# PONNAHDUSLAUTA UUSIIN MATEMAATTISIIN HAASTEISIIN

## Korkeakouluopintoihin valmistavan matematiikan verkkokurssin kehittäminen

Hauhia Milla, Niemi Kalle, Suonto Henri

Pro gradu -työ
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2018

## Esipuhe

Kurssin kehittäminen on ollut meille opiskelijoille erittäin opettava ja antoisa kokemus, ja haluamme kiittää EduFutura Jyväskylää tämän projektin mahdollistamisesta sekä Jyväskylän ammattikorkeakoulun ja Jyväskylän koulutuskuntayhtymän edustajia hedelmällisestä yhteistyöstä. Lisäksi haluamme erityisesti kiittää ohjaajiamme Petriä ja Annia rakentavista kommenteista, monipuolisesta palautteesta sekä opettavaisista huomioista.

## Tiivistelmä

Tämän pro gradu -työn tarkoituksena on esitellä kesällä 2017 laajennetun korkeakouluopintoihin valmistavan matematiikan MathMarket-verkkokurssin kehittämisen vaiheita. Työssä keskitytään niihin tehtäväkokonaisuuksiin, joiden laatimisesta vastasivat tämän työn kirjoittaneet matematiikan aineenopettajaopiskelijat. MathMarket-kurssin tavoitteena oli helpottaa siirtymää matematiikan korkeakouluopintoihin ja aktivoida opiskelijoiden matematiikan osaamista ennen varsinaisten opintojen alkamista. EduFutura Jyväskylän rahoittama MathMarket-verkkokurssi toteutettiin yhteistyössä Jyväskylän yliopiston, Jyväskylän ammattikorkeakoulun ja Jyväskylän koulutuskuntayhtymän kanssa.

MathMarket-kurssin haluttiin olevan kevyt ja motivoiva aloitus korkeakoulumatematiikkaan. Kurssi jaettiin kahteen osaan, joista ensimmäinen oli opiskelijan lähtötason mukainen kertausosa ja toinen korkeakoulumatematiikkaan valmistava osa. Kurssista saatu opiskelijapalaute oli positiivista ja kannustavaa. Opiskelijat kokivat tarpeelliseksi kerrata matematiikkaa ennen korkeakouluopintojen alkamista. Kurssia aiotaankin tulevaisuudessa kehittää ja laajentaa entistä kattavammaksi ja monipuolisemmaksi.

# Sisällysluettelo

# 1. Johdanto

Vuonna 2016 Jyväskylän ammattikorkeakoulun teknologiayksikössä järjestettiin ensimmäisen kerran korkeakouluopintoihin valmistava matematiikan MathMarket-verkkokurssi. Kurssista saadun palautteen perusteella matematiikan itsenäiselle kertaamiselle ennen korkeakouluopintoja oli selkeä tarve, joten kurssia päätettiin laajentaa ja kehittää keväällä 2017. Jyväskylän ammattikorkeakoulun teknologiayksikön lisäksi kurssin kehittämiseen yhtyivät Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos sekä Jyväskylän koulutuskuntayhtymä. EduFutura Jyväskylä toimi sen rahoittajana. Oppilaitosorganisaatioiden edustajista muodostettiin MathMarket-työryhmä, jonka tarkoituksena oli laajentaa olemassa olevaa sisältöä. Kurssin tuli palvella sekä Jyväskylän ammattikorkeakoulun teknologiayksikön että Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen uusia opiskelijoita.

Tämä pro gradu -työ keskittyy Jyväskylän yliopiston edustajien Petri Juutisen ja Anni Laitisen johdolla rakennettuihin MathMarket-kurssin tehtäväkokonaisuuksiin, joiden laatimisesta vastasivat matematiikan aineenopettajaopiskelijat Milla Hauhia, Kalle Niemi ja Henri Suonto. Luvussa 2 käsitellään kurssin suunnittelun alkuvaihetta, jossa kartoitettiin oppilaitosorganisaatioiden tarpeita matematiikan kertauskurssille. Kurssin osat ja sisällöt päätettiin työryhmässä. Osien rakenne, sisältö ja suoritustapa ovat esiteltynä luvussa 3. Luvussa 4 käsitellään aineenopettajaopiskelijoiden laatimien tehtäväkokonaisuuksien valikoituja tehtäviä yksityiskohtaisemmin. Luvussa 5 käydään läpi opiskelijoiden antamaa kurssipalautetta ja niiden pohjalta saatuja jatkokehitysideoita.

## 2. MathMarket-kurssin kehittämisprojektin taustaa

Vuonna 2016 MathMarket-verkkokurssi palveli ammatillisen väylän kautta hyväksytyiksi tulleita Jyväskylän ammattikorkeakoulun teknologiayksikön opiskelijoita. Kehittämisprojektin tarkoituksena oli laajentaa kurssi palvelemaan myös niitä opiskelijoita, jotka olivat lukion jälkeen hyväksytty opiskelemaan joko Jyväskylän ammattikorkeakoulun teknologiayksikköön tai Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitokselle.

MathMarket-kurssin tavoitteena oli auttaa uusia korkeakouluopiskelijoita kertaamaan tulevissa opinnoissa tarvittavia matematiikan oppisisältöjä ottaen huomioon heidän aikaisemman matemaattisen osaamisensa. Muita kurssin tavoitteita olivat opiskelijan motivointi matematiikan opiskeluun sekä siirtymän helpottaminen ensimmäisen tai toisen asteen matematiikan opinnoista korkeakoulumatematiikkaan. Kurssi oli tarkoitettu suoritettavaksi ennen varsinaisten opintojen alkamista. Se rakennettiin Jyväskylän yliopiston Moodle-oppimisympäristöön, ja sitä pilotoitiin tässä laajuudessa kesällä 2017. Kurssin kehittämiseen osallistuivat MathMarket-työryhmän jäsenet Hauhia Milla, Jaakkola Henri, Juutinen Petri, Ketonen Joonas, Kotimäki Ville, Kuokkanen Niilo, Laitinen Anni, Laitinen Teemu, Nevala Sanna, Niemi Kalle, Rantakaulio Anne, Suontausta Sirpa ja Suonto Henri.

Matematiikan aineenopettajaopiskelijat vastasivat tehtävien tekemisestä kurssin uusiin osiin. Ensimmäinen uusi osa oli tarkoitettu sekä ammattikorkeakoulun insinööriopiskelijoille että yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen opiskelijoille, jotka olivat opiskelleet lukiossa matematiikan pitkän oppimäärän. Toisen uuden osan tarkoitus oli valmentaa yliopistomatematiikkaan.

### 2.1. Tarve MathMarket-kurssille Jyväskylän yliopistossa

Ennen MathMarket-kurssin kehittämistä tehtiin ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoille suunnattu kysely (45 vastaajaa) sekä yliopiston opettajien haastattelu (kuusi osallistujaa), joiden avulla kartoitettiin matematiikan ja tilastotieteen laitoksen tarvetta matematiikan kertauskurssille. Kyselyn ja haastatteluiden kautta oli tarkoitus saada myös tietoa siitä, millaista matematiikkaa kurssilla olisi hyvä kerrata.

### 2.1.1. Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen opettajien haastattelu

Haastatteluilla kartoitettiin yliopiston opettajien käsityksiä siitä, mitä asioita MathMarket-kurssilla olisi tarpeellisinta kerrata, ja minkälaisia ovat näihin aiheisiin liittyvät yleisimmät virhekäsitykset. Haastattelut aloitettiin esittelemällä MathMarket-kurssin pääajatus ja tavoitteet, minkä jälkeen haastateltavia pyydettiin lyhyesti vastaamaan seuraaviin kysymyksiin:

1. Missä matematiikan aihealueissa ensimmäisen vuoden opiskelijoilla on eniten hankaluuksia? Mitä asioita olisi mielestäsi oleellisinta kerrata MathMarket-etäkurssilla? Nimeä viisi mielestäsi tärkeintä.

2. Minkälaisia ovat näihin aiheisiin liittyvät tyypillisimmät virheet tai virhekäsitykset?

Haastatteluihin osallistui kuusi opettajaa Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitokselta. Viisi heistä oli matematiikan opettajia ja yksi tilastotieteen. Yliopiston opettajat yleisesti ottaen kokivat, että vasta-aloittaneiden opiskelijoiden on hankala omaksua uusia matemaattisia käsitteitä ja ongelmanratkaisutapoja silloin, kun vanhojen oppisisältöjen osaaminen ei ole sujuvaa. Opettajien mukaan uusia asioita opiskeltaessa vanhojen asioiden kertaamiseen on usein mennyt liikaa aikaa ja energiaa, jolloin huomio siirtyy pois uudesta aiheesta. Haastateltujen opettajien mukaan yliopiston ensimmäisillä matematiikan kursseilla opiskelijoilla on eniten ongelmia peruslaskutoimitusten kanssa, vaikka niitä harjoitellaankin lukiossa paljon. Lähes jokainen haastateltava mainitsi tarpeelliseksi kerrattavaksi asiaksi murtolukujen laskutoimitukset. Peruslaskutoimitusten saralta opettajat mainitsivat tarpeellisiksi myös potenssit, laskujärjestyksen, juuret, itseisarvot, neliöksi täydentämisen ja yhteisten tekijöiden ottamisen.

Toinen lähes jokaisen haastateltavan mielestä kertaamista vaativa asia oli funktio. Haastatteluissa kävi ilmi, että funktion käsite ei ole opiskelijoille selvä asia, vaikka funktioitakin käsitellään lukiossa paljon. Opettajat kertoivat myös, että opiskelijat usein luulevat kaikkien funktioiden olevan lineaarisia. Esimerkiksi opiskelijat saattavat virheellisesti olettaa, että $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$. Funktioon liittyvistä asioista haastateltavat mainitsivat tärkeiksi kerrattaviksi funktion arvon ja nollakohdan, funktion kuvaajan tulkitsemisen (esimerkiksi arvo, raja-arvo, derivaatta tai funktion lauseke), trigonometriset funktiot sekä logaritmi- ja eksponenttifunktion.

Useampi haastateltava nimesi myös seuraavat kerrattavat aihealueet: epäyhtälöt (erityisesti negatiivisella luvulla kertominen), trigonometria sekä logiikka (pieniä päättelyitä, maalaisjärkeilyä, yksinkertaisia määritelmiä, luetun ymmärtämisen kehittämistä). Lisäksi yksittäisten haastateltavien mainitsemia kerrattavia asioita olivat derivointi ja integrointi, suoran yhtälö, matemaattiset merkinnät sekä vektorit.

### 2.1.2. Ensimmäisen vuoden matematiikan opiskelijoiden kysely

Ensimmäisen vuosikurssin matematiikan opiskelijoista 45 vastasi kyselyyn, jossa kysyttiin avoimen kysymyksen kautta, minkä aihealueiden kertaamisesta opiskelijat olisivat kokeneet olleen hyötyä ennen matematiikan yliopisto-opintojen alkua. Vastanneista 45 opiskelijasta vain kuusi koki, että pärjäsi opinnoissaan hyvin ilman kertaamistakin ja kolme antoi vaikeasti tulkittavan vastauksen. Loput 36 vastaajaa oli sitä mieltä, että kertaaminen olisi tullut tarpeeseen ennen opintojen alkua. Kahdeksan opiskelijaa vastasi, että jonkinlainen kokonaisvaltainen kertaaminen olisi ollut hyödyllistä, joko palauttamaan asiat mieliin tai vain lämmittelemään yliopisto-opintoja varten.

> *”Lähes kaikki asiat olivat varsin hyvin itselläni muistissa, mutta kertaus mistä tahansa aiheesta ei olisi kuitenkaan ollut pahitteeksi. Pikemminkin olisin tarvinnut alle ylipäätänsä jotain laskurutiinia helpohkoista tehtävistä ikään kuin lämmittelyksi.”*

> *”Kaikki, varsinkin kun välivuoden takia edellisestä matikan kurssista oli yli vuosi. Nopeasti kuitenkin asiat palautunut mieleen, kun lähtenyt laskemaan.”*

Jopa 11 opiskelijaa koki, että olisi tarvinnut tukea todistamisen kertaamiseen ennen yliopiston matematiikan opintojen alkua. Vastanneista kymmenen olisi halunnut kertausta derivaatan ja integraalin laskemiseen ja kuusi olisi toivonut vektoreita kerrattavaksi. Muita opiskelijoiden mainitsemia aihealueita olivat muun muassa trigonometria, geometria ja raja-arvo.

Kyselyssä opiskelijoita pyydettiin arvioimaan omaa osaamistaan tietyillä matematiikan osa-alueilla ennen matematiikan opintojen aloittamista (Taulukko 1). Opiskelijoista 93 % koki hallitsevansa potenssien laskusäännöt ja 84 % rationaalilausekkeet melko tai erittäin sujuvasti. Parhaiten opiskelijat kokivat osaavansa yhtälöt ja polynomit. Opiskelijoista 84 % vastasi osaavansa myös derivaatan ja integraalin melko tai erittäin sujuvasti. Heikoiten opiskelijat kokivat hallitsevansa vektorit, analyyttisen geometrian, raja-arvot, trigonometriset funktiot sekä prosentti- ja todennäköisyyslaskennan.

*Taulukko 1. Opiskelijoiden oma arvio matematiikan sisältöjen osaamisesta ennen opintojen alkua.*

| | Erittäin heikko | Melko heikko | Melko sujuva | Erittäin sujuva | **Melko tai erittäin sujuva** |
|---|---|---|---|---|---|
| Yhtälöt | 0 % | 2 % | 27 % | 71 % | **98 %** |
| Polynomit | 0 % | 7 % | 33 % | 60 % | **93 %** |
| Potenssien laskusäännöt | 0 % | 7 % | 38 % | 56 % | **93 %** |
| Rationaalilausekkeet | 2 % | 13 % | 60 % | 24 % | **84 %** |
| Derivaatta ja integraali | 2 % | 13 % | 56 % | 29 % | **84 %** |
| Tasogeometria | 2 % | 22 % | 51 % | 24 % | **76 %** |
| Eksponentti- ja logaritmifunktiot | 0 % | 27 % | 64 % | 9 % | **73 %** |
| Prosentti- ja todennäköisyyslaskenta | 2 % | 31 % | 56 % | 11 % | **67 %** |
| Trigonometriset funktiot | 9 % | 29 % | 44 % | 18 % | **62 %** |
| Raja-arvot | 0 % | 38 % | 47 % | 16 % | **62 %** |
| Analyyttinen geometria | 9 % | 31 % | 44 % | 16 % | **60 %** |
| Vektorit | 9 % | 31 % | 47 % | 13 % | **60 %** |

Matematiikan osa-alueiden osaamisen lisäksi opiskelijoilta pyydettiin arviota matematiikkaan liittyvistä kognitiivisista taidoista ennen yliopisto-opintojen alkua. Vastanneista 58 % ilmoitti taitonsa matemaattiseen perusteluun ja todistamiseen olleen erittäin tai melko heikkoa.

### 2.1.3. Yhteenveto haastatteluista ja kyselystä

Tehtyjen haastattelujen ja kyselyiden pohjalta voidaan sanoa, että MathMarket-kertauskurssille oli Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella selkeä tarve. Opiskelijat uskovat opintojen lähtevän huomattavasti sujuvammin käyntiin, kun juuri ennen opintojaan palauttelee vanhoja asioita mieliin ja saa hieman lämmittelyä matematiikan laskurutiinien kanssa.

Opiskelijoille tehty kysely ja opettajien haastattelut antoivat hieman toisistaan poikkeavia tuloksia. Yliopiston opettajien mielestä opiskelijat tarvitsevat kertausta erityisesti peruslaskutoimituksista, kun taas opiskelijat kokevat hallitsevansa peruslaskutoimitukset hyvin. On mahdollista, että opiskelijoilla on tiedostamattomia virhekäsityksiä peruslaskutoimitusten suhteen.

Sekä kysely että haastattelut osoittavat, että funktioita ja analyyttista geometriaa kannattaisi kerrata ennen opintojen aloittamista. Hyviä kerrattavia aiheita ovat ainakin funktion käsite, funktion kuvaajan tulkitseminen, trigonometriset funktiot, eksponentti- ja logaritmifunktiot sekä raja-arvot. Erityisen vahvasti opiskelijoilta nousi esille tarve matemaattisen päättelyn ja todistamisen harjoitteluun. Myös haastelluista opettajista kaksi oli sitä mieltä, että logiikkaa olisi syytä kerrata esimerkiksi pienten päättelytehtävien muodossa.

MathMarket-kurssin avulla opiskelija voisi muodostaa paremman käsityksen siitä, mitä kursseja hänen kannattaa ensimmäiselle opiskeluvuodelleen valita. Jyväskylän yliopiston ensimmäisen vuoden matematiikan kursseja uudistettiin lukuvuonna 2016-2017 siten, että uusille opiskelijoille oli tarjolla kaksi vaihtoehtoista tapaa opintojen aloittamiseen (Taulukko 2). Opiskelijat aloittivat joko *Calculus*-kursseista (perusopinnot) tai suoraan matemaattisen analyysin kursseista (aineopinnot). Muilta osin ensimmäisen vuoden opinnot olivat kaikille samat. *Calculus 1* ja *2* -kurssit käsittelevät lukio-omaisesti yhden muuttujan reaalifunktion differentiaalilaskentaa ja johdattelevat yliopistomatematiikkaan. Matemaattisen analyysin kursseilla esitellään opiskelijoille uusia käsitteitä sekä matemaattinen todistaminen. *Calculus*-kursseilla siis painotetaan laskemista, kun taas analyysin kursseilla käsitellään abstraktia matemaattista teoriaa ja todistamista. Esimerkiksi epsilon–delta-todistus raja-arvon yhteydessä esitellään vasta analyysin kursseilla. (JYU 2017).

*Taulukko 2. Jyväskylän yliopiston ensimmäisen vuoden kurssien Calculus sekä Johdatus matemaattiseen analyysiin (JMA) sisällöt (JYU 2017).*

| Kurssi | Sisällöt |
|---|---|
| Calculus 1 | Raja-arvo, jatkuvuus, derivaatta, eräitä alkeisfunktioita ja niiden ominaisuuksia, yhtälöitä ja joukkoja reaaliakselilla ja tasossa. |
| Calculus 2 | Funktion monotonisuus, käänteisfunktiot, derivaatan sovellukset, ääriarvot, Riemann-integraali, antiderivaatta, analyysin peruslause, integroinnin sovellukset, eräiden alkeisfunktioiden ominaisuudet |
| JMA 1 | Reaaliluvut, epäyhtälöt, supremum ja infimum, lukujonot ja niiden suppeneminen, eräitä alkeisfunktioita |
| JMA 2 | Lukujonojen kertaus, jatkuvuus ja raja-arvo, jatkuvien funktioiden perustuloksia. |

Mikäli MathMarket-verkkokurssi sujuisi opiskelijalta vaivattomasti, voisi hän harkita siirtymistä suoraan analyysin pariin. Jos taas MathMarket-kurssilla kerratut lukion asiat tuntuvat tuottavan opiskelijalle paljon hankaluuksia, kannattaisi hänen ehkä aloittaa *Calculus*-kursseilla.

## 2.2. Tarve MathMarket-kurssille Jyväskylän ammattikorkeakoulussa

Jyväskylän ammattikorkeakoulun tekniikan ja liikenteen alan tarpeita MathMarket-kurssille kartoitettiin haastattelemalla kyseisten alojen matematiikan opettajia. Haastateltaville lähetettiin etukäteen sähköpostilla haastattelupohja, jossa kerrottiin haastattelun tarkoituksena olevan selvittää, mitä matematiikan taitoja lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden olisi hyvä kerrata ennen opintojen aloittamista. Lisäksi sähköpostissa kerrottiin, että näiden tietojen avulla laadittaisiin uusi osio MathMarket-kurssille. Haastatteluja tehtiin kolme, ja lisäksi yksi opettaja vastasi sähköpostilla haastattelupohjan kysymyksiin.

Haastateltavien kommenteissa esiintyy viittauksia Jyväskylän ammattikorkeakoulun matematiikan kursseihin. Kommenttien ja ammattikorkeakoulun matematiikan tarpeiden ymmärtämiseksi on syytä tutustua insinööriopiskelijoiden ensimmäisen vuoden matematiikan kursseihin (Taulukko 3). Kaikille insinööriopiskelijoille yhteisiä ensimmäisen vuoden kursseja ovat *Matematiikka 1 ja 2* -kurssit (tai vastaavat kurssit). Ainoastaan tieto- ja viestintätekniikan tutkinto-ohjelman opiskelijat opiskelevat *Matematiikka 2* -kurssin vasta toisen vuoden syksyllä. Tieto- ja viestintätekniikan tutkinto-ohjelman opiskelijoille järjestetään ensimmäisen vuoden syksyllä vapaavalintainen *Matematiikan tukiopinnot* -kurssi, jossa harjoitellaan niitä matematiikan perustaitoja, joita tarvitaan tulevissa matematiikan opinnoissa.

*Taulukko 3. Insinööriopiskelijoiden ensimmäisen vuoden matematiikan kurssien sisällöt (JAMK 2017).*

| **Kurssi** | **Sisällöt** |
|---|---|
| Matematiikan tukiopinnot | Algebran peruslaskutoimitukset, potenssien laskusäännöt, lausekkeiden sieventäminen, ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen, prosenttilaskenta, yhtälön muodostaminen sanallisesta tehtävästä, koordinaatiston käyttö, suoran piirtäminen ja suorakulmaisen kolmion trigonometria. |
| Matematiikka 1 | Algebran peruslaskutoimitukset, yhtälöt, yhtälöryhmät, trigonometria, alkeisfunktiot, kompleksiluvun käsite, insinööritieteiden sovelluksia sekä mahdollisesti matriiseja, geometriaa ja talouselämän sovelluksia. |
| Matematiikka 2 | Funktioiden perusoperaatiot, raja-arvo ja jatkuvuus, derivaatta ja integraali sekä näiden käsitteiden sovelluksia. |

Jyväskylän ammattikorkeakoulun matematiikan opettajien haastattelut osoittivat, että lukion pitkän matematiikan oppimäärän opiskelu antaa erinomaiset valmiudet erityisesti *Matematiikka 1 ja 2* -kurssien opiskeluun. Haastateltavat totesivat seuraavaa:

> *”Meidän Matematiikka 1 ja 2 ovat pitkän matematiikan lukijoille pääsääntöisesti kertauskursseja. Aiheet ovat löytyneet jo lukiosta.”*

> *”Jos on opiskellut pitkän matematiikan kohtuullisen hyvällä tasolla, niin niillä tiedoilla pystyy meidän kurssit hyvin hallitsemaan… Tekisi mieli*

*sanoa, että heillä ei ole suuria vaikeuksia… Jos tässä meidän porukassa joku on käynyt pitkän matikan, niin se on melkein huoleton tapaus.”*

Eräs haastateltava totesi, että ammattikorkeakouluun tullessa riittää, kun hallitsee yläkoulun matematiikan. Ammattikorkeakoulun kurssit jatkavat yläkoulun jälkeiseltä tasolta.

*”Me toivottaisiin, että he osaisivat vähintään yläastematematiikan. Meidän kurssit on nyt spesifioitu niin, että ne lähtevät yläasteen eivätkä toisen asteen jälkeen.*”

Haastateltavien kommentteja tukee Sulkakosken (2016) väitöskirja. Sulkakosken tutkimuksen mukaan ammattikorkeakoulun tekniikan ja liikenteen alan opetussuunnitelman sisällöt katetaan hyvin lukion pitkän matematiikan pakollisilla kursseilla. Lukiossa pitkän oppimäärän lukeneet olivat oppineet parhaiten juuri niitä taitoja, joita myös ammattikorkeakoulussa tarvitaan. (Sulkakoski 2016: 96-99, 161).

MathMarket-kurssia haastatellut opettajat pitivät silti tarpeellisena. Kaksi näkökulmaa nousi esille: ensinnäkin kurssia voisi käyttää kertaamiseen, jos lukion käymisestä on kulunut jo useampi vuosi. Toiseksi kurssi voi motivoida matematiikan opiskeluun, jos kurssilla käytettäisiin ammattialaan liittyviä konkreettisia esimerkkejä.

*”Se voisi olla ehkä sellaisille pitkän matematiikan opiskelijoille, joilla vaikka armeija on tyhjentänyt pään täysin tai muuten on ollut monta vuotta taukoa, että pitäisi niin kuin palauttaa mieleen.*”

*”Osa vois olla sellaista tiettyä motivointia… Lukiolaiselle se voisi olla niin kuin ”hei täällä voi tehdä kaikkea hyvin konkreettista”. Vähän motivoivia esimerkkejä integraalilaskentaan jostain massakeskipistetyyppisten laskemisesta, ne ovat aina johonkin konkreettiseen liittyviä.”*

Eräs haastateltava toivoi matematiikan pitkän oppimäärän lukeneiden kertaavan ennen insinööriopintojen alkua *Matematiikan tukiopinnot* -kurssin (Taulukko 3) sisältöjä. Myös muut opettajat toivoivat samojen aihealueiden kertausta, vaikka eivät kurssia maininneet.

*”Voisi kerrata perusasiat: murtolukujen laskutoimitukset, potenssisääntöjä… Ne varmaan joskus on osattu, mutta ne on saattanut unohtua. Ihan perusasioita: yhtälön pyörittelyä, ihan peruskouluasioitakin, sulkujen käyttöä, murtolausekkeita… suoran käsite, plus-miinus kerto- ja jakolasku, luvut.”*

Haastattelujen perusteella koettiin tärkeäksi kerrata peruslaskutoimitukset, potenssien laskusäännöt, lausekkeiden sieventäminen, ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen, prosenttilaskenta, yhtälön muodostaminen sanallisesta tehtävästä, koordinaatiston käyttö, suoran piirtäminen ja suorakulmaisen kolmion trigonometria. Tätä havaintoa tukee myös Sulkakosken (2016) tutkimus. Sulkakoski on tutkinut lukion matematiikan oppisisältöjen tärkeysjärjestystä ammattikorkeakoulujen insinööriopinnoissa (Kuva 1). Tärkeimmiksi oppisisällöiksi Sulkakoski määrittelee juuri yllä olevat poissulkien prosenttilaskennan sekä lisäten derivaatan ja integraalilaskennan. (Sulkakoski 2016: 91-93.) Derivaatan ja integraalilaskennan kertaamiselle ei haastatteluissa nähty tarvetta, koska nämä aihealueet käydään läpi alusta lähtien ammattikorkeakoulun matematiikan kursseilla.


*Kuva 1. Lukion matematiikan oppisisältöjen tärkeysjärjestys insinööriopiskelijoiden kokemusten mukaan (Sulkakoski 2006: 91).*

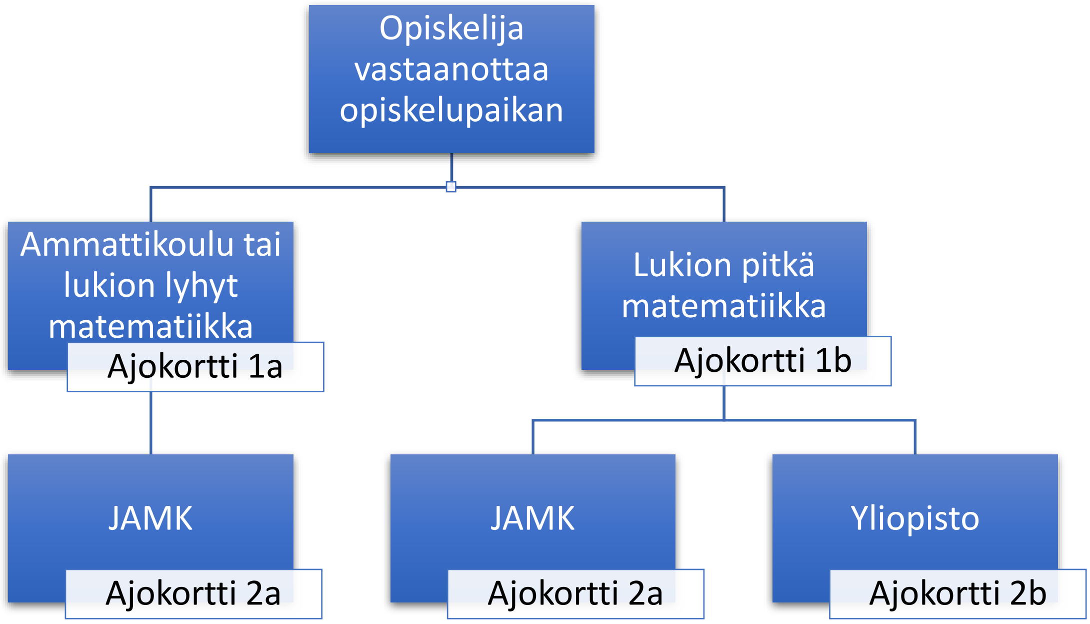
Haastatellut halusivat monipuolisuutta ja käytännönläheisyyttä tehtäviin. Opettajat toivoivat esimerkiksi käytettävän erilaisia matemaattisia merkintätapoja, eri muuttujia sekä soveltavia käytäntöön liittyviä sanallisia tehtäviä. Ammattikorkeakoulussa käytetty matematiikan kieli poikkeaa lukiomatematiikan kielestä, joten kurssille haluttiin tehtäviä, joiden kautta opiskelijan olisi mahdollista monipuolistaa kykyään omaksua erilaista matematiikan kieltä. Ammattikorkeakoulussa ammattiaineiden opettajilla saattaa olla käytössä erilaisia matemaattisia merkintätapoja, joihin opiskelijoiden on hyvä tottua.

## 3. MathMarket-kurssin uusittu rakenne ja sisältö

Jyväskylän ammattikorkeakoulun matematiikan opettajat Anne Rantakaulio (tekniikan ala), Niilo Kuokkanen (hyvinvointiala) ja Teemu Laitinen (liiketalouden ala) olivat rakentaneet MathMarket-kurssin ensimmäisen kerran keväällä 2016 osana *Omalle polulle korkeakouluun* -hanketta. Kurssi oli suoritettavana verkossa Optima-ympäristössä ennen ammattikorkeakoulun aloittamista. Kurssia kokeilivat ensimmäisenä Jyväskylän ammattikorkeakoulun teknologiayksikön teollisuustekniikan aloittavat opiskelijat, jotka olivat saaneet opiskelupaikan ammatilliselta väylältä. Alkuperäisellä MathMarket-kurssilla kerrattiin peruskoulutasoista matematiikkaa ja se sai hyvän vastaanoton: 55 opiskelijasta 94 % piti alkuperäistä MathMarket-kurssia hyvin tarpeellisena.

Kurssin jatkokehitys ja laajennus aloitettiin keväällä 2017. Peruskoulutasoisen matematiikan lisäksi kurssin haluttiin kertaavan myös lukion lyhyen ja pitkän matematiikan osa-alueita. Mukaan kehittämishankkeeseen lähtivät Jyväskylän ammattikorkeakoulun lisäksi Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos sekä Jyväskylän koulutuskuntayhtymä. Mukana olevista organisaatioista muodostettiin MathMarket-työryhmä, joka vastasi kurssin kehityksestä ja laajentamisesta. Työryhmässä päätettiin, että kurssi jaetaan neljään osaan ja että Jyväskylän ammattikorkeakoulu ja Jyväskylän koulutuskuntayhtymä vastaavat jo olemassa olevien osien (peruskoulumatematiikan kertaava osa ja ammattikorkeakoulumatematiikkaan johdatteleva osa) laajentamisesta ja tehtävien kehittämisestä. Jyväskylän yliopiston tehtävänä taas oli vastata uusien osien (lukion pitkän matematiikan kertaava osa ja yliopistomatematiikkaan valmistava osa) tehtävien luomisesta.

MathMarket-työryhmässä sovittiin, että kurssin neljän osan nimet ovat Ajokortti 1a ja 1b (kertaavat osat) sekä Ajokortti 2a ja 2b (korkeakouluopintoihin johdattelevat osat). Kukin Ajokortti laadittiin omaksi kokonaisuudekseen, joihin sisältyi harjoitustehtäviä, kokeita ja erimuotoisia tukimateriaaleja. Opiskelija valitsi Ajokorteista kaksi riippuen matemaattisesta lähtötasostaan ja siitä, mihin oppilaitokseen opiskelija oli tulossa opiskelemaan (Kuva 2).

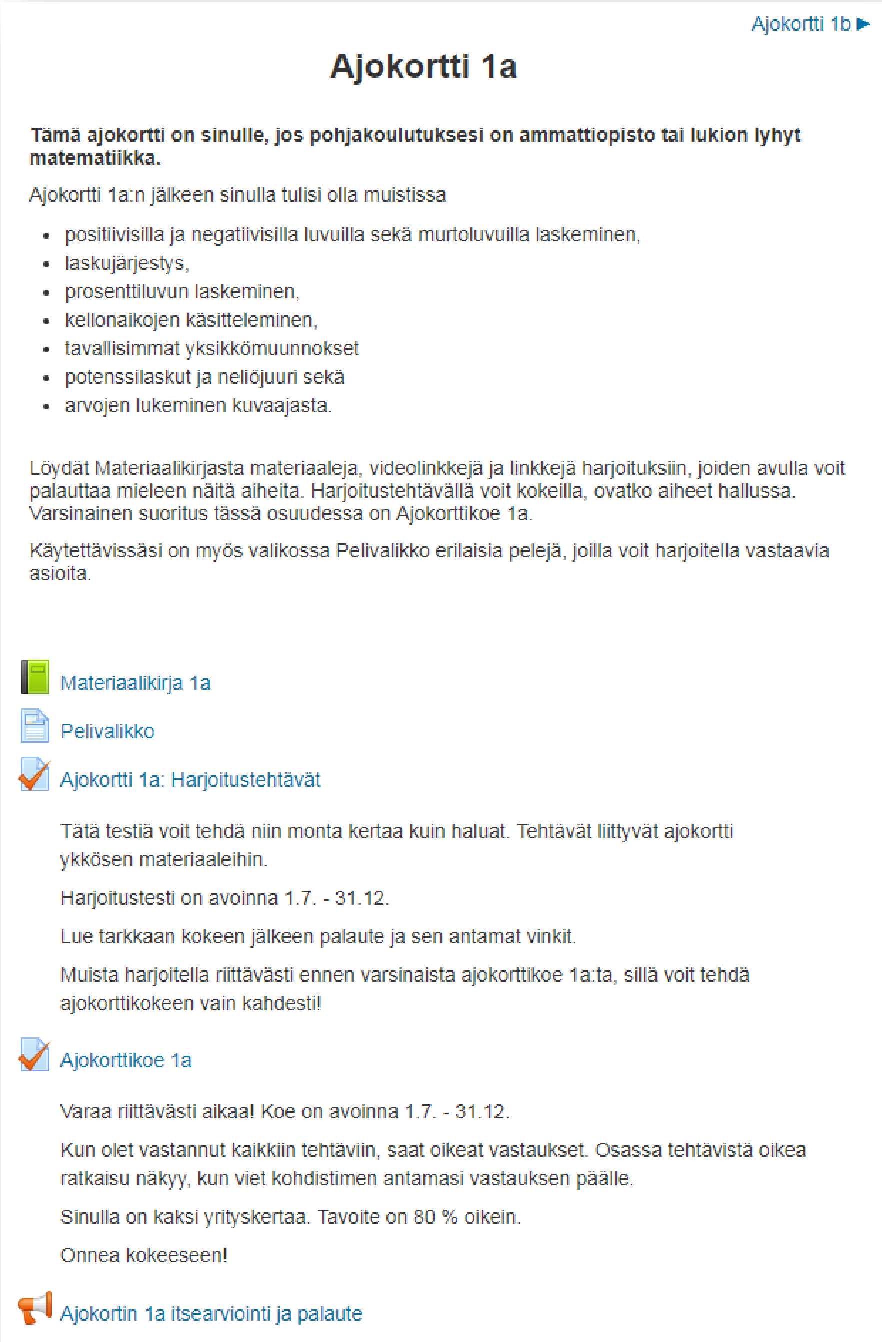



*Kuva 2. Opiskelijan suoritettavat Ajokortit MathMarket-kurssilla.*

Opiskelijoille MathMarket-kurssi oli avoin siten, että opiskelija pystyi kertaamaan matematiikkaa miltä tahansa Ajokortilta. Kurssista suoritusmerkintää ei kuitenkaan myönnetty ennen kuin oli suorittanut oman korkeakoulunsa määräämät Ajokortit. Tässä luvussa esitellään kaikki Ajokortit, mutta keskitytään ensi sijassa Ajokortteihin 1b ja 2b, joiden tehtävien laatimisesta vastasivat aineenopettajaopiskelijat.

## 3.1. Ajokortti 1a

Ajokortti 1a oli tarkoitettu ammattikoulupohjaisille tai lukion matematiikan lyhyen oppimäärän lukeneille opiskelijoille. Ajokortissa kerrattiin paljon peruskoulutasoista matematiikkaa, sisältöinä olivat murtoluvut, laskujärjestys, prosenttiluvut, kellonajat, potenssit ja neliöjuuret, yksikönmuunnokset sekä koordinaatisto ja kuvaajat. Kuva 3 esittää Ajokortin 1a opiskelijan etusivun Moodle-oppimisympäristössä. Suorittaakseen Ajokortin opiskelijan tuli ratkaista ajokorttikokeen 20 tehtävästä vähintään 80 % oikein. Ennen kokeen suorittamista opiskelijalla oli mahdollisuus tehdä harjoitustehtäviä. Suurin osa Ajokortin materiaaleista oli Opetus.tv:n videoita, ja motivointina opiskelijoille oli tarjolla erilaisia matemaattisia pelejä.



Ajokortti 1b ▶

## Ajokortti 1a

**Tämä ajokortti on sinulle, jos pohjakoulutuksesi on ammattiopisto tai lukion lyhyt matematiikka.**

Ajokortti 1a:n jälkeen sinulla tulisi olla muistissa

- positiivisilla ja negatiivisilla luvuilla sekä murtoluvuilla laskeminen,
- laskujärjestys,
- prosenttiluvun laskeminen,
- kellonaikojen käsitteleminen,
- tavallisimmat yksikkömuunnokset
- potenssilaskut ja neliöjuuri sekä
- arvojen lukeminen kuvaajasta.

Löydät Materiaalikirjasta materiaaleja, videolinkkejä ja linkkejä harjoituksiin, joiden avulla voit palauttaa mieleen näitä aiheita. Harjoitustehtävällä voit kokeilla, ovatko aiheet hallussa. Varsinainen suoritus tässä osuudessa on Ajokorttikoe 1a.

Käytettävissäsi on myös valikossa Pelivalikko erilaisia pelejä, joilla voit harjoitella vastaavia asioita.

Materiaalikirja 1a

Pelivalikko

Ajokortti 1a: Harjoitustehtävät

Tätä testiä voit tehdä niin monta kertaa kuin haluat. Tehtävät liittyvät ajokortti ykkösen materiaaleihin.

Harjoitustesti on avoinna 1.7. - 31.12.

Lue tarkkaan kokeen jälkeen palaute ja sen antamat vinkit.

Muista harjoitella riittävästi ennen varsinaista ajokorttikoe 1a:ta, sillä voit tehdä ajokorttikokeen vain kahdesti!

Ajokorttikoe 1a

Varaa riittävästi aikaa! Koe on avoinna 1.7. - 31.12.

Kun olet vastannut kaikkiin tehtäviin, saat oikeat vastaukset. Osassa tehtävistä oikea ratkaisu näkyy, kun viet kohdistimen antamasi vastauksen päälle.

Sinulla on kaksi yrityskertaa. Tavoite on 80 % oikein.

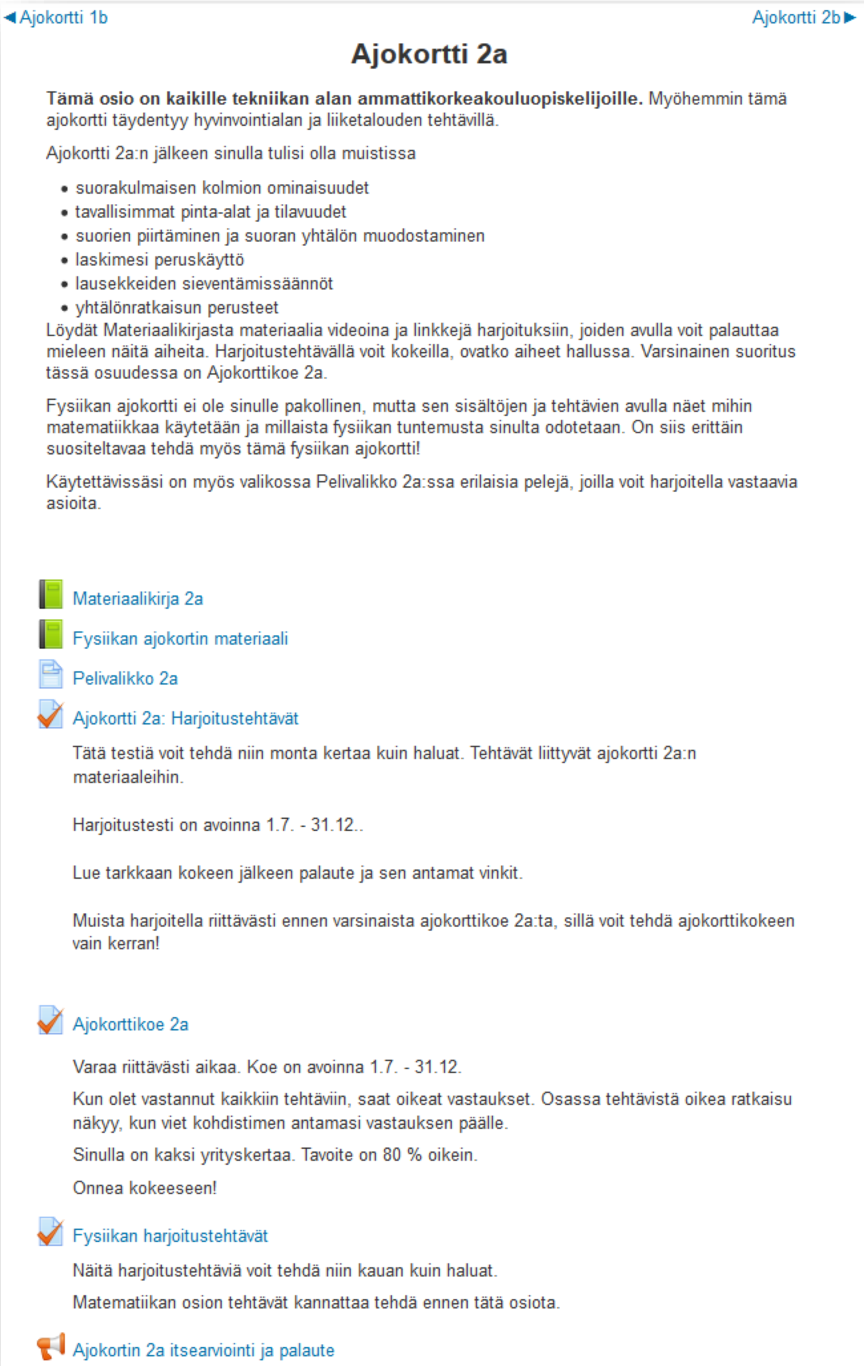
Onnea kokeeseen!

Ajokortin 1a itsearviointi ja palaute

*Kuva 3. Ajokortin 1a opiskelijanäkymä.*

## 3.2. Ajokortti 2a

Ajokortti 2a (Kuva 4) oli tarkoitettu ammattikorkeakoulun insinööriopiskelijoille. Tulevaisuudessa Ajokortin sisältöä on tarkoitus laajentaa koskemaan myös hyvinvointialaa sekä liiketalouden alaa. Tämän Ajokortin pakollisina sisältöinä olivat suorakulmainen kolmio, pinta-alat ja tilavuudet, suorat koordinaatistossa, lausekkeiden sieventäminen ja ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen. Ajokortissa oli myös opiskelijoille vapaaehtoinen fysiikan osio, johon sisältyi kuvaajista lukemista, nopeuslaskuja, vektorilaskentaa ja virheen arviointia. Fysiikan osio koostui 52 harjoitustehtävästä.



◄Ajokortti 1b Ajokortti 2b►

## Ajokortti 2a

**Tämä osio on kaikille tekniikan alan ammattikorkeakouluopiskelijoille.** Myöhemmin tämä ajokortti täydentyy hyvinvointialan ja liiketalouden tehtävillä.

Ajokortti 2a:n jälkeen sinulla tulisi olla muistissa

- suorakulmaisen kolmion ominaisuudet
- tavallisimmat pinta-alat ja tilavuudet
- suorien piirtäminen ja suoran yhtälön muodostaminen
- laskimesi peruskäyttö
- lausekkeiden sieventämissäännöt
- yhtälönratkaisun perusteet

Löydät Materiaalikirjasta materiaalia videoina ja linkkejä harjoituksiin, joiden avulla voit palauttaa mieleen näitä aiheita. Harjoitustehtävällä voit kokeilla, ovatko aiheet hallussa. Varsinainen suoritus tässä osuudessa on Ajokorttikoe 2a.

Fysiikan ajokortti ei ole sinulle pakollinen, mutta sen sisältöjen ja tehtävien avulla näet mihin matematiikkaa käytetään ja millaista fysiikan tuntemusta sinulta odotetaan. On siis erittäin suositeltavaa tehdä myös tämä fysiikan ajokortti!

Käytettävissäsi on myös valikossa Pelivalikko 2a:ssa erilaisia pelejä, joilla voit harjoitella vastaavia asioita.

Materiaalikirja 2a

Fysiikan ajokortin materiaali

Pelivalikko 2a

Ajokortti 2a: Harjoitustehtävät

Tätä testiä voit tehdä niin monta kertaa kuin haluat. Tehtävät liittyvät ajokortti 2a:n materiaaleihin.

Harjoitustesti on avoinna 1.7. - 31.12..

Lue tarkkaan kokeen jälkeen palaute ja sen antamat vinkit.

Muista harjoitella riittävästi ennen varsinaista ajokorttikoe 2a:ta, sillä voit tehdä ajokorttikokeen vain kerran!

Ajokorttikoe 2a

Varaa riittävästi aikaa. Koe on avoinna 1.7. - 31.12.

Kun olet vastannut kaikkiin tehtäviin, saat oikeat vastaukset. Osassa tehtävistä oikea ratkaisu näkyy, kun viet kohdistimen antamasi vastauksen päälle.

Sinulla on kaksi yrityskertaa. Tavoite on 80 % oikein.

Onnea kokeeseen!

Fysiikan harjoitustehtävät

Näitä harjoitustehtäviä voit tehdä niin kauan kuin haluat.

Matematiikan osion tehtävät kannattaa tehdä ennen tätä osiota.

Ajokortin 2a itsearviointi ja palaute

*Kuva 4. Ajokortin 2a opiskelijanäkymä.*

Ajokortin 2a suorittaminen opiskelijalle oli vastaavanlainen kuin Ajokortin 1a: 20 tehtävästä tuli saada vähintään 80 % oikein. Tässäkin Ajokortissa opiskelijalla oli mahdollisuus tehdä harjoitustehtäviä ennen koetta. Materiaalina matematiikan osioon oli Opetus.tv:n videoita ja fysiikan osioon ammattikorkeakoulun opettajien itse tekemiä opetusvideoita. Opiskelijoille oli tarjolla erilaisia matemaattisia pelejä myös tässä Ajokortissa.

## 3.3. Ajokortti 1b

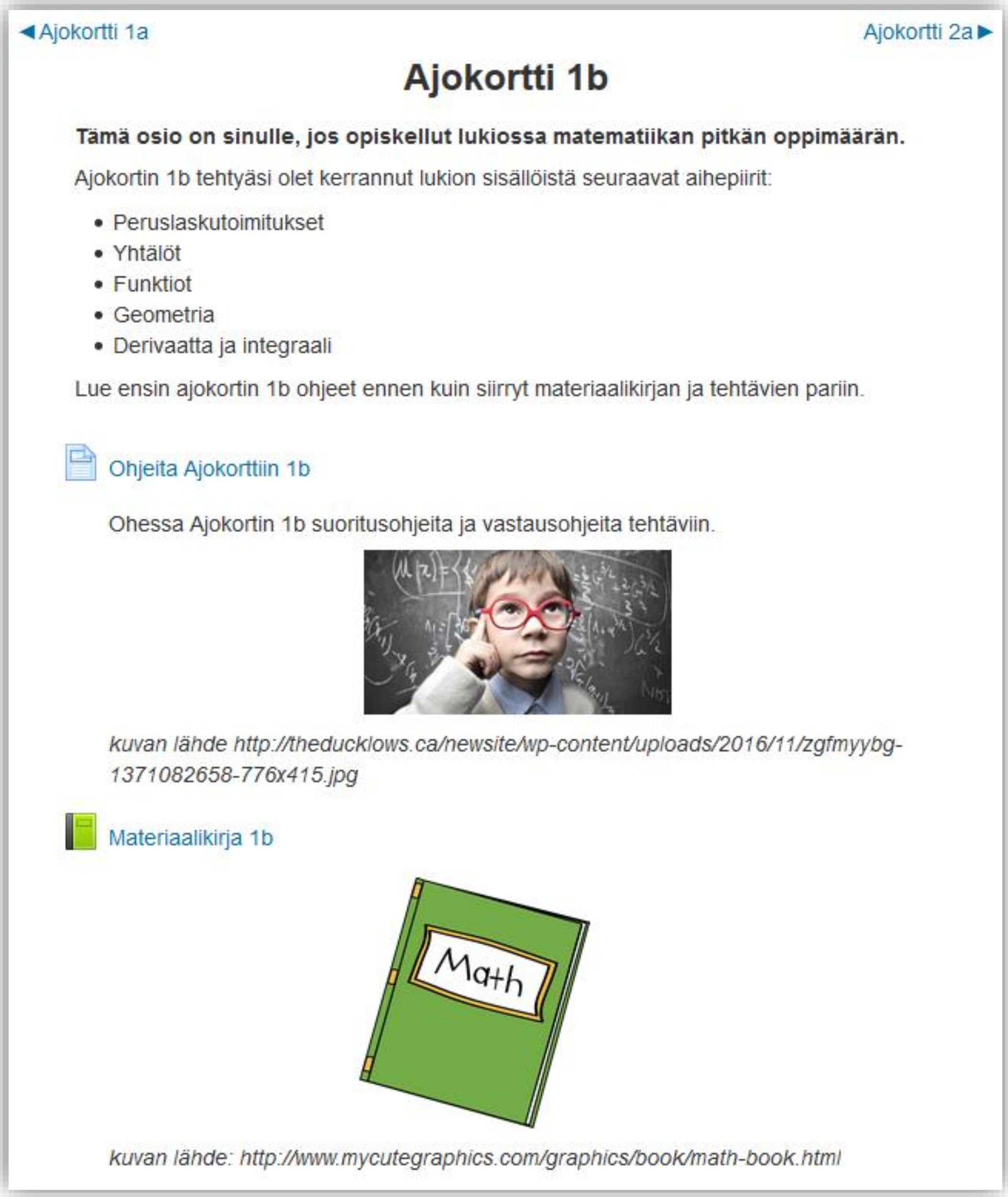
Ajokortti 1b (Kuva 5) oli tarkoitettu lukion matematiikan pitkän oppimäärän lukeneille opiskelijoille, jotka aloittivat opintonsa joko ammattikorkeakoulussa tai yliopistossa. Työryhmän kesken Ajokortille 1b osioiksi valittiin 1. Peruslaskutoimitukset, 2. Yhtälöt, 3. Funktiot, 4. Geometria sekä 5. Derivaatta ja integraali (Taulukko 4). Osioiden aihealueet vastaavat Jyväskylän ammattikorkeakoulun ja Jyväskylän yliopiston matematiikan opettajien haastattelujen sekä Sulkakosken (2016) tutkimuksen tuloksia.

*Taulukko 4: Ajokortin 1b osiot ja niiden sisältämät aihealueet.*

| Osio | Aihealueet |
|---|---|
| 1. Peruslaskutoimitukset | Murtoluvut, laskujärjestys, lausekkeiden sieventäminen, potenssilaskut, prosenttilaskut. |
| 2. Yhtälöt | Polynomit, murtolausekkeet, ensimmäisen ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen, tulon nollasääntö. |
| 3. Funktiot | Funktion nollakohdat, funktion arvojen lukeminen kuvaajasta, funktioiden kuvaajien leikkauspisteet. |
| 4. Geometria | Suorakulmainen kolmio, yhdensuuntaiset suorat, kolmion ratkaiseminen, pinta-alat, mittakaava, yksikköympyrä sekä sini ja kosini. |
| 5. Derivaatta ja integraali | Derivaattafunktion nollakohdat, funktion ääriarvot, polynomien integrointi ja derivointi, integraalin ja derivaatan arvon lukeminen kuvaajasta, derivointisäännöt. |

Osioiden lisäksi kurssilla oli loppukoe, jossa käsiteltiin kaikkia kurssin aihealueita. Kertaamista helpottamaan kurssille oli koottu myös materiaalikirja, johon sisältyi kattavasti Opetus.tv:n videoita ja projektissa mukana olevien Jyväskylän koulutuskuntayhtymän matematiikan opettajien tuottamia videoita ja kuvia.

Materiaalikirjan aineiston laajuus ylitti tehtävien vaatimukset. Materiaalikirjan lukeminen oli vapaaehtoista, mutta sitä suositeltiin kurssin kuluessa.




*Kuva 5. Ajokortin 1b opiskelijanäkymä.*

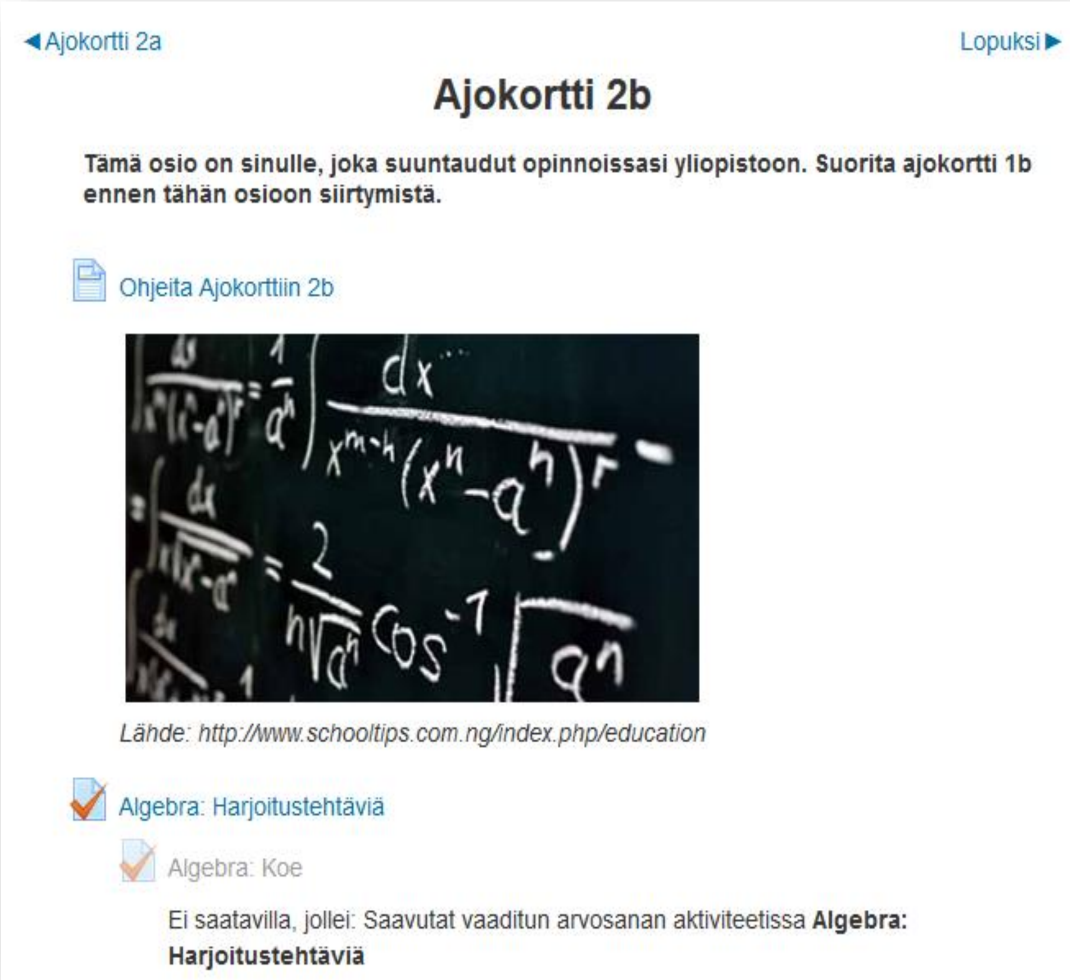
Jokaisessa osiossa oli harjoitustehtäviä ja koe. Suorittaessaan kutakin osiota opiskelijan oli ensin tehtävä annetut harjoitustehtävät. Harjoitustehtäviä ei arvosteltu, mutta niihin oli vastattava. Harjoitustehtävään vastaamisen jälkeen opiskelijalle avautui malliratkaisu, jossa käytiin lyhyesti läpi myös tehtävän ympärillä olevaa teoriaa. Harjoitustehtävät olivat pakollisia opiskelijoille, jotta opiskelijat tutustuisivat Ajokortin tehtävätyyppeihin ja kehittäisivät itselleen laskurutiinia. Koska materiaalikirjan lukeminen oli opiskelijoille vapaaehtoista, haluttiin harjoitustehtävien pakollisuudella taata myös, että jokainen kävisi läpi tietyn määrän tehtäviin liittyvää teoriaa.

Harjoitustehtävien suorittamisen jälkeen avautui mahdollisuus tehdä kyseisen osion koe. Jos opiskelija suoritti kokeen hyväksytysti (vähintään 80 % oikein), pääsi opiskelija siirtymään seuraavaan osioon. Mikäli opiskelija ei läpäissyt koetta, opiskelijalle avautui saman osion uusintakoe. Jokaisessa osiossa uusintakokeita oli kolme kappaletta, joista viimeistä sai yrittää niin monta kertaa, että pääsi hyväksytysti läpi (muita kokeita sai yrittää vain kerran). Kunkin osion uusintakokeet koostuivat pääosin keskenään samantyylisistä tehtävistä ja kokeet oli suunniteltu niin, että tehtävien vaikeustaso laski uusintakertojen myötä.  Kun kaikki osiot olivat hyväksytysti suoritettuna, pääsi opiskelija tekemään loppukoetta. Loppukokeita oli vain kaksi kappaletta, eli yksi varsinainen loppukoe ja yksi uusinta, joita kumpaakin sai yrittää vain kerran. Loppukokeista toisesta täytyi saada vähintään vaadittu 80 % maksimipisteistä, jotta Ajokortti oli hyväksytysti suoritettu.

## 3.4. Ajokortti 2b

Ajokortti 2b (Kuva 6) oli tarkoitettu yliopistomatematiikkaan valmistavaksi osioksi, ja se oli suunniteltu tehtäväksi Ajokortin 1b suorittamisen jälkeen. Ajokortin 2b tehtävät painottivat käsitteellisyyttä ja abstraktia ajattelua. Ajokortin sisältöjen valinnasta vastasivat MathMarket-työryhmän Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen edustajat. Aiheiden valinnassa huomioitiin kyselystä ja haastatteluista saadut tulokset.

Ajokorttiin 2b valitut osiot olivat Algebra, Alkeisfunktiot, Differentiaalilaskenta, Analyyttinen geometria ja trigonometria sekä Todennäköisyyslaskenta (Taulukko 5). Osioiden nimien haluttiin ohjaavan niiden matemaattisten termien pariin, joita yliopistomatematiikassa käytetään. Vektorilaskentaa ei valittu mukaan, vaikka niin osa opettajista kuin iso osa opiskelijoista oli toivonut sitä. Päätös tehtiin siksi, että vektoreista lukiomatematiikassa käytettävät merkinnät ovat täysin erilaiset kuin yliopistomatematiikassa käytettävät. Uuden merkintätavan opettaminen ei olisi ollut mahdollista kertauskurssilla, eikä vanhojen merkintätapojen mieleen palauttaminen olisi ollut mielekästä jatkoa ajatellen.




*Kuva 6. Ajokortti 2b:n opiskelijanäkymä*

Jokainen Ajokortin 2b osio piti sisällään harjoitustehtäviä ja kokeen. Ajokorttiin 2b oli siirretty osittain kokonaisuuksia, joita ammattikorkeakoulu ei kokenut tarpeelliseksi kerrattaviksi asioiksi. Esimerkiksi logaritmifunktio ja koko Todennäköisyyslaskennan osio siirrettiin Ajokortista 1b Ajokorttiin 2b.  Ajokortin 2b suorittamiseen opiskelijoille annettiin enemmän valinnanvapautta: kaikki viisi osiota olivat suoritettavissa heti. Opiskelijan ei siis tarvinnut edetä järjestyksessä ja pelillistäminen oli jätetty kokonaan pois. Jokaisesta osiosta tuli kuitenkin tehdä harjoitustehtävät ennen kuin pääsi suorittamaan osion kokeita.

*Taulukko 5: Ajokortin 2b osiot ja niiden sisältämät aihealueet.*

| **Osio** | **Aihealueet** |
|---|---|
| Algebra | Epäyhtälöt, murtopotenssi, muistikaavat. |
| Alkeisfunktiot | Funktion monotonisuus, alkeisfunktiot, funktion ääriarvot. |
| Differentiaalilaskenta | Derivointi- ja integrointisäännöt, funktion kuvaajan tulkitseminen. |
| Analyyttinen geometria ja trigonometria | Radiaanit, ympyrän ja paraabelin normaaliesitys, yksikköympyrä sekä sini ja kosini. |
| Todennäköisyyslaskenta | Klassinen todennäköisyys, tapahtumien riippumattomuus ja erillisyys, odotusarvo, permutaatiot ja kombinaatiot. |

Ajokortissa 2b ei ollut omaa erillistä materiaalikirjaa tai videokansiota, vaan Ajokortti oli suunniteltu suoritettavaksi ilman ylimääräistä materiaalia ja tarvittaessa opastettiin palaamaan Ajokortin 1b materiaalikirjaan. Ajokortin 2b osioissa oli vain kaksi koetta, joista kumpaakin sai yrittää vain kerran. Ajokortissa 2b ei ollut erillistä loppukoetta kuten Ajokortissa 1b. Ajokortti 2b katsottiin suoritetuksi, kun kaikkien viiden osion jommastakummasta kokeesta oli saatu vähintään 80 % oikein.

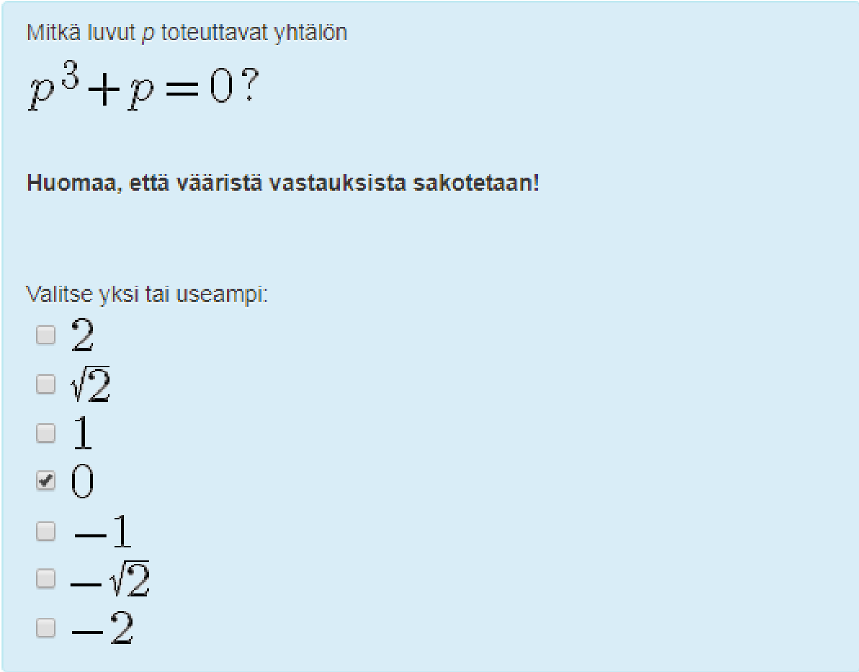
# 4. Ajokorttien 1b ja 2b tehtävät

Tässä luvussa käsitellään Ajokorttien 1b ja 2b tehtäviä yksityiskohtaisemmin. Luvussa esitellyt tehtävät on valittu siten, että niiden kautta saisi mahdollisimman kattavan kuvan kurssilla olevista tehtävistä. Tehtävien valinnassa on huomioitu myös niiden onnistuminen ja mielenkiintoisuus. Valitut tehtävät ovat osioiden harjoitustehtäviä ja ensimmäisten kokeiden tehtäviä, koska jokainen kurssia suorittava opiskelija teki vähintään ne. Tarkemmat lukumäärät Ajokorttikokeiden suorittajista löytyvät liitteestä 1. Aluksi esitellään Moodlen mahdollistamat tehtävätyypit, joiden jälkeen käsitellään Ajokorttien tehtäviä. Molempien Ajokorttien kaikki harjoitustehtävät malliratkaisuineen sekä ensimmäiset kokeet ovat kokonaisuudessaan liitteessä 2.

## 4.1. Tehtävätyypit

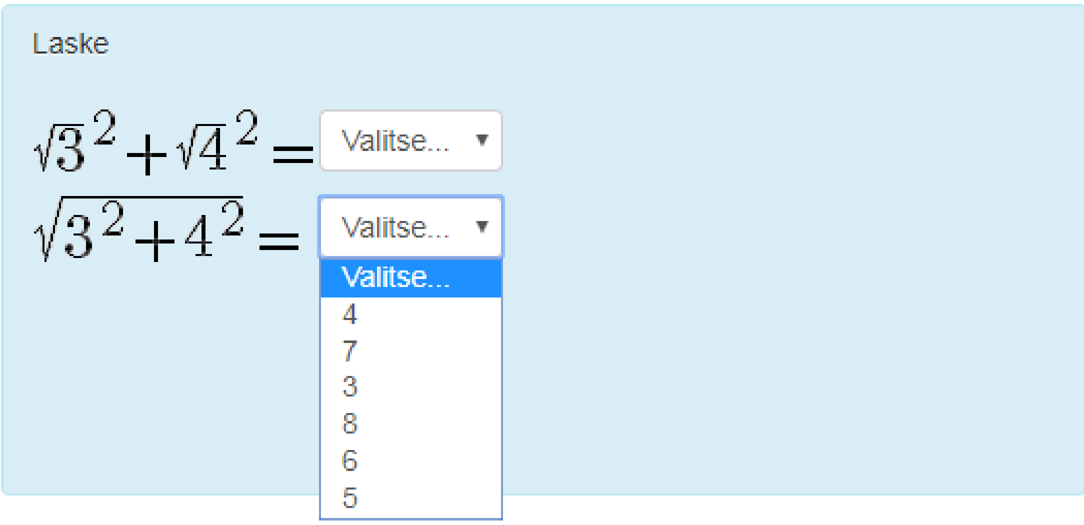
Moodle-verkkoympäristö mahdollisti lukuisia erilaisia tehtävätyyppejä, joista viittä käytettiin tämän kurssin matemaattisiin kysymyksiin. Soveltuvia tehtävätyyppejä olivat sellaiset, joihin pystyi kirjoittamaan matemaattista tekstiä ja sellaiset, jotka Moodle pystyi arvioimaan itse. Erilaiset tehtävätyypit auttoivat tehtävien monipuolistamiseen.

Kurssin tehtävistä suurin osa oli monivalintakysymyksiä, koska kurssi rakennettiin ensin edeltävään oppimisympäristöön, jonka ainoa tehtävätyyppi oli monivalintatehtävä. Toisaalta monivalintatehtävien etu opiskelijan näkökulmasta oli niiden yksinkertaisuus. Monivalintatehtävän etuna oli tekijöiden kannalta se, että vastausvaihtoehtoihin pystyi kirjoittamaan matemaattista tekstiä LaTeX-koodin avulla. Monivalintatehtäviä toteutettiin kahta erilaista tyyppiä: tehtäviä, joissa vaihtoehdoista oli valittavissa vain yksi oikea ja tehtäviä, joissa oli yksi tai useampi oikea vastaus (Kuva 7). Yhden tai useamman oikean vastauksen tehtävissä täydet pisteet jaettiin oikeiden vastausten kesken ja vääristä vaihtoehdoista vähennettiin pisteitä siten, että jos opiskelija vastasi kaikki vaihtoehdot, sai hän nolla pistettä. Toisin sanoen oikeiden vaihtoehtojen kesken jaettiin 100 % tehtävän pisteistä ja väärien vaihtoehtojen kesken -100 %. Tehtäväkohtainen minimipistemäärä oli kuitenkin nolla, joten huono menestys yksittäisessä tehtävässä ei vaikuttanut negatiivisesti koko kokeen suoritukseen.



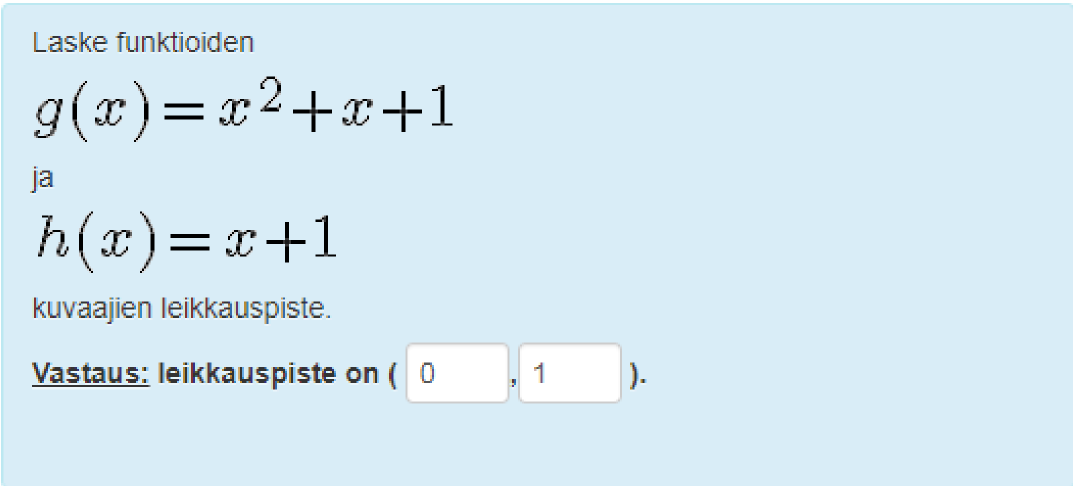

*Kuva 7. Esimerkki monivalintatehtävästä, jossa oli yksi tai useampi oikea vaihtoehto (Yhtälöt koe 1 tehtävä 5).*

Yhdistämistehtävässä oli tarkoituksena yhdistää oikeat parit. Moodlessa vaihtoehtojen tai kysymysten jälkeen oli pudotusvalikko, jossa kaikki eri vaihtoehdot olivat valittavissa (Kuva 8). Vaihtoehtoja oli usein valittavissa enemmän kuin kysymyksiä. Rajoitteena yhdistämistehtävässä oli se, että oikeita vaihtoehtoja kussakin kysymyksessä voi olla vain yksi, eikä vaihtoehdot näyttävään pudotusvalikkoon voinut kirjoittaa matemaattista tekstiä. Yhdistämistehtävää käytettiin silloin, kun haluttiin monivalintatehtävä, jossa oli useampi lyhyempi kysymys.




*Kuva 8. Esimerkki yhdistämistehtävästä (Loppukoe 1 tehtävä 1).*

Tehtävätyypeistä aukkotehtäviä (Kuva 9) oli kurssilla toiseksi eniten. Aukkotehtävien etu oli monivalintatehtäviin nähden siinä, että opiskelija ei saanut vinkkejä ratkaisuun annetuista vaihtoehdoista. Aukkotehtävät olivat myös teknisesti helppoja toteuttaa, sillä vastausaukon pystyi sijoittamaan minne tahansa kysymystekstiin ja niitä saattoi olla useita. Aukkotehtävien huono puoli oli vaatimus vastauksen täsmällisyydestä: oikeiksi vastauksiksi täytyi manuaalisesti kirjata kaikki opiskelijan syötteet, jotka tarkoittivat samaa kuin oikea vastaus, esimerkiksi desimaalipilkun lisäksi desimaalipiste hyväksyttiin. Tästä syystä sanallisia vastauksia aukkotehtäviin ei toteutettu, vaan suurin osa aukkotehtävien vastauksista oli desimaalilukuja. Lisäksi jokaiseen tehtävään tuli kirjoittaa vastaamisohje, joka kertoi vastauksen halutun muodon, esimerkiksi ”vastaa yhden desimaalin tarkkuudella ilman yksikköä”.

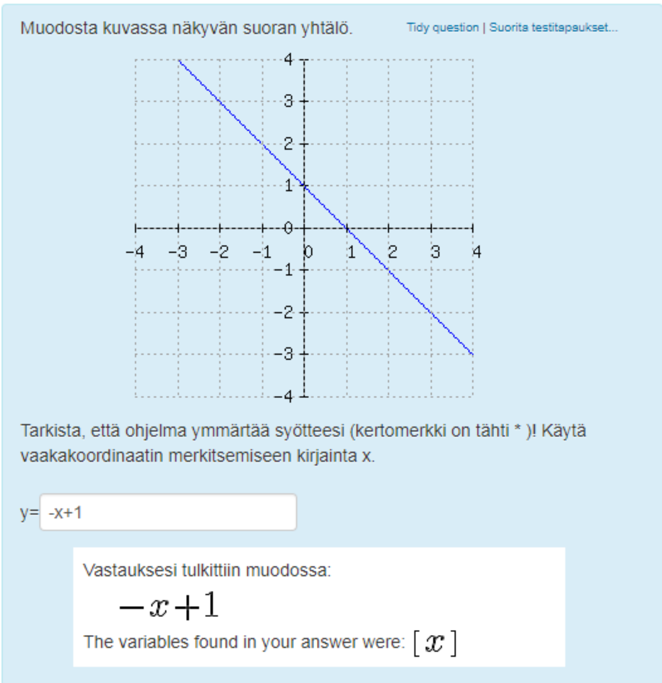



*Kuva 9. Esimerkki aukkotehtävästä (Funktiot koe 1 tehtävä 6).*

Numeerinen kysymys (Kuva 10) vastasi aukkotehtävää, mutta aukkoon pystyi kirjoittamaan vain lukuja, ja Moodle osasi tulkita vastauksen numerona. Tehtävätyypissä tehtävän laatija sai antaa vastaukseen virherajan, jonka sisällä Moodle hyväksyi vastauksen. Huonona puolena numeerisessa tehtävässä oli, että vastauslaatikon sijaintia ei voinut muokata, eikä yhteen tehtävään saanut kuin yhden vastauslaatikon. Numeerista kysymystä käytettiin arviointitehtävissä tai silloin, kun vastauksen tarkkuudella ei ollut merkitystä.


*Kuva 10. Esimerkki numeerisesta tehtävästä (Derivaatta ja integraali harjoitustehtävä 5).*

Stack-tehtävä (Kuva 11) oli matemaattisesti monipuolisin, mutta myös monimutkaisin toteuttaa. Stack-tehtäviin ohjelmoitiin symbolinen laskin, joka antoi reaaliaikaista palautetta opiskelijan syötteestä ennen vastauksen lukitsemista. Aikatauluhaasteiden vuoksi Stack-tehtäviä tehtiin vain yksi, joka voitiin lisätä jokaiseen Yhtälöt-osion kokeeseen, sillä Moodle antoi tehtävään aina eri lukuarvot, eli tässä tapauksessa eri suoran.




*Kuva 11. Esimerkki Stack-tehtävästä (Yhtälöt koe 1 tehtävä 2).*

### 4.2. Tehtävät Ajokortissa 1b

Ajokorttiin 1b laadittiin yli 200 tehtävää, joista 174 valittiin Ajokortille työryhmän kesken (Taulukko 6). Osa tehtävistä siirrettiin Ajokortille 2b, ja osa jäi kokonaan pois kurssilta. Läpäistäkseen Ajokortin 1b opiskelijan tuli ratkaista vähintään 74 tehtävää, joista 40 oli arvosteltavia koetehtäviä.

*Taulukko 6. Tehtävien määrä Ajokortilla 1b.*

| Osio | Harjoitustehtäviä | Tehtäviä per koe | Yhteensä |
|---|---|---|---|
| Peruslaskutoimitukset | 7 | 8 | **39** |
| Yhtälöt | 7 | 5 | **27** |
| Funktiot | 5 | 6 | **29** |
| Geometria | 9 | 6 | **33** |
| Derivaatta ja integraali | 6 | 5 | **26** |
| Loppukoe | - | 10 | **20** |

Osiokohtaisesti harjoitustehtävät ja kaikki osion kokeet olivat keskenään hyvin samankaltaisia, eli samat tehtävätyypit toistuivat kaikissa kokeissa samassa järjestyksessä hieman eri luvuilla tai muuttujilla. Opiskelijan oli tarkoitus pystyä tekemään kokeen tehtävät harjoitustehtävien malliratkaisuiden avulla käyttäen tukenaan materiaalikirjaa. Osioiden uusintakokeet suunniteltiin siten, että mikäli opiskelija osasi tietyn tehtävän osion ensimmäisessä kokeessa, osasi opiskelija oletettavasti vastaavan tehtävän kaikissa uusintakokeissakin. Harjoitustehtävien vaikeustaso oli tarkoituksella hieman korkeampi kuin kokeissa, ja jokainen uusintakoe oli edellistään helpompi.

Yhdeksi verkkokurssin haasteeksi koettiin opiskelijan motivointi. Opiskelijaa pyrittiin motivoimaan omalla osaamisellaan: suurin osa tehtävistä laadittiin perustasoisiksi ja helpoimmat tehtävät sijoitettiin aina harjoitus- ja koetehtävien alkupäähän. Tehtävistä pyrittiin myös tehdä mahdollisimman käytännönläheisiä ja monipuolisia niiden mielenkiintoisuuden lisäämiseksi. Kurssin tehtävien aiheina olivat muun muassa jääkiekon maalivahtitilastot, frisbeegolf, shampooalennukset, lautapelit, Haluatko miljonääriksi -ohjelma ja opintolaina. Lisäksi opiskelijoille annettiin positiivista palautetta onnistuneen kokeen jälkeen.

### 4.2.1. Peruslaskutoimitukset

Tämän osion tehtävät käsittelivät pääasiassa murtolukujen ja potenssien laskusääntöjä sekä prosenttilaskuja. Monissa tehtävissä esiintyi sekä potensseja että murtolukuja ja mukana oli laskujärjestyssääntöjä ja lausekkeiden sieventämistä. Tämä osio oli Ajokortin 1b laajin: sekä harjoitustehtävissä että kokeissa oli kahdeksan tehtävää. Tehtävätyypit olivat lukion matematiikan pitkän oppimäärän suorittaneille tuttuja, mutta tehtäviin haluttiin lisää haastetta, esimerkiksi ottamalla mukaan muitakin muuttujia kuin lukiossa yleisesti käytetyt $x$, $y$ ja $z$.

Sekä yliopisto että ammattikorkeakoulu toivoivat erityisesti harjoitustehtävän 6 (Kuva 12) kaltaisia tehtäviä. Kertaamista toivottiin laskujärjestykseen, rationaalilausekkeisiin ja laskimen käyttöön. Nämä kolme aihealuetta yhdistettiin tehtävätyypiksi, jossa laskimen syöte yhdistettiin oikeaan lausekkeeseen. Tehtävässä oli mukana sini- ja logaritmifunktiot, joita ei kurssilla vielä käsitelty. Tarkoituksena oli tuoda esille nämä funktiot ja näyttää opiskelijalle, että niitä voi käsitellä käyttämättä niiden laskusääntöjä. Ainoa tehtävässä esiintyvä sinifunktion ominaisuus oli merkintätapa $\sin^2 x := (\sin x)^2$, joka oli kuitenkin kaikissa vaihtoehdoissa valmiiksi oikein.

Kaikkiin kurssin monivalintatehtäviin suunniteltiin vaihtoehdot siten, että opiskelijan mahdolliset virhekäsitykset tai toistuvat virheet löytyisivät vaihtoehdoista. Tehtäviä laadittaessa kiinnitettiinkin erityistä huomiota mahdollisimman hyvien vaihtoehtojen kehittämiseen. Esimerkiksi osion harjoitustehtävän 6 vaihtoehdossa (a) esiintyi opiskelijan virhekäsitys siitä, että murtolukua jaettaessa jakaja voitaisiin sieventää osoittajaan. Taustalla oli ajatus opiskelijan virheellisestä tavasta soveltaa murtolukujen osamäärän laskusääntöä. Vaihtoehto (b) oli oikein. Vaihtoehtoon (c) taas lisättiin ylimääräiset sulut vakion ja muuttujan ympärille sekä muutettiin murtoluvun jakolasku tuloksi. Tässä taustalla oli harhakäsitys siitä, että osamäärän jakajana on koko se lauseke, joka on kirjoitettu jakoviivan jälkeen. Vaihtoehdossa (d) oli sama virhe kuin vaihtoehdossa (c), mutta jakolaskua ei oltu muutettu tuloksi. Vaihtoehdot suunniteltiin niin, että vaihtoehdot (a) ja (b) sekä (c) ja (d) olivat lähellä toisiaan, jolloin ne eivät johdattelisi opiskelijaa oikean vastauksen löytämiseen pelkkiä vaihtoehtoja tutkimalla. Lähes kaikissa monivalintatehtävissä oli mukana vaihtoehto (e) *ei mikään näistä vaihtoehdoista* ohjaamassa opiskelijaa ratkaisemaan tehtävä päättelemättä sitä vaihtoehdoista. Kyseinen vaihtoehto (e) oli kuitenkin erittäin harvoin monivalintatehtävän oikea vastaus.

**Harjoitustehtävä 6.** Kalle näpyttelee laskimeen seuraavan syötteen

$$((\sin x)^2 / \ln(1-x^2))/x - 1.$$

Mitä seuraavista lausekkeista syöte vastaa?

(a) $\frac{x \sin^2 x}{\ln(1-x^2)} - 1$

(b) $\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)x} - 1$

(c) $\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)(x-1)}$

(d) $\frac{\sin^2 x(x-1)}{\ln(1-x^2)}$

(e) ei mikään näistä vaihtoehdoista

Valitse yksi:

- (a)
- (b) ✓
- (c)
- (d)
- (e)

Vastauksesi on oikein.

**RATKAISU:**

Muokataan lauseketta

$$\begin{aligned}
&((\sin x)^2 / \ln(1-x^2))/x - 1 && \text{Muutetaan lausekkeen osamäärät murtolausekkeiksi.}\\
&= \frac{\frac{(\sin x)^2}{\ln(1-x^2)}}{x} - 1 && \text{Muutetaan merkintätapaa: } (\sin x)^2 = \sin^2 x.\\
&= \frac{\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)}}{x} - 1 && \text{Sievennetään osamäärä.}\\
&= \frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)} \cdot \frac{1}{x} - 1\\
&= \frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)x} - 1.
\end{aligned}$$

Oikea vastaus on siis vaihtoehto (b).

*Kuva 12. Peruslaskutoimitukset harjoitustehtävä 6.*

Kaikkien harjoitustehtävien ratkaisut suunniteltiin mahdollisimman selkeiksi ja ytimekkäiksi, ja teorian perusteellinen selittäminen jätettiin materiaalikirjaan. Lisäksi ratkaisuiden lopussa oli usein linkki materiaalikirjan sivulle tai suora linkki opetusvideoon, jossa käsiteltiin harjoitustehtävän aihetta.

Koetehtävän 5 (Kuva 13) kaltaiset kaksiosaiset tehtävät olivat yhdistämistehtävän ja monivalintatehtävän välimuotoja. Koska Moodlessa yhdistämistehtävän vaihtoehtoihin ei saanut kirjoitettua matemaattista tekstiä ja yksittäinen potenssin sievennys todettiin liian kevyeksi tehtäväksi, toteutettiin matemaattiset yhdistämistehtävät usein monivalintatehtävinä. Tehtävän tavoitteena oli kerrata potenssin laskusääntöjä: positiivista ja negatiivista eksponenttia, samankantaisten potenssien osamäärää sekä muuttujan käsittelyä eksponentissa.

**Tehtävä 5.** Sievennä lausekkeet (i) ja (ii). Valitse vaihtoehto, jossa molemmat ovat oikein.

(i) $\frac{gk}{g^2} \cdot \frac{k^3 g}{3}$

(ii) $\frac{x^n}{x^2}$

(a) $\frac{g^0 k^3}{3}$ ja $x^{\frac{n}{2}}$

(b) $\frac{g^0 k^4}{3}$ ja $\frac{x^n}{2}$

(c) $3k^{-2}g^{-2}$ ja $x^{\frac{n}{2}}$

(d) $\frac{k^3}{3}$ ja $x^{n-2}$

(e) ei mikään näistä vaihtoehdoista

Valitse yksi:

(a)

(b)

(c)

(d)

(e) ✓

*Kuva 13. Peruslaskutoimitukset koe 1 tehtävä 5.*

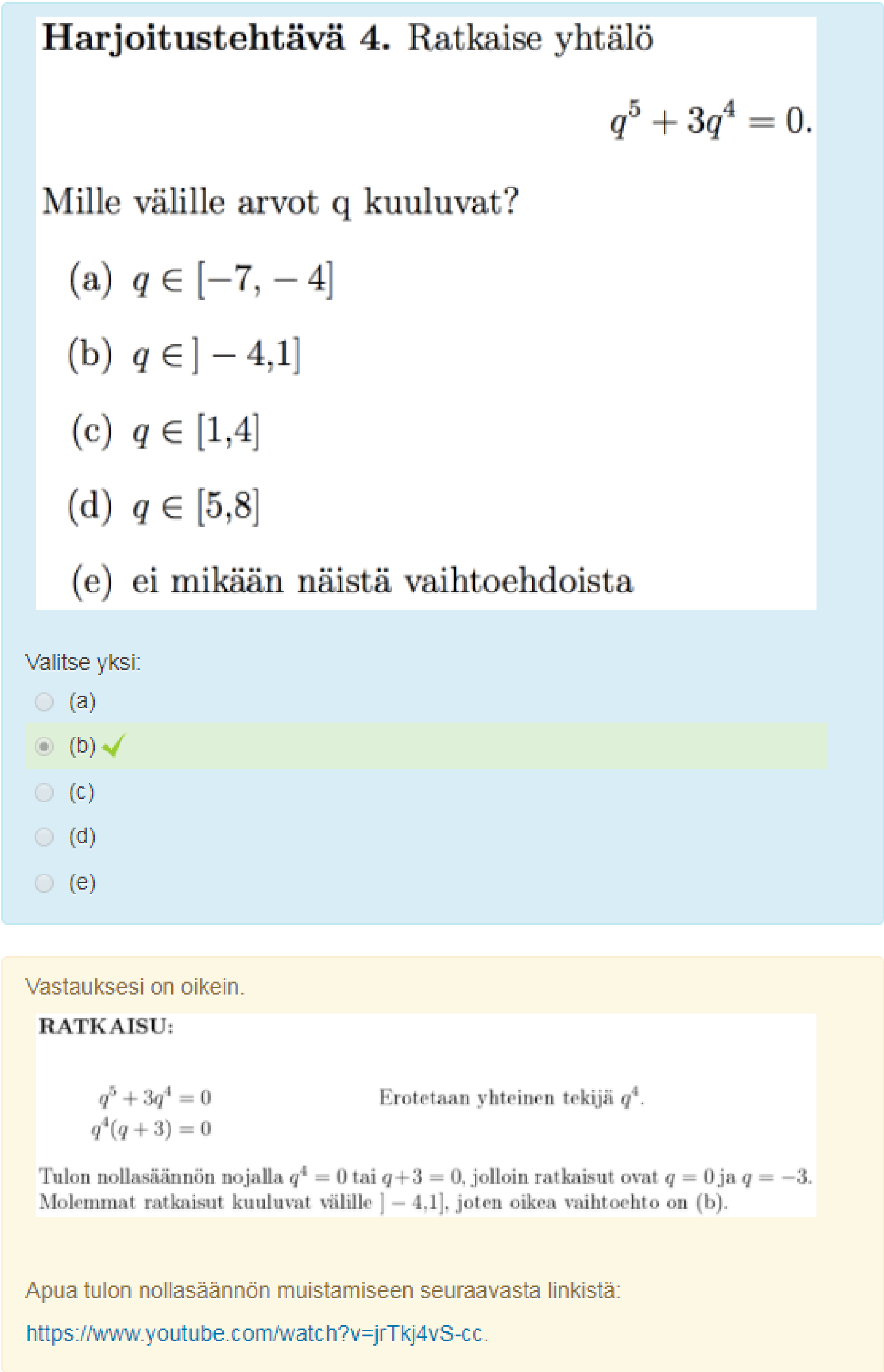
Tehtävä oli opiskelijoille jokseenkin haastava, sillä tehtävästä keskimäärin saatiin 70 % maksimipistemäärästä (104 vastaajaa). Tehtävä olikin peruslaskutoimitusten ensimmäisen kokeen haastavin. Tehtävän 5 tehtävätyyppi oli opiskelijoille tuttu, mutta esillepano oli erilainen, sillä molempiin kysymyksiin tuli vastata samaan aikaan. Yhdistämistehtävän ja monivalintatehtävän välimuodon heikkoutena nähtiin vaihtoehdot. Mikäli opiskelija osaa laskea toisen kohdista (i) tai (ii), voi huolimaton vastaaja lukita kyseisen vaihtoehdon katsomatta toista laskua. Tästä syystä oikea vastaus lausekkeelle (i) löytyi vaihtoehdosta (b) ja lausekkeelle (ii) vaihtoehtosta (d). Opiskelijoiden kohtalainen menestys tehtävässä saattaa johtua oikeasta vastauksesta: (e) *ei mikään näistä vaihtoehdoista*, joka haluttiin Ajokortin alkuun muistuttamaan opiskelijaa siitä, että jokainen tehtävä pitää ratkaista itse, eikä oikeaa vastausta voi vain päätellä vaihtoehtojen perusteella.

Kaikkien osioiden ensimmäisistä kokeista peruslaskutoimituksissa läpipääsyprosentti oli kaikkein heikoin, vain 69 % (Liite 1). Tämän osion vaikeus saattaa selittyä sillä, että opiskelijalla oli luultavasti kulunut aikaa matematiikan tehtävien tekemisestä, joten orientoituminen niiden tekemiseen saattoi aluksi hankalaa. Huonoimman menestyksen saattaa selittää myös se, että opiskelija ei ollut ensimmäisen osion kohdalla vielä tottunut verkkoalustan käyttöön. Kokeessa oli lisäksi kaikkein eniten osallistujia (103), joista noin 14 % ei jatkanut Ajokortin suorittamista. Osa oli siis saattanut vain tulla kokeilemaan, mistä on kyse, eikä siksi ollut panostanut Ajokortin suorittamiseen.

### 4.2.2. Yhtälöt

Yhtälöt-osion keskeisimpiin sisältöihin kuului tietenkin yhtälön ratkaiseminen. Osiossa oli kerrattavana useaa erilaista yhtälötyyppiä, joista yksi esimerkki on tulon nollasäännöllä ratkaistavat yhtälöt. Harjoitustehtävässä 4 (Kuva 14) yhdistyy yhteisen tekijän ottaminen ja tulon nollasäännön lisäksi ratkaisujen sijoittaminen reaaliakselille. Tehtävän tavoitteena oli kerrata tulon nollasääntö ja palauttaa mieleen välin merkintä.

Osa Ajokortin 1b alkupuolen tehtävistä, kuten harjoitustehtävä 4, oli laadittu alun perin vanhalle verkkoalustalle (Moodlen sijaan), jossa ainoa toteutettava tehtävätyyppi oli monivalinta. Harjoitustehtävää 4 haluttiin vaikeuttaa siten, että vaihtoehdoista ei näe vastauksia (tai vihjeitä ratkaisuun), joten vaihtoehdot muutettiin väleiksi. Uusi tehtävätyyppi todettiin liian haastavaksi Ajokorttiin 1b, mutta yksi tehtävä jätettiin harjoitustehtäväksi. Vaikeustasoa laskettiin siten, että yhtälön molemmat ratkaisut kuuluivat ainoastaan yhdelle vaihtoehtojen väleistä. Tällöin, jos opiskelija osasi ratkaista yhtälön, oli oikean välin valinta helpompaa.



**Harjoitustehtävä 4.** Ratkaise yhtälö

$$q^5 + 3q^4 = 0.$$

Mille välille arvot q kuuluvat?

(a) $q \in [-7,-4]$

(b) $q \in ]-4{,}1]$

(c) $q \in [1{,}4]$

(d) $q \in [5{,}8]$

(e) ei mikään näistä vaihtoehdoista

Valitse yksi:

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Vastauksesi on oikein.

**RATKAISU:**

$$q^5 + 3q^4 = 0 \qquad \text{Erotetaan yhteinen tekijä } q^4.$$
$$q^4(q+3) = 0$$

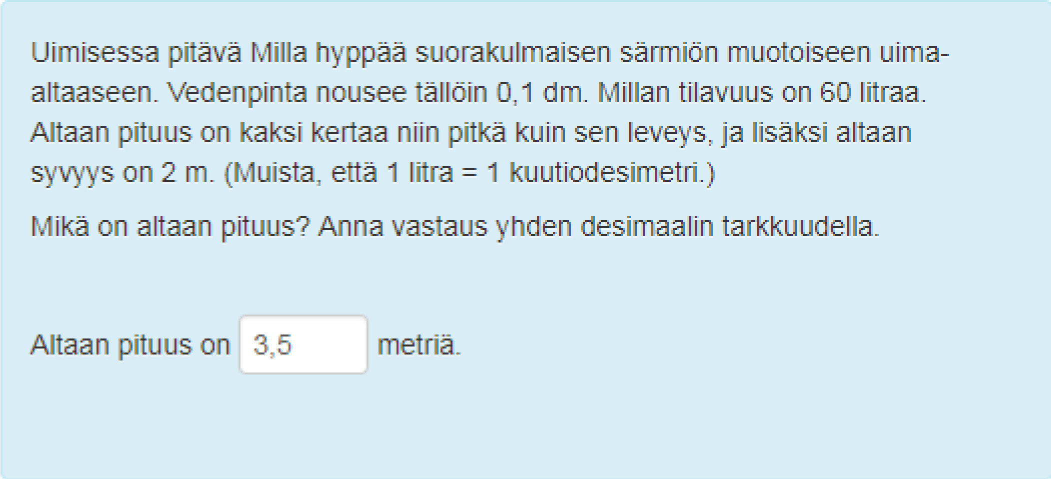
Tulon nollasäännön nojalla $q^4 = 0$ tai $q+3 = 0$, jolloin ratkaisut ovat $q = 0$ ja $q = -3$. Molemmat ratkaisut kuuluvat välille $]-4{,}1]$, joten oikea vaihtoehto on (b).

Apua tulon nollasäännön muistamiseen seuraavasta linkistä:

https://www.youtube.com/watch?v=jrTkj4vS-cc.

*Kuva 14. Yhtälöt harjoitustehtävä 4.*

Osion ensimmäisen kokeen kolmannessa tehtävässä (*Kuva 15*) tarkoituksena oli soveltaa yhtälönratkaisua arkielämän tapauksessa. Opiskelijan oli tarkoitus itse muodostaa tarvittava yhtälö ja ratkaista se. Tehtävä oli poikkeuksellisen vaikea, sillä vain 29 kokeen tehneestä 92 opiskelijasta (noin 32 %) vastasi tehtävään oikein.


Uimisessa pitävä Milla hyppää suorakulmaisen särmiön muotoiseen uima-altaaseen. Vedenpinta nousee tällöin 0,1 dm. Millan tilavuus on 60 litraa. Altaan pituus on kaksi kertaa niin pitkä kuin sen leveys, ja lisäksi altaan syvyys on 2 m. (Muista, että 1 litra = 1 kuutiodesimetri.)

Mikä on altaan pituus? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Altaan pituus on 3,5 metriä.

*Kuva 15. Yhtälöt koe 1 tehtävä 3.*

Tehtävässä tarvittiin avaruudellista hahmotuskykyä, ja kuvan piirtäminen helpotti tehtävän ratkaisemista. Tehtävä olisikin ollut varmasti helpompi, jos tehtävänannossa olisi ollut mukana valmis kuva. Opiskelijaa saattoi osaltaan myös hämätä tehtävänannossa annettu tieto altaan syvyydestä, jota ei tehtävän ratkaisemiseen tarvittu. Myös yksikönmuunnosten tekeminen saattoi tuottaa opiskelijoille hankaluuksia. Tehtävän oikea vastaus oli 3,5 metriä ja yleisin väärä vastaus oli 34,6 metriä, jonka vastasi 8 opiskelijaa. Todennäköisesti nämä opiskelijat muodostivat ja ratkaisivat yhtälön aivan oikein, mutta eivät muistaneet tehdä yksikkömuunnosta tehtävän lopussa.

### 4.2.3. Funktiot

Tässä osiossa harjoiteltiin funktion kuvaajan lukemista, sen lausekkeen muodostamista, nollakohtien etsimistä sekä arvon laskemista. Harjoitustehtävissä mukana oli myös yksi raja-arvotehtävä raja-arvon mieleen palauttamiseksi, mutta koetehtäviin vastaavan ajateltiin olevan liian vaativa. Funktiot-osio oli Ajokortin 1b osioista parhaiten osattu: ensimmäisen kokeen läpipääsyprosentti oli jopa 90 % (Liite 1).

Yksi koko kurssin päätavoitteista oli motivoida opiskelijaa opiskelemaan matematiikkaa. Esimerkiksi harjoitustehtävässä 2 (Kuva 16) funktion käsite liitettiin arkielämään. Erityisesti ammattikorkeakoulu toivoi tällaisia tehtäviä. Tehtävässä tarvitaan esimerkiksi arkielämässäkin hyödyllistä taulukonlukutaitoa, mutta sen päätavoitteena oli funktion käsiteen kertaaminen; mitä tarkoittaa sähkölaskun suuruus kulutuksen funktiona.

Mikä seuraavista funktioista esittää kuukausittaisen sähkölaskun suuruutta (€) kulutuksen (kWh) funktiona?

| YLEISSÄHKÖ | Mittarin etusulake | Alv 24% |
|---|---|---|
| Perusmaksu €/kk | 1x25–35 A<br>3x25 A–3x100 A | 2,62 |
| Energiamaksu snt/kWh | | 7,13 |

Kuvan lähde: http://www.jyvaskylanenergia.fi/filebank/992-sahkon_myynti_ja_palveluhinnasto_2015.pdf

Valitse yksi:

- E(x)= 2,62x+0,0713
- E(x)= 0,0713x+2,62 ✓
- E(x)= 0,0713x
- E(x)= 7,13x-2,62

Vastauksesi on oikein.

**RATKAISU:**

Riippumatta mittarin etusulakkeesta tai sähkönkulutuksesta joka kuukausi perusmaksu on 2,62 €. Jokaista kulutettua kilowattituntia kohti lisämaksua tulee 7,13 snt eli 0,0713 €. Täten sähkölaskun suuruus kulutuksen funktiona täytyy olla

$$E(x) = 0{,}0713x + 2{,}62,$$

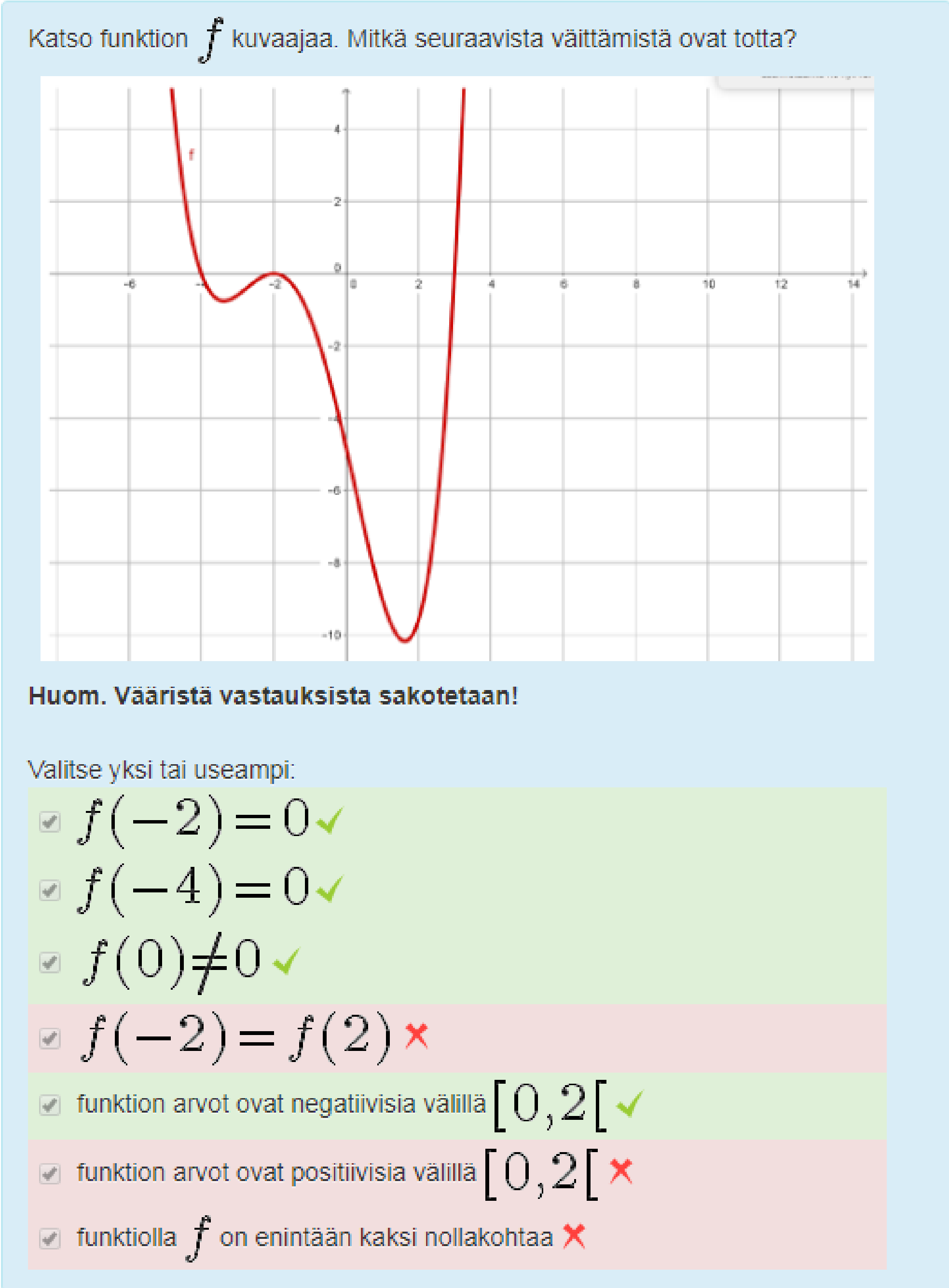
eli vaihtoehto ($b$) on oikein.

Apua suoriin seuraavasta linkistä:

https://moodle.jyu.fi/mod/book/view.php?id=55641&chapterid=284.

*Kuva 16. Funktiot harjoitustehtävä 2.*

Taulukonlukutaidon lisäksi Ajokortissa 1b painotettiin kuvaajanlukutaitoa. Ammattikorkeakoulu näki tämän erittäin tarpeellisena kertauksena. Kuvaajien avulla voitiin tuottaa monipuolisia ymmärrystä painottavia tehtäviä, joita ei voi ratkaista pelkän symbolisen laskimen avulla. Koetehtävässä 2 (Kuva 17) käsiteltiin funktioon liittyviä käsitteitä: funktion nollakohdat sekä sen arvo pisteessä ja sen arvojen etumerkit tietyillä väleillä. Tehtävään oli myös sijoitettu lukiolaiselle hieman oudompia merkintöjä, kuten esimerkiksi väli ja erisuuruus. Tehtävän tavoitteena oli ymmärtää käsitteiden kirjoitettu muoto ja osata yhdistää ne kuvaajaan.




*Kuva 17. Funktiot koe 1 tehtävä 2.*

Väittämissä otettiin huomioon opiskelijan mahdollinen virhekäsitys funktion nollakohdista. Opiskelija saattaa sekoittaa nollakohdat funktion arvoon nollassa, johtuen erimerkiksi siitä, että useat oppikirjojen funktioiden kuvaajista kulkevat origon kautta. Kyseistä virhekäsitystä pyrittiin oikaisemaan kolmella ensimmäisellä vaihtoehdolla, joissa kahdessa ensimmäisessä oli funktion nollakohdat oikein ja kolmannessa oli väite funktion arvosta nollassa. Viimeiseen väitteeseen sisältyi lukiotasoiselle opiskelijalle matemaattisessa tehtävässä vähemmän tuttu sana: enintään. Helpompi muotoilu lukiolaiselle olisi ollut esimerkiksi *funktiolla* $f$ *on yksi tai kaksi nollakohta(a)*. Pienellä kieliasumuokkauksella tehtävään haluttiin tuoda haastetta. Tulosten perusteella tehtävä oli kuitenkin ollut opiskelijoille helppo: tehtävän pistemäärän keskiarvo oli 94 % maksimipistemäärästä (81 suorittajaa). Kukaan vastanneista ei ollut vastannut kokonaan väärin ja täysin oikein vastasi jopa 81 % opiskelijoista.

### 4.2.4. Geometria

Opiskelijat pitivät Ajokortista 1b kerätyn opiskelijapalautteen (Luku 5.1.) nojalla Geometria-osiota Ajokortin haastavimpana. Osiossa oli eniten kerrattavaa sisältöä (Taulukko 6), joten tehtävien lukumääräkin oli suurin: 15 pakollista tehtävää. Tämä pyrittiin kuitenkin ottamaan huomioon tehtävien vaikeusasteessa. Pääosin kaikki tehtävät suunniteltiin sellaisiksi, ettei symbolisesta laskimesta ole erityistä apua opiskelijalle. Tämä sekä sanallisten tehtävien suuri määrä saattavat osittain selittää opiskelijoiden mielipidettä osion haastavuudesta.

Harjoitustehtävässä 6 (Kuva 18) käsiteltiin yksinkertaisten tasokuvioiden pinta-aloja ja verrattiin niitä keskenään. Tehtävän tavoitteena oli kerrata pinta-alojen laskukaavat ja taitaa niiden käyttäminen muuttujalla. Tehtävä asetettiin harjoitustehtäväksi, sillä muuttujasta riippuvien pinta-alojen vertailu koettiin opiskelijalle haastavaksi. Vaihtoehtoihin listattiin kaikki kuusi eri kombinaatiota, tarkoituksena olla antamatta vihjeitä opiskelijalle oikeasta vastauksesta. Ratkaisussa tasokuviot esitettiin oikeassa koossa toisiinsa nähden, jotta oikea vastaus olisi visuaalisesti selvä. Algebrallinen ratkaisu esitettiin pinta-alojen laskukaavojen avulla tarkkana arvona, mutta kertoimien tarkat arvot pyöristettiin vertaamisen helpottamiseksi.

Laita seuraavien tasokuvioiden pinta-alat suuruusjärjestykseen suurimmasta pienimpään.

- Ympyrä, jonka säde on r / 2

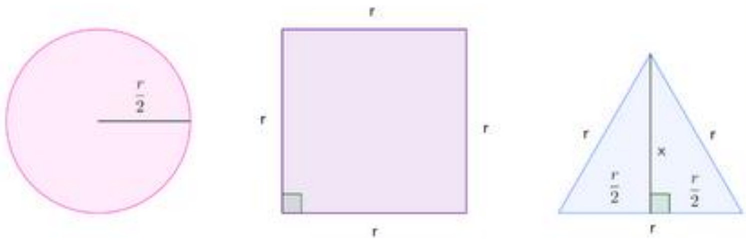
- Neliö, jonka sivun pituus on r

- Tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on r

Valitse yksi:

- Ympyrä > Neliö > Tasasivuinen kolmio
- Ympyrä > Tasasivuinen kolmio > Neliö
- Neliö > Ympyrä > Tasasivuinen kolmio ✓
- Neliö > Tasasivuinen kolmio > Ympyrä
- Tasasivuinen kolmio > Ympyrä > Neliö
- Tasasivuinen kolmio > Neliö > Ympyrä

**RATKAISU:**




Ympyrän pinta-ala $A_y$ on

$$A_y = \pi \cdot (\frac{r}{2})^2 = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \approx 0{,}79 \cdot r^2.$$

Neliön pinta-ala $A_n$ on

$$A_n = r^2.$$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala $A_k$ on

$$A_k = \frac{r \cdot x}{2} = \frac{r \cdot \sqrt{r^2 - (\frac{r}{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 \approx 0{,}43 \cdot r^2.$$

Oikea vastaus on siis $A_n > A_y > A_k$.

Apua ympyrän pinta-alan laskemiseen seuraavasta linkistä:

https://moodle.jyu.fi/mod/book/view.php?id=55641&chapterid=313

Apua kolmion pinta-alan laskemiseen seuraavasta linkistä:

https://moodle.jyu.fi/mod/book/view.php?id=55641&chapterid=278

*Kuva 18. Geometria harjoitustehtävä 6.*

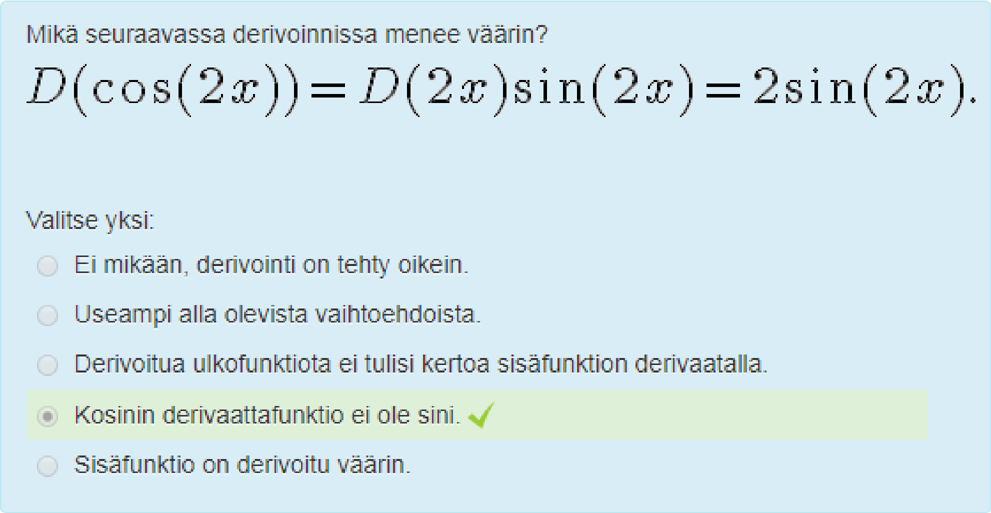
### 4.2.5. Derivaatta ja integraali

Derivaatta ja integraali -osiossa ei ollut lainkaan sanallisia soveltavia tehtäviä. Sanalliset tehtävät korvattiin tehtävillä, joissa opiskelijan tuli osata tulkita laskun välivaiheet ja etsiä mahdollinen virhe. Näillä tehtävillä pyrittiin korjaamaan opiskelijoiden mahdollisia virhekäsityksiä derivointi- ja integrointisäännöistä. Opiskelijoiden palautteen mukaan virheidenetsimistehtävät olivat olleet mieluisia (Luku 5.1.).

Virheidenetsimistehtävät toteutettiin ”valitse yksi” –monivalintatehtävinä, jolloin tehtävistä sai pisteitä 100 % tai 0 %. Tehtävien pisteytys ja vaihtoehtojen muotoilut oli suunniteltu siten, että opiskelijan tuli tarkistaa kaikki derivoinnin (tai integroinnin) vaiheet. Ei siis riittänyt, että opiskelija derivoi itse kyseessä olevan funktion ja vertasi sitä tehtävän derivoinnin lopputulokseen, vaan opiskelijan täytyi ymmärtää derivointisäännöt ja osata tarkistaa tehtävän laskun välivaiheet. Esimerkiksi joissain tehtävissä derivoinnin lopputulos oli oikein, mutta itse derivointiin oli upotettu toisensa korjaavat virheet.

Koetehtävän 3 (Kuva 19) tavoitteena oli kerrata yhdistetyn funktion ja trigonometristen funktioiden derivointisäännöt. Tehtävä sujui opiskelijoilta hyvin, sillä keskimäärin tehtävän maksimipisteistä oli saatu 91 % maksimipisteistä (77 vastaajaa). Vaikka opiskelijat pitivät kurssipalautteen perusteella Derivaatta ja integraali -osiota yhtenä Ajokortin vaikeimpana, oli ensimmäisen kokeen läpipääsyprosentti kuitenkin 87 % – sama kuin myös haastavana koetussa Geometria-osiossa (Liite 1). Hyvät läpipääsyprosentit näissä osioissa saattaa selittää se, että ne olivat Ajokortin 1b viimeiset, joten opiskelijat olivat harjaantuneet kurssin suorittamiseen. Lisäksi heikosti motivoituneet opiskelijat olivat jo lopettaneet tässä vaiheessa: Peruslaskutoimitukset-osion ensimmäistä koetta yritti 103 opiskelijaa, kun Geometria- sekä Derivaatta ja integraali -osioiden ensimmäisiä kokeita yritti enää 77 opiskelijaa (Liite 1).

Kahden viimeisen osion hyvä läpipääsyprosentti saattaa myös selittyä sillä, että niihin on nähty enemmän vaivaa. Moodlesta löytyy myös opiskelijoiden kokeisiin käyttämien aikojen tiedot, mutta ne eivät valitettavasti tämän kurssin kohdalla kerro juuri mitään. Opiskelijan ei ole tarvinnut suorittaa kurssia yhdeltä istumalta, vaan hän on voinut suorittaa sitä pala kerrallaan omien aikataulujen mukaan. Tästä syystä Moodlen suoritusaikatiedoissa saattaa näkyä kaksi viikkoa, vaikka todellisuudessa aktiivinen suoritusaika olisi ollut muutamien tuntien suuruusluokkaa.




*Kuva 19. Derivaatta ja integraali koe 1 tehtävä 3.*

### 4.2.6. Loppukoe

Ajokortin 1b lopuksi opiskelijoiden tuli suorittaa loppukoe, joka poikkesi muiden osioiden kokeista siten, että sitä sai yrittää vain kahdesti (Loppukoe 1 on liitteessä 2). Loppukokeissa oli kaksi tehtävää kuhunkin kerrattuun osioon liittyen. Tehtävien vaikeustaso suunniteltiin helpommaksi kuin osioiden koetehtävissä. Loppukokeen tehtävät olivat kuitenkin hieman erityyppisiä kuin osioiden kokeiden tehtävät.

Läpipääsyprosentti Ajokortin osioiden ensimmäisissä kokeissa kasvoi peruslaskutoimitusten noin 70 %:sta kolmen viimeisen osion noin 90 %:iin. Loppukokeen läpipääsyprosentti oli kuitenkin vaatimaton 62 % ensimmäisessä loppukokeessa ja toisessa vain 34 % (Liite 1). Tämä selittynee sillä, että loppukokeessa käsiteltiin kaikkia aihealueita, eikä opiskelija siksi välttämättä tiennyt, mitä matemaattista ratkaisumenetelmää tehtävä vaatii. Ajokortin kokonaisuuden hallitseminen oli tietysti hankalampaa kuin yhden yksittäisen aihealueen. Ennen loppukoetta ei myöskään ollut harjoitustehtäviä, joista olisi saanut mallivastaukset tyypillisiin koetehtäviin. Toisaalta opiskelijat olivat kuitenkin saaneet hyvää harjoitusta tehtävien tekemiseen aiemmista osioista ja kurssin asioiden olisi pitänyt olla hyvässä muistissa. Voi siis olla, että loppukokeen vaikeustaso oli kuitenkin hieman liian korkea.

### 4.3. Tehtävät Ajokortissa 2b

Ajokortin 2b tavoitteena oli valmistella opiskelijaa erilaisilla tehtävätyypeillä abstraktimpaan ajatteluun sekä ohjata opiskelijaa perustelemaan vastauksiaan matemaattisesti. Tehtävät olivat Ajokortin 1b tehtäviä teoreettisempia ja pohjautuivat enemmän matemaattisiin määritelmiin. Kokeita laadittaessa haluttiin ottaa huomioon se, että opiskelija ei voisi suorittaa koko Ajokorttia pelkästään käyttäen symbolista laskinta. Pieni osa tehtävistä oli kuitenkin ratkaistavissa laskimen avulla. Laskimen käyttö on lukiossa vielä suuressa roolissa, mutta yliopistomatematiikassa laskimesta on hyötyä vain hyvin harvoissa tilanteissa. Osa Ajokortin 2b tehtävistä siirrettiin Ajokortista 1b, koska ne todettiin liian haastavaksi Ajokorttiin 1b. Suurin osa tehtävistä kuitenkin laadittiin vastaamaan vain yliopiston tarpeita.

Tehtäviä Ajokortissa 2b oli yhteensä 81, joista 52 tuli tehdä saadakseen kurssista suoritusmerkinnän (Taulukko 7). Tehtäviä oli siis huomattavasti vähemmän kuin Ajokortissa 1b, mutta niiden vaikeustaso oli korkeampi. Ajokortin 2b suorittaneita opiskelijoita oli 18, mutta joissakin Ajokortin osioissa oli enemmänkin suorituksia. Tämä selittynee sillä, että jotkut opiskelijat olivat aloittaneet Ajokortin tekemisen, mutta eivät olleet suoriutuneet kokeista riittävän hyvin saadakseen Ajokorttia suoritetuksi, joten he jättivät Ajokortin kesken.

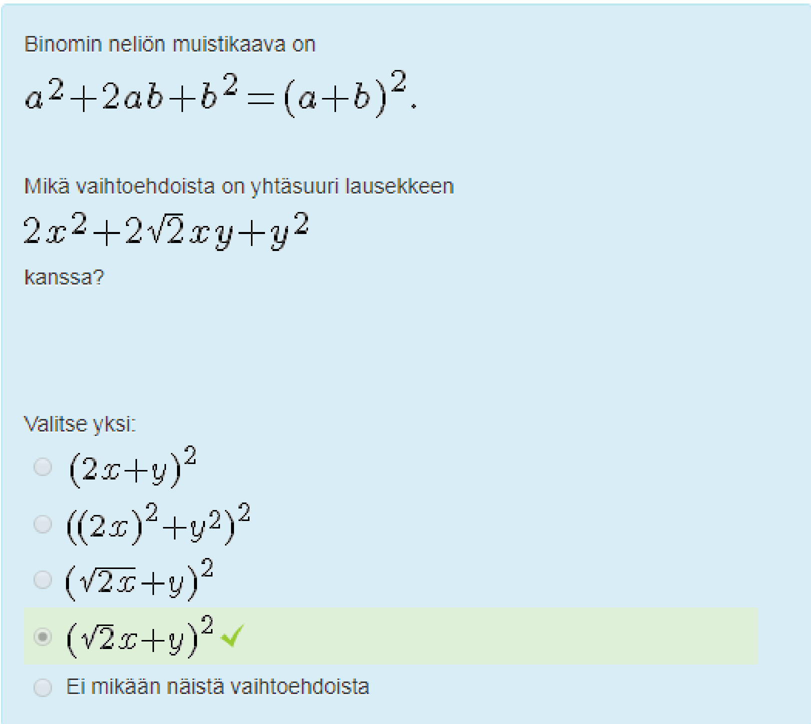
*Taulukko 7. Tehtävien lukumäärä Ajokortilla 2b.*

| Osio | Harjoitustehtäviä | Tehtäviä per koe | Yhteensä |
|---|---|---|---|
| Algebra | 5 | 6 | **17** |
| Alkeisfunktiot | 4 | 6 | **16** |
| Differentiaalilaskenta | 3 | 6 | **15** |
| Analyyttinen geometria ja trigonometria | 6 | 6 | **18** |
| Todennäköisyyslaskenta | 5 | 5 | **15** |

#### 4.3.1. Algebra

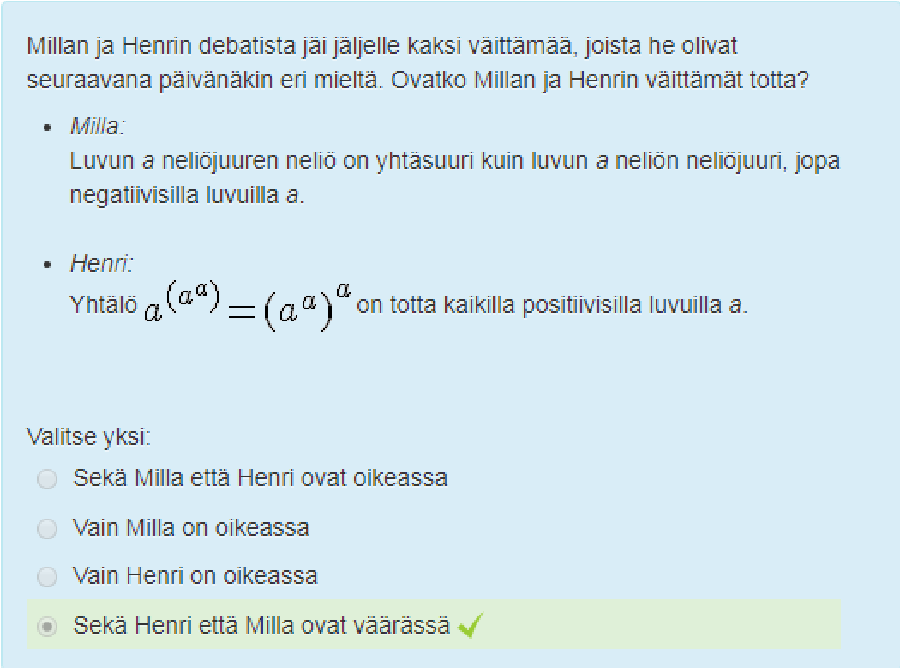
Tämän osion tarkoituksena oli palauttaa opiskelijan mieleen murtolukujen ja potenssien laskusääntöjä sekä binomin neliön muistikaava. Tehtävissä haluttiin myös tutustuttaa opiskelija käyttämään muitakin muuttujia kuin lukiossa yleisesti käytetyt $x$, $y$ ja $z$. Suurin osa tehtävistä oli perinteistä lausekkeen sieventämistä, mutta mukana oli myös muutama sanallinen tehtävä, joissa kuitenkin mitattiin edelleen yksinkertaisten laskusääntöjen osaamista.

Ensimmäisen kokeen tehtävässä 2 (Kuva 20) oli tarkoituksena palauttaa mieleen binomin neliön laskukaava. Lukiossa kyseistä laskukaavaa on ehkä käytetty lähinnä binomin neliön auki laskemiseen, mutta nyt haluttiin korostaa lausekkeen sieventämistä binomin neliöksi. Laskukaavaa käytettiin siis ikään kuin ”toiseen suuntaan”. Tehtävän avulla haluttiin painottaa laskukaavoissa esiintyvän yhtäsuuruuden ymmärtämistä. Mikäli opiskelija koki annetun lausekkeen muuntamisen binomin neliöksi laskukaavan avulla liian haastavaksi, hänellä oli myös mahdollisuus sieventää kaikki annetut vaihtoehdot ja verrata niitä annettuun lausekkeeseen. Kokeen tuloksia analysoitaessa kävi ilmi, että jokainen Ajokorttia suorittanut opiskelija oli osannut tehdä tehtävän oikein. Binomin neliön muistikaava oli siis opiskelijoilla joko hyvin hallussa tai he olivat saattaneet hyödyntää laskinta tehtävän ratkaisemisessa.




*Kuva 20. Algebra koe 1 tehtävä 2.*

Ensimmäisen kokeen viidennen tehtävän (Kuva 21) tarkoituksena oli kerrata potenssin ja neliöjuuren laskusääntöjä sekä neliöjuuren määrittelyehtoa sanallisen tehtävän muodossa. Tehtävässä esiintyvään Millan väitteeseen lisättiin viittaus negatiivisiin lukuihin tehtävän helpottamiseksi, mutta silti vain hieman yli puolet kurssin suorittaneista oli osannut tehdä tehtävän. Tämän osion ensimmäisen kokeen läpäisi 73 % osiota tehneistä 22 opiskelijasta.


Millan ja Henrin debatista jäi jäljelle kaksi väittämää, joista he olivat seuraavana päivänäkin eri mieltä. Ovatko Millan ja Henrin väittämät totta?

- *Milla:*
  Luvun *a* neliöjuuren neliö on yhtäsuuri kuin luvun *a* neliön neliöjuuri, jopa negatiivisilla luvuilla *a*.
- *Henri:*
  Yhtälö $a^{(a^a)} = (a^a)^a$ on totta kaikilla positiivisilla luvuilla *a*.

Valitse yksi:

- Sekä Milla että Henri ovat oikeassa
- Vain Milla on oikeassa
- Vain Henri on oikeassa
- Sekä Henri että Milla ovat väärässä

*Kuva 21. Algebra koe 1 tehtävä 5.*

## 4.3.2. Alkeisfunktiot

Tässä osiossa tarkoituksena oli palauttaa mieliin eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuuksia sekä syventää funktioiden käsitteitä. Suurin osa tehtävistä oli rakennettu siten, että opiskelijalle oli annettu tarvittava teoria, jota soveltamalla tehtävä tuli ratkaista. Tehtävissä harjoiteltiin matemaattista lukutaitoa, jolla on yliopistomatematiikassa suuri rooli. Tehtävissä harjoitettiin myös opiskelijan taitoa perustella asioita, sillä yliopistomatematiikassa perusteleminen on täysin eri tasolla kuin lukiomatematiikassa. Kokonaisuudessaan alkeisfunktioiden osio meni hyvin: 20 opiskelijasta 75 % pääsi ensimmäisellä yrittämällä läpi.

Alkeisfunktiot-osion harjoitustehtävässä 3 (Kuva 22) opiskelijan oli tarkoitus osata soveltaa annettua ehtoa tietylle funktiolle. Tehtävässä testattiin erityisesti opiskelijan kykyä perustella tekemiään päätelmiä. Tehtävän pohjana oli opiskelijoiden harhakäsitys, jonka mukaan kaikki funktiot olisivat lineaarisia. Tehtävän yhtenä tarkoituksena oli selventää opiskelijalle, että yksittäisen vastauksen löytäminen ei tarkoita yhtälön toteutumista kaikilla reaaliluvuilla. Tehtävän oli myös tarkoitus havainnollistaa, että toisaalta yksittäisen vastaesimerkin löytäminen kuitenkin kumoaa väitteen.

Eräälle funktiolle *g* pätee ehto *H*:

$H\colon g(y+z)=g(y)+g(z)$ kaikilla $y,z\in\mathbb{R}$.

Päteekö ehto *H* funktiolle

$f(x)=(x+1)^2$?

Valitse oikea perustelu.

Valitse yksi:

- (a) Pätee, sillä ehto toteutuu sijoittamalla $y=0=z$
- (b) Pätee, sillä $f(x+1)=(x+1)^2$.
- (c) Ei päde, sillä ehto ei toteudu sijoittamalla $y=1$ ja $z=0$. ✓
- (d) Ei päde, sillä funktion $f$ kuvaaja on paraabeli.

Vastauksesi on oikein.

**RATKAISU:**

- (a) Perustelu on **väärin**: ehto ei toteudu, kun $y=0=z$, ja vaikka toteutuisikin, se ei riittäisi. Se, että löydetään jotkin luvut, jotka toteuttavat yhtälön, ei takaa, että ehto olisi totta *kaikilla* reaaliluvuilla $y$, $z$.
- (b) Perustelu on **väärin** ja hölynpölyä: $f(x+1)\neq(x+1)^2$, eikä tämä liity annettuun ehtoon millään tavalla.
- (c) Perustelu on **oikein**: ehto $H$ ei toteudu *kaikilla* reaaliluvuilla, jos löydetään yksikin vastaesimerkki, jolla ehto ei toteudu. Siis koska $f(0+1)=4\neq5=f(0)+f(1)$, ehto ei päde funktiolle $f$.
- (d) Perustelu on **väärin**: funktion $f$ kuvaaja on todella paraabeli, mutta annettuun ehtoon perustelu ei ota kantaa.

*Kuva 22. Alkeisfunktiot harjoitustehtävä 3.*

Tehtävä oli hyvin erityyppinen kuin mihin lukiolaiset ovat yleensä tottuneet, ja se meni osion harjoitustehtävistä selvästi heikoiten. Suorituskertoja oli 31 ja vääriä vastauksia oli jopa 15, joista 14 oli vaihtoehto (d). Koska kyseessä oli harjoitustehtävä ja annetulla vastauksella ei ollut Ajokortin suorittamisen kannalta väliä, saattoi kyse olla vain sattumasta. Toisaalta voi myös olla, että opiskelijat tiesivät ehdon paikkansapitämättömyyden ja huomasivat funktion kuvaajan olevan paraabeli, joten he siksi valitsivat kyseisen vaihtoehdon miettimättä, onko perustelu järkevä.

### 4.3.3. Differentiaalilaskenta

Tämän osion tarkoituksena oli kerrata differentiaalilaskentaa monipuolisesti. Erityisesti haluttiin tuoda ilmi eri derivointisääntöjen nimeämistä, jotta opiskelija tiedostaisi, mitä sääntöä hän käyttää missäkin välivaiheessa. Tarkoituksena sääntöjen tiedostamisessa oli ohjata opiskelijaa kohti yliopistomatematiikassa tarvittavaa laskujen välivaiheiden yksityiskohtaista perustelemista. Sääntöjen nimeämiseen ei voi käyttää symbolista laskinta, joten tehtävätyyppi sopi Ajokorttiin hyvin. Tehtävissä harjoiteltiin lisäksi funktion kuvaajan perusteella sen derivaattafunktion arvojen tulkitsemista. Tässä osiossa oli mukana funktioihin liittyviä tehtäviä.

Osion ensimmäisen kokeen toisen tehtävän (Kuva 23) tarkoituksena oli palauttaa mieleen funktion kulkukaavion tutkiminen, epäyhtälöiden yksinkertainen käsittely sekä määrittelyjoukon merkitys. Tämä oli mennyt kokeen tehtävistä selvästi huonoiten, jopa kuusi koetta tehneestä 19 opiskelijasta (noin 32 %) oli vastannut tehtävään väärin.

Tehtävän hankaluus johtui varmasti osittain siitä, että se oli differentiaalilaskennan osiossa, jolloin opiskelija saattoi kuvitella kyseessä olevan derivointi- tai integrointitehtävä, eikä siksi ymmärtänyt, mitä tehtävässä olisi pitänyt tehdä. Tällaista tehtävää vastaavaa harjoitustehtävää ei myöskään ollut, joten opiskelijalle ei ollut tarjolla mallia tehtävän tekemiseen. Toinen hankaluus tehtävässä oli luultavasti muuttujalle $x$ annettu ehto ja sen soveltaminen. Eräs sudenkuoppa tehtävässä oli myös se, että mikäli neliöjuuri otetaan epäyhtälön molemmilta puolilta, tulee huomioida itseisarvot. Tehtävän ratkaisun olisi toisaalta voinut myös päätellä sijoittamalla välin arvoja ja vertaamalla tuloksia annettuihin vaihtoehtoihin, joten tehtävän ei olisi pitänyt olla ylivoimaisen vaikea.

Olkoon funktio $f(x) = (x-3)^2$. Missä välin $x \in ]0,2]$ pisteissä epäyhtälö

$f(x) < 4$

toteutuu?

Valitse yksi:

- $x \in ]0,2]$
- $x \in [1,5[$
- $x \in ]1,2]$ ✓
- $x \in [2,5[$

*Kuva 23. Differentiaalilaskenta koe 1 tehtävä 2.*

Osion ensimmäisen kokeen neljässä tehtävässä (Kuva 24) helppo integroimistehtävä tehtiin hankalan näköiseksi lisäämällä lukiolaiselle entuudestaan tuntematon sana *primitiivi.* Tehtävässä opiskelijan tuli osata tulkita derivaattafunktion merkintä: funktion $f(x)$ derivaattafunktio on $f'(x)$, ja ymmärtää, mitä annetussa lauseessa sanotaan. Tehtävässä oletettiin olevan hankaluutena ymmärtää, tuleeko annettua lauseketta derivoida vai integroida.

Funktiota $F(x)$ sanotaan funktion $f(x)$ *primitiiviksi*, mikäli $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x$.

Mikä seuraavista on funktion $g(x) = 2x^2 + 1$ *primitiivi*?

Valitse yksi:

- $h(x) = 4x$
- $h(x) = x^3 + x$
- $h(x) = \frac{2}{3}x^3 + x - 5$ ✓
- $h(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x + 1$

*Kuva 24. Differentiaalilaskenta koe 1 tehtävä 4.*

Tehtävä meni ensimmäisen kokeen tehtävistä toiseksi huonoiten, mutta kuitenkin 80 % opiskelijoista ratkaisi tehtävän oikein. Tämän osion koe oli mennyt Ajokortin osioiden kokeista huonoiten: 68 % opiskelijoista pääsi ensimmäisellä yrityksellä läpi. Ero ei kuitenkaan ole merkittävä muiden osioiden kokeiden läpipääsyprosentteihin verrattuna (Liite 1).

### 4.3.4. Analyyttinen geometria ja trigonometria

Analyyttisen geometrian osalta tarkoituksena oli kerrata ympyrän ja paraabelin yhtälöitä pääasiassa niiden algebrallisten ominaisuuksien takia. Ympyrän yhtälö haluttiin mukaan tähän osioon siksi, että sen avulla on hyvä harjoitella neliöksi täydentämistä, ja paraabelin yhtälö siksi, että opiskelija saisi harjoitusta yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Trigonometrian osalta tavoitteena oli palauttaa opiskelijan mieleen radiaanien käyttäminen ja yksikköympyrän tulkitseminen. Mukana oli myös yksi tehtävä sinin kuvaajasta sen muodon mieleen palauttamiseksi. Tehtävätyypit olivat opiskelijoille lukiosta tuttuja ja jopa noin 79 % opiskelijoista läpäisikin tämän osion ensimmäisen kokeen.

Osion ensimmäisessä harjoitustehtävässä (Kuva 25) piti muuttaa normaalimuodossa annettu ympyrän yhtälö sen keskipistemuotoon. Tehtävässä annettiin tarvittavat tiedot sen ratkaisemiseksi, mutta opiskelijan tuli ymmärtää lukemansa informaatio ja osata soveltaa sitä. Neliöksi täydentäminen ei välttämättä ole lukiolaiselle kovinkaan tuttu asia, joten tehtävän malliratkaisusta haluttiin tehdä tarpeeksi yksityiskohtainen. Tämän osion ensimmäisen kokeen ensimmäinen tehtävä oli vastaavanlainen, mutta hieman eri kertoimilla. Kokeessa opiskelijoista 90 % osasi ratkaista kyseisen tehtävän oikein.

Kuva 26 esittää ensimmäisen kokeen viidennen tehtävän. Tehtävän tarkoitus oli palauttaa mieleen se, että trigonometriaan liittyy oleellisesti monia eri muistikaavoja, joista yksi oli otettu esiin tähän tehtävään. Tehtävä ohjaili opiskelijaa yliopistomatematiikan pariin, sillä yliopistomatematiikassa usein esitellään ja todistetaan jokin lause, jota opiskelijan tulee sitten osata soveltaa tehtävissä. Tähän tehtävään laskukaavan perustelu oli lisätty kuvan muodossa.

Ympyrän yhtälö voidaan ilmoittaa **normaalimuodossa**

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

tai **keskipistemuodossa**

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,$$

kun ympyrän keskipiste on $(x_0,y_0)$ ja säde on $r$.

Erään ympyrän yhtälön normaalimuoto on

$$x^2+y^2-2x+2\sqrt{3}y=0.$$

Muuta ympyrän yhtälö keskipistemuotoon. Anna vastauksessa ympyrän keskipiste ja säde.

Valitse yksi:

- Keskipiste on $(1,-3)$ ja säde on $4$.
- Keskipiste on $(-1,3)$ ja säde on $2$.
- Keskipiste on $(1,\sqrt{3})$ ja säde on $2$.
- Keskipiste on $(1,-\sqrt{3})$ ja säde on $2$.
- Keskipiste on $(1,3)$ ja säde on $4$.

Vastauksesi on oikein.

**RATKAISU:**

Normaalimuoto tulee siis täydentää neliöksi molempien muuttujien $x$ ja $y$ suhteen:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-2x+2\sqrt{3}y &= 0 \\
x^2-2x+y^2+2\sqrt{3}y &= 0 \\
x^2-2\cdot1\cdot x+y^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot y &= 0 && \|+(1^2+\sqrt{3}^2) \\
(x^2-2\cdot1\cdot x+1^2)+(y^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot y+\sqrt{3}^2) &= 1^2+\sqrt{3}^2 && \|a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\
(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2 &= 4 \\
(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2 &= 2^2.
\end{aligned}$$

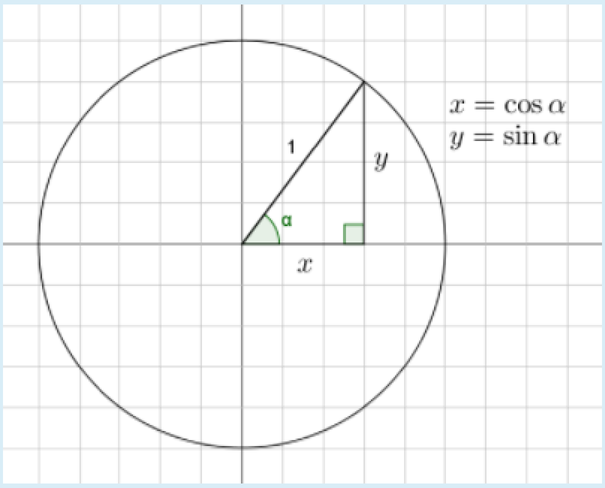
Nyt ympyrän yhtälö on saatu keskipistemuotoon, josta nähdään, että keskipiste on $(1,-\sqrt{3})$ ja säde on $2$.

*Kuva 25. Analyyttinen geometria ja trigonometria harjoitustehtävä 1.*

Tämä ensimmäisen kokeen viides tehtävä osoittautui osion hankalimmaksi, mutta sen oli silti osannut täysin oikein 79 % opiskelijoista. Tehtävää suunniteltaessa pelkona oli, että opiskelijat eivät ymmärrä tehtävän rakennetta, eivätkä siksi osaa vastata tehtävään. Huoli kuitenkin osoittautui turhaksi, sillä jokainen opiskelija oli osannut valita vaihtoehdoista kaksi: yhden a)-kohdan kysymykseen ja toisen b)-kohdan kysymykseen, tai pelkän viimeisen vaihtoehdon *Ei mitkään näistä vaihtoehdoista.*

Milla katsoo yksikköympyrästä Pythagoraan lauseen avulla, että kulman $\alpha$ sinin ja kosinin arvoille pätee

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$




Sievennä edellistä lausetta käyttäen lausekkeet

a) $\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha$

b) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

Valitse yksi tai useampi:

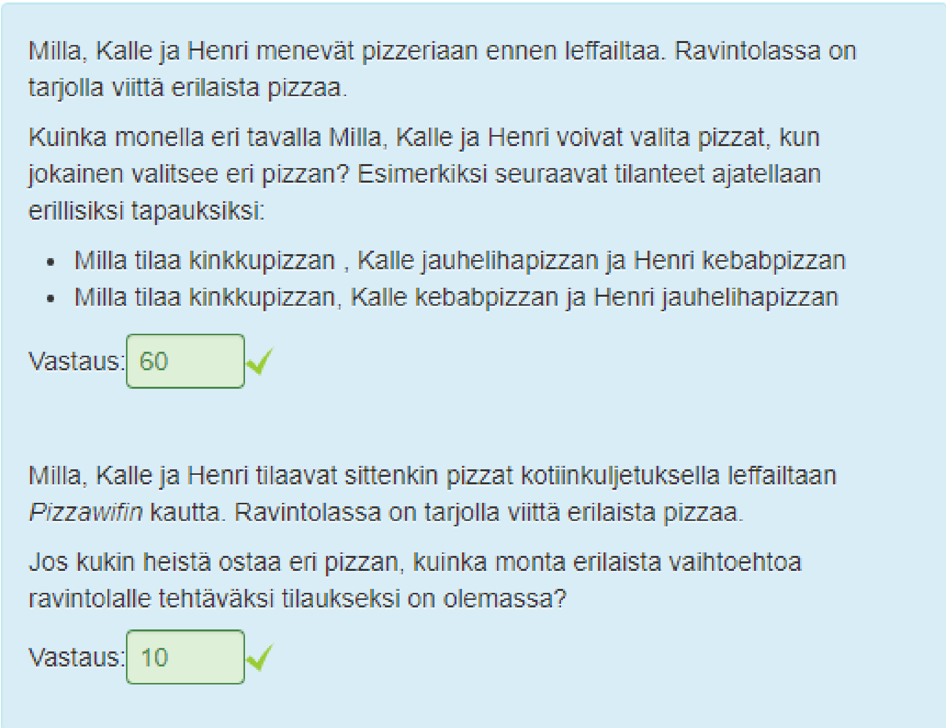
- a) $\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha=\sin\alpha$ ✓
- a) $\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha=\sin\alpha+1$ ✗
- a) $\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$ ✗
- b) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. ✗
- b) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1$. ✗
- b) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1$. ✓
- Ei mitkään näistä vaihtoehdoista. ✗

*Kuva 26. Analyyttinen geometria ja trigonometria koe 1 tehtävä 5.*

### 4.3.5. Todennäköisyyslaskenta

Tämän osion tarkoituksena oli kerrata todennäköisyyslaskennan perusasioita helpohkoilla perustehtävillä. Osiossa käytiin läpi riippumattomat ja erilliset tapahtumat, vastatapahtuman todennäköisyys, odotusarvo sekä kombinaation ja permutaation käsitteet. Harjoitustehtävissä annettiin tehtävissä tarvittava teoria ja laskukaavat, joita kokeiden tehtävissä tuli käyttää. Koe- ja harjoitustehtävät olivat keskenään hyvin samankaltaisia ja samassa järjestyksessä, joten opiskelijan oli helppo palata harjoitustehtäviin lukemaan tarvittavaa teoriaa. Osion kaikki tehtävät olivat sanallisia ja niihin oli liitetty jokin tarina tai konsepti, jonka oli tarkoitus motivoida opiskelijaa mielenkiintoisuudellaan sekä tehdä tehtävät helpommin lähestyttäviksi.

Osion ensimmäisen kokeen viimeisen tehtävän (Kuva 27) tavoitteena oli havainnollistaa permutaation ja kombinaation eroa. Tehtävää suunniteltaessa hankaluudeksi osoittautui tehtävän sanallinen muotoilu. Oli haastavaa koettaa lyhyesti ja ytimekkäästi osoittaa, että jälkimmäisessä kohdassa ei ole väliä, minkä pizzan kukin henkilö tilaa (toisin kuin ensimmäisessä kohdassa). Tehtävä olikin selvästi kokeen hankalin, sillä vain seitsemän 19 opiskelijasta (noin 37 %) oli osannut ratkaista tehtävän täysin oikein. Koko kokeen läpipääsyprosentti 72 % ei kuitenkaan ollut merkittävästi huonompi kuin muidenkaan osioiden kokeissa. Tämä johtunee siitä, että vaikka viidestä tehtävästä yksi menisikin väärin, oli koe silti mahdollista päästä läpi. Toisaalta moni opiskelija oli osannut tehdä tehtävän puoliksi, jolloin hän oli saanut puolet pisteistä. Monet olivat vastanneet tämän tehtävän ensimmäiseen kohtaan 10, joka oli toisen kysymyksen vastaus. Opiskelijat siis luultavasti joko ymmärsivät tehtävänannon väärin tai heillä meni permutaation ja kombinaation määritelmät sekaisin.




*Kuva 27. Todennäköisyyslaskenta koe 1 tehtävä 5.*

Kuvassa 28 on osion harjoitustehtävien toinen tehtävä. Kuten muissakin osion tehtävissä, tässäkin annettiin aluksi tarvittava teoria, jota opiskelijan tuli osata soveltaa tarinaan sidotussa esimerkissä. Tehtävän mielekkyyden lisäämiseksi siihen myös liitettiin kuva Monopoly-pelilaudasta. Tehtävän malliratkaisussa (Kuva 29) ohjattiin opiskelijaa tekemään taulukko mahdollisista tapahtumista ja sitä kautta laskemaan pyydetty todennäköisyys. Malliratkaisun tavoitteena oli ohjata opiskelijaa ratkaisemaan kokeiden vastaavanlaiset tehtävät samalla periaatteella.

Vastatapahtuman $A^C$ todennäköisyys saadaan vähentämällä tapahtuman *A* todennäköisyys luvusta 1 eli

$$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A).$$

Kalle pelaa kavereidensa kanssa *Monopoly* -lautapeliä, josta havainnekuva alla.

(Kuvan lähde on http://www.alamy.com/stock-photo/monopoly-board-game.html.)


Kallen heittää vuorollaan kahta noppaa. Kalle toivoo, että noppien silmälukujen summa ei ole 8, 9 tai 11, koska näillä lukemilla Kalle joutuu muiden pelaajien omistamaan hotelliin. Mikä on todennäköisyys sille, että Kalle ei joudu muiden pelaajien hotelliin?

Valitse yksi:

- $\frac{21}{36}$
- $\frac{23}{36}$
- $\frac{25}{36}$ ✓
- $\frac{27}{36}$
- ei mikään näistä vaihtoehdoista

*Kuva 28. Todennäköisyys harjoitustehtävä 2.*

Vastauksesi on oikein.

**RATKAISU:**

Merkitään $A =$ "silmälukujen summa on 8, 9 tai 11".
Kun kahta noppaa heitetään, mahdollisia silmälukupareja eli alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ kappaletta. Alla olevasta taulukosta nähdään, että suotuisia alkeistapauksia $A$ (merkitty punaisella taulukkoon) on yhteensä $5 + 4 + 2 = 11$ kappaletta.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Nyt siis $P(A) = \frac{\text{suotuisten alkeistapausten } A \text{ lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}} = \frac{11}{36}$.

Tapahtuman $A$ vastatapahtuman todennäköisyys $\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

*Kuva 29. Todennäköisyyslaskenta harjoitustehtävä 2 malliratkaisu.*

# 5. Ajokorttien 1b ja 2b palautteet ja kehittäminen

MathMarket-kurssin opiskelijoiden kokemuksia kartoitettiin palautekyselyillä, jotka olivat pakollisia jokaisessa Ajokortissa. Tässä kappaleessa käsitellään Ajokorttien 1b ja 2b palautekyselyiden tuloksia ja peilataan niitä kyseisten Ajokorttien tavoitteisiin sekä esitetään kehitysideoita kurssille.

## 5.1. Opiskelijoiden palaute Ajokortista 1b

Palautekyselyyn vastasi 70 opiskelijaa, mutta kaikki eivät vastanneet jokaiseen kysymykseen (kaikkiin monivalintakysymyksiin vastasi kuitenkin vähintään 65 opiskelijaa). Kyselyyn vastanneista 29 aloitti opintonsa ammattikorkeakoulussa, 30 yliopistossa ja loput olivat joko lukion tai avoimen ammattikorkeakoulun opiskelijoita tai eivät vastanneet kysymykseen ollenkaan.

Viisi kuudesta vastaajasta piti kurssia joko hyvin tarpeellisena tai melko tarpeellisena. Kukaan ei ollut sitä mieltä, että kurssi olisi ollut täysin tarpeeton ja turha. Kaksi kolmasosaa kyselyyn vastanneista koki materiaalikirjan olleen joko erittäin tai melko hyödyllinen. Puolet vastanneista piti harjoitustehtävien määrää sopivana ja noin kolmasosa olisi halunnut enemmän harjoitustehtäviä. Yli puolet koki harjoitustehtävien vaikeustason sopivana ja neljäsosa vastasi tehtävien olleen melko helppoja, vaikka he olivatkin joutuneet etsimään lisäapua niiden ratkaisemiseen. Vastanneista vain kaksi piti harjoitustehtävien malliratkaisuja turhina ja neljä vaikeaselkoisina, kun taas noin 60 % vastanneista piti niitä hyödyllisinä ja kolmasosa ymmärrettävinä sekä riittävän yksityiskohtaisina. Avoimien kysymysten vastausten perusteella opiskelijoiden mielestä kurssin tarpeellisimmiksi kerrattaviksi aiheiksi ja samalla myös hankalimmiksi aiheiksi osoittautuivat geometria ja differentiaalilaskenta.

Kurssin hyviä ja huonoja puolia sekä kehitysideoita kysyttiin avointen kysymysten kautta. Moni opiskelija kirjoitti kurssin olleen erittäin hyödyllinen ja mukava tehdä. Moni toivoi lisää harjoitustehtäviä tai esimerkkejä materiaalikirjan puolelle. Eräs opiskelija antoi palautetta materiaalikirjan rakenteesta seuraavasti

> *”Materiaalikirjassa osiot olivat eri järjestyksessä kuin kokeet mikä hieman häiritsi. Välillä videot kertasivat toisiaan ja ainakin yksi video oli kahdesti.*

*Jotkut videoista menivät suoraan seuraavaan videoon ja välillä jäi epäselväksi pitääkö sitä videota katsoa.”*

Loppukoe (etenkin jälkimmäinen) oli koettu monen mielestä liian haastavaksi. Osa vastanneista olisi kaivannut malliratkaisuja myös koetehtäviin. Käytännön asioihin liittyen useampi opiskelija toivoi, että kurssin eri osa-alueet olisivat Moodlessa näkyvissä etukäteen, vaikka niitä ei vielä pääsisikään suorittamaan. He perustelivat tätä sillä, että tehtävien sovittaminen omiin aikatauluihin olisi helpompaa. Joku mainitsi myös, että kunkin osion tehtävien kokonaismäärän olisi hyvä olla näkyvillä jo etukäteen. Ehdotuksena tuli myös värikoodaukset harjoitustehtävien ja kokeiden välille, jotta ne eivät menisi keskenään sekaisin. Moni koki itsenäisesti tehtävän verkkokurssin hyvänä omien aikataulujen kannalta.

Kurssin tehtäviä kommentoitiin erilaisiksi kuin lukiossa. Kahdesta tehtävästä oli löytynyt virhe. Vastanneista kaksi koki jotkin kurssin tehtävät vaikeaselkoisiksi ja yhdellä oli ollut ongelmia joidenkin kuvien tulkitsemisessa.

*”Tehtävissä jokunen harhaan johtava kuva ja jos tehtäviä olisi tulkinnut täysin kirjaimellisesti, olisi jokunen jäänyt tekemättä.”*

Kaksi opiskelijaa olivat sitä mieltä, että monivalintatehtäviä oli liikaa. Tehtävätyyppien samankaltaisuudesta kommentoitiin, että

*”Tehtävätyyppejä voisi ehkä lisätä vähän enemmän, osa tehtävistä tuntui toistavan itseään”.*

Sanalliset tehtävät oli koettu ”ihan hauskoiksi” ja tietyt tehtävätyypit olivat olleet eräälle opiskelijalle mieleen:

*”Erityisesti ajokortin lopussa "Mikä seuraavista on derivoitu/integroitu oikein?" -tehtävät olivat erinomaisia, sillä niissä huomio kiinnittyi derivoinnin lisäksi mm. sulkujen käyttöön sekä derivoimissääntöihin ja -kaavoihin.”*

## 5.2. Opiskelijoiden palaute ajokortista 2b

Ajokorttiin 2b palautekyselyyn vastasi 18 yliopisto-opiskelijaa. Kaikki kyselyyn vastanneet pitivät ajokorttia joko erittäin tarpeellisena tai melko tarpeellisena. Teknisen toteutuksen osalta kaikki olivat sitä mieltä, että Ajokortissa oli selkeät ohjeistukset, ja yhdelläkään vastaajalla ei ollut ongelmia liikkua kurssin eri osa-alueilla. Puolet vastanneista koki kurssin käyttöympäristön visuaalisen ilmeen selkeäksi ja he tiesivät koko suorituksen ajan, miten ovat suoriutumassa kurssista.

Kolme neljästä vastaajasta oli sitä mieltä, että Ajokorttiin 2b ei tarvita erillistä materiaalikirjaa, vaan he joko osasivat asiat itse tai katsoivat Ajokortin 1b materiaaleista tai joistakin muista lähteistä. Vastanneista puolet koki harjoitustehtävien määrän sopivaksi ja puolet taas olisi toivonut enemmän tehtäviä Ajokorttiin. Puolet opiskelijoista oli sitä mieltä, että harjoitustehtävien vaikeustaso oli melko helppo, vaikkakin he joutuivat etsimään lisäapua niiden ratkaisemiseen, kun taas puolet koki vaikeustason sopivaksi, vaikka he joutuivatkin kertailemaan asioita. Harjoitustehtävien malliratkaisut koettiin suurimman osan mielestä hyödyllisiksi ja riittävän yksityiskohtaisiksi.

Ajokortin haastavimpia asioita, yksittäisten tehtävien mieleenpainuvuutta, hyviä ja huonoja puolia sekä kehitysideoita kysyttiin avointen kysymysten kautta. Ajokortin 2b haastavimmaksi osioksi osoittautui suurimman osan mielestä Todennäköisyyslaskenta. Erään opiskelijan mielestä haastavinta Ajokortissa oli erilainen ajattelutapa Ajokorttiin 1b verrattuna. Vain yhdelle opiskelijalle oli jäänyt jokin yksittäinen tehtävä erityisesti mieleen:

> *”Todennäköisyyslaskennassa eräässä tehtävässä mainittiin Catanin uudisasukkaat -lautapeli. Se jäi mieleeni, sillä olen itsekin joskus kauan sitten pelannut sitä, ja se on erittäin hyvä peli!”*

Eräs opiskelija kehui Ajokortin tehtävien monipuolisuutta, ja niiden laatua kommentoitiin myös muun muassa seuraavasti:

> *”Kysymysten asettelu oli joissain tehtävissä hieman haastava, ja aiheutti turhia "vääriä vastauksia", kun kysymyksen saattoi ymmärtää useammalla tavalla. Yksiselitteisyys olisi kysymyksissä plussaa. Olisin kaivannut*

*enemmän tehtäviä per aihealue. Ehkä niin, että alkupään tehtävät olisivat helpompia ja vaikeutuisivat hiljalleen tenttiä kohti.”*

*”Tehtävät olivat hyviä, sillä ne olivat keskenään erilaisia ja niissä kertautui moni asia.”*

Yksi opiskelija oli sitä mieltä, että kurssin tehtävien määrä ja taso ovat ”aivan riittämättömiä” fysiikan tai matematiikan ensimmäisiltä kursseilta suoriutumiseen. Hän olisi myös kaivannut vektoreita mukaan kurssin oppisisältöihin. Yleisesti ottaen vastanneet kuvailivat kurssia käteväksi ja nopeaksi kertaukseksi sekä onnistuneeksi ja selkeäksi kokonaisuudeksi. Erään mielestä kurssi sisälsi ”laajasti tietoa pienessä paketissa”.

## 5.3. MathMarket-kurssin jatkokehittäminen

Ajokorttien 1b ja 2b tavoitteena oli tarjota opiskelijoille kevyt, mutta kattava kertaus lukion pitkästä matematiikasta johdatteluna uusiin opintoihin. Lisäksi tavoitteena oli myös motivoida opiskelijoita matematiikkaan ja näyttää korkeakoulumatematiikan eroavaisuus lukiomatematiikkaan. Saadun palautteen perusteella opiskelijat pääosin pitivät Ajokorteista ja kokivat ne hyödylliseksi uusia matematiikan opintoja ajatellen. Ajokorttien vaikeustaso oli opiskelijapalautteen perusteella sopiva. Siihen viittaa myös Ajokorttien eri osioiden kokeiden läpipääsyprosentit, ainoana poikkeuksena Ajokortin 1b toinen loppukoe (Liite 1). Myös Ajokorteista 1a ja 2a saatu palaute on erittäin kannustavaa ja positiivista. Näiden seikkojen perusteella voidaan siis sanoa, että koko MathMarket-kurssin pääasiallinen tavoite täyttyi.

Eräs Ajokorttien 1b ja 2b tavoite oli yliopiston näkökulmasta ohjata opiskelijoita valitsemaan ensimmäisen vuoden opinnoikseen joko *Calculus*- tai *Johdatus matemaattiseen analyysiin* -kursseja. Koska Ajokortit eivät ole uusille opiskelijoille pakollisia, jäi tämä tavoite taka-alalle. Osa uusista yliopisto-opiskelijoista on käynyt vain vilkaisemassa kurssia ja osa ei ole tehnyt sitä ollenkaan. Ensimmäisen vuoden kursseja valitessaan opiskelijoita on kehotettu pohtimaan, onko lukion matematiikka hyvin hallussa. Jos näin on, opiskelija voi siirtyä suoraan matemaattisen analyysin pariin. Ajokortit eivät suoraan kerro, kumpaan opiskelijan kannattaa suuntautua, mutta niiden kautta lukion oppisisällöt kuitenkin palautuvat mieleen. Tällöin opiskelijalla on ehkä paremmat mahdollisuudet analysoida omaa taitotasoaan lukiomatematiikassa ja siten paremmat valmiudet valita ensimmäisen vuoden opintonsa.

### 5.3.1. Kehitysideoita Ajokorttiin 1b

Ajokorttiin 1b voisi tehdä enemmän harjoitustehtäviä tai esimerkkilaskuja ainakin lisämateriaaliksi, mikäli pakollisten tehtävien määrää ei haluta kasvattaa. Myös Ajokortin tehtävien laatua voisi muuttaa hieman: monivalintatehtävien tilalle voisi tehdä matemaattisesti monipuolisempia tehtäviä. Ajokorttiin voisi lisätä enemmän Stack-tehtäviä, jotka mahdollistavat opiskelijalle matemaattisen tekstin kirjoittamisen tehtävän vastaukseen. Moodleen olisi myös mahdollista upottaa GeoGebra-appletteja, jotka edelleen monipuolistaisivat tehtävätyyppejä. Stack- ja GeoGebra-tehtävillä opiskelijan vastaus tehtävään voisi olla esimerkiksi funktion lausekkeen kirjoittaminen tai nollakohdan valitseminen kursorilla koordinaatistosta.

Vaikka materiaalikirja oli palautteen perusteella erittäin tai melko hyödyllinen, voisi materiaalikirjaa yhtenäistää osioiden järjestyksen ja sisällön kanssa enemmän. Kurssin yleisiä suoritusohjeita tulisi osan palautteen perusteella selkeyttää. Harjoitustehtäviä voisi myös eriyttää opiskelijoiden suorituksen mukaan. Esimerkiksi oikeilla vastauksilla harjoitustehtävistä avautuisi osion koe suoritettavaksi, kun taas väärillä vastauksilla harjoitustehtäviin tarjottaisiin lisää harjoitustehtäviä malliratkaisuineen. Lisähaastetta tai lisätietoa kaipaaville opiskelijoille voisi tarjota lisätehtäviä esimerkiksi Ajokortin 2b puolelta.

Palautteiden ja kurssin suoritusten perusteella toisen loppukokeen vaikeustasoa voisi hieman laskea, ettei se vie opiskelijan motivaatiota tulevilta opinnoilta. Opiskelijalle saattaa nimittäin käydä niin, että hän suorittaa lähes koko kurssin ja viimeisen loppukokeen kohdalla epäonnistuu, jolloin hän ei saa kurssista merkintää. Käytännön kannalta olisi hyvä, jos lukittujen osa-alueiden otsikot ja ehkä myös tehtävien määrät näkyisivät opiskelijalle jo etukäteen, jotta Ajokortin tekemisen aikatauluttaminen olisi opiskelijalle helpompaa.

### 5.3.2. Kehitysideoita Ajokorttiin 2b

Myös Ajokorttiin 2b voisi tehdä lisää harjoitustehtäviä tai esimerkkilaskuja, joko pakolliseksi osaksi kurssin suoritusta tai vain lisämateriaaliksi. Erityisesti Ajokortissa 2b voisi eriyttää ylöspäin laatimalla haastavampiakin tehtäviä. Kuten Ajokorttiin 1b, myös Ajokorttiin 2b voisi lisätä monipuolisempia Stack-tehtäviä aukko- ja monivalintatehtävien rinnalle. Stack-tehtävätyypin avulla voitaisiin toteuttaa esimerkiksi kevyitä vaiheittaisia todistuksia, jotka olisivat hyvää harjoitusta uusille yliopisto-opiskelijoille. Kurssille voisi mahdollisesti myös lisätä jonkinlaista teoriaa yliopistomatematiikasta tai vaikkapa tietoa yliopisto-opinnoista. Opiskelijoiden kannalta saattaisi myös olla mielenkiintoista lukea, miten lukio- ja yliopistomatematiikka tai *Calculus*- ja *Johdatus matemaattiseen analyysiin* -kurssit oikeasti eroavat toisistaan, ja miksi Ajokorttiin 2b on tehty tietynlaisia tehtäviä.

Eräs opiskelija toivoi palautteessaan vektoreita mukaan kurssin aihealueisiin. Vektorit jätettiin kurssilta pois sen takia, että yliopistossa käytettävät vektorien merkintä- ja ajattelutavat eroavat lukiomatematiikasta paljon. Ehkä kurssin jatkokehityksen yhteydessä voisi kuitenkin pohtia, saisiko vektorien perusperiaatteita kerrattua ilman, että käyttää niiden merkintätapoja. Tämä voisi onnistua esimerkiksi kehittämällä tarkoitukseen sopivan GeoGebra-appletin. Tulevaisuudessa eri laitosten opiskelijoille voisi myös rakentaa täysin omat Ajokortit, joissa esimerkiksi fysiikan opiskelijat voisivat kerrata lukiosta tuttuja vektoreita.

Vain puolet Ajokortin 2b suorittaneista oli sitä mieltä, että käyttöympäristön visuaalinen ilme oli selkeä. Moodle-alusta ei tarjoa kovinkaan montaa eri vaihtoehtoa kurssin ilmeen ja rakenteen muokkaamiseksi, mutta asiaan voisi kiinnittää vielä enemmän huomiota. Mikäli Ajokortteja tulee tulevaisuudessa vielä lisää, voisi nykyisen Ajokorttirakenteen purkaa siirtämällä Ajokortteja omille verkkokursseilleen. Tällöin kurssi olisi visuaalisesti ja rakenteellisesti selkeämpi opiskelijoille.

## 6. Lopuksi

Kokonaisuudessaan kurssin työstäminen on ollut antoisa ja opettava kokemus. On ollut mukava työskennellä yhteistyössä opiskelutovereiden ja oppilaitosten opettajien kanssa. Yhdessä tekemällä olemme saaneet aikaiseksi toimivan oppimiskokonaisuuden, jota on helppo lähteä jatkokehittämään.

*”MathMarket-projektiin hakemisen ja näiden sanojen kirjoittamiseen välillä aikaa kului noin vuosi. Pitkässä ja monivaiheisessa projektissa kiteytyi omat yliopisto-opintoni: pedagogista näkökulmaa ja monipuolista matemaattista osaamista vaadittiin laajan tehtäväkokonaisuuden laatimisessa. Itselläni matematiikan yliopisto-opintojen aloitus oli jokseenkin (kuten monella muullakin fuksilla vuonna 2012) turhauttava. Matematiikka yliopistossa on todella erilaista mihin lukiossa on totuttu. Olen erittäin kiitollinen saadessani tilaisuuden auttaa uusia opiskelijoita kehittämällä valmistavaa kurssia. Kiitoksen haluan sanoa myös ”tehtäväkomitean” muille jäsenille, Millalle ja Kallelle, jotka mahdollistivat opintojeni ainoan onnistuneen ryhmätyön.”*

*- Henri*

*”Joka aamu oli ilo tulla paikalle työstämään tehtäviä ja gradua ”tehtäväkomitean” kanssa. Erilaiset osaamisalueemme täydensivät hienosti toisiaan. Erittäin suuret kiitokset Milla ja Henri teille mahtavasta yhteistyöstä. Oli mahtavaa tutustua teihin. Haluan kiittää koko MathMarket-työryhmää hedelmällisestä yhteistyöstä. Kokonaisuudesta muodostui onnistunut erittäin lyhyen aikataulun puitteissa, koska saimme työryhmältä ohjausta ja palautetta projektin edetessä. Tutustuminen ammattikorkeakoulun ja lukion matematiikkaan sekä eri oppilaitosten opiskelijoiden virhekäsityksiin oli antoisaa. Siitä ja erilaisten verkko-oppimisympäristöjen, joihin projektin myötä tuli tutustuttua, tuntemisesta on varmasti hyötyä työelämässä.”*

*-Kalle*

*”Tämän projektin myötä urahaaveeni lukion matematiikan opettajana on vahvistunut entisestään, ja uskon projektin kautta saamamme kokemuksen olevan erittäin arvokasta työelämässä. Mielenkiintoisinta kurssin kehittämisessä oli opiskelijoiden virhekäsityksiin pureutuminen, josta on varmasti ollut hyötyä tulevaisuutta ajatellen. Parasta tässä antoisassa, mutta työläässä, projektissa oli kuitenkin oma ”tehtäväkomiteamme”, jonka kanssa koimme monia ahaa-elämyksiä. Erityisesti haluankin kiittää Kallea syvällisistä pohdinnoista ja Henriä pirskahtelevasta huumorista ja mielikuvituksellisuudesta.”*

*- Milla*

# Lähteet

JAMK 2017: Suomenkielisten tutkinto-ohjelmien opetussuunnitelmat. Tulostettu 16.12.2017. https://opinto-oppaat.jamk.fi/fi/opinto-opas-amk/tutkinto-ohjelmat-ja-opintotarjonta/suomenkieliset-opsit/.

JYU 2017: Matematiikan opetus (2016-2017). Viitattu 16.12.2017. https://www.jyu.fi/science/opiskelu-ohjeet/matematiikan-ja-tilastotieteen-laitoksen-ohjeita/opetus/matematiikan-opetus-2016-2017.

Sulkakoski, Marjut 2016: ”Ihan vaan perusasiat pitää osata hyvin”: ammattikorkeakoulujen insinööriopiskelijoille lukion kokemusten pohjalta rakentunut matematiikkakuva. Väitöskirja. Acta Universitasis Ouluensis E 166. Oulun yliopisto.

# Liitteet

Liite 1. Ajokorttien 1b ja 2b kokeiden läpipääsyprosentit

Liite 2. Ajokorttien 1b ja 2b harjoitustehtävät ja ensimmäiset kokeet

# Liite 1. Ajokorttien 1b ja 2b kokeiden läpipääsyprosentit

*Taulukko 1. Ajokortin 1b kokeiden läpipääsyprosentit. Sulkeissa kokeen tehneiden opiskelijoiden määrä.*

| Osiot | Koe 1 | Koe 2 | Koe 3 | Koe 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Peruslaskutoimitukset** | **69 %** (103) | **47 %** (30) | **56 %** (16) | |
| **Yhtälöt** | **71 %** (89) | **31 %** (26) | **69 %** (16) | Koetta 4 sai yrittää niin monta kertaa, että pääsi läpi. |
| **Funktiot** | **90 %** (80) | **75 %** (8) | **0 %** (2) | |
| **Geometria** | **87 %** (77) | **60 %** (10) | **25 %** (4) | |
| **Derivaatta ja integraali** | **87 %** (77) | **50 %** (10) | **60 %** (5) | |
| **Loppukoe** | **62%** (77) | **34 %** (29) | - | - |

*Taulukko 2. Ajokortin 2b kokeiden läpipääsyprosentit. Sulkeissa kokeen tehneiden opiskelijoiden määrä.*

| Osiot | Koe 1 | Koe 2 |
|---|---|---|
| **Algebra** | **73 %** (22) | **100 %** (5) |
| **Alkeisfunktiot** | **75 %** (20) | **80 %** (5) |
| **Differentiaalilaskenta** | **68 %** (19) | **67 %** (6) |
| **Analyyttinen geometria ja trigonometria** | **79 %** (19) | **67 %** (3) |
| **Todennäköisyys** | **72 %** (18) | **80 %** (5) |

# Liite 2. Ajokorttien 1b ja 2b harjoitustehtävät ja ensimmäiset kokeet

## Ajokortti 1b: Peruslaskutoimitukset

### Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Laske lukujen $\frac{8}{15}$ ja $\frac{1}{3}$ summan ja luvun 5 tulo.

(a) $\frac{1}{5}$

(b) $4\frac{1}{3}$

(c) 4

(d) $\frac{13}{75}$

(e) ei mikään näistä vaihtoehdoista

**RATKAISU:**

Muodostetaan ensin tarvittava lauseke. Koska summa on yhteenlasku ja tulo kertolasku, saadaan lauseke

$$\left(\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\right)\cdot 5.$$

Lasketaan lausekkeen arvo

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{8}{15}+{}^{5)}\frac{1}{3}\right)\cdot 5 && \text{Lavennetaan murtoluvut samannimisiksi.}\\
&=\left(\frac{8}{15}+\frac{5}{15}\right)\cdot 5 && \text{Lasketaan murtolukujen summa.}\\
&=\frac{13}{15}\cdot 5 && \text{Muutetaan luku 5 murtolukumuotoon.}\\
&=\frac{13\cdot}{15}\cdot\frac{5}{1} && \text{Lasketaan murtolukujen tulo.}\\
&=\frac{13\cdot 5}{15\cdot 1} && \\
&=\frac{65}{15} && \text{Sievennetään.}\\
&=4\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Siis oikea vastaus on vaihtoehto (b).

**Harjoitustehtävä 2.** *Yhdistämistehtävä*
Sievennä lausekeet ja valitse oikea vaihtoehto.

(i) $\sqrt{(55-56)^2} =$ __________.

(ii) $\sqrt{55^2-56^2} =$ __________.

Vaihtoehdot: 1, $-1$, ei määritelty.

**RATKAISU:**

(i) Lasketaan lausekkeen arvo $\sqrt{(55-56)^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.

(ii) Neliöjuuren sisällä on kahden positiivisen luvun erotus. Koska $56 > 55$, neliöjuuren sisällä oleva luku on negatiivinen. Täten lausekkeen arvoa ei ole määritelty.

**Harjoitustehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Sievennä lauseke

$$\frac{6\frac{m^4}{s} + m^0}{2s^{-6} + \left(\frac{1}{s^3}\right)^2}.$$

(a) $\frac{6\frac{m^4}{s}+m^0}{2s^{-6}} + \frac{6\frac{m^4}{s}+m^0}{s^{-3}}$

(b) $3s^5m^4 + 3s^6$

(c) $2s^5m^4 + \frac{1}{3}s^6$

(d) Lauseketta ei voi sieventää.

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

| | |
|---|---|
| $\dfrac{6\frac{m^4}{s}+m^0}{2s^{-6}+\left(\frac{1}{s^3}\right)^2}$ | Sievennetään nimittäjän potenssin potenssi ja osoittajan nollapotenssi. |
| $=\dfrac{6\frac{m^4}{s}+1}{2s^{-6}+\frac{1}{s^6}}$ | Kirjoitetaan termi $s^6$ negatiivista eksponenttia käyttäen. |
| $=\dfrac{6\frac{m^4}{s}+1}{2s^{-6}+s^{-6}}$ | Lasketaan nimittäjän summa. |
| $=\dfrac{6\frac{m^4}{s}+1}{3s^{-6}}$ | Kirjoitetaan termi $s^{-6}$ ilman negatiivista eksponenttia |
| $=s^6\cdot\dfrac{6\frac{m^4}{s}+1}{3}$ | Jaetaan kolmella |
| $=s^6\cdot(2\dfrac{m^4}{s}+\dfrac{1}{3})$ | Poistetaan sulkeet. |
| $=\dfrac{2s^6m^4}{s}+\dfrac{1}{3}s^6$ | Sievennetään. |
| $=2s^5m^4+\dfrac{1}{3}s^6.$ | |

Siis oikea vastaus on vaihtoehto (c).

**Harjoitustehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Missä seuraavista vaihtoehdoista on oikeat kymmenpotenssiesitykset molemmille luvuille 23 020 ja 0,000406?

(a) $23{,}02\cdot 10^3$ ja $4{,}6\cdot 10^{-4}$

(b) $2{,}302\cdot 10^4$ ja $4{,}06\cdot 10^{-4}$

(c) $2{,}302\cdot 10^3$ ja $4{,}06\cdot 10^{-3}$

(d) $23{,}0\cdot 10^3$ ja $4{,}6\cdot 10^{-3}$

(e) Ei missään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Muokataan luvut kymmenpotenssimuotoon:

| | |
|---|---|
| $23\,020$ | Pilkkua siirretään ensimmäisen merkitsevän numeron perään neljä askelta. |
| $=2{,}302\cdot 10\,000$ | |
| $=2{,}302\cdot 10^4$ | |

ja

$$\begin{aligned} &0{,}000406 && \text{Pilkkua siirretään ensimmäisen merkitsevän numeron perään neljä askelta.} \\ &= 4{,}06 \cdot 0{,}0001 \\ &= 4{,}06 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Siis oikea vastaus on vaihtoehto (b).

**Harjoitustehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Kalle on saanut epäilyttävän sähköpostin, jossa pyydetään osallistumaan sähköpostiketjuun. Sähköpostissa on lista viidestä nimestä tilinumeroineen ja seuraavat ohjeet:

(i) Lähetä luettelon ensimmäiselle henkilölle 10 snt.

(ii) Ota ensimmäinen nimi pois luettelosta.

(iii) Lisää oma nimi listalle viimeiseksi (viidenneksi).

(iv) Lähetä sähköposti tämän jälkeen eteenpäin viidelle ystävälle.

Kuinka paljon Kalle voisi tienata tällä laittomalla pyramidihuijauksella?

(a) 40 snt

(b) 50 snt

(c) 62,40 €

(d) 312,40 €

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Kun Kallen nimi kirjeessä on...

1. viimeisenä, kirje on lähetetty viidelle henkilölle
2. neljäntenä, kirje on lähetetty $5 \cdot 5$ henkilölle (5 ystävää ovat lähettäneet sen edelleen 5 ystävälleen)
3. kolmantena, kirje on lähetetty $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ henkilölle
4. toisena, kirje on lähetetty $5^4$ henkilölle
5. ensimmäisenä, kirje on lähetetty $5^5$ henkilölle.

Kallen nimen ollessa ensimmäisenä $5^5 = 3125$ ihmistä lähettävät Kallelle 10 snt. Kalle saisi siis 312,50 €, mutta kun otetaan huomioon Kallen itse lähettämä 10 snt, Kallen teoreettisesti saama rahamäärä olisi 312,40 €. Oikea vastaus on siis vaihtoehto (d).

**Harjoitustehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Kalle näpyttelee laskimeen seuraavan syötteen

$$((\sin x)^2/\ln(1-x^2))/x-1.$$

Mitä seuraavista lausekkeista syöte vastaa?

(a) $\frac{x\sin^2 x}{\ln(1-x^2)}-1$

(b) $\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)x}-1$

(c) $\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)(x-1)}$

(d) $\frac{\sin^2 x(x-1)}{\ln(1-x^2)}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Muokataan lauseketta

$$\begin{aligned}
&((\sin x)^2/\ln(1-x^2))/x-1 && \text{Muutetaan lausekkeen osamäärät murtolausekkeiksi.}\\
&=\frac{\frac{(\sin x)^2}{\ln(1-x^2)}}{x}-1 && \text{Muutetaan merkintätapaa: } (\sin x)^2=\sin^2 x.\\
&=\frac{\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)}}{x}-1 && \text{Sievennetään osamäärä.}\\
&=\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)}\cdot\frac{1}{x}-1\\
&=\frac{\sin^2 x}{\ln(1-x^2)x}-1.
\end{aligned}$$

Oikea vastaus on siis vaihtoehto (b).

**Harjoitustehtävä 7.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Henri pyrähtää ostosreissullaan Markkaisella ostamassa pyykinpesuainetta. Markkaisella on aina hyviä tarjouksia ja tälläkin kerralla samasta tuotteesta on jopa kaksi tarjousta. Ensimmäisessä tarjouksessa *Black and other colours* -pesuaine on 30 %:n alennuksessa. Toisessa tarjouksessa samaa pesuainetta myydään alentamattomalla hinnalla, mutta 30 % isommassa pakkauksessa. Kumpi tarjoustuote tulee Henrille edullisemmaksi (kilohinnaltaan)?

(a) Alennettu tuote

(b) Isompi pakkaus

(c) Tuotteiden kilohinta on sama.

**RATKAISU:**

Merkitään tuotteen hintaa kirjaimella $e$ ja pakkauksen painoa kirjaimella $m$, jolloin tuotteen alkuperäinen kilohinta on $\frac{e}{m}$.

Ensimmäisessä tarjouksessa uusi hinta on $0{,}7 \cdot e$ ja paino pysyy samana. Siis ensimmäisen tarjouksen kilohinta $h_1$ on

$$h_1 = \frac{0{,}7 \cdot e}{m} = 0{,}7 \cdot \frac{e}{m}.$$

Toisessa tarjouksessa uusi paino on $1{,}3 \cdot m$, kun taas hinta pysyy samana. Kilohinta $h_2$ on tällöin

$$h_2 = \frac{e}{1{,}3 \cdot m} = \frac{1}{1{,}3} \cdot \frac{e}{m} = 0{,}7692307692 \cdot \frac{e}{m} \approx 0{,}77 \cdot \frac{e}{m}.$$

Kilohinnaltaan halvempi on siis tarjous, jossa alkuperäinen hinta putoaa 30 %, eli oikea vastaus on vaihtoehto (a).

## Koe 1

**Tehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Laske lukujen $\frac{3}{7}$ ja $\frac{13}{14}$ osamäärä.

(a) $\frac{21}{13}$

(b) $\frac{6}{13}$

(c) $\frac{39}{98}$

(d) 2

(e) ei mikään näistä vaihtoehdoista

**Tehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Henri, Kalle ja Milla ovat lomalla Fuengirolassa ja menevät syömään yhdessä. Ruokailun loppulasku on 55,38 euroa. Milla söi kallista pihviä, joten hän suostuu maksamaan loppulaskusta $\frac{3}{7}$. Henri maksaa vain 15 euroa, sillä hänellä ei ole enempää rahaa mukana. Kuinka paljon Kallelle jää maksettavaa?

(a) noin 17 €

(b) noin 19 €

(c) noin 20 €

(d) noin 22 €

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Missä seuraavista vaihtoehdoista on oikeat kymmenpotenssiesitykset molemmille luvuille 105 210 ja 0,000012?

(a) noin $1{,}05 \cdot 10^5$ ja $1{,}2 \cdot 10^{-5}$

(b) noin $1 \cdot 10^5$ ja $0{,}12 \cdot 10^{-5}$

(c) noin $1 \cdot 10^3$ ja $1{,}2 \cdot 10^{-4}$

(d) noin $1{,}05 \cdot 10^5$ ja $1{,}2 \cdot 10^{-4}$

(e) Ei missään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Laske kohdat (i) ja (ii). Valitse vaihtoehto, jossa molemmat ovat oikein.

(i) luvun $3^3$ ja luvun $\frac{1}{9}$ tulo

(ii) lukujen 3 ja $\frac{1}{9}$ tulon kolmas potenssi

(a) $\frac{1}{27}$ ja $\frac{1}{27}$
(b) $\frac{1}{27}$ ja 3
(c) 3 ja $\frac{1}{27}$
(d) 3 ja 3
(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Milla heittää koripallon puolesta kentästä upealla kaarella korille. Pallo jää ensin pyörimään korirenkaan reunalle, mikä jälkeen se tippuu kolmen metrin korkeudella olevan korin sisään. Tämän jälkeen pallo tippuu lattialle ja jää pomppimaan. Mikä on pallon kolmannen pompun korkeus, kun jokaisella pompulla pallon pomppukorkeus on $\frac{2}{3}$ edellisestä pompusta?

(a) noin 50 cm

(b) noin 70 cm

(c) noin 90 cm

(d) noin 110 cm

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Henri aloitti frisbeegolfin harrastamisen kesällä 2012, jolloin hänen avausheittonsa pituus oli 70 m. Vuodessa avausheiton pituus kasvaa parhaimmillaan 15 %. Laajavuoressa väylän numero 3 pituus on 120 m. Minä vuonna Henrin on teoriassa mahdollista heittää hole-in-one (yhdellä heitolla koriin)?

(a) 2014

(b) 2015

(c) 2016

(d) 2017

(e) Aikaisintaan vuonna 2018.

**Tehtävä 7.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Mikä seuraavista vastaa lauseketta

$$\frac{\ln x^2 + e^x}{(x+1)^2}?$$

(a) $(\ln x)^2 + e^x : x + 1^2$

(b) $(\ln(x^2) + e^x) : (x+1)^2$

(c) $((\ln x)^2 + e^x) : (x+1)^2$

(d) $\ln(x^2) + e^x : x + 1^2$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 8.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Sievennä lauseke

$$\frac{4\frac{m}{s^2} \cdot 3m^3}{(2\frac{m}{s})^2}.$$

(a) $3\frac{m^2}{s}$

(b) $3m^2$

(c) $6\frac{m^3}{s}$

(d) $6m^2$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

# Ajokortti 1b: Yhtälöt

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Aukkotehtävä*
Ratkaise muuttuja $t$ yhtälöstä

$$\frac{t}{2} + \frac{2t}{5} + 6 = 2(\frac{1}{2}t + 2).$$

Vastaus: $t =$ __________.

**RATKAISU:**

Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2} + \frac{2t}{5} + 6 &= 2(\frac{1}{2}t + 2) && \text{Poistetaan sulkeet.}\\
\frac{t}{2} + \frac{2t}{5} + 6 &= t + 4 && \text{Kerrotaan yhtälön molemmat puolet luvulla 10.}\\
5t + 4t + 60 &= 10t + 40 &&\\
-t &= -20 && \text{Jaetaan muuttujan kertoimella.}\\
t &= 20. &&
\end{aligned}$$

**Harjoitustehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Ratkaise gravitaatiovakio $\gamma$ gravitaatiovoiman $F$ yhtälöstä

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

(a) $\gamma = \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot F$

(b) $\gamma = F \cdot \frac{r^2}{m_1 m_2}$

(c) $\gamma = Fr^2 m_1 m_2$

(d) $\gamma = (F - m_1 m_2)r^2$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Ratkaistaan yhtälö siis gravitaatiovakion $\gamma$ suhteen.

$$\begin{aligned}
F &= \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} && \text{Kerrotaan termillä } r^2.\\
Fr^2 &= \gamma m_1 m_2 && \text{Jaetaan termin } \gamma \text{ kertoimella } m_1 m_2.\\
\frac{Fr^2}{m_1 m_2} &= \gamma && \text{Vaihdetaan vielä } \gamma \text{ yhtälön vasemmalle puolelle.}\\
\gamma &= \frac{Fr^2}{m_1 m_2} &&
\end{aligned}$$

Kun verrataan saatua lauseketta annettuihin vaihtoehtoihin, huomataan, että

$$\gamma = \frac{Fr^2}{m_1 m_2} = F \cdot \frac{r^2}{m_1 m_2},$$

joten vastaus on vaihtoehto (b).

**Harjoitustehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Ratkaise yhtälö

$$8(x^2 - 4x + 4)(x - 1) = 0.$$

Valitse yhtälön kaikki ratkaisut.

(a) $x = 3$

(b) $x = 2$

(c) $x = 1$

(d) $x = 0$

(e) $x = -1$

(f) $x = -2$

(g) $x = -3$

**RATKAISU:**

Yhtälö voidaan ratkaista käyttämällä tulon nollasääntöä, jonka mukaan

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ tai } x - 1 = 0.$$

Ensimmäinen yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2.$$

Toisesta yhtälöstä saadaan

$$x = 1.$$

Tällöin siis annetun yhtälön ratkaisut ovat $x = 2$ ja $x = 1$.

**Harjoitustehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Ratkaise yhtälö

$$q^5 + 3q^4 = 0.$$

Mille välille arvot q kuuluvat?

(a) $q \in [-7, -4]$

(b) $q \in ]-4{,}1]$

(c) $q \in [1{,}4]$

(d) $q \in [5{,}8]$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

$$
\begin{aligned}
q^5 + 3q^4 &= 0 && \text{Erotetaan yhteinen tekijä } q^4. \\
q^4(q+3) &= 0
\end{aligned}
$$

Tulon nollasäännön nojalla $q^4 = 0$ tai $q+3 = 0$, jolloin ratkaisut ovat $q = 0$ ja $q = -3$. Molemmat ratkaisut kuuluvat välille $]-4{,}1]$, joten oikea vaihtoehto on (b).

**Harjoitustehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Ratkaise yhtälö

$$p(1-p) = 1.$$

(a) $x = -1$

(b) $x = 1$

(c) $x = 0$

(d) $x = \sqrt{2}$

(e) Yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.

**RATKAISU:**

Muokataan yhtälöä

$$
\begin{aligned}
p(1-p) &= 1 && \text{Avataan sulkeet.} \\
p - p^2 &= 1 && \text{Siirretään kaikki termit samalle puolelle.} \\
-p^2 + p - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot -1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{-2}.$$

Koska neliöjuuren sisällä on negatiivinen luku, yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.

**Harjoitustehtävä 6.** *Aukkotehtävä*
Korkeakulttuurista tykkäävä Kalle on katsomassa ooppera esitystä ystävänsä Henrin kanssa. He istuvat vierekkäin. Henri huomaa, että heidän penkkiensä paikkanumeroiden neliöiden summa on 11 101. Auta Kallea ratkaisemaan heidän penkkiensä paikkanumerot.

Vastaus: Paikkanumerot ovat __________ ja __________.

**RATKAISU:**

Muodostetaan ensin paikkanumeroiden yhtälö. Merkitään pienempää paikkanumeroa kirjaimella $x$. Koska miehet istuvat vierekkäin, ovat heidän paikkanumeronsa muotoa $x$ ja $x+1$. Koska paikkanumeroiden neliöiden summa on 11 101, on oltava

$$x^2 + (x+1)^2 = 11\,101.$$

Muokkaamalla yhtälöä saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= 11\,101 && \text{Poistetaan sulkeet käyttämällä binomin neliön laskukaavaa.} \\ x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 11\,101 \\ 2x^2 + 2x - 11\,100 &= 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-11\,100)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm 298}{4} = \frac{-1 \pm 149}{2},$$

jolloin siis $x = -75$ tai $x = 74$. Koska paikkanumerot ovat järjestyslukuja, on pienemmän paikkaluvun oltava $x = 74$. Kysytyt paikkanumerot ovat 74 ja 75.

**Harjoitustehtävä 7.** *Aukkotehtävä*
Ratkaise yhtälö

$$\frac{3 + \frac{3}{2}y}{y+2} = \frac{3y+6}{16}.$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisuja ovat __________ ja __________. (Vastaa viiva (-), mikäli ratkaisuja on vähemmän kuin vastauslaatikoita.)

**RATKAISU:**

Määrittelyehtojen mukaan tulee olla $y \neq -2$. Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{3 + \frac{3}{2}y}{y+2} &= \frac{y+2}{\frac{16}{3}} && \text{Kerrotaan ristiin.} \\ (y+2)(y+2) &= \frac{16}{3}(3 + \frac{3}{2}y) && \text{Poistetaan sulut.} \\ y^2 + 4y + 4 &= 16 + 8y \\ y^2 - 4y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = 2 \pm 4,$$

jolloin $y = 6$ tai $y = -2$. Ratkaisu $y = -2$ on kuitenkin määrittelyehdon vastainen, joten annetun yhtälön ainoa ratkaisu on $y = 6$.

## Koe 1

**Tehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Ratkaise loppunopeuden $v$ yhtälöstä kiihtyvyys $a$, kun

$$v = v_0 + at.$$

(a) $a = (v - v_0)t$

(b) $a = \frac{v}{t} - v_0$

(c) $a = \frac{v+v_0}{t}$

(d) $a = \frac{v-v_0}{t}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 2.** *Stack-tehtävä*
Muodosta kuvassa näkyvän suoran yhtälö.

Tarkista, että ohjelma ymmärtää syötteesi (kertomerkki on tähti * )! Käytä vaakakoordinaatin merkitsemiseen kirjainta x.

Vastaus: $y =$ __________.

**Tehtävä 3.** *Aukkotehtävä*
Uimisessa tykkäävä Milla hyppää suorakulmaisen särmiön muotoiseen uima-altaaseen. Vedenpinta nousee tällöin 0,1 dm. Millan tilavuus on 60 litraa. Altaan pituus on kaksi kertaa niin pitkä kuin sen leveys ja lisäksi altaan syvyys on 2 m. Mikä on altaan pituus? Muista, että 1 litra = 1 dm$^3$.

Vastaus: Altaan pituus on $y =$ __________ metriä.

**Tehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Mitkä luvut $b$ toteuttavat yhtälön

$$(b-1)(b+1) = -(-8 + 2b^2)?$$

(a) $b = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

(b) $b = \pm 2\sqrt{3}$

(c) $b = \pm\sqrt{3}$

(d) $b = \pm\sqrt{6}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Mitkä luvut $p$ toteuttavat yhtälön

$$p^3 + p = 0?$$

(a) $p = -1$, $p = 0$ ja $p = 1$

(b) $p = 0$

(c) $p = -1$ ja $p = 1$

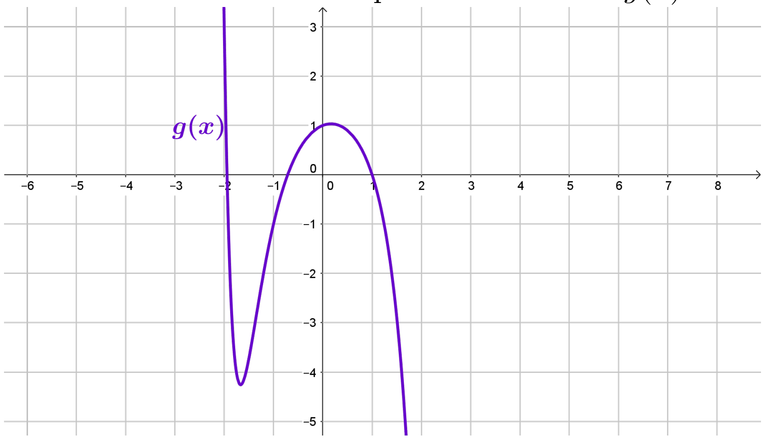
(d) $p = 0$ ja $p = 1$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

# Ajokortti 1b: Funktiot

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Mitkä seuraavista väittämistä pätevät funktiolle $g(x)$?




(a) Funktion $g(x)$ ainoa nollakohta on 1.

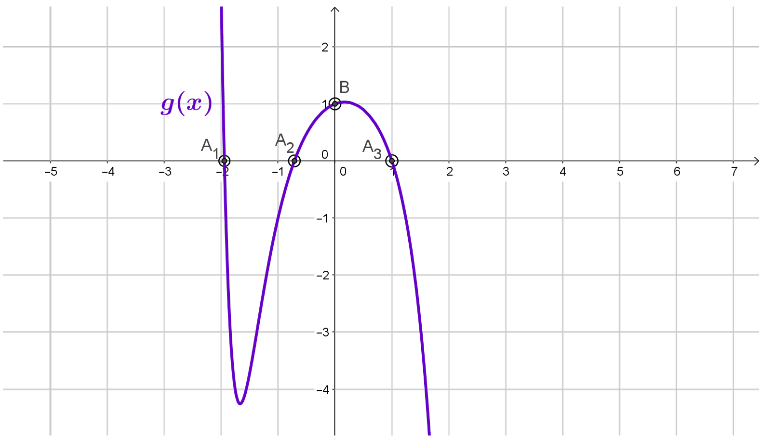
(b) Funktion arvo nollassa on 1.

(c) $g(x) \geq 0$ kun $x \geq 0$.

(d) $g(x) \geq 2$ kun $x \leq -2$.

(e) Funktion $g(x)$ arvot ovat aidosti negatiivisia välillä $]-\frac{3}{2},-1]$.

**RATKAISU:**




(a) Väite on väärin: funktiolla $g$ on kuvan perusteella ainakin kolme nollakohtaa ja ne on merkattu kuvaan kohtina $x = A_1$, $x = A_2$, $x = A_3$.

(b) Väite on totta: funktion arvo nollassa on funktion kuvaajalla kohdassa $x = 0$ olevan pisteen $B = (0,1)$ $y$-koordinaatti.

(c) Väite on väärin: funktion $g$ kuvaaja leikkaa $x$-akselin pisteessä $A_3$ ja funktion arvot ovat negatiivisia sen jälkeen. Toisin sanoen $g(x) < 0$ kun $x > 1$.

(d) Väite on totta: Funktion $g$ arvot ovat suurempia kuin 2 kun $x \leq -2$.

(e) Väite on totta: välillä $]-\frac{3}{2}, -1]$ funktion kuvaaja on $x$-akselin alapuolella, eli funktion arvot ovat aidosti negatiivisia.

**Harjoitustehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Mikä seuraavista funktioista esittää kuukausittaisen sähkölaskun suuruutta (€) kulutuksen (kWh) funktiona?

| YLEISSÄHKÖ | Mittarin etusulake | Alv 24% |
|---|---|---|
| Perusmaksu €/kk | 1x25–35 A<br>3x25 A–3x100 A | 2,62 |
| Energiamaksu snt/kWh | | 7,13 |

*Kuvan lähde:* `http://www.jyvaskylanenergia.fi/filebank/992-sahkon_myynti_ja_palveluhinnasto_2015.pdf`

(a) $E(x) = 2{,}62x + 0{,}0713$

(b) $E(x) = 0{,}0713x + 2{,}62$

(c) $E(x) = 0{,}0713x$

(d) $E(x) = 7{,}13x - 2{,}62$

**RATKAISU:**

Riippumatta mittarin etusulakkeesta tai sähkönkulutuksesta joka kuukausi perusmaksu on 2,62 €. Jokaista kulutettua kilowattituntia kohti lisämaksua tulee 7,13 snt eli 0,0713 €. Täten sähkölaskun suuruus kulutuksen funktiona täytyy olla

$$E(x) = 0{,}0713x + 2{,}62,$$

eli vaihtoehto $(b)$ on oikein.

**Harjoitustehtävä 3.** *Yhdistämistehtävä*
Oheisessa taulukossa on esitettynä Jyväskylän Energian kaukolämmön perusmaksun hinnasto yritysasiakkaille.

i Mikä seuraavista kuvaajista esittää perusmaksua tilausvesivirran $Q$ funktiona?
Vastaus: __________
Vaihtoehdot: $A$, $B$, $C$, $D$.

ii Kuinka suuri kuukausittainen perusmaksu on, kun tilausvesivirta on 11 $\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$?
Vastaus: __________
Vaihtoehdot: 480 euroa, 528 euroa, 717,50 euroa, 770 euroa.

iii Millä taulukon väleistä tilausvesivirran $Q$ kasvattaminen olisi edullisinta?
Vastaus: __________
Vaihtoehdot: 0-0,5; 0,5-5,0; 5,0-15,0; 15,0-50,0; 50,0-.

**NORMILÄMPÖ**

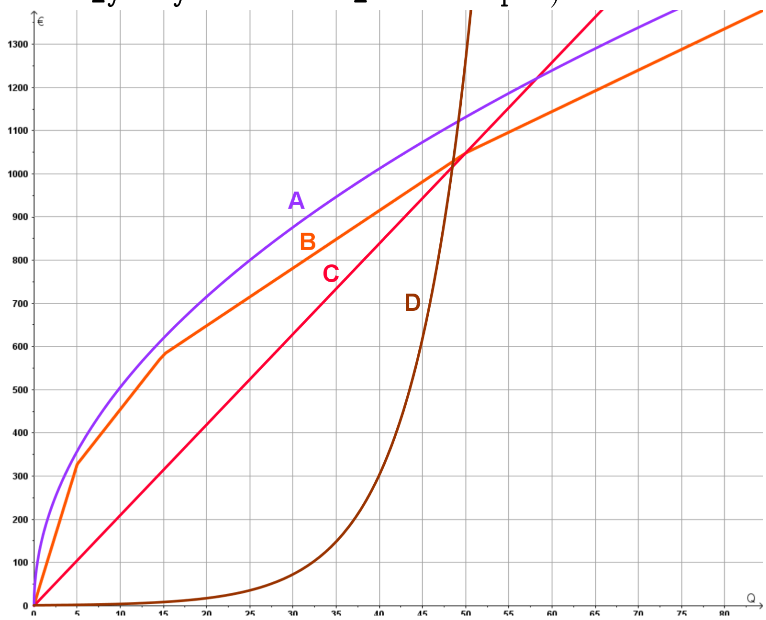
**PERUSMAKSU**

Yritysasiakkaiden kaukolämmön kuukausittainen perusmaksu muodostuu oheisen taulukon mukaisesti.

| Tilausvesivirta Q m³/h | Perusmaksu €/kk |
|---|---|
| 0–0,5 | (840 x Q):12 |
| 0,5–5,0 | (30 + 780 x Q):12 |
| 5,0–15,0 | (2405 + 305 x Q):12 |
| 15,0–50,0 | (4580 + 160 x Q):12 |
| 50,0– | (6830 + 115 x Q):12 |

Q on lämpösopimuksessa sovittu tilausvesivirta m³/h.

(Kuvan lähde: `http://www.jyvaskylanenergia.fi/filebank/1969-_JE_Kaukolampo_hinnasto_yritysasiakkaat_alviton.pdf`)




## RATKAISU:

(i) Taulukossa kaikki lausekkeet ovat ensimmäistä astetta, joten kysytyn kuvaajan on oltava suora (taulukon jokainen rivi on suoran yhtälö muuttujan $Q$ suhteen). Koska lausekkeiden kulmakertoimet eivät ole samoja, suoran kaltevuus vaihtelee. Vaihtoehdoista ainoastaan kuvaaja $B$ on murtoviiva, jonka kuvaaja on siis suoran osa jokaisella osavälillä. Oikea vastaus on siis kuvaaja $B$.

(ii) Kun $Q = 11$, niin perusmaksu muodostuu taulukon perusteella lausekkeella:

$$\frac{2405 + 305 \cdot Q}{12}.$$

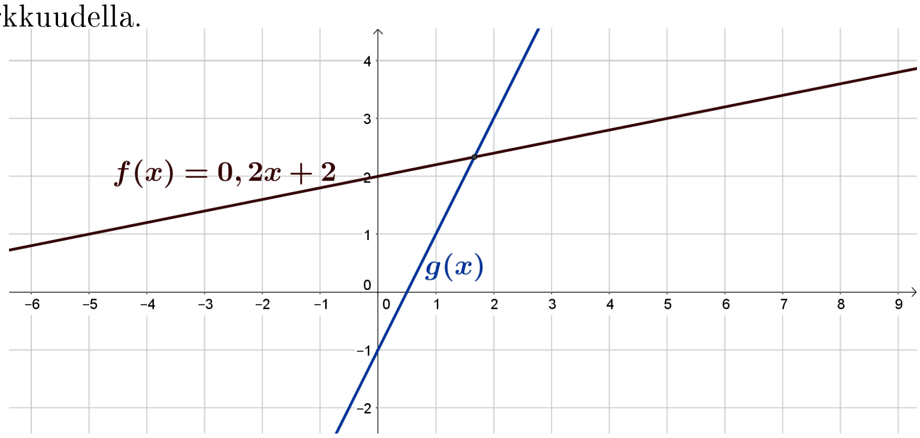
Sijoittamalla lausekkeeseen $Q = 11$ saadaan

$$\frac{2405 + 305 \cdot 11}{12} = 480.$$

Kuukausimaksu olisi siis 480 €.

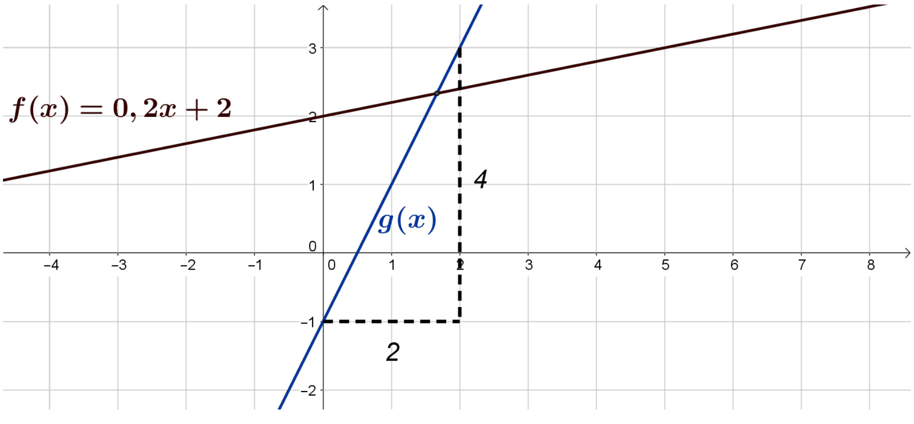
(iii) Tilausvesivirran kasvattaminen on edullisinta sillä välillä, jota vastaavan suoran yhtälössä kulmakerroin on pienin. Taulukosta luettuna pienin kulmakerroin on $\frac{115}{12}$ välillä $Q \geq 50$.

**Harjoitustehtävä 4.** *Aukkotehtävä*
Oheisessa kuvassa on funktioiden $f$ ja $g$ kuvaajat. Määritä kuvan perusteella funktion $g$ lauseke ja ratkaise sen avulla funktioiden $f$ ja $g$ leikkauspiste kahden desimaalin tarkkuudella.




Vastaus: Leikkauspisteiden koordinaatit ovat $x =$ __________ ja $y =$ __________.

**RATKAISU:**



Funktion $g$ kuvaaja on suora ja funktion lauseke muotoa $g(x) = k \cdot x + b$. Suoran kulmakerroin määritetään kuvaajasta $x$ ja $y$ koordinaattien muutosten avulla

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3-(-1)}{2-0} = 2.$$

Suoran kulkee pisteen (0,-1) kautta, joten vakiotermi $b$ voidaan ratkaista

$$g(0) = 2 \cdot 0 + b = -1$$

eli $b = -1$. Funktion lauseke on siis $g(x) = 2x - 1$.

Ratkaistaan suorien leikkauspisteen $x$-koordinaatti

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 0{,}2x + 2 &= 2x - 1 \\ x &= \tfrac{3}{1{,}8} \\ x &\approx 1{,}67, \end{aligned}$$

jolloin $y$-koordinaatti on

$$f(\tfrac{3}{1{,}8}) = g(\tfrac{3}{1{,}8}) = 2 \cdot \tfrac{3}{1{,}8} - 1 = 2\tfrac{1}{3} \approx 2{,}33.$$

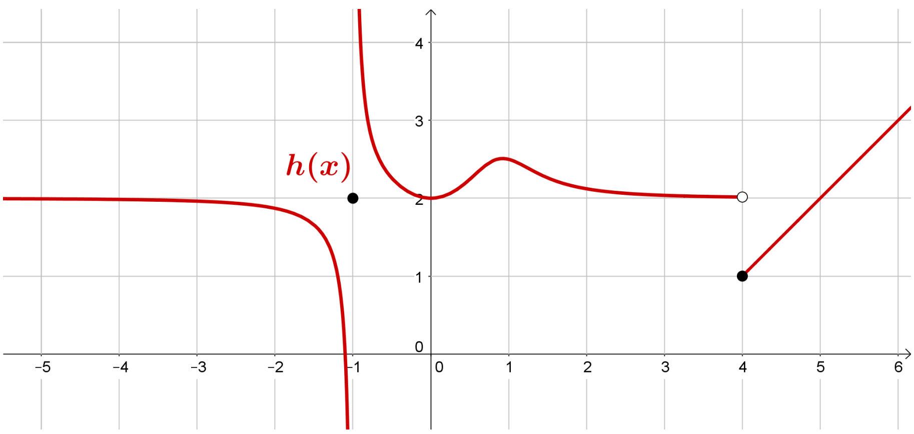
Leikkauspiste kahden desimaalin tarkkudella on siis (1,67 ; 2,33).

**Harjoitustehtävä 5.** *Yhdistämistehtävä*
Määritä kuvaajan avulla funktion $h(x)$ raja-arvo kohdassa $a$ $\lim_{x \to a} h(x)$, kun

(i) $a = 4$

(ii) $a = 0$

(iii) $a = -1$?




Vaihtoehdot: 1, 2, 4, raja-arvoa ei ole olemassa.

**RATKAISU:**

(i) Tutkitaan toispuoleisia raja-arvoja kohdassa 4:

$$\lim_{x\to 4-} h(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 4+} h(x) = 1$$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuria, funktiolla $h$ ei ole raja-arvoa, kun $x \to 4$.

(ii) Tutkitaan toispuoleisia raja-arvoja nollassa:

$$\lim_{x\to 0-} h(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 0+} h(x) = 2.$$

Funktion $h$ raja-arvo on 2, kun $x \to 0$.

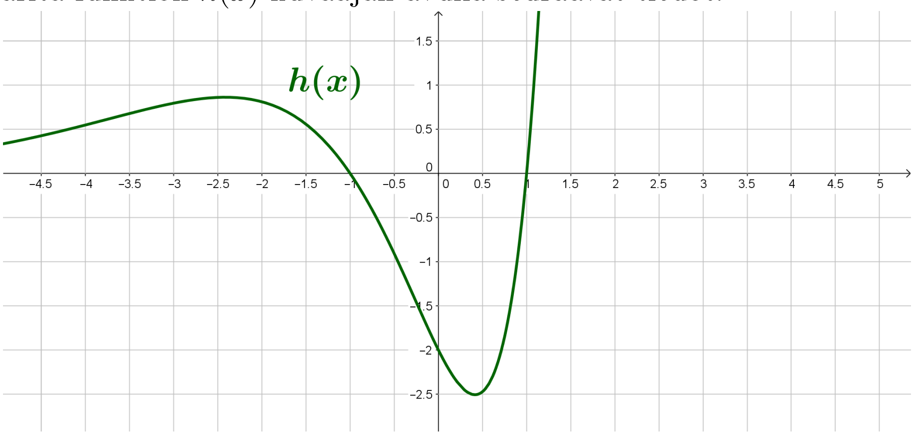
(iii) Tutkitaan toispuoleisia raja-arvoja kohdassa -1:

$$\lim_{x\to -1-} h(x) = -\infty \quad \text{funktion arvo laskee rajatta kun } x \text{ lähestyy kohtaa -1 vasemmalta}$$
$$\lim_{x\to -1+} h(x) = \infty \quad \text{funktion arvo kasvaa rajatta kun } x \text{ lähestyy kohtaa -1 oikealta}$$

Koska toispuoleisia raja-arvoja ei ole olemassa, funktiolla $h$ ei ole raja-arvoa, kun $x \to -1$.

## Koe 1

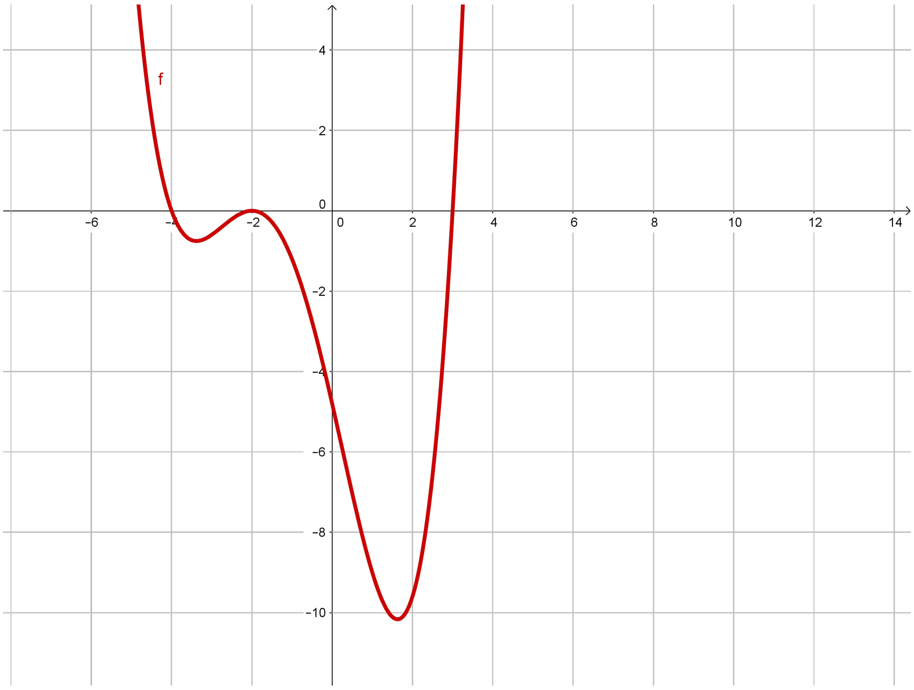
**Tehtävä 1.** *Aukkotehtävä*
Määritä funktion $h(x)$ kuvaajan avulla seuraavat tiedot.




Funktion $h(x)$ nollakohdat ovat $x =$ __________ ja $x =$ __________.

Funktion $h(x)$ arvo nollassa on __________.

**Tehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Katso funktion $f$ kuvaajaa. Mitkä seuraavista väittämistä ovat totta?




(a) $f(-2) = 0$

(b) $f(-4) = 0$

(c) $f(0) \neq 0$

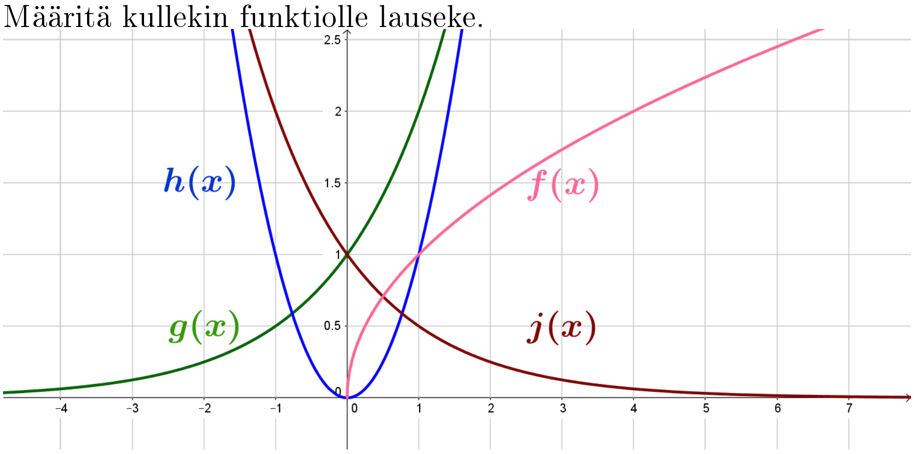
(d) $f(-2) = f(2)$

(e) Funktion arvot ovat negatiivisia välillä ]0,2[.

(f) Funktion arvot ovat positiivisia välillä ]0,2[.

(g) Funktiolla $f$ on enintään kaksi nollakohtaa.

**Tehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Määritä kullekin funktiolle lauseke.




(a) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

(c) $g(x) = x^2$

(d) $g(x) = 2^x$

(e) $h(x) = x^2$

(f) $h(x) = 2^x$

(g) $j(x) = x^{\frac{1}{2}}$

(h) $j(x) = (\frac{1}{2})^x$

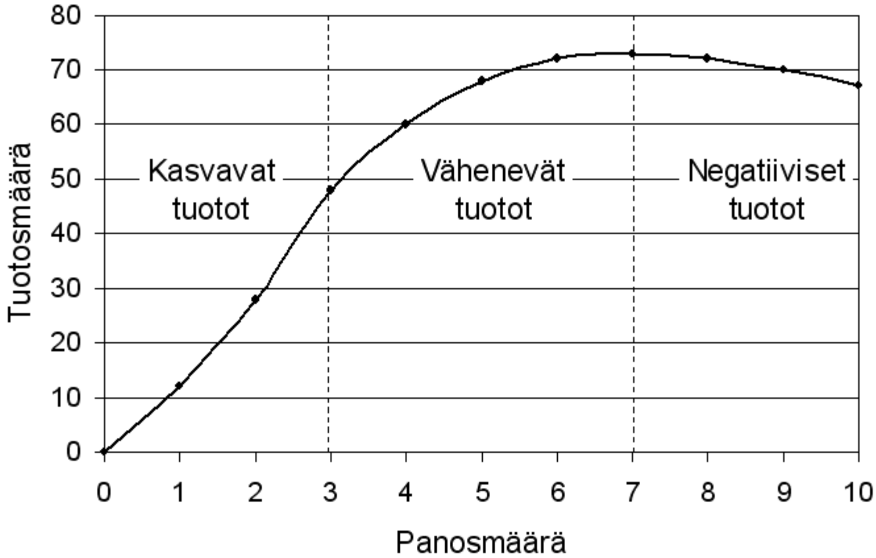
**Tehtävä 4.** *Aukkotehtävä*
Henri sai viikonlopuksi lainaan nopeustutkan.Tutkalla Henri mittaa frisbeegolfin avausheiton lähtönopeudeksi noin $v_0 = 19$ m/s. Mallintaessaan frisbeen lentomatkaa, Henri muistaa matkan $d$ aikariippuvaisen funktion:

$$d(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Muutaman koeheiton jälkeen Henri arvioi heittoliikkeelle kiihtyvyydeksi (säästä ja kiekosta riippuen) $a = -2{,}42$ m/s$^2$. Olettaen että malli toimii, kuinka pitkän matkan Henrin frisbee lentää ajassa $t = 10$ s? Vastaa metrin tarkkuudella.

Vastaus: Fribee lentää noin __________ metriä.

**Tehtävä 5.** *Numeerinen tehtävä*
Mikä on tuotosmäärän arvo, kun panosmäärä on 4? Vastaa pelkkä numeroarvo.
(Kuvan lähde: `https://fi.m.wikipedia.org/wiki/Tiedosto:Tuotantofunktio.png`)




Vastaus: __________

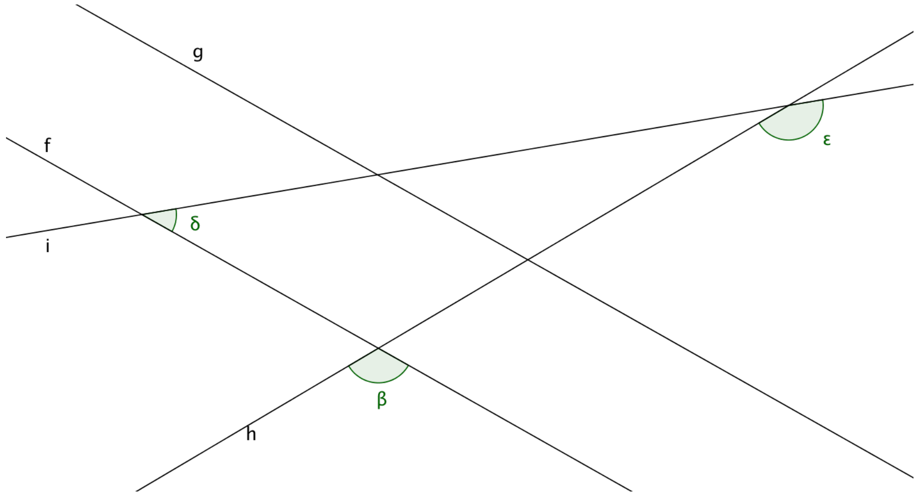
**Tehtävä 6.** *Aukkotehtävä*
Laske funktioiden $g(x) = x^2 + x + 1$ ja $h(x) = x + 1$ kuvaajien leikkauspiste.

Vastaus: Leikkauspiste on (_____,_____).

# Ajokortti 1b: Geometria

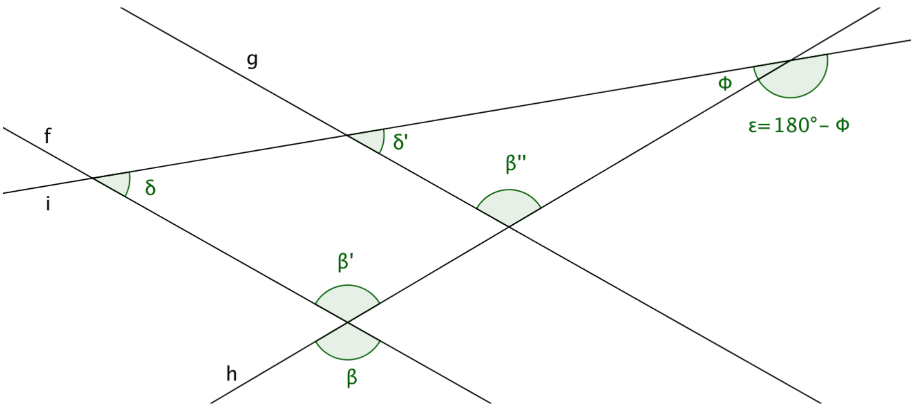
## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Aukkotehtävä*
Suorat $g$ ja $f$ ovat yhdensuuntaiset. Mikä on kulman $\varepsilon$ suuruus, kun kulmat $\beta = 120°$ ja $\delta = 39°$?




Vastaus: $\varepsilon =$ __________°.

**RATKAISU:**




Koska kulmat $\beta$ ja $\beta$' ovat ristikulmia, ovat ne yhtäsuuret. Suorat $f$ ja $g$ ovat yhdensuuntaiset, jolloin samankohtaiset kulmat $\beta$' ja $\beta$" sekä $\delta$ ja $\delta$' ovat yhtä suuret. Tällöin siis $\beta'' = \beta = 120°$ ja $\delta' = \delta = 39°$. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, on $\phi = 180° - \delta' - \beta'' = 180° - 39° - 120° = 21°$. Edelleen $\phi$ ja $\varepsilon$ ovat vieruskulmia, joten $\varepsilon = 180° - \phi = 180° - 21° = 159°$.

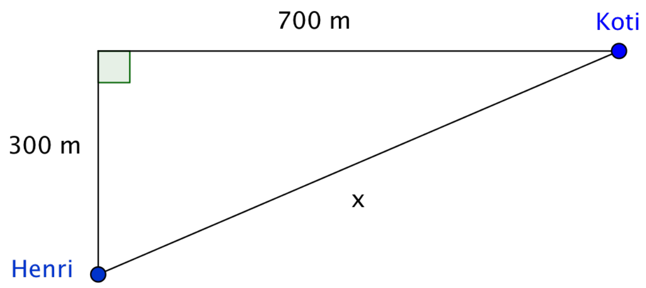
**Harjoitustehtävä 2.** *Aukkotehtävä*
Henri on kävelemässä koulusta kotiin ja pohdiskelee:

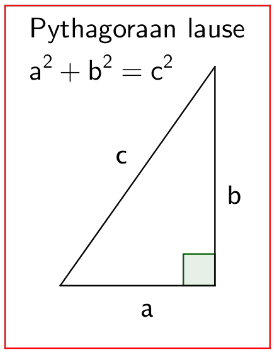
Hänen asuntonsa sijaitsee järven vastarannalla. Kotiin päästäkseen hänen on ensin ylitettävä järvi 300 m pitkää suoraa siltaa pitkin. Sillan päässä on T-risteys, josta Henrin tulisi kääntyä kotia kohti. Matka jatkuu suoraa kävelytietä pitkin 700 m Henrin rantatontille asti.

Kuinka paljon lyhyempi matka on uida suoraan järven poikki kuin kävellä sillan kautta? Anna vastaus pyöristettynä kymmenen metrin tarkkuuteen ilman yksikköä.

Vastaus: __________ metriä.

**RATKAISU:**




Tilanne on esitettynä yllä olevassa kuvassa. Merkitään uintimatkan pituutta kirjaimella $x$. Uintimatka voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella

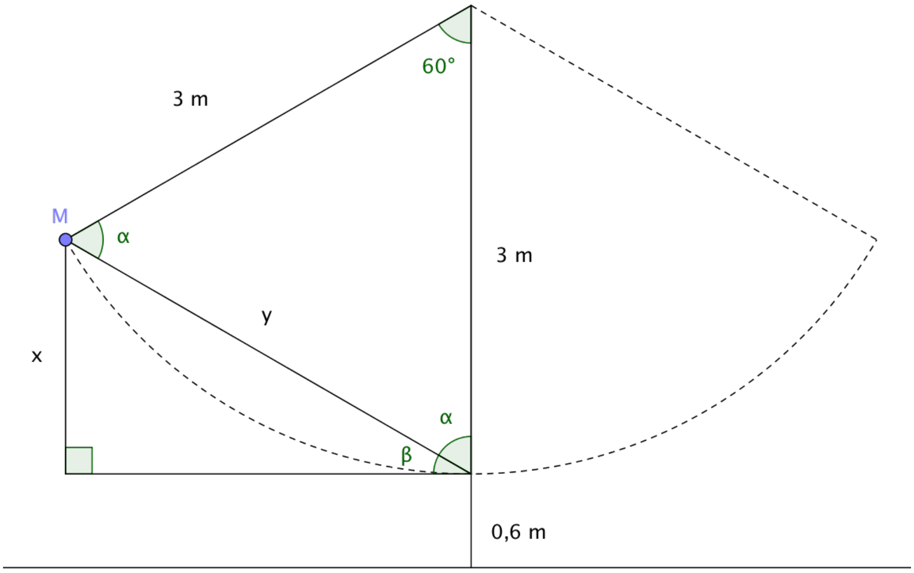
$$x^2 = (300 \text{ m})^2 + (700 \text{ m})^2$$
$$x^2 = 580\ 000 \text{ m}^2 \qquad \text{Otetaan neliöjuuri puolittain.}$$
$$x = \sqrt{580\ 000 \text{ m}^2} \qquad \text{Negatiivinen juuri ei voi olla ratkaisu pituudeksi.}$$
$$x \approx 761{,}6 \text{ m}.$$

Sillan kautta kävelemällä matkan pituus on $300 \text{ m} + 700 \text{ m} = 1000 \text{ m}$. Uimalla matka lyhenee $1000 \text{ m} - x = 1000 \text{ m} - 761{,}6 \text{ m} \approx 238{,}4 \text{ m} \approx 240 \text{ m}$.

**Harjoitustehtävä 3.** *Aukkotehtävä*
Milla lähtee päästämään höyryjä kovan työpäivän päätteeksi läheiseen puistoon. Keinussa on 3,0 metriä pitkät narut. Milla keinuu enimmillään 60° kulmassa tasapainoaseman eli pystysuoran suhteen. Kuinka korkealle istuinlauta korkeimmillaan nousee, kun alimmillaan se on 60 cm korkeudella? Anna vastaus metreissä yhden desimaalin tarkkuudella ilman yksikköä.

Vastaus: __________.

**RATKAISU:**




Yllä olevassa kuvassa on tilanne esitettynä. Merkitään istuilaudan nousemaa korkeutta $x$:llä. Millan istuinlauta käy korkeimmillaan pisteessä $M$, jonka korkeus maasta on 0,6 m + $x$. Ratkaistaan $x$.

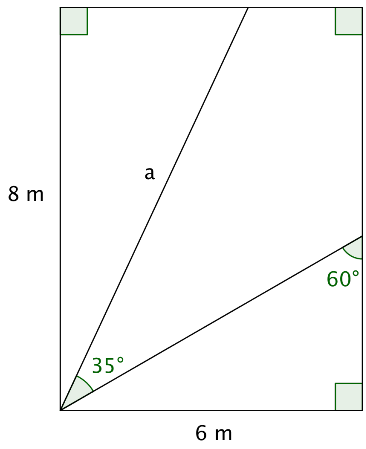
Ylempi kolmio on tasakylkinen, joten sen kantakulmat $\alpha$ ovat yhtä suuret. Kolmion kulmien summa on 180 astetta, joten $2\alpha + 60° = 180°$. Tästä saadaan $\alpha = 60°$. Koska kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuria, kolmio on tasasivuinen, ja $y = 3$ m. Lisäksi havaitaan, että kulma $\beta = 90° - \alpha = 90° - 60° = 30°$.

Siniä käyttämällä saadaan

$$\sin\beta = \frac{x}{y}$$
$$x = \sin\beta \cdot y = \sin 30° \cdot 3 \text{ m} = 1{,}5 \text{ m}.$$

Korkeus maasta on siis 1,5 m + 0,6 m = 2,1 m.

**Harjoitustehtävä 4.** *Monivalitatehtävä (valitse yksi)*
Millä lausekkeella saadaan sivun $a$ pituus?




(a) a=$\frac{8\text{ m}}{\sin 25°}$

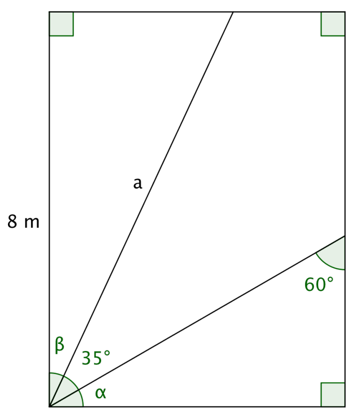
(b) a=$\frac{6\text{ m}}{\cos 65°}$

(c) a=$6\text{ m} \cdot \cos 15°$

(d) a=$\frac{8\text{ m}}{\cos 15°}$

(e) Ei millään näistä lausekkeista.

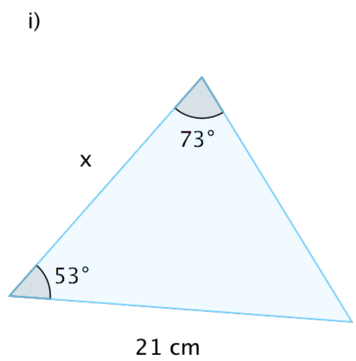
**RATKAISU:**

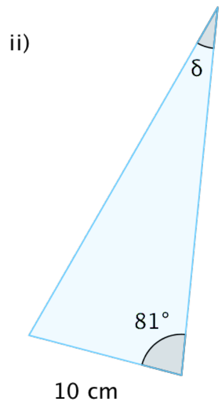



Koska kulma $\alpha = 180° - 90° - 60° = 30°$, kulma $\beta = 90° - 30° - 35° = 25°$.
Kosinia käyttämällä saadaan

$$\cos 25° = \frac{8\text{ m}}{a}$$
$$a = \frac{8\text{ m}}{\cos 25°}.$$

**Harjoitustehtävä 5.** *Monivalitatehtävä (valitse yksi)*
Voidaanko kolmiosta i) ja ii) ratkaista sivu $x$ ja kulma $\delta$ sinilausetta käyttäen?




(a) Molemmat voidaan ratkaista.

(b) Sivu $x$ voidaan ratkaista, mutta kulmaa $\delta$ ei voida.

(c) Sivua $x$ ei voida ratkaista, mutta kulma $\delta$ voidaan.

(d) Kumpaakaan ei voida ratkaista.

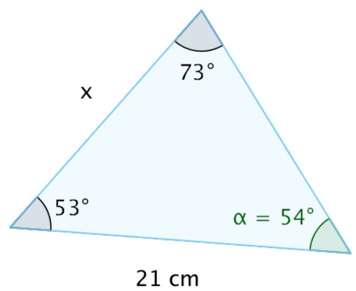
**RATKAISU:**

Koska kolmiosta i) tiedetään kaksi kulmaa, voidaan myös kolmas kulma ratkaista. Kun kulmien lisäksi yhden sivun pituus tiedetään, voidaan muidenkin sivujen pituudet selvittää sinilauseella.

Sinilauseen käyttöä varten tulisi tietää kaksi kulmaa ja yksi sivu tai yksi kulma ja kaksi sivua. Kolmiossa ii) kulmaa $\delta$ ei voida määrittää, koska tiedetään vain yksi kulma ja yhden sivun pituus.

Oikea vastaus on siis vaihtoehto: sivu $x$ voidaan ratkaista, mutta kulmaa $\delta$ ei voida.

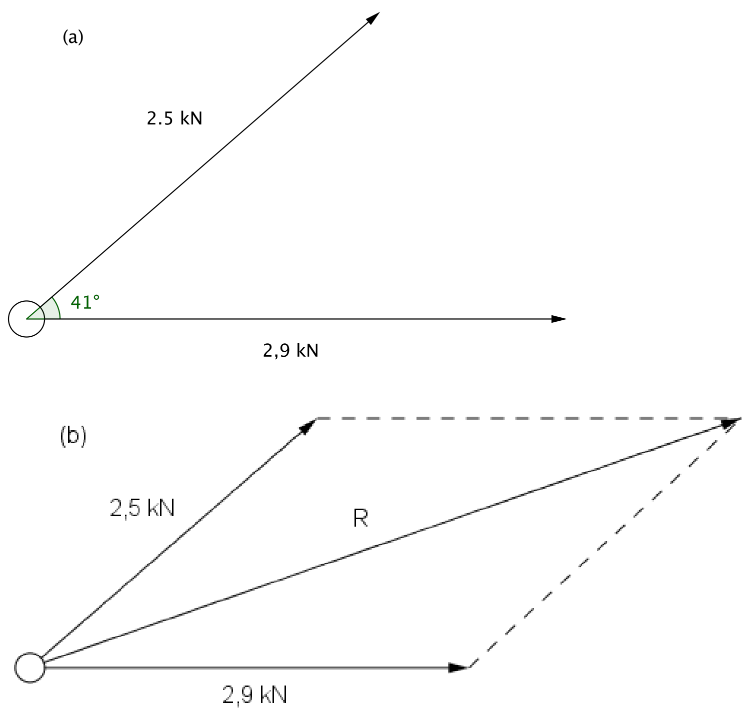
Alla esitettynä, kuinka sivu $x$ voitaisiin ratkaista kolmiosta i) sinilauseella.



Kulma $\alpha = 180° - 73° - 53° = 54°$. Sinilauseella saadaan

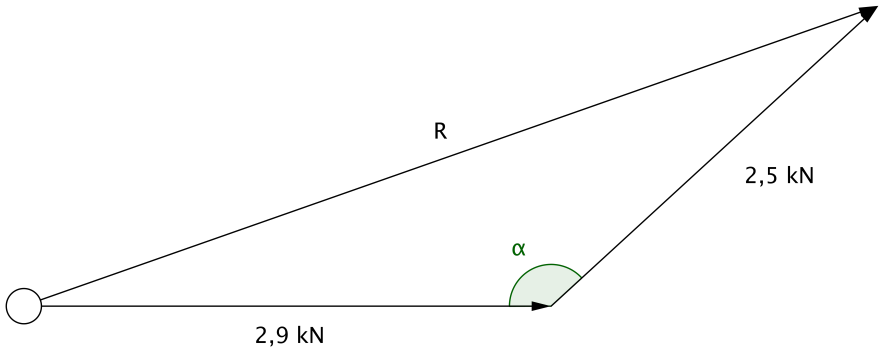
$$\frac{x}{\sin 54°} = \frac{21\text{ cm}}{\sin 73°}$$
$$x = \frac{21\text{ cm}}{\sin 73°} \cdot \sin 54°.$$

**Harjoitustehtävä 6.** *Aukkotehtävä*
Holtiton tienkäyttäjä on ajanut auton ojaan. Hänen onnekseen paikalle tulevat Kalle ja Milla. Auton peräkoukkuun on kiinnitetty köydet, joita Kalle ja Milla vetävät 2,9 kN ja 2,5 kN voimilla. Köydet ovat 41° asteen etäisyydellä toisistaan (kuva (a)). Kuvassa (b) on esittynä tilanteen voimakuvio, joka on suunnikkaan muotoinen. Kuinka suuri on autoon kohdistuva kokonaisvoima $R$? (Vinkki: kosinilause) Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella ilman yksikköä.




Vastaus: __________.

**RATKAISU:**




Koska kyseessä on suunnikas, ovat vastakkaiset sivut ja kulmat yhtä suuret. Yllä olevassa kuvassa on piirrettynä suunnikkaan puolikkaasta muodostunut kolmio. Koska suunnikkaan kulmien summa on 360°, niin kulma $\alpha = \frac{360° - 2 \cdot 41°}{2} = 139°$.

Resultanttivoima R voidaan ratkaista kosinilauseella.

$$
\begin{aligned}
R^2 &= (2{,}5\text{ kN})^2 + (2{,}9\text{ kN})^2 - 2 \cdot (2{,}5\text{ kN}) \cdot (2{,}9\text{ kN}) \cdot \cos 139° \\
R &= \sqrt{(2{,}5\text{ kN})^2 + (2{,}9\text{ kN})^2 - 2 \cdot (2{,}5\text{ kN}) \cdot (2{,}9\text{ kN}) \cdot \cos 139°} \\
R &= 5{,}05997\text{ kN} \\
R &\approx 5{,}1\text{ kN}.
\end{aligned}
$$

**Harjoitustehtävä 7.** *Monivalitatehtävä (valitse yksi)*
Laita seuraavien tasokuvioiden pinta-alat suuruusjärjetykseen suurimmasta pienimpään.
- Ympyrä, jonka säde on $\frac{r}{2}$
- Neliö, jonka sivun pituus on $r$
- Tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on $r$

(a) Ympyrä > Neliö > Tasasivuinen kolmio

(b) Ympyrä > Tasasivuinen kolmio > Neliö

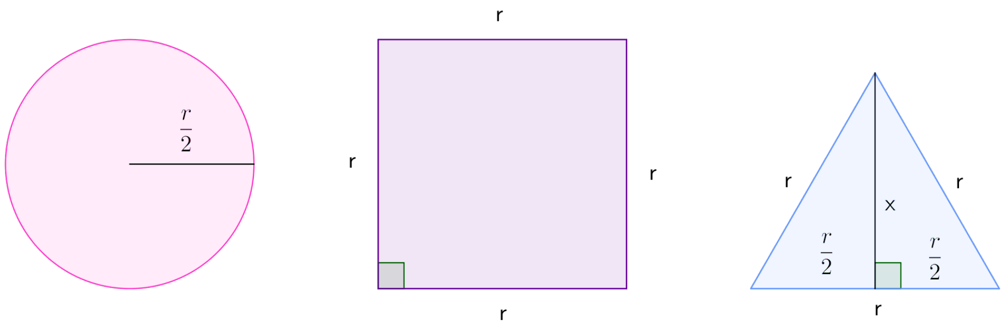
(c) Neliö > Ympyrä > Tasasivuinen kolmio

(d) Neliö > Tasasivuinen kolmio > Ympyrä

(e) Tasasivuinen kolmio > Ympyrä > Neliö

(f) Tasasivuinen kolmio > Neliö > Ympyrä

**RATKAISU:**




Ympyrän pinta-ala $A_y$ on

$$A_y = \pi \cdot (\frac{r}{2})^2 = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \approx 0{,}79 \cdot r^2.$$

Neliön pinta-ala $A_n$ on

$$A_n = r^2.$$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala $A_k$ on

$$A_k = \frac{r \cdot x}{2} = \frac{r \cdot \sqrt{r^2 - (\frac{r}{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 \approx 0{,}43 \cdot r^2.$$

Oikea vastaus on siis $A_n > A_y > A_k$.

**Harjoitustehtävä 8.** *Aukkotehtävä*
Saimaa on Suomen suurin ja Euroopan neljänneksi suurin järvi. Sen pinta-ala on 4 400 km$^2$. Mikä olisi Saimaan pinta-ala kartalla, jonka mittakaava on 1:200 000? Anna vastaus neliösenttimetreissä yhden neliösenttimetrin tarkkuudella ilman yksikköä.

Vastaus: __________ cm$^2$.

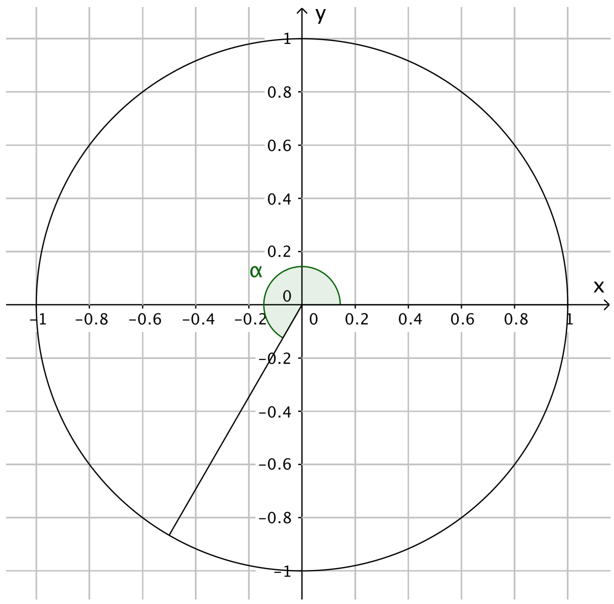
**RATKAISU:**

Muodostetaan yhtälö, jolla ratkaistaan pinta-ala kartalla. Merkitään Saimaan pinta-alaa kartalla kirjaimella $x$. Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, niin saadaan seuraava yhtälö.

$$\frac{x}{4\ 400\ \text{km}^2} = \frac{1}{200\ 000^2}$$

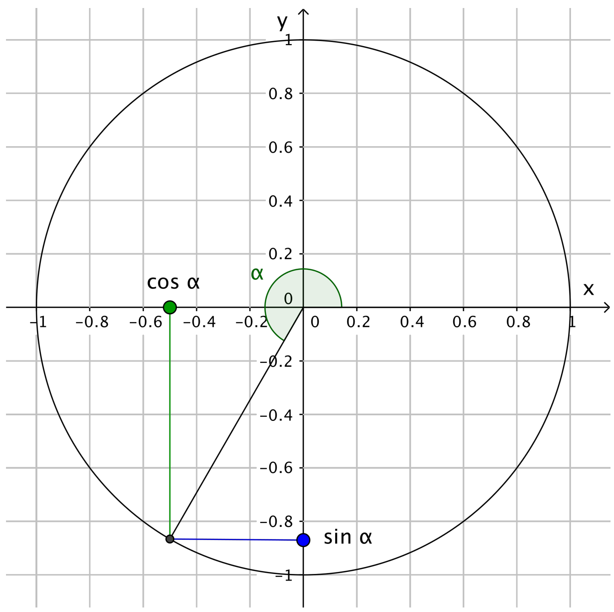
$$x = \frac{4\ 400\ \text{km}^2}{200\ 000^2} = \frac{4\ 400 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2}{200\ 000^2} = 1\ 100\ \text{cm}^2.$$

**Harjoitustehtävä 9.** *Yhdistämistehtävä*
Määritä kuvan avulla $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$. Arvioi lisäksi, kuinka suuri kulma $\alpha$ on asteina ja radiaaneina.




Vastaus: $\cos\alpha =$ __________ ja $\sin\alpha =$ __________ (vaihtoehdot: noin 0,5; noin 0,9; noin -0,5; noin -0,9). Kulman $\alpha$ suuruus on asteina __________ (vaihtoehdot: 60 °, 120 °, 210 °, 240 °) ja radiaaneina __________ (vaihtoehdot: $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$).

**RATKAISU:**

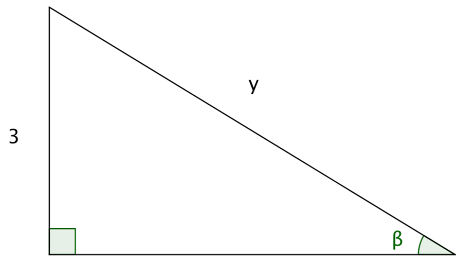


Kulman $\alpha$ kosini on kehäpisteen $x$-koordinaatti, jolloin $\cos\alpha \approx -0{,}5$. Kulman $\alpha$ sini on kehäpisteen $y$-koordinaatti, jolloin $\sin\alpha \approx -0{,}9$.

Täysi kulma on asteina 360 ja radiaaneina $2\pi$. Neljännes täydestä kulmasta on siis $90°$ ja radiaaneina $\frac{\pi}{2}$. Kulman $\alpha$ suuruus on puolet täydestä kulmasta ja noin $\frac{2}{3}$ yhdestä neljänneksestä. Kulma $\alpha$ on siis asteina $\alpha \approx 180° + \frac{2}{3} \cdot 90° = 240°$ ja radiaaneina $\alpha \approx \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi$.

## Koe 1

**Tehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Ratkaise sivun $y$ pituus.




(a) $y = \frac{3}{\sin\beta}$

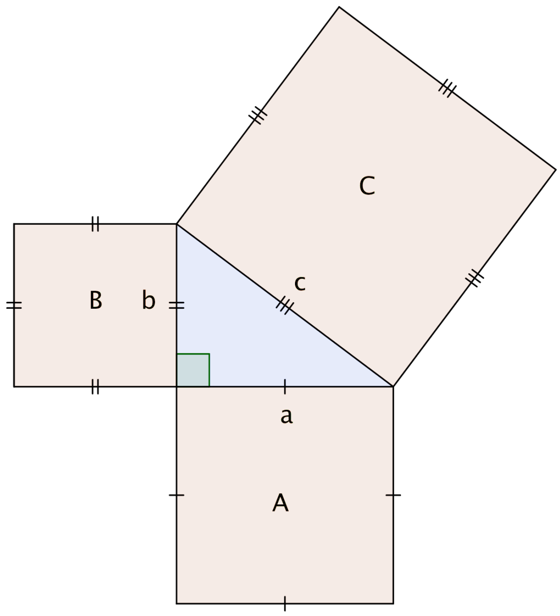
(b) $y = \frac{3}{\cos\beta}$

(c) $y = 3\sin\beta$

(d) $y = 3\cos\beta$

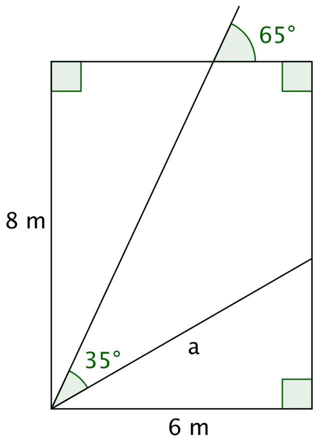
(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 2.** *Aukkotehtävä*
Henrin suorakulmaisen kolmion muotoisen kartanon ympärillä on neliön muotoiset pellot $A$, $B$ ja $C$ kuvan osoittamalla tavalla. Henri omistaa pellot $A$ ja $C$. Naapurin isäntä Kalle on ilmoittanut olevansa valmis myymään Henrille omistamansa pellon $B$. Henri muistaa Pellon $C$ pinta-alan olevan 10 000 $m^2$ ja kartanon sivun a olevan 80 m. Mikä on Kallen myymän pellon $B$ pinta-ala? Anna vastaus neliömetrin tarkkuudella.




Vastaus: Pellon B pinta-ala on noin __________ neliömetriä.

**Tehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Millä lausekkeella saadaan sivun $a$ pituus?




(a) $a=\frac{6\text{ m}}{\sin 25°}$

(b) $a=\frac{6\text{ m}}{\cos 30°}$

(c) $a=6\text{ m}\cdot\cos 25°$

(d) $a=6\text{ m}\cdot\sin 30°$

(e) Ei millään näistä lausekkeista.

**Tehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Kalle suunnittelee yksitasoista taloa. Koska Kalle on mieltynyt symmetrisiin muotoihin, hän haluaa rakentaa joko ympyrän, tasasivuisen kolmion tai neliön muotoisen talon. Kalle haluaa talon pinta-alan olevan 200 $m^2$. Minkä muotoisen talon Kalle rakentaa, jos hän haluaa käyttää mahdollisimman vähän seinämateriaalia?

(a) Ympyrän muotoisen

(b) Tasasivuisen kolmion muotoisen

(c) Neliön muotoisen

**Tehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Kalle on lähdössä lenkille ja haluaa kiertää Ylä-Tuomiojärven. Kartan mittakaava on 1:30 000. Kalle mittaa Kartasta järven pituudeksi 17 cm. Arvioi, kuinka pitkä lenkki lyhyimmillään on.

(Kuvan lähde: https://www.google.fi/maps/place/Ylä-Tuomiojärvi/@62.2865317,25 .6123005,14z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x46859e2625d67d89:0xee059d59fb13c38f0 !8m2!3d62.2870147!4d25.6289801, 18.5.2017)

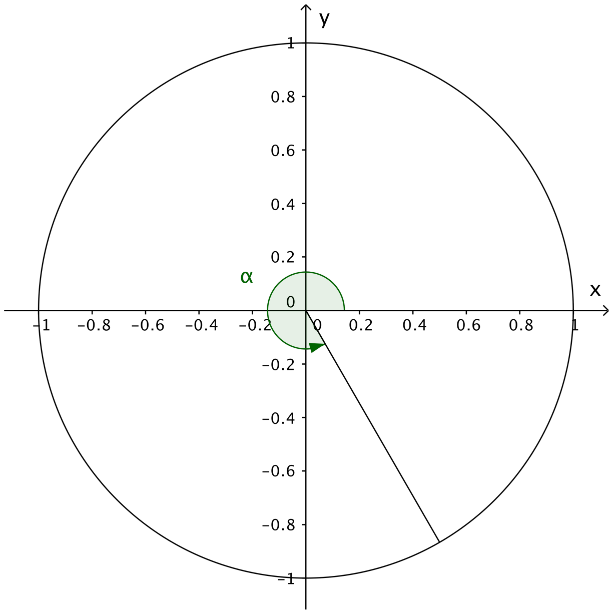

(a) noin 6 km

(b) noin 9 km

(c) noin 12 km

(d) noin 20 km

**Tehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Määritä seuraavan kuvan avulla $\sin(\alpha)$ ja $\cos(\alpha)$.




(a) $\sin(\alpha) = -0{,}9$ ja $\cos(\alpha) = 0{,}5$

(b) $\sin(\alpha) = 0{,}5$ ja $\cos(\alpha) = -0{,}9$

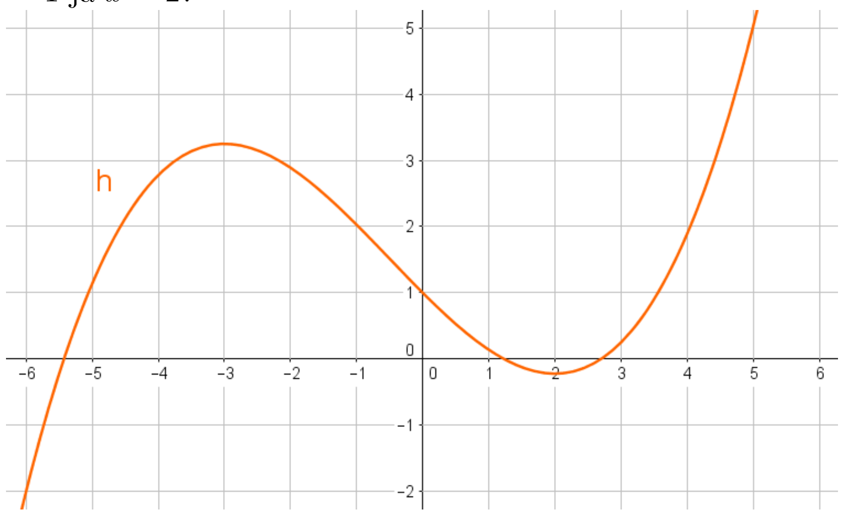
(c) $\sin(\alpha) = 0{,}9$ ja $\cos(\alpha) = -0{,}5$

(d) $\sin(\alpha) = 0{,}5$ ja $\cos(\alpha) = 0{,}9$

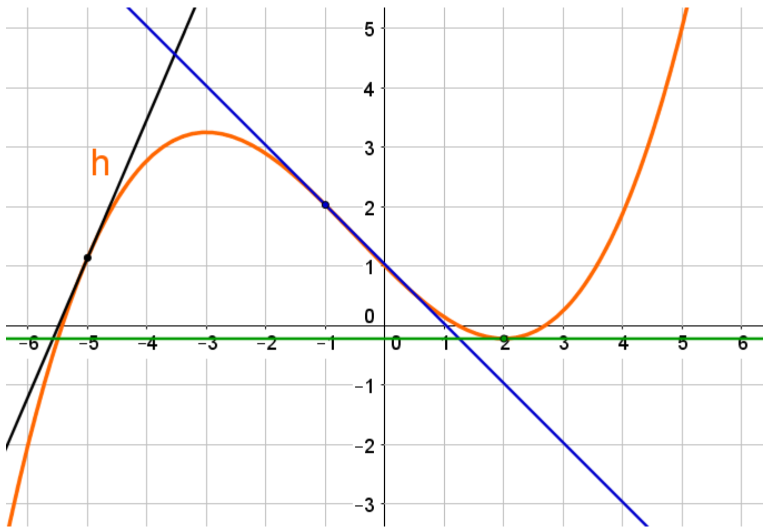
# Ajokortti 1b: Derivaatta ja integraali

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Yhdistämistehtävä*
Onko funktion $h$ derivaatan arvo positiivinen, negatiivinen vai 0 kohdissa $x = -5$, $x = -1$ ja $x = 2$?



**RATKAISU:**



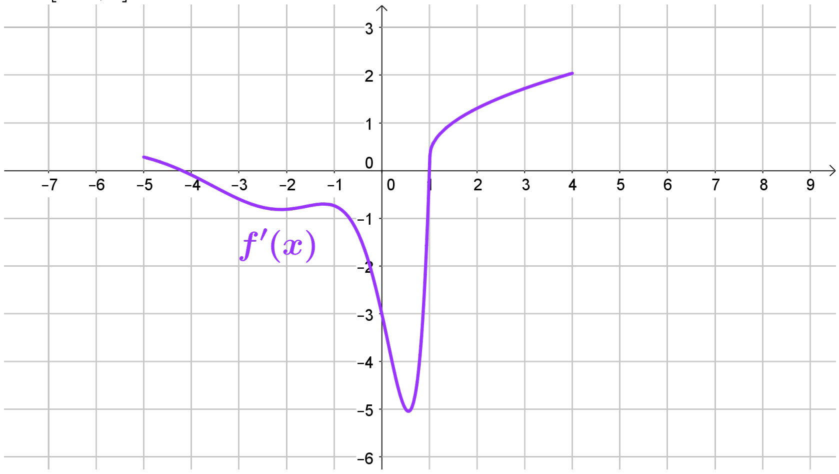
Kuvaan on piirretty funktion $h$ kuvaajan tangentit kohdissa $x = -5$, $x = -1$ ja $x = 2$. Koska derivaatta on tangentin kulmakerroin, tutkitaan tangenttisuoria.

i Kohdassa $x = -5$ tangentti on nouseva suora, joten sen kulmakerroin on positiivinen, ja derivaatta $h'(-5) > 0$.

ii Kohdassa $x = -1$ tangentti on laskeva suora, joten sen kulmakerroin on negatiivinen, ja derivaatta $h'(-1) < 0$.

iii Kohdassa $x = 2$ suora on x-akselin suuntainen, joten sen kulmakerroin on 0, ja derivaatta $h'(2) = 0$.

**Harjoitustehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Kuvassa on funktion $f(x)$ *derivaattafunktion* $f'(x)$ kuvaaja välillä $[-5{,}4]$. Määritä derivaattafunktion kuvaajan avulla ne kohdat, joissa funktio $f(x)$ voi saada ääriarvonsa välillä $[-5{,}4]$.




(a) kohdassa $x = -5$

(b) kohdassa $x = -4{,}2$

(c) kohdassa $x = -1{,}2$

(d) kohdassa $x = 0$

(e) kohdassa $x = 0{,}6$

(f) kohdassa $x = 1$

(g) kohdassa $x = 2$

(h) kohdassa $x = 4$

**RATKAISU:**

Derivoituva funktio saavuttaa ääriarvonsa suljetulla välillä derivaattafunktion nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Mahdollisia ääriarvokohtia ovat välin päätepisteet $x = -5$ ja $x = 4$ sekä derivaattafunktion nollakohdat $x = 1$ ja $x = -4{,}2$.

**Harjoitustehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Derivoi funktio

$$g(x) = \frac{e^x(x^2+6)}{2x}.$$

(a) $g'(x) = \frac{2xe^x}{2}$

(b) $g'(x) = \frac{e^x(x^3+x^2+6x-6)}{2x^2}$

(c) $g'(x) = \frac{2x^2e^x - e^x(x^2+6)}{x^2}$

(d) $g'(x) = \frac{2xe^x}{4x^2}$

**RATKAISU:**

Derivoidaan käyttäen osamäärän ja tulon derivointisääntöjä

$$\begin{aligned} g'(x) &= D\Big(\frac{e^x(x^2+6)}{2x}\Big) \\ &= \frac{D(e^x(x^2+6))\cdot 2x - D(2x)\cdot e^x(x^2+6)}{(2x)^2} \\ &= \frac{(De^x(x^2+6) + e^x\cdot D(x^2+6))\cdot 2x - D(2x)\cdot e^x(x^2+6)}{(2x)^2} \\ &= \frac{(e^x(x^2+6) + e^x\cdot 2x)\cdot 2x - 2\cdot e^x(x^2+6)}{4x^2} \\ &= \frac{e^x(2x(x^2+6) + 4x^2 - 2(x^2+6))}{4x^2} \\ &= \frac{e^x(x^3+x^2+6x-6)}{2x^2}. \end{aligned}$$

Oikea vastaus on siis vaihtoehto (b).

**Harjoitustehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Mikä seuraavassa derivoinnissa menee väärin?

$$D(\cos(2x)) = D(2x)\sin(2x) = 2\sin(2x).$$

(a) Ei mikään, derivointi on tehty oikein.

(b) Useampi alla olevista vaihtoehdoista.

(c) Derivoitua ulkofunktiota ei tulisi kertoa sisäfunktion derivaatalla.

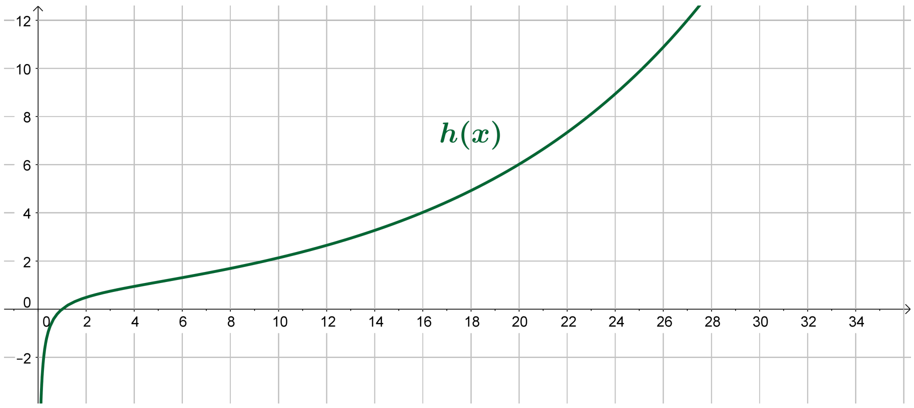
(d) Kosinin derivaattafunktio ei ole sini.

(e) Sisäfunktio on derivoitu väärin.

**RATKAISU:**

Kyseessä on yhdistetty funktio, jonka sisäfunktio $S$ on $S(x) = 2x$ ja ulkofunktio on $\cos(S(x))$. Derivoinnissa on käytetty ketjusääntöä oikein, mutta $D(\cos x) = -\sin x$. Oikea vastaus on siis vaihtoehto (d).

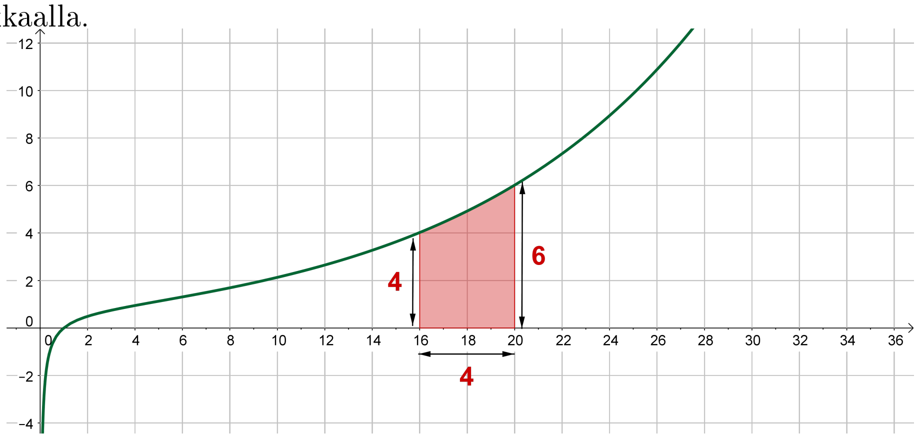
**Harjoitustehtävä 5.** *Numeerinen tehtävä*
Arvioi kuvaajan avulla funktion $h(x)$ integraali yli välin [16,20]. Vastaa pelkkä lukuarvo!




Vastaus: __________.

**RATKAISU:**

Koska funktio on positiivinen, on sen integraali funktion kuvaajan ja $x$-akselin rajaaman alueen pinta-ala. Koordinaatiston akseleita tarkastellessa huomataan jokaisen ruudun olevan $2 \times 2$ suuruinen. Pinta-alaa voi kuvan mukaisesti arvioida puolisuunnikkaalla.




Integraali yli välin [16,20] on siis noin $4 \cdot \frac{4+6}{2} = 20$.

**Harjoitustehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Mitkä seuraavista ovat funktion $f(x) = 6x^2 + 2x$ integraalifunktioita?

(a) $F_1(x) = 2x^3 + x^2 + \sqrt{3} - 1$

(b) $F_2(x) = 12x + 2$

(c) $F_3(x) = 18x^3 + 2x^2 + 75$

(d) $F_4(x) = 2x^3 + x^2 + 75$

(e) $F_5(x) = 18x^3 + 2x^2$

(f) Ei mikään annetuista vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**
Integroidaan funktio $f$

$$\int f(x)dx = \int (6x^2+2x)dx = \int 6x^2dx + \int 2xdx = 6\cdot\frac{1}{3}x^3 + x^2 + C = 2x^3 + x^2 + C,$$

missä luku $C$ on jokin vakio.

Kaikki funktiot, jotka ovat muotoa $2x^3 + x^2 + C$, ovat alkuperäisen funktion $f$ integraalifunktiota. Siis integraalifunktioita ovat funktiot $F_1$ ja $F_4$.

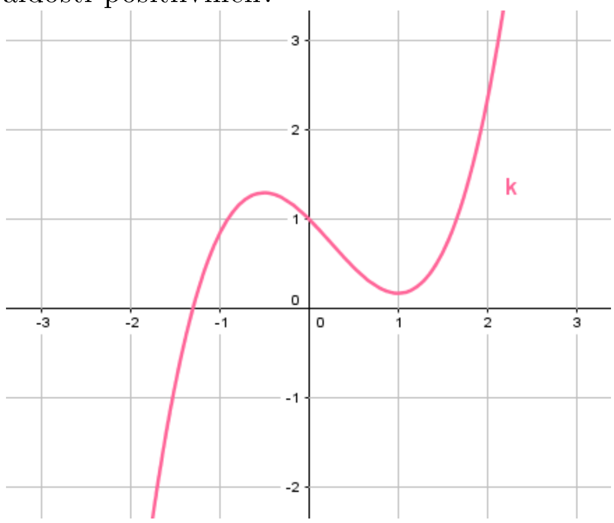
## Koe 1

**Tehtävä 1.** *Aukkotehtävä*
Derivoi funktio $f(x)$ ja täydennä polynomin vakiokertoimet tyhjiin kohtiin

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2.$$

Vastaus: $f'(x) =$ __________ $x^2 +$ __________ $x +$ __________.

**Tehtävä 2.** *Monivalinta (valitse yksi tai useampi)*
Ohessa on funktion $k(x)$ kuvaaja. Missä seuraavista kohdista funktion $k$ derivaatta on aidosti positiivinen?




(a) $x = -\frac{3}{2}$

(b) $x = -\frac{1}{2}$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

**Tehtävä 3.** *Monivalinta (valitse yksi)*
Mikä seuraavassa derivoinnissa menee väärin?

$$D(\cos(2x)) = D(2x)\sin(2x) = 2\sin(2x).$$

(a) Ei mikään, derivointi on tehty oikein.

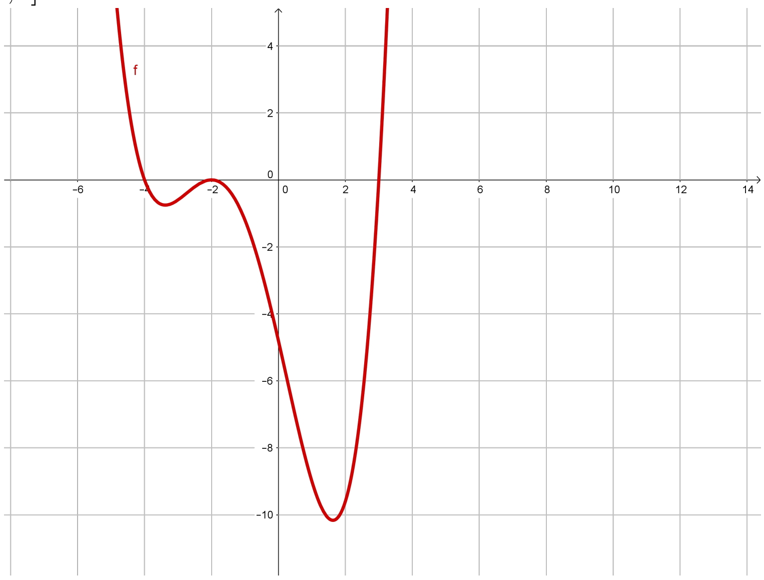
(b) Useampi alla olevista vaihtoehdoista.

(c) Derivoitua ulkofunktiota ei tulisi kertoa sisäfunktion derivaatalla.

(d) Kosinin derivaattafunktio ei ole sini.

(e) Sisäfunktio on derivoitu väärin.

**Tehtävä 4.** *Monivalinta (valitse yksi)*
Valitse vaihtoehto, joka kuvaa funktion $f$ määrätyn integraalin arvoa yli välin $x \in [-4,5]$.




(a) Integraalin arvo on positiivinen.

(b) Integraalin arvo on negatiivinen.

(c) Integraalin arvo on 0.

(d) Integraalia ei ole määritelty tällä välillä.

**Tehtävä 5.** *Monivalinta (valitse yksi)*
Valitse vaihtoehdoista se, jossa on integroitu oikein muuttujan $t$ suhteen. Vaihtoehdoissa esiintyvä luku $C$ on integrointivakio.

(a) $\int(6 \cdot t^3)dt = \int 6dt \cdot \int t^3dt = 6t \cdot 3t^4 + C = 18t^5 + C$

(b) $\int(6 \cdot t^3)dt = 6\int t^3dt = 6 \cdot 4t^4 + C = 24t^4 + C$

(c) $\int(6 \cdot t^3)dt = 6\int t^3dt = 6 \cdot \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{3}{2}t^4 + C$

(d) $\int(6 \cdot t^3)dt = 6\int t^3dt = 6 \cdot \frac{1}{3}t^4 + C = 2t^4 + C.$

(e) Kaikki integroinnit on tehty väärin.

# Ajokortti 1b: Loppukoe 1

**Tehtävä 1.** *Yhdistämistehtävä*
Laske

(a) $\sqrt{3}^2 + \sqrt{4}^2 =$ __________

(b) $\sqrt{3^2 + 4^2} =$ __________.

Vaihtoehdot: 3, 4, 5, 6, 7, 8.

**Tehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
JYP:in maalivahteina kaudella 2016-2017 olivat Jussi Olkinuora ja Pekka Tuokkola. Olkinuora pelasi runkosarjassa 26 peliä ja Tuokkola 32 peliä. Olkinuora torjui peleissä 654 kertaa ja päästi 55 maalia. Tuokkola taas torjui 700 kertaa ja päästi 60 maalia. Kummalla maalivahdeista oli parempi torjuntaprosentti (torjuntojen suhde kaikkiin laukauksiin)?
(Lähteet http://www.hockeydb.com/ihdb/stats/pdisplay.php?pid=130959 ja http://www.hockeydb.com/ihdb/stats/pdisplay.php?pid=84366, 18.5.2017)

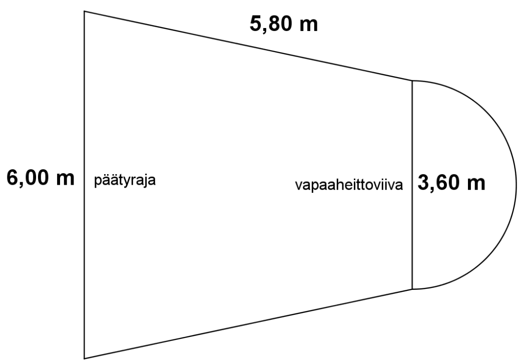
(a) Olkinuora

(b) Tuokkola

(c) Torjuntaprosentti oli yhtä suuri.

(d) Ei voi ratkaista annettujen tietojen perusteella.

**Tehtävä 3.** *Numeerinen tehtävä*
Milla lähtee kavereidensa kanssa vanhalle ala-asteelleen pelaamaan koripalloa. Ala-asteen koripallokentän viivat ovat hieman vanhentuneet, mutta pelaamista se ei haittaa. Ala-asteen koripallokentän vapaaheittoalue koostuu puoliympyrästä ja tasakylkisestä puolisuunnikkaasta. Kuinka pitkä matka vapaaheittoviivalta on kentän päätyrajalle, kun puolisuunnikkaan mitat tiedetään? Vastaa metreissä ilman yksikköä kahden desimaalin tarkkuudella.




Vastaus: __________.

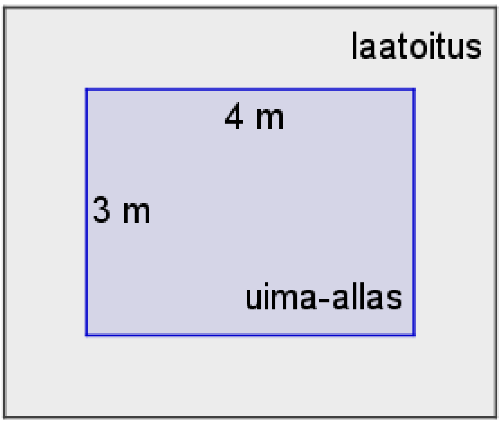
**Tehtävä 4.** *Yhdistämistehtävä*
Funktion $f$ arvo kaikilla reaaliluvuilla $x$ määritellään seuraavalla säännöllä:
*luvun $x$ neliöön lisätään luku 4 ja summa jaetaan kahdella.*

(i) Laske $f(0) =$ __________.

(ii) Millä positiivisella muuttujan $x$ arvolla $f(x) = 2$? Vastaus: __________.

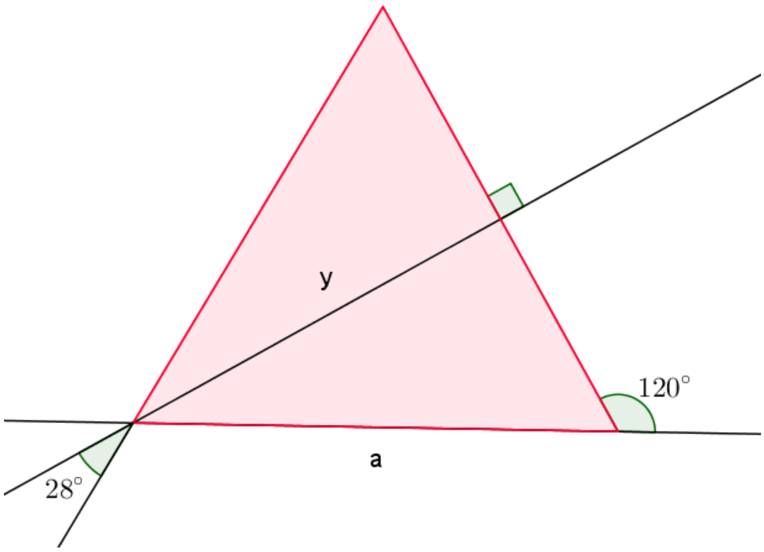
Vaihtoehdot: 0, 1, 2, 3, 4.

**Tehtävä 5.** *Aukkotehtävä*
Kallella on jäänyt edellisestä remontista 1000 ulkolaattaa, joiden koko on 10 cm $\times$ 10 cm. Hänen pihallaan on uima-allas, jonka koko on 3 m $\times$ 4 m. Kalle haluaa laatoittaa uima-altaan reuna-alueen niin, että laatoitus on yhtä leveä joka kohdassa. Kuinka leveän laatoituksen Kalle voi korkeintaan tehdä? Saumoja ei tarvitse ottaa huomioon. Vastaa, kuinka monta kokonaista laattaa reunan leveydeksi tulee.




Vastaus: Uima-altaan reunalle tulee __________ kappaletta laattoja vieretysten.

**Tehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Millä lausekkeella saadaan sivun $a$ pituus?



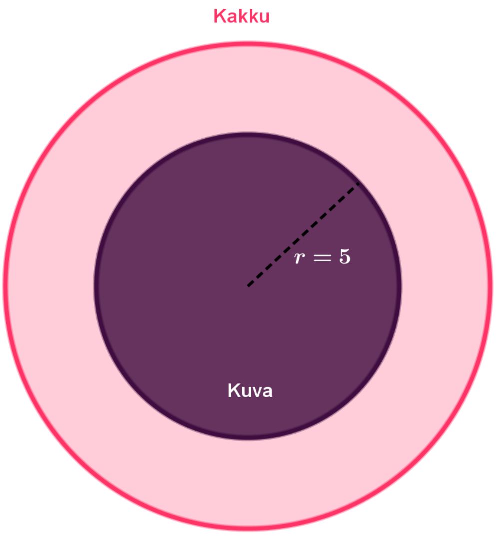
(a) $a = \frac{y}{\sin 60°}$

(b) $a = y \sin 60°$

(c) $a = y \cos 28°$

(d) $a = \frac{y}{\cos 28°}$

**Tehtävä 7.** *Aukkotehtävä*
Kalle leipoo Henrille syntymäpäiväkakkua. Kalle on innostunut syötävistä tulosteista: hän on tilannut netistä pyöreän kermakakun päälle ympyrän muotoisen syömäkelpoisen kuvan. Kuvan säde on 5 cm. Kalle harmittelee yrittäessään peittää kakkua kuvalla, sillä kakusta jää 80 cm$^2$ peittämättä. Kuinka paljon suurempi säde pyöreällä kuvalla olisi oltava, jotta se peittäisi koko kakun? Vastaa yhden desimaalin tarkkuudella.




Vastaus: Kuvan säteen tulisi olla __________ cm pidempi.

**Tehtävä 8.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Mikä seuraavassa derivoinnissa menee väärin?

$$D\left(\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 2\cos x\right) = D\left(\frac{1}{4}x^3\right) + D(3x^2) - D(2\cos x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x - 2\sin x$$

Valitse 1 tai useampi:

(a) Ei mikään, derivointi on tehty oikein.

(b) Termi $3x^2$

(c) Termi $\frac{1}{4}x^3$ on derivoitu väärin.

(d) Termi $2\cos x$ on derivoitu väärin.

**Tehtävä 9.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Minkä funktion $g$ derivaattafunktio on

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x - 4?$$

(a) $g(x) = 6x + \frac{1}{2}$

(b) $g(x) = 6x - 4$

(c) $g(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 4x + 7$

(d) $g(x) = \frac{3}{2}x^3 + x^2 - 4x - 5$

**Tehtävä 10.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Valitse vaihtoehdoista se, jossa on integroitu oikein muuttujan $x$ suhteen. Vaihtoehdoissa esiintyvä luku $C$ on integrointivakio.

(a) $\int(-4 \cdot x^{-2})dx = -4\int x^{-2}dx = -4 \cdot \frac{1}{-1}x^{-1} + C = \frac{4}{x} + C$

(b) $\int(-4 \cdot x^{-2})dx = -4\int x^{-2}dx = -4 \cdot -\frac{1}{3}x^{-3} + C = \frac{4}{3}x^{-3} + C$

(c) $\int(-4 \cdot x^{-2})dx = \int(-4)dx \cdot \int x^{-2}dx = -4x \cdot (-3x^{-3}) + C = 12x^{-2} + C$

(d) $\int(-4 \cdot x^{-2})dx = \int(-4)dx \cdot \int x^{-2}dx = -4 \cdot (-1x^{-1}) + C = 4x^{-1} + C = \frac{4}{x} + C$

(e) Kaikki integroinnit on tehty väärin.

# Ajokortti 2b: Algebra

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Millä muuttujan $x$ arvolla epäyhtälö

$$1 \leq x + 3 < 3$$

toteutuu?

(a) $x \in \left[1{,}3\right[$

(b) $x \in \left]-2{,}0\right[$

(c) $x \in \left[-2{,}0\right]$

(d) $x \in \left[-2{,}0\right[$

**RATKAISU:**

Ratkaistaan epäyhtälö:

$$\begin{aligned} 1 &\leq x + 3 < 3 \\ -2 &\leq x < 0 \end{aligned}$$

Ratkaisu on siis väli, johon kuuluu luku $-2$, mutta luku 0 ei. Oikea vastaus on siis $x \in \left[-2{,}0\right[$, eli vaihtoehto d).

**Harjoitustehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Valitse vaihtoehdoista se, joka on totta kaikilla aidosti positiivisilla muuttujien $x$, $y$ ja $z$ arvoilla.

(a) $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$

(b) $z^{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{\sqrt{z}}$

(c) $x^2 = (\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}$

(d) $y^{-\frac{x}{z}} = \left(y^{\frac{z}{x}}\right)^{-1}$

(e) Kaikki vaihtoehdot ovat epätosia.

**RATKAISU:**

(a) $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3 = (x^{\frac{1}{2}})^3 = x^{\frac{3}{2}}$, siis väite on tosi.

(b) Koska $z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ ja $\frac{z}{\sqrt{z}} = z \cdot z^{-\frac{1}{2}} = z^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$, yhtälö ei ole totta muuttujan arvolla $z = 4$, sillä $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \neq \sqrt{4} = 2$. Väite on näin ollen epätosi.

(c) Koska $(\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} = x^{\frac{3}{4}}$, väite ei ole totta esimerkiksi muuttujan arvolla $z = 4$, sillä $4^2 = 16 \neq \sqrt{8} = (\sqrt{4})^{\frac{3}{2}}$. Väite on siis epätosi.

(d) Koska $(y^{\frac{z}{x}})^{-1} = y^{-\frac{z}{x}}$, väite ei ole totta esimerkiksi muuttujien arvoilla $y = 4$, $x = 1$ ja $z = 2$, sillä $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \neq 4^{-\frac{2}{1}} = \frac{1}{16}$. Siis väite on epätosi.

**Harjoitustehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Binomin neliön muistikaavaa voi käyttää myös ns. toiseen suuntaan:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Mikä vaihtoehdoista on yhtäsuurta polynomin

$$3c^2 + 4\sqrt{3}c + 4$$

kanssa?

(a) $(3c + 2)^2$

(b) $(\sqrt{3} + 2c)^2$

(c) $(\sqrt{3}c + 4)^2$

(d) $(\sqrt{3}c + 2)^2$

(e) ei mikään näistä vaihtoehdoista

**RATKAISU:**

Muokataan lauseketta

$$\begin{aligned}
&3c^2 + 4\sqrt{3}c + 4 \\
&= (\sqrt{3}c)^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3}c + 2^2 \quad \text{Käytetään laskukaavaa } a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2. \\
&= (\sqrt{3}c + 2)^2.
\end{aligned}$$

**Harjoitustehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Mikä vaihtoehdoista on yhtäsuurta lausekkeen

$$\frac{\sqrt{q}}{2p} + \frac{q}{p^2}$$

kanssa?

(a) $\frac{\sqrt{q}}{p}\left(\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q}}{p}\right)$

(b) $\frac{q}{p}\left(\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{1}{p}\right)$

(c) $\frac{q}{2p}\left(\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{q}}{2p}\right)$

(d) $\frac{\sqrt{q}}{p}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{q}}{p}\right)$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Tehtävän voi ratkaista sieventämällä vaihtoehtojen (a)-(d) lausekkeet ja vertaamalla niitä annettuun lausekkeeseen. Toinen vaihtoehto on erottaa summasta yhteinen tekijä $\frac{\sqrt{q}}{p}$, jolloin

$$\frac{\sqrt{q}}{2p}+\frac{q}{p^2}=\frac{\sqrt{q}}{p}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{q}}{p}\right)$$

ja oikea vastaus on vaihtoehto (d).

**Harjoitustehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Kalle on keksinyt väitteitä, joiden avulla hän testailee ystäviensä matemaattista osaamista. Mitkä Kallen väittämistä ovat tosia?

(a) "Kahden murtoluvun yhteenlaskussa lasketaan osoittajat yhteen ja nimittäjät yhteen."

(b) "Kahden murtoluvun tulossa kerrotaan osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään."

(c) "Murtoluvun $\frac{a}{b}$ käänteisluku on $-\frac{a}{b}$."

(d) "Murtoluvun arvo pysyy samana, vaikka sekä osoittaja että nimittäjä kerrottaisiin jollakin luvulla $a \neq 0$."

**RATKAISU:**

(a) Koska $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, mutta $\frac{1+1}{2+2}=\frac{1}{2}$, ensimmäinen väite ei ole totta kaikilla murtoluvuilla.

(b) Kaikille murtoluvuille pätee $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ab}{cd}$, joten väite on tosi.

(c) Murtoluvun $\frac{a}{b}$ käänteisluku on $\frac{b}{a}$, missä $a \neq 0$ (luku $-\frac{a}{b}$ on alkuperäisen luvun vastaluku). Väite on siis epätosi.

(d) Koska $\frac{x}{y}=\frac{a\cdot x}{a\cdot y}$ (laventaminen), väite on tosi.

# Koe 1

**Tehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Valitse vaihtoehdoista se lauseke, jonka arvo on sama kuin lausekkeen

$$y^{\frac{1}{3}}\cdot(1+y^n)$$

arvo kaikilla positiivisilla muuttujan $y$ arvoilla.

(a) $y^{\frac{n}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$

(b) $y^{\frac{n}{3}} + 1$

(c) $y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{3n+1}{3}}$

(d) $y^{\frac{3n+1}{3}} + 1$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Binomin neliön muistikaavaa voi käyttää myös ns. toiseen suuntaan:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Mikä vaihtoehdoista on yhtäsuurta polynomin

$$2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2$$

kanssa?

(a) $(2x + y)^2$

(b) $((2x)^2 + y^2)^2$

(c) $(\sqrt{2x} + y)^2$

(d) $(\sqrt{2}x + y)^2$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Mikä vaihtoehdoista on yhtäsuurta polynomin

$$ac + ad + bc + bd$$

kanssa?

(a) $(a + b)(c + d)$

(b) $(a + c)(b + d)$

(c) $(a + d)(b + c)$

(d) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Henri pommittaa Millaa erikoisilla "faktoillaan". Auta Millaa valitsemalla väittämistä ne, jotka ovat totta kaikilla aidosti positiivisilla reaaliluvuilla $a$ ja $b$.

(a) "Lukujen $a$ ja $b$ erotuksen neliöjuuri on yhtäsuurta kuin lukujen $a$ ja $b$ neliöjuurien erotus."

(b) "Lukujen $a$ ja $b$ tulon neliöjuuri on yhtäsuurta kuin lukujen $a$ ja $b$ neliöjuurien tulo."

(c) "Lukujen $a$ ja $b$ summan neliöjuuri on yhtäsuurta kuin lukujen $a$ ja $b$ neliöjuurien summa."

(d) "Luvun $a$ kuutiojuuren kuutio on yhtäsuurta kuin luvun $a$ kuution kuutiojuuri."

**Tehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Millan ja Henrin debatista jäi jäljelle kaksi väittämää, joista he olivat seuraavana päivänäkin eri mieltä. Ovatko Millan ja Henrin väittämät totta?

(i) *Milla*: Luvun $a$ neliöjuuren neliö on yhtäsuurta kuin luvun $a$ neliön neliöjuuri, jopa negatiivisilla luvuilla $a$.

(ii) *Henri*: Yhtälö $a^{(a^a)} = (a^a)^a$ on totta kaikilla positiivisilla luvuilla $a$.

(a) Sekä Milla että Henri ovat oikeassa.
(b) Vain Milla on oikeassa.
(c) Vain Henri on oikeassa.
(d) Sekä Milla että Henri ovat väärässä.

**Tehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Kalle on ostanut uuden jääkaapin, jonka energiatehokkuus on vertaansa vailla. Kalle päättää vertailla uuden ja vanhan jääkaappinsa ideaalisia hyötysuhteita $\eta_{uusi}$ ja $\eta_{vanha}$ taulukkokirjasta löytämänsä kaavan avulla. Onko Kallen sievennys tehty oikein? Jos ei, missä välivaiheessa 1), 2) vai 3) virhe tulee?

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_{vanha}}{\eta_{uusi}} &= \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right) : \left(\frac{T_3 - T_4}{T_3}\right) \\
&\overset{1)}{=} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right) \cdot \left(\frac{T_3}{T_3 - T_4}\right) \\
&\overset{2)}{=} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{T_3}{T_4}\right) \\
&\overset{3)}{=} 1 + \frac{T_2 T_3}{T_1 T_4} - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_4}
\end{aligned}$$

(a) Kalle on sieventänyt oikein.

(b) Virhe yhtäsuuruudessa (1)

(c) Virhe yhtäsuuruudessa (2)

(d) Virhe yhtäsuuruudessa (3)

# Ajokortti 2b: Alkeisfunktiot

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Eksponenttifunktio $E(x) = k^x$ on aidosti vähenevä täsmälleen silloin, kun kantaluku $k$ on välillä $0 < k < 1$. Millä vakion $a$ arvoilla funktio $h$,

$$h(x) = \big(1 + a\big)^x$$

on aidosti vähenevä?

(a) $a = 0$

(b) $-1 < a < 0$

(c) $a \leq 0$

(d) Kaikilla vakion $a$ arvoilla

(e) Ei millään vakion $a$ arvoilla

**RATKAISU:**

Eksponenttifunktio on aidosti vähenevä täsmälleen silloin, kun kantaluvulle $(1 + a)$ pätee $0 < a + 1 < 1$ eli $-1 < a < 0$. Vaihtoehto b) on siis oikein.

**Harjoitustehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Luvun $a > 0$ $k$-kantainen logaritmi on eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaisu. Toisin sanoen

$$k^x = a \Leftrightarrow x = \log_k a.$$

Logaritmiä, jonka kantaluku on $e$ (Neperin luku) sanotaan luonnolliseksi logaritmiksi ja sitä usein merkitään kirjaimilla ln:

$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a.$$

Mikä vaihtoehdoista on yhtäpitävä yhtälön

$$\ln\left(\frac{2}{z}\right) = \frac{b}{2}$$

kanssa?

(a) $e^{\frac{b}{2}} = \frac{z}{2}$

(b) $e^{\frac{b}{2}} = \frac{2}{z}$

(c) $e^{\frac{z}{2}} = \frac{b}{2}$

(d) $e^{\frac{2}{z}} = \frac{b}{2}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Tarkastelemalla määritelmää

$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$$

nähdään, että yhtälössä

$$\ln\left(\frac{2}{z}\right) = \frac{b}{2}$$

kantaluku on $e$, eksponentti $x$ on $\frac{b}{2}$ ja luku $a$, josta logaritmi otetaan, on $\frac{2}{z}$. Eli

$$\ln\left(\frac{2}{z}\right) = \frac{b}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{b}{2}} = \frac{2}{z}.$$

**Harjoitustehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Eräälle funktiolle $g$ pätee ehto $H$

$$H: \quad g(y+z) = g(y) + g(z), \qquad \text{kaikilla } y,z \in \mathbb{R}.$$

Päteekö ehto $H$ funktiolle

$$f(x) = (x+1)^2?$$

Valitse oikea perustelu.

(a) Pätee, sillä ehto toteutuu sijoittamalla $y = 0 = z$.

(b) Pätee, sillä $f(x+1) = (x+1)^2$.

(c) Ei päde, sillä ehto ei toteudu sijoittamalla $y = 1$ ja $z = 0$.

(d) Ei päde, sillä funktion $f$ kuvaaja on paraabeli.

**RATKAISU:**

(a) Perustelu on *väärin*: ehto ei toteudu, kun $y = 0 = z$, ja vaikka toteutuisikin, se ei riittäisi. Se, että löydetään jotkin luvut, jotka toteuttavat yhtälön, ei takaa, että ehto olisi totta *kaikilla* reaaliluvuilla $y$ ja $z$.

(b) Perustelu on *väärin* ja hölynpölyä: $f(x+1) \neq (x+2)^2$, eikä tämä liity annettuun ehtoon millään tavalla.

(c) Perustelu on *oikein*: ehto $H$ ei toteudu *kaikilla* reaaliluvuilla, jos löydetään yksikin vastaesimerkki, jolla ehto ei toteudu. Siis koska

$$f(0+1) = 4 \neq 5 = f(0) + f(1),$$

ehto ei päde funktiolle $f$.

(d) Perustelu on *väärin*: funktion $f$ kuvaaja on todella paraabeli, mutta annettuun ehtoon perustelu ei ota kantaa.

**Harjoitustehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Funktiosta $h$ tiedetään, että se on jatkuva ja derivoituva koko reaaliakselilla ja lisäksi

i. $h(0) = 0$,

ii. $h(\frac{\pi}{2}) = 1$,

iii. Funktion pienin arvo on -1.

Päättele, mitkä seuraavista väitteistä ovat varmuudella totta.

(a) Funktiolla $h$ on nollakohta.

(b) Funktio $h$ on sinifunktio.

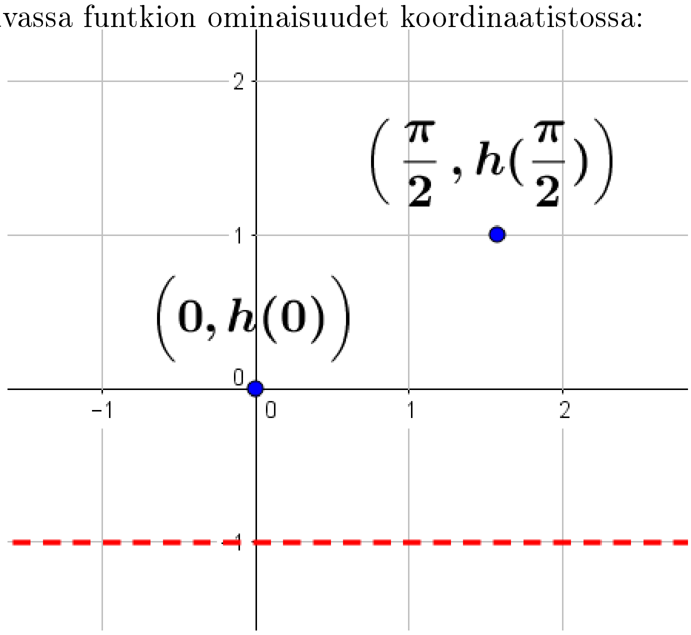
(c) Jos $h(x) = 0$, niin $x = 0$.

(d) $h(2) \geq -2$.

(e) $h'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

**RATKAISU:**

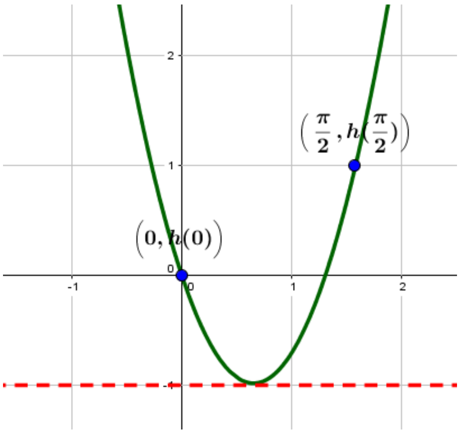
Kuvassa funtkion ominaisuudet koordinaatistossa:




Funktiosta tiedetään myös, että *ainakin* jollain $x_0$ saavutetaan pienin arvo, eli $h(x_0) = -1$.

(a) Pitää paikkansa: Funktiolla on nollakohta $x = 0$.

(b) Ei pidä paikkaansa: Sinifunktiolla on samat ominaisuudet, mutta niin on monella muullakin funktiolla, esimerkiksi oheisen kuvan paraabelilla.



(c) Ei pidä paikkaansa: Funktio voi saada arvon 0 muissakin pisteissä kuin $x = 0$.

(d) Pitää paikkansa: Koska funktion pienin arvo on -1, niin funktion kaikkien arvojen on oltava sitä suurempia tai sen kanssa yhtäsuuria. Niinpä $h(2) \geq -1$ josta seuraa $h(2) > -2$.

(e) Ei pidä paikkaansa: funktion derivaatan arvo voi olla mitä tahansa, sillä funktion ominaisuuksista ei voi päätellä, että sillä olisi terassikohta tai lokaali ääriarvokohta, kun $x = \frac{\pi}{2}$.

# Koe 1

**Tehtävä 1.** *Aukkotehtävä*
Luvun $a > 0$ $k$-kantainen logaritmi on eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaisu. Toisin sanoen

$$k^x = a \Leftrightarrow \log_k a = x.$$

Laske

(i) $\log_2 8 =$ __________,

(ii) $\log_3 3 =$ __________.

**Tehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Mikä vaihtoehdoista on yhtäpitävä yhtälön

$$\ln(2x) = a$$

kanssa?

(a) $a^x = e^2$

(b) $e^x = a^2$

(c) $e^a = 2x$

(d) $e^2 = x^a$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Tiedetään, että funktio $f$ on jatkuva ja derivoituva koko reaaliakselilla ja lisäksi

i. $f(-1) = -2$,

ii. $f(1) = 2$ ja

iii. Funktion $f$ suurin arvo on 2.

Päättele, mitkä seuraavista väitteistä ovat varmuudella totta.

(a) Funktiolla $f$ on nollakohta.

(b) Jos $f(x_0) = 2$, niin $x_0 = 1$.

(c) $f(0) \leq 0$.

(d) $f(2) \leq 3$.

(e) $f'(1) = 0$.

**Tehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Eksponenttifunktio $E(x) = k^x$ on aidosti kasvava täsmälleen silloin, kun $k > 1$.
Millä vakion $a$ arvoilla funktio $h$,

$$h(x) = \big(3 - a\big)^x,$$

on kasvava?

(a) $a = 2$

(b) $a < 2$

(c) $2 < a < 3$

(d) $a = 3$

**Tehtävä 5.** *Numeerinen kysymys*
Henri on ottanut 3000 € opintolainaa opintojensa alussa. Henrin onneksi lainan vuosikorko on vain 0,5 %. Korko lisätään pääomaan vuosittain.Henri maksoi koko lainan kerralla; maksuhetkellä pankin kassaan kilahti 3110 €. Kuinka monta vuotta Henrin laina oli kasvanut korkoa? (Tämä tehtävä on suunniteltu tehtäväksi laskimen avulla.)

Anna vastauksesi vuoden tarkkuudella ilman yksikköä.
Vastaus: __________.

**Tehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Milla miettii logaritmin ominaisuuksia ja kysyy Henriltä, päteekö logaritmille

$$\ln(x+1) = \ln x + \ln 1.$$

Valitse Henrin perusteluista oikea(t).

(a) "Pätee, sillä sijoittaessa $x = 0$ yhtälö sievenee muotoon $\ln 1 = \ln 1$, joka on totta."

(b) "Pätee, sillä $\ln 1 = 0$ aina."

(c) "Ei päde, sillä sijoittaessa $x = 1$ yhtälö sievenee muotoon $\ln 2 = 2 \ln 1$, joka ei ole totta."

(d) "Ei päde, sillä logaritmifunktio on aidosti kasvava, eli $\ln(x+1) > \ln x$."

# Ajokortti 2b: Differentiaalilaskenta

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Yhdistämistehtävä*
Mitä derivointisääntöjä laskussa

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,\big(h(x)\cdot h(x)+\frac{h(x)}{g(x)}\big) &\overset{A)}{=} \mathrm{D}\,\big(h(x)\big)^2+\mathrm{D}\,\frac{h(x)}{g(x)}\\
&\overset{B)}{=} 2h(x)h'(x)+\mathrm{D}\,\frac{h(x)}{g(x)}\\
&\overset{C)}{=} 2h(x)h'(x)+\frac{h(x)g'(x)-h'(x)g(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

on käytetty vaiheissa A), B) ja C)?

Vaihtoehdot: summan derivointisääntöä, tulon derivointisääntöä, osamäärän derivointisääntöä, ketjusääntöä.

**RATKAISU:**

Vaiheessa A) on käytetty summan derivointisääntöä

$$\mathrm{D}(f(x)+g(x)) = \mathrm{D}f(x)+\mathrm{D}g(x).$$

Vaiheessa B) on käytetty ketjusääntöä

$$\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Vaiheessa C) on käytetty osamäärän derivointisääntöä

$$\mathrm{D}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

**Harjoitustehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Derivoinnin ketjusääntö on

$$\mathrm{D}\,g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Määritä

$$\mathrm{D}\,\sin((2x+1)^{11}).$$

(a) $22\sin\big((2x+1)^{11}\big)\cdot(2x+1)^{10}$

(b) $22\cos\big((2x+1)^{10}\big)\cdot(2x+1)^{10}$

(c) $20\sin\big((2x+1)^{11}\big)\cdot(2x+1)^{10}$

(d) $11\cos\big((2x+1)^{10}\big)$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

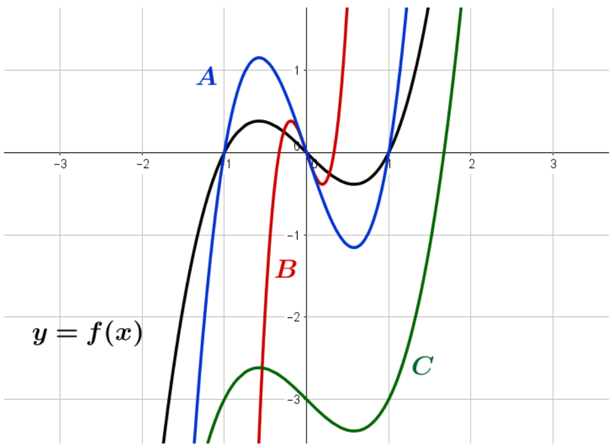
Derivoinnissa on käytettävä ketjusääntöä kahdesti:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\ \sin((2x+1)^{11}) &= \cos((2x+1)^{11}) \cdot\ \mathrm{D}\ (2x+1)^{11} \\ &= \cos((2x+1)^{11}) \cdot 11(2x+1)^{10} \cdot 2 \\ &= 22\cos((2x+1)^{11}) \cdot (2x+1)^{10} \end{aligned}$$

Vaihtoehdoista mikään ei ole derivoitu oikein, eli oikea vastaus on vaihtoehto (e).

**Harjoitustehtävä 3.** *Yhdistämistehtävä*
Oheisessa kuvassa on kolmannen asteen polynomifunktio $f(x)$, sekä funktiot

$$g_1(x) = f(x) - 3, \qquad g_2(x) = 3f(x), \qquad g_3(x) = f(3x).$$




Yhdistä kuvaajat $A$,$B$,$C$ funktiohin $g(x)_1$, $g(x)_2$, $g(x)_3$.

Vaihtoehdot: $A$, $B$, $C$.

**RATKAISU:**

i) Kun $x = 0$, niin $f(x) = g_2(x) = g_3(x) = 0$. Eli funktion $g_1(x)$ kuvaajan on oltava $C$.

ii) Koska $f(1) = 0$, niin myös $g_2(1) = 3 \cdot f(1) = 0$. Eli funktion $g_2(x)$ kuvaajan on oltava $A$.

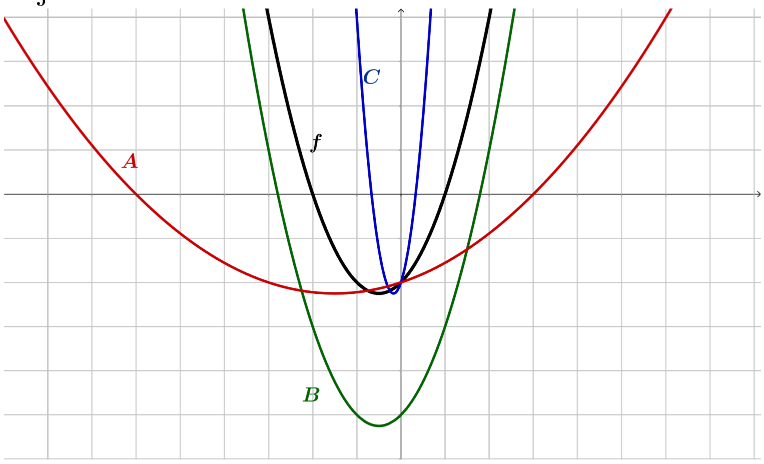
iii) Koska funktiolla $f$ on nollakohdat $x = -1$ ja $x = 1$, niin funktiolla $g_3$ vastaavat nollakohdat ovat $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = \frac{1}{3}$. Funktion $g_3(x)$ kuvaajan on oltava $B$.

## Koe 1

**Tehtävä 1.** *Yhdistämistehtävä*
Oheisessa kuvassa on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja $f$, sekä funktioiden

$$g_1(x) = f(x) - 3, \qquad g_2(x) = f(\tfrac{1}{3}x), \qquad g_3(x) = f(3x)$$

kuvaajat.




Yhdistä funktiot $g(x)_1$, $g(x)_2$, $g(x)_3$ kuvaajiin A, B ja C.

Vaihtoehdot: $A$, $B$, $C$.

**Tehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Olkoon funktio $f(x) = (x-3)^2$. Missä välin $]0{,}2]$ pisteissä epäyhtälö

$$f(x) < 4$$

toteutuu?

(a) $x \in\ ]0{,}2]$

(b) $x \in [1{,}5[$

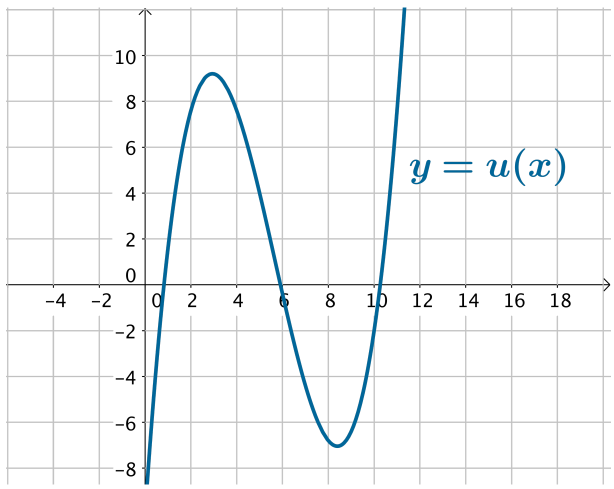
(c) $x \in\ ]1{,}2]$

(d) $x \in [2{,}5[$

**Tehtävä 3.** *Aukkotehtävä*
Tutki kuvaajan perusteella,

(i) kuinka monta kertaa funktion $u(x)$ arvojen etumerkki vaihtuu.
Vastaus: __________ kertaa.

(ii) kuinka monta kertaa funktion $u(x)$ derivaatan arvojen etumerkki vaihtuu.
Vastaus: __________ kertaa.




**Tehtävä 4.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Funktiota $F(x)$ sanotaan funktion $f(x)$ *primitiiviksi* mikäli

$$F'(x) = f(x)$$

kaikilla $x$. Mikä seuraavista on funktion

$$g(x) = 2x^2 + 1$$

primitiivi?

(a) $h(x) = 4x$

(b) $h(x) = x^3 + x$

(c) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 + x - 5$

(d) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x + 1$

**Tehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Osamäärän derivointisääntö on

$$\mathrm{D}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ missä } g(x) \neq 0.$$

Funktio $h(x) > 0$ on derivoituva. Määritä

$$\mathrm{D}\frac{x}{2h(x)}.$$

(a) $\frac{1-x}{2h(x)}$

(b) $\frac{h'(x)-x\cdot h(x)}{2(h(x))^2}$

(c) $\frac{h(x)-x\cdot h'(x)}{2(h(x))^2}$

(d) $-\frac{1}{2h'(x)}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 6.** *Yhdistämistehtävä*
Mitä sääntöä laskussa

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\frac{x^2}{e^x} &\overset{A)}{=} \frac{\mathrm{D}(x^2)e^x - x^2e^x}{e^{2x}} \\ &\overset{B)}{=} \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} \\ &\overset{C)}{=} \frac{x(2-x)}{e^x} \end{aligned}$$

on käytetty vaiheissa $A)$, $B)$ ja $C)$?

Vaihtoehdot: osamäärän derivointisääntöä, polynomi- ja eksponenttifunktion derivointisääntöä, sievennyssääntöjä, summan derivointisääntöä.

# Ajokortti 2b: Analyyttinen geometria ja trigonometria

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Ympyrän yhtälö voidaan ilmoittaa normaalimuodossa

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

tai keskipistemuodossa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

kun ympyrän keskipiste on $(x_0, y_0)$ ja säde on $r$.

Erään ympyrän yhtälön normaalimuoto on

$$x^2 - 2x + y^2 + 2\sqrt{3}y = 0.$$

Muuta ympyrän yhtälö keskipistemuotoon. Mitkä ovat ympyrän keskipiste ja säde?

(a) Keskipiste on $(1, -3)$ ja säde on 4.

(b) Keskipiste on $(-1,3)$ ja säde on 2.

(c) Keskipiste on $(1,\sqrt{3})$ ja säde on 2.

(d) Keskipiste on $(1, -\sqrt{3})$ ja säde on 2.

(e) Keskipiste on $(1,3)$ ja säde on 4.

**RATKAISU:**

Normaalimuoto tulee siis täydentää neliöksi molempien muuttujien $x$ ja $y$ suhteen

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + y^2 + 2\sqrt{3}y &= 0 \\
x^2 - 2\cdot 1\cdot x + y^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot y &= 0 && || + (1^2 + \sqrt{3}^2) \\
(x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1^2) + (y^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot y + \sqrt{3}^2) &= 1^2 + \sqrt{3}^2 && || a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\
(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 &= 4 \\
(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 &= 2^2.
\end{aligned}$$

Nyt ympyrän yhtälö on saatu keskipistemuotoon, josta nähdään, että keskipiste on $(1,-\sqrt{3})$ ja säde on 2.

**Harjoitustehtävä 2.** *Aukkotehtävä*
Paraabelin yhtälön normaalimuoto on

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Määritä sen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden (0,−1), (1,−2) ja (2,1) kautta.

Vastaus: Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$, missä $a =$ _____, $b =$ _____ ja $c =$ _____.

**RATKAISU:**

Sijoitetaan annetut lukuparit yhtälöön $y = ax^2 + bx + c$, jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -1 &= c \\ -2 &= a + b + c \\ 1 &= 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Yhtälöryhmästä saadaan suoraan, että $c = -1$. Ratkaistaan sitten toisesta yhtälöstä $b = -a - 1$ ja sijoitetaan nämä viimeiseen yhtälöön, jolloin saadaan $a = 2$. Lopuksi saadaan vielä $b = -3$. Kysytty paraabelin yhtälö on siis $y = 2x^2 - 3x - 1$.

**Harjoitustehtävä 3.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Asteiden lisäksi minkä tahansa kulman suuruus voidaan ilmaista radiaaneina. Positiivisen kulman suuruus radiaaneina on kulmaa vastaavan yksikköympyrän kaaren pituus ja negatiivisen kulman suuruus taas vastaavan yksikköympyrän kaaren pituuden vastaluku. Yksikköympyrän kehän pituus on $2\pi$, joten $2\pi$ (rad) $= 360°$.

(a) Kuinka paljon on

  (i) $45°$ radiaaneina?

  (ii) $\frac{3\pi}{10}$ rad asteina?

(b) Paljonko kolmion kulmien summa on radiaaneina?

(a) $45° = \frac{\pi}{8}$ ja $\frac{3\pi}{10} = 30°$. Kolmion kulmien summa on $\pi$.

(b) $45° = \frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{10} = 54°$. Kolmion kulmien summa on $\pi$.

(c) $45° = \frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{10} = 60°$. Kolmion kulmien summa on $2\pi$.

(d) $45° = \frac{\pi}{8}$ ja $\frac{3\pi}{10} = 54°$. Kolmion kulmien summa on $2\pi$.

(e) $45° = \frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{10} = 108°$. Kolmion kulmien summa on $\pi$.

**RATKAISU:**

(a) Koska $2\pi = 360°$, on $1° = \frac{2\pi}{360}$ ja toisaalta 1 (rad) $= \frac{360}{2\pi}^{\circ}$ . Tällöin siis

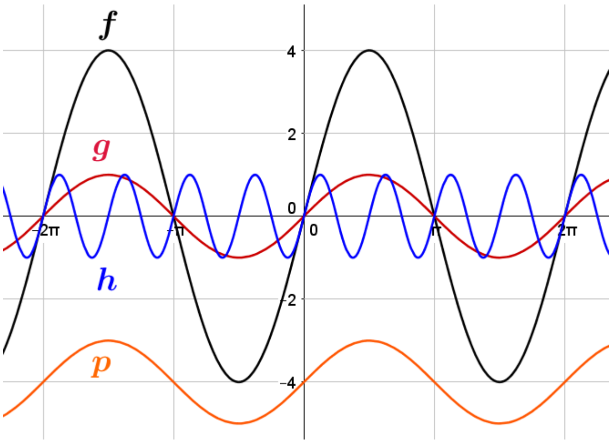
$$45° = 45 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{4}$$

ja

$$\frac{3\pi}{10} = \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{360°}{2\pi} = 54°.$$

(b) Kolmion kulmien summa on 180°, joka on $\pi$ radiaania.

**Harjoitustehtävä 4.** *Yhdistämistehtävä*
Kuvaan on piirretty funktioiden $f$, $p$, $h$ ja $p$. Niiden lausekkeet ovat $4\sin x$, $\sin 4x$, $\sin x - 4$ ja $\sin x$. Yhdistä lausekkeet oikeisiin kuvaajiin.




**RATKAISU:**

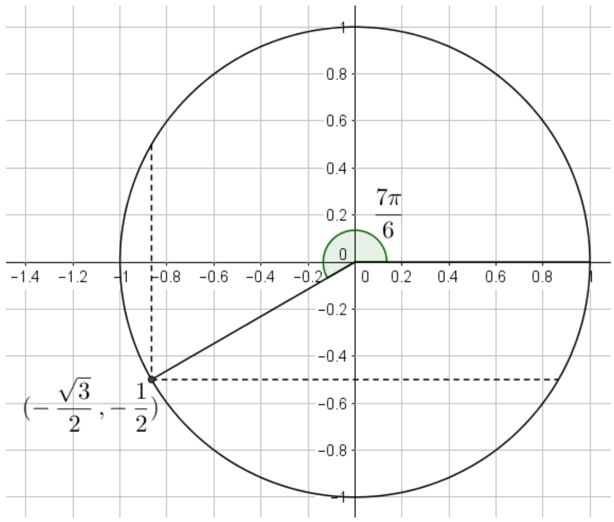
Sinifunktion arvojoukko on suljettu väli $[1,-1]$. Funktio, jonka lauseke on $\sin x - 4$ saa arvoja välillä $[-5,-3]$, joten $p(x) = \sin x - 4$. Funktio, jonka lauseke on $4\sin x$ saa arvoja väliltä $[-4,4]$, joten $f(x) = 4\sin x$.

Jäljelle jää vielä funktiot $g(x)$ ja $h(x)$. Koska sinin jakso on $2\pi$, on oltava $g(x) = \sin x$, jolloin $h(x) = \sin 4x$.

**Harjoitustehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Etsi kuvan avulla yhtälön

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ratkaisu(t), jotka kuuluvat välille $[0,2\pi[$.




(a) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

(b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

(c) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

(d) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$

(e) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

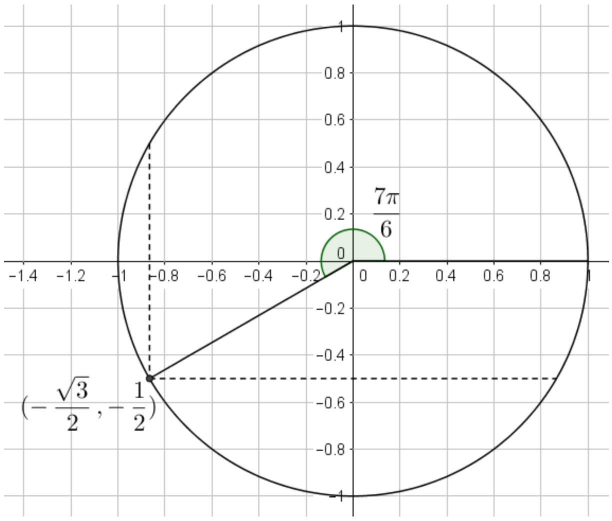
**RATKAISU:**

Kuvasta nähdään, että kulman $\frac{7\pi}{6}$ kehäpisteen vaakakoordinaatti on $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, joten yhtälön $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ eräs ratkaisu on $\alpha = \frac{7\pi}{6}$. Toinen ratkaisu väliltä $[0{,}2\pi[$ löydetään etsimällä kehäpiste, jolla on sama vaakakoordinaatti. Tämä löytyy, kun peilataan ensimmäinen ratkaisu $\alpha = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{1}{6}\pi$ vaaka-akselin suhteen. Toinen ratkaisu on siis $\alpha = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5\pi}{6}$.

**Harjoitustehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Etsi kuvan avulla yhtälön

$$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$$

ratkaisu(t), jotka kuuluvat välille $[0{,}2\pi[$.




(a) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

(b) $\alpha = \frac{13\pi}{6}$

(c) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

(d) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$

(e) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

**RATKAISU:**

Kuvasta nähdään, että kulman $\frac{7\pi}{6}$ kehäpisteen pystykoordinaatti on $-\frac{1}{2}$, joten yhtälön $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ eräs ratkaisu on $\alpha = \frac{7\pi}{6}$. Toinen ratkaisu väliltä $[0{,}2\pi[$ löydetään etsimällä kehäpiste, jolla on sama pystykoordinaatti, eli peilaamalla ensimmäinen ratkaisu $\alpha = \pi + \frac{\pi}{6}$ pystyakselin suhteen. Toinen ratkaisu on siis $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

## Koe 1

**Tehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Erään ympyrän yhtälön normaalimuoto on

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2y - 6 = 0.$$

Muuta ympyrän yhtälö keskipistemuotoon. Mitkä ovat ympyrän keskipiste ja säde?

(a) Keskipiste on $(\sqrt{2}, -1)$ ja säde on 3.

(b) Keskipiste on $(-2{,}1)$ ja säde on 3.

(c) Keskipiste on $(2, -1)$ ja säde on $\sqrt{6}$.

(d) Keskipiste on $(-\sqrt{2}{,}1)$ ja säde on 3.

(e) Keskipiste on $(\sqrt{2},1)$ ja säde on $\sqrt{6}$.

**Tehtävä 2.** *Aukkotehtävä*
Paraabelin yhtälön normaalimuoto on

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Määritä paraabelin yhtälö, kun se kulkee pisteiden $(0,-1)$, $(1,-2)$ ja $(-1,-4)$ kautta.

Vastaus: Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$, missä $a =$ _____, $b =$ _____ ja $c =$ _____.

**Tehtävä 3.** *Aukkotehtävä*
Kalle muistaa, että $180° = \pi$ (rad). Auta Kallea selvittämään, onko 60 asteen kulma suurempi, pienempi vai yhtä suuri kuin

(a) kulma, jonka suuruus on $\frac{\pi}{2}$ radiaania

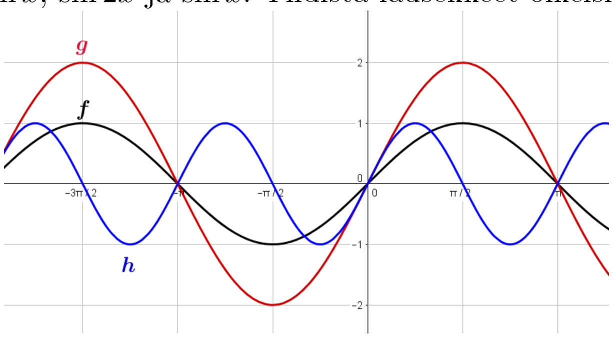
(b) kulma, jonka suuruus on $\frac{\pi}{3}$ radiaania

(c) kulma, jonka suuruus on $\frac{2\pi}{5}$ radiaania.

Merkitse vastaukseen joko $<$, $>$ tai $=$.

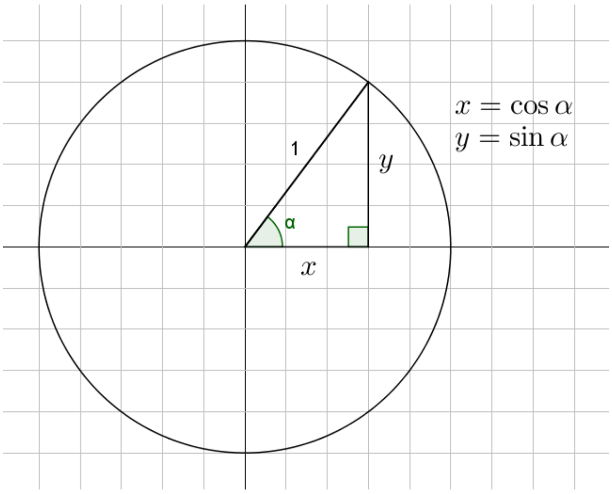
Vastaus: $60°$_____$\frac{\pi}{2}$, $60°$_____$\frac{\pi}{3}$ ja $60°$_____$\frac{2\pi}{5}$.

**Tehtävä 4.** *Yhdistämistehtävä*
Kuvaan on piirretty kolmen funktion ($g$, $f$ ja $h$) kuvaajat. Niiden lausekkeet ovat $2\sin x$, $\sin 2x$ ja $\sin x$. Yhdistä lausekkeet oikeisiin kuvaajiin.




**Tehtävä 5.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Milla katsoo yksikköympyrästä Pythagoraan lauseen avulla, että kulman $\alpha$ sinin ja kosinin arvoille pätee

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$




Sievennä edellistä lausetta käyttäen lausekkeet

(a) $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha$

(b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

Vastaus:

(a) $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha$

(a) $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha + 1$

(a) $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha$

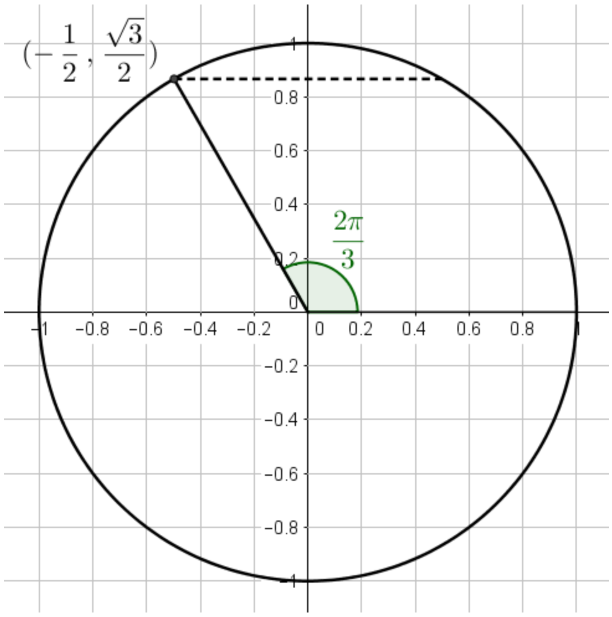
(b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = -2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

(b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 1$

(b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = -2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 1$

Ei mitkään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 6.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Etsi kuvan avulla yhtälön $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ratkaisu(t), jotka kuuluvat välille $[0{,}2\pi[$.




(a) $x = \frac{2\pi}{3}$

(b) $x = -\frac{2\pi}{3}$

(c) $x = \frac{\pi}{3}$

(d) $x = -\frac{\pi}{2}$

(e) $x = -\frac{\pi}{3}$

(f) $x = \frac{\pi}{2}$

# Ajokortti 2b: Todennäköisyyslaskenta

## Harjoitustehtävät

**Harjoitustehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*

Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat toisistaan riippumattomat, niin sen todennäköisyys, että molemmat tapahtuvat, on tapahtumien $A$ ja $B$ todennäköisyyksien tulo

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Milla, Kalle ja Henri pelaavat Kimbleä, missä on tärkeimpänä pelivälineenä tavallinen kuusitahkoinen noppa. Kalle iloitsee, kun huomaa Henrin nappulan olevan "syöntietäisyydellä". Syödäkseen Henrin Kallen on heitettävä ensin nopalla kuutonen ja sen jälkeen kakkonen. Millä todennäköisyydellä Kalle saa syötyä Henrin nappulan?

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{1}{6}$

(c) $\frac{1}{18}$

(d) $\frac{1}{36}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Merkitään tapahtumia seuraavasti:
$A$ = "Henri heittää 1. heitolla kuutosen"ja
$B$ = "Henri heittää 2. heitolla kakkosen".

Molempien tapahtumien $A$ ja $B$ todennäköisyys on $\frac{1}{6}$. Tapahtumat $A$ ja $B$ ovat toisistaan riippumattomia, joten

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

**Harjoitustehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Vastatapahtuman $A^C$ todennäköisyys saadaan vähentämällä tapahtuman $A$ todennäköisyys luvusta 1 eli

$$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A).$$

Kalle pelaa kavereidensa kanssa *Monopoly*-lautapeliä, josta havainnekuva alla.


(Kuvan lähde: http://www.alamy.com/stock-photo/monopoly-board-game.html, 8.6.2017)

Kalle heittää vuorollaan kahta noppaa. Kalle toivoo, että noppien silmälukujen summa ei ole 8, 9 tai 11, koska näillä lukemilla Kalle joutuu muiden pelaajien omistamaan hotelliin. Mikä on todennäköisyys sille, että Kalle ei joudu muiden pelaajien hotelliin?

(a) $\frac{21}{36}$

(b) $\frac{23}{36}$

(c) $\frac{25}{36}$

(d) $\frac{27}{36}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**RATKAISU:**

Merkitään $A =$ "silmälukujen summa on 8, 9 tai 11". Kun kahta noppaa heitetään, mahdollisia silmälukupareja eli alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ kappaletta. Alla olevasta taulukosta nähdään, että suotuisia alkeistapauksia $A$ (merkitty punaisella taulukkoon) on yhteensä $5 + 4 + 2 = 11$ kappaletta.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Nyt siis
$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{suotuisten alkeistapausten } A \text{ lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}} = \frac{11}{36}.$$
Tapahtuman $A$ vastatapahtuman todennäköisyys on tällöin
$$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}.$$

**Harjoitustehtävä 3.** *Aukkotehtävä*
Tässä tehtävässä tarvitset seuraavaa tietoa. Satunnaismuuttujan *odotusarvo* $\mathrm{E}(X)$ lasketaan siten, että satunnaismuuttujan mahdolliset arvot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kerrotaan todennäköisyyksillään $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ja tulot lasketaan yhteen, eli
$$\mathrm{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

Henri haluaa tienata vähän, ja ehdottaa Kallelle peliä. Kalle heittää kahta noppaa. Jos silmäluvut ovat erisuuret, Henri maksaa Kallelle silmälukujen summan osoittaman rahamäärän. Jos taas silmäluvut ovat yhtä suuret, niin Kalle maksaa Henrille ennalta sovitun rahamäärän. Kuinka suuri ennalta sovittu rahamäärä tulisi olla, jotta Henri voisi pidemmän päälle olettaa jäävänsä voitolle.Vastaa kokonaislukuna ilman yksikköä.

Vastaus: Rahasumma on suurempi kuin __________.

**RATKAISU:**

Alla olevassa taulukossa on esitettynä yhden heiton kaikki mahdolliset alkeistapaukset. Taulukkoon on merkitty punaisella ne kuusi alkeistapausta, jolloin Kalle maksaa Henrille ennalta sovitun summan.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Ennalta sovittua summaa merkitään kirjaimella $x$. Muodostetaan yhtälö tilanteelle, jossa Henrin saaman rahasumman odotusarvo on 0
$$\left(\frac{0}{36}\cdot 2+\frac{2}{36}\cdot 3+\frac{2}{36}\cdot 4+\frac{4}{36}\cdot 5+\frac{4}{36}\cdot 6+\frac{6}{36}\cdot 7+\frac{4}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 9+\frac{2}{36}\cdot 10+\frac{2}{36}\cdot 11+\frac{0}{36}\cdot 12\right)-\frac{6}{36}x = 0$$
$$\frac{210}{36} - \frac{6}{36}x = 0$$
$$x = 35$$

Jotta Henri voisi tienata pitkällä aikavälillä, tulisi ennalta sovitun summan olla suurempi kuin 35.

**Harjoitustehtävä 4.** *Aukkotehtävä*
Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat toisistaan riippumattomat, niin todennäköisyys, sille että molemmat tapahtuvat, on todennäköisyyksien $A$ ja $B$ tulo

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Todennäköisyys sille, että tapahtuma A tai tapahtuma B tapahtuu on

$$\mathrm{P}(A \text{ tai } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \text{ ja } B).$$

Yliopistolle ajava Henri kohtaa matkallaan kahdet liikennevalot, joiden toiminta on toisistaan riippumatonta. Ensimmäinen valo näyttää punaista 40 % ajasta ja toinen 70 % ajasta. Millä todennäköisyydellä Henri

(a) joutuu pysähtymään mopempiin liikennevaloihin?
Vastaus: __________.

(b) ei joudu pysähtymään kummankaan liikennevalon kohdalla?
Vastaus: __________.

(c) joutuu pysähtymään vain jomman kumman liikennevalon kohdalla?
Vastaus: __________.

Anna vastaukset kahden desimaalin tarkkuudella.

**RATKAISU:**

Merkitään tapahtumia seuraavasti:
$A$ = "Ensimmäinen valo näyttää punaista"ja
$B$ = "Toinen valo näyttää punaista".
Nyt siis P($A$)= 0,4 ja P($B$)= 0,7.

Tapahtumat $A$ ja $B$ ovat riippumattomia, joten

(a) $\mathrm{P}(A \text{ ja } B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)= 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28.$

(b) $\mathrm{P}(A^C \text{ ja } B^C)=\mathrm{P}(A^C)\cdot\mathrm{P}(B^C)= (1 - 0{,}4) \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}18.$

(c) Koska tapaukset $A$ ja $B$ ovat erillisiä, niin
$\mathrm{P}\big((A \text{ ja } B^C) \text{ tai } (A^C \text{ ja } B)\big)$

$= \mathrm{P}(A \text{ ja } B^C)+\mathrm{P}(A^C \text{ ja } B)$

$= \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\cdot\mathrm{P}(B)$

$= 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}7) + (1 - 0{,}4) \cdot 0{,}7 = 0{,}54.$

**Harjoitustehtävä 5.** *Aukkotehtävä*

Jos joukossa on $n$ alkiota, joukon alkiot voidaan järjestää jonoon $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ eri tavalla. Joukon järjestyksiä kutsutaan joukon *permutaatioiksi.*
$n$ alkion joukon $k$-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Joukosta poimittuja $k$ alkion osajoukkoja kutsutaan joukon *k-kombinaatioiksi.*

Milla, Kalle ja Henri osallistuvat Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen suunnistusjoukkueeseen Jukolan viestissä. Joukkueeseen kuuluu heidän lisäkseen neljä muuta jäsentä.

(a) Kuinka monta erilaista juoksujärjestystä joukkueelle voidaan laatia?
Vastaus: Joukkueen järjestys voidaan muodostaa __________ eri tavalla.

(b) Millä todennäköisyydellä Milla, Kalle ja Henri juoksevat joukkueen kolme ensimmäistä osuutta, jos järjestys arvotaan? Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.
Vastaus: __________.

(c) Kisojen jälkeen matematiikan ja tilastotieteen laitos palkitsee kolme joukkueen jäsentä. Palkitut valitaan arvalla. Kuinka monta erilaista vaihtoehtoa palkituiksi on olemassa?
Vastaus: __________ kappaletta.

**RATKAISU:**

(a) Joukkueen järjestys voidaan muodostaa $7! = 5\ 040$ eri tavalla.

(b) Todennäköisyys sille, että joku heistä on joukkueen ensimmäinen jäsen, on $\frac{3}{7}$. Edelleen todennäköisyyksillä $\frac{2}{6}$ ja $\frac{1}{5}$ joku heistä on joukkueen toinen ja kolmas jäsen. Todennäköisyys sille, että Milla, Kalle ja Henri ovat joukkueen kolme ensimmäistä jäsentä on $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35} \approx 0{,}03$.

Tämä voidaan myös laskea kombinaatioiden avulla. Se, että he ovat kolme ensimmäistä joukkueen jäsentä, on yksi alkeistapaus kaikista 3-kombinaatioista. 3-kombinaatioiden lukumäärä lasketaan kohdassa c).

(c) Vaihtoehtojen määrä on 3-*kombinaatioiden* lukumäärä seitsemän alkion joukosta eli $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$.

## Koe 1

**Tehtävä 1.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi tai useampi)*
Milla on ostanut kolme pussia karamelleja. Milla tarjoaa Henrille satunnaisen makeisen tämän haluamasta pussista. Koska Henri inhoaa salmiakkia, kysyy hän, montako salmiakkia missäkin karamellipussissa on. Milla vastaa:

- Sokerimättö -pussissa on 10 salmiakkia ja yhteensä 28 karamellia.
- Kirpeät Kaverit -pussissa on 3 salmiakkia ja yhteensä 11 karamellia.
- Makeat Madot- pussissa on 7 salmiakkia ja yhteensä 25 karamellia.

Mistä pussista Henrin kannattaa ottaa maistiainen?

(a) Sokerimättö

(b) Kirpeät kaverit

(c) Makeat madot

**Tehtävä 2.** *Monivalintatehtävä (valitse yksi)*
Milla, Henri ja Kalle pelaavat tehtävien tekemisen lomassa *Catanin uudisasukkaat* -lautapeliä. Kunkin pelaajan vuorolla heitetään kahta noppaa, joiden silmäluvut lasketaan yhteen. Alla havainnekuva pelistä.

(Kuvan lähde:
http://www.instructables.com/id/Game-board-for-Settlers-of-Catan/, 8.6.2017)

Henrin talo sijaitsee kolmen kuusikulmion reunalla. Henri talo tuottaa resurssikortin, jos noppien silmälukujen summa on 4, 6 tai 11. Millä todennäköisyydellä Henrin talo ei tuota resurssikorttia seuraavalla heittovuorolla?

(a) $\frac{26}{36}$

(b) $\frac{24}{36}$

(c) $\frac{22}{36}$

(d) $\frac{20}{36}$

(e) Ei mikään näistä vaihtoehdoista.

**Tehtävä 3.** *Aukkotehtävä*

Milla, Henri ja Kalle pelaavat erän Suuri Dalmuti -korttipeliä. Pelin korteilla on numeroarvot yhdestä kahteentoista. Pakassa kortteja on sen numeroarvon osoittama määrä, siis esimerkiksi kortteja 1 on yksi kappale, kortteja 2 on kaksi kappaletta ja kortteja 12 on kaksitoista kappaletta. Yhteensä numeroituja kortteja on siis 78 kappaletta.Jos pakasta nostetaan yksi kortti, mikä kortti nousee todennäköisimmin?
Vastaus: Todennäköisimmin nousee kortti numero __________.

Jos pakasta nostetaan yksi kortti, mikä on kortin numeroarvon odotusarvo pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun?
Vastaus:__________.

**Tehtävä 4.** *Aukkotehtävä*
Kalle on käymässä viikonloppulomallaan Kouvolassa. Millan suosittelemassa lounasravintolassa on tarjolla pekonihampurilaista lauantaina todennäköisyydellä 0,25 ja sunnuntaina todennäköisyydellä 0,40. Eri päivien lounastarjonta on toisistaan riippumatonta. Anna vastauksesi seuraaviin kysymyksiin desimaalilukuna kahden desimaalin tarkkuudella.

Millä todennäköisyydellä

(a) Kalle saa syödä molempina päivinä pekonihampurilaisia?
Vastaus: __________

(b) Kalle ei saa kumpanakaan päivänä pekonihampurilaisia?
Vastaus: __________

(c) Kalle saa sydäkseen pekonihampurilaisen vain jompana kumpana päivänä?
Vastaus: __________

**Tehtävä 5.** *Aukkotehtävä*
Milla, Kalle ja Henri menevät pizzeriaan ennen leffailtaa. Ravintolassa on tarjolla viittä erilaista pizzaa.
Kuinka monella eri tavalla Milla, Kalle ja Henri voivat valita pizzat, kun jokainen valitsee eri pizzan? Esimerkiksi seuraavat tilanteet ajatellaan erillisiksi tapauksiksi:

- Milla tilaa kinkkupizzan , Kalle jauhelihapizzan ja Henri kebabpizzan
- Milla tilaa kinkkupizzan, Kalle kebabpizzan ja Henri jauhelihapizzan.

Vastaus:__________.

Milla, Kalle ja Henri tilaavat sittenkin pizzat kotiinkuljetuksella leffailtaan *Pizzawifin* kautta. Ravintolassa on tarjolla viittä erilaista pizzaa. Jos kukin heistä ostaa eri pizzan, kuinka monta erilaista vaihtoehtoa ravintolalle tehtäväksi tilaukseksi on olemassa?
Vastaus:__________.