) - f'(a)| = |f'(\rho w + a) - f'(a)| \leq |w|\frac{3}{2\rho} = \frac{|z-a|}{\rho}\frac{3}{2\rho} = \frac{3|z-a|}{2\rho^2}$$

kaikilla $z \in B(a, \rho)$. Siispä kun $z \in B(a, \frac{\rho}{3})$, niin

$$|f'(z) - f'(a)| \leq \frac{3|z-a|}{2\rho^2} < \frac{3\frac{\rho}{3}}{2\rho^2} = \frac{1}{2\rho} = |f'(a)|.$$

Nyt siis lemman 2.9 mukaan f on injektiivinen kiekossa $B(a, \frac{\rho}{3})$.

Todistetaan seuraavaksi että $B(f(a), \frac{1}{72}) \subset f(B(a, \frac{\rho}{3}))$. Tarkastellaan funktiota $g : B(0, \frac{\rho}{3}) \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z-a) - f(a)$. Nyt siis $g(0) = 0$, $|g'(0)| = |f'(a)| = \frac{1}{2\rho}$. Olkoon nyt jana $\gamma = [a, z+a]$. Tällöin käyttämällä epäyhtälöä (2.4) saadaan

$$|g(z)| = \left| \int_\gamma f'(w)dw \right| \leq \int_\gamma |f'(w)| dw \leq \frac{1}{\rho}|z| < \frac{1}{3}.$$

Nyt siis lemman 2.8 mukaan

$$B\left(0, \frac{1}{72}\right) = B\left(0, \frac{(\frac{\rho}{3})^2(\frac{1}{2\rho})^2}{6(\frac{1}{3})}\right) \subset g\left(B\left(0, \frac{\rho}{3}\right)\right)$$

eli nyt siis

$$B\left(f(a), \frac{1}{72}\right) \subset f\left(B\left(a, \frac{\rho}{3}\right)\right). \quad \square$$

Tässä vaiheessa voidaan verrata Blochin lausetta Koeben 1/4-lauseeseen. Ensimmäisenä ja oleellisimpana erona huomataan, että Koeben lauseessa funktion oletetaan olevan injektiivinen, mitä Blochin lauseessa ei oleteta. Molemmissa kuitenkin oletetaan funktion analyyttisyys, sekä myöskin $f'(0) = 1$, minkä lisäksi tässä tutkielmassa Koeben lauseelta on edellytetty, että $f(0) = 0$. Molempien lauseiden kohdalla nämä oletukset eivät ole täysin välttämättömiä tässä muodossa, kunhan asetetut oletukset otetaan väitteen muotoilussa huomioon, sillä mikäli g on analyyttinen funktio, jolle $g'(0) \neq 0$, niin funktio

$$f = \frac{g - g(0)}{g'(0)}$$

toteuttaa kyseiset ehdot ja lisäksi f on injektio täsmälleen silloin, kun g on injektio. Toisin sanoen molemmat lauseet voidaan helposti yleistää myös sellaiseen muotoon, missä riittää olettaa $f'(0) \neq 0$. Koeben lauseen tapauksessa tämäkin ehto voitaisiin jättää pois, sillä se seuraa injektiivisyydestä lemman 1.8 nojalla. Toinen mielenkiintoinen, mutta helposti huomaamatta jäävä, ero näiden kahden lauseen välillä on se, että Blochin lause ei tässä muodossaan sano, että kiekko S olisi välttämättä origokeskinen. Lisäksi funktion injektiivisyys tässä kiekossa ei ole Koeben lauseen tapauksessa mielenkiintoinen, sillä funktion injektiivisyys on jo oletuksessa, mutta Blochin lauseen tapauksessa kyseessä on yllättävä tulos.

2.3. Blochin ja Landaun vakiot

Blochin lauseen jälkeen voidaan kysyä, voidaanko Blochin lausetta parantaa. Tästä inspiroituneena määritellään Blochin ja Landaun vakiot.

Määritelmä 2.12 (Blochin vakio). Olkoon

$$\mathcal{F} = \{f : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{C} \text{ analyyttinen, jolle } f'(0) = 1\}.$$

Olkoon funktiolle $f \in \mathcal{F}$ luku $\beta(f)$ supremum niistä luvuista $r > 0$, joille on olemassa kiekko $S \subset B(0,1)$ siten, että funktio f on injektiivinen kiekossa S ja $f(S)$ sisältää r-säteisen kiekon. Määritellään Blochin vakio olevan luku

$$B = \inf\{\beta(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Tällöin siis Blochin lauseen nojalla $B \geq \frac{1}{72}$. Helposti nähdään myös, että $B \leq 1$, kun tarkastellaan funktiota $f(z) = z$. Parempiakin rajoja on todistettu. Tällä hetkellä tiedetään, että

$$0,4332 \approx \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot 10^{-4} \leq B \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \approx 0,4719$$

missä Γ on gammafunktio, eli

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx.$$

Blochin vakion ylärajan todistivat Ahlfors ja Grunsky [2] vuonna 1937 ja vuonna 1996 Chen ja Gauthier [5] paransivat alarajaa yllä mainittuun.

Määritelmä 2.13 (Landaun vakio). Olkoon $\mathcal{F}$ kuten Blochin vakion määritelmässä. Olkoon funktiolle $f \in \mathcal{F}$ luku

$$\lambda(f) = \sup\{r : f(B(0,1)) \text{ sisältää } r\text{-säteisen kiekon}\}.$$

Määritellään nyt Landaun vakio L seuraavasti

$$L = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Määritelmistä nähdään selvästi, että $B \leq L$ ja funktiota $f(z) = z$ tarkastelemalla nähdään helposti, että $L \leq 1$. Landaun vakiollekaan ei ole tiedossa tarkkaa arvoa, mutta tiedetään, että

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + 10^{-335} < L \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})} \approx 0,5433$$

missä Γ on gammafunktio. Lähteen [9] mukaan ylärajat todisti erikseen R. M. Robinson vuonna 1938 ja Rademacher [23] vuonna 1943, mutta vain jälkimmäinen on julkistanut todistuksensa. He todistivat myös, että $\frac{1}{2} < L$, mutta yllä mainittuun arvoon alarajan paransi Yanagihara vuonna 1995 [26].

LUKU 3

Picardin lauseet

Tässä luvussa todistetaan Picardin lauseet Blochin lausetta hyödyntämällä. Picardin lauseet todisti ensimmäisenä ranskalainen Émile Picard. Lähteiden [25, 24] mukaan tämä on tapahtunut vuonna 1879. Lauseille on myös myöhemmin löydetty monia alkuperäisestä ideasta poikkeavia todistuksia. Tässä luvussa esitettävät todistukset on yhdistelty lähteistä [6, 19]. Todistetaan aluksi pari tarvittavaa lemmaa.

Lemma 3.1. *Olkoon $f : \overline{B}(0,r) \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Tällöin $f(B(0,r))$ sisältää kiekon, jonka säde on $r|f'(0)|L$, missä L on Landaun vakio.*

Todistus. Olkoon $f : \overline{B}(0,r) \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Jos $f'(0) = 0$, niin väite on triviaali. Oletetaan siis, että $f'(0) \neq 0$. Olkoon $g : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{f(rz)}{rf'(0)}.$$

Tällöin siis $g'(0) = 1$. Olkoon $\lambda = \lambda(f)$ kuten Landaun vakion määritelmässä. Tällöin siis määritelmän mukaan on olemassa jono pisteitä $a_n \in g(B(0,1))$ siten, että $B(a_n, \lambda - \frac{1}{n}) \subset g(B(0,1))$ kaikilla $n \geq 1$. Koska $g(B(0,1)) \subset g(\overline{B}(0,1))$, niin on olemassa piste $a \in g(\overline{B}(0,1))$ ja osajono (a_{n_k}) siten, että $a_{n_k} \to a$. Merkitään tätä osajonoa (b_n). Olkoon $|w - a| < \lambda$. Valitaan tällöin n_0 siten, että $|w - a| < \lambda - \frac{1}{n_0}$. Tällöin on olemassa kokonaisluku $n_1 > n_0$ siten, että kun $n \geq n_1$, niin

$$|b_n - a| < \lambda - \frac{1}{n_0} - |w - a|.$$

Siispä kolmiepäyhtälöä hyödyntämällä saadaan

$$|w - b_n| \leq |w - a| + |a - b_n| < \lambda - \frac{1}{n_0} < \lambda - \frac{1}{n},$$

kun $n \geq n_1$. Siis $w \in B(a_n, \lambda - \frac{1}{n}) \subset g(B(0,1))$. Koska w oli mielivaltainen, niin tästä voidaan päätellä että $B(a, \lambda) \subset g(B(0,1))$. Koska $f(z) = rf'(0)g(\frac{z}{r})$, niin tästä saadaan $B(rf'(0)a, r|f'(0)|\lambda) \subset f(B(0,r))$. □

Lemma 3.2. *Olkoon G yhdesti yhtenäinen alue ja olkoon $f : G \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ analyyttinen funktio. Tällöin on olemassa analyyttinen funktio $g : G \to \mathbb{C}$ siten, että*

$$f(z) = -e^{i\pi \cosh(2g(z))}$$

kaikilla $z \in G$. Lisäksi $g(G)$ ei sisällä kiekkoa, jonka säde on 1.

Todistus. Koska $|f(z)| > 0$ kaikilla $z \in G$, niin voidaan määritellä logaritmin haara $l = \log(f(z))$, eli siis $e^l = f$ kaikilla $z \in G$. Olkoon

$$F(z) = \frac{l(z)}{2\pi i}.$$

Jos tällöin jollakin kokonaisluvulla n olisi $F(a) = n$, niin tällöin

$$f(a) = e^{F(a)2\pi i} = e^{2\pi i n} = 1,$$

mikä ei ole funktion f määritelmän perusteella mahdollista. Siispä funktio F ei saavuta kokonaislukuarvoja, joten erityisesti F ei saavuta arvoja 0 ja 1. Siispä funktiot

$$\frac{F'}{F} \text{ ja } \frac{(F-1)'}{F-1}$$

ovat analyyttisiä joukossa G, joten niillä on primitiivit $\log(F)$ ja $\log(F-1)$, joiden avulla voidaan määritellä neliöjuuret

$$\sqrt{F} := e^{\frac{1}{2}\log(F)} \text{ ja } \sqrt{F-1} := e^{\frac{1}{2}\log(F-1)}.$$

Määritellään nyt

$$H(z) := \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1} = \frac{1}{\sqrt{F(z)} + \sqrt{F(z)-1}}.$$

Nyt siis $H(z) \neq 0$, sillä F ei saavuta lukuja 0 ja 1. Siispä joukossa G voidaan määritellä haara $g = \log(H)$. Siispä

$$\begin{aligned}
\cosh(2g) + 1 &= \frac{e^{2g} + e^{-2g}}{2} + 1 = \frac{e^{2g} + 2 + e^{-2g}}{2} = \frac{(e^g + e^{-g})^2}{2} \\
&= \frac{(H + \frac{1}{H})^2}{2} = \frac{(\sqrt{F} - \sqrt{F-1} + \sqrt{F} + \sqrt{F-1})^2}{2} \\
&= \frac{4F}{2} = 2F = \frac{l}{\pi i}.
\end{aligned}$$

Tällöin siis

$$f = e^l = e^{\pi i(\cosh(2g)+1)} = -e^{\pi i \cosh(2g))}.$$

Siispä väitteen yhtälö on nyt todistettu. Todistetaan seuraavaksi, että $g(G)$ ei sisällä kiekkoa, jonka säde on 1.

Olkoot $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}$. jos olisi piste $b \in G$ siten, että

$$g(b) = \pm\log(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}) + \frac{1}{2}in\pi = \pm\log\left(\frac{1}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}}\right) + \frac{1}{2}in\pi,$$

niin

$$\begin{aligned}
2\cosh(2g(b)) &= e^{2g(b)} + e^{-2g(b)} \\
&= e^{in\pi}(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{\pm 2} + e^{-in\pi}(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{\mp 2} \\
&= (-1)^n((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^2 + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^2) \\
&= (-1)^n(2m + 2(m-1)) \\
&= (-1)^n(4m-2))
\end{aligned}$$

eli siis

$$\cosh(2g(b)) = (-1)^n(2m-1)).$$

Siispä

$$f(b) = -e^{(-1)^n(2m-1))\pi i},$$

joten koska $(2m-1)$ on pariton luku, niin $f(a) = 1$. Siispä saatiin ristiriita, joten ei ole olemassa sellaista pistettä $b \in G$, jolle

$$g(b) = \pm \log(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}) + \frac{1}{2} in\pi,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $m \in \mathbb{Z}_+$. Nämä puuttuvat pisteet muodostavat tasolle suorakulmioita, joiden korkeus on

$$\left| \frac{1}{2} im\pi - \frac{1}{2} i(m+1)\pi \right| = \frac{\pi}{2} < \sqrt{3}.$$

Vastaavasti kyseisten suorakulmioiden leveys on

$$\log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) > 0,$$

mikä on laskeva funktio luvun n suhteen, joten suorakulmion leveys on korkeintaan

$$\log(\sqrt{2} + \sqrt{1}) - \log(\sqrt{1} + \sqrt{0}) = \log(\sqrt{2} + 1) < \log(e) = 1,$$

joten suorakulmion lävistäjän pituus on aidosti pienempi kuin $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, joten kompleksitasolle ei mahdu yhtään 1-säteistä kiekkoa siten, ettei jokin mainituista puuttuvista pisteistä sisältyisi siihen. $\square$

3.1. Picardin pieni lause

Tässä vaiheessa todistettujen tulosten avulla voitaisiin todistaa Picardin pieni lause, ks. [6, Luku XII, Theorem 2.3]. Jätetään Picardin pieni lause tässä vaiheessa erikseen todistamatta ja todistetaan se myöhemmin Picardin suuren lauseen seurauksena. Picardin pienen lauseen todisti ensimmäisenä ranskalainen Émile Picard, mutta lauseelle on myös myöhemmin löydetty monia alkuperäisestä ideasta poikkeavia todistuksia.

Lause 3.3 (Picardin pieni lause). *Kokonaiselle ei-vakiolle kuvaukselle $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ joukko $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ sisältää enintään yhden pisteen.*

3.2. Schottkyn lause

Todistetaan seuraavaksi Schottkyn lause, jota hyödynnetään Picardin suuren lauseen todistuksessa. Tässä esitetty todistus mukailee lähteen [6] todistusta.

Lause 3.4 (Schottkyn lause). *Olkoot $0 < \alpha < \infty$ ja $0 \leq \beta \leq 1$. Tällöin on olemassa vakio $C_{\alpha,\beta}$ siten, että jos $f : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, jolle $0, 1 \notin f(\overline{B}(0,1))$ ja jolle $|f(0)| \leq \alpha$, niin pätee $|f(z)| \leq C_{\alpha,\beta}$, kun $|z| \leq \beta$.*

Todistus. Riittää todistaa väite tilanteessa, jossa $2 \leq \alpha < \infty$, koska jos pätee $0 < \alpha < 2$, niin α voidaan korvata luvulla 2, jolloin oletukset ovat edelleen voimassa eikä väite ole muuttunut.

Oletetaan aluksi, että $\frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq \alpha$. Olkoot funktiot F, H ja g kuten lemmassa 3.2 eli

$$F(z) = \frac{l(z)}{2\pi i},$$
$$H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}$$

ja

$$g = \log(H),$$

missä $l = \log(f(z))$ on haara, jossa tässä todistuksessa $0 \leq \mathrm{Im}(l(0)) < 2\pi$ ja vastaavasti funktio g on se haara, jossa $0 \leq \mathrm{Im}(g(0)) < 2\pi$. Tällöin siis

$$|F(0)| = \left|\frac{l(0)}{2\pi i}\right| = \frac{1}{2\pi}|\log|f(0)| + i\,\mathrm{Im}(l(0))| \leq \frac{1}{2\pi}\log(\alpha) + 1.$$

Merkitään nyt $C_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\log(\alpha) + 1$. Lisäksi saadaan

$$\begin{aligned}|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0) - 1}| &\leq |\sqrt{F(0)}| + |\sqrt{F(0) - 1}| \\ &= \sqrt{|F(0)|} + \sqrt{|F(0) - 1|} \\ &\leq \sqrt{C_0(\alpha)} + \sqrt{C_0(\alpha) - 1|}.\end{aligned}$$

Merkitään nyt $C_1(\alpha) = \sqrt{C_0(\alpha)} + \sqrt{C_0(\alpha) - 1|}$. Nyt jos $|H(0)| \geq 1$, niin tällöin

$$\begin{aligned}|g(0)| &= |\log|H(0)| + i\,\mathrm{Im}(g(0))| \\ &\leq \log|H(0)| + 2\pi \\ &\leq \log(C_1(\alpha)) + 2\pi.\end{aligned}$$

Vastaavasti jos $|H(0)| < 1$, niin tällöin

$$\begin{aligned}|g(0)| &\leq -\log|H(0)| + 2\pi \\ &= \log\left(\frac{1}{|H(0)|}\right) + 2\pi \\ &= \log(|\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0) - 1}|) + 2\pi \\ &\leq \log(C_1(\alpha)) + 2\pi.\end{aligned}$$

Merkitään siis $C_2(\alpha) = \log(C_1(\alpha)) + 2\pi$.

Jos $|a| < 1$, niin lemman 3.1 mukaan joukko $g(B(a, (1-|a|)))$ sisältää kiekon, jonka säde on $L(1 - |a|)|g'(a)|$, missä L on Landaun vakio. Toisaalta lemman 3.2 mukaan joukko $g(B(0, 1))$ ei voi sisältää kiekkoa, jonka säde on 1. Siispä nämä yhdistämällä saadaan

$$|g'(a)| < \frac{1}{L(1 - |a|)},$$

kun $|a| < 1$. Jos $|a| < 1$ ja määritellään jana $\gamma = [0, a]$, niin tällöin

$$\begin{aligned}|g'(a)| &\leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \\ &\leq C_2(\alpha) + \left|\int_\gamma g'(z)dz\right| \\ &\leq C_2(\alpha) + |a|\max\{|g'(z)| : z \in [0, a]\} \\ &\leq C_2(\alpha) + \frac{|a|}{L(1 - |a|)}.\end{aligned}$$

Merkitään nyt $C_3(\alpha,\beta) = C_2(\alpha) + \frac{\beta}{L(1-\beta)}$. Tällöin siis jos $|z| \le \beta \le 1$, niin pätee $g(z) \le C_3(\alpha,\beta)$. Siispä jos $|z| \le \beta$, niin tällöin

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |e^{\pi i \cosh(2g(z))}| \\ &\le e^{\pi|\cosh(2g(z))|} \\ &\le e^{\pi e^{2|g(z)|}} \\ &\le e^{\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}}.\end{aligned}$$

Merkitään nyt

$$C_4(\alpha,\beta) = e^{\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}}.$$

Oletetaan seuraavaksi, että $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$. Tällöin funktio $(1-f)$ toteuttaa aiemmin tarkastellun tapauksen oletukset, joten siis $|1-f(z)| \le C_4(2,\beta)$, kun $|z| \le \beta$. Siispä $|f(z)| \le 1 + C_4(2,\beta)$. Määritellään siis

$$C_{\alpha,\beta} = \max\{C_4(\alpha,\beta), 1 + C_4(2,\beta)\}. \quad \square$$

3.3. Picardin suuri lause

Sitten päästäänkin Picardin suureen lauseeseen, jonka todisti ensimmäisenä Émile Picard, mutta lauseelle on myös myöhemmin löydetty monia alkuperäisestä ideasta poikkeavia todistuksia. Tässä esitetty todistus mukailee lähteen [19] todistusta.

Lause 3.5 (Picardin suuri lause). *Olkoon $r > 0$. Jos z_0 on analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste, niin joukossa $\mathbb{C}\setminus f(B(z_0,r)\setminus\{z_0\})$ on korkeintaan yksi piste.*

Todistus. Antiteesi: Olkoot $a, b \in \mathbb{C}\setminus f(B(z_0,r)\setminus\{z_0\})$ kaksi eri pistettä. Tarkastellaan funktiota

$$g(z) = \frac{f(z+z_0) - a}{b-a}.$$

Tällöin $0, 1 \in \mathbb{C}\setminus g(B(0,r)\setminus\{z_0\})$. Lisäksi nähdään, että funktiolla g on oleellinen erikoispiste pisteessä 0, sillä funktion f ainoa oleellinen erikoispiste on pisteessä z_0.

Casorati-Weierstrassin lauseen perusteella on olemassa lukujono (z_n) siten, että $z_n \to 0$ ja $|z_{n+1}| < |z_n| < re^{-2\pi}$ kun $n \ge 1$ ja siten, että $|g(z_n)| < 1$.

Määritellään seuraavaksi jono analyyttisiä funktioita $F_n : B(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$F_n(z) = g(z_n e^{2\pi i z}).$$

Tällöin $F_n(B(0,1)) \subset \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ ja $|F_n(0)| = |g(z_n)| < 1$.

Tällöin soveltamalla Schottkyn lausetta funktioihin F_n arvoilla $\alpha = 1$ ja $\beta = \frac{1}{2}$ saadaan, että on olemassa vakio C siten, että $|F_n(z)| \le C$, kun $|z| \le \frac{1}{2}$, erityisesti siis kun $z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Siispä

$$|g(z_n e^{i\theta})| = \left|F_n(\frac{\theta}{2\pi})\right| \le C,$$

kun $-\pi \le \theta \le \pi$, eli siis $|g(z)| \le C$, kun $|z| = |z_n|$ kaikilla $n \ge 1$. Kun pätee $|z_{n+1}| < |z| < |z_n|$, niin pätee myöskin $|g(z)| \le C$, koska jos olisi jokin w, jolle $|g(w)| > C$, niin funktion g jatkuvuudesta seuraisi, että funktio $|g|$ saavuttaa suurimman arvonsa jossakin pisteessä w_0, jolloin maksimiperiaatteen mukaan g olisi vakio, kun $|z_{n+1}| < |z| < |z_n|$, jolloin myös f olisi vakio, joten siis $g(z) \le C$, kun $|z_{n+1}| \le |z| \le |z_n|$. Koska tämä pätee kaikilla $n \ge 1$ ja $z_n \to 0$, kun $n \to \infty$, niin tästä seuraa, että $g(z) \leq C$, kun $0 < |z| \leq |z_1|$. Tästä kuitenkin seuraa, että piste 0 on funktion g poistuva erikoispiste, eikä oleellinen erikoispiste, sillä funktio g on rajoitettu pisteen 0 ympäristössä. Tämä on siis ristiriita, eli antiteesi on väärä. $\square$

Seuraus 3.6. *Jos z_0 on analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste, niin kaikilla $r > 0$ funktio f saavuttaa yhtä pistettä lukuunottamatta kaikki kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteet äärettömän monta kertaa joukossa $B(z_0, r)$.*

Todistus. Jos jollakin $w \in \mathbb{C}$ on vain äärellisen monta pistettä $z \in B(z_0, r)$, jolle $f(z) = w$, niin tällöin valitsemalla $r_0 < \min(|z| : f(z) = w)$ joukossa $B(z_0, r_0)$ ei ole yhtään pistettä z, jolle $f(z) = w$. Picardin suuren lauseen mukaan näitä pisteitä on korkeintaan yksi. $\square$

Todistetaan seuraavaksi Picardin pieni lause.

Picardin pienen lauseen todistus. Algebran peruslauseen mukaan ei-vakiolle polynomille p on olemassa $z_1 \in \mathbb{C}$, jolle $p(z_1) = 0$. Koska mielivaltaiselle $w \in \mathbb{C}$ myös $p(z) - w$ on polynomi, niin tällöin algebran peruslauseen mukaan myös sillä on juuri $z_2 \in \mathbb{C}$. Tällöin siis $p(z_2) = w$. Siispä jokaisen ei-vakion polynomin kuvajoukko on koko kompleksitaso $\mathbb{C}$. Riittää siis todistaa Picardin pieni lause funktiolle, joka ei ole polynomi. Olkoon funktio f kokonainen funktio, joka ei ole polynomi. Olkoon $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Koska f ei ole polynomi, niin sen sarjaesitys pisteessä 0 on muotoa

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i,$$

missä $a_i \neq 0$ äärettömän monella $i \in \mathbb{N}$, jolloin siis funktion g sarjaesitys pisteessä 0 on muotoa

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i},$$

mistä nähdään, että funktiolla g on oleellinen erikoispiste pisteessä 0. Tällöin Picardin suuren lauseen mukaan joukossa $\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ on korkeintaan yksi piste. $\square$

Todistusta tarkastelemalla nähdään, että käyttämällä Picardin suuren lauseen sijaan seurausta 3.6 saadaan todistettua itseasiassa Picardin pientä lausetta vahvempi tulos.

Seuraus 3.7. *Jos funktio f on kokonainen, mutta ei polynomi, niin tällöin f saavuttaa, korkeintaan yhtä pistettä lukuunottamatta, kaikki kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteet äärettömän monta kertaa.*

Picardin suurella lauseella on myös seuraava mielenkiintoinen seuraus.

Seuraus 3.8. *Kokonainen injektiivinen kuvaus f on muotoa*

$$f(z) = az + b,$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$.

Todistus. Todistetaan, että jos f ei ole väitteessä mainittua muotoa, niin tällöin f ei voi olla injektiivinen.

Jos f on korkeamman asteen polynomi, niin tällöin derivaatta f' on vähintään 1. asteen polynomi, jolloin algebran peruslauseen mukaan on olemassa $z_1 \in \mathbb{C}$, jolle $f'(z_1) = 0$. Tällöin siis lemman 1.8 nojalla f ei voi olla injektio.

Jos f ei ole polynomi, niin tällöin siis funktiolla $f(\frac{1}{z})$ on oleellinen erikoispiste pisteessä 0. Tällöin seurauksen 3.6 mukaan funktio $f(\frac{1}{z})$ saavuttaa yhtä pistettä lukuunottamatta kaikki kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteet äärettömän monta kertaa, eli siis $f(\frac{1}{z})$ ei voi olla injektio, eli myöskään f ei voi olla injektio. $\square$

LUKU 4

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}_+$	Positiivisten kokonaislukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Rationaalilukujen joukko
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko
$[a, b]$	Pisteiden a ja b välinen jana $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + (b - a)t$
$B(z_0, r)$	Avoin kiekko $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z - z_0\rvert < r\}$
$\overline{B}(z_0, r)$	Suljettu kiekko $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z - z_0\rvert \leq r\}$

Lähdeluettelo

[1] Robert A. Adams. *Calculus : a complete course*. Pearson, Toronto, 6th ed edition, 2006.

[2] L. V. Ahlfors and H. Grunsky. Über die blochsche konstante. *Mathematische Zeitschrift*, 42:671–673, 1937. ISSN 1432-1823. doi: 10.1007/BF01160101. http://eudml.org/doc/168740.

[3] Ludwig Bieberbach. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.*, page 940–955, 1916.

[4] André Bloch. Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, 17:1–22, 1925. http://eudml.org/doc/72891.

[5] Huaihui Chen and Paul M. Gauthier. On Bloch's constant. *Journal d'Analyse Mathématique*, 69(1):275–291, Dec 1996. ISSN 1565-8538. doi: 10.1007/BF02787110. https://doi.org/10.1007/BF02787110.

[6] John B. Conway. *Functions of one complex variable*. Graduate texts in mathematics. New York, 2. pr edition, 1975.

[7] Louis de Branges. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154 (1-2):137–152, 1985. doi: 10.1007/BF02392821. https://doi.org/10.1007/BF02392821.

[8] Peter L. Duren. *Univalent functions*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, New York, 1983.

[9] Steven R. Finch. *Mathematical constants*. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, New York, 2003. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&AN=589155.

[10] Mario Gonzalez. *Complex Analysis: Selected Topics*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1991. ISBN 9780824784164.

[11] A. W. Goodman. *Univalent functions. Vol. 1*. Mariner, Tampa, Fla., 1983.

[12] Robert E. Greene and Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variable*. John Wiley & Sons, New York, 1997.

[13] T. H. Grönwall. Some remarks on conformal representation. *Annals of Mathematics*, 16(1/4):72–76, 1914. ISSN 0003486X. http://www.jstor.org/stable/1968044.

[14] Tero Kilpeläinen. Kompleksianalyysin luentomoniste. http://users.jyu.fi/~terok/opetus/kompleksi/kompleksianalyysi.pdf. Arkistoitu kopio: https://web.archive.org/web/20171006082504/http://users.jyu.fi/~terok/opetus/kompleksi/kompleksianalyysi.pdf.

[15] P. Koebe. Ueber die uniformisierung beliebiger analytischer kurven. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1907:191–210, 1907. http://eudml.org/doc/58678.

[16] Wolfram Koepf. Bieberbach's conjecture, the de Branges and Weinstein functions and the Askey-Gasper inequality. *The Ramanujan Journal*, 13(1):103–129, Jun 2007. ISSN 1572-9303. doi: 10.1007/s11139-006-0244-2. https://doi.org/10.1007/s11139-006-0244-2.

[17] Lassi Kurittu. Kompleksianalyysin luentomoniste. http://users.jyu.fi/~lkurittu/kompleksi2017.pdf. Arkistoitu kopio: https://web.archive.org/web/20170718123111/http://users.jyu.fi/~lkurittu/kompleksi2017.pdf.

[18] J. E. Littlewood. On inequalities in the theory of functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-23(1):481–519, 1925. ISSN 1460-244X. doi: 10.1112/plms/s2-23.1.481. http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-23.1.481.

[19] Raghavan Narasimhan. *Complex analysis in one variable*. Birkhäuser, Boston, Mass., 1985.

[20] Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, New York, 1975. Originally published by the MacGraw-Hill in 1952.

[21] Christian Pommerenke. *Univalent functions*. Studia mathematica. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[22] Veikko T. Purmonen. *Integraalilaskentaa. 2*. Luentomoniste / Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 2006.

[23] Hans Rademacher. On the Bloch-Landau constant. *American Journal of Mathematics*, 65(3):387–390, 1943. ISSN 00029327, 10806377. http://www.jstor.org/stable/2371963.

[24] Reinhold Remmert. *Classical Topics in Complex Function Theory*. Springer New York, New York, NY, 1998. ISBN 978-1-4757-2956-6. doi: 10.1007/978-1-4757-2956-6_10. https://archive.org/details/springer_10.1007-978-1-4757-2956-6.

[25] Sanford L. Segal. *Nine introductions in complex analysis*. North-Holland mathematics studies. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981.

[26] H. Yanagihara. On the locally univalent Bloch constant. *Journal d'Analyse Mathematique*, 65(1):1–17, Dec 1995. ISSN 1565-8538. doi: 10.1007/BF02788763. https://doi.org/10.1007/BF02788763.