

# Numeeriset yhtälönratkaisumenetelmät

Ville Arvio

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Syksy 2017



**Tiivistelmä:** Ville Arvio, *Numeeriset yhtälönratkaisumenetelmät* (engl. *Numerical methods for equation solving*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 125. s, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Syksy 2017.

Tämän tutkielman tavoitteena on käsitellä numeerisia yhtälönratkaisumenetelmiä matematiikan aineenopettajan näkökulmasta ja toimia lukion numeerisen matematiikan kurssin opettajan taustamateriaalina. Keskeinen sisältö käsittelee Lipschitz-jatkuvuutta, iteraatiota sekä Newton-Raphsonin menetelmää.

Yhtälönratkaisu ja kahden lausekkeen yhtäsuuruuksien vertailu palautuu aina matematiikan klassiseen ongelmaan funktion nollakohdan etsimisestä. Keskeiset numeerisen yhtälönratkaisun metodit ovat rekursio ja iteraatio. Rekursio tarkoittaa oleellisesti toistoa. Iteraatiossa edellinen likiratkaisu ohjaa tarkentavasti seuraavan likiratkaisun laskentaa. Tällöin muodostuu tarkentuvien likiratkaisuiden lukujono, joka suotuisassa tapauksessa suppenee kohti alkuperäisen funktion nollakohtaa. Iteraatiossa yhteys alkuperäisen funktion nollakohtayhtälön  $f(x) = 0$  sekä iteraattifunktion iterointiyhtälön  $x = \phi(x)$  välillä on oleellinen, sillä iterointiyhtälön kiintopiste on myös alkuperäisen funktion nollakohta. Siten iterointi toimii työväliseinä nollakohdan likiarvon määrittämisessä.

Iteraattifunktio ei ole yksikäsitteinen. Jotkin iteraatiomenetelmät toimivat paremmin kuin toiset. Oleellista suppenemiselle on riittävän läheltä nollakohtaa valittu alkuarvaus. Huonosti valittu alkuarvaus ja sopimaton iteraatiomenetelmä johtavat suppenemisen sijaan likiratkaisulukujonon hajaantumiseen. Iteraation suppenemisestä voidaan kuitenkin varmistua, jos pystytään osoittamaan, että iteraattifunktio on ratkaisun lähiympäristössä kutistavasti Lipschitz-jatkua. Tällöin Lipschitz-ehto takaa, että funktio käyttäytyy nollakohdan lähiympäristössä maltillisesti ja ”pomppimatta”. Käytännöllisenä apuväliseinä Lipschitz-jatkuvuuden tutkimiseen hyödynnetään Lipschitz-jatkuvuuden derivoituvuusehtoa.

Yksinkertaisimmillaan yhtälönratkaisumenetelmä on rekursiivinen puolituslasku, joka tarkentuu tarkasteluväliä puolittaen ja samalla nollakohdan välin sisäpuolella säilyttäen. Yksinkertaisin iteraatio on kiintopistemenetelmä, joka suppenee lineaarisesti. Tutkittaessa suppenemisnopeuden kiihdyttämistä päädytään Aitkenin kaavaan, jolla saadaan likiratkaisuiden poikkeaman eli liki- ja tosiratkaisun välisen etäisyyden suppenemiseen huomattava parannus. Kysymykseen voidaanko yleisesti määritellä iteraattifunktio, jonka suppenemisnopeus on vähintään neliöityvä, löydetään ehto, joka johtaa Newton-Raphsonin menetelmän palautuskaavaan ja samalla menetelmän konstruktiiiviseen perusteluun. Oleellisesti Newtonin menetelmä perustuu derivaatan käyttöön, jolloin graafisesti seuraava nollakohdan likiarvo löydetään funktion kuvaajalle piirretyn tangentin ja x-akselin leikkauskohdasta. Ylilineaaraisesti suppenevat jänne- ja sekanttimenetelmä esitellään lyhyesti, mutta itsenäisinä menetelminä läpikäymisen sijasta lähinnä Newtonin menetelmän käytännöllisinä sovelluksina, kun funktion derivaatan arvoa on hankala laskea tai ylipäänsä derivaatta on vaikea muodostaa.

**Avainsanat:** matematiikka, numeeriset yhtälönratkaisumenetelmät, iteraatio, Lipschitz-jatkuvuus, Newton-Raphsonin menetelmä, oppimateriaali, lukio-opetus



## Sisältö

Luku 1. Johdanto	1
1.1. Mikä on numeerinen yhtälönratkaisumenetelmä?	1
1.2. Lukijalle	2
1.3. Keskeisimmät johtopäätökset	3
1.4. Kolme didaktista havaintoa	4
1.5. Yleisesimerkki neliöjuuren arvon numeerisesta määrittämisestä	5
1.6. Käytetyistä lähteistä	5
Merkinnöistä	7
Luku 2. Esitietoja	9
2.1. Monotonisuus	9
2.2. Funktion jatkuvuus	9
2.3. Bolzanon lause	9
2.4. Funktion derivoituvuus	10
2.5. Differentiaalilaskennan Väliarvolause	10
2.6. Cauchy-jono	11
Luku 3. Poikkeama	13
3.1. Poikkeama tosiratkaisusta	13
3.2. Alkuarvo	15
3.3. Likiratkaisun tavoiteltu tarkkuus	15
3.4. Yhtälön numeerisen ratkaisemisen jälkeen	16
Luku 4. Suppenemisnopeus ja yhtälönratkaisumenetelmän tehokkuus	17
4.1. Suppenemisnopeus	17
4.2. Suppenemisaste ja $q$ -luku	18
4.3. Kiihtyvää suppenemistä	18
4.4. Desimaaliesityksen tarkkuustarkastelua	20
4.5. Tehokkuus ja luotettavuus	20
Luku 5. Graafinen tarkastelu	23
5.1. Likiratkaisun määrittäminen graafisella tarkastelulla	23
5.2. Miten ihminen ja tietokone ”näkevät” yhtälönratkaisutilanteen	24
Luku 6. Puolitusmenetelmä	27
6.1. Menetelmä	27
6.2. Esimerkki neliöjuuren laskemisesta	28
6.3. Suppeneminen	30
6.4. Suppenemisnopeus	31

Luku 7.	Iteratiiviset menetelmät	33
7.1.	Iteraatio	33
7.2.	Iteraattifunktio	34
7.3.	Iteraattifunktion ominaisuuksia	35
7.4.	Funktioiden $\phi$ ja $f$ yhtymäkohtia	39
7.5.	Historiallinen esimerkki: Neliöjuuren likiarvon määrittäminen	40
Luku 8.	Lipschitz-jatkuvuus	43
8.1.	Yleinen Lipschitz-jatkuvuus	43
8.2.	Esimerkkejä	45
Luku 9.	Lipschitz-jatkuvuus iteraatiomenetelmissä	47
9.1.	Lipschitz-ehto	47
9.2.	Seurauksia Lipschitz-ehdosta	48
9.3.	Poikkeaman arviointia Lipschitz-vakion avulla	53
9.4.	Derivaatta työkaluna Lipschitz-ehdon tutkinnassa	54
9.5.	Iteraation päättymättömyys	56
Luku 10.	Kiintopistemenetelmä	59
10.1.	Menetelmä	59
10.2.	Suppeneminen	60
10.3.	Suppenemisnopeus	63
10.4.	Esimerkki	64
Luku 11.	Newtonin menetelmä	67
11.1.	Idea tangentin nollakohtana	67
11.2.	Suppeneminen	68
11.3.	Suppenemisnopeus	72
11.4.	Newtonin menetelmän soveltamista käytäntöön	74
11.5.	Sumerilaisten menetelmä Newtonin menetelmän erityistapauksena	74
11.6.	Esimerkkejä	75
Luku 12.	Iteraation suppenemisnopeuden kiihdyttäminen	81
12.1.	Kohti lineaarisen suppenemisnopeuden raja-arvoa	81
12.2.	Suppenemisnopeuden kiihdytystä	82
12.3.	Sovelluksia Aitkenin $\Delta^2$ -kaavasta Newtonin menetelmään	84
12.4.	Newtonin menetelmän neliöllinen suppeneminen	86
12.5.	Aitkenista Newtonin menetelmäksi	88
12.6.	Sumerilaisten menetelmän suppenemisnopeus	90
Luku 13.	Aitkenin $\Delta^2$ -menetelmä	93
13.1.	Menetelmä	93
13.2.	Esimerkkejä	94
Luku 14.	Newtonin menetelmää lähellä olevia yhtälönratkaisumenetelmiä	97
14.1.	Entä jos funktio ei ole derivoituva?	97
14.2.	Whittakerin menetelmä	97
14.3.	Mullerin menetelmä	99
14.4.	Sekanttimenetelmät	100

Luku 15.	Sekanttimenetelmä	101
15.1.	Sekantti Newtonin menetelmän tangentin approksimaationa	101
15.2.	Sekanttisuora kuvaajan approksimaationa	102
15.3.	Menetelmä	103
15.4.	Suppeneminen	104
15.5.	Suppenemisnopeus	104
15.6.	Esimerkki neliöjuuren laskemisesta	105
Luku 16.	Jännemenetelmä	109
16.1.	Menetelmä	109
16.2.	Sekanttia käyttävistä yhtälönsäilymenetelmistä	110
16.3.	Esimerkki neliöjuuren laskemisesta	111
16.4.	Suppeneminen	113
16.5.	Suppenemisnopeus	113
16.6.	Jännemenetelmä painotettuna keskiarvona	114
16.7.	Esimerkki	115
Liite A.	Yhtälönsäilymenetelmien vertailua	117
Liite B.	Havainnollistavia kuvia	119
Liite C.	Yleisesimerkin iteraattifunktioiden kuvaajien vertailua	123
	Kirjallisuutta	125





## LUKU 1

### Johdanto

Yhtälönratkaisu ja funktion nollakohtien ratkaiseminen ovat matematiikan klassinen ja ikiaikainen ongelma. Tähän haasteeseen on matematiikassa kiinnitetty huomiota jo vuosisatoja, ellei peräti vuosituhansia. Jo 4000 vuotta sitten sumerilaiset käyttivät iterointia neliöjuuren likiarvon määrittämiseksi. Tällöin ei tosin puhuttu vielä numeerisesta matematiikasta, ja babyonialaiset tuskin tiesivät soveltavansa sangen tehokasta iteraatiomenetelmää.

Nykypäivänäkin numeerisia menetelmiä tarvitaan erityisesti matemaattisen mallintamisen yhteydessä sekä ratkaistaessa käytännöllisiä ongelmia matematiikan ulkopuolella, vaikka numeeriset työvälineet ovat kehittyneet ja vaihtuneet informaatioteknologiaan ja tietokoneeseen. Numeeriset menetelmät ovat tärkeitä erityisesti matematiikan sovellutuksissa niin tietotekniikassa, tilastotieteessä, lääketieteessä kuin esimerkiksi fysiikassa. Usein numeerisia menetelmiä käytettäessä ei yhtälöä tarvitse saada ratkaistuksi matemaattisen täsmällisesti (esimerkiksi  $\sqrt{2}$ ), vaan sovellutusten näkökulmasta likiratkaisu (esimerkiksi 1,4 tai 1,41421) on riittävä ja jopa käyttökelpoisempi kuin symbolisesti ratkaistu yhtälö.

#### 1.1. Mikä on numeerinen yhtälönratkaisumenetelmä?

Numeerinen yhtälönratkaisumenetelmä on metodi, jolla löydetään yhtälön  $f(x) = 0$  likimääräinen ratkaisu. Tähän käyttötarkoitukseen on kehitelty useita toisistaan oleksiensa sekä menetelmänsä osalta poikkeavia ratkaisutapoja. Jotkin menetelmät ovat hyvinkin spesifiin käyttötarkoitukseen tai ongelmaan rakennettuja, toiset yleisempiä. Eri yhtälönratkaisumenetelmillä on vahvuutensa ja rajoitteensa erilaisissa yhtälönratkaisutilanteissa, eikä yhtä oikeaa ja yleispätevää ratkaisumenetelmää ole. Huonosti valittu menetelmä voi saada yhtälönratkaisun hajaantumaan, ponnahtamaan toiseen nollakohtaan tai suppenemaan epäkäytännöllisen hitaasti. Menetelmän toimintavarmuus onkin yksi oleellinen näkökulma vertailla eri menetelmiä.

Sopivasti eri menetelmiä ja funktion kulun matemaattista analyysia yhdistelemällä saadaan nollakohtien likiarvot määritettyä kohtuullisella varmuudella, kelvollisessa ajassa sekä riittävän tarkasti. Yleensä varmoilla, mutta hitaammilla yhtälönratkaisumenetelmillä päästään riittävän lähelle ratkaisua, minkä jälkeen sovelletaan nopeasti suppenevien metodien tehokkuutta. Hyvä alkuarvaus auttaa nollakohdan etsintää huomattavasti, joten lähtöarvon saaminen matemaattisella analyysilla tai tosimaailman mallinnettavan ilmiön tarkastelulla on usein erityisen hyödyllistä. Likiratkaisun löydyttyä on myös kyettävä tarkastamaan, onko saatu ratkaisu käyttökelpoinen ja pätevä sovelluskohteen kannalta.

## 1.2. Lukijalle

Motivaationa tämänmuotoisen pro gradu -opinnäytetyön tekemiseen on ollut käytännöllisyys, opettajanäkökulma sekä matematiikan soveltaminen. Nyt matematiikkaa sovelletaan niin numeerisesti kuin didaktisestikin matemaattisesta sisällöstä käsin opettajantyöhön käytettäväksi. Näin ollen yliopiston akateemisena päättötyönä toimimisen lisäksi, on opinnäytetyö tarkoitettu käyttöön niin opettajalle, matematiikassa edistyneelle lukio-opiskelijalle kuin muille aiheesta kiinnostuneille lukijoille.

Tässä opinnäytetyössä perehdytään yhtälönratkaisun numeerisiin menetelmiin erityisesti lukion aineenopettajan näkökulmasta. Myös lahjakkaan ja matematiikasta kiinnostuneen lukio-opiskelijan tai muun lukijan on mahdollista itsenäisesti opinnäytetyön avulla perehtyä numeerisiin yhtälönratkaisumenetelmiin numeerisen matematiikan lukiokurssin laajuutta syvällisemmin. Pro gradu -tutkielmaan kuuluvasti työssä noudatetaan akateemisen matematiikan viittauskäytäntöä ja muita akateemisia konventioita. Näin ollen tällä opinnäytetyöllä on kaksinainen rooli sekä pro gradu -tutkielmana että lukion matematiikan aineenopettajille kirjoitettuna numeerisen matematiikan lukiokurssin taustamateriaalipaketina.

Muihin lukion matematiikan kursseihin verrattuna on numeerisen matematiikan näkökulma lukuihin ja laskentaan hieman erilainen. Lukiomatematiikan kursseilla vastaukset saadaan pääosin algebrallisesti päättelemällä ja johtamalla, kun taas numeerisessa matematiikassa vastaukset ovat suppeneva ja tarkentuva likiratkaisun pitkä desimaaliesitys. Numeerisissa menetelmissä on läsnä epätarkkuutta, tarkkuusrajoja ja epäyhtälöitä. Muilla lukion matematiikan kursseilla vastaukset ovat pääasiassa symbolisia, yksiselitteisen tarkkoja ja ratkaisu liitetään laskuun yhtäsuuruudella. Likiarvoja ja desimaalilukuja lasketaan harvoin, ja vielä harvemmin ne ovat varsinainen laskutoimituksen tarkoitus. Numeerisessa matematiikassa vastaavasti käsitellään jatkuvasti likiarvoja ja desimaalilukuja. Toisaalta numeerinen matematiikka voi olla symboliseen laskentaan tottuneelle lukiolaiselle käytännöllisempää kuin useat aiemmat lukio-matematiikan kurssit varsinkin pitkässä matematiikassa.

Pragmaattisen opettajanäkökulman vuoksi on opinnäytetyössä matemaattisen minimalismin sijaan haluttu niin esimerkit, todistukset kuin selittävät tekstitkin kirjoittaa tavallista tapaa laajemmin auki. Näin tekstin, havainnollistavien kuvien sekä numeeristen esimerkkilaskujen runsaalla määrällä ja selittävällä käsittelyllä on tarkoituksella haluttu perehdyttää lukijaa aiheeseen. Luultavasti valittu tapa näyttäytyy matemaatikolle turhana toistona, kun taas lukiolaiselle tuo toisto didaktiselta puolelta vahvistaa vielä kerran käytännön esimerkillä ja sen muutamalla ylimääräisellä rivillä ja rekursiolla, kuinka sääntö toimii. Sivumäärä ja kirjoitustapa ovat opinnäytetyöksi laajahkot, mutta oppimateriaaliksi ja opettajan taustamateriaaliksi aiheen käsittely on selittävä ja kuvaava.

Menetelmiä ja esimerkkejä on havainnollistettu graafisesti GeoGebra-ohjelmalla. Tutkielman pdf-versiossa voi kuvia napsauttamalla avata kuvaajan GeoGebra-sivun, jolta kuvan yhtälö havainnollistettuna löytyy. Tämä mahdollistaa muuttujien arvojen interaktiivisen muuttamisen ja kuvaajan animoinnin. Havainnollistukset löytyvät myös GeoGebra-kirjana osoitteesta <https://www.geogebra.org/m/tzhenT6c>

### 1.3. Keskeisimmät johtopäätökset

Sisällöllisesti opinnäytetyössä keskitytään yhtälönratkaisumenetelmien matemaattiseen puoleen, kaavoihin, numeerisiin esimerkkeihin ja väittämien todistamiseen. Aiheen didaktinen ja tietotekninen näkökulman käsittely ovat sivuosassa. Oleellisesti käsitellään yleisimpiä yhtälönratkaisumenetelmiä, jotka lukio-opetuksessa tyypillisesti ovat sisältönä oppikirjojen sekä lukion opetussuunnitelman perusteella. Menetelmistä varsinkin lukion vuoden 2015 opetussuunnitelmassa keskeisenä sisältönä mainittu Newton-Raphsonin menetelmä on niinkään opinnäytetyön keskeisintä sisältöä.

Aluksi määritellään numeerisen yhtälönratkaisun peruskäsitteet: likiratkaisu, tosiratkaisu sekä poikkeama. Tämän jälkeen käsitellään yleisesti suppenemisnopeutta eli yhtälönratkaisumenetelmien tehokkuutta, johon palataan konkreettisemmin varsinaisten yhtälönratkaisumenetelmien yhteydessä. Ensimmäisenä menetelmänä esitellään varmasti toimiva puolitusmenetelmä. Menetelmä on sangen yksinkertainen ja siten matemaattisesti ei niin kiinnostava, joten seuraavaksi esitellään iteraation idea. Iteraatiossa edellinen likiratkaisu ohjaa tarkentavasti seuraavan likiratkaisun laskentaa. Iteraatiomenetelmien suppenemistä tarkastellaan erityisesti iteraattifunktion Lipschitz-jatkuvuuden kautta. Lipschitz-jatkuvuudesta seuraava derivoituvuusehto antaa käytökelpoisen ja konkreetin työkalun tutkia iteraation suppenemisen edellytyksiä.

Yleisluontoisen iteraation ja Lipschitz-jatkuvuuden käsittelyn jälkeen iteratiivisista menetelmistä ensimmäisenä esitellään yksinkertainen kiintopistemenetelmä. Menetelmä on sangen suoraviivainen, hieman epävarma ja vain lineaarisesti suppeneva. Iteraation suppenemisnopeuteen saadaan kuitenkin merkittävä parannus tehokkaalla ja neliöityvästi suppenevalla Newton-Raphsonin menetelmällä. Oleellisesti Newtonin menetelmä perustuu derivaatan soveltamiseen, jolloin tangentin kulmakertoimen likiarvo antama tarkennus kiihdyttää iteraation suppenemisnopeutta huomattavasti.

Intuiivista representaatiota tangentin ja x-akselin leikkauspisteenä täsmällisemmässä tarkastelussa Newtonin menetelmä on jo matemaattisesti haastavampi. Näin ollen opinnäytetyössä syvennyttään käsittelemään Newtonin menetelmää laajemmin ja syvällisemmin. Näin käydään lävitse menetelmän teoreettista ja matemaattista taustaa, ja perustellaan menetelmä lukiokurseja tarkemmin. Neliöityvä suppenemisnopeus perustellaan Aitkenin menetelmän kautta edeten. Aitkenin menetelmä toimii myös itsenäisenä menetelmänä kiihdyttää muilla yhtälönratkaisumenetelmillä saatujen likiarvojen suppenemistä ja menetelmän käyttö esitellään esimerkkien kanssa.

Pääaiheenaan, mihin kaikki muu sisältö kytkeytyy, tutkielma käsittelee juuri Newton-Raphsonin menetelmää. Oheiset neljä eleganttia yhtälöä kuvaavat tätä huipentumaa ja näihin kaavoihin tiivistyy pro gradu -tutkielman oleellisin sisältö.

$$\begin{array}{ll} f(x) = 0 & \phi(x) = x \\ f'(x) \neq 0 & \phi'(\alpha) = 0 \end{array}$$

Yhtälöt kuvaavat kauniisti Newtonin menetelmän ominaisuuksia. Aina alkuperäisen funktion nollakohtayhtälöstä  $f(x) = 0$  ja iteraattifunktion iterointiyhtälöstä  $\phi(x) = x$  edeten vaatimukseen välttää vaakasurat derivaatat ja päätyen menetelmän tehokkaan neliöityvän suppenemisnopeuden selittävään vaatimukseen  $\phi'(\alpha) = 0$ .

Newtonin menetelmän matemaattisemman puolen läpikäymisen jälkeen palataan pragmatiikkaan ja pohditaan Newtonin menetelmän vaihtoehtoja, jos derivaatan arvoa ei helposti kyetä laskemaan tai derivaatan muodostaminen on liian vaikeaa tai epätarkkaa. Tähän Whittakerin menetelmä antaa mielenkiintoisen yhteyden yksinkertaisen kiintopiste- ja Newtonin menetelmän välille. Vaikka jänne- ja sekanttimenetelmät ovat menetelminä itsenäisesti konstruoitavat ja ne omaavat omat vahvat historialliset taustansa jo ajalta ennen differentiaalilaskentaa, käsitellään näitä menetelmiä matemaattisesti suppeammin enemmänkin Newtonin menetelmän käytännöllisinä ja lähes yhtä tehokkaasti suppenevina variaatioina.

Lähtö- ja maalijoukoltaan tutkielmassa rajaudutaan käsittelemään epälineaaristen, yksiulotteisten skalaarifunktioiden  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nollakohtien numeerista ratkaisemista. Työssä esitetyt periaatteet usein yleistyvät melko suoraviivaisesti sekä kompleksilukuavaruuteen että useampiulotteisten funktioiden yhtälöiden sekä yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Tarkemmin näistä aiheista, katso esimerkiksi [22, luku 5].

#### 1.4. Kolme didaktista havaintoa

Pedagogiselta näkökulmalta tehdään yhtälönratkaisumenetelmien oppikirjoista ja opetustavasta kolme keskeistä havaintoa. Ensinnäkin käytetään tässä opinnäytetyössä johdonmukaisesti ”virhe”-termin sijaan neutraalia ”poikkeama”-ilmaisua. Terminvaihdokselle on tärkeä käsitteellinen perustelunsa, sillä juuri numeerisiin menetelmiin sisältyy aina epävarmuutta ja ”virhettä”, vaikka laskuissa ja ajatusrakennelmissa ei ole tehty mitään väärää. Lisäksi lopulta mikä vain likiratkaisu tai tietokoneella esitetty liukuluku on käytännössä enemmän tai vähemmän ”virheellinen”. Numeerisissa menetelmissä ei päästä reaali maailman epätäydellisyyttä pakoon.

Toisekseen alkuperäinen funktio ja iterointiyhtälössä työvälineenä käytettävä iteraatifunktio menevät osin limittäin. Funktioiden välille muodostuu tärkeä yhteys kaavojen  $f(x) = 0$  ja  $x = \phi(x)$  kautta. Silti kyseiset funktiot ovat oleellisesti eri funktiot ja niiden rooli osana yhtälönratkaisumenetelmää on eri. Siksi näistä funktioista käytetään johdonmukaisesti eri merkintöjä  $f$  ja  $\phi$ . Yhtälönratkaisussa etsitään funktion  $f$  nollakohtia, mutta iteroidessa tähän käytetään työvälinefunktiota  $\phi$ .

Kolmas havainto liittyy metatasolla siihen, kuinka yhtälönratkaisu menetelmänä etenee ja tämän prosessin havainnollistamiseen. Usein oppimateriaaleissa yhtälönratkaisutilannetta havainnollistavasta grafiikasta voidaan huomata suoraan, missä kohtaa nollakohta suurinpiirtein sijaitsee. Siten juonipaljastuksena loppuratkaisu nähdään jo tarinan alussa. Näin juuren sijainti sekä suppeneeko vai hajaantuuko menetelmä on intuitiivisesti selvää suoraan graafisen havainnollistuksen perusteella. Kuitenkaan yhtälönratkaisumenetelmää numeerisesti soveltaessa tämä yleisnäkyvä ei ole intuitiivisesti tai muutenkaan yhtä suoraviivaisesti selvä. Tietokone ”tietää” vain yksittäiset pisteet ja likiratkaisut, ja toimii täysin niiden ja menetelmän antamien toimintaohjeiden pohjalta. Alkuarvon ja laskettujen likiarvopisteiden ulkopuolella menetelmä on ”sokko”. Menetelmä tai sitä käyttävä tietokone ei ”näe” kokonaisuutta. Grafiikka hienosti selventää menetelmän toimintaa oppijalle, mutta menetelmä ei ”tulkitse” tilannetta yhtä kokonaisvaltaisesti kuin ihmismieli.

### 1.5. Yleisesimerkki neliöjuuren arvon numeerisesta määrittämisestä

Menetelmäkohtaisten esimerkkien lisäksi matemaattisen käsittelyn ohella kaikkien yhtälönratkaisumenetelmien mukana kuljetetaan yleisesimerkkiä. Näin tähän esimerkkiin sovelletaan kaikkia opinnäytetyössä käsiteltäviä yhtälönratkaisumenetelmiä ja havainnollistetaan menetelmän käyttöä ja toimivuutta. Yleisesimerkkinä halutaan laskea neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiarvo yhdeksän desimaalin tarkkuudella. Tällöin tavoiteltu tarkkuus on

$$\delta = 0,0000000005 = 5,00 \cdot 10^{-10}$$

Yleisesimerkin ongelma voidaan myös muokata yhtälöksi, jolloin ratkaistaan yhtälöä  $x^2 = 25$  eli haetaan nollakohtaa funktiolle

$$f(x) = x^2 - 25, \quad \text{missä } x > 0$$

Lukija voi pohtia, mikä on yllä esitetyn neliöjuuren tarkka arvo. Esimerkin neliöjuurelle on löydettävissä algebrallisella päättelyllä ilman numeerisia menetelmiä kokonaislukuratkaisu, toisin kuin esimerkiksi irrationaalisille  $\sqrt{2}$  ja  $\sqrt{3}$ . Tällä tietoisella valinnalla ottaa esimerkiksi sangen yksinkertainen yhtälö ja ”helppo” juuri halutaan lukijalle olevan mielekästä seurata, kuinka likiratkaisut  $\{x_n\}$  lähenevät kohti neliöjuuren todellista arvoa. Tällöin lukijan on intuitiivisesti mahdollista seurata menetelmän etenemistä, arvioida suppenemisnopeutta sekä tarkastella likiratkaisun  $x_n$  tarkkuutta.

### 1.6. Käytetyistä lähteistä

Aiemmin mainittujen pedagogisten havaintojen lisäksi ovat opinnäytetyön lukuisat numeeriset esimerkit ja kuvat pääosin kirjoittajan omaa tuotosta. Matemaattisella puolella päälähteinä on käytetty Peter Henricin teosta Elements of numerical analysis [10, luku 4], Eugene Isaacsonin ja Herbert Bishop Kellerin kirjaa Analysis of numerical methods [11, luku 3] sekä Josef Stoerin ja Roland Bulirschin teosta Introduction to Numerical Analysis [22, luku 5]. Aiheen matemaattista puolta käsitellessä ei näihin kolmeen päälähteeseen enää varsinaisissa luvuissa tai tekstikappaleissa matemaattisen sisällön osalta viitata erikseen, ellei tähän ole erityistä tarvetta, kuten esimerkiksi yhtälönratkaisumenetelmien empiiriseen ja käytännöllisesti havaittuun toimivuuteen viitattaessa. Jos päälähteiden lisäksi on käytetty kappale- ja lukukohtaisia lähteitä, mainitaan nämä lähteet kyseisen kappaleen tai luvun yhteydessä.

Lisälähteinä on käytetty muun muassa Richard Courantin ja Fritz Johnin analyysin perusteesta Introduction to Calculus and Analysis Volume I [2, luku 6] sekä Ari Lehtosen Matematiikan laskennallisia menetelmiä -yliopistokurssin luentomonistetta ”Yhtälöiden ratkaisemisesta” [18]. Käytännön sovelluksiin on pohjaa haettu Juha Haatajan ynnä muiden tekijöiden teoksesta Numeeriset menetelmät käytännössä [5, luku 6]. Kuinka lukio-opetuksessa käytännössä numeerisia yhtälönratkaisumenetelmiä käsitellään on virallisen Lukion opetussuunnitelman perusteiden [19] lisäksi otettu käytännöllinen lähestymistapa tutkimalla kuutta lukion numeerisen matematiikan MAA12-kurssin oppikirjaa sekä yhtä opettajan opasta [6], [7], [8], [9], [12], [13] ja [14].



## Merkinnöistä

Ellei toisin mainita, käytetään tässä esitettyjä merkintöjä läpi koko opinnäytetyön. Siten näihin merkintöihin on helppoa palata tarkistamaan, mitä milläkin merkinnällä tarkalleen tarkoitetaan.

$n \in \mathbb{N}$  on järjestysluku.  $n = 0, 1, 2, \dots$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$f(x)$  on alkuperäinen funktio, jonka nollakohta halutaan ratkaista.

Luku  $\alpha$  on funktion  $f$  nollakohta eli yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisu, kun  $x = \alpha$ .

Funktiolla voi olla myös useampi nollakohta  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

Luku  $x_0$  on alkuarvo, lähtö- tai alkuarvaus, joka on saatu valistuneesti arvaamalla, ratkaistavan funktion matemaattisella analyysillä tai mallinnettavan tosimaailman ongelman tarkastelulla.

$x_n$  on  $n$ . rekursiokierroksen nollakohdan likiarvo eli *likiratkaisu*, nollakohdan toistaiseksi paras approksimaatio tosiratkaisusta  $\alpha$ .

Likiratkaisu  $x_n$  tarkoittaa likimääräistä funktion juuren arvoa, kun taas *tosiratkaisu*  $\alpha$  tarkoittaa nollakohdan täsmällistä ratkaisua. Esimerkiksi tosiratkaisu  $\alpha = \sqrt{2}$  ja likiratkaisu  $x_n = 1,41421$ .

Likiratkaisujono  $\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  on laskettujen likiratkaisuiden jono, joka sopivissa olosuhteissa suppenee kohti tosiratkaisua  $\alpha$ . Esimerkiksi  $\{2; 1,5; 1,41; 1,41421\}$

$a, b \in \mathbb{R}$  ovat välin alku- ja loppupiste, joille  $a < b$ .

Väli  $I := [a, b]$  viittaa määrittelyväliin, jolla nollakohdan  $\alpha$  tiedetään olevan.

Väli  $I_n$  viittaa  $n$ . rekursiokierroksen tarkentuneeseen tarkasteluväliin, jonka sisäpuolella nollakohdan  $\alpha$  tiedetään olevan. Välin pituus on  $|I_n|$ .

Väli  $\hat{I} := ]a, b[$  on avoin määrittelyväli.

Väli  $I_r := [x_0 - r, x_0 + r]$  on välin vaihtoehtoinen määrittelytapa, jonkin sopivan  $r \in \mathbb{R}_+$  avulla, missä alkuarvaus  $x_0$  toimii välin lähtökohtana.

Iteraatio tai iteraatiokierros on yksi rekursiokierroksen askel tai toisto. Järjestysluku  $n$  kertoo monennestako rekursiosta on kyse. Iteraatiolla viitataan erityisesti iteratiivisten menetelmien toistoon, kun taas rekursio-termiä käytetään yleisesti yhtälönratkaisumenetelmän toistosta.

Yhden iteraatioaskeleen lisäksi iteraatio tarkoittaa myös iteraatiota prosessina. Esimerkiksi iteraation suppenemisella tarkoitetaan juuri iteraatioprosessin kokonaisuudessaan tuottaman likiratkaisujonon  $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$  suppenemistä.

$\phi(x)$  on iteraattifunktio. Iteraattifunktio on työ- tai apuvälinefunktio, jota käytetään likiratkaisua  $x_n$  seuraavan likiratkaisun  $x_{n+1}$  arvon tarkkuuden parantamiseksi.

Iterointiyhtälö  $x = \phi(x)$  sekä sen rekursiivinen muotoilu  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  kertovat, kuinka iteraattifunktiota menetelmällisesti käytetään iteroitaessa. Lisäksi  $\phi(x)$  on jollain tapaa riippuvainen ja määritelty alkuperäisen funktion  $f(x)$  avulla, vaikkakaan iteraattifunktio  $\phi$  ei ole yksikäsitteinen. Eri iterointimenetelmillä on eri iteraattifunktio.

Iteratiivisissa menetelmissä tosiratkaisu  $\alpha$  on iteraattifunktion  $\phi$  kiintopiste. Tällöin iteraattifunktio  $\phi(x)$  toteuttaa yhtälön  $x = \phi(x)$ , kun  $x = \alpha$ .

$g(x)$  on jokin tarkemmin määrittelemätön funktio. Merkintää  $g$  käytetään funktion tunnuksena, kun halutaan korostaa, että kyse on yleisesti mistä vain funktiosta ilman tiettyä käyttötarkoitusta, toisin kuin esimerkiksi merkinnöillä  $f$  ja  $\phi$ .

Lipschitz-jatkuvuutta tutkitaan iteraattifunktiolla  $\phi$ .

$L$  viittaa yleiseen Lipschitz-vakioon, jolle  $L > 0$ .

$\lambda$  viittaa iteratiivisten menetelmien yhteydessä käytettävään kutistavaan Lipschitz-vakioon, jolle  $0 < \lambda < 1$ .

$\varepsilon_n$  on  $n$ :nnen iteraation poikkeama eli virhe tosiratkaisusta  $\alpha$ , jolloin  $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ . Poikkeaman suuruus on sen itseisarvo  $|\varepsilon_n|$ .

$\hat{\varepsilon}_n$  on pystypoikkeama, joka tarkoittaa likiratkaisun arvon  $f(x_n)$  eroavaisuutta nolasta. Toisin sanoen  $\hat{\varepsilon}_n = f(x_n) - 0$ , jonka suuruus on sen itseisarvo  $|\hat{\varepsilon}_n| = |f(x_n)|$ .

$\delta$  on likiratkaisun tavoiteltu tarkkuus, jolle  $\delta \in \mathbb{R}_+$ . Tällöin halutaan, että poikkeamalle on enintään  $|\varepsilon_n| \leq \delta$ . Nyt tarkkuusvaatimusta tarkastellaan x-akselin suuntaisesti sivuttaissuunnassa.

$\hat{\delta}$  on likiratkaisun funktion  $f$  arvon tavoiteltu enimmäispystypoikkeama nolasta. Toisin sanoen halutaan, että  $|\hat{\varepsilon}_n| \leq \hat{\delta}$ . Nyt tarkastellaan poikkeamaa nolasta y-akselin suuntaisesti pystysuunnassa.

Luku  $q$  on suppenemisnopeuden aste eli  $q$ -aste, joka kuvaa yhtälönratkaisumenetelmän tehokkuutta matemaattisessa mielessä. Tätä yhteyttä kuvaa raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^q}$ , jolloin peräkkäisten likiratkaisuiden poikkeamat ovat oleellisesti samaa suuruusluokkaa eli  $|\varepsilon_{n+1}| \cong \mu |\varepsilon_n|^q$ , jollain  $\mu \in [0, 1]$ .

Merkintä  $x_n \approx \alpha$  tarkoittaa likiarvoa, jolloin ” $x_n$  on likimäärin  $\alpha$ ”.

Merkintä  $x_n \cong \alpha$  tarkoittaa, että ” $x_n$  ja  $\alpha$  ovat oleellisesti samat”.

Tällöin  $c_1 x_n \leq \alpha \leq c_2 x_n$ , joillain sopivilla luvuilla  $0 < c_1 < c_2$ . Luvut  $x_n$  ja  $\alpha$  ovat siis oleellisesti suuruusluokaltaan samat.



## LUKU 2

### Esitietoja

Tässä luvussa kerrataan lyhyesti tunnetuksi oletettuja asioita, jotka ovat pohjana myöhemmille päättelyille. Lauseiden todistukset ja tarkemmin aiheista voi lukea esimerkiksi [2, luvut 2 ja 3], [15, luvut 4 ja 5] sekä [16, luku 2].

#### 2.1. Monotonisuus

MÄÄRITELMÄ 2.1. Funktio  $g$  on *monotoninen*, jos siitä, että  $x_1 < x_2$  seuraa

$$g(x_1) \leq g(x_2) \quad \text{tai} \quad g(x_1) \geq g(x_2)$$

Funktio  $g$  on *aidosti monotoninen*, jos ehdosta  $x_1 < x_2$  seuraavat epäyhtälöt ovat aitoja eli

$$g(x_1) < g(x_2) \quad \text{tai} \quad g(x_1) > g(x_2)$$

Monotonisuus tarkoittaa, että funktion arvot joko kasvavat tai vähenevät. Aito monotonisuus tarkoittaa, että funktio on kasvava tai vähenevä, ja funktio saa tietyn arvon  $g(\hat{x})$  tasan yhdessä pisteessä  $\hat{x}$ . Siten aidosti monotoninen funktio on myös *injektio*.

#### 2.2. Funktion jatkuvuus

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon funktio  $g$  määritelty pisteen  $a \in \mathbb{R}$  eräässä ympäristössä. Funktio  $g$  on *jatkuva pisteessä  $a$* , jos  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  on olemassa ja  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ . Toisin sanoen, kaikille  $\epsilon > 0$  on olemassa sellainen  $\delta_\epsilon > 0$ , että

$$|x - a| < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(a)| < \epsilon$$

Funktion jatkuvuus tarkoittaa, että pieni muutos lähtöarvoissa saa aikaan vain pienen muutoksen funktion kuva-arvoissa. Jatkuvuus siis takaa, että funktion kuvaaja on yhtenäinen eikä siinä ole katkoksia. Intuitiivisesti funktion arvot eivät voi muuttua tai ”hyppiä” hallitsemattomasti. Esimerkiksi paloittain määritellyn jatkuvan funktion rajakohdissa ei voi olla epäjatkuvuushyppyä tai funktion arvot eivät saa karata äärettömään.

#### 2.3. Bolzanon lause

LAUSE 2.3 (Jatkuvien funktioiden väliarvolause). *Olkoon funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva suljetulla välillä  $I := [a, b]$  ja  $f(a) \leq c \leq f(b)$ . Tällöin on olemassa  $x_0 \in [a, b]$  siten, että  $f(x_0) = c$ .*

Jatkuvien funktioiden väliarvolause (Intermediate value theorem eli ”välissä oleva arvo” -lause) tarkoittaa, että jos välillä  $I$  funktio  $f$  saa arvon  $c$  vähintään yhdessä pisteessä.

Bolzanon lause (Bolzano’s theorem) on jatkuvien funktioiden väliarvolauseen erityistapaus, missä  $c = 0$ . Erityisesti yhtälönratkaisumenetelmien yhteydessä Bolzanon lause tarkoittaa, että välin  $I$  päätepisteissä funktio  $f$  saa erimerkkiset arvot eli

$$f(a)f(b) < 0,$$

on välillä  $I$  oltava vähintään yksi funktion nollakohta.

## 2.4. Funktion derivoituvuus

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon  $g: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Funktio  $g$  on *derivoituva* pisteessä  $x \in ]a, b[$  ja derivaatta pisteessä  $x$  on  $g'(x)$ , jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =: g'(x)$$

MÄÄRITELMÄ 2.5. Funktio  $g: \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}$  on derivoituva avoimella välillä  $\hat{I}$ , jos  $g$  on derivoituva jokaisessa pisteessä  $x \in \hat{I}$ .

Lisäksi jos derivaatta  $g'$  on jatkuva, on funktio  $g$  *jatkuvasti derivoituva* välillä  $\hat{I}$ .

Geometrisesti funktion derivaatan arvo  $g'(x)$  on sama kuin funktion  $g$  kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimen arvo pisteessä  $(x, g(x))$ . Derivaatan arvo siis kertoo, kuinka nopeasti funktion arvot kasvavat tai vähenevät tuossa pisteessä. Derivoituvuus takaa, että funktion kuvaaja on sileä eikä siinä ole epäjatkuvuuspeisteitä tai ”teräviä kulmia”.

## 2.5. Differentiaalilaskennan Väliarvolause

LAUSE 2.6. Oletetaan, että funktio  $g$  on jatkuva suljetulla välillä  $[a, b]$ , minkä lisäksi  $g$  on derivoituva avoimella välillä  $]a, b[$ . Tällöin on olemassa ainakin yksi piste  $\xi \in ]a, b[$ , jolle

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

eli

$$g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a)$$

Geometrisesti (differentiaalilaskennan) Väliarvolause (Mean value theorem) tarkoittaa, että funktion  $g$  kuvaajalle asetettu tangentti on pisteiden  $(a, g(a))$  ja  $(b, g(b))$  kautta kulkevan sekantin suuntainen ainakin yhdessä pisteessä välillä  $[a, b]$ .

## 2.6. Cauchy-jono

MÄÄRITELMÄ 2.7. Jono  $x_n$  on *Cauchyn jono*, jos jokaista  $\epsilon > 0$  kohti on olemassa indeksi  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , jolle kaikilla  $m, n > n_\epsilon$  pätee

$$|x_m - x_n| < \epsilon$$

Cauchyn jono tarkoittaa sitä, että tietyn järjestysluvun  $n_\epsilon$  jälkeen lukujonon termit kasautuvat mielivaltaisen lähelle toisiaan. Oleellisesti siis lukujonon häntä saadaan puristettua halutun pienelle välille.



## LUKU 3

### Poikkeama

Mitään numeerista menetelmää ei käytännössä voida jatkaa loputtomasti. Rajoittavaksi tekijäksi muodostuu laskentavälineen muistikapasiteetti, liukuluvun ilmaisukyky tai aika. Näin ollen rekursio täytyy lopettaa tietyn  $n$ . toiston jälkeen. Tuota likiratkaisun tarkkuutta eli likiratkaisun eroa tosiratkaisusta  $\alpha$  kutsutaan *poikkeamaksi* ja merkitään kreikkalaisella kirjaimella  $\varepsilon$  (*epsilon*).

#### 3.1. Poikkeama tosiratkaisusta

MÄÄRITELMÄ 3.1 (Tosiratkaisu). Luku  $\alpha \in \mathbb{R}$  on yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisu, jos

$$f(\alpha) = 0$$

Ratkaisua  $\alpha$  kutsutaan myös funktion  $f$  juureksi, nollakohdaksi tai yhtälön  $f(x) = 0$  tosiratkaisuksi erotuksena likiratkaisuista  $\{x_n\}$ . Ratkaisua merkitään kreikkalaisella kirjaimella  $\alpha$  (*alfa* tai *alpha*).

MÄÄRITELMÄ 3.2 (Poikkeama). *Poikkeama*  $\varepsilon_n$  on  $n$ . rekursiokierroksen likiratkaisun  $x_n$  ero tosiratkaisusta  $\alpha$ . Toisin sanoen

$$\varepsilon_n = x_n - \alpha$$

HUOMAUTUS 3.3. Yleensä kiinnostavinta on juuri poikkeaman suuruus. Tämän vuoksi poikkeama voitaisiin määritellä myös etäisyytenä  $\varepsilon_n = |x_n - \alpha|$ , jolloin  $\varepsilon_n \geq 0$ .

HUOMIOITA 3.4.

- (1) Tarkoituksellisesti halutaan käyttää nimitystä ”*poikkeama*”<sup>1</sup> usein vastaavana synonyymina käytetyn ”*virhe*”<sup>2</sup>-sanon sijaan. Termissä ”*virhe*” on mukana kielteinen sävy, että jotain olisi tehty väärin ja erheellisesti, tai että olisi tapahtunut laskuvirhe, kun kyseessä on vain *rekursioon kuuluva* poikkeama tosiratkaisun ja likiratkaisun välillä. Täten käytetään neutraalimpaa ilmaisua ”*poikkeama*”.

---

<sup>1</sup>poikkeama – määrä jonka jokin poikkeaa jostakin, varsinaisesta oikeasta tai normaaliarvosta

<sup>2</sup>virhe – hyväksyttävästä tai normaalista poikkeava seikka, vika. 1. erheellinen, väärä, viallinen suoritus, erehdys, hairahdus, lapsus; sellaisen tulos. Pieni, paha, vähäinen virhe. Arviointi-, muistivirhe. Mittausvirhe. Kirjoitus-, käänös-, ääntämisvirhe. Virkavirhe. Tehdä virhe, virheitä. 2. vajavuutta, vajaalaatuisuutta, -kuntoisuutta tms. aiheuttava seikka, vika. (MOT Kielitoimiston sanakirja, 2017, Kotimaisten kielten keskus ja Kielikone Oy, <https://mot.kielikone.fi/mot/jyu/>)

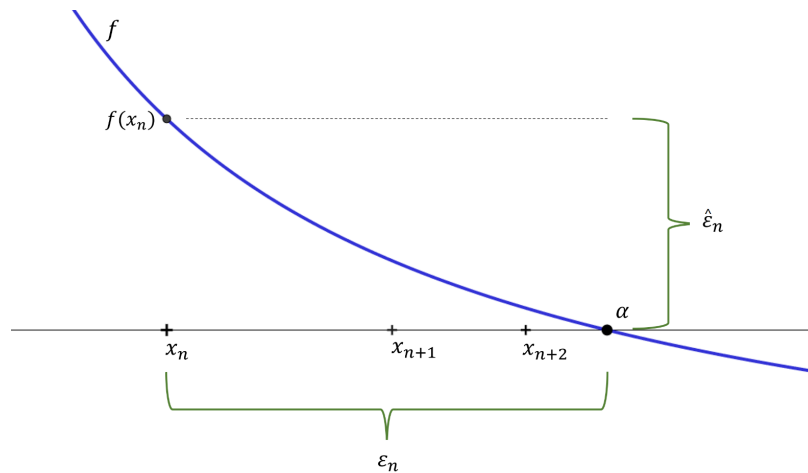
- (2) Termin ”poikkeama” käyttö on myös pedagogisesti mielekästä, koska sopivissa olosuhteissa rekursiotoistojen edetessä poikkeama  $\varepsilon_n$  pienenee. Toisaalta täsmälleen tosiratkaisuun  $\alpha$  ei päästä millään äärellisellä määrällä rekursioita kuin sattumalta, vaikka valittu yhtälönratkaisumenetelmä ja alkuarvaus olisivat tehty kuinka mallikkaasti tahansa. Siten likiratkaisuissa  $\{x_n\}$  on käytännössä aina mukana enemmän tai vähemmän poikkeamaa eli ”virhettä”. Näin tapahtuu, vaikka ei ole tehty mitään väärin tai edes tapahtunut lasku- tai ajatteluvirheitä. Siten ”poikkeama” terminä kuvaa paremmin tilannetta.

HUOMAUTUS 3.5. Toisaalta poikkeama  $\varepsilon$  voidaan mieltää myös korjausterminä. Toisin sanoen likiratkaisusta  $x_n$  ”puuttuu” jonkin tuntemattoman poikkeaman  $\varepsilon_n$  verran, että likiratkaisu  $x_n$  osuisi täsmälleen tosiratkaisuun  $\alpha$ . Siten poikkeama eli korjaustermi  $\varepsilon_n$  kertoo, kuinka paljon likiarvo  $x_n$  eroaa tosiarvosta  $\alpha$ . Siis

$$(3.1) \quad \alpha = x_n + \varepsilon_n$$

Käytännön sovellutuksissa ei tosiratkaisun  $\alpha$  tarkkaa arvoa numeerisessa yhtälönratkaisussa koskaan tarkasti tiedetä. Siten tarkkaa likiratkaisun poikkeaman suuruutta ei käytännössä kyetä numeerisilla menetelmillä määrittämään ja on turvaututtavan epäyhtälöiden määräämiin enimmäisrajoihin. Siten tosiratkaisun  $\alpha$  tarkka arvo jää käytännössä tuntemattomaksi. Tästä syystä poikkeaman  $\varepsilon$  suuruutta ja likiratkaisun  $x_n$  tarkkuutta voidaan arvioida vain a-prioristi saatavissa olevan tiedon perusteella.

Siten numeeriset menetelmät poikkeavat merkittävästi muista lukiokursseista, joissa täsmällinen ja symbolinen ratkaisu on aina olemassa. Numeeriseen matematiikkaan liittyy aina poikkeamarajoja, epävarmuutta ja lukujen epätasällisyyttä, jota voidaan kuitenkin hallita ja tehdä matemaattisen varmoja ja perusteltuja päätelmiä.



KUVA 3.1. Poikkeama  $\varepsilon_n$  ja pystypoikkeama  $\hat{\varepsilon}_n$ .

MÄÄRITELMÄ 3.6. *Pystypoikkeamalla*  $\hat{\varepsilon}$  tarkoitetaan likiratkaisun arvon  $f(x_n)$  eroavaisuutta nolasta

$$\hat{\varepsilon}_n = f(x_n) - 0$$

Käytännössä pystypoikkeama on likiratkaisu  $x_n$  sijoitettuna alkuperäiseen funktioon, toisin sanoen  $\hat{\varepsilon}_n = f(x_n)$ . Pystypoikkeama kuvaa likiratkaisun funktion arvon  $f(x_n)$  eroa x-akselista. Usein ollaan kiinnostuneita pystypoikkeaman suuruudesta

$$|\hat{\varepsilon}_n| = |f(x_n)|$$

### 3.2. Alkuarvo

Yleensä yhtälön ratkaisulle oleellista on hyvä alkuarvo  $x_0$ . Mitä valistuneempi alkuarvaus on, sitä tehokkaammin ja luotettavammin menetelmä suppenee kohti nollakohtaa. Pahimmillaan huono lähtöarvo saa likiratkaisujonon hajaantumaan. Ennakkoon nollakohdalle saatetaan tietää hyvä likiarvo, jonka läheisyydessä ratkaisu sijaitsee, tai väli, jolta tosiratkaisu  $\alpha$  löytyy. Yleistä metodia, kuinka löytää hyvä alkuarvo ei kuitenkaan ole löydetty. Yleisesti matemaattisen mallin ja tosimaailman ilmiön teoreettisesta tai fysikaalisesta tuntemisesta on usein huomattavasti apua hyvän alkuarvauksen asettamisessa. Ilmiöön perehtyneellä fyysikolla, insinöörillä tai kemistillä voi olla jo valmiiksi hyvä lähtöarvo, joka on riittävän lähellä ratkaisua.

Hyvä alkuarvaus voidaan myös saada tilanteen matemaattisella ja analyttisellä tarkastelulla, tai hankkiutumalla riittävän lähelle haluttua nollakohtaa muilla, varmoilla yhtälönratkaisumenetelmillä. Toisinaan myös graafisen kuvaajan tulkinnalla saadaan määritettyä riittävän tarkka alkuarvo. Jos lukujen suuruusluokat ja reaali maailman ongelman kannalta relevantti väli voidaan asettaa, tietokoneelta ei ole useinkaan tämän jälkeen kovinkaan ongelmallista ”graafisesti” tutkia kuvaajan käyttäytymistä ja summittaisesti selvittää nollakohtien paikat. Tämän jälkeen nollakohdan tai nollakohlien tarkat sijainnit voidaan rajata sopivalla, varmasti suppenevalla yhtälönratkaisumenetelmällä. Jos ratkaistavalla välillä on useita nollakohtia, kannattaa väli jakaa osaväleiksi, jolla sijaitsee vain yksi nollakohta. [5, luvut 2 ja 6] [11, s. 85-86]

### 3.3. Likiratkaisun tavoiteltu tarkkuus

Likiratkaisun  $x_n$  tavoiteltua tarkkuutta eli *tarkkuusvaatimusta* merkitään kreikkalaisella kirjaimella  $\delta$  (*delta*). Halutaan siis, että poikkeamalle on enintään  $|\varepsilon_n| \leq \delta$ . Toisin sanoen  $n$ . juuren likiarvo  $x_n$  poikkeaa tosiratkaisusta  $\alpha$  enintään  $\delta$  verran eli

$$|x_n - \alpha| \leq \delta, \quad \text{missä } \delta > 0$$

Tällöin poikkeaman suuruutta tarkastellaan x-akselilla sivuttaissuuntaisesti. Tämä likiratkaisun tavoitellun tarkkuuden tarkastelu on toisinaan hieman teoreettinen ja epäyhtälöiden avulla arvioitu, sillä tosiratkaisun  $\alpha$  tarkka arvo on tuntematon.

Tavoitellun tarkkuuden  $\delta$  suuruus saadaan kysymyksenasettelussa. Tällöin kerrotaan kuinka tarkkaa yhtälön likiratkaisua haetaan, muun muassa tosimaailman sovelluskohteen perusteella. Usein käytännön sovellutuksissa riittää, että liki- ja tosiratkaisu ovat likimain samat tietyllä marginaalilla. Taulukkoon 3.1 on kirjattu muutamia tarkkuusvaatimukselleen riittävän tarkkoja neliöjuuren  $\sqrt{2}$  likiarvoja.

Likiarvo	Tarkkuusehto $\delta$	Poikkeama $\varepsilon$
1,5	0,3	0,08578643
1,4	0,1	-0,0142135623731
1,4142	0,0005	-0,0000135623731
1,414213562374	0,00053	0,000000000000904832
1,414213562373	0,00053	-0,000000000000089928
1,414213562373	$0,5 \cdot 10^{-12}$	$-0,0899 \cdot 10^{-12}$

TAULUKKO 3.1. Tarkkuusehtonsa täytettäviä neliöjuuren  $\sqrt{2}$  likiarvoja.

Poikkeaman  $\varepsilon_n$  suuruutta on toisinaan hankala suoraan määritellä, koska tosiratkaissu  $\alpha$  on a-prioristi tuntematon. Täten yleispätevämpi tapa on usein tarkastella mikä on likiratkaisun pystypoikkeaman  $\hat{\varepsilon}_n$  suuruus eli kuinka paljon  $f(x_n)$  poikkeaa nollasta. Jos pystypoikkeama  $\hat{\varepsilon}_n$  on oleellisesti likimain nolla eli likiratkaisulle  $x_n$  pätee  $f(x_n) \approx 0$ , on kyseessä yleensä nollakohdan likiratkaisu. Tätä pystysuuntaista tarkkuusehtoa merkitään  $\hat{\delta}$  ja se tarkoittaa *likiratkaisun arvon* tavoiteltua enimmäispoikkeamaa nollasta. Nyt siis verrataan likiratkaisun arvoa  $f(x_n)$  nollassa eli x-akseliin pystysuunnassa ja halutaan, että

$$\hat{\varepsilon}_n = |f(x_n) - 0| \leq \hat{\delta}$$

Tämä likiratkaisun tarkkuuden eli pystypoikkeaman  $\hat{\varepsilon}_n$  tarkastelu on usein käytännöllisempi ja yksinkertaisempi lähestymistapa, sillä likiratkaisun funktion arvon  $f(x_n)$  eroavaisuus nollassa on helppo tarkastaa yksinkertaisesti sijoittamalla muuttujan  $x_n$  arvo alkuperäiseen funktioon  $f$ .

Varsinkin tietoteknisissä sovellutuksissa tavoiteltu tarkkuus  $\delta$  tai  $\hat{\delta}$  on tärkeä silmukan lopetusehto. Tässä tutkielmassa kuitenkin keskitytään yhtälönratkaisumenetelmien matemaattiseen puoleen. Tietoteknisissä toteutuksissa tulee algoritmiin sisällyttää menetelmän lisäksi muun muassa likiarvon tarkkuustarkastelu, silmukan lopetusehto sekä poikkeuksien hallinta. Tarkemmin poikkeaman arvioinnista sekä liukuluvuista, katso esimerkiksi [22, luku 1]. Liukuluvuista ja liukuluvuilla laskemisesta ilmenevistä laskentavirheistä, katso esimerkiksi [10, luvut 15 ja 16], [5, liite B] tai [20, luku 1].

### 3.4. Yhtälön numeerisen ratkaisemisen jälkeen

Kuten yhtälönratkaisun alussa on oltava tarkkana alkuarvoa  $x_0$  asetettaessa, myös lopussa on tarkasteltava, missä määrin laskettu likiratkaisu on sovelluskohteen kannalta käyttökelpoinen ja looginen. Esimerkiksi neliöjuuren  $\sqrt{2}$  likiarvoksi  $\sqrt{2} \approx -1,4142$  ei ole mielekäs. Suomen puuston vuotuiseksi pituuskasvun keskiarvoksi 150 metriä on sangan suuri luku. Vaikka tulos olisikin matemaattisessa mielessä looginen ja oikea, ei likiratkaisu pahimmillaan ole käytännön sovellutuksissa mielekäs tai käyttökelpoinen. Näin ollen on pidettävä mielessä ja tarkasteltava, mihin numeerisen menetelmän vastauksia sovelletaan ja ovatko likiratkaisut edelleen siinä ympäristössä käyttökelpoisia. Tarkemmin matemaattisesta mallintamisesta ja algoritmien tietoteknisestä toteutuksesta, katso esimerkiksi [5, luku 2].



## Suppenemisnopeus ja yhtälönratkaisumenetelmän tehokkuus

Ovatko eri yhtälönratkaisumenetelmät yhtä tehokkaita? Suppenevatko toiset menetelmät nopeammin, jopa kiihtyen, kohti tosiratkaisua  $\alpha$ ? Onko peräkkäisten likiarvojen poikkeamille olemassa raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|}$ ? Jos raja-arvo löytyy, mikä on tuon raja-arvon suuruus ja mitä se kertoo menetelmän suppenemisnopeudesta?

### 4.1. Suppenemisnopeus

Peräkkäisten likiratkaisuiden  $\{x_n, x_{n+1}\}$  poikkeamien absoluuttinen ero on  $|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|$ . Likiratkaisujonon  $\{x_n\}$  suppenemistä voidaan tarkastella myös huomattavasti kiinnostavammalla poikkeamien suhteellisella erolla  $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ . Tällöin erityisen kiinnostavaa on, mitä suhteelle  $\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|}$  tapahtuu isoilla  $n$  sekä varsinkin, kun  $n \rightarrow \infty$ .

Oletetaan, että likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee kohti ratkaisua  $\alpha$ , jolloin poikkeamien suuruus  $|\varepsilon_n|$  pienenee joka rekursiolla. Toisin sanoen  $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ , kun  $n > n_0$ . Oletetaan lisäksi triviaalisti, että mikään likiratkaisu  $x_n$  ei sattumalta osu täsmälleen tosiratkaisuun  $\alpha$ , tällöin myöskään poikkeama  $\varepsilon_n$  ei ole koskaan nolla, kuten myöhemmin muun muassa lauseessa 9.16 osoitetaan. Näin voidaan määritellä luku  $\mu$  raja-arvona

$$(4.1) \quad \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} \in [0, 1]$$

Luku  $\mu$  kuvaa kahden peräkkäisen poikkeaman  $\{\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}\}$  välistä suhdetta. Voidaan-kin puhua suppenemisvakioista  $\mu$ . Vastaavasti voidaan kirjoittaa

$$|\varepsilon_{n+1}| \cong \mu |\varepsilon_n|, \quad \text{kun } n \text{ on suuri}$$

Peräkkäiset poikkeamat eroavat oleellisesti toisistaan nollasta poikkeavan vakion  $\mu$  verran. Suppenemisnopeus on siten aina vakio. Tällaista suppenemistä kutsutaan *lineaariseksi*. Lineaarinen suppenemisnopeus tarkoittaa, että likiratkaisun paikkansapitävien desimaalien lukumäärä on suurinpiirtein lineaarinen funktio muuttujanaan tehtyjen toistojen määrä  $n$ . Kuinka nopeasti lineaarinen suppeneminen konvergoi, vaikuttaa ainoastaan kertoimen  $\mu$  suuruus. Sillä, missä kohtaa suppenemistä ja monennelle  $n$ . rekursioaskeleelle likiratkaisujonossa on edetty, tai likiratkaisun  $x_n$  tai poikkeaman  $\varepsilon_n$  arvon suuruudella, ei ole vaikutusta suppenemisnopeuteen.

## 4.2. Suppenemisaste ja $q$ -luku

Peräkkäisten likiratkaisuiden poikkeamien suhdetta suurusluokaltaan kuvaa kaava

$$|\varepsilon_{n+1}| \cong \mu |\varepsilon_n|^q$$

Tässä luku  $q$  kuvaa suppenemisnopeuden voimakkuutta eli yhtälönratkaisumenetelmän tehokkuutta matemaattisessa mielessä.

**MÄÄRITELMÄ 4.1.** Luku  $q \in \mathbb{R}_+$  on *suppenemisnopeuden aste*, jolle

$$|\varepsilon_{n+1}| \cong \mu |\varepsilon_n|^q, \quad \text{missä } \mu \text{ on jokin vakio}$$

**ESIMERKKI 4.2.** Lineaarisesti suppenevan yhtälönratkaisumenetelmän peräkkäisille poikkeamille

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \mu |\varepsilon_n|$$

Tässä suppenemisen aste  $q = 1$ , jota ei kuitenkaan yleensä merkitä, koska lineaarisessa suppenemisessä konvergointia kuvaavampi on nolasta poikkeava raja-arvo  $\mu$ .

Sama asia voidaan myös kirjoittaa

$$|\varepsilon_{n+1}| \cong \mu |\varepsilon_n|$$

**HUOMIOITA 4.3.**

- (1) Määritelmässä 4.1  $q$ -asteisuus määriteltiin tarkoituksella epäyhtälön avulla, koska  $q$ -aste kertoo kuinka tehokkaasti menetelmä alkuehtojen täytyessä ainakin suppenee.
- (2) Luku  $q$  kuvaa suppenemisnopeutta juuri matemaattisessa mielessä. Jokin matemaattisesti tehoton menetelmä voi olla huomattavasti yksinkertaisempi ohjelmoida ja toteuttaa tietoteknisesti vähemmällä operaatioilla kuin jokin toinen, matemaattisesti tehokkaammin suppeneva menetelmä. Näin ollen yksinkertaisempi menetelmä voi käytännössä tuottaa nopeammin tarkkoja likiarvoja, vaikka toisen menetelmän matemaattista tehokkuutta kuvaava  $q$ -aste olisikin suurempi. Siten  $q$ -aste on toisinaan käytännön sovellusten mielessä toisaalta osin teoreettinen, toisaalta hyvin suuntaa-antava mittari menetelmän suppenemisnopeuden voimakkuudelle. Aiheeseen palataan myöhemmin käytännön esimerkkien muodossa konkreettisten yhtälönratkaisumenetelmien yhteydessä.

## 4.3. Kiihtyvää suppenemistä

Kun suppenemisen aste  $q > 1$ , sanotaan suppeneminen olevan *kiihtyvää*. Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu |\varepsilon_n|^q}{|\varepsilon_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu |\varepsilon_n|^{q-1} = \mu \cdot 0 = 0,$$

sillä  $q - 1 > 0$  sekä riittävän suurilla  $n > n_0$  pätee  $|\varepsilon_n| < 1$  ja  $|\varepsilon_n| \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .

Siten lineaarista suppenemistä voimakkaammin konvergoivassa eli *kiihtyvässä* suppenemisessä peräkkäisten poikkeamien suhteen raja-arvoksi muodostuu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = 0$$

Oikeastaan tällöin vakion  $\mu$  suuruudella ei ole väliä, sillä konvergoinnin määräävämmäksi tekijäksi muodostuu suppenemisen  $q$ -aste. Kun suppenemisaste  $q > 1$ , luvun  $\mu$  vaikutus on häviävän pieni ja merkityksetön. Näin ollen raja-arvoa (4.1) täytyy tasapainottaa luvulla  $q > 1$  siten, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^q} = \mu$$

Tällöin oleellisesti

$$(4.2) \quad |\varepsilon_{n+1}| \cong \mu |\varepsilon_n|^q$$

ja vastaavasti

$$(4.3) \quad |\varepsilon_{n+1}| \leq \mu |\varepsilon_n|^q$$

Kaava (4.2) kertoo, että peräkkäiset poikkeamat ovat oleellisesti samaa suuruusluokkaa, kun poikkeamaa  $|\varepsilon_n|$  korjataan asteen  $q$  potenssilla. Poikkeaman arvo vaikuttaa oleellisesti suppenemisen voimakkuuteen. Täten mitä pitemmällä rekursiossa ollaan edetty ja mitä lähempänä tosiratkaisua  $\alpha$  ollaan, sitä entistäkin voimakkaammin kiihtyvää suppeneminen on. Näin poikkeamat suppenevät geometrisenä lukujonona kiihtyvällä tahdilla. Linearisessa suppenemisessä näin ei tapahdu. Kuinka monennelle rekursiokierrokselle ja lähelle nollakohtaa ollaan edetty, ei ole oleellista vaikutusta suppenemisnopeuteen.

Vastaavasti muotoilu (4.3) kertoo, että alkuoletusten täyttyessä suppenemisen aste on vähintään  $q$ . Täten myös astetta  $q$  voimakkaampi suppeneminen on mahdollista. Siten, kun suppeneminen on lineaarista voimakkaampaa ja  $q > 1$ , riittävän suurilla  $n > n_0$ , jolloin  $|\varepsilon_n| < 1$ , pätee

$$|\varepsilon_{n+1}| \cong \mu |\varepsilon_n|^q \ll \mu |\varepsilon_n|$$

Näin ollen kiihtyvä  $q > 1$  suppeneminen on huomattavasti nopeampaa kuin lineaarinen  $q = 1$  suppeneminen.

**MÄÄRITELMÄ 4.4** ( $q$ -aste ja suppenemisnopeus).

- Jos  $q = 1$  on suppeneminen *lineaarista* (linear convergence).
- Jos  $1 < q < 2$  on suppeneminen *ylilineaarista* (superlinear convergence, suomennetaan toisinaan myös superlineaarisena suppenemisena).
- Jos  $q = 2$  on suppeneminen *neliöityvää* (quadratic convergence, suomennetaan toisinaan myös kvadranttisena tai neliöllisenä suppenemisena).

**HUOMAUTUS 4.5.** Nyt ylilinearisella suppenemisellä tarkoitetaan suppenemisnopeutta, joka on lineaarista  $q = 1$  suppenemistä nopeampaa, kiihtyvää suppenemistä, mutta  $q$ -asteeltaan kuitenkin alle neliöityvän  $q = 2$  suppenemisen.

#### 4.4. Desimaaliesityksen tarkkuustarkastelua

Neliöityvässä suppenemisessä likiarvon  $x_n$  paikkansapitävien merkitsevien desimaalien määrää voidaan arvioida siten, että jos  $n$ . poikkeamalle on voimassa

$$\mu|\varepsilon_n| < 10^{-m},$$

niin sitä seuraavalle poikkeamalle pätee

$$\mu|\varepsilon_{n+1}| < 10^{-2m}$$

Näin on, sillä kun  $\mu \neq 0$  ja  $q = 2$ , niin epäyhtälön (4.3) perusteella

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \mu|\varepsilon_n|^2 < \mu \left( \frac{10^{-m}}{\mu} \right)^2 = \frac{10^{-2m}}{\mu}$$

Tässä  $10^{-2m}$  on poikkeaman enimmäissuuruus ja siten  $2m$  on oleellisesti merkitsevien desimaalien määrä (kymmenjärjestelmässä). Täten paikkansapitävien desimaalien määrää vähintään keskimäärin *kaksinkertaistuu* joka rekursiolla. Neliöityvä konvergointi siis tarkoittaa, että paikkansapitävien desimaalien lukumäärä on suurinpiirtein toiseen potenssiin kasvava funktio, muuttujanaan rekursioiden määrä  $n$ .

#### 4.5. Tehokkuus ja luotettavuus

Myös  $q > 2$  eli neliöityväkin korkeampi  $q$ -aste ja nopeampi suppeneminen on mahdollinen. Siten myöhemmin luvussa 11 esiteltävää Newtonin menetelmää tehokkaammin suppenevia numeerisia yhtälönratkaisumenetelmiä on kehitelty. Tällöin tosin menetelmä suppenee varmasti vain tarkoin rajatuissa olosuhteissa tai erittäin lähellä nollakohtaa. Täten vaikka menetelmä onkin todella tehokas, ei se ole enää yleisesti käyttökelpoinen tai kovinkaan varmasti suppeneva.

Usein käytännön toteutuksissa aikaa menee suppenemisehtojen testaamiseen. Lisäksi vaikka menetelmä olisikin näin tehokas matemaattisessa mielessä, käytännössä yhden rekursiokierroksen laskeminen vaatii useita laskutoimituksia, missä ajassa lineaarisella  $q = 1$  tai ylilineaarisilla  $1 < q < 2$  menetelmällä ehditään tehdä jopa useita rekursiokierroksia. Tällöin menetelmien välinen teoreettinen tehokkuusero käytännön yhtälönratkaisussa pienenee. Niinikään luvussa 11 esiteltävä Newtonin menetelmä, jolle  $q = 2$  on hyvä kompromissi näiden hienostuneempien menetelmien vaatimusten ja tehokkuuden välillä.

Yleisesti ottaen metodit, jotka konvergoivat nopeammin, tarvitsevat myös tarkemmin aivan nollakohdan viereen osuvan alkuarvauksen. Täten onkin yleisesti käyttökelpoista käyttää ensiksi ”varmempia” menetelmiä summittaisen likiratkaisun tarkentamiseen, jonka jälkeen voidaan käyttää tehokkaampaa menetelmää likiratkaisun tarkentamiseksi. Siten yleisesti ottaen mitä pienempi  $q$ -luku on, sitä varmempi yhtälönratkaisumenetelmä on. Tämä empiirinen nyrkkisääntö ei ole täysin pätevä, mutta kertoo käänteisesti sen, että kaikista tehokkaimmat yhtälönratkaisumenetelmät ovat

yleisesti epävarmimpia ja voivat helposti hajaantua, jos alkuarvo  $x_0$  ei osu aivan nollakohtaan  $\alpha$  viereen. Toisin sanoen menetelmät suppenevat varmasti vain erittäin tarkasti rajatuissa olosuhteissa sekä vain jo ennestään erittäin lähellä nollakohtaa. Toisaalta hitaimmin toimiva menetelmä, luvussa 6 käsiteltävä puolitusmenetelmä, on kaikista menetelmistä varmatoimisin kaikissa yhtälönratkaisutapauksissa. [11, s. 85-86]

Yhtälönratkaisumenetelmän tehokkuutta voidaan tarkastella muun muassa matemaattisesti, tietoteknisesti, algoritmisesti tai käytännön empiiristen kokemusten kannalta. Tässä opinnäytetyössä keskitytään tarkastelemaan menetelmien a-priorista matemaattista tehokkuutta. Eri yhtälönratkaisumenetelmien suppenemisnopeuksia tarkastellaan tarkemmin jäljempänä, kyseisiä menetelmiä käsittelevissä luvuissa.



## Graafinen tarkastelu

Graafisessa tarkastelussa yhtälön nollakohtaa etsitään koordinaatistoon piirretyn funktion  $f$  kuvaajan avulla. Tällöin riittävän sileälle funktiolle saadaan yleensä hyvä yleiskuva nollakohtien sijainnista, määrästä ja laadusta, mutta vain erittäin summittainen likiarvo nollakohdalle.

### 5.1. Likiratkaisun määrittäminen graafisella tarkastelulla

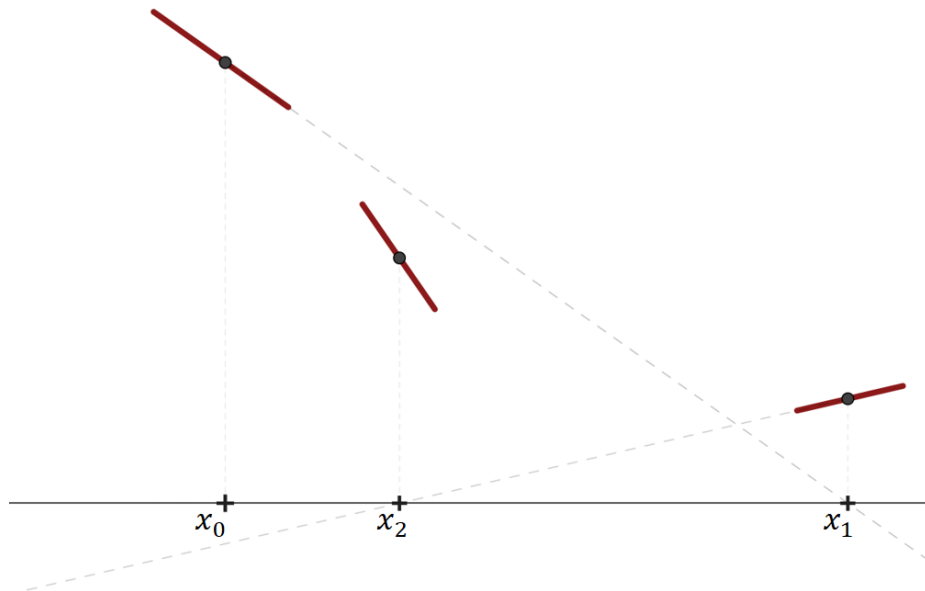
Kuvaajan graafinen tulkinta vaatii inhimillistä päättelyä, joten tarkastelu ei sovelu suoraan automatisoitaviksi. Tämä on graafisen tarkastelun selkeä heikkous, koska tietokoneistettuun numeeriseen ratkaisuun verrattuna inhimilliseen päättelyyn kuluu huomattavasti enemmän aikaa. Toisaalta graafisen tarkastelun soveltaminen vaatii useiden funktion  $f$  arvojen laskemista. Oikeastaanhan funktion kuvaaja eli graafi on vain lukuisia koordinaatistopisteiksi aseteltuja funktion  $f$  arvoja. Näiden kuvaajan pisteiden laskeminen vaatii huomattavasti prosessoriaikaa laskukoneelta. Luultavasti jokin varsinainen numeerinen menetelmä olisi tässä ajassa laskenut sangen tarkan likiratkaisun nollakohdalle. Näistä ilmeisistä heikkouksista ja tarkastelutavan subjektiivisuudesta johtuen ei graafisesta tarkastelusta puhuta menetelmänä.

Usein sovellutuksissa tarvitaan sangen tarkkoja likiarvoja, joiden hankkimiseen graafinen tarkastelu on hidas. Lisäksi tarkkojen likiarvojen saaminen vaatisi runsaasti toistoja. Jokainen toisto myös vaatii useiden funktion arvojen laskemista ja näiden avulla kuvaajan piirtämistä. Graafinen tulkinta onkin varsinaisia yhtälönratkaisumenetelmiä selkeästi hitaampi, jos on mahdollista valjastaa tietokoneen laskuteho yhtälönratkaisun apuun. Toisinaan funktion kulun tarkastelu graafisesti kuvaajasta ennen varsinaista numeerisilla menetelmillä likiarvon tarkkaa laskemista ja yhtälönratkaisumenetelmän valintaa voi olla erityisen hyödyllinen osa funktion nollakohtien etsintäprosessissa. Graafisen tarkastelun perusteella voidaan usein antaa kohtuullinen alkuarvaus  $x_0$  muilla numeerisilla menetelmillä tarkennettavaksi ja varsinaisesti ratkaistavaksi. Myös esimerkiksi jos yhtälöllä on useita nollakohtia, voidaan nollakohdat jakaa usealle erilliselle välille graafisen tarkastelun perusteella.

Sen sijaan esimerkiksi kompleksilukulikiarvoja etsiessä tai useampimuuttujaisten funktioiden kanssa graafinen tarkastelu on jo kömpelö. Graafista tarkastelua voikin siten pitää enemmän näkökulmana tilanteen yleiseen hahmottamiseen. Graafinen tarkastelu on selkeästi epätäsmällisin ja epämääräisin. Toisaalta inhimillistä tulkintaa tai matemaattista analyysia tarvitaan tiettyssä mielessä viimeistään kaikkien numeeristen menetelmien ratkaisuiden kanssa, kun tarkastetaan, onko saatu ratkaisu tosimaailman ongelman kannalta mielekäs.

## 5.2. Miten ihminen ja tietokone ”näkevät” yhtälönratkaisutilanteen

Pedagogisesti graafinen tarkastelu on numeerisia yhtälönratkaisumenetelmiä opetettaessa perusteltu. Grafiikka näyttää oivasti, kuinka valittu yhtälönratkaisumenetelmä toimii ja suppenee – tai kuinka likiarvot hajaantuvat. Kuvaajasta on myös helpompi tulkita mitä yhtälönratkaisussa geometrisesti tapahtuu. Esimerkiksi miksi huonolla alkuarvauksella Newtonin menetelmä hajaantuu, kuten myöhemmin kappaleessa 11.2 havainnollistetaan. Toisaalta tällä pedagogisesti sinällään perustellulla graafisten kuvaajien avulla suppenemisen havainnollistamisella on ymmärryksellinen haittapuolensa. Kun valittu yhtälönratkaisumenetelmä tai sitä käyttävä tietokone ratkaisee juuren likiarvoa, ei tietokone ”näe” tai ”tiedä” mitään muuta funktiosta  $f$  tai sen kuvaajasta kuin ne pisteet, mitkä siihen saakka menetelmää sovellettaessa on laskettu.



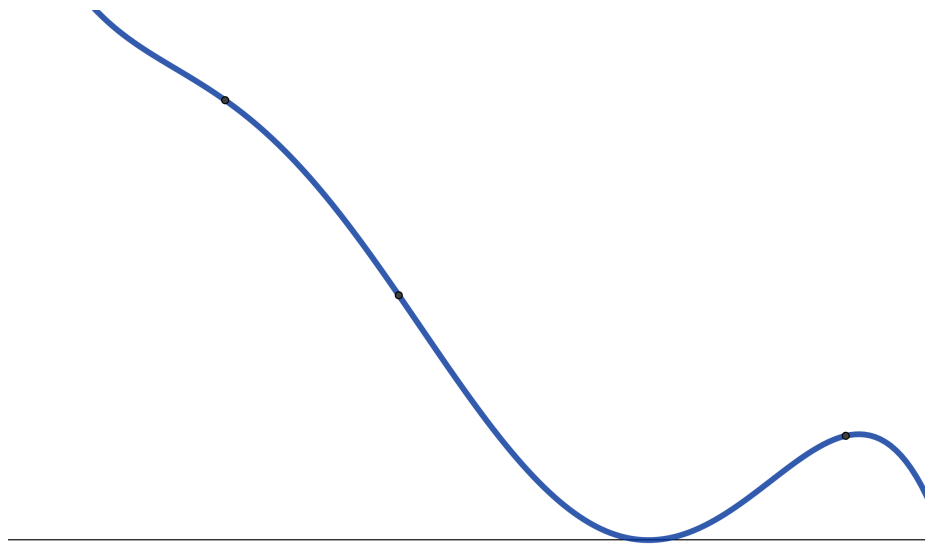
KUVA 5.1. Nollakohdan likimääräiset sijaintikohdat  $x_1$ ,  $x_2$  ja  $x_3$  sekä funktion likiarvopisteisiin piirretyin tangenttijanoin tehty havainnollistus ja kuinka tietokone laskee seuraavan likiratkaisun Newtonin menetelmän avulla. Missä kohtaa päätelisit nollakohdan kuvan perusteella sijaitsevan?

Tietokone ei ”näe” kuvaajan yleistä kulkua, vaan toimii tulevaisuuden suhteen ”sokkona”. Ihminen voi grafiikan perusteella nähdä, mihin yhtälönratkaisu on etenemässä – siis nollakohdan  $\alpha$  sijainnin eli missä funktion  $f$  kuvaaja suurinpiirtein leikkaa x-akselin. Sen sijaan kuvaajassa tietokone ”näkee” vain siihen saakka lasketut yksittäiset likiarvopisteet ja niiden funktion  $f$  arvon tai muut yhtälönratkaisumenetelmän algoritmin osana lasketut arvot. Muuten tietokone toimii täysin sokkona, täysin yhtälönratkaisumenetelmän algoritmin ohjaamana. Tietokone ei pysty päättelemään edes summittaisesti, missä kohtaa nollakohta sijaitsee, koska sitähan juuri tietokone on vasta laskemassa yhtälönratkaisumenetelmän algoritmin avulla.



Tietokone ”näkee” vain yksittäisten pisteiden arvot ja ”päättelee” (eli laskee yhtälönratkaisumenetelmän saneleman algoritmin avulla) edellisestä likiarvosta  $x_n$  seuraavan likiarvon  $x_{n+1}$ . Oleellisesti tietokone ei ”näe” yleiskuvaa eikä ”tunne” yhtään arvoa aiemmin laskemiensa likiratkaisuiden ulkopuolelta, kuten ihmisellä on mahdollista yleiskuvaa graafikasta tarkastella. Siten tietokoneen laskiessa pelkästään numeerisen menetelmän perusteella ”sokkona” seuraavia likiratkaisuita, on mukana tietty jännitys supeneeko vai hajaantuuko likiratkaisujono. Sen sijaan graafista tarkastelua käyttävä ihminen näkee kuvaajan perusteella jo ennakoita missä kohtaa nollakohtaa sijaitsee.

Geometrisesti tätä eroa voidaan kuvata sillä, että tietokoneen ”päätelyketjussa” xy-koordinaatistoon saadaan yksittäisiä pisteitä. Sen sijaan graafisesti funktiota tarkasteleva ihminen näkee koordinaatistoon piirretyn kuvaajan jo alusta alkaen.



KUVA 5.2. Tyypillinen funktion kuvaajan graafinen havainnollistus ja miten ihmissilmä näkee tilanteen. Missä kohtaa päätelisit nollakohdan kuvan perusteella sijaitsevan?

Graafista tarkastelua ei tässä opinnäytetyössä käsitellä ”menetelmänä” enempää. Toisinaan grafiikkaa käytetään havainnollistamaan eri yhtälönratkaisumenetelmiä ja -tilanteita.



## LUKU 6

### Puolitusmenetelmä

Puolitusmenetelmä (Bisection method) on yksinkertaisin numeerisista yhtälönratkaisumenetelmistä. Menetelmä on varma, mutta toisaalta sangen hidas. Toimiakseen käsiteltävän funktion täytyy olla jatkuva. Menetelmä käyttää informaatiokseen aiemmista likiarvoista ainoastaan niiden etumerkin. Alkuarvoiksi menetelmä tarvitsee välin, toisin sanoen alku- ja päätepisteen, joissa funktion arvot ovat erimerkkiset. Päälähteiden lisäksi luvussa on lähteinä käytetty [5, 6.3.2], [21, 2.1] ja [18, 1].

#### 6.1. Menetelmä

IDEA 6.1. Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio ja  $a < b$ . Valitaan väli  $I = [a, b]$  siten, että  $f(a)f(b) < 0$ . Tällöin funktion  $f$  arvot pisteissä  $a$  ja  $b$  ovat erimerkkiset ja Bolzanon lauseen nojalla funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä  $I$ . Toisin sanoen on olemassa ainakin yksi  $\alpha \in I$  siten, että  $f(\alpha) = 0$ .

ALGORITMI 6.2 (Puolitusmenetelmä).

- (1) Etsitään välin alkupisteet  $a_0, b_0$  siten, että  $f(a_0)f(b_0) < 0$ . Tällöin funktion jatkuvuuden ja Bolzanon lauseen nojalla väliltä  $]a_0, b_0[$  löytyy vähintään yksi nollakohta.
- (2) Lasketaan funktion arvo välin  $I_n = [a_n, b_n]$  puolivälissä  $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ , joka on myös nollakohdan uusi likiarvo. Jos arvot  $f(x_{n+1})$  ja  $f(a_n)$  ovat erimerkkiset, tutkitaan seuraavaksi väliä  $[a_n, x_{n+1}]$ , muutoin väliä  $[x_{n+1}, b_n]$ . Uudeksi väliksi  $I_{n+1}$  valitaan siis väleistä se, jolla nollakohta  $\alpha$  funktion arvojen erimerkkisyyden perusteella sijaitsee.
- (3) Toistetaan kunnes saavutetaan riittävä tarkkuus ja lopetetaan rekursio. Viimeiseksi likiratkaisuksi jää tarkkuusehdon täyttävän välin  $I_n$  keskipiste  $x_{n+1}$ .

Puolitusmenetelmän lopetusehdossa välin pituutta  $|I_n|$  verrataan tavoiteltuun tarkkuuteen  $\delta$ . Algoritmi voidaan siis lopettaa, kun

$$b_n - a_n = |I_n| \leq \delta$$

Toisaalta lopetusehtona voidaan tarkastella myös välin keskipisteen arvon  $f(x_n)$  poikkeamaa nolasta eli pystypoikkeamaa  $\hat{\epsilon}$ . Toisin sanoen tällöin lopetetaan, kun

$$|f(x_n) - 0| \leq \hat{\delta}$$

Epätodennäköisessä tapauksessa, että keskipiste osuu *täsmälleen* nollakohtaan, tiedetään päämäärän saavutetun ja rekursio voidaan lopettaa tähän arvoon. Yleensä

likiratkaisuna halutaan välin sijaan vastauksena antaa desimaaliluku, näin ollen viimeiseksi likiarvoksi jää tarkkuusehdon täyttävän välin  $I_n$  keskipiste  $x_{n+1}$ .

HUOMIOITA 6.3.

- (1) Bolzanon lause takaa, että välillä  $I$  on *ainakin* yksi nollakohta. Välillä voi kuitenkin olla myös useampia nollakohtia.
- (2) Jos lisäksi tiedetään, että funktio  $f$  on aidosti monotoninen välillä  $I$ , on yhtälölle  $f(x) = 0$  tasan yksi ratkaisu.  
Perustelu: Jos funktio  $f$  on aidosti monotoninen, on  $f$  niinkään injektio. Injektiivisyyden perusteella yhtälöllä  $f(x) = 0$  on tasan yksi ratkaisu.
- (3) Toisaalta funktiolla voi olla nollakohta, vaikka funktio  $f$  ei saa erimerkkisiä arvoja. Esimerkiksi lauseke  $(x - a)^2$  on ei-negatiivinen koko reaalityöväliä  $\mathbb{R}$ , mutta yhtälöllä  $(x - a)^2 = 0$  on siitä huolimatta kaksoisjuuri kohdassa  $x = a$ . Puolitusmenetelmällä nollakohtaa ei kuitenkaan löydetä, koska menetelmä vaatii alkuarvojen funktion arvojen etumerkkien erimerkkisyyden.

## 6.2. Esimerkki neliöjuuren laskemisesta

Halutaan laskea neliöjuurelle  $\sqrt{25}$  likiarvo yhdeksän desimaalin tarkkuudella, jolloin  $\delta = 0,000\ 000\ 000\ 5 = 5,00 \cdot 10^{-10}$ . Ratkaistaan siis yhtälöä  $x^2 = 25$  ja haetaan nollakohtaa funktiolle  $f(x) = x^2 - 25$ , kun  $x > 0$ . Alkuarvoksi annetaan väli  $I_0 = [1, 6]$ .

Tarkastellaan aluksi funktiota analyttisesti ja tutkitaan, kuinka monta nollakohtaa tarkasteluvälillä  $I_0$  on. Funktio  $f$  on polynomifunktiona jatkuva sekä jatkuvasti  $n$  kertaa derivoituva. Lisäksi  $f$  on aidosti kasvava määrittelyvälillään, sillä

$$f'(x) = 2x > 0, \quad \text{kun } x > 0$$

Koska funktio  $f$  on aidosti kasvava, on  $f$  myös injektio. Koska  $f$  on injektio, on tarkasteluvälillä yhtälöllä  $f(x) = 0$  enintään yksi ratkaisu. Lisäksi, koska

$$f(1) = -24 < 0 \quad \text{ja} \quad f(6) = 11 > 0,$$

on yhtälöllä Bolzanon lauseen perusteella ainakin yksi ratkaisu. Siten injektiivisyyden ja Bolzanon lauseen perusteella on välillä  $I_0$  täsmälleen yksi ratkaisu. Näiden alkutarkastelujen jälkeen sovelletaan seuraavaksi puolitusmenetelmää turvallisista mielin.

Välin  $I_0$  puoliväli on kohdassa  $x_1 = \frac{1+6}{2} = 3,5$ .

Likiratkaisussa  $x_1$  funktio  $f$  saa arvon

$$f(x_1) = f(3,5) = -12,75 < 0,$$

Koska välin  $I_0 = [1; 6]$  päätepisteessä  $f(6) = 11 > 0$ , sijaitsee tosiratkaistu välillä  $I_1 := [3,5; 6]$ . Valitaan  $x_1 = 3,5$  välin  $I_1$  alkupisteeksi  $a_1$ .

Siten juuren uusi likiratkaisu  $x_2$  on välin  $I_1$  puolivälissä kohdassa  $x_2 = \frac{3,5+6}{2} = 4,75$ . Likiratkaisussa  $x_2$  funktio  $f$  saa arvon

$$f(x_2) = f(4,75) = -2,4375 < 0$$

Koska välin  $I_1 = [3,5; 6]$  päätepisteessä  $f(6) = 11 > 0$ , sijaitsee tosiratkaisu välillä  $I_2 := [4,75; 6]$ . Valitaan  $x_2 = 4,75$  välin  $I_2$  alkupisteeksi  $a_2$ .

Siten juuren uusi likiratkaisu  $x_3$  on välin  $I_2$  puolivälissä kohdassa  $x_3 = \frac{4,75+6}{2} = 5,375$ . Likiratkaisussa  $x_3$  funktio  $f$  saa arvon

$$f(x_3) = f(5,375) = 3,890625 > 0$$

Koska välin  $I_2 = [4,75; 6]$  alkupisteessä  $f(4,75) < 0$ , sijaitsee tosiratkaisu välillä  $I_3 := [4,75; 5,375]$ . Valitaan  $x_3 = 5,375$  välin  $I_3$  päätepisteeksi  $b_3$ .

Siten uusi likiratkaisu  $x_4$  on välin  $I_3$  puolivälissä kohdassa  $x_4 = \frac{4,75+5,375}{2} = 5,0625$ .

Puolitusmenetelmää voidaan jatkaa edeten samalla logiikalla. Taulukkoon 6.1 on laskettu puolitusmenetelmän likiarvoja, kunnes haluttu tarkkuus on saavutettu.

$n$	Välin alku $a_n$	Välin loppu $b_n$	Uusi arvo $x_{n+1}$	$f(x_{n+1})$	Väli $ I_n $
0	1	6	3,5	-12,75	$5,000 \cdot 10^0$
1	3,5	6	4,75	-2,4375	$2,500 \cdot 10^0$
2	4,75	6	5,375	3,890625	$1,250 \cdot 10^0$
3	4,75	5,375	5,0625	0,62890625	$6,250 \cdot 10^{-1}$
4	4,75	5,0625	4,90625	-0,928710938	$3,125 \cdot 10^{-1}$
5	4,90625	5,0625	4,984375	-0,156005859	$1,563 \cdot 10^{-1}$
6	4,984375	5,0625	5,0234375	0,234924316	$7,813 \cdot 10^{-2}$
7	4,984375	5,0234375	5,00390625	0,039077759	$3,906 \cdot 10^{-2}$
8	4,984375	5,00390625	4,994140625	-0,058559418	$1,953 \cdot 10^{-2}$
9	4,994140625	5,00390625	4,999023438	-0,009764671	$9,766 \cdot 10^{-3}$
10	4,999023438	5,00390625	5,001464844	0,014650583	$4,883 \cdot 10^{-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
32	4,9999999907	5,0000000023	4,9999999965	-0,00000000349	$1,164 \cdot 10^{-9}$
33	4,9999999965	5,0000000023	4,9999999994	-0,00000000058	$5,821 \cdot 10^{-10}$
34	4,9999999994	5,0000000023	5,0000000009	0,00000000087	$2,910 \cdot 10^{-10}$

TAULUKKO 6.1. Puolitusmenetelmän suppeva tarkasteluväli ja tarkentuvat neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiratkaisut.

Puolitushaun 34. rekursiolla saavutetaan haluttu tarkkuus, sillä välin pituus

$$|I_{34}| = 2,910 \cdot 10^{-10} < 5,00 \cdot 10^{-10} = \delta$$

Tällöin mikä vain väliltä  $I_{34}$  otettu arvo on riittävän tarkka. Valitaan viimeiseksi likiratkaisuksi viimeisen välin  $I_{34}$  keskipiste  $x_{35} = 5,0000000009$ .

Tällöin likiratkaisun  $x_{35}$  pystypoikkeama on  $\hat{\varepsilon}_{35} = |f(x_{35})| = 8,7 \cdot 10^{-10}$  eli likiratkaisu antaa on noin miljardisosan tarkkuudella oikean tuloksen. Nyt tehtävänannossa ei kuitenkaan oltu määritetty pystysuuntaista tarkkuusehtoa  $\hat{\delta}$ , vaan juuri sivuttainen tarkkuusvaatimus  $\delta$ .

Huomaa, että a-prioristi saatavilla olevan tiedon perusteella ei voida olla varmoja onko likiratkaisu  $x_{34}$  varmasti riittävän tarkka, sillä välin  $I_{33}$  pituus

$$|I_{33}| = 5,821 \cdot 10^{-10} > 5,00 \cdot 10^{-10} = \delta$$

Siten väliltä  $I_{33}$  löytyy arvoja, jotka eivät täytä tarkkuusvaatimusta  $\delta$ . Väli  $I_{33}$  (jonka keskipiste  $x_{34}$  on) on liian leveä ja siltä löytyy vielä arvoja, jotka eivät täytä tarkkuusvaatimusta  $\delta$ . Siksi on tehtävä vielä yksi puolitus. Vasta kun välin  $I_n$  pituus on riittävän pieni eli  $|I_n| < \delta$ , on varmaa, että kaikki väliltä otetut arvot täyttävät tarkkuusvaatimuksen. Tämä toteutuu välillä  $I_{34}$ . Yleensä tuloksena halutaan antaa välin sijaan yksi desimaaliarvo, jolloin luonteva valinta tälle on välin  $I_{34}$  keskipiste, likiratkaisu  $x_{35}$ . Esimerkissä onkin mielenkiintoista, että itseasiassa aiempi likiarvo  $x_{34}$  on tarkempi kuin sitä seuraava, tarkkuusehdon  $\delta$  a-prioristi saatavilla olevan tiedon perusteella varmasti täyttävä likiratkaisu  $x_{35}$ .

$n$	Likiratkaisu $x_n$	Poikkeama $ \varepsilon_n $
31	5,000000001397	13,97 $\cdot 10^{-10}$
32	5,000000000233	2,328 $\cdot 10^{-10}$
33	4,999999999651	3,492 $\cdot 10^{-10}$
34	4,999999999942	0,5821 $\cdot 10^{-10}$
35	5,000000000087	0,8731 $\cdot 10^{-10}$

TAULUKKO 6.2. Puolitusmenetelmällä saatuja likiratkaisuita ja niiden poikkeamien absoluuttiset suuruudet.

### 6.3. Suppeneminen

Puolitusmenetelmä on varma menetelmä. Tämä tarkoittaa sitä, että jos alkuehdot täyttyvät, suppenee menetelmä varmasti kohti tosiratkaisua  $\alpha$ . Tämä tapahtuu varmasti, sille menetelmän algoritmi 6.2 takaa sen, että nollakohta  $\alpha$  säilyy välin  $I_n$  päätepisteiden välissä. Tällöin väliltä Bolzanon lauseen perusteella löytyy aina ainakin yksi nollakohta.

Puolitusmenetelmän algoritmi 6.2 tuottaa kasvavan lukujonon  $\{a_n\}$  sekä vähenevän lukujonon  $\{b_n\}$ , joille kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  on voimassa

$$a_n < b_n$$

sekä

$$f(a_n) < 0 \quad \text{ja} \quad f(b_n) > 0$$

$$(\text{taikka } f(a_n) > 0 \quad \text{ja} \quad f(b_n) < 0)$$

Näin ollen jatkuvuudesta ja algoritmin ehdoista seuraa, että suppenevilla jonoilla on sama raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

sekä

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{ja} \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$$

Siten  $f(\alpha) = 0$ , joten menetelmä suppenee kohti juurta  $\alpha$ .

### 6.4. Suppenemisnopeus

Puolitusmenetelmä konvergoi sangen hitaasti, koska menetelmä käyttää tietona likiratkaisuiden funktion arvoista  $f(x_n)$  ainoastaan niiden etumerkin. Tarkasteluväli  $I$ , jolla nollakohdan  $\alpha$  tiedetään olevan, puoliintuu joka askeleella, joten vastaavasti  $n$  puolituksen jälkeen välin pituus on

$$|I_n| = |b_n - a_n| = \frac{b - a}{2^n} = 2^{-n}(b - a)$$

Halutaan, että likiratkaisut ovat korkeintaan tarkkuuden  $\delta$  päässä tosiratkaisusta eli  $\varepsilon_n < \delta$ . Toisaalta poikkeama  $\varepsilon_n$  on enintään välin pituus  $|I_n|$ , jolloin

$$\delta > |I_n| = 2^{-n}(b - a)$$

Näin ollen haluttuun tarkkuuteen  $\delta$  päästäkseen tarvittavien rekursioiden lukumäärää  $n$  voidaan arvioida kaavalla

$$(6.1) \quad n > \log_2 \left( \frac{b - a}{\delta} \right)$$

Kun  $\varepsilon_n \leq b_n - a_n$ , puolitushaun suppenemisnopeuden raja-arvo on (keskimäärin)

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_n|} = \frac{1}{2}$$

Väli siis puolittuu joka askeleella, jolloin suppeneminen on *lineaarista*.

Huomionarvoista on, kuten esimerkin taulukossa 6.2 voidaan havaita, että puolitusmenetelmän poikkeaman suuruus  $|\varepsilon_n|$  harvoin suppenee tarkalleen ottaen lineaarisesti, vaikkakin nollakohdan sisältävän tarkasteluvälin pituus  $|I_n|$  suppenee täsmälleen lineaarisesti. Oleellisempi käsite puolitushaussa on väli ja sen päätepisteet kuin varsinainen yksittäinen likiarvo. [5, 6.3.2 ja A.7.1]

ESIMERKKI 6.4. Esimerkin 6.2 neliöjuuren laskennan suppenemisnopeutta voidaan ennakoita a-prioristi kaavalla (6.1), jolloin saadaan

$$n > \log_2 \left( \frac{b - a}{\delta} \right) = \log_2 \left( \frac{6 - 1}{0,0000000005} \right) \approx 33,21928095$$

Siten riittävä tarkkuus saavutetaan 34. puolituksella. Tällöin välin  $I_{34}$  puoliväli on viimeisin likiarvo eli likiratkaisu  $x_{35}$ .

Vaikka puolitusmenetelmä suppenee varmasti, ei puolitushaussa edellisten likiarvojen suuruus suuntaa seuraavan likiarvon laskentaa. Seuraava likiratkaisuväli  $I_{n+1}$  on aina tasan puolet aiemman välin  $I_n$  pituudesta. Funktion  $f$  ominaisuudet eivät etumerkkitarkastelua lukuunottamatta mitenkään tarkenna ja ohjaa seuraavaa likiratkaisua tarkemmaksi. Lasketun likiratkaisun funktion arvon  $f(x_{n+1})$  perusteella vain päätellään, kummalle puolelle aiempaa väliä nollakohta jää. Tämän vuoksi puolitusmenetelmän suppeneminen on sangen hidasta. Menetelmä voi kuitenkin olla tätä hienostuneempi.

Luvussa 16 esiteltävä puolitusmenetelmän kanssa useita samanlaisuuksia sisältävä jännemenetelmä ottaa huomioon tarkasteluvälin päätepisteiden  $f(a_n)$  ja  $f(b_n)$  etumerkkien lisäksi päätepisteiden funktion arvojen  $f(a_n)$  ja  $f(b_n)$  suuruudet. Hienostuneemman funktion ominaisuuksien huomioimisen seurauksena suppenemisnopeus voi olla jopa kiihtyvää. Vastaavasti iteratiivisissa menetelmissä edellisen likiratkaisun arvo vaikuttaa seuraavan iteraatiokierroksen likiratkaisun laskemiseen. Näin edellinen likiarvo ohjaa ja tarkentaa iteraatiotaprosessia. Tarkastellaan seuraavaksi iteratiivisia yhtälönratkaisumenetelmiä.



## LUKU 7

### Iteratiiviset menetelmät

Käsitellään seuraavaksi iteraatiota ja iteraattifunktion ominaisuuksia. Esiteltävät numeeriset menetelmät kuuluvat iteratiivisiin yhtälönratkaisumenetelmiin. Syvennytään aluksi tutkimaan iteraation ideaa ja iteraatioprosessia tarkemmin.

#### 7.1. Iteraatio

Iteraatio<sup>1</sup> (iteration)<sup>2</sup> on periaate tai toimintatapa, jossa seuraavan iteraatiokierroksen laskennan alkuarvoksi otetaan edellisen kierroksen likiratkaisu. Iteraatio on siis rekursiivista toistamista, missä edellinen likiratkaisu  $x_n$  ohjaa tarkentavasti seuraavan likiratkaisun  $x_{n+1}$  laskentaa. Iteroitaessa lausekkeen arvo sijoitetaan takaisin lausekkeeseen muuttujan paikalle. Toisin sanoen alkuarvona käytetään yhtälön  $f(x) = 0$  tähän mennessä parasta likiratkaisua  $x_n$ , jolloin saadaan tiettyjen kutistavuusehtojen täytyessä seuraava, entistäkin tarkempi likiratkaisu  $x_{n+1}$ . Toistamalla tätä prosessia saadaan tarkentuva likiratkaisujen jono  $\{x_n\}$ .

Oleellisesti iteraatiomenetelmät perustuvat *iterointiyhtälöön*

$$(7.1) \quad x = \phi(x)$$

Iteroivissa menetelmissä ei siis suoraan ratkaista alkuperäisen funktion  $f$  yhtälöä  $f(x) = 0$ , vaan nimenomaan *iteraattifunktion*  $\phi(x)$  iterointiyhtälöä  $x = \phi(x)$ , jonka avulla saadaan alkuperäisen nollakohtayhtälön  $f(x) = 0$  nollakohdalle likiratkaisu  $x_n$ . Erotuksena muista funktioista käytetään iteraattifunktion tunnuksena kreikkalaista kirjainta  $\phi$  (*fi* tai *phi*).

HUOMAUTUS 7.1. Iterointiyhtälö (7.1) voidaan kirjoittaa myös iteraatiokierroksia korostavassa rekursiivisessa muodossa

$$(7.2) \quad x_{n+1} = \phi(x_n), \quad \text{missä } n = 0, 1, 2, \dots$$

Tällöin edeltävän kierroksen likiratkaisua  $x_n$  lähtöarvona käyttäen lasketaan uusi likiratkaisu  $x_{n+1}$  iteraattifunktion  $\phi$  avulla. Käytännön menetelmissä iteraatioperiaatetta sovelletaan juuri tähän tapaan.

#### HUOMIOITA 7.2.

---

<sup>1</sup>iteraatio – 1. varsinkin matematiikan, tietotekniikan menetelmiä, joissa samat laskutoimitukset tai muut toimenpiteet toistetaan (joko samanlaisina tai muuttujia vaihdellen), kunnes saadaan esimerkiksi tarkkuudeltaan haluttu tulos; yksi tällainen toimenpiteiden sarja. (MOT Kielitoimiston sanakirja, 2017, Kotimaisten kielten keskus ja Kielikone Oy, <https://mot.kielikone.fi/mot/jyu/>)

<sup>2</sup>iterare (latinaa); toistaa

- (1) Iteraatiolla tarkoitetaan sekä iteraatiota prosessina että iteratiivisilla menetelmillä kokonaista yhtälönratkaisumenetelmien menetelmäperhettä. Toisaalta iteraatio, iteraatiokierros tai -askel tarkoittavat tuon iteraatioprosessin yhtä toistoa.
- (2) Mitä tahansa funktiota  $g: I \rightarrow I$  voidaan periaatteessa iteroida, mutta tämä ei ole mielekäästä. Täytyyhän iteroinnissa olla jokin (matemaattinen) johtajatus taustalla ohjaamassa toimintaa.
- (3) Numeeristen menetelmien lisäksi iteraatioperiaatteella on tärkeitä sovelluksia muun muassa funktionaaliallyksissä (functional analysis) sekä differentiaaliyhtälöiden (differential equations) teoriassa.

ESIMERKKI 7.3. Aiemmin käsitellyt graafinen sekä puolitusmenetelmä eivät ole iteratiivisia menetelmiä. Siksi näiden menetelmien yhteydessä ei puhuta iteraatiokierroksista, vaan rekursioista tai toistoista. Puolitushaussa uusi likiratkaisu otetaan aina tarkasteluvälin puolivälistä ja joka toistolla väli täsmälleen puolittuu täysin riippumatta likiarvojen suuruuksista. Siten edeltävän likiratkaisun suuruus ei mitenkään ohjaa seuraavan likiarvon laskentaa, kuten iteraatiossa tapahtuu.

Toisaalta iteraatiomenetelmissä luovutaan likiratkaisuiden funktion arvojen etumerkitarkastelusta ja Bolzanon lauseesta. Iteraatiomenetelmissä tehokkuus saavutetaan siis varmuuden kustannuksella.

Iteraattifunktion  $\phi$  arvot ja käytös riippuvat oleellisesti alkuperäisestä funktiosta  $f$  ja iteraattifunktio  $\phi$  määritellään jollain tapaa alkuperäisen funktion  $f$  avulla. Näillä kahdella funktiolla ja niihin liittyvillä yhtälöillä onkin vahva yhteys. Tutkitaan seuraavaksi iteraattifunktiota ja sen ominaisuuksia.

## 7.2. Iteraattifunktio

Iteraattifunktiolle  $\phi(x)$  halutaan ominaisuus, että yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisussa  $x = \alpha$  iteraattifunktio  $\phi(x)$  toimii identiteettifunktiona, toisin sanoen pätee *kiintopisteyhtälö*

$$(7.3) \quad \phi(\alpha) = \alpha$$

Tällöin nollakohta  $\alpha$  toimii iterointiyhtälön (7.1) *kiintopisteenä*.

MÄÄRITELMÄ 7.4 (Kiintopiste). Piste  $\alpha \in \mathbb{R}$  on funktion  $\phi$  *kiintopiste*, jos  $\phi(\alpha) = \alpha$ .

HUOMIOITA 7.5.

- (1) Geometrisesti kiintopiste tarkoittaa identiteettisuoran  $y = x$  ja käyrän  $y = \phi(x)$  leikkauskohtaa välillä  $I$ .
- (2) Funktiolla voi olla ei yhtään, yksi, useita tai ääretön määrä kiintopisteitä.
- (3) Iterointiyhtälö (7.1) oleellisesti kertoo, että oikealla puolella yhtälöä olevaa iteraattifunktiota  $\phi(x)$  verrataan kaavassa vasemmalla puolella olevaan identiteettikuvaukseen  $y = x$ . Tämä käy hyvin ilmi kiintopistemenetelmän iteraatiosta ja voidaan havaita esimerkiksi kuvasta 10.2.

- (4) Kiintopisteyhtälö (7.3) on erityisesti matemaattisen teoreettisen puolen tarkastelussa tärkeä yhtälö, sillä kyseisen kiintopisteyhtälön avulla voidaan usein perustella, mistä syystä matemaattinen rakennelma ja yhtälönratkaisu toimivat. Iterointiyhtälö (7.2) on työväline tosiratkaisun  $\alpha$  likiarvon  $x_n$  määrittämiseksi.

Kiintopisteen  $\alpha$  kautta alkuperäisen funktion  $f$  ja iteraattifunktion  $\phi$  välillä on vahva yhteys, jonka avulla iteraattifunktio  $\phi$  soveltuu hyvin työvälineeksi nollakohdan etsintään. Nyt voidaankin iteraattifunktio määritellä tarkemmin.

**MÄÄRITELMÄ 7.6** (Iteraattifunktio). *Iteraattifunktio*  $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva funktio, joka välillä  $I$  toteuttaa ehdon

$$(7.4) \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \phi(x)$$

**HUOMIOITA 7.7.**

- (1) Määritelmä tarkoittaa oleellisesti nollakohtapistettä  $x = \alpha$ . Sillä tällöin

$$f(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \phi(\alpha)$$

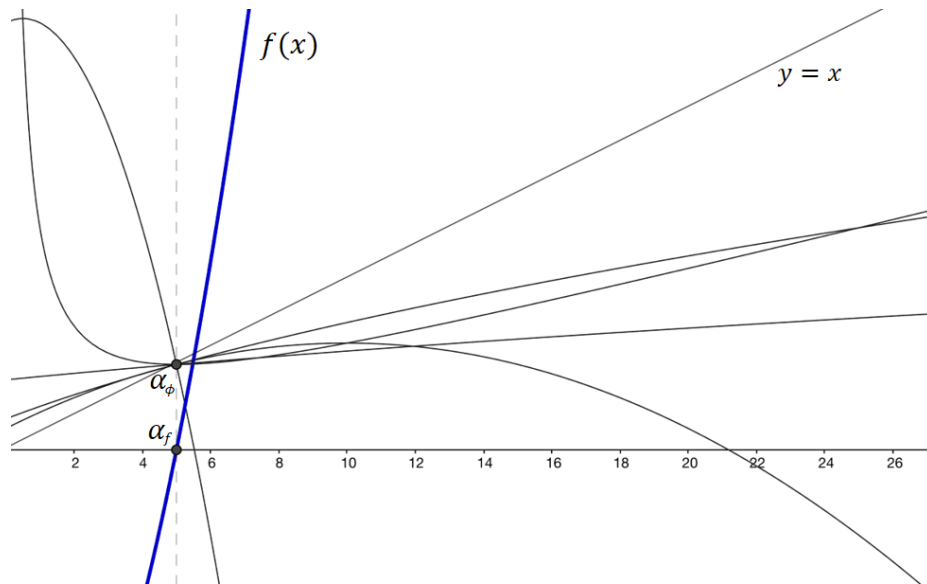
Toisin sanoen iteraation *kiintopisteessä* yhtälö toteutuu.

- (2) Molemmat yhtälöt (7.4) toteuttavalla muuttujan arvolla  $x = \alpha$  on tärkeä kaksoismerkitys. Ensinnäkin  $\alpha$  on yhtälön  $f(x) = 0$  juuri, toisaalta  $\alpha$  on funktion  $\phi(x)$  kiintopiste. Täten, jos löydetään likiratkaisu  $x_n$  siten, että se toteuttaa yhtälön  $x = \phi(x)$  (riittävällä tarkkuudella eli riittävän pienellä poikkeamalla  $\varepsilon_n$ ), on sama likiratkaisu  $x_n$  alkuperäisen yhtälön  $f(x) = 0$  juuren likiarvo.
- (3) Funktiolla  $f$  voi olla useita nollakohtia  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . On kuitenkin tarkoituksenmukaista rajoittaa välille  $I$ , jolta löytyy kerrallaan vain yksi nollakohta  $\alpha$ .

On huomionarvoista, että *jokainen* yhtälö  $f(x) = 0$  on muokattavissa iterointiyhtälön (7.1) muotoon  $x = \phi(x)$ . Tämä tarkoittaa sitä, että aina on muodostettavissa iteraattifunktio  $\phi$ . Kuitenkaan tämä ei tarkoita, että näin muodostettu iteraatio välttämättä suppenee. Tähän aiheeseen palataan myöhemmin konkreettisten iterointimenetelmien yhteydessä tarkastellessa menetelmien suppenemista ja varmuutta. Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin iteraattifunktion  $\phi$  ominaisuuksia.

### 7.3. Iteraattifunktion ominaisuuksia

Iteraattifunktio  $\phi$  ei ole yksikäsitteinen, vaan se voidaan määritellä usealla, toisistaan poikkeavalla tavalla. Jokin  $\phi_1(x)$  saattaa toimia paremmin tietyssä yhtälönratkaisutilanteessa tietyn yhtälönratkaisumenetelmän kanssa kuin jokin toinen  $\phi_2(x)$ . Itse asiassa eri iteraattifunktiot  $\phi_n$  oleellisesti määrittävät, mitä iteratiivista yhtälönratkaisumenetelmää käytetään. Iteraattifunktion  $\phi$  määrittelevää lauseketta kutsutaan *iteraatio-*, *palautus-* tai *rekursiokaavaksi*.



KUVA 7.1. Identiteettisuora  $y = x$ , erään funktion  $f$  kuvaaja sekä funktiosta  $f$  muodostettujen iteraattifunktioiden kuvaajia. Funktio  $f$  leikkaa x-akselin nollakohdassa  $\alpha_f$  ja vastaavasti *kaikki* iteraattifunktiot  $\phi$  sekä identiteettisuora  $y = x$  leikkaavat kiintopisteen  $\alpha_\phi$ . Huomaa kuinka nollakohdan  $\alpha_f$  ja kiintopisteen  $\alpha_\phi$  x-koordinaatit ovat samat.

MÄÄRITELMÄ 7.8 (Iteraattifunktion palautuskaava). Iteraattifunktio  $\phi(x)$  voidaan avata muotoon

$$\phi(x) := x + c(x)f(x)$$

eli rekursiivisesti

$$(7.5) \quad x_{n+1} = \phi(x_n) := x_n + c(x_n)f(x_n)$$

Tällöin iteraattifunktion *palautuskaavassa* on kolme osaa:

- $x_{n+1} = \phi(x_n)$  – uusi, nollakohdan seuraava likiratkaisu
- $x_n$  – edellinen likiratkaisu, joka toimii lähtökohtana seuraavan likiratkaisun määrittämiseen
- $c(x_n)f(x_n)$  – korjausosa, joka suuntaa edellistä likiratkaisua  $x_n$  kohti tosiratkaisua  $\alpha$

Lisäksi korjausosa voidaan jakaa kahteen osaan:

- $c(x_n)$  – menetelmäosa; jokin sopiva jatkuva funktio, jolle  $c(x) \neq 0$ , kun  $x \neq \alpha$
- $f(x_n)$  – alkuperäinen funktio, jonka nollakohtaa haetaan

Oleellisesti juuri korjausosan menetelmäfunktio  $c(x)$  ei ole yksikäsitteinen ja vaihtelee kaavassa sen perusteella, mitä iteratiivisista yhtälönsratkaisumenetelmää käytetään.

Menetelmäfunktion  $c(x)$  kulusta riippumatta nollakohdassa  $x = \alpha$  funktiolle  $f$  pätee  $f(\alpha) = 0$ , jolloin

$$\phi(\alpha) = \alpha + c(\alpha) \cdot 0 = \alpha$$

Tällöin tosiratkaistu  $\alpha$  toimii iteraattifunktion  $\phi$  kiintopisteenä, kuten kiintopisteyhtälössä (7.3) halutaan.

ESIMERKKI 7.9. Menetelmäosa  $c(x)$  muutamassa iteraatiomenetelmässä

- Newtonin menetelmä:  $c(x) = -\frac{1}{f'(x_n)}$ , missä  $f'(x) \neq 0$
- Kiintopistemenetelmä:  $c(x) = 1$ , tai vastaavasti  $c(x) = -1$
- Whittakerin menetelmä:  $c(x) = \frac{1}{m}$ , missä  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$

Sillä kuinka menetelmäosa  $c(x)$  – ja siten iteraattifunktio  $\phi(x)$  – määrittellään on oleellinen vaikutus suppeneeko likiratkaisujono  $\{x_n\}$  ylipäänsä kohti tosiratkaistua  $\alpha$ . Menetelmäfunktio  $c(x)$  toisena korjausosan tekijänä ohjaa kuinka voimakkaasti likiratkaisua  $x_n$  pitää korjata. Jos likiratkaisu  $x_n$  sijaitsee jo lähellä nollakohtaa  $\alpha$ , ei korjausosan tarvitse enää tehdä isoja korjausliikkeitä. Tällöin likiratkaisun  $x_n$  arvo  $f(x_n)$  on lähes nolla, joka pienentää korjausosan tekemää korjausta.

ESIMERKKI 7.10. Halutaan ratkaista kuvauksen  $f(x) = x^2 + x - 3$  nollakohdat iteroimalla. Juurten ratkaisemiseksi voidaan yhtälöstä  $f(x) = 0$  johtaa seuraavat nollakohdassa yhtäpitävät iteraattifunktiot:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= -x^2 + 3 && \text{(ratkaisemalla } x \text{ yhtälöstä } f(x) = 0) \\ \phi_2(x) &= \pm\sqrt{3-x} && \text{(ratkaisemalla } x^2 \text{ yhtälöstä } f(x) = 0) \\ \phi_3(x) &= \frac{3}{x} - 1 && \text{(jakamalla yhtälö } x^2 = 3 - x \text{ muuttujalla } x) \\ \phi_4(x) &= \frac{x^2+3}{2x+1} && \text{(Newtonin menetelmä)} \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa iteraattifunktioiden 1 ja 3 iteraatiot eivät suppene ja vain iteraattifunktioiden 2 ja 4 iteraatiot suppenevat. Siten iteraattifunktion  $\phi$  määrittelyllä on tärkeä merkitys ja iteraatiot voivat käyttäytyä iteraatiofunktion määrittelytavasta johtuen hyvin eri tavalla: iteraatio saattaa hajaantua, supeta hitaasti tai supeta kohtuullisen nopeasti. Ylläolevien iteraattifunktioiden kuvaajien havainnollistukset löytyvät liitteestä B. [5, 6.3.5]

ESIMERKKI 7.11. Sovelletaan esimerkin 7.10 iteraattifunktion  $\phi_2$  ideaa neliöjuuren  $\sqrt{25}$  laskemiseen. Muokataan yhtälöstä  $x^2 - 25 = 0$  iterointiyhtälö ratkaisemalla yhtälöstä  $x^2$  binomikaavaan korottamalla

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= 0 && \Leftrightarrow \\ x^2 + 12x + 36 &= 61 + 12x && \Leftrightarrow \\ (7.6) \quad (x+6)^2 &= 12x + 61 && \Leftrightarrow \\ x &= \sqrt{12x+61} - 6 \end{aligned}$$

Täten iteraattifunktio on  $\phi_2(x) = \sqrt{12x+61} - 6$ .

Iteroidaan tätä funktiota alkuarvauksella  $x_0 = 2$ , jolloin saadaan suppeneva likiratkaisujono

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 2 \\
 x_1 &= \sqrt{12 \cdot 2 + 61} - 6 \\
 &= 3,2195444572928 \dots \\
 x_2 &= 3,9817099480757 \dots \\
 x_3 &= 4,4297899967789 \dots \\
 x_4 &= 4,6844503818093 \dots \\
 x_5 &= 4,8265139625695 \dots \\
 x_6 &= 4,9049606854327 \dots \\
 x_7 &= 4,9480376426642 \dots \\
 x_8 &= 4,9716202865379 \dots \\
 x_9 &= 4,9845092488674 \dots \\
 x_{10} &= 4,9915472517025 \dots \\
 &\vdots \\
 x_{36} &= 4,9999999987896 \dots \\
 x_{37} &= 4,9999999993397 \dots \\
 x_{38} &= 4,9999999996398 \dots
 \end{aligned}$$

Siten likiarvon  $x_{38} \approx 4,9999999996399$  poikkeamalla  $\varepsilon_{38} \approx 3,60 \cdot 10^{-10} < \delta = 5,00 \cdot 10^{-10}$  saavutetaan haluttu tarkkuus. Iteraatio suppenee, muttei kovin voimakkaasti.

A-prioristi voidaan likiratkaisun tarkkuus päätellä muun muassa tarkastelemalla kahden peräkkäisen likiratkaisun erotusta. Nyt  $|x_{37} - x_{38}| < \delta$ . Kahden viimeisen likiratkaisua tarkastelemalla huomataan, että likiarvossa on ainakin desimaalit arvoon 4,999999999 saakka oikein, koska nuo desimaalit eivät muuttuneet likiratkaisuiden  $x_{37}$  ja  $x_{38}$  välillä. Tämän perusteella  $\sqrt{25} \approx 4,999999999$  on yhdeksän desimaalin tarkkuudella oikein, kuten haluttiinkin. Tässä tarkastelussa on kuitenkin oltava varuillaan, sillä jos iteraatio suppenee huomattavan hitaasti, voivat likiratkaisujen ero olla alle tarkkuusehdon  $\delta$ , vaikka ei edes olla lähellä nollakohtaa  $\alpha$ . Nyt käytetyllä iteraatiofunktion  $\phi_2$  muodostamistavalle ei ole omaa nimeä eikä se ole oma menetelmänsä. Siten se on yleisesti vain jokin tarkemmin nimeämätön iteraatio.

On huomionarvoista, että vaikka määriteltiin  $\phi_2(x) = \sqrt{12x + 61} - 6$  saadaan kaavan (7.6) vastaavaa binomikaavaksi täydentämisen ideaa käyttäen muodostettua esimerkiksi vaihtoehtoinen iteraatiofunktio  $\hat{\phi}_2(x) = \sqrt{2x + 26} - 1$ . Ei ole yllättävää että tämäkin iteraatio suppenee. Sen sijaan hämmästyttävää on se, että tämä iteraatio suppenee huomattavasti nopeammin. Tällöin jo likiarvon  $\hat{x}_{13} \approx 4,99999999976$  poikkeamalle  $\hat{\varepsilon}_{13} \approx 2,42 \cdot 10^{-10} < \delta$ .

Niinikään vaikka nyt likiratkaisujono suppeneekin, on ratkaisussa sinällään tehty kehäpäätelmä. Tehtävänä oli neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiarvon määrittäminen, mutta itsensä

iteraattifunktion  $\sqrt{12x + 61} - 6$  sisään jokaisella iteraatioaskeleella tarvittiin neliöjuuren arvon määrittämistä. Siten tämä ratkaisutapa ei ole kovinkaan käytännöllinen verrattuna vaikkapa Sumerilaisten menetelmään esimerkissä 7.5 tai kiintopistemenehtelmään esimerkissä 10.4.

Iteraattifunktio ei siis ole yksikäsitteinen ja se voidaan muodostaa usealla toisistaan poikkeavalla tavalla. Siten ei voida antaa yleistä palautuskaavaa tai ohjetta kuinka muodostaa toimiva ja varmasti suppeneva iteraattifunktio, koska tällaista kaavaa ei ylipäänsä ole. Iteraattifunktion muodostuksessa onkin usein käytettävä matemaattista päättelyä ja oveluutta. Iteraattifunktion  $\phi(x)$  määrittelyllä on myös merkitystä tietoteknisissä sovellutuksissa, koska eri iteraattifunktioiden laskentaan tarvitaan eri määrä prosessoriaikaa ja keskusmuistia. Lisäksi eri iteraattifunktioilla voi muun muassa tietokoneiden liukulukuesitystarkkuudesta ja algoritmisesta toteutuksesta johtuen muodostua erilaisia lasku- ja pyöristysvirheitä. Joitain yleensä sangen käyttökelpoisia ja toimivia iteraattifunktioita ja niiden muodostamistapoja on löydetty, kuinka iteraattifunktio voidaan muodostaa funktion  $f$  avulla. Näitä tapoja esitellään varsinaisina käytännöllisinä iterointimenetelmiä myöhemmin, muun muassa luvuissa 10 ja 11.

HUOMAUTUS 7.12. Jos iteraattifunktion palautuskaavan (7.5) avattua muotoa

$$\phi(x_n) = x_n + c(x_n)f(x_n)$$

vertaa poikkeaman määrittelyyn (3.1) korjausterminä

$$\alpha = x_n + \varepsilon_n$$

voi kaavojen välillä huomata tiettyä samankaltaisuutta.

Poikkeaman  $\varepsilon_n$  suuruutta ei kuitenkaan saada koskaan täysin tarkasti selville, koska iteraattifunktion korjausosan  $c(x)f(x)$  likiratkaisua  $x_n$  hienosäätävässä korjauksessa ei koskaan päästä täydelliseen tarkkuuteen. Iteraatioissa on enemmän tai vähemmän aina mukana poikkeamaa. Siten palautuskaavan yhtälössä (7.5) täytyy täsmällisen ratkaisun  $\alpha$  sijaan ”tyytyä” iteraatioprosessin seuraavaan likiarvoon  $x_{n+1}$ .

#### 7.4. Funktioiden $\phi$ ja $f$ yhtymäkohtia

Yleensä lukiokirjoissa tai edes tieteellisessä lähdekirjallisuudessa ei tehdä selkeää eroa alkuperäisen funktion  $f(x)$  ja iteraattifunktion  $\phi(x)$  välillä. Näin ollen oppikirjoissa iteraatiokaava kirjoitetaan muodossa ” $x = f(x)$ ”, vaikka itse asiassa tarkoitetaan kaavaa  $x = \phi(x)$ . Tämä aiheuttaa lukijassa helposti sekaannusta ja epäselvyyttä, kummasta funktiosta onkaan tarkalleen kyse. Koska oppikirjoissa funktiosymbolia  $f$  käytetään perätysten toisistaan poikkeavassa merkityksessä, lukijalle voi helposti syntyä käsitys, että kyseessä on sama funktio, vaikka todellisuudessa näin ei ole. Omiin sekaannus on myöhemmin kiintopistemenehtelmää luvussa 10 käsiteltäessä, missä iterointiyhtälö yksinkertaisesti määritellään ” $x = x - f(x)$ ”. Ero iterointiyhtälön kirjoitustapaan ” $x = f(x)$ ” on pieni, mutta samalla sekä merkitsevä että merkittävä. Täsmällisempää on merkitä iteraattifunktiota merkinnän  $\phi(x) := x - f(x)$  avulla, jolloin iterointiyhtälö saa muodon  $x = \phi(x)$ .

Vaikka funktiot  $f$  ja  $\phi$  menevät osin lomittain ja funktioiden välillä on tärkeä yhteys, on funktiolla  $f$  ja iteraattifunktiolla  $\phi$  merkittävä ero sekä ideana että laskentateknisesti. Tämä ero hahmottuu myös kuvassa 7.1. Saman merkintätavan käyttö useassa eri merkityksessä saa helposti aikaan sekaannusta ja ”en tajuu, en osaa” -tuntemuksia varsinkin siksi, että lukion pitkän matematiikan loppupuolelle sijoittuvana kurssina on numeeriset menetelmät aiheena lukiotasolle sangen haastava. Siksi merkintäta-voissa on oltava tarkkana. Merkintätapojen ja notaatioiden tulee edistää oppimista tarpeettomien sekaannusten luomisen sijaan. Näistä syistä johtuen tässä opinnäyte-työssä on erityisesti haluttu korostaen käyttää eri merkintöjä funktioista  $g$ ,  $f$  ja  $\phi$  funktion käyttötarkoituksen mukaan. Tavan toivoisi yleistyvän myös oppikirjoissa.

Tässä opinnäytetyössä alkuperäiselle funktiolle, jonka nollakohtia ollaan ratkaisemas- sa yhtälöstä  $f(x) = 0$ , käytetään yksiselitteisesti ja johdonmukaisesti merkintää  $f$ . Ei-yksikäsitteiselle iteraattifunktiolle, jota iteroitaessa verrataan identiteettilausek- keeseen iterointiyhtälöllä  $x = \phi(x)$ , käytetään merkintää  $\phi$ . Funktio  $f$  antaa yhtälön, jota halutaan ratkaista. Iteraattifunktio  $\phi$  toimii työvälineenä nollakohdan likiarvojen määrittämiseksi. Iteraattifunktion  $\phi$  arvot voivat poiketa huomattavasti alkuperäisen funktion  $f$  arvoista. Kuitenkin aina nollakohtaa  $x = \alpha$  lähestyttäessä tiedetään, että nollakohdassa luku  $\alpha$  toimii iterointiyhtälön kiintopisteenä. Näiden funktioiden lisäksi käytetään tunnusta  $g$  kuvaamaan yleisesti mitä tahansa funktiota, kun ei ole tarpeen tämentää tarkoitetaanko funktiota  $f$ , iteraattifunktiota  $\phi$  tai jotain muuta funktiota. [2, s. 499]

### 7.5. Historiallinen esimerkki: Neliöjuuren likiarvon määrittäminen

Jo noin 4000 vuotta sitten käyttivät sumerilaiset iterointia neliöjuuren likiarvon mää- rittämiseen. Tätä kutsutaan usein Sumerilaisten menetelmäksi (Babylonian method). Tuolta ajalta on säilynyt 60-lukujärjestelmää käyttäviä nuolenpääkirjoituksella tehty- jä matematiikkaa koskevia savitauluja. Erääseen Yalen taulu numero 7289 -nimiseen savitauluun on kirjoitettu neliöjuuren  $\sqrt{2}$  sangen tarkka likiarvo, kuin osoituksena babylonialaisten kyvystä algoritmien kehittäjinä. Tarkemmin sumerilaisten menetel- mästään ja sen historiasta, katso esimerkiksi [17, 3] ja [1, s. 57-58]. Menetelmän mate- maattisesta puolesta, katso esimerkiksi [10, s. 81-82].

ALGORITMI 7.13 (Sumerilaisten menetelmä neliöjuuren määrittämiseksi).

Olkoon  $a > 0$  luku, jonka neliöjuuren  $\sqrt{a}$  likiarvo halutaan laskea. Alkuarvaukseksi annetaan luku  $x_0 > 0$ . Jos alkuarvaus osuisi tismalleen oikeaan, saataisiin yhtälöstä

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 = a$$

johdettua muuttujalle arvo

$$x = \frac{a}{x}$$

Kuitenkaan alkuarvo  $x_0$  harvoin osuu oikeaan, vaan arvaus on joko liian suuri tai pieni. Jos

$$x_0 > \sqrt{a}, \quad \text{niin} \quad \frac{a}{x_0} < \sqrt{a}$$





Luvussa käsiteltiin iteraation ominaisuuksia ja kuinka iteraatio toimiessaan on itseään tarkentava, suppeneva prosessi. Tarkastellaan seuraavaksi millä iteraattifunktion ominaisuuksilla ja edellytyksillä iteraatio suppenee ja kuinka konvergoinnista voidaan varmistua.

## LUKU 8

### Lipschitz-jatkuvuus

Aiemmin luvussa 4 käsiteltiin suppenemisen tehokkuutta. Menetelmän tehokkuuttakin tärkeämpää on kuitenkin menetelmän luotettavuus, sillä menetelmä joka on tehokas, mutta antaa vääriä tai epäluotettavia tuloksia on hyödytön. Seuraavaksi käsitellään apuvälineitä siihen, kuinka voidaan varmistua iteraation suppenemisestä. Oleellinen kysymys on, suppeneeko saatu likiratkaisujono  $\{x_n\}$  kohti tosiratkaisua  $\alpha$ ? Toisin sanoen päteekö  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ?

Tavoitteena on määritellä iteraattifunktio  $\phi(x)$  siten, että iterointiyhtälön  $x = \phi(x)$  likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee kohti yhtälön tosiratkaisua  $x = \alpha$ . Yhtä oleellista on tarkastella niin iteraattifunktion määrittelyväliä  $I$  ja alkuarvausta  $x_0$  kuin itse iteraattifunktion  $\phi$  määrittävää palautuskaavaa. Iteraation suppenemisehtoon liittyy oleellisesti iteraattifunktion  $\phi$  Lipschitz-jatkuvuus, jota käsitellään seuraavaksi.

#### 8.1. Yleinen Lipschitz-jatkuvuus

Yleisesti Lipschitz-jatkuvuus määritellään seuraavasti.

**MÄÄRITELMÄ 8.1** (Yleinen Lipschitz-jatkuvuus). Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  väli sekä olkoon  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  jokin funktio. Jos  $g$  toteuttaa jollekin  $L \in \mathbb{R}$ ,  $L > 0$ , ehdon

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \quad \text{kaikilla } x, y \in I$$

on funktio  $g$  *Lipschitz-jatkuva* välillä  $I$ .

**HUOMAUTUS 8.2.** Lipschitz-jatkuvuus tarkoittaa siis sitä, että

$$(8.1) \quad \left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| \leq L, \quad \text{kaikilla } x, y \in I, \quad x \neq y$$

Siten kuva- ja määrittelypisteiden erotusten välinen suhde ei koskaan ylitä Lipschitz-vakion  $L$  arvoa millään tarkasteluvälillä  $I$  pisteillä.

**HUOMIOITA 8.3.**

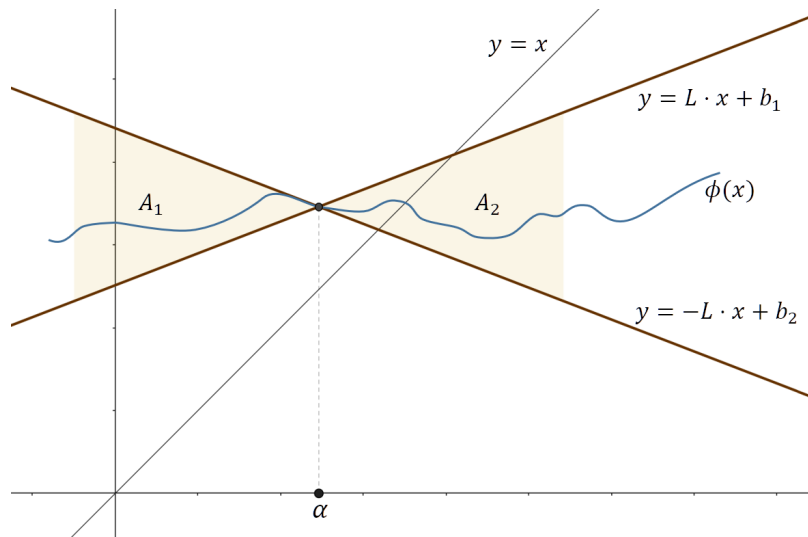
- (1) Jos funktio  $g$  on Lipschitz-jatkuva koko määrittelyvälillään, kutsutaan funktiota  $g$  Lipschitz-funktioksi.
- (2) Lipschitz-ehto rajaa funktion kulkua, jolloin kuvaajan arvot eivät voi kasvaa tai pienentyä holtittomasti. Kuvaajan kasvu on siis rajattua, sillä välillä  $[x, y]$  voi funktion arvojen välimatka  $|g(x) - g(y)|$  muuttua enintään  $L$ -kertaiseksi.

- (3) Lipschitz-jatkuvuus on mielekästä ymmärtää kulmakertoimen ja derivaatan kautta, vaikka Lipschitz-jatkuvuus ei sinänsä tarvitse edes funktion  $f$  derivoituvuutta. Tällöin Lipschitz-vakion  $L$  voi mieltää olevan vähintään funktion  $f$  derivaatan eli kulmakertoimen itseisarvon suuruisen välillä  $I$ . Toisin sanoen

$$L \geq \max(|f'(x)|)$$

Toiselta suunnalta asiaa tarkastellen kaava myös kertoo, että Lipschitz-vakio  $L$  määrää rajaussuorien tarkasteluvälin enimmäisjyrkkyyden.

- (4) Lipschitz-jatkuvuus pisteen  $\alpha$  ympäristössä  $I$  tarkoittaa, että pistettä  $\alpha$  lähestytään asymptoottisuorien rajaaman alueen välimaastossa. Asymptoottisuorien kulmakertoimet ovat  $L$  ja  $-L$ . Tarkalleen kuvaajan  $g$  kulkua ei siis välttämättä tiedetä, vaan Lipschitz-vakion  $L$  avulla voidaan vain asettaa asymptoottiset rajat, minkä alueen rajojen sisäpuolelle funktion arvot varmasti jäävät.



KUVA 8.1. Jos funktio  $\phi$  on Lipschitz-jatkuva vakiolla  $L$  pisteen  $\alpha_\phi$  ympäristössä, voi  $\phi$  saada arvoja enintään asymptoottien väliin jääviltä alueilta  $A_1$  ja  $A_2$ .

SEURAUUS 8.4. *Lipschitz-jatkuvuudesta seuraa jatkuvuus.*

TODISTUS. Olkoon funktio  $g$  mikä tahansa Lipschitz-funktio Lipschitz-vakiolla  $L > 0$ . Olkoon  $\varepsilon > 0$  mikä tahansa luku, jolloin voidaan määritellä  $0 < \delta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{L}$ . Tällöin, jos  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ , niin

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| < L\delta_\varepsilon \leq L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Joten Lipschitz-jatkuvuudesta seuraa jatkuvuus funktiolle  $g$ . □

HUOMAUTUS 8.5. Nyt määriteltiin  $L > 0$  määrittelyn  $L \geq 0$  sijaan. Tapaus  $L = 0$  on triviaali, koska Lipschitz-vakio voi olla nolla vain vakiofunktiolla  $g(x) = c$ , missä  $c \in \mathbb{R}$ . Vakiofunktion Lipschitz-vakioksi kelpaa myös mikä tahansa muukin luku  $L > 0$ , joten tapaus  $L = 0$  ei ole erityisen kiinnostava.

## 8.2. Esimerkkejä

ESIMERKKI 8.6. Funktio  $g: x \mapsto 3x - 8$  on Lipschitz-funktio. Tällöin Lipschitz-vakio on mikä tahansa luku  $L$ , jolle  $L \geq 3$ . Esimerkiksi  $L = 5$ ,  $L = \pi$  ja  $\min(L) = 3$ . Esimerkiksi, kun  $L = 5$  Lipschitz-jatkuvuuden määritelmästä 8.1 saadaan

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |(3x - 8) - (3y - 8)| \\ &= |3x - 3y| \\ &= 3|x - y| \\ &\leq 5|x - y| = L|x - y| \end{aligned}$$

ESIMERKKI 8.7. Funktio  $g(x) = x^2$  ei ole Lipschitz-funktio koko reaalilukuakselilla  $\mathbb{R}$  (tai edes positiivisella reaalilukuakselilla  $\mathbb{R}_+$ ). Lipschitz-ehto ei riitä, sillä vaikka valitaisiin Lipschitz-vakioksi  $L$  jokin (paikallisesti) riittävän suuri luku  $M \in \mathbb{R}_+$ , lopulta jossain kohtaa funktio  $g$  kiihtyy nopeampaan kasvuun kuin Lipschitz-jatkuvuutta rajaava vakio  $M$  antaisi olettaa. Näin tapahtuu, sillä mielivaltaiselle pisteelle  $x + M$ , missä  $x > 0$ , pätee

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x + M)| &= |x^2 - (x + M)^2| \\ &= |x^2 - x^2 - 2xM - M^2| \\ &= |2xM + M^2| \\ &= 2xM + M^2 \\ &\geq M^2 = M|x - (x + M)| \end{aligned}$$

Luvun  $x > 0$  läheltä löydetään aina luku  $x + M$ , joka rikkoo Lipschitz-jatkuvuuden. Graafisesti tämä tarkoittaa sitä, että piste  $f(x + M)$  menee asymptoottisuorien rajaaman alueen ulkopuolelle.

Yhtä hyvin voitaisiin käyttää myös esimerkiksi pistettä  $x + M + 1$  tai  $x + 3M$ , sillä funktio  $g$  on määritelty koko reaalilukuakselilla  $\mathbb{R}$ . Joka tapauksessa  $M$  ei lopulta ole koskaan riittävä. Näin ollen koko reaalilukuakselilla määriteltynä  $g(x) = x^2$  ei ole Lipschitz-funktio.

Sen sijaan funktio  $g$  on Lipschitz-jatkuva rajoituttaessa välille  $[-5, 7]$ . Tällöin Lipschitz-vakio valitaan siten, että  $L \geq 14 = 2 \cdot 7$ , koska välillä  $[-5, 7]$  funktion  $g$  muutosnopeus on suurin kohdassa  $g(7)$ . Toisaalta täytyy olla  $L \geq 14$ , sillä

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |x - y||x + y| \\ &\leq |x - y|(|x| + |y|) \\ &\leq |x - y|(7 + 7) \\ &= 14|x - y| \end{aligned}$$

Lipschitz-vakio  $L$  voi siis olla esimerkiksi  $14$ ,  $11 + \pi$ ,  $\sqrt{2} \cdot 10$  tai  $24$ .

Vaikka funktion  $f$  derivoituvuutta ei ole edes tarvittu, tehdään havainto  $g'(7) = 14$ .

Itse asiassa funktio  $g$  on *paikallisesti* Lipschitz-funktio millä tahansa rajoitetulle määrittelyvälille  $I = [a, b]$ , missä  $a, b \in \mathbb{R}$ . Tällöin Lipschitz-vakio  $L$  on määritettävä siten, että  $L \geq \max |g'(x)|$ , missä  $x \in I$ . Tähän intuitiiviseen havaintoon derivaatan ja Lipschitz-jatkuvuuden yhteydestä palataan myöhemmin kappaleessa 9.4.

**ESIMERKKI 8.8.** Kuvaus  $x \mapsto \sin x$  on Lipschitz-jatkuva koko reaalilukuakselilla  $\mathbb{R}$  ja  $L \geq 1$ . Erityisesti  $\min(L) = 1$ .

Kappaleen tavoitteena oli määritellä iteraattifunktio  $\phi(x)$  siten, että iteraatioyhtälön  $x = \phi(x)$  likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee kohti nollakohtaa  $\alpha$ . Vielä ei ole vastattu kysymykseen, millä ehdoilla näin tapahtuu. Osoittautuu, että tämä pätee ainakin, kun kuvaus  $\phi$  on *kutistavasti* Lipschitz-jatkuva. Tarkastellaan seuraavaksi tuota suppene-  
misen takaavan Lipschitz-ehdon täyttymistä.

## Lipschitz-jatkuvuus iteraatiomenetelmissä

Erotukseksi yleisestä Lipschitz-vakiosta  $L$ , käytetään numeerisiin menetelmiin sovellettaessa Lipschitz-vakion merkintänä kreikkalaista kirjainta  $\lambda$  (*lambda*). Halutaan, että iteraatio on *kutistava*. Tällöin iteraation likiratkaisujono  $x_n$  suppenee kohti kiintopistettä  $\alpha$ . Tämä saavutetaan, kun vaaditaan Lipschitz-vakiolta  $0 < \lambda < 1$ .

### 9.1. Lipschitz-ehto

**MÄÄRITELMÄ 9.1** (Lipschitz-jatkuvuus iteraatiomenetelmissä). Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  väli ja olkoon  $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$  jokin funktio. Jos  $\phi$  toteuttaa jollekin  $\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$ , ehdon

$$(9.1) \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq \lambda|x - y|, \quad \text{kaikilla } x, y \in I$$

on funktio  $\phi$  (kutistavasti) *Lipschitz-jatkuva* välillä  $I$ .

Iteraatiomenetelmissä Lipschitz-jatkuvuus kertoo oleellisesti, että Lipschitz-vakiolla  $\lambda$  Lipschitz-ehto takaa, että kuvapisteen  $\phi(x)$  ja  $\phi(y)$  ovat aidosti lähempänä toisiaan kuin lähtöarvot  $x$  ja  $y$ . Tämä tapahtuu, koska Lipschitz-vakiolle pätee  $0 < \lambda < 1$ .

**HUOMAUTUS 9.2.** Ellei toisin mainita, tästä eteenpäin Lipschitz-jatkuvuudella tarkoitetaan määritelmän 9.1 mukaista rajatumpaa (kutistavaa) Lipschitz-jatkuvuutta, jonka Lipschitz-vakio  $\lambda < 1$ .

**HUOMIOITA 9.3.**

- (1) Lipschitz-jatkuvuudesta puhutaan toisinaan myös *Lipschitz-ehtona*. Tällöin tarkoitetaan, että Lipschitz-ehdon täyttyessä on funktio Lipschitz-jatkuva määrittelyvälillään.
- (2) Määritelmässä 9.1 käytettiin funktiona iteraattikuvausta  $\phi$ . Näin tehdään, koska halutaan tutkia juuri *iteraattifunktion*  $\phi$  Lipschitz-jatkuvuutta, sillä nimenomaan iteraattifunktion  $\phi$  Lipschitz-jatkuvuudella on merkitystä likiratkaisujonon  $\{x_n\}$  kiintopisteeseen  $\alpha$  suppenevuuden kannalta. Nyt ei siis tutkita alkuperäisen funktion  $f$  Lipschitz-jatkuvuutta.
- (3) Oleellisesti iteraatiomenetelmien yhteydessä Lipschitz-jatkuvuusehto on kutistavuusehto. Oleellista kutistavuudelle on ehto  $\lambda < 1$ .
- (4) Lipschitz-ehto ja siitä seuraava kutistavuus tarkoittavat, että funktion  $\phi$  minikä tahansa kahden kuvapisteen välinen etäisyys on pienempi kuin lähtöarvojen välinen etäisyys. Toisin sanoen mille tahansa luvuille  $t, s \in I$  pätee

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \lambda|t - s| < |t - s|, \quad \text{sillä } 0 < \lambda < 1$$

Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin Lipschitz-ehdosta 9.1 seuraavaa kutistavuutta ja likiratkaisujonon  $\{x_n\}$  kiintopisteeseen eli tosiratkaisuun  $\alpha$  suppenemista.

## 9.2. Seurauksia Lipschitz-ehdosta

**LAUSE 9.4** (Kutistavuuslause). *Olkoon  $I_r \subset \mathbb{R}$  väli, jolle  $I_r := [x_0 - r, x_0 + r]$  jollain sopivalla  $r \in \mathbb{R}_+$ . Olkoon  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja  $0 < \lambda < 1$ . Olkoon  $\phi: I_r \rightarrow \mathbb{R}$  jokin funktio, joka on Lipschitz-jatkuva välillä  $I_r$  Lipschitz-vakiolla  $\lambda$ . Lisäksi oletetaan, että alkuarvaukselle  $x_0$  pätee  $|x_0 - \phi(x_0)| \leq (1 - \lambda)r$ .*

*Tällöin*

- (1) *Kaikki iterointiyhtälön  $x = \phi(x)$  iteraatit  $x_n$  sijaitsevat välillä  $I_r$ . Toisin sanoen*

$$\phi(x_n) \in I_r, \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

- (2) *(olemassaolo ja suppeneminen) Iteraatio kutistuu kohti pistettä  $\alpha$ , joka on myös yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisu  $x = \alpha$ . Toisin sanoen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

- (3) *(yksikäsitteisyys) Näin saatu piste  $\alpha$  on kiintopisteyhtälön (7.1) ainoa ratkaisu ja kiintopiste välillä  $I_r$ .*

Oleellisesti kutistavuuslause kertoo, että seuraava likiratkaisu  $x_{n+1}$  on aidosti lähempänä kiintopistettä  $\alpha$  kuin iteraation edellinen likiarvo  $x_n$ . Näin ollen iteraatioaskelia loputtomiin toistaen päädytään lopulta iterointiyhtälön yksikäsitteiseen kiintopisteeseen, ratkaisuun  $\alpha$ . Lauseen johtopäätös 1 kertoo, että iteraation arvot eivät hyppää välin  $I_r$  ulkopuolelle, kun alkuarvaus  $x_0$  on sopivasti valittu. Käytännössä alkuarvaus  $x_0$  tulee valita riittävän läheltä nollakohtaa  $\alpha$ .

**TODISTUS:** 1. Kiinnitetään aluksi alkuarvo  $x_0$ . Nyt sopivan luvun  $r > 0$  avulla saadaan määriteltyä tarkasteluväliksi  $I_r := [x_0 - r, x_0 + r]$ . Tällöin väitteen mukaan kaikille  $x_n$  pätee

$$(9.2) \quad x_0 - r < x_n < x_0 + r$$

Oleellisesti luku  $r$  on alkuarvauksen  $x_0$  ympärille asetettu etäisyys, jonka sisälle kaikki loput likiratkaisut  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  saadaan rajattua. Luku  $r$  ei siis viittaa poikkeamaan, vaan on laajempi ja eri asia kuin poikkeama.

Oletetaan, että Lipschitz-ehto (9.1) pätee välillä  $I_r$ . Oletetaan lisäksi, että alkuarvaukselle  $x_0$  pätee

$$(9.3) \quad |x_0 - \phi(x_0)| \leq (1 - \lambda)r$$

Tämä tarkoittaa, että alkuarvauksen  $x_0$  etäisyys iteraattifunktion kuvapistestään  $\phi(x_0) = x_1$  pysyy tietyn Lipschitz-vakiosta  $\lambda$  ja sopivasti valitusta luvusta  $r$  riippuvan suhteen sisällä. Tällöin molemmat likiarvopisteet sijaitsevat välin  $I_r$  sisäpuolella.



Käytännössä yhtälö kertoo, kuinka alkuarvauksen tulee olla valittu, ettei alkuarvauksesta laskettu ensimmäinen iteraatti  $\phi(x_0) =: x_1$  heilahda alkuarvosta  $x_0$  liian kauaksi. Jos kaava ei päde, on alkuarvaus valittu huonosti. Käytännössä lähtöarvo  $x_0$  tulee valita riittävän läheltä nollakohtaa  $\alpha$ . Tämän jälkeen luvut  $r, \lambda$  sekä väli  $I_r$  ovat siis kiinnitettyjä.

Todistetaan aluksi induktiolla aputuloks kaikille  $n \in \mathbb{N}$ . Koska  $x_1 = \phi(x_0)$  ja  $0 < \lambda < 1$  sekä (9.3) pätevät, seuraa tästä

$$(9.4) \quad |x_0 - x_1| \leq (1 - \lambda)r < r$$

Joten  $x_1$  sijaitsee välillä  $I_r$  eli  $x_0 - r < x_1 < x_0 + r$ . Oletetaan tämä todeksi likiratkaisuille  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Tällöin iterointiyhtälön (7.2) avulla saadaan

$$|x_{n+1} - x_n| = |\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})|$$

ja induktio-oletuksen nojalla  $x_n$  ja  $x_{n-1}$  sijaitsevat välillä  $I_r$  eli epäyhtälö (9.2) pätee näille pisteille. Täten Lipschitz-ehdon (9.1) ja iterointiyhtälön (7.2) perusteella pätee, sillä

$$(9.5) \quad \begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})| \\ &\leq \lambda|x_n - x_{n-1}| = \lambda|\phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2})| \\ &\leq \lambda \cdot \lambda|x_{n-1} - x_{n-2}| = \lambda^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\vdots \\ &\leq \lambda \cdot \lambda^{n-1}|x_1 - x_0| \\ &= \lambda^n|x_1 - x_0| \\ &\leq \lambda^n(1 - \lambda)r \end{aligned}$$

Tässä käytettiin rekursiivista iterointiyhtälöä (7.2), Lipschitz-ehtoa (9.1) sekä lopuksi sovellettiin kaavaa (9.4). Lopulta likiratkaisun  $x_{n+1}$  ja alkuarvauksen  $x_0$  eroa saadaan arvioitua kolmioepäyhtälöä sekä aputuloksen kaavaa (9.5) soveltaen seuraavasti

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_0| &= |(x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \dots + (x_1 - x_0)| \\ &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \dots + |x_1 - x_0| \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^1 + \lambda^0)(1 - \lambda)r \\ &= (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^1 + 1 - \lambda^{n+1} - \lambda^n - \dots - \lambda)r \\ &= (1 - \lambda^{n+1})r \\ &< r, \end{aligned}$$

Täten likiratkaisu  $x_{n+1}$  sijaitsee enintään etäisyyden  $r$  päässä alkuarvauksesta  $x_0$ , sillä

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_0| < r &\Leftrightarrow \\ -r < x_{n+1} - x_0 < r &\Leftrightarrow \\ x_0 - r < x_{n+1} < x_0 + r & \end{aligned}$$

Näin ollen  $x_{n+1} \in I_r$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ , mikä päättää 1-kohdan todistuksen.  $\square$

Iteroidessa käytännön haasteeksi muodostuu alkuarvauksen  $x_0$  valinta. Tällä ongelmalla on huomattava käytännöllinen merkitys, koska huonosti valitulla alkuarvauksella Lipschitz-ehto ei välttämättä pidä ja iteraatio todennäköisimmin hajaantuu. Kun alkuarvaus  $x_0$  on sopivasti valittu, lauseen johtopäätös 2 kertoo, että iteraatio suppenee kohti iteraation kiintopistettä  $\alpha$ , joka tietysti on myös alkuperäisen yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisu.

**TODISTUS: 2: OLEMASSAOLO JA SUPPENEMINEN.** Todistetaan aluksi, että liki-ratkaisulukujono  $\{x_n\}$  on Cauchy-jono. Nyt mielivaltaisille kokonaisluvuille  $m, p > 0$  pätee

$$\begin{aligned} |x_m - x_{m+p}| &= |(x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_{m+2}) + \dots + (x_{m+p-1} - x_{m+p})| \\ &\leq |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \dots + |x_{m+p-1} - x_{m+p}| \\ &\leq (\lambda^m + \lambda^{m+1} + \dots + \lambda^{m+p-1})(1 - \lambda)r \\ &\leq (1 - \lambda^p)\lambda^m r \end{aligned}$$

Tässä käytettiin epäyhtälöitä aiemman 1-kohdan todistuksen kaavasta (9.5).

Nyt koska luku  $\lambda$  on kiinnitetty, mille tahansa määrättylle  $\beta > 0$  löydetään kokonaisluku  $N(\beta)$ , jolle pätee  $|x_m - x_{m+p}| < \beta$  kaikilla  $m > N(\beta)$  ja  $p > 0$ . (Tarvitaan siis sellainen  $N$ , jolle  $\lambda^N < \frac{\beta}{r}$ ). Näin ollen lukujono  $\{x_n\}$  on Cauchy-jono, joka reaalilukujen  $\mathbb{R}$  täydellisyyden nojalla suppenee ja sillä on raja-arvo  $\alpha \in I_r$ .

Koska funktio  $\phi$  on jatkuva välillä  $I_r$ , niin lukujonolla  $\{\phi(x_n)\}$  on raja-arvo  $\phi(\alpha)$  ja kiintopisteyhtälön (7.3) perusteella tuon raja-arvon on myös oltava  $\alpha$ . Toisin sanoen  $\alpha = \phi(\alpha)$ , joten haluttu ratkaisu  $\alpha$  on olemassa.

Lisäksi oleellisesti todistettiin, että likiratkaisulukujono  $\{x_n\}$  on Cauchy-jono, jolloin likiarvojonon suppenee kohti yhtälön ratkaisua  $\alpha$ .  $\square$

Viimeisenä johtopäätöksenä 3 osoitetaan, että kutistavasta Lipschitz-jatkuvuudesta välillä  $I_r$  seuraa ratkaisun  $\alpha$  on yksikäsitteisyys.

**TODISTUS: 3: YKSIKÄSITTEISYYS.** Olkoon  $x, y \in I \subset \mathbb{R}$  ja funktio  $\phi$  on Lipschitz-jatkuva välillä  $I$  Lipschitz-vakiolla  $0 < \lambda < 1$ . Tässä väli voi olla  $I_r$  tai tätä kapeammin määritelty  $I = [a, b]$ .

Oletetaan, että välillä  $I$  funktiolla  $\phi$  on kaksi eri kiintopistettä

$$\alpha_1 = \phi(\alpha_1), \quad \alpha_2 = \phi(\alpha_2)$$

Vähentämällä lausekkeet puolittain saadaan

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)$$

Soveltaen itseisarvoa, Lipschitz-ehtoa (9.1) ja kiintopisteyhtälöä (7.3) saadaan

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq \lambda |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|,$$

mikä on ristiriita.  $\square$

HUOMAUTUS 9.5. Lauseen 9.4 kohta 1 tarkoittaa oleellisesti

$$\phi(x_n) \in I_r, \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

Toisin sanoen iteraattifunktion  $\phi$  kuvapisteen  $\phi(x_n)$  eivät karkaa välin  $I_r$  ulkopuolelle, kun alkuarvaus  $x_0$  on sopivasti valittu. Siten lähtöarvosta  $x_0$  seuraava likiratkaisujono  $\{x_n\}$  myös pysyy välillä  $I_r$ . Vastaavasti käänteisesti voidaan sanoa, että jos tiedetään, että  $\phi: I \rightarrow I$ , seuraa tästä  $\phi(x) \in I$  kaikilla  $x \in I$ . Määrittely  $\phi: I \rightarrow I$  on siis vahvempi oletus.

Jos kutistavuuslauseessa 9.4 johtopäätös 1 sekä ratkaisun  $\alpha$  olemassaolo oletetaan tunnetuksi, seuraavat tästä kohdat 2 sekä 3 suoraviivaisemmalla todistuksella. Oleellisesti tällöin oletetaan  $\phi(x) \in I$  eli kuvauksen arvopisteet eivät karkaa määrittelyvälin ulkopuolelle. Siten kuvaukselle pätee  $\phi: I \rightarrow I$ . Lisäksi täytyy olettaa a-prioristi ratkaisun  $\alpha$  olemassaolo siten, että  $\phi(\alpha) = \alpha$ , joka myös todistetaan yllä osana kohtaa 2. (Käytännön menetelmissä ratkaisun  $\alpha$  olemassaolo voitaisiin usein todeta esimerkiksi jatkuvuuden ja Bolzanon lauseen avulla). Tällöin kutistavuuslauseen 9.4 johtopäätöksen 2 suppeneminen  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$  voidaan todistaa hieman elegantimmin, mutta ilman Cauchyn jonojen käyttöä. Lisäksi näillä lisäoletuksilla tarkasteluväliksi voidaan määrittää yksinkertaisempi  $I = [a, b]$ . Todistetaan seuraavaksi kutistavuuslauseen 9.4 johtopäätös 2 näillä oletuksilla.

**TODISTUS: 2: SUPPENEMINEN.** Oletetaan, että ratkaisu  $\alpha$  on olemassa. Nyt riittää osoittaa, että likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee kohti tosiratkaisua  $\alpha$ . Näin ollen tarkastellaan poikkeamaa  $\varepsilon_n$  eli liki- ja tosiratkaisun erotusta  $|x_n - \alpha|$ , jolle iterointiyhtälön (7.1) ja Lipschitz-ehdon (9.1) perusteella

$$(9.6) \quad |\varepsilon_n| = |x_n - \alpha| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\alpha)| \leq \lambda |x_{n-1} - \alpha|$$

Epäyhtälö (9.6) pätee ensimmäiselle termille, sillä  $|x_1 - \alpha| \leq \lambda |x_0 - \alpha|$ . Siten induktio-periaatteen perusteella mille tahansa  $n \in \mathbb{N}$  pätee

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &\leq \lambda |x_{n-1} - \alpha| \\ &\leq \lambda \cdot \lambda^{n-1} |x_0 - \alpha| \\ &= \lambda^n |x_0 - \alpha| \end{aligned}$$

Koska  $0 \leq \lambda < 1$ , niin  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ . Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n |x_0 - \alpha| = 0,$$

joten toistojen lähestyessä ääretöntä poikkeama  $\varepsilon_n$  katoaa. Likiratkaisun  $x_n$  suppenemisen kannalta tämä tarkoittaa samaa kuin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha,$$

mikä päättää todistuksen. □

Kutistavuuslause 9.4 tarkoittaa oleellisesti, että Lipschitz-ehdon täytyttyessä iteraatio-prosessia toistamalla poikkeamista  $\{|\varepsilon_n|\}$  saadaan suppeneva geometrinen lukujono.

Täten likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee kohti yksikäsitteistä tosiratkaisua  $\alpha$ . Toisin sanoen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Väli  $I$  ja erityisesti todistuksen väli  $I_r$  ovat oleellisesti ratkaisun  $\alpha$  (lähi)ympäristö. Välillä  $I_r$  vakion  $r$  määrittäminen ei ollut kovin konkreettista. On vain todettu, että sopivalla  $r$  kyseinen ympäristö löytyy. Sen selvittämiseksi, mikä on riittävä väli kutistavuuden ja Lipschitz-ehdon toteutumiseksi, ei ole löydetty yleistä metodia. Ongelman toinen puoli on, kuinka löytää riittävän lähellä nollakohtaa  $\alpha$  sijaitseva alkuarvaus  $x_0$  siten, että tästä alkava likiratkaisujono  $\{x_n\}$  varmasti kutistuu. Tähän ei myöskään ole löydetty yleistä metodia. Yleistä metodia ei ole, koska suppeneminen liittyy niin läheisesti iteraattifunktion  $\phi$  ominaisuuksiin. Toisaalta iteraattifunktioon vaikuttavat voimakkaasti käytetty iterointimenetelmä sekä alkuperäisen funktion  $f$  ominaisuudet.

HUOMIOITA 9.6.

- (1) Kun iteraattifunktio  $\phi$  on kutistavasti Lipschitz-jatkuva, tarkoittaa se graafisesti, että käyrä ei aaltoile kovin pahasti. Tällöin kuvaajan arvot lähenevät ”suuremmin pomppimatta” kohti pistettä  $\alpha$ . Yleisen Lipschitz-ehdon vakiolla  $L$  täyttävä käyrä voi aaltoilla ja siis kasvaakin välillä, mutta iteraatiomenetelmien Lipschitz-vakiolla  $\lambda < 1$  näin ei voi tapahtua. ”Aallot” ja ”pomput” pysyvät maltillisina. Tästä syystä iteraatioyhtälöstä saatu lauseke  $\phi(x) \pm x$  on aidosti monotoninen ratkaisun  $\alpha$  lähiympäristössä.
- (2) Numeeristen menetelmien tapauksessa iteraattifunktio  $\phi$  on aina rajoitettu jollekin välille  $I$ . Geometrisesti  $I \times I$  tarkoittaa laatikkoa, jonka sisälle sekä funktion  $\phi$  määrittely- että arvojoukko jäävät. Täten kuvaaja  $y = \phi(x)$  sijaitsee laatikon  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$  sisässä.
- (3) Iteraatio ja likiratkaisulukujono  $\{x_n\}$  saattaa supeta myös, kun Lipschitzvakio  $\lambda \geq 1$ , mutta tästä ei ole mitään varmuutta.

Jos yhtälöstä  $x = \phi(x)$  tiedetään, että  $\phi$  toteuttaa Lipschitz-ehdon niin tällöin välillä  $I$  funktion  $\phi(x)$  kulmakerron on koko ajan alle yhden, sillä  $\lambda < 1$ . Toisaalta, yhtälön toisen puolen,  $y = x$ , kulmakerron on tasan yksi. Täten intuitiivisesti funktion  $\phi(x) \pm x$  on oltava aidosti monotoninen. Tutkitaan tätä intuitiivista havaintoa tarkemmin.

LAUSE 9.7 (Monotonisuus). *Jos funktio  $\phi(x)$  on Lipschitz-jatkuva välillä  $I$  Lipschitzvakioilla  $0 < \lambda < 1$ , lauseke  $\phi(x) - x$  on aidosti vähenevä sekä lauseke  $\phi(x) + x$  on aidosti kasvava välillä  $I$ .*

TODISTUS. Olkoot  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$ . Jos  $x < y$  eli  $x - y < 0$ , niin

$$\begin{aligned} \phi(x) - x - (\phi(y) - y) &= \phi(x) - \phi(y) - (x - y) \\ &\geq -|\phi(x) - \phi(y)| + |x - y| \\ &\geq -\lambda|x - y| + |x - y| = \underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} \underbrace{|x - y|}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Siten  $\phi(x) - x > \phi(y) - y$ , joten monotonisuuden määritelmän perusteella  $\phi(x) - x$  on aidosti vähenevä.

Vastaavasti lausekkeelle  $\phi(x) + x$  pätee

$$\begin{aligned}\phi(x) + x - (\phi(y) + y) &= \phi(x) - \phi(y) + (x - y) \\ &\leq |\phi(x) - \phi(y)| - |x - y| \\ &\leq \lambda|x - y| - |x - y| = \underbrace{(\lambda - 1)}_{<0} \underbrace{|x - y|}_{>0} < 0\end{aligned}$$

Siten  $\phi(x) + x < \phi(y) + y$ , joten monotonisuuden määritelmän perusteella  $\phi(x) + x$  on aidosti kasvava.  $\square$

HUOMIOITA 9.8.

- Vaikka lauseke  $\phi(x) \pm x$  on aidosti monotoninen, ei iteraattifunktio  $\phi(x)$  sitä itsessään (välttämättä) ole. Esimerkiksi  $\frac{1}{2} \sin x$  ei ole monotoninen, kun taas  $x \pm \frac{1}{2} \sin x$  on aidosti monotoninen millä tahansa määrittelyvälillä  $I$ .
- Lausekkeen  $\phi(x) \pm x$  aito monotonisuus takaa sen, että iterointiyhtälöllä

$$\phi(x) = x \Leftrightarrow \phi(x) - x = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu. Perustelu: Kuvaus  $\phi(x) - x$  on aidosti monotonisena funktiona myös injektio, josta seuraa yhtälön  $\phi(x) - x = 0$  ratkaisun yksikäsitteisyys.

### 9.3. Poikkeaman arviointia Lipschitz-vakion avulla

Lauseen 9.4 todistuksessa käsiteltiin hieman Lipschitz-jatkuvan funktion poikkeaman arviointia. Siirrytään seuraavaksi arvioimaan Lipschitz-ehdon antamien työvälineiden avulla iteratiivisten menetelmien poikkeaman  $\varepsilon$  suuruutta.

Kiinnitetään  $n$ , joka on positiivinen kokonaisluku. Lisäksi olkoon luku  $m$ , jolle  $m > n$ . Tutkitaan seuraavaksi kahden likiratkaisun etäisyyttä ja etsitään arvio erotukselle  $x_m - x_n$ , joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$x_m - x_n = (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)$$

Soveltaen tähän kolmioepäyhtälöä saadaan

$$(9.7) \quad |x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$$

Epäyhtälöstä (9.5) saadaan kaava

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^n |x_1 - x_0|,$$

jota sovelletaan arvioimaan ylläolevan kolmioepäyhtälön antaman kaavan (9.7) oikeanpuoleisia termejä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq \lambda^m |x_1 - x_0| + \lambda^{m-1} |x_1 - x_0| + \dots + \lambda^n |x_1 - x_0| \\ &\leq (\lambda^m + \lambda^{m-1} + \dots + \lambda^n) |x_1 - x_0|\end{aligned}$$

Nyt, koska  $0 < \lambda < 1$ , geometrisen sarjan kaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned}\lambda^m + \lambda^{m-1} + \dots + \lambda^n &= \lambda^n(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{m-n}) \\ &\leq \lambda^n(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) \\ &= \lambda^n \frac{1}{1 - \lambda}\end{aligned}$$

Täten likiratkaisuiden erolle saadaan raja

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|$$

Siten, luvun  $n$  pysyessä vakiona ja kun  $m \rightarrow \infty$ , niin tällöin  $x_m \rightarrow \alpha$  ja saadaan seuraava tulos.

LAUSE 9.9 (Poikkeaman arviointi Lipschitz-vakion avulla).

*Olkoon funktio  $\phi$  Lipschitz-jatkuva välillä  $I$  sekä  $\phi(x) \in I$ , kaikilla  $x \in I$ . Tällöin  $n$ . iteraation jälkeen likiratkaisun  $x_n$  poikkeama  $\varepsilon_n$  on enintään*

$$|\varepsilon_n| = |x_n - \alpha| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|$$

TODISTUS. Lauseen tulos todistettiin ylläolevassa päättelyssä. □

Tulos auttaa siis arvioimaan poikkeaman enimmäissuuruutta  $n$ . iteraation jälkeen. Tulos on kuitenkin sangen teoreettinen, sillä lause ei itsessään kerro mitään kuinka poikkeaman suuruuteen oleellisesti vaikuttava Lipschitz-vakion  $\lambda$  arvo löydetään. Tähän on käytettävä muita matemaattisia työkaluja ja arviointia.

#### 9.4. Derivaatta työkaluna Lipschitz-ehdon tutkinnassa

Lipschitz-ehdon 9.1 täyttävä funktio ei voi miten tahansa ”pomppia”. Geometrisesti tämä tarkoittaa, että iteraattifunktion  $\phi$  kulmakerroin pysyy alle Lipschitz-vakion  $\lambda < 1$ . Toisin sanoen, jos iteraattifunktio  $\phi$  on derivoituva ja täyttää Lipschitz-ehdon, on iteraattifunktion derivaatta  $\phi'$  rajattu. Täten voidaan muokata seuraava lause.

LAUSE 9.10 (Lipschitz-jatkuvan funktion derivaatan maksimi). *Vakiolla  $0 < \lambda < 1$  Lipschitz-jatkuvan funktion  $\phi$  derivaatta  $\phi'(x)$  on välillä  $I$  enintään suuruudeltaan*

$$|\phi'(x)| \leq \lambda < 1$$

TODISTUS. Olkoot  $x, y \in I$ . Derivaatan erotusosamäärän perusteella

$$\begin{aligned}|\phi'(x)| &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|} \\ &\leq \lim_{y \rightarrow x} \frac{\lambda|x - y|}{|x - y|} \\ &= \lambda\end{aligned}$$

□

Siten, jos derivaatta  $\phi'$  on olemassa, niin Lipschitz-jatkuvan iteraattifunktion derivaatan arvon suuruus  $|\phi'|$  voi olla enintään  $\lambda$  tarkasteluvälillä  $I$ . Vastaavasti sama pätee myös käänteiseen suuntaan.

LAUSE 9.11 (Derivaattaehto eli Lipschitz-jatkuvuuden yhteys derivaattaan). *Olkoon  $\phi$  jokin jatkuvasti derivoituva funktio, jolle on voimassa*

$$|\phi'(x)| \leq \lambda, \quad \text{kaikilla } x \in I, \quad 0 \leq \lambda < 1$$

*Tällöin  $\phi$  on Lipschitz-jatkuva välillä  $I$  Lipschitz-vakiolla  $\lambda$ .*

TODISTUS. Olkoot  $x, y \in I$ . Väliarvolauseen mukaan on olemassa piste  $\xi \in I$ , jolle pätee

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &= |\phi'(\xi)||x - y| \\ &\leq \lambda|x - y|, \end{aligned}$$

mikä on täsmälleen mitä Lipschitz-ehto vaatii. □

ESIMERKKI 9.12. Esimerkissä 7.11 ratkaistiin yhtälö  $x^2 - 25 = 0$  nimeämätöntä iteraattifunktiota  $\phi_2(x) = \sqrt{12x + 61} - 6$  iteroimalla. Nyt derivoitumisehdon 9.11 avulla voidaan tarkemmin tutkia tuota iteraattifunktiota  $\phi_2$ , sillä  $\phi_2'(x) = \frac{6}{\sqrt{12x+61}}$ . Tällöin pätee  $|\phi_2'(x)| < \lambda$ , kun  $x > 0$ . Tämä voidaan päätellä seuraavasti.

Selkeästi  $\phi_2'(x) > 0$ . Lisäksi  $\phi_2'$  on laskeva neliöjuuri- ja osamäärän yhdistettynä funktiona. Tällöin  $\phi_2'$  on ylhäältä rajoitettu ja arvoille  $x > 0$  pätee

$$\sup(\phi_2'(x)) = \phi_2'(0) = \frac{6}{\sqrt{12 \cdot 0 + 61}} = \frac{6}{\sqrt{61}} = \sqrt{\frac{36}{61}} < \sqrt{\frac{61}{61}} = 1$$

Esimerkistä voi huomata, että yleisesti iteraatiofunktiota ilman palautuskaavaa itse algebrallisesti muodostettaessa on hyödyllistä pyrkiä muokkaamaan alkuperäisestä yhtälöstä iteroitava lauseke, jonka derivaatta jää alle yhden. Tällöin Lipschitz-jatkuvuuden derivoituvuusehdon 9.11 mukaisesti iteraatio suppenee.

HUOMAUTUS 9.13. Lauseen 9.11 derivoituvuusehto  $|\phi'(x)| < 1$  on Lipschitz-jatkuvuutta vahvempi ehto. Funktio voi olla Lipschitz-jatkuva vaikka se ei välttämättä ole edes derivoituva kyseisellä välillä.

SEURAUUS 9.14. *Jos Lipschitz-ehdon 9.1 Lipschitz-vakion  $\lambda$  määrittely korvataan epäyhtälöllä*

$$|\phi'(x)| \leq \lambda < 1$$

*saa Lipschitz-ehto tällöin muotoilun*

$$(9.8) \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq |\phi'(\xi)||x - y|$$

*Tästä seuraa Lipschitz-jatkuvuus 9.1 ja siten myös aiemmin todistetut Lipschitz-ehdosta seuraavat lauseet.*

HUOMAUTUS 9.15. Derivoituvuusehto on riittävä, muttei välttämätön. On siis olemassa tilanteita, joissa epäyhtälö (9.8) ei toteudu, mutta iteraattifunktio on tästä huolimatta Lipschitz-jatkuva kyseisellä välillä. Esimerkiksi  $g_1(x) = \frac{1}{2}|x|$  ja  $g_2(x) = \frac{|\sin x|}{2}$

ovat Lipschitz-jatkuvia peräti koko reaalilukuakselilla Lipschitz-vakiolla  $\lambda > \frac{1}{2}$ , mutta kyseiset funktiot eivät ole derivoituvia koko määrittelyjoukossaan.

Jos iteraattifunktiolla  $\phi$  on olemassa derivaatta  $\phi'$ , on derivoituvuusehdon soveltaminen käytännöllinen työkalu tarkasteltaessa onko Lipschitz-ehto voimassa ja siten suppeneeko iteraatio. Derivaatan laskeminen yksittäisessä pisteessä  $x_n$  ja testaaminen päteekö  $|\phi'(x_n)| < 1$  antaa suppenemiskriteerin täyttymisestä viitteitä. Kuitenkaan yksittäinen tarkastelupiste ei takaa Lipschitz-ehdon täyttymistä koko tarkasteluvälillä  $I$ . Tällöin yhtälön ja derivaatan tarkempi analysointi antaa lisätietoa päteekö Lipschitz-ehto koko tarkasteluvälille. Tämä voidaan päätellä esimerkiksi tarkastelemalla iteraattifunktion derivaatan  $\phi'$  arvoa ja kulkua.

### 9.5. Iteraation päättymättömyys

Sumerilaisten menetelmän yhteydessä esimerkissä 7.14 neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiratkaisu  $x_n$  lähenee tosiratkaisua  $\alpha$  huomattavan nopeasti ja näyttää jo siltä, että esityskyvyn rajoissa likiarvo  $x_8$  on luku 5. Näin ei kuitenkaan ole jos käytetty laskentakone kykenee ilmaisemaan desimaaliluvun riittävän tarkasti. Selvästi  $x_7 \approx 5$ , mutta tästä huolimatta ei ole pelkästään  $x_7 \neq 5$  ja  $x_8 \neq 5$ , vaan lisäksi

$$x_n \neq 5, \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

Algebrallisesti voidaan päätellä, että tarkka ratkaisu on täsmälleen  $\sqrt{25} = 5$ , sillä onhan neliöjuuren määritelmän nojalla  $5^2 = 25$ . Neliöjuureen on siis jopa kokonaislukuratkaisu  $\alpha = 5$ . Tämän vuoksi on varsin hämmästyttävää, että jos iteraation alkuehdot suppenemisestä pitävät ja vaikka kuinka pitkälle iteraatioprosessissa edetään, ei tuohon symboliseen tarkkuuteen  $\alpha = 5$  päästä koskaan edes kokonaislukuratkaisun tapauksessa. Jos iteraation alkuarvaus  $x_0$  ei osu täsmälleen nollakohtaan  $\alpha$ , äärellisellä määrällä iteraatioita ei koskaan päästä perille saakka. Siten likiratkaisujonon  $\{x_n\}$  arvot tarkentuvat, mutta iteraatio ei koskaan saavuta kiintopistettään ja ole tarkalleen tosiratkaisu  $\alpha$ . Tämä esimerkistä tehty intuitiivinen havainto on totta myös yleisesti.

**LAUSE 9.16** (Iteraation päättymättömyyslause). *Oletetaan, että funktio  $\phi$  on jatkuvasti derivoituva välillä  $I$  sekä koko välillä  $I$  pätee  $\phi'(x) \neq 0$ .*

*Ellei alkuarvauksella  $x_0$  päädytä triviaalisti ja välittömästi tosiratkaisuun  $\alpha$ , äärellisellä määrällä iteraatioaskelia likiratkaisujonon  $\{x_n\}$  poikkeama  $\varepsilon_n$  ei ole koskaan nolla. Toisin sanoen*

$$\varepsilon_n = x_n - \alpha \neq 0, \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

**TODISTUS.** Tehdään vastaoletus, että jostain  $n$ :nnestä likiratkaisusta  $x_n$  alkaen  $\phi(x_n) = x_n$  eli  $x_n$  toimii iteraation kiintopisteenä. Täten  $n$  on ensimmäinen järjestysluku mistä alkaen  $\phi(x_n) = x_n$  ja siten

$$x_n = \phi(x_{n-1}) = \phi(x_n), \quad \text{missä } x_{n-1} \neq x_n$$

Tällöin differentiaalilaskennan Väliarvolauseen perusteella

$$0 = \phi(x_{n-1}) - \phi(x_n) = \phi'(\xi)(x_{n-1} - x_n),$$



missä  $\xi$  sijaitsee pisteiden  $x_{n-1}$  ja  $x_n$  välissä.

Koska  $x_{n-1} - x_n \neq 0$ , täytyy siis olla  $\phi'(\xi) = 0$ , mikä on kuitenkin ristiriita oletuksen kanssa, ettei  $\phi'$  koskaan mene nolllaksi.  $\square$

**SEURAUUS 9.17.** *Iteraation päättymättömyydestä seuraa, että millä tahansa iteraatio-  
kierroksella  $n \in \mathbb{N}$  poikkeama  $\varepsilon_n \neq 0$ .*

Päättymättömyyslause 9.16 tarkoittaa, että edes iteraation supetessa ei millään äärellisellä  $n$  likiratkaisulla  $x_n$  saavuteta tosiratkaisua  $\alpha$ . Siten Lipschitz-ehdon pitäessä iteraatio tarkentuu asymptoottisesti geometrisenä lukujonona kohti ratkaisua  $\alpha$ , mutta ei koskaan saavuta sitä. Iteraatio ei siis koskaan ole ”valmis”. Laskenta jää aina kesken ja likiratkaisun tarkkuus vajaan. Kun suppenemisen alkuehdot ovat voimassa, ratkaisuun  $\alpha$  ei voida osua edes ”vahingossa”. Sen sijaan esimerkiksi puolitusmenetelmässä voidaan erityisen epätodennäköisen onnekaalla sattumalla päätyä nolllakohtaan  $\alpha$  välin  $I_n$  keskipisteen osuessa täsmälleen nolllakohtaan  $\alpha$ .

Kappaleessa varmistuttiin siitä, että iteraatio suppenee ainakin silloin, kun iteraatifunktio  $\phi$  on Lipschitz-jatkuva. Lipschitz-ehdon ja erityisesti derivoituvuusehdon  $|\phi'(x)| < \lambda < 1$  avulla saatiin työväline varmistua siitä, että iteraatio suppenee. Oleellista suppenemiselle on hyvä alkuarvaus  $x_0$  tai Lipschitz-jatkuvuus välillä  $I$ .

Nyt on iteraatiota ja sen suppenemista tarkasteltu sangen yleisellä tasolla. Siirrytään siis eteenpäin kohti matemaattisten työkalujen soveltamista käytäntöön ja tarkastellaan seuraavaksi konkreettisia iteratiivisia yhtälönratkaisumenetelmiä.



## Kiintopistemenetelmä

Kiintopistemenetelmä (functional iteration method, fixed point iteration method) on yksinkertaisin iteratiivisista yhtälönratkaisumenetelmistä ja siihen viitataan toisinaan myös *iteraatiomenetelmänä* (the method of iteration, simple iteration method). Kiintopistemenetelmä on kuitenkin vain yksi useasta iteraatioperiaatetta ja kiintopisteyhtälöä käyttävästä yhtälönratkaisumenetelmästä, jonka vuoksi yksittäisen menetelmän merkityksessä seuraavaksi käsiteltävää iteraatiomenetelmää kutsutaan *kiintopistemenetelmäksi* tai *yksinkertaiseksi kiintopistemenetelmäksi*.

### 10.1. Menetelmä

Iteraatiossa ideana oli muokata nollakohtayhtälöä  $f(x) = 0$  siten, että siitä saadaan muodostettua muotoa  $x = \phi(x)$  oleva iterointiyhtälö. Yksinkertaisimmillaan iteraattifunktio  $\phi$  voidaan muodostaa seuraavasti.

IDEA 10.1 (Kiintopistemenetelmä). Korjataan edellistä juuren likiarvoa  $x_n$  suoraan funktion  $f$  arvolla  $f(x_n)$ . Jos ollaan jo lähellä yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisua ja  $x_n \approx \alpha$ , tällöin funktion arvo likiratkaisussa  $f(x_n)$  on lähes nolla, sillä  $f(\alpha) = 0$  ja  $f(x_n) \approx 0$ . Tällöin uutta likiratkaisua  $x_{n+1}$  korjataan vähemmän, jos ollaan jo lähellä nollakohtaa, ja enemmän, jos ollaan kauempana nollakohdasta.

Tällöin rekursiivinen iterointiyhtälö saa yksinkertaisen muodon  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$  ja palautuskaava voidaan määritellä seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 10.2. Jatkuvalle funktiolle  $f$  kiintopistemenetelmän palautuskaava on

$$(10.1) \quad x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - f(x_n)$$

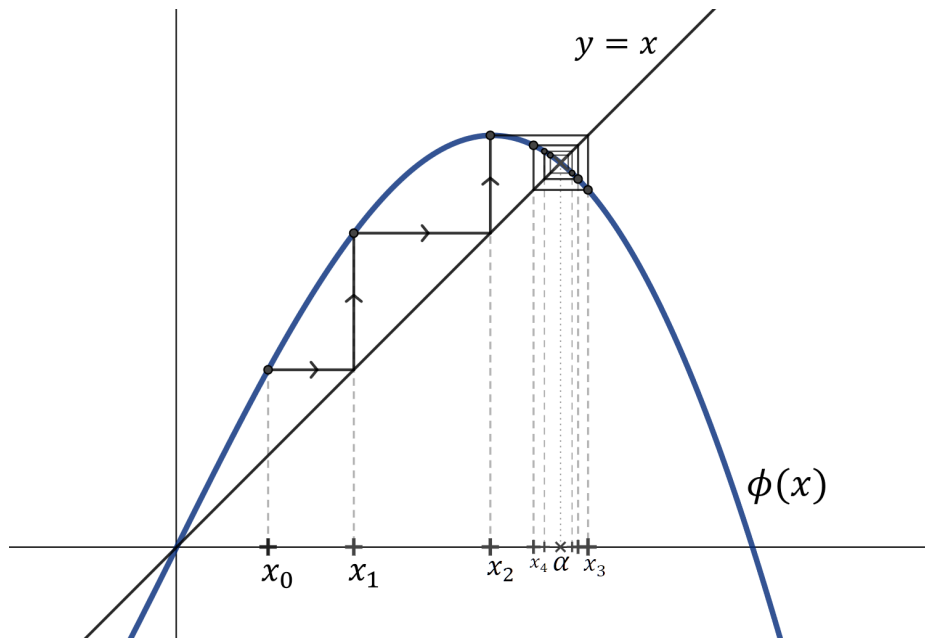
ja yleisesti

$$\phi(x) = x - f(x)$$

Siten kiintopistemenetelmän iteraattifunktio  $\phi$  on helposti muodostettavissa mistä tahansa yhtälöstä siirtämällä kaikki yhtälön osat toiselle puolelle, vertaamalla tätä nollaan ja lisäämällä puolittain muuttuja  $x$ . Toisin sanoen

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x$$

Nyt kun yllä on määritelty iteraattifunktio, käytetään alkuperäisen yhtälön ratkaisemiseen menetelmällisesti rekursiivista iterointiyhtälöä (7.2) eli  $x_{n+1} = \phi(x_n)$ . Toimiakseen kiintopistemenetelmä tarvitsee funktion  $f$  jatkuvuuden sekä varmasti konvergoidakseen iteraattifunktion  $\phi$  Lipschitz-jatkuvuuden 9.1 sopivasti määritellyllä välillä  $I$ .



KUVA 10.1. Kuvan kiintopisteiteraatio suppenee aluksi etenemällä kohti ratkaisua  $\alpha$ , kunnes lopuksi iteraatio jää oskilloiden suppenemaan geometrisenä lukujonona kiintopisteen ympärillä. Huomaa myös kuinka arvot peilautuvat takaisin iteraattifunktion  $\phi$  käyrälle identiteettisuoran  $y = x$  kautta.

HUOMAUTUS 10.3. Yhtäpitävästi voidaan iteraattifunktio määrittää palautuskaavalla

$$\phi_+(x) := x + f(x)$$

Poikkeavilla palautuskaavan määritelmillä on se ero, että ollaanko ratkaisemassa yhtälöä  $-f(x) = 0$  vai  $f(x) = 0$ .

## 10.2. Suppeneminen

Iteraattifunktio on aina yllä kuvatulla tavalla muodostettavissa varsin yksinkertaisesti. Tämä ei tosin vielä takaa, että iteraation likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee.

ESIMERKKI 10.4. Lasketaan likiarvo neliöjuurelle  $\sqrt{25}$ . Muodostetaan aluksi funktiosta  $f(x) = x^2 - 25$  kiintopistemenetelmällä iteraattifunktio

$$\phi_0(x) = x - f(x) = x - x^2 + 25$$

Tällöin ollaan siis iteroimassa yhtälöä

$$x = x - x^2 + 25$$

Iteroidaan alkuarvauksella  $x_0 = 2$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= \phi_0(2) \\ &= 2 - 2^2 + 25 \\ &= 23 \\ x_2 &= -481 \\ x_3 &= -231817 \\ x_4 &= -53739353281 \\ &\dots \end{aligned}$$

Epäilemättä iteraatio hajaantuu. Tämä ei ole yllättävää, sillä kaikilla  $x \geq 1$  pätee

$$|\phi_0'(x)| = |-2x + 1| \geq 1$$

Lipschitz-ehto ei siis ole voimassa.

Iteraatiomenetelmien kanssa on siis oltava erityisen tarkka, miten alkuperäisestä yhtälöstä  $f(x) = 0$  muokataan iterointiyhtälö  $x = \phi(x)$ . Jotkin iteraattifunktion  $\phi$  likiratkaisujonot suppenevat, toiset eivät, kuten aiemmin eri iteraattifunktioiden yhteydessä esimerkissä 7.10 pohdittiin. Nyt selvästikin kiintopistemenetelmän iteraatio hajaantuu.

Kiintopistemenetelmän yksinkertaisen iteraattifunktion kaavan  $\phi(x) = x - f(x)$  soveltaminen ei tuottanut haluttua tulosta, vaan iteraatio hajaantui. Usein alkuperäistä funktiota  $f$  voidaan kuitenkin muokata sopivasti, jolloin kiintopistemenetelmää sovelletaan tähän muokattuun funktioon  $\tilde{f}$ , sillä yhtäpitävästi

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(x) = 0,$$

missä muokattu funktio  $\tilde{f}(x)$  on alkuperäisen funktion  $f$  loivennettu versio

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{m}, \quad m \in \mathbb{R}_+$$

Sovelletaan kiintopistemenetelmän palautuskaavaa muokattuun funktioon  $\tilde{f}$ , jolloin saadaan kiintopisteyhtälö

$$x = \tilde{\phi}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x + \tilde{f} \quad \Leftrightarrow \quad x = x - \frac{f(x)}{m}$$

ESIMERKKI 10.5. Valitaan, että  $m = 20$ , jolloin ratkaisun  $\alpha$  lähetyvillä  $|\tilde{\phi}'(x)| < 1$ , sillä

$$\left| \tilde{\phi}'(x) \right| = \left| 1 - \frac{f'(x)}{m} \right| = \left| 1 - \frac{2x}{20} \right|$$

Kun tiedetään, että neliöjuuren  $\sqrt{25}$  ratkaisu  $\alpha$  on välillä  $[1, 8]$ , voidaan derivaatan ja funktion kulun avulla päätellä, että

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}'(8)| &\leq \left| 1 - \frac{2 \cdot 8}{20} \right| = \frac{1}{5} < 1 \\ |\tilde{\phi}'(1)| &\leq \left| 1 - \frac{2 \cdot 1}{20} \right| = \frac{9}{10} < 1 \end{aligned}$$

Derivaatta  $\phi'$  on monotoninen, sillä  $\phi''(x) = \frac{1}{10} > 0$ . Täten  $\phi'$  saavuttaa maksimiarvonsa joko välin alku- tai loppupisteessä.

Tällöin alkuarvauksella  $x_0 = 2$  saadaan likiratkaisut

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= \tilde{\phi}(2) \\ &= 2 - \frac{f(2)}{20} \\ &= 3,05 \\ x_2 &= 3,834875 \\ x_3 &= 4,34956168671875 \\ x_4 &= 4,65362734339016 \dots \\ x_5 &= 4,82081497083273 \dots \\ x_6 &= 4,90880212168248 \dots \\ x_7 &= 4,95398520819076 \dots \\ x_8 &= 4,97688673604212 \dots \\ x_9 &= 4,98841665687251 \dots \\ &\vdots \\ x_{32} &= 4,99999999861595 \dots \\ x_{33} &= 4,99999999930798 \dots \\ x_{34} &= 4,99999999965399 \dots \end{aligned}$$

Nyt valittu luku  $m$  oli sangen suuri. Se varmistaa Lipschitz-ehdon 9.1 täyttymisen, mutta nyt kovinkin suurena hidastaa likiratkaisujonon suppenemista huomattavasti. Toisaalta koska  $m$  on suhteellisesti varsin suuri, voidaan alkuarvaus  $x_0$  valita kauempaakin juuresta  $\alpha$ , jolloin iteraatio edelleen suppenee.

Kuten nähtiin, jos Lipschitz-ehto ei päde, iteraatio saattaa hyvässä lykyssä supeta, mutta tästä ei ole mitään takeita. Toisaalta, jos iteraattifunktio  $\phi$  ei täytä Lipschitz-ehtoa, voidaan usein alkuperäistä yhtälöä  $f(x) = 0$  muokata nollakohdat säilyttävillä operaatioilla ja siten saada funktiosta  $f$  johdettava iteraattifunktio  $\phi$  kutistavaksi kuvaukseksi ratkaisun  $\alpha$  lähiympäristössä  $I$ .

Käytännössä kiintopistemenetelmä toimii vain sangen loiville funktiolle globaalisti. Konstikkaammilla funktioilla menetelmä suppenee lokaalisti, kun alkuarvaus  $x_0$  saadaan valittua riittävän läheltä nollakohtaa  $\alpha$ . Tällöin Lipschitz-ehto täyttyy alkuarvon ja nollakohdan lähelle rajatulla välillä  $I$  ja likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee. Viitteitä millainen funktio on sopiva antaa derivoituvuusehto  $|\phi'(x)| < 1$ . Tällöin kiintopistemenetelmän osalta on oltava

$$\begin{aligned} |\phi'(x)| = |1-f'(x)| < 1 & \Leftrightarrow \\ -1 < 1-f'(x) < 1 & \Leftrightarrow \\ -2 < -f'(x) < 0 & \Leftrightarrow \\ 0 < f'(x) < 2 & \end{aligned}$$

Nyt on kiintopistemenetelmän rajoituksia ja vaaranpaikkoja käsitelty riittävästi, että voidaan määrittää iteraation algoritmi.

ALGORITMI 10.6 (Kiintopistemenetelmä).

- (1) Asetetaan alkuarvo  $x_0$ , joka on riittävän lähellä nollakohtaa  $\alpha$ .
- (2) Muodostetaan iteraattifunktio palautuskaavalla  $\phi(x) = x \pm f(x)$ .
- (3) Tarkistetaan päteekö Lipschitz-ehto derivaattaehdon  $|\phi'(x)| < 1$  avulla. Jos ei päde, muokataan iteraattifunktiota muotoon  $\phi(x) = x \pm \frac{f(x)}{m}$ , sopivalla  $m \in \mathbb{R}$ .
- (4) Jos Lipschitz-ehto pätee, sovelletaan iterointiyhtälöä  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  uuden likiratkaisun  $x_{n+1}$  saamiseksi.
- (5) Toistetaan iteraatiota, kunnes saavutetaan tavoiteltu likiratkaisun tarkkuus tai lopetetaan, kun riittävä määrä iteraatioita on suoritettu.

### 10.3. Suppenemisnopeus

Kiintopistemenetelmän suppeneminen on hyvässä lykyssä kohtuullisen nopeaa, huomommillaan erityisen hidasta. Koska kiintopistemenetelmälle  $\phi'(x) \neq 0$ , suppenee kiintopistemenetelmä lineaarisesti. Siten menetelmän  $q$ -aste on  $q = 1$  ja peräkkäisille poikkeamille pätee

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^1$$

Täten kiintopistemenetelmän suppeneminen lähenee raja-arvoa

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} \in [0, 1]$$

Iteratiivisten menetelmien ja siten erityisesti kiintopistemenetelmän suppenemistä käsitellään hieman seikkaperäisemmin myöhemmin kappaleessa 12.1.

### 10.4. Esimerkki

Ratkaistaan funktion  $f(x) = \cos x - x$  nollakohta iteratiivisesti. Likiratkaisun tarkkuuden halutaan olevan  $\delta = 0,00000002 = 2,00 \cdot 10^{-8}$ . Tällöin kiintopistemethoden iteraattifunktio on

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x + f(x) \\ &= x + \cos x - x \\ &= \cos x\end{aligned}$$

Iteroidaan siis kiintopisteyhtälöä

$$x = \cos x$$

Alkuarvolla  $x_0 = 0,2$  saadaan uusi likiratkaisu

$$x_1 = \cos x_0 = \cos 0,2 \approx 0,98006657784$$

Sijoitetaan tämä takaisin kiintopisteyhtälöön, jolloin saadaan uusi likiratkaisu

$$x_2 = \cos x_1 = \cos 0,98006657784 \approx 0,55696725281$$

Sijoittamalla tämä takaisin kiintopisteyhtälöön ja saadaan seuraava likiratkaisu

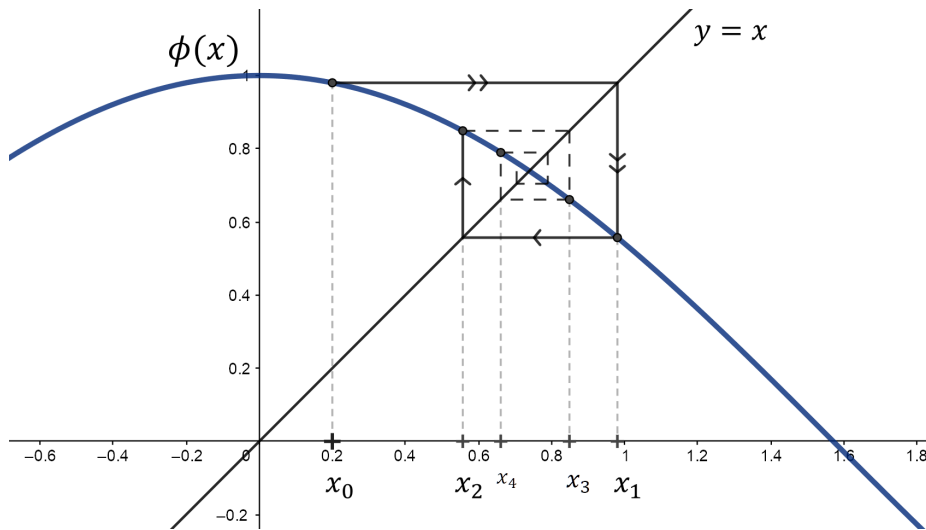
$$x_3 = \cos x_2 = \cos 0,55696725281 \approx 0,84886216566$$

Näin jatkaen saadaan iteraatiolle taulukon 10.1 mukaiset likiratkaisut.

$n$	Uusi likiarvo $x_{n+1}$	$f(x_{n+1})$	$ x_n - x_{n-1} $
0	0,2	0,780066577841	-
1	0,980066577841	-0,423099325032	0,780066577841
2	0,556967252810	0,291894912849	0,423099325032
3	0,848862165658	-0,188024614542	0,291894912847
4	0,660837551117	0,128640886650	0,188024614542
5	0,789478437767	-0,085262724425	0,128640886650
6	0,704215713342	0,057903848419	0,085262724425
7	0,762119561761	-0,038745389655	0,057903848419
8	0,723374172106	0,026202404226	0,038745389655
9	0,749576576331	-0,017599151073	0,026202404226
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,739085167209	-0,000000056893	0,00000008445979
42	0,739085110316	0,000000038324	0,00000005689313
43	0,739085148640	-0,000000025815	0,00000003832389
44	0,739085122825	0,000000017390	0,00000002581544
45	0,739085140214	-0,000000011714	0,00000001738959
46	0,739085128500	0,000000007891	0,00000001171384
47	0,739085136391	-0,000000005315	0,00000000789058
⋮	⋮	⋮	⋮

TAULUKKO 10.1. Kiintopisteyhtälön  $x = \cos x$  likiratkaisut.





KUVA 10.2. Kiintopistemenetelmän likiarvot vuorottelevat kiintopisteen ympärillä esimerkissä 10.4.

Taulukon 10.1 funktion arvoista  $f(x_{n+1})$  voidaan huomata, että likiratkaisujono  $\{x_n\}$  oskilloi eli vaihtelee ratkaisun  $\alpha$  ympärillä. Tämän perusteella tosiratkaisulle saadaan ala- ja yläraja likiarvojen  $x_{45}$  ja  $x_{46}$  avulla, jolloin

$$0,739085140214 < \alpha < 0,739085128501$$

Ottamalla näiden likiratkaisuiden keskiarvo saadaan tavoitellun tarkkuuden  $\delta$  alle menevällä tarkkuudella tosiratkaisulle likiarvo  $\alpha \approx 0,73908513$ .

Kiintopistemenetelmä on yksinkertainen ja ajoittain epävarma menetelmä. Sen suppenemisnopeus ei ole kaksinen ja ajoittain näin muodostettu kiintopisteiteraatio hajaantuu. Silti kiintopistemenetelmälläkin on hetkensä ja käyttötarkoituksensa muun muassa yksinkertaisuutensa vuoksi. Kiintopistemenetelmällä ja iteraatioilla on myös ollut historiassa tärkeää käyttöä, muun muassa taivaanmekaniikkaan liittyvää Keplerin yhtälöä iteroitaessa. Käsitellään seuraavaksi Newtonin menetelmää, jota voidaan pitää kiintopistemenetelmää lähellä olevana, mutta hienostuneempana iteraationa.

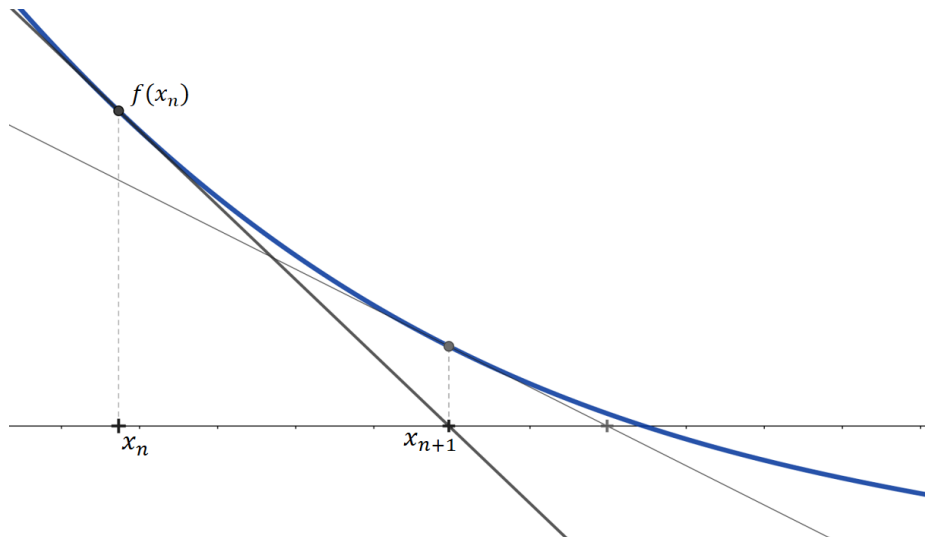


## Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä (Newton's method) tai Newtonin iteraatio tunnetaan toisinaan myös Newton-Raphsonin menetelmänä (Newton-Raphson method). Menetelmän nimi tulee menetelmän ideaa 1600-luvun lopulla kehitelleeltä Isaac Newtonilta ja muutamia vuotta Newtonin jälkeen ideaa jatkokehittäneeltä Joseph Raphsonilta. He sovelsivat ideaa erityistapauksessa  $x^3 - 2x - 5 = 0$  ja varsinaisesti vasta 1700-luvulla usean matemaatikon taholta Newtonin menetelmä systematisoitiin ja yleistettiin sen nykyiseen muotoon. Menetelmä perustuu kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimen eli derivaatan käyttöön. Supetessaan iteraation likiratkaisujono  $\{x_n\}$  konvergoi hämmästyttävän tehokkaasti, jopa neliöityvästi. [4]

### 11.1. Idea tangentin nollakohtana

IDEA 11.1. Piirretään likiratkaisun  $x_n$  kohdalle funktion  $f$  kuvaajalle tangentti pisteeseen  $(x_n, f(x_n))$ . Tangentti approksimoi alkuperäisen funktion  $f$  kulkua ja leikkaa x-akselia pisteessä  $x_{n+1}$ , joka on iteraation uusi likiratkaisu.



KUVA 11.1. Newtonin menetelmän seuraava likiratkaisu  $x_{n+1}$  muodostetaan tangentin avulla.

Yllä kuvattuun intuitiiviseen ideaan pohjautuen Newtonin menetelmän palautuskaava voidaan löytää esimerkiksi alla kuvatulla päättelyllä, kuten perinteisesti oppikirjoissa Newtonin menetelmä johdetaan ja intuitiivisesti perustellaan.

Halutaan ratkaista funktion  $f$  nollakohdat. Luku  $x_0$  on alkuarvaus, jonka perusteella piirretään tangentti funktion  $f$  kuvaajan pisteeseen  $(x_0, f(x_0))$ . Tällöin tangentin yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Etsitään tangenttisuoran leikkauspiste x-akselin kanssa, jolloin  $y = 0$  ja saadaan

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Oletetaan, että  $f'(x) \neq 0$  ja jaetaan derivaatalla

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x - x_0,$$

josta saadaan

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x =: x_1$$

Tulos voidaan myös ilmaista yleisesti rekursiivisena palautuskaavana

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Tällöin saadaan Newtonin menetelmälle määriteltyä iteraatiokaava seuraavasti.

**MÄÄRITELMÄ 11.2.** Jatkuvalle ja jatkuvasti derivoituvalle funktiolle  $f$  Newtonin menetelmän palautuskaava on

$$(11.1) \quad x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ja yleisesti

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

[2, s. 495-497]

Nyt, kun menetelmän idea on löydetty, tarkastellaan matemaattisesti millä ehdoilla menetelmä toimii ja suppenee.

## 11.2. Suppeneminen

Newtonin menetelmässä hyvän lähtöarvon  $x_0$  asettaminen on erityisen tärkeää ja alkuarvauksen on tärkeää sijaita suhteellisen lähellä nollakohtaa  $\alpha$ . Riittävän hyvän alkuarvauksen hankkimisen jälkeen Newtonin menetelmän raakaa tehokkuutta käytetään likiratkaisun tarkentamiseen. Ongelmaksi kuitenkin muodostuu määrittää, milloin ollaan *riittävän* lähellä nollakohtaa, että likiratkaisujono  $\{x_n\}$  varmasti suppenee.

Itse asiassa juuri äsken kappaleessa 11.1 läpikäytyyn intuitiiviseen Newtonin menetelmän palautuskaavan johtamiseen on sisäänrakennettu ”mukavat” olosuhteet ja tiettyjä sanomattomia oletuksia, jotka takaavat, että menetelmä suppenee kohti haluttua

tosiratkaisua  $\alpha$ . Nämä kirjoittamattomat oletukset ovat funktion  $f$  derivaatan olemassaolo sekä Lipschitz-jatkuvuus. Jos nämä alkuehdot eivät täyty, menetelmä ei välttämättä suppene. Siten Newtonin menetelmä ei ole varma menetelmä ja likiratkaisujono voi hajaantua, jos iteraattifunktion  $\phi$  Lipschitz-ehto 9.1 ei pidä.

Myös näiden ehtojen ulkopuolella Newtonin menetelmä *saattaa* supeta, mutta tästä ei ole mitään takeita. Suppenemisehtojen oletusten ulkopuolella on jopa mahdollista, että iteraation päättymättömyyslauseen 9.16 mukaisesti mahdoton tapaus on teoreettisesti mahdollista. Tällöin on mahdollista, että jollain  $n$ . iteraatiokierroksella osutaan *täsmälleen* nollakohtaan  $\alpha$ . Huomattavan paljon todennäköisempää tosin on, että likiratkaisujono  $x_n$  hajaantuu tai hyppää toiseen nollakohtaan. Siksi on hyödyllisempää, jos voidaan varmistua Lipschitz-ehdon 9.1 täyttymisestä ja siten iteraation konvergoinnista. Käydään seuraavaksi läpi vaatimukset, joiden avulla voidaan olla varmoja Newtonin menetelmän suppenemisestä.

Lipschitz-ehto takaa, ettei iteraattifunktio  $\phi$  ”heilu” liikaa tai toimi yllättävästi juuren  $\alpha$  lähiympäristössä. Graafisesti tämä tarkoittaa, että kuvaaja on sileä. Käyrällä ei siis ole äkkinäisiä muutoksia tai teräviä kulmia. Jos alkuperäisellä funktiolla  $f$  on olemassa jatkuva toinen derivaatta  $f''$ , voidaan Lipschitz-ehdon toteutumista tutkia mukavasti iteraattifunktion derivaatan  $\phi'(x)$  avulla. Tällöin

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{d}{dx} \left( x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \\ &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &= 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &= 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\end{aligned}$$

Joten jos on

$$(11.2) \quad |\phi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1,$$

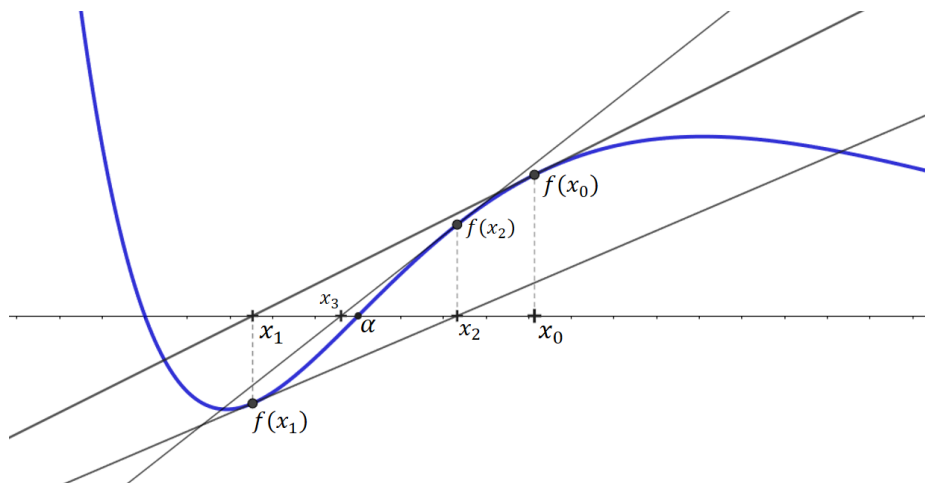
niin derivoituvuusehdon 9.11 perusteella iteraatiofunktio  $\phi$  on Lipschitz-jatkuva ja siten iteraatio suppenee kohti kiintopistettä  $\alpha$ .

Ylläolevan kaavan (11.2) perusteella huomataan, että toinen derivaatta  $f''(x)$  ei saa olla ”liian iso”, kun taas ensimmäinen derivaatta  $f'(x)$  ei saa olla ”liian pieni”. Sama käänteisesti sanottuna: derivaatan  $f'$  halutaan olevan mahdollisimman suuri ja siten funktion  $f$  käyrälle piirretty tangentti mahdollisimman jyrkästi kohtisuorassa x-akseliin nähden. Sen sijaan toisen derivaatan  $f''$  halutaan olevan mahdollisimman

pieni eli derivaatan  $f'$  muutoksen olevan mahdollisimman pientä. Kun toinen derivaatta  $f''(x)$  on mahdollisimman pieni, derivaatta  $f'(x)$  pysyy oleellisesti yhtä suurena ja siten funktion  $f$  kulku jyrkkänä ratkaisun  $\alpha$  lähiympäristössä. Siten  $f$  ei heilu liikaa ja iteraatio suppenee tehokkaasti kohti nollakohtaa. Lisäksi (kuten yksinkertaisen kiintopistemenetelmän suppenemisen yhteydessä), kun likiratkaisu  $x_n$  on lähellä nollakohtaa  $\alpha$ , on tällöin funktion arvo  $f(x_n)$  niin ikään häviävän pieni. Tällöin kaavan (11.2) mukaisesti iteraattifunktion derivaatta  $\phi'$  menee varmemmin Lipschitz-ehdon takaavan derivaattaehdon  $|\phi'(x)| < 1$  alle.

Kaava myös kertoo, että vaakasuora tangentti eli tapaus  $f'(x) = 0$  on epätoivottu. Tällöin vaakasuora tangentti ei leikkaa x-akselia missään pisteessä eikä seuraavaa likiratkaisua  $x_{n+1}$  voida muodostaa. Vaakasuoran tangenttisuoran tapaus on yleensä sangen teoreettinen, mutta silti jo nolaa lähelle tuleva liian pieni derivaatta  $f'(x)$  aiheuttaa helposti iteraation hajaantumisen tai hyppäämisen väärään juureen.

Geometrisesti ja intuitiivisesti kaavan tulkinta tarkoittaa, että ideaalitapauksessa likiratkaisukohtaan  $(x_n, f(x_n))$  piirretty tangentti leikkaa x-akselin mahdollisimman kohtisuorasti ja leikkauskohta osuu x-akselilla mahdollisimman lähelle nollakohtaa  $\alpha$ . [2, s. 496-497]

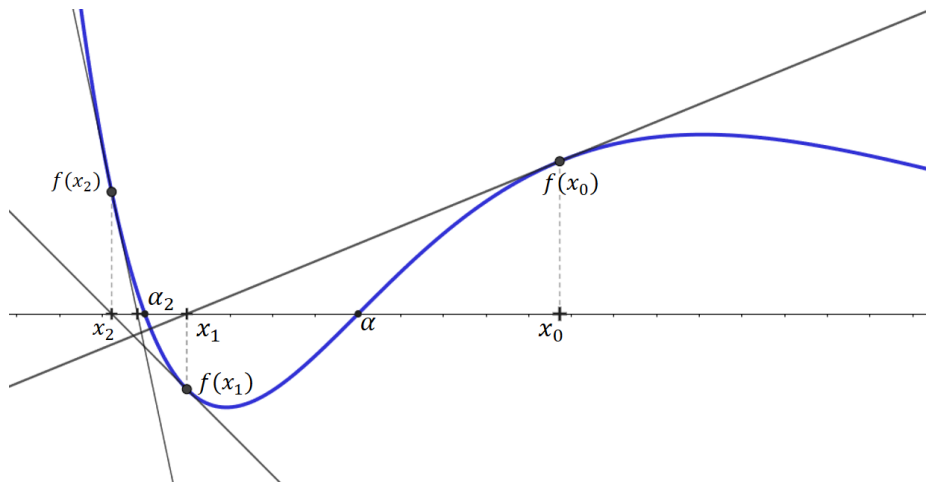


KUVA 11.2. Alkuarvo  $x_0$  on sopivasti valittu ja Newtonin iteraatio suppenee kohti tosiratkaisua  $\alpha$ .

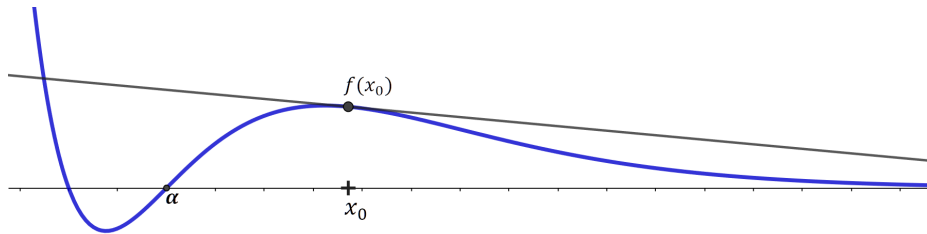
LAUSE 11.3 (Newtonin menetelmän suppeneminen). *Olkoon alkuperäinen funktio  $f$  jatkuva välillä  $I = [a, b]$  sekä jatkuvasti derivoituva avoimella välillä  $\hat{I} := ]a, b[$ . Lisäksi oletetaan, että  $f'(x) \neq 0$ , kun  $x \in \hat{I}$ , ja iteraattifunktio  $\phi(x)$  toteuttaa Lipschitz-ehdon avoimella välillä  $\hat{I}$  sopivalla alkuarvauksella  $x_0$ , jolle pätee  $|x_0 - \phi(x_0)| \leq (1 - \lambda)r$ .*

*Tällöin Newtonin menetelmän antaman likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee kohti kiintopistettä  $\alpha$ .*

TODISTUS. Valitsemalla alkuarvaus  $x_0$  sopivasti, saadaan määrittelyväliksi  $I_r := [x_0 - r, x_0 + r] \subset I$  jollain sopivalla  $r \in \mathbb{R}_+$ . Tällöin kutistavuuslauseeseen 9.4 perusteella likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee kohti kiintopistettä  $\alpha$ .  $\square$



KUVA 11.3. Alkuarvo  $x_0$  on valittu huolimattomasti ja iteraatio hyp-pää toiseen nollakohtaan  $\alpha_2$ .



KUVA 11.4. Alkuarvo  $x_0$  on valittu huolimattomasti ja likiratkaisujono  $\{x_n\}$  hajaantuu äärettömyyteen.

Newtonin menetelmän käyttökelpoisuus riippuu siis oleellisesti alkuperäisen funktion  $f$  ja sen derivaattojen ominaisuuksista, sekä sopivasti riittävän lähellä nollakohtaa valitusta alkuarvauksesta  $x_0$ . Tähän saakka on alkuarvaukselta  $x_0$  vaadittu hieman epämääräisesti, että  $x_0$  sijaitsee ”riittävän lähellä” ratkaisua  $\alpha$ . Muotoillaan nyt lause, joka antaa täsmällisemmin välin, jolta alkuarvo  $x_0$  voidaan valita, että likiratkaisujono  $\{x_n\}$  myös varmasti suppenee.

LAUSE 11.4 (Varmasti suppenevan välin lause). *Olkoon funktio  $f$  hyvin määritelty ja kahdesti jatkuvasti derivoituva suljetulla välillä  $I = [a, b]$ . Lisäksi olkoon*

- (1)  $f(a)f(b) < 0$
- (2)  $f'(x) \neq 0$ , kaikille  $x \in I$
- (3) Joko  $f''(x) \leq 0$  tai  $f''(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in I$
- (4) Jos  $c$  on välin  $I$  päätepiste, missä  $|f'(x)|$  saa pienimmän arvon, niin

$$\left| \frac{f(c)}{f'(c)} \right| \leq b - a$$

Tällöin Newtonin menetelmän antama likiratkaisujono suppenee välin (ainoaan) ratkaisuun  $\alpha$  millä tahansa lähtöarvolla  $x_0 \in I$ .

Lauseen ehto 1 kertoo, että välin päätepisteet ovat eri etumerkkisiä, jolloin välillä  $I$  on vähintään yksi nollakohta. Ehto 2 takaa, että välillä  $I$  on tasan yksi nollakohta. Ehto 3 kertoo, että funktion  $f$  kuvaaja on konvekssi funktio joko ylä- tai alapuolelta tarkasteluna. Ehto 4 kertoo, että välin  $I$  käyrälle  $y = f(x)$  päätepisteeseen  $c$ , missä  $|f'(x)|$  on pienimmillään, piirretty tangenttisuora leikkaa x-akselin välillä  $I$ .

TODISTUS. Katso esimerkiksi [10, s. 79-80]. □

Suppenemisen varmistava lause 11.4 on yleisen lauseen 11.3 konkreettinen tilanne. Nyt määriteltiin rajat, millaisilla alkuehdoilla Newtonin menetelmä varmasti suppenee. Lause 11.4 voitaisiin muotoilla myös usealla muullakin tapaa, eikä nyt käytetty muotoilu ole ainoa. Oleellista suppenemisen varmistavassa lauseessa ovatkin lauseen oletukset, eikä niinkään johtopäätös. Oletukset kertovat, mitä vaaditaan funktion ominaisuuksilta, että likiratkaisujono suppenee varmasti tietyllä välillä  $I$ , jolta alkuarvaus  $x_0$  voidaan valita mistä tahansa kohtaa väliä.

### 11.3. Suppenemisnopeus

Newtonin menetelmä asettaa aiemmin käsiteltyjä yhtälönratkaisumenetelmiä enemmän ehtoja alkuperäisen funktion  $f$  ominaisuuksille (jatkuvasti derivoituvuus) ja iteraattifunktion  $\phi$  käytökselle (Lipschitz-jatkuvuus). Kuvaajan on siis oltava sileä ja käyttäytyttävä maltillisesti. Käytännössä Newtonin menetelmä suppenee, kun ollaan riittävän lähellä nollakohtaa  $\alpha$ . Alkuehtojen täyttyessä Newtonin menetelmän suppenemisnopeus on peräti *neliöityvää*. Tällöin nollakohdan lähiympäristössä likiratkaisun oikeiden desimaalien lukumäärä keskimäärin kaksinkertaistuu joka iteraatiokierroksella. Siten suppeneminen on iteraation edetessä jopa *kihtiävää*.

LAUSE 11.5. *Olkoon funktio  $f$  välillä  $I$  jatkuva sekä kahdesti jatkuvasti derivoituva siten, että  $f'(x) \neq 0$ , sekä iteraattifunktio  $\phi$  täyttää Lipschitz-ehdon (9.1).*

*Tällöin Newtonin menetelmän antama likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee neliöityvästi.*

TODISTUS. Lauseen todistukseen palataan myöhemmin kappaleessa 12.4. □

Newtonin menetelmän  $q$ -aste on siis  $q = 2$ . Tällöin peräkkäisten likiratkaisuiden poikkeamille pätee kaavan (4.3) mukaisesti

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \mu |\varepsilon_n|^2,$$

missä  $\mu \in [0, 1]$  on jokin vakio.

Kiintopistemenetelmään verrattuna Newtonin menetelmä on tehokkaampi, sillä Newtonin menetelmän  $q$ -aste on  $q = 2$ , kun taas kiintopistemenetelmä on lineaarinen ja sen  $q$ -aste on  $q = 1$ . Intuitiivisestikin tämä on järkeenkäypää, koska yksinkertainen kiintopistemenetelmä huomioi aiemmasta likiarvosta vain funktion arvon  $f(x_n)$ , kun taas Newtonin menetelmä huomioi funktion arvon  $f(x_n)$  lisäksi likiarvopisteen derivaatan arvon  $f'(x_n)$ . Derivaatan arvo oleellisesti kuvaa, mihin suuntaan ja kuinka nopeasti alkuperäinen funktio on taantumassa. Toisaalta Newtonin menetelmä vaatii



enemmän funktion  $f$  ominaisuuksilta. Funktion  $f$  täytyy olla jatkuvasti derivoituva. Lisäksi alkuperäisestä funktiosta tarvitaan enemmän tietoa, koska täytyy tietää funktion derivaatan kaava tai muutoin kyetä määrittämään kyseinen derivaatan arvo.

ESIMERKKI 11.6. Tiettyjä yhtälöitä edes varmasti suppeneva puolitusmenetelmä ei kykene ratkaisemaan, koska menetelmälle on lähtökohtaisesti oltava  $f(a)f(b) < 0$ . Näitä yhtälöitä on usein mahdollista ratkaista Newtonin menetelmällä. Tällainen erityistapaus on esimerkiksi parillista astetta olevan polynomien

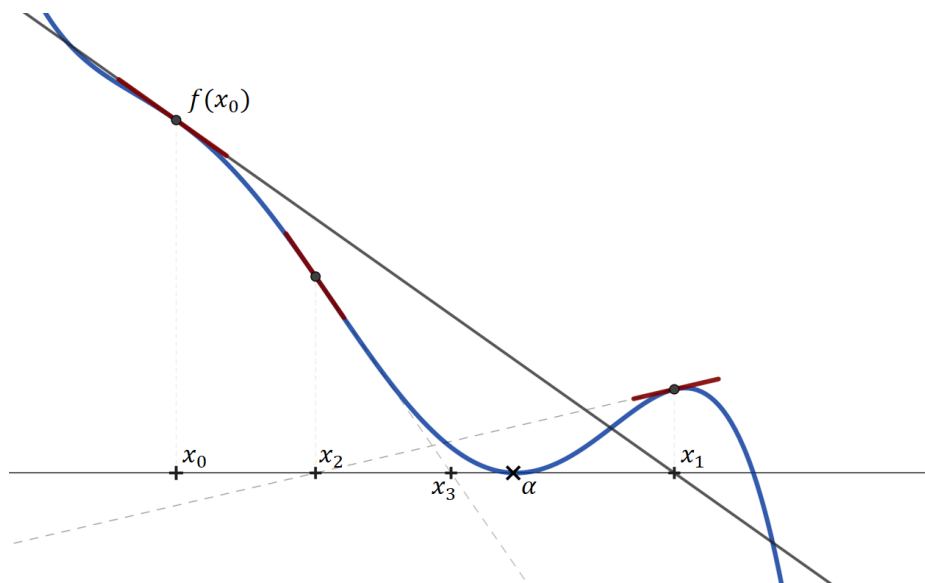
$$f(x) = (x - a)^n$$

juuret, missä  $a \in \mathbb{R}$  ja  $n$  on parillinen positiivinen kokonaisluku. Nyt funktiolla  $f$  on useampikertainen juuri kohdassa  $\alpha = a$ . Jos funktion  $f$  juuri on hipaisunollakohdta ja juuressa derivaatta  $f'(\alpha) = 0$ , on tällöin Newtonin iteraation suppeneminen vain lineaarista. Neliöllinen suppenemisnopeus menetetään, koska juuressa derivaatta  $f'(\alpha) = 0$  ja kaava (11.2) ei pidä. Nyt esimerkin polynomille derivaatta on

$$f'(\alpha) = f'(a) = n(a - a)^{n-1} = 0,$$

joten suppenemisnopeus on vain lineaarista.

Tarkemmin Newtonin menetelmän erityistapauksista, katso esimerkiksi [10, s. 88-89], [11, s. 98-99] tai [22, 5.2].



KUVA 11.5. Newtonin menetelmä löytää myös hipaisunollakohdat, tosin vain konvergoiden lineaarisesti.

Newtonin menetelmän suppenemisnopeuteen palataan hieman myöhemmin luvussa 12, nyt käsiteltyä intuitiivista johtamistapaa perusteellisempaa ja matemaattisempaa reittiä edeten. Sovelletaan seuraavaksi Newtonin menetelmää käytännön tilanteisiin.

### 11.4. Newtonin menetelmän soveltamista käytäntöön

Algoritmina Newtonin menetelmä etenee seuraavasti.

ALGORITMI 11.7 (Newtonin menetelmä).

- (1) Asetetaan alkuarvo  $x_0$ , joka on riittävän lähellä nollakohtaa  $\alpha$ .
- (2) Tarkastetaan Lipschitz-ehto alkuarvauksessa ja tutkitaan derivaatan avulla päteekö  $|\phi'(x_0)| < 1$ .
- (3) Jos derivaattaehto ei päde, käytetään jotain varmaa yhtälönratkaisumenetelmää tai muuta menetelmää alkuarvauksen parantamiseksi.
- (4) Sovelletaan iteraatiokaavaa  $\phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  uuden likiratkaisun  $x_{n+1}$  määrittämiseksi.
- (5) Toistetaan iteraatiokaavaa, kunnes saavutetaan tavoiteltu likiratkaisun tarkkuus tai lopetetaan, kun riittävä määrä iteraatioita on suoritettu.

Huomaa, että algoritmissa tutkitaan Lipschitz-ehdon pätemistä *yksittäisessä pisteessä*. Lipschitz-jatkuvuutta tulisi kuitenkin tarkastella *välillä*, koska Lipschitz-jatkuvuus on juurikin välin, ei niinkään yksittäisen pisteen ominaisuus. Siten jos derivoituvuusehto  $|\phi'(x_0)| < 1$  täyttyy alkuarvossa, voidaan *varauksin* soveltaa Newtonin menetelmää. Tämä antaa viitteitä suppenemisesta, mutta iteraatio saattaa silti hajaantua jossain likiarvossa  $x_n$ . Nyt Lipschitz-ehdon 9.1 täyttymistä on tutkittu vain yksittäisessä pisteessä, eikä koko alkuarvauksen lähiympäristössä  $I_r$ . Jotta likiratkaisujonon  $\{x_n\}$  suppenemisestä voitaisiin varmistua, tulisi esimerkiksi matemaattisella analyysillä varmistua, että derivoituvuusehto 9.11 pätee koko tarkasteluvälillä  $I$ .

Suppenemisestä varmistuminen siis vaatii tilanteen tarkempaa matemaattista analyysiä. Yllä kuvattu tapa on kuitenkin millä tapaa tietokone ”näkee” (monimutkaisemat) yhtälönratkaisutapaukset – kone laskee ja säilöö muistiinsa vain yksittäisiä pisteitä ja voi verrata niitä keskenään, muttei ymmärrä tai ”näe” kokonaisuutta samalla tapaa kuin ihminen.

### 11.5. Sumerilaisten menetelmä Newtonin menetelmän erityistapauksena

Palataan tarkastelemaan aiemmin esimerkissä 7.5 käsiteltyä Sumerilaisten menetelmää. Kun halutaan laskea luvun  $a > 0$  neliöjuuri, etsitään itse asiassa nollakohtaa funktiolle  $f(x) = x^2 - a$ , missä  $x > 0$  ja  $I = \mathbb{R}_+$ , sillä

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a} && \Leftrightarrow \\ x^2 &= a && \Leftrightarrow \\ x^2 - a &= 0 && \Leftrightarrow \\ f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Tässä siis haettu tosiratkaisu  $\alpha = \sqrt{a}$ .

Kun funktioon  $f(x) := x^2 - a$  sovelletaan Newtonin menetelmän palautuskaavaa, saadaan

$$\begin{aligned}\phi(x_n) = x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2x_n^2 - x_n^2}{x_n} - \frac{a}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)\end{aligned}$$

Sumerilaisten menetelmän palautuskaavaan (7.7) päädytään siis myös Newtonin menetelmän kautta. Täten Sumerilaisten iteraation ollessa Newtonin menetelmän erikoistapaus, selittää tämä yhteys myös Sumerilaisten menetelmän matemaattisia ominaisuuksia, kuten myöhemmin kappaleessa 12.6 aiheeseen tarkemmin syvennyttään.

## 11.6. Esimerkkejä

ESIMERKKI 11.8. Olkoon funktio

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x}{e^x}$$

ja sen derivaatta

$$f'(x) = -\frac{x^3 - 4x^2 + x + 1}{e^x}$$

Funktio  $f$  mallintaa fysikaalisen ilmiön käyttäytymistä. Halutaan löytää funktion nollakohta, jonka ilmiön tarkastelun perusteella tiedetään sijaitsevan välillä  $[0, 2; 5]$ .

Funktio  $f$  on jatkuvien alkeisfunktioiden muodostamana funktiona jatkuva. Lisäksi derivaatta on olemassa ja jatkuva. Käytetään Newtonin menetelmää, jolloin iteraatifunktio on

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{\frac{x^3 - x^2 - x}{e^x}}{-\frac{x^3 - 4x^2 + x + 1}{e^x}} \\ &= x + \frac{x^3 - x^2 - x}{x^3 - 4x^2 + x + 1}\end{aligned}$$

Alkuarvaukseksi valitaan  $x_0 = 2,7$ . Lasketaan Newtonin menetelmän palautuskaavalla seuraava likiratkaisu  $x_1$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x_1) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= x_0 + \frac{x_0^3 - x_0^2 - x_0}{x_0^3 - 4x_0^2 + x_0 + 1} \\ &= 2,7 + \frac{2,7^3 - 2,7^2 - 2,7}{2,7^3 - 4 \cdot 2,7^2 + 2,7 + 1} \\ &= 1,02213951878137\dots \end{aligned}$$

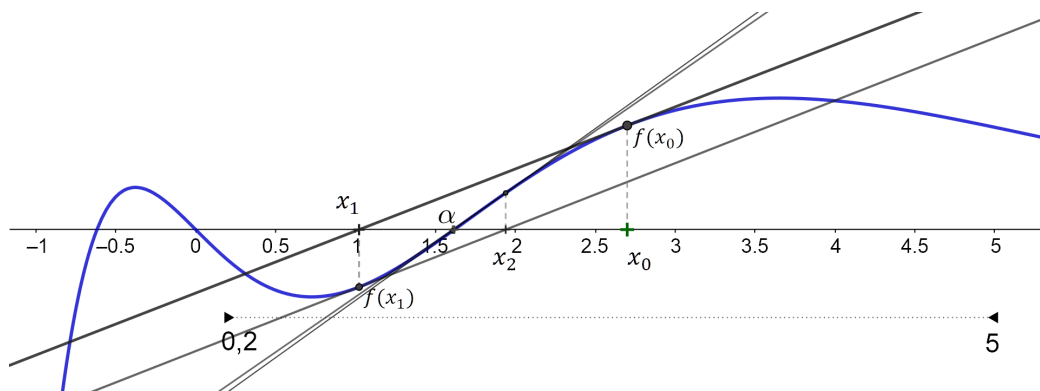
Sovelletaan palautuskaavaa uudelleen likiarvolla  $x_1$ , jolloin saadaan seuraavan likiratkaisun  $x_2$  arvoksi

$$\begin{aligned} x_2 &= \phi(x_1) = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 + \frac{x_1^3 - x_1^2 - x_1}{x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 + 1} \\ &= 1,93947151167120\dots \end{aligned}$$

Jatketaan menetelmän soveltamista samaan tapaan, jolloin saadaan taulukon 11.1 mukaiset likiarvot.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
0	2,7	0,65142303498636
1	1,02213951878137	-0,35946761879667
2	1,93947151167120	0,22924231128533
3	1,60808615539299	-0,00713187085526
4	1,61804102669827	0,00000504911992
5	1,61803398875313	0,00000000000232
6	1,61803398874989	$\approx 0$
7	1,61803398874989	$\approx 0$

TAULUKKO 11.1. Newtonin menetelmän likiratkaisut.



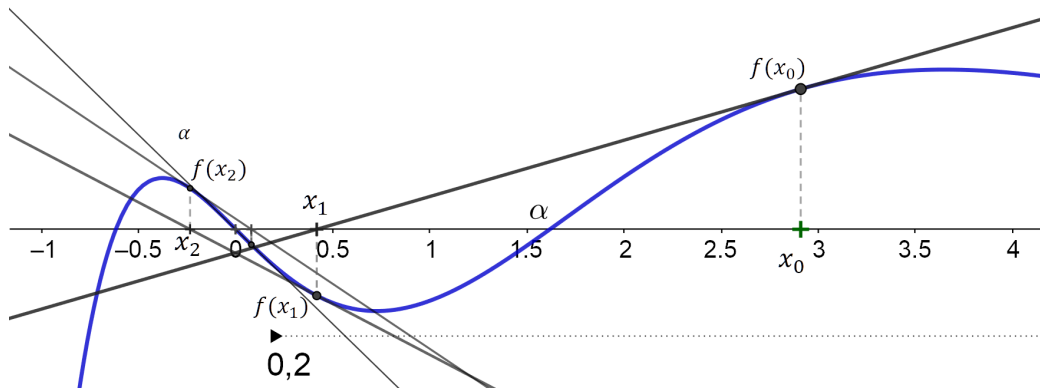
KUVA 11.6. Esimerkin 11.8 ja taulukon 11.1 kuva suppenevasta Newtonin iteraatiosta.

Jälleen konkreettisesti huomataan, kuinka tehokkaasti Newtonin menetelmä neliöityvästi suppenevana menetelmänä konvergoi. Tällä kertaa iteraatio suppenee, jopa sangen nopeasti. Sen sijaan jos alkuarvaus valitaan edes hieman toisin, saatetaan saada kovinkin erilainen lopputulos. Lasketaan vielä Newtonin iteraation arvot alkuarvoilla  $x'_0 = 2,91$  sekä  $x''_0 = 4,4$ . Tällöin saadaan taulukon 11.2 mukaiset likiarvot.

$n$	$x'_n$	$f(x'_n)$	$x''_n$	$f(x''_n)$
0	2,91	0,7225699487618	4,4	0,75412332621
1	0,1686088888279	-0,3415486723388	9,0731588557517	0,0751913440258
2	-0,2356063325566	0,2113899076015	10,6058141905603	0,0265027940526
3	0,0799532712452	-0,0792391113118	12,0235421970849	0,0094915890196
4	-0,0014147821744	0,0014147779213	13,3719365060617	0,0034263754674
5	0,0000000085116	-0,0000000085116	14,6729041734505	0,0012426861408
6	0,0000000000000	0,0000000000000	15,9389686495094	0,0004520715389
7	0,0000000000000	0,0000000000000	17,1780716164197	0,0001648042144
8	$\approx 0$	$\approx 0$	18,3956134992231	0,0000601721578
9	$\approx 0$	$\approx 0$	19,5954569536579	0,0000219950691
10	$\approx 0$	$\approx 0$	20,7804728615064	0,0000080472035

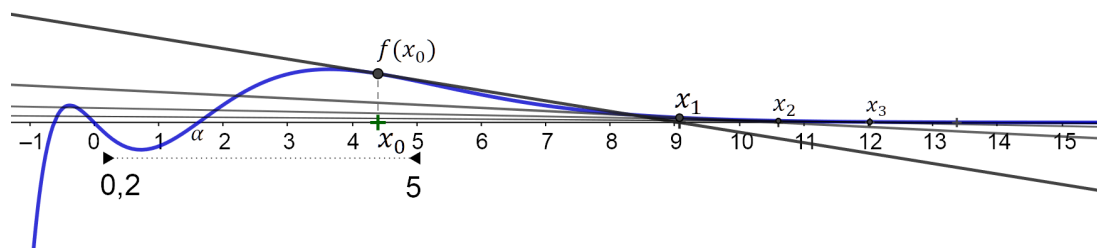
TAULUKKO 11.2. Newtonin menetelmän likiratkaisuita.

Taulukossa 11.2 likiratkaisut  $\{x'_n\}$  vaikuttaa suppenevan, mutta eivät ainakaan välille  $[0,2; 5]$ , jolla ratkaisun tiedetään sijaitsevan. Näin käy koska alkuarvaus  $x'_0 = 2,91$  on hieman liian kaukana haetusta nollakohtasta, jolloin iteraatio hyppää suppenemaan toiseen nollakohtaan  $\alpha' \approx 0$ .



KUVA 11.7. Esimerkin 11.8 ja taulukon 11.2 tapaus, jossa huolimaton alkuarvon asettaminen saa iteraation hyppäämään toiseen juureen.

Alkuarvolla  $x''_0 = 4,4$  iteraatio taas hajaantuu äärettömään. Asymptoottisesti arvot  $\{f(x''_n)\}$  lähenevät x-akselia, mutta eivät koskaan saavuta sitä millään äärellisellä  $n$ . Lisäksi tosimaailmassa jollain suurella  $n$  liukuluvut pyörivät virheellisesti samoiksi ja " $f(x''_n) = 0$ ", koska liukulukujen esityskyky loppuu kesken. Tässäkin nollakohdan etsimistapauksessa iteraattifunktion  $\phi$  Lipschitz-jatkuvuuden etukäteen tutkimisesta on apua.



KUVA 11.8. Esimerkin 11.8 ja taulukon 11.2 tapaus, missä liian kaukainen alkuarvaus saa Newtonin iteraation hajaantumaan.

ESIMERKKI 11.9 (Jakolaskujen numeerinen laskeminen). Newtonin menetelmästä saadaan myös sovellus osamäärien laskemiseen. Tämä on käyttökelpoista varsinkin tietoteknisissä sovelluksissa, jossa juuri jakolaskujen laskeminen on hankalaa. Toisaalta liukukuesityksessä ei ole merkitystä, jos jakolaskulle ei saada matemaattisen täsmällistä vastausta, vaan riittävän tarkka likiarvo. Ovathan liukuluvuin esitetyt luvutkin lopulta enemmän tai vähemmän likiarvoja jo itsessään.

Halutaan laskea osamäärä  $\alpha = \frac{1}{c}$ , missä nimittäjä on luku  $c \in \mathbb{R}_+$ . Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että etsitään nollakohdan (liki)ratkaisua funktiolle

$$f(x) = \frac{1}{x} - c$$

Käytetään Newtonin menetelmän palautuskaavaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x - \frac{\frac{1}{x} - c}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= x + \frac{x^2}{x} - x^2c \\ &= x + (1 - cx)x = (2 - cx)x \end{aligned}$$

Rekursiivisesti iteraation palautuskaava voidaan kirjoittaa muodossa

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = (2 - cx_n)x_n$$

Iteraatiokaavasta voidaan huomata, että siinä itsessään ei ole yhtään jakolaskua. Siten osamäärän likiarvon laskeminen on saatu muunnettua ilman jakolaskuja suoritettavaksi laskuksi.

Likiratkaisujono suppenee kaavan (11.2) perusteella varmasti ainakin, kun

$$\begin{aligned} |\phi'(x)| &< 1 && \Leftrightarrow \\ |2 - 2cx| &< 1 && \Leftrightarrow \\ |1 - cx| &< \frac{1}{2} && \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1 - cx < \frac{1}{2} \\ &&& \Leftrightarrow \frac{3}{2} > cx > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Siten iteraation suppeneminen riippuu laskettavan osamäärän nimittäjästä  $c$  sekä alkuarvauksesta  $x_0$ . Kun nimittäjä  $c$  tiedetään, sopiva alkuarvo on

$$(11.3) \quad \frac{3}{2c} > x_0 > \frac{1}{2c}$$

(Itseasiassa on mahdollista osoittaa, että alkuarvo voidaan ottaa hieman laiveammalta väliltä  $\frac{2}{c} > x_0 > 0$ , jolloin likiratkaisujono edelleen varmasti suppenee. Tarkemmin aiheesta, katso [10, s. 81-83].)

ESIMERKKI 11.10. Sovelletaan jakolaskukaavaa ja lasketaan desimaaliesitys murtoluvulle  $\frac{1}{7}$ . Kaavan (11.3) perusteella sopiva alkuarvaus saadaan väliltä

$$\frac{3}{14} > x_0 > \frac{1}{14}$$

Täten sopivan alkuarvon rajat desimaaliluvuiksi pyöristettynä ovat

$$0,2142 > x_0 > 0,0715$$

Sovelletaan iteraattifunktion  $\phi$  kaavaa alkuarvauksella  $x_0 = 0,2$ , jolloin saadaan likiratkaisut

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,2 \\ x_1 &= (2 - 7 \cdot 0,2) \cdot 0,2 \\ &= 0,12 \\ x_2 &= 0,1392 \\ x_3 &= 0,14276352 \\ x_4 &= 0,1428570815004672 \\ x_5 &= 0,1428571428571165 \dots \\ x_6 &= 0,1428571428571428 \dots \end{aligned}$$

Osamäärän desimaaliesitys  $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$  alkaa toistaa säännöllisesti toistuvaa jaksoa, joka on nyt korostettu yläviivalla. [10, s. 81-83]

Luvun alussa intuitiivisesti johdettiin Newtonin menetelmän idea ja palautuskaava. Tämä lähestymistapa kuvaa intuitiivisesti miten menetelmä toimii mukavassa tapauksessa, muttei kuitenkaan varsinaisesti ole matemaattisen täsmällinen perustelu. Newtonin menetelmään voidaan päätyä myös toisella, hieman erilaisista lähtökohdista matemaattisesti seikkaperäisemmällä tarkastelulla, joka täsmällisemmin avaa Newtonin menetelmän matemaattisia näkökulmia ja ominaisuuksia. Tämä lähestymistapa on huomattavasti helpompaa yleistää kompleksi- ja useampiulotteisten kuvausten avaruuksille, kuin intuitiivinen päättelyketju. Syvennytään seuraavaksi tähän tarinaan ja Newtonin menetelmän suppenemisnopeuden perusteluun.





## Iteraation suppenemisnopeuden kiihdyttäminen

Aiemmin kiintopistemethoden suppenemisnopeuden yhteydessä kappaleessa 10.3 sekä Newtonin methoden johtamista sekä suppenemisnopeutta käsitellessä kappaleessa 11.3 sivuutettiin kysymys, kuinka Newtonin methodaan päädytään matemaattisempaa päätelyä pitkin. Tarkastellaan nyt tarkemmin tuota päätelyketjua ja mitä ominaisuuksia iteraattifunktiolta tarvitaan.

Palataan aluksi tarkastelemaan luvussa 4 yleisemmällä tasolla käsitellyä suppenemisnopeutta keskittyen iteraation suppenemisnopeuteen. Erona aiemmin tehtyyn suppenemisnopeuden tarkasteluun on se, että nyt Lipschitz-ehdon luvussa 9 antamat päätelmät sekä iteraation iteraattifunktion  $\phi$  luvussa 7 tunnetut ominaisuudet ovat käytettävissä.

Kuten aiemmin suppenemisnopeuden tarkastelussa luvussa 4, myös nyt oleellisin tarkasteltava kysymys on kahden peräkkäisen poikkeaman suhteen raja-arvo

$$(12.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$$

Jos raja-arvo on olemassa ja se suppenee, mitä raja-arvoa lähestytään? Tarkastellaan aluksi methoden tehokkuutta yleisesti, edeten kohti Newtonin methoden suppenemisnopeutta.

### 12.1. Kohti lineaarisen suppenemisnopeuden raja-arvoa

Oletetaan, että Lipschitz-ehto (9.1) pätee funktiolle  $\phi$  sekä  $\phi(x) \in I$  kaikilla  $x \in I$ . Lisäksi iteraattifunktio  $\phi$  on jatkuvasti derivoituva välillä  $I$  ja derivaatalle  $\phi'(x) \neq 0$ .

Koska  $\phi'(x) \neq 0$  millä tahansa  $x \in I$ , seuraa tästä, että  $\phi(x)$  on aidosti monotoninen välillä  $I$ . Siten iterointiyhtälön  $x = \phi(x)$  kiintopiste  $\alpha$  on olemassa ja yksikäsitteinen. Lisäksi iteraation päättymättömyyslauseen 9.16 mukaan iteraatio ei voi saavuttaa kiintopistettään  $\alpha$  millään äärellisellä määrällä iteraatioita.

Tutkitaan poikkeamaa  $\varepsilon$ , jolloin soveltaen Väliarvolausetta saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha \\ &= \phi(x_n) - \alpha \\ &= \phi(\alpha + \varepsilon_n) - \phi(\alpha) \\ &= \phi'(\alpha + \theta_n \varepsilon_n) \varepsilon_n, \end{aligned}$$

missä  $0 < \theta_n < 1$  on Väliarvolauseen välipisteen määrittävä sopiva luku. Tällöin siis

$$\alpha < \alpha + \theta_n |\varepsilon_n| < \alpha + |\varepsilon_n|$$

Nyt määritellään luku  $\tau_n$  kaavalla

$$\phi'(\alpha + \theta_n \varepsilon_n) = \phi'(\alpha) + \tau_n$$

Tällöin

$$(12.2) \quad \varepsilon_{n+1} = (\phi'(\alpha) + \tau_n) \varepsilon_n$$

Siten poikkeaman pienenemiseen ja iteraation suppenemiseen vaikuttavat derivaatan arvo nollakohdassa  $\alpha$  sekä luvun  $\tau_n$  suuruus. Luku  $\tau_n$  kuvaa siis  $n$ . iteraation likiratkaisua  $x_n$  vastaavan väliarvopisteen  $\alpha + \theta_n \varepsilon_n$  iteraattifunktion derivaatan arvojen poikkeamaa derivaatan arvosta  $\phi'(\alpha)$ .

Derivaatta  $\phi'(x)$  on jatkuva pisteessä  $x = \alpha$ . Tällöin, koska  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  ja  $0 < \theta_n < 1$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , pätee  $\tau_n \rightarrow 0$  derivaatan  $\phi'$  jatkuvuuden nojalla.

Täten koska  $\tau_n \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , seuraa tästä

$$(12.3) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\phi'(\alpha) + \tau_n) \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi'(\alpha) + \tau_n \\ &= \phi'(\alpha) \end{aligned}$$

Yhtälön (12.3) perusteella  $(n+1)$ :nnen iteraation poikkeama on suurilla  $n$  suunnilleen

$$\varepsilon_{n+1} \cong \phi'(\alpha) \varepsilon_n$$

Tosiratkaisun  $\alpha$  tarkka sijainti on kuitenkin tuntematon, joten myös sen derivaatan  $\phi'(\alpha)$  arvo on tuntematon. Siten mitä lähinnä ylläolevien yhtälöiden perusteella tiedetään ja yhtälöstä (12.3) nähdään, on että kahden peräkkäisen likiratkaisun poikkeamien suhde  $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$  lähenee jotain tuntematonta raja-arvoa  $\phi'(\alpha)$ .

Oletuksen  $\phi'(x) \neq 0$  perusteella pätee myös erityisesti  $\phi'(\alpha) \neq 0$ . Tällöin yhtälön (12.3) raja-arvoa voidaan merkitä aiemmin kaavassa (4.1) määriteltyä raja-arvoa  $\mu = |\phi'(\alpha)| \neq 0$ . Siten ja yhtälön (12.2) perusteella likiratkaisujonon  $\{x_n\}$  suppeneminen on *lineaarista*.

## 12.2. Suppenemisnopeuden kiihdytystä

Suppenemiseen saadaan kuitenkin merkittävä parannus perustellulla vajavaisen tiedon käytöllä. Näinpä mennään eteenpäin ja oletetaan rohkeasti, että derivaatan poikkeaman  $\tau$  suhteen arviointiyhtälö (12.2) on tarkka ja siis  $\tau_n = 0$  jo äärellisellä määrällä iteraatioaskelia  $n$ .

Merkitään lyhytsanaisemmin tuntematonta tekijää korostaen  $\phi'(\alpha) = A$ , jolloin yhtälö (12.2) saa oletuksen  $\tau_n = 0$  kanssa muotoilun

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= A\varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+2} &= A\varepsilon_{n+1}\end{aligned}$$

ja siten

$$(12.4) \quad \begin{aligned}x_{n+1} - \alpha &= A(x_n - \alpha) \\ x_{n+2} - \alpha &= A(x_{n+1} - \alpha)\end{aligned}$$

Vähentämällä yhtälöryhmästä alemmasta yhtälöstä ylempi saadaan

$$x_{n+2} - x_{n+1} = A(x_{n+1} - x_n),$$

josta saadaan

$$A = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmän (12.4) ylempi yhtälö nollakohdan  $\alpha$  suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}x_{n+1} - \alpha &= A(x_n - \alpha) \\ x_{n+1} &= Ax_n - A\alpha + \alpha \\ x_{n+1} - Ax_n &= (1 - A)\alpha \\ \frac{x_{n+1} - Ax_n}{1 - A} &= \alpha\end{aligned}$$

Edelleen tästä saadaan

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{1 - A}(x_{n+1} - Ax_n) \\ &= x_n + \frac{1}{1 - A}(x_{n+1} - x_n) \\ &= x_n + \frac{1}{1 - \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}}(x_{n+1} - x_n) \\ &= x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}\end{aligned}$$

Nyt, jos oletus  $\tau_n = 0$  pitää paikkansa, voitaisiin tosiratkaisu  $\alpha$  määrittää täsmällisesti minkä tahansa kolmen peräkkäisen likiratkaisun  $\{x_{n+2}, x_{n+1}, x_n\}$  avulla.

Kuulostaa liian hyvältä ollakseen totta – ja epäily on oikea. Sillä siitä huolimatta, että derivaatan poikkeama  $\tau_n$  on huomattavasti suuruudeltaan pienempi kuin  $\phi'(\alpha)$  eli  $\tau_n \ll \phi'(\alpha)$ , tosimaailmassa  $\tau_n$  ei ole aivan nolla. Tämä nolosta poikkeavuus aiheuttaa likiratkaisuihin epätarkkuutta. Vaikka  $\tau_n$  vaikutus ei ole olematon, on  $\tau_n$  vaikutus huomattavasti mitättömämpi verrattuna termin  $\phi'(\alpha)$  vaikutukseen.

Tästä havainnosta ja kaavasta voidaan kuitenkin johtaa käyttökelpoinen sovellutus, sillä riittävän pitkälle edenneellä  $n$ . iteraatiokierroksella saadaan peräkkäisistä likiratkaisuista  $\{x_{n+2}, x_{n+1}, x_n\}$  paranneltu likiratkaisu  $x'_n$  kaavalla

$$(12.5) \quad x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \quad (\text{Aitkenin kaava})$$

Aitkenin kaava voidaan kirjoittaa yksinkertaistetussa  $\Delta^2$ -muodossa

$$(12.6) \quad x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

missä perättäisten likiarvojen  $\Delta$ -differenssioperaattori (*delta*, kreikkalaisen ison kirjaimen  $\Delta$  mukaan) on

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad \text{missä } n \in \mathbb{N}$$

Vastaavasti  $\Delta$ -operaattorin monikerrat eli korkeammat potenssit määritellään rekursiivisesti, esimerkiksi

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) \\ &= \Delta x_{n+1} - \Delta x_n \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \end{aligned}$$

Nimitetään tätä kaavaa (12.5) *Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmäksi*. Menetelmään ja kaavan soveltamiseen palataan itsenäisenä menetelmänä hieman myöhemmin luvussa 13. Nyt onkin hämmästyttävintä, että ylläolevan päättelyn ja Aitkenin kaavan (12.5) soveltamisen kautta voidaan tehdä päätelmiä Newtonin menetelmän matemaattisista ominaisuuksista ja suppenemisnopeudesta.

### 12.3. Sovelluksia Aitkenin $\Delta^2$ -kaavasta Newtonin menetelmään

Kun intuitiivisesti ”insinööriratkaisuna” on Aitkenin kaava (12.5) löydetty, tutkitaan kyseistä metodia perusteellisemmin. Aitkenin menetelmää voidaan soveltaa mille tahansa peräkkäisille likiratkaisuille, eivätkä likiratkaisuiden tarvitse rajoittua vain iteraatiivisilla menetelmillä saatuihin likiarvoihin.

**LAUSE 12.1.** *Olkoot  $\{x_n\}$  likiratkaisujono, joka suppenee kohti nollakohtaa  $\alpha$  siten, että poikkeamille  $\varepsilon_n = x_n - \alpha$  pätee  $\varepsilon_n \neq 0$ , kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Lisäksi*

$$(12.7) \quad \varepsilon_{n+1} = (A + \tau_n)\varepsilon_n,$$

missä  $A$  on vakio, jolle  $|A| < 1$ , ja  $\tau_n \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .

Tällöin riittävän suurilla  $n$  Aitkenin kaavalla

$$x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

likiratkaisujonosta  $\{x_n\}$  saatu uusi likiratkaisuiden lukujono  $\{x'_n\}$  suppenee nopeammin kohti tosiratkaisua  $\alpha$  kuin alkuperäinen likiratkaisujono siten, että

$$(12.8) \quad \frac{x'_n - \alpha}{x_n - \alpha} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

Oleellisesti raja-arvo (12.8) voidaan muotoilla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon_n} = 0$$

Tällöin kappaleessa 4.3 tehtyjen havaintojen perusteella likiratkaisujonon  $\{x'_n\}$  suppeneminen on  $q$ -asteeltaan korkeampi kuin likiratkaisujonon  $\{x_n\}$ . Siten parannellun likiratkaisujonon  $x'_n$  suppeneminen on kiihdytettyä.

TODISTUS. Iteraation  $n$ . poikkeamalle  $\varepsilon_n$  voidaan johtaa Aitkenin  $\Delta$ -differenssioperaattorin määritelmän perusteella

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - \alpha - (x_n - \alpha) = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \Delta \varepsilon_n$$

Siten myös monikerralle  $\Delta^2$  pätee

$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta(\Delta \varepsilon_n) = \Delta^2(\varepsilon_n)$$

Ylempiä kaavoja sekä  $\Delta^2$ -monikertojen kaavaa ja yhtälöä (12.7) soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= \Delta^2(\varepsilon_n) \\ &= \varepsilon_{n+2} - 2\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n \\ &= (A + \tau_{n+1})\varepsilon_{n+1} - 2(A + \tau_n)\varepsilon_n + \varepsilon_n \\ &= (A + \tau_{n+1})(A + \tau_n)\varepsilon_n - 2(A + \tau_n)\varepsilon_n + \varepsilon_n \\ &= ((A + \tau_{n+1})(A + \tau_n) - 2(A + \tau_n) + 1)\varepsilon_n \\ &= (A^2 + A(\tau_n + \tau_{n+1}) + \tau_{n+1}\tau_n - 2A - 2\tau_n + 1)\varepsilon_n \\ &= \underbrace{(A^2 - 2A + 1)}_{=(A-1)^2} + A(\tau_n + \tau_{n+1}) + \tau_{n+1}\tau_n - 2\tau_n)\varepsilon_n \end{aligned}$$

Täten saadaan kaava

$$\Delta^2 x_n = [(A - 1)^2 + \tau'_n]\varepsilon_n,$$

missä

$$\tau'_n = A(\tau_n + \tau_{n+1}) - 2\tau_n + \tau_n\tau_{n+1}$$

Kun  $\tau_n \rightarrow 0$ , seuraa tästä myös, että

$$\tau'_n \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

Tämän perusteella päädytään siihen, että kaikilla kyllin suurilla  $n$ , joille  $n > n_0$ , pätee

$$(A - 1)^2 + \tau'_n \neq 0$$

Tästä seuraa, että  $\Delta^2 x_n \neq 0$ , kun  $n > n_0$ . Näin ollen likiratkaisujono  $\{x'_n\}$  on hyvin määritelty, kun  $n > n_0$ . Tällöin

$$\Delta x_n = \Delta \varepsilon_n = (A + \tau_n - 1)\varepsilon_n,$$

joten vähentämällä kaavasta (12.6) tosiratkaaisu  $\alpha$  saadaan

$$\begin{aligned}
x'_n - \alpha &= x_n - \alpha - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \\
&= \varepsilon_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \\
&= \varepsilon_n - \frac{(A-1 + \tau_n)^2 \varepsilon_n}{(A-1)^2 + \tau'_n} \\
&= \varepsilon_n \left( 1 - \frac{(A-1 + \tau_n)^2}{(A-1)^2 + \tau'_n} \right) \\
&= \varepsilon_n \frac{(A-1)^2 + \tau'_n - (A-1 + \tau_n)^2}{(A-1)^2 + \tau'_n} \\
&= \varepsilon_n \frac{A^2 - 2A + 1 + \tau'_n - (A^2 - A + A\tau_n - A + 1 - \tau_n + A\tau_n - \tau_n + \tau_n^2)}{(A-1)^2 + \tau'_n} \\
&= \varepsilon_n \frac{\tau'_n - 2\tau_n A - 2\tau_n - \tau_n^2}{(A-1)^2 + \tau'_n} \\
&= \varepsilon_n \frac{\tau'_n - 2\tau_n(A-1) - \tau_n^2}{(A-1)^2 + \tau'_n}
\end{aligned}$$

Kun  $n \rightarrow \infty$ , niin sekä  $\tau_n \rightarrow 0$  että  $\tau'_n \rightarrow 0$ . Näin ollen

$$\frac{x'_n - \alpha}{\varepsilon_n} = \frac{\tau'_n - 2\tau_n(A-1) - \tau_n^2}{(A-1)^2 + \tau'_n} \rightarrow 0,$$

kuten halutaankin ja on väite todistettu.  $\square$

Sovelletaan lauseen 12.1 paranneltua likiratkaaisujonoa  $\{x'_n\}$  heti käytäntöön.

**SEURAUUS 12.2.** *Oletetaan, että funktio  $\phi$  noudattaa Lipschitz-ehtoa 9.1 sekä  $\phi(x) \in I$  kaikilla  $x \in I$ . Lisäksi iteraattifunktio  $\phi$  on jatkuvasti derivoituva välillä  $I$  ja sen derivaatalle  $\phi'(x) \neq 0$ .*

*Mikäli alkuarvaus  $x_0$  ei osu täsmälleen tosiratkaaisuun eli  $x_0 \neq \alpha$ , sekä iterointiyyhtälön (7.1) avulla saatu likiratkaaisujono  $\{x_n\}$  täyttää lauseen 12.1 oletukset, niin tällöin Aitkenin  $\Delta^2$ -kaava (12.5) saa aikaan nopeutuneen suppenemisen.*

**TODISTUS.** Kuten aiemmin tässä kappaleessa on osoitettu, ei pelkästään riitä osoittaa, että  $\varepsilon_n \neq 0$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ , vaan myös että yhtälö (12.2) on voimassa. Nämä asiat ovat täsmälleen mitä lauseessa 12.1 osoitetaan ja siten seurauksen väite on todistettu.  $\square$

#### 12.4. Newtonin menetelmän neliöllinen suppeneminen

Aiemmin luvun alkupuolella kappaleen 12.1 alussa oletettiin, että iteraattifunktion derivaatalle  $\phi'(x) \neq 0$  sekä erityisesti  $\phi'(\alpha) \neq 0$ . Tästä löydettiin lineaarinen konvergoitikäyttäytyminen, jonka ominaisuuksia kaava (12.2) sekä suppenemisnopeutta kaava (4.1) kuvaavat.

Tutkitaan seuraavaksi poikkeaman  $\varepsilon$  asymptoottista käyttäytymistä erityistapauksessa  $\phi'(\alpha) = 0$ . Jos asia on todellakin näin, ei ole tarpeen tarkistaa kaikkia kutistavuuslauseen 9.4 oletuksia, mutta aluksi tulee kuitenkin varmistaa lauseen johtopäätökset.

LAUSE 12.3 (Newtonin menetelmän suppeneminen). *Olkoon  $I \in \mathbb{R}$  väli (rajoitettu tai rajoittamaton), funktio  $\phi$  on hyvin määritelty joukossa  $I$  ja funktiolle  $\phi$  pätevät seuraavat ehdot:*

- (1)  $\phi$  ja  $\phi'$  ovat jatkuvia välillä  $I$ ,
- (2) iterointiyhtälöllä  $x = \phi(x)$  on ratkaisu  $\alpha$ , joka sijaitsee välin  $I$  sisällä, sekä ratkaisulle  $\alpha$  on  $\phi'(\alpha) = 0$ .

Tällöin on olemassa luku  $r > 0$  siten, että iterointiyhtälö (7.1) suppenee kohti tosiratkaisua  $\alpha$  millä tahansa alkuarvauksella  $x_0$ , jolle  $|x_0 - \alpha| \leq r$ .

Mitä lause oleellisesti kertoo on, että iterointiyhtälön tuottama likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee aina, kun alkuarvaus  $x_0$  on valittu riittävän läheltä tosiratkaisua  $\alpha$ . Lause 12.3 on Newtonin menetelmän suppenemislauseiden 11.3 ja konkreettimman tapauksen 11.4 hieman toisenlainen muotoilu. Lauseessa 11.3 todistetaan ratkaisun  $\alpha$  olemassa olo, kun taas nyt käsitellyssä lauseessa 12.3 lähtökohtana oletetaan, että on olemassa ratkaisu  $\alpha$ .

TODISTUS. Merkitään väliä  $I_r := [\alpha - r, \alpha + r]$ , missä  $r > 0$ . Koska ratkaisu  $\alpha$  on välin  $I$  sisäpuolella, myös  $I_r$  sijaitsee välin  $I$  sisäpuolella jos  $r$  on suhteellisen pieni eli  $r \leq r_0$ . Olkoon luku  $\lambda$  määrätty ja  $0 < \lambda < 1$ .

Koska  $\phi'(\alpha) = 0$  ja derivaattafunktion  $\phi'$  jatkuvuuden nojalla on olemassa  $r$ , jolle  $0 < r \leq r_0$  siten, että

$$|\phi'(x)| = |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| \leq \lambda,$$

kun  $|x - \alpha| < r$  eli  $x \in I_r$ .

Näin ollen derivoituvuusehtolauseen 9.11 perusteella funktio  $\phi$  on Lipschitz-jatkuva ja lisäksi, kun  $x \in I_r$ , niin

$$|\phi(x) - \alpha| = |\phi(x) - \phi(\alpha)| \leq \lambda|x - \alpha| \leq \lambda r < r$$

Täten iteraattifunktion  $\phi$  määrittelyjoukon ollessa  $I_r$  on iteraation arvojoukkokin enintään  $I_r$ . Siten välillä  $I_r$  kutistavuuslauseen 9.4 alkuehdot täyttyvät, jolloin iterointiyhtälön (7.1) tuottama likiratkaisujono suppenee.  $\square$

Oletetaan aikaisempien lauseen 12.3 oletusten lisäksi, että on olemassa jatkuva  $\phi''$ , jolle  $\phi''(x) \neq 0$  välillä  $I_r$ . Näin ollen voidaan näyttää toteen, että nyt myös iteraatioprosessin päättymättömyyslause 9.16 on voimassa. Toisin sanoen, jos alkuarvauksella  $x_0$  ei osuta täsmälleen nollakohtaan  $\alpha$ , ei mikään likiratkaisu  $x_n$  saavuta ratkaisua  $\alpha$  äärellisellä määrällä iteraatiokierroksia, eikä tosiratkaisuuun  $\alpha$  myöskään voida osua sattumalta. Soveltaen Taylorin polynomiapproksimaatioiden sarjakehitelmää (Taylor's theorem, tarkemmin Taylorin polynomeista, katso esimerkiksi [2, 5.3]),

löydetään poikkeamalle  $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$  seuraava polynomiapproksimaatio

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha \\ &= \phi(x_n) - \phi(\alpha) \\ &= \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)\varepsilon_n + \frac{1}{2}\phi''(\alpha + \theta_n\varepsilon_n)\varepsilon_n^2 - \phi(\alpha) \\ &= \phi'(\alpha)\varepsilon_n + \frac{1}{2}\phi''(\alpha + \theta_n\varepsilon_n)\varepsilon_n^2\end{aligned}$$

Tässä  $\theta_n$  tarkoittaa täsmentämätöntä, tarkemmin määrittelemätöntä lukua, jolle on  $0 < \theta_n < 1$ . Olettamuksen  $\phi'(\alpha) = 0$  perusteella yllä oleva lauseke sievenee muotoon

$$(12.9) \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\phi''(\alpha + \theta_n\varepsilon_n)\varepsilon_n^2$$

Koska  $\varepsilon_n \neq 0$  ja  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , saadaan peräkkäisten poikkeamien raja-arvoksi

$$(12.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}\phi''(\alpha)$$

Yllä oleva yhtälöt (12.9) ja (12.10) kuvaavat hätkähdyttävän havainnon, sillä jos  $\phi'(\alpha) = 0$ , niin  $(n+1)$ :nnen iteraation poikkeama  $\varepsilon_{n+1}$  on suhteessa edellisen  $n$ :nnen iteraation poikkeamaan  $\varepsilon_n$  peräti *neliöityvästi* pienempi. Tällöin suppenemisen  $q$ -aste on siis  $q = 2$  ja näin tehokkaan suppenemisen sanotaan olevan *neliöityvä*. Siten oletus  $\phi'(\alpha) = 0$  tuo hätkähdyttävän parannuksen suppenemisnopeuteen.

**LAUSE 12.4** (Newtonin menetelmän neliöityvä suppeneminen). *Oletetaan lauseen 12.3 oletukset ja erityisesti, että  $\phi'(\alpha) = 0$ . Oletetaan lisäksi, että on olemassa jatkuva  $\phi''$ , jolle  $\phi''(x) \neq 0$  välillä  $I_r$ .*

*Tällöin iteraatio suppenee neliöityvästi.*

TODISTUS. Väite todistettiin ylläolevassa päätelyssä. □

### 12.5. Aitkenista Newtonin menetelmäksi

Edellä läpikäydystä päätelystä saattaa jäädä käsitys, että neliöityvä suppeneminen saavutetaan harvoin, koska iterointiyhtälön  $x = \phi(x)$  iteraattifunktion derivaatan vaatimus  $\phi'(\alpha) = 0$  täytyy ainoastaan sattumalta. Kuitenkin käy niin, että ainakin derivoituville funktioille  $f$  iterointiyhtälön (7.1) iteraattifunktio  $\phi$  voidaan *aina* muodostaa siten, että likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee neliöityvästi. Osoitetaan tämä seuraavaksi.

Olkoon funktio  $f$  hyvin määritelty ja kahdesti jatkuvasti derivoituva välillä  $I = [a, b]$ . Nyt olkoon  $f'(x) \neq 0$ , kun  $x \in I$  ja nollakohtayhtälön  $f(x) = 0$  välin  $I$  ainut ratkaisu on  $x = \alpha$ , missä  $\alpha \in \hat{I} := ]a, b[$ .

Aiemmin kiintopistemenetelmän yhteydessä kappaleessa 10.2 on jo osoitettu, että ratkaisu  $\alpha$  löydetään iteroimalla funktiota

$$\phi(x) = x + Mf(x),$$



missä luku  $M$  on sopiva vakio. Kun  $M = 1$  on kyseessä tavallinen, yksinkertainen kiintopistemenetelmän yhtälö. Kun  $M$  on riittävän pieni, on kyseessä loivennettu kiintopisteyhtälö. Jos onni ei sattumalta ole myötä, tästä seuraava iteraation likiratkaisujono on vain lineaarisesti suppeneva.

Siten on oleellista tarkastella, voidaanko vakion  $M$  tilalle kehitellä alkuperäisestä funktiosta  $f$  riippuva funktio  $c(x)$  siten, että iteraattifunktio

$$\phi(x) = x + c(x)f(x)$$

suppenee ratkaisuun  $\alpha$  neliöityvästi?

Lauseen 12.3 sekä siitä johdetun yhtälön (12.10) perusteella ainoa ehto, jonka iteraattifunktion  $\phi$  (triviaalisti kiintopisteyhtälönä  $\alpha = \phi(\alpha)$  toimimisen lisäksi) tulee täyttää on  $\phi'(\alpha) = 0$ . Näin määritellyn iteraattifunktion  $\phi$  derivaatta

$$\phi'(x) = 1 + c'(x)f(x) + c(x)f'(x)$$

Tällöin ratkaisussa  $\alpha$  ylläoleva yhtälö saa muodon

$$\phi'(\alpha) = 0 = 1 + c'(\alpha)f(\alpha) + c(\alpha)f'(\alpha)$$

eli

$$c'(\alpha)f(\alpha) + c(\alpha)f'(\alpha) = -1$$

Koska  $f(\alpha) = 0$ , saadaan

$$c(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}$$

Siten yksinkertaisin vaihtoehto täyttää vaatimus  $\phi'(\alpha) = 0$  (joka ei toki välttämättä ole ainoa vaihtoehto) on valinta  $c(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ . Siten tästä saadaan tuttu Newtonin menetelmän palautuskaava

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ja rekursiivisesti

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{missä } n \in \mathbb{N}$$

Tätä iteraatiokaavaa kutsutaan Newtonin iteraation palautuskaavaksi. Jos alkuarvo  $x_0$  on valittu kyllin läheltä tosiratkaisua  $\alpha$  lauseen 12.3 oletusten mukaisesti, likiratkaisujono  $x_n$  suppenee, sillä palautuskaavan iteraatiofunktion menetelmäosa  $c(x)$  on erityisesti muodostettu siten, että ehto  $\phi'(\alpha) = 0$  täyttyy.

Jos aiempien oletusten lisäksi oletetaan, että kolmas derivaatta  $f^{(3)}$  on olemassa ja jatkuva, ja siten on olemassa jatkuva  $\phi''(x)$ , niin Newtonin menetelmän palautuskaavan antama likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee neliöityvästi. Tämä tapahtuu tietysti vain silloin, kun palautuskaavan mukainen iteraattifunktio  $\phi$  on ylipäänsä olemassa.

Palautuskaavalle on tuttu graafinen tulkinta: funktion  $f$  kulkua arvioidaan likiarvopisteeseen  $(x_n, f(x_n))$  piirretyllä tangentilla. Tällöin tangentin yhtälö on

$$y = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n)$$

Jos tätä lauseketta verrataan nollaan eli etsitään tangentin leikkauskohta x-akselin kanssa, saadaan johdettua Newtonin menetelmän palautuskaava, kuten Newtonin menetelmän luvun alussa kappaleessa 11.1 tehtiin. Intuitiivisesti tämä graafinen representaatio kuvaa hyvin mitä tapahtuu, mutta tämä yksinkertainen tapa johtaa Newtonin menetelmä ei kuitenkaan kerro mitään suppenemisen edellytyksistä tai suppenemisnopeudesta. Vielä vähemmän intuitiivinen päättely olisi yleistettävissä useamman ulottuvuuden yhtälöille tai kompleksilukujuurille.

### 12.6. Sumerilaisten menetelmän suppenemisnopeus

Aiemmin kappaleessa 11.5 huomattiin Sumerilaisten menetelmän olevan Newtonin menetelmän erityistapaus. Siten Sumerilaisten rekursiokaava

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

on myös funktion  $f(x) = x^2 - 25$  Newtonin menetelmän iteraattifunktio

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$$

Newtonin menetelmän oletukset ovat voimassa funktiolle  $f$ , sillä  $f$  on polynomina kahdesti jatkuvasti derivoituva ja derivaatat  $f'$  ja  $f''$  ovat olemassa. Tämän perusteella voidaan Newtonin iteraation yhteydessä tehtyjä päätelmiä soveltaa Sumerilaisten menetelmän suppenemisnopeuden sekä tehokkuuden tarkasteluun. Aiemmin Sumerilaisten menetelmän esimerkin 7.14 yhteydessä huomattiin, että neliöjuuren likiarvo näyttäisi suppenevan sangen nopeasti. Todistetaan tämä empiirinen havainto.

Funktio  $f$  on polynomina kahdesti jatkuvasti derivoituva. Nyt iteraattifunktion  $\phi$  derivaatta on

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right) \\ \phi''(x) &= \frac{a}{x^3} \end{aligned}$$

Nollakohdassa  $\alpha = \sqrt{25}$  iteraattifunktion derivaatta on

$$\phi'(\alpha) = \phi'(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{(\sqrt{a})^2} \right) = 0$$

Lisäksi  $\phi'' > 0$ , koska  $\phi''(x) = \frac{a}{x^3} > 0$ , sillä  $x > 0$  ja  $a > 0$ .

Täten yhtälön (12.10) perusteella Sumerilaisten iteraatio suppenee ratkaisuun  $\alpha$  neliöityvästi. Täten matemaattisen tarkastelun perusteella aiempi intuitiivinen havainto suppenemisnopeudesta pitää paikkansa.

Lisäksi Sumerilaisten menetelmän tapauksessa voidaan osoittaa, että likiratkaisujono  $\{x_n\}$  suppenee millä tahansa alkuarvauksella  $x_0 > 0$ . Katso esimerkiksi [10, s. 81-82]. Sumerilaisten menetelmä on siis Newtonin iteraation aina suppeneva erityistapaus.

ESIMERKKI 12.5. Koska Sumerilaisten menetelmä suppenee neliöityvästi, on menetelmä erittäin tehokas. Toisaalta menetelmä on erityisen käyttökelpoinen ja turvallinen, koska se suppenee millä tahansa alkuarvauksella  $x_0 > 0$ . Lasketaan likiarvo neliöjuurelle  $\sqrt{25}$  uudelleen, jos alkuarvo  $x_0$  arvataan todella pieleen. Näin ollen otetaan alkuarvaukseksi  $x_0 = 5000$ . Tällöin neliöjuurelle  $\sqrt{25}$  saadaan likiarvot

$$\begin{aligned} x_0 &= 5000 \\ x_1 &= \frac{1}{2} \left( 5000 + \frac{25}{5000} \right) \\ &= \frac{1000001}{400} = 2500,0025 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1000001}{400} + \frac{25}{1000001/400} \right) \\ &= 1250,00624999500 \dots \\ x_3 &= 625,013124947500 \dots \\ x_4 &= 312,526562053761 \dots \\ x_5 &= 156,303277627226 \dots \\ x_6 &= 78,2316115447661 \dots \\ x_7 &= 39,2755877294868 \dots \\ x_8 &= 19,9560577208082 \dots \\ x_9 &= 10,6044050803409 \dots \\ x_{10} &= 6,48095796353439 \dots \\ x_{11} &= 5,16920619622102 \dots \\ x_{12} &= 5,00276935526972 \dots \\ x_{13} &= 5,00000076650831 \dots \\ x_{14} &= 5,000000000000006 \dots \end{aligned}$$

Sumerilaisten menetelmän suppenemista voidaan verrata puolitusmenetelmään, joka suppenee aina varmasti, mutta selkeästi hitaammin. Puolitusmenetelmän tarvitsemien rekursioiden määrä voidaan helposti laskea kaavan (6.1) epäyhtälöstä

$$n > \log_2 \left( \frac{b-a}{\delta} \right)$$

Jos alkuväli  $I$  on huomattavan paljon pielessä ja tiedetään, että neliöjuuren  $\sqrt{25}$  ratkaisu on välillä  $[1, 5000]$  ja halutaan ratkaisu 9 desimaalin tarkkuudella, niin tällöin tavoiteltu tarkkuus  $\delta = 0,000\ 000\ 000\ 5$  ja tarvittavien rekursioiden lukumäärä on

$$n > \log_2 \left( \frac{5000 - 1}{0,0000000005} \right) = 43,1847767\dots$$

Täten tarvittavien rekursioiden määrä on 44, kun Newtonin menetelmällä vastaava tarkkuus saavutetaan jo 14. iteraatiokierroksella. Lineaarisesti suppenevan puolitusmenetelmän ja neliöityvästi kiihtyvällä suppenemisnopeudella suppenevan Newtonin menetelmän suppenemisnopeuksien välillä on sangen suuri ero, kuten esimerkiksi voidaan huomata.

Yleisestikin esimerkki kuvaa hyvin kuinka tärkeää on valita sopiva menetelmä kulloiseenkin yhtälönratkaisutilanteeseen. Oleellinen vastakkainasettelu on menetelmän tehokkuus ja varmuus. Tällöin on toki varmistuttava menetelmän käyttämistä oletuksista ja mitkä olosuhteet menetelmä vaatii supetakseen.

## Aitkenin $\Delta^2$ -menetelmä

Aiemmin iteraatiomenetelmien suppenemista tutkittaessa löydettiin Aitkenin kaava (12.5). Kyseinen kaava on siitä merkityksellinen, että kaavaa voidaan soveltaa itsenäisenä menetelmänä parantaa muilla menetelmillä saatuja nollakohdan likiratkaisuita. Näin ollen Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmä (Aitken's  $\Delta^2$ -method) perustuu ideaan ottaa kolme mitä tahansa peräkkäistä likiarvoa ja generoida näiden avulla uusi, paranneltu likiratkaisu. Aitkenin menetelmän merkinnässä käytetään kreikkalaista isoa kirjainta  $\Delta$  (*delta*) ja menetelmä on saanut nimensä sitä 1920-luvulla tutkineen matemaatikon mukaan. Lukion oppikirjoissa Aitkenin menetelmää ei yleisesti edes mainita, vaikka menetelmän avulla voidaan matemaattisemmin perustella Newtonin menetelmän suppenemisnopeus ja muita matemaattisia ominaisuuksia.

### 13.1. Menetelmä

IDEA 13.1. Otetaan millä tahansa menetelmällä tuotetun kolmen peräkkäisen likiratkaisun lukujono  $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ . Aitkenin kaavaa käyttäen tuotetaan näitä likiarvoja käyttäen *paranneltu likiratkaisu*  $x'_n$ .

MÄÄRITELMÄ 13.2 (Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmä). Aitkenin menetelmän kaava on

$$(13.1) \quad x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n},$$

missä  $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$  ovat kolme peräkkäistä likiratkaisua.

Aitkenin kaava voidaan kirjoittaa yksinkertaistetussa muodossa

$$(13.2) \quad x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

kuten kohdassa (12.6) kaava johdettiin.

$\Delta^2$ -kaava (13.2) antaa Aitkenin kaavalle muotoilun, mistä menetelmän nimi juontuu. Nyt ei tarkoituksellisesti puhuta palautuskaavasta, koska kyseessä ei ole iteraatio ja Aitkenin menetelmä eroaa idealtaan sen verran aiemmin esitellyistä menetelmistä.

ALGORITMI 13.3 (Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmä).

- (1) Hankintaan jollakin  $q$ -asteeltaan  $q < 2$  olevalla yhtälönratkaisumenetelmällä kolme peräkkäistä nollakohdan likiratkaisua  $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ .
- (2) Tuotetaan Aitkenin kaavalla (13.1) *paranneltu likiratkaisu*  $x'_n$ .

- (3) Jatketaan jollakin toisella menetelmällä tai lopetetaan, jos paranneltu likiratkaisu on riittävän tarkka.

Aitkenin menetelmän suppenemista ja suppenemisnopeutta on käsitelty aiemmin kapaleen 12.3 yhteydessä.

### 13.2. Esimerkkejä

ESIMERKKI 13.4. Aiemmin esimerkissä 10.4 kiintopistemenetelmällä saatiin neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiratkaisujonon viideksi peräkkäiseksi likiarvoksi

$$(13.3) \quad \begin{aligned} x_5 &= 4,8208149708 \dots \\ x_6 &= 4,9088021216 \dots \\ x_7 &= 4,9539852081 \dots \\ x_8 &= 4,9768867360 \dots \\ x_9 &= 4,9884166568 \dots \end{aligned}$$

Parannellaan näistä kolmea ensimmäistä likiarvoa Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmää käyttäen.

Tällöin Aitkenin kaavaa (13.1) soveltaen saadaan

$$\begin{aligned} x'_5 &= x_5 - \frac{(x_6 - x_5)^2}{x_7 - 2x_6 + x_5} \\ &= 4,8208149708 \dots - \frac{(4,9088021216 \dots - 4,8208149708 \dots)^2}{4,9539852081 \dots - 2 \cdot 4,9088021216 \dots + 4,8208149708 \dots} \\ &= 5,0016795413767 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_6 &= x_6 - \frac{(x_7 - x_6)^2}{x_8 - 2x_7 + x_6} \\ &= 4,9444245461 \dots - \frac{(4,9721735575 \dots - 4,9444245461 \dots)^2}{4,9860770863 \dots - 2 \cdot 4,9721735575 \dots + 4,9444245461 \dots} \\ &= 5,0004254833084 \dots \end{aligned}$$

$$x'_7 = 5,0001070955335 \dots$$

Nyt parannellut likiratkaisut  $\{x'_n\}$  ovat selkeästi tarkempia kuin alkuperäiset likiratkaisut  $\{x_n\}$ . Siten Aitkenin menetelmä sai aikaan suppenemisnopeuden kiihdytyksen kiintopistemenetelmän lineaariseen  $q = 1$ -asteiseen suppenemiseen.

Lisäksi nyt saatujen Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmällä kiihdytettyjen paranneltujen likiratkaisuiden arvoja voidaan entisestään parantaa, syöttämällä ne uudelleen Aitkenin kaavaan. Tällöin

$$\begin{aligned} x''_5 &= x'_5 - \frac{(x'_6 - x'_5)^2}{x'_7 - 2x'_6 + x'_5} \\ &= 4,99999875526024 \dots \end{aligned}$$

Siten, jos Aitkenin  $\Delta^2$ -kiihdytyksellä saatua likiratkaisua  $x_5''$  verrataan lineaarisesti suppenevalla kiintopistemenetelmällä laskettuihin likiratkaisuihin (13.3), on suppenemisnopeuteen saatu huomattava parannus.

ESIMERKKI 13.5. Sovelletaan Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmää Newtonin menetelmällä esimerkissä 7.14 saatuihin neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiarvoihin.

$$x_2 = 5,349137931034482$$

$$x_3 = 5,011394106532552$$

$$x_4 = 5,000012953048684$$

Tällöin parannelluksi likiratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2 - \frac{(x_3 - x_2)^2}{x_4 - 2x_3 + x_2} \\ &= 4,9996160612895 \end{aligned}$$

Hämmästyttävästi Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmä ei enää paranna likiarvoja. Itseasiassa paranneltu likiratkaisu  $x_2'$  on jopa epätarkempi kuin Newtonin menetelmän likiratkaisujonon viimeisin jäsen  $x_4$ . Miksi näin tapahtuu?

Oleellista on mennä tarkastelemaan Aitkenin menetelmän taustalla olevan seurauksen 12.2 oletuksia. Oletus oli, että  $\phi'(x) \neq 0$  – aivan kuten lineaarisessa suppenemisnopeudessa tapahtuu. Newtonin menetelmässä näin ei oleellisesti ole, vaan Newtonin menetelmän iteraattifunktiolle pätee erityisesti paljon tehokkaampi  $\phi'(\alpha) = 0$ . Siten Aitkenin  $\Delta^2$ -menetelmän oletukset eivät täyty ja paranneltu likiratkaisu  $x_n'$  ei olekaan paranneltu. Aitkenin  $\Delta^2$  ei tuo enää lisäarvoa Newtonin menetelmän  $q = 2$  -astetta olevaan neliöityvään suppenemiseen, joten suppeneminen ei kiihdy.





## Newtonin menetelmää lähellä olevia yhtälönratkaisumenetelmiä

### 14.1. Entä jos funktio ei ole derivoituva?

Newtonin menetelmän suuri etu on sen tehokkuus: toimiessaan likiratkaisujono tarkentuu neliöityvästi. Toisaalta menetelmän puute on siinä, että funktion  $f$  täytyy olla jatkuvasti derivoituva. Käytännöllisessä mielessä tämä ei välttämättä ole niinkään ongelma siinä määrin kuin se, että alkuperäinen funktio  $f$  itsessään voi olla muodostettu pitkän approksimoinnin ja mallintamisen tuloksena tosimaailman ilmiöstä. Tästä edelleen derivaattafunktion muodostaminen ja derivaatan arvon laskeminen voi olla erityisen työlästä ja ei välttämättä kovin täsmällistäkään.

Seuraavassa käsitellään varsinkin käytännön sovellutusten mielessä mielekkäitä tapoja löytää ratkaisuita ilman suoraa derivaatan laskemista. Samalla siirrytään kauemmaksi varsinaisista iteratiivisista menetelmistä. Näin ollen esimerkiksi Lipschitz-jatkuvuuden tarkastelu ei kaikilla metodeilla aina ole mielekäästä, varsinkaan myöhemmin esiteltävillä kahta tai kolmea edellistä likiratkaisua muuttujanaan käyttävillä yhtälönratkaisumenetelmillä. [10, 4.11]

### 14.2. Whittakerin menetelmä

Whittakerin menetelmässä (Whittaker's method) vältetään laskemasta funktion  $f$  derivaattaa yksinkertaisesti korvaamalla Newtonin menetelmän palautuskaavassa derivaatan  $f'(x)$  arvo jollain sopivalla (valistuneesti arvatulla) vakiolla  $m$ . Näin saadaan palautuskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$$

Menetelmä on lineaarisesti konvergoiva, paitsi jos alkuarvaus on lähellä ratkaisua  $\alpha$  ja sattumalta valitaan  $m = f'(\alpha)$ , jolloin likiratkaisujono suppenee neliöityvästi. Jos derivaatta-approksimaatti  $m$  on riittävän hyvä, voi suppeneminen olla huomattavan nopeaa. Toisaalta, jos pyritään varmistamaan, että iteraatio saadaan derivoituvuusehdon  $|\phi'(x)| < 1$  mukaisesti varmasti suppeneväksi ja luvuksi  $m$  valitaan huomattavan suuri luku, voi iteraatio tällöin supeta tavattoman hitaasti.

**ESIMERKKI 14.1.** Lasketaan neliöjuuren  $\sqrt{25}$  arvo Whittakerin menetelmällä eli etsitään nollakohtaa funktiolle  $f(x) = x^2 - 25$ , missä  $x > 0$ .

Otetaan alkuarvoksi sängen summittainen veikkaus  $x_0 = 100$ , jolloin

$$f'(100) = 200 =: m$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 100 \\
 x_1 &= x_0 - \frac{f(x)}{m} \\
 &= 100 - \frac{f(100)}{200} \\
 &= 50,125 \\
 x_2 &= 50,125 - \frac{f(50,125)}{200} \\
 &= 37,6874218750 \\
 x_3 &= 30,7107130370 \dots \\
 x_4 &= 26,1199735608 \dots \\
 x_5 &= 22,8337084667 \dots \\
 x_6 &= 20,3518172550 \dots \\
 x_7 &= 18,4058349271 \dots \\
 x_8 &= 16,8369611302 \dots \\
 x_9 &= 15,5445448297 \dots \\
 x_{10} &= 14,46138045996 \dots \\
 x_{11} &= 13,54072283592 \dots \\
 x_{12} &= 12,74896696132 \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Likiratkaisujono suppenee kohti tosiratkaisua  $\alpha = 5$ , mutta alun jälkeen selkeästi hidastuen. Alkuarvauksesta  $x_0$  saatu derivaatan arvo alkaa jäädä pahasti jälkeen uusien likiarvojen derivaatan arvosta.

Jos suppenemisnopeutta verrataan esimerkkiin 12.5, missä on käytetty Newtonin menetelmää, voi eron suppenemisten välillä huomata selkeästi. Ero siihen, kun derivaatan arvo tarkentuu joka iteraatiokierroksella on sitä merkittävämpi, mitä kauempana derivaatan approksimaatio  $m$  on derivaatan todellisesta arvosta  $f'(x_n)$ . Vaikka esimerkin 12.5 alkuarvaus on vielä enemmän pielessä, saavutetaan jo 16. iteraatiokierroksella likiratkaisu  $x_{14} = 5,00000000000006$ , kun Whittakerin menetelmän derivaatan approksimaatti on jäänyt jo kauaksi jälkeen eikä Whittakerin menetelmä enää suppene kovinkaan nopeasti.

Kokeillaan vielä uudestaan, sillä ongelmaa tarkemmin tarkastelemalla saadaan parempi vihje, että alkuarvaus  $x_0 = 4,5$  on lähempänä tosiratkaisua  $\alpha$ . Tällöin derivaatan approksimaatiksi saadaan

$$f'(4,5) = 9 =: m$$

Tällöin Whittakerin menetelmä antaa likiarvot

$$\begin{aligned}
x_0 &= 4,5 \\
x_1 &= 4,5 - \frac{f(4,5)}{9} \\
&= 5,0277777777 \dots \\
x_2 &= 4,9968278463 \dots \\
x_3 &= 5,0003513434 \dots \\
x_4 &= 4,9999609481 \dots \\
x_5 &= 5,0000043389 \dots \\
x_6 &= 4,9999995178 \dots \\
x_7 &= 5,0000000535 \dots \\
x_8 &= 4,9999999940 \dots \\
x_9 &= 5,0000000006 \dots
\end{aligned}$$

Nyt alkuarvauksen osuessa lähellä nollakohtaa  $\alpha$  likiratkaisujono suppenee huomattavasti nopeammin, koska  $m \approx f'(\alpha)$ . Whittakerin menetelmä ei tällä derivaatan approksimaatilla  $f'(\alpha) \approx m$  ja alkuarvolla  $x_0$  jää kauaksi Newtonin menetelmän suppenemisestä ja likiarvoista. Toisaalta melkein pä merkityksellisempää on, että derivaatan approksimaatti  $m$  osuu niin lähelle todellista derivaatan arvoa myös alkuarvauksen jälkeen. Aina toki derivaatan approksimaatin arvoa  $m$  ei saada määritettyä näin tarkasti edes alkuarvossa, vaan on turvauduttava valistuneeseen arvaukseen.

On huomionarvoista, että vakiolla  $m = 1$  antaa Whittakerin menetelmä luvussa 10 tutuksi tulleen yksinkertaisen kiintopistemethoden palautuskaavan  $\phi(x) = x - f(x)$ . Vastaavasti kiintopistemethoden esimerkissä 10.4 mainittu tekniikka loiventaa iteraattifunktiota funktioksi  $\tilde{\phi}$  on itseasiassa Whittakerin menetelmä. Kuten kiintopistemethodenkin kanssa, myöskään Whittakerin menetelmä ei aina suppene. Muun muassa esimerkin 7.10 polynomilla sovellettuna Whittakerin menetelmä löytää vain toisen kahdesta juuresta.

### 14.3. Mullerin menetelmä

Mullerin menetelmä (Muller's method) yleistää luvussa 15 esiteltävän sekanttimethoden, joka käyttää kahta likiratkaisua mallintamaan alkuperäisen funktion  $f$  kulkua sekanttisuoralla. Mullerin methodissa käytetään kolmea edellistä likiratkaisua  $\{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$  mallintamaan funktion  $f$  kulkua paraabelilla, jonka leikkauskohta  $x$ -akselin kanssa on uusi likiratkaisu  $x_{n+1}$ . Mullerin methodin  $q$ -aste on noin  $q \approx 1,84$ . Methodin on osoittautunut suhteellisen tehokkaaksi ja luotettavaksi löytää polynomien useamman kerran juuria sekä kompleksisiä juuria. [22, 5.9]

Vaihtoehtoisesti jos alkuperäinen funktio  $f$  on kahdesti jatkuvasti derivoituva, on funktion  $f$  kulkua mahdollista mallintaa likiratkaisupisteeseen  $(x_n, f(x_n))$  piirretyllä 2-asteen Taylorin polynomilla eli paraabelilla. Periaatteessa voitaisiin laskea  $n$ -kertaa

jatkuvasti derivoituvalle funktiolle  $f$  vaikka  $n$ :nnen asteen Taylorin polynomi likiratkaisupisteeseen ja tutkia tuon  $n$ . asteen polynomin leikkauskohtaa  $x$ -akselin kanssa. Tämä ei kuitenkaan ole varsinainen Mullerin menetelmä vaan enemmänkin Newtonin menetelmän laajennus. Lisäksi käytännössä on yksinkertaisempaa ja tehokkaampaa soveltaa Newtonin menetelmää useasti. [22, 5.9] [10, 10.1]

Yllämainittuja menetelmiä harvemmin käsitellään lukiomatematiikan numeeristen menetelmien kurssin sisällössä tai oppikirjoissa. Whittakerin menetelmä saatetaan esitellä kiintopistemethodin apukeinona. Tässä mainittujen menetelmien lisäksi on kehitelty muun muassa erityisesti polynomeille soveltuvia yhtälönratkaisumenetelmiä. Näistä enemmän, katso esimerkiksi [11, s. 123-133].

#### 14.4. Sekanttimenetelmät

Vaikka aina funktiolla  $f$  ei ole olemassa derivaattaa, derivaattafunktiota  $f'$  ei saada eksplisiittisesti määriteltyä tai derivaatta on vaikea muodostaa tai epävarma laskea, voidaan joissain tapauksissa turvautua derivaatan arvon määrittämiseen numeerisesti. Eräs idea tähän on approksimoida tangenttia sekanttisuoralla. Käsitellään lopuksi näitä sangen käyttökelpoisia ja kohtuullisen tehokkaasti suppevia sekantti- ja jännemenetelmää seuraavaksi.

## Sekanttimenetelmä

Yleinen sekanttimenetelmä eli sekanttimenetelmä (secant method) poikkeaa aiemmista iteratiivisista yhtälönratkaisumenetelmistä merkittävästi siinä, että sekanttimenetelmä tarvitsee nollakohdan lähetyviltä kaksi alkuarvausta  $x_{n-1}$  ja  $x_n$ . Siten iteraation ideaa, missä edellinen likiarvo parantaa seuraavan likiarvon laskentaa muutetaan siten, että kaksi edellistä likiarvoa parantavat ja tarkentavasti ohjaavat seuraavan likiratkaisun laskentaa. Sekanttimenetelmässä on siten ideana muodostaa kahden likiratkaisupisteen  $x_{n-1}$  ja  $x_n$  välille sekanttisuora, jonka leikkauspiste x-akselin kanssa on uusi likiratkaisu  $x_{n+1}$ . Sekanttimenetelmässä on suurena hyötynä se, ettei funktion  $f$  derivaatan arvoja tarvitse laskea tai edes tuntea derivaattafunktion kaavaa. Itseasiassa sekanttimenetelmä ei edes tarvitse derivaatan  $f'$  olemassaoloa. Se mikä saavutetaan sekanttimenetelmän yksinkertaisuudella menetetään suppenemisnopeudessa. Silti vaikkei sekanttimenetelmän suppenemisnopeus ole neliöityvää, on suppeneminen kuitenkin *ylilineaarista* ja siten kohtuullisen tehokasta. Terminä sekantti tarkoittaa suoraa, joka leikkaa ympyrän tai muun käyrän.

### 15.1. Sekantti Newtonin menetelmän tangentin approksimaationa

Sekanttimenetelmää voidaan pitää Newtonin menetelmän käytännöllisenä sovellutuksena, jolloin Newtonin menetelmässä käytetty derivaatan arvo korvataan sekanttimenetelmässä derivaatan numeerisella approksimaatiolla, sekantin kulmakertoimella. Tällöin sekantin kulmakerroin kuvastaa kahden likiarvopisteen välistä keskimääräistä muutosnopeutta.

IDEA 15.1. Newtonin menetelmän palautuskaavassa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

voidaan derivaattaa  $f'(x_n)$  approksimoida korvaamalla se derivaatan määritelmän erotusosamäärällä

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

missä  $x := x_n$  ja  $y := x_{n-1}$  ovat aiemmat likiratkaisut.

Näin saadaan johdettua sekanttimenetelmän palautuskaava

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \\ &= x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{aligned}$$

Käytännössä tällöin lasketaan derivaatalle numeerinen likiarvo kahden aikaisemman likiarvopisteen avulla. Sekanttimenetelmä siis soveltaa Newtonin menetelmän ideaa, mutta löytäen tangentille ja derivaatalle numeeriset vastineet: sekanttisuoran ja sekantin kulmakertoimen.

### 15.2. Sekanttisuora kuvaajan approksimaationa

”Derivaatattomana” Newtonin menetelmänä toimimisen lisäksi sekanttimenetelmän palautuskaava voidaan johtaa itsenäisesti sekanttisuoran yhtälön avulla seuraavasti.

IDEA 15.2. Muodostetaan kahden aiemman likiratkaisun  $x_{n-1}$  ja  $x_n$  funktion  $f$  kuvaajalla olevien pisteiden  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  ja  $(x_n, f(x_n))$  välille suora, jonka leikkauspiste x-akselin kanssa on uusi likiratkaisu  $x_{n+1}$ . Tällöin sekanttisuoran kulmakerroin tarkoittaa kuvaajan  $f$  keskimääräistä muutosta likiratkaisuiden välillä ja sekantin kulmakerroin on  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Lukion numeeristen menetelmien kursseilla sekanttimenetelmän palautuskaava johdetaan yleensä intuitiivisesti suorien leikkauskohtien perusteella seuraavasti. Yhtälön  $f(x) = 0$  likiratkaisuina tunnetaan kaksi alkuarvoa  $x_0$  ja  $x_1$ , jotka ovat suhteellisen lähellä nollakohtaa  $\alpha$ . Muodostetaan pisteiden  $(x_0, f(x_0))$  ja  $(x_1, f(x_1))$  kautta kulkeva suora eli sekantti. Tällöin sekanttisuoran yhtälö on

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Leikatessaan x-akselin on suoran vaakakoordinaatti  $y = 0$ , tällöin

$$\begin{aligned} -f(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \\ -\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}f(x_0) &= x - x_0 \end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$x = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}f(x_0)$$

Sekanttisuoran ja x-akselin leikkauskohta on uusi likiratkaisu  $x_2$ .

Tämän jälkeen voidaan vastaavasti laskea uusi likiratkaisu  $x_{n+1}$  käyttäen aina kahden viimeisintä likiratkaisua  $x_{n-1}$  ja  $x_n$ . Siten joka rekursiolla tarvitsee laskea vain

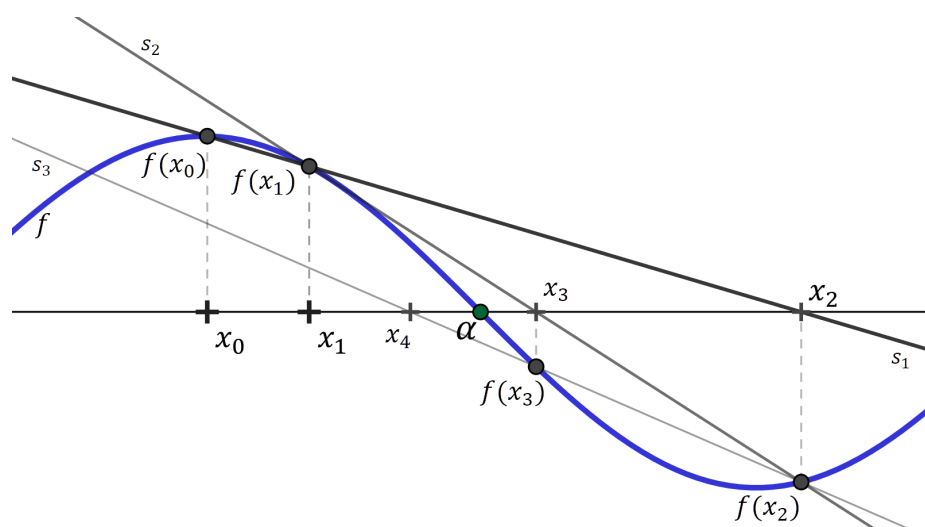
yksi uusi funktion arvo. Näin on johdettu sekanttimenetelmän palautuskaava kahdella eri tavalla, jolloin sekanttimenetelmän palautuskaava voidaan määrittellä yleisesti seuraavasti.

### 15.3. Menetelmä

MÄÄRITELMÄ 15.3. Sekanttimenetelmän palautuskaava on

$$(15.1) \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

missä  $\{x_n, x_{n-1}\}$  ovat edelliset peräkkäiset likiratkaisut.



KUVA 15.1. Sekanttimenetelmän yleisperiaate, jolla löydetään seuraava likiratkaisu.

ALGORITMI 15.4 (Yleinen sekanttimenelmä).

- (1) Annetaan alkuarvot  $x_0$  ja  $x_1$ , jotka ovat riittävän lähellä yhtälön  $f(x) = 0$  nollakohtaa  $x = \alpha$ .
- (2) Lasketaan palautuskaavalla  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$  seuraava nollakohdan likiratkaisu  $x_{n+1}$ .
- (3) Lasketaan seuraava likiratkaisu  $x_{n+2}$  kahden edellisen likiratkaisun  $x_n$  ja  $x_{n+1}$  avulla.
- (4) Toistetaan, kunnes saavutetaan tavoiteltu likiratkaisun tarkkuus tai lopetetaan, kun riittävä määrä toistoja on suoritettu.

HUOMIOITA 15.5.

- (1) Sekanttimenetelmä on käytännössä funktion  $f$  lineaarista inter- tai ekstrapolointia sekanttisuoran avulla.
- (2) Koska sekanttimenetelmä käyttää kahta alkuarvoa nollakohdan määrittämiseen ja ei siten varsinaisesti ole iteratiivinen yhtälönratkaisumenetelmä, voi lauseesta 9.16 poiketen sekanttimenetelmä sattumalta osua täsmälleen nollakohtaan  $\alpha$  jollain rekursiokierroksella  $n$ .

- (3) Sekanttimenetelmä on tietyissä tapauksissa erityisen käyttökelpoinen. Esimerkiksi silloin, kun funktiolla  $f$  ei ole derivaattaa, derivaattafunktiota  $f'$  ei osata eksplisiittisesti muodostaa tai derivaatan arvojen laskeminen olisi erityisen työlästä tai epävarmaa. Tällaisia tapauksia ovat esimerkiksi derivaatan laskeminen derivaattafunktion implisiittisestä muodosta tai derivaatan numeerinen approksimointi.

#### 15.4. Suppeneminen

Koska sekanttimenetelmä on lähellä Newtonin menetelmää, hyvin samantyylliset vaaranpaikat kuin Newtonin menetelmän yhteydessä kappaleessa 11.2 käsiteltiin pätevät myös sekanttimenetelmälle. Huonoimmillaan sekanttimenetelmässä muodostettava sekanttisuora on vaakasuora, jolloin seuraavaa likiratkaisua  $x_{n+1}$  ei voida muodostaa. Tällöin sekantti ei leikkaa x-akselia ja siten seuraava likiratkaisu sijaitsee äärettömän kaukana. Näin ollen likiratkaisujono hajaantuu. Muutoin huonossa tapauksessa sekantin leikkauskohta x-akselin kanssa saattaa osua kauaksi nollakohtasta ja likiratkaisujono saattaa hajaantua tai hypätä johonkin toiseen nollakohtaan. Toisaalta sekanttimenetelmä ei tarvitse kuvauksen derivoituvuutta, ainoastaan jatkuvuuden.

Sekanttimenetelmällä Lipschitz-ehtoa 9.1 ei voida suoraviivaisesti käyttää. Sekanttimenetelmä ei ole iteratiivinen menetelmä, sillä menetelmä tarvitsee kaksi alkuarvoa. Iteroidessa käytettävä iteraattifunktio  $\phi$  on yksiulotteinen skalaarifunktio eikä siten iterointiyhtälöä  $x = \phi(x)$  voida suoraan soveltaa. Tämän vuoksi sekanttimenetelmän yhteydessä puhutaan iteraatiokaavan sijaan palautuskaavasta.

#### 15.5. Suppenemisnopeus

Alkuehtojen toteutuessa sekanttimenetelmä suppenee *ylilineaarisesti*. Tällöin suppenemisen  $q$ -aste on samansuuruinen kultaisen leikkauksen suhteen kanssa, jolloin

$$q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62$$

Tarkemmin suppenemisnopeuden päättelystä Fibonaccin lukujonon avulla, katso esimerkiksi [11, s. 99-101] tai [20, 2.6].

Käytännön sovellutuksissa on sekanttimenetelmä usein Newtonin menetelmää käytännöllisempi. Ensinnäkin derivaatan lauseketta ei tarvitse osata laskea tai tuntea, toisaalta funktion  $f$  ei edes tarvitse olla derivoituva.

Näiden etujen lisäksi joka sekanttimenetelmän rekursiokierroksella tarvitsee laskea ainoastaan yksi uusi arvo  $f(x_n)$ , koska aiemmin laskettuja funktion arvoja  $f(x_{n-1})$  voidaan uudelleenkäyttää seuraavissa rekursioissa. Newtonin menetelmässä taas tarvitsee määrittää joka iteraatiolla kaksi uutta arvoa:  $f(x_n)$  ja  $f'(x_n)$ . Näistä derivaatan arvon  $f'(x_n)$  muodostaminen voi olla ajoittain sangen haastavaa tai osittain epäluotettavaa. Voi myös olla, että derivaatan lauseketta ei kyetä täsmällisesti muodostamaan ja esittämään eksplisiittisesti, jolloin aikavaatimus kasvaa entisestään.



Usein käytännön sovelluksissa ehditään Newtonin menetelmän yhteen iteraatioaskeleen laskemiseen kuluva ajassa tehdä kaksi sekanttimenetelmän rekursiota. Siten on sekanttimenetelmän kahden rekursion konvergointiaste

$$q^2 = q + 1 \approx 2,62$$

Vastaavassa laskentaan menevässä ajassa on Newtonin menetelmällä tehty suurinpiirtein yksi iteraatiokierros asteella  $q = 2$ . Näin ollen sekanttimenetelmä ei usein ole pelkästään käytännöllisempi, vaan lisäksi ainakin lokaalisti ero menetelmien matemaattisessa tehokkuudessa usein kapenee, tai jopa kääntyy käytännön sovellutuksissa sekanttimenetelmän eduksi. Tarkemmin aiheesta, katso esimerkiksi [11, 2.3] ja [22, s. 292-294].

### 15.6. Esimerkki neliöjuuren laskemisesta

Lasketaan likiarvo neliöjuurelle  $\sqrt{25}$  sekanttimenetelmällä. Tällöin etsitään nollakohtaa funktiolle  $f(x) = x^2 - 25$ , missä  $x > 0$ .

ESIMERKKI 15.6. Alkuarvoikseen sekanttimenetelmä saa arvot  $x_0 = 1$  ja  $x_1 = 2$ . Huomaa, että molemmat alkuarvot ovat samalla puolella tosiratkaisusta  $\alpha$ , sillä neliöjuurifunktion monotonisuuden perusteella

$$1 = \sqrt{1} < 2 = \sqrt{4} < \sqrt{25}$$

Lisäksi molempien alkuarvojen funktion arvot ovat negatiiviset, toisin sanoen

$$f(1) < f(2) < 0$$

Lasketaan seuraava likiratkaisu  $x_2$  sekanttimenetelmän palautuskaavaa (15.1) käyttäen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \\ &= 2 - f(2) \frac{2 - 1}{f(2) - f(1)} \\ &= 2 - (2^2 - 25) \cdot \frac{2 - 1}{2^2 - 25 - (1^2 - 25)} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Lasketaan seuraava likiratkaisu  $x_3$  kahden edellisen likiarvon  $x_1$  ja  $x_2$  avulla. Huomaa, että edellisen rekursion yhteydessä jo laskettiin likiarvolle  $x_1$  funktion arvo  $f(x_1) = f(2)$ , joten arvoa ei tarvitse enää laskea uudelleen vaan arvo voidaan uudelleenkäyttää tässä. Palautuskaavalla saadaan

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \\ &= 9 - (9^2 - 25) \cdot \frac{9 - 2}{9^2 - 25 - (-21)} \\ &= \frac{43}{11} = 3,909090909090 \dots \end{aligned}$$

Lasketaan seuraava likiratkaisu  $x_4$  kahden edellisen likiarvon  $x_2$  ja  $x_3$  avulla. Käytetään edellisen rekursion arvoa  $f(x_2)$  suoraan sitä uudelleen laskematta. Palautuskaavalla saadaan

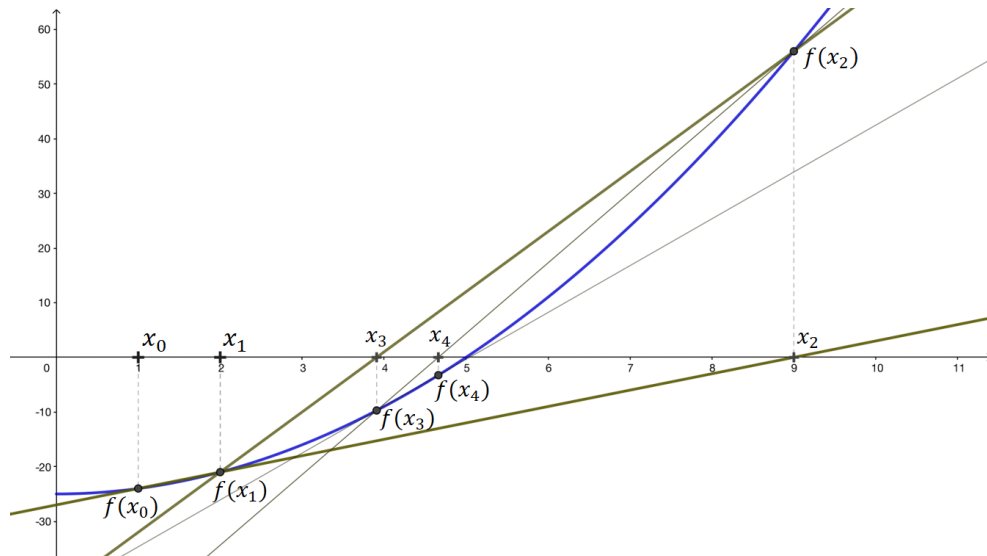
$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - f(x_3) \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \\ &= \frac{43}{11} - \left( \left( \frac{43}{11} \right)^2 - 25 \right) \cdot \frac{\frac{43}{11} - 9}{\left( \frac{43}{11} \right)^2 - 25 - (56)} \\ &= \frac{331}{71} = 4,661971830985 \dots \end{aligned}$$

Jatketaan menetelmää samaan tapaan eteenpäin, jolloin saadaan taulukon 15.1 mukaiset likiarvot.

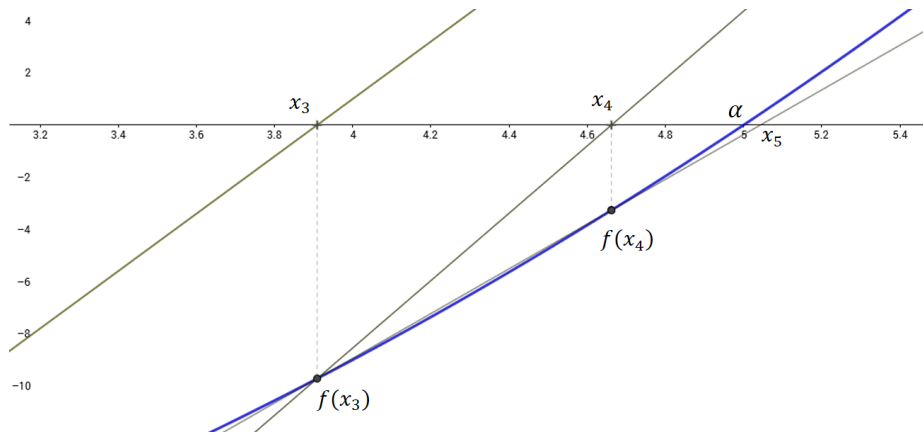
$n$	$x_n$	$f(x_n)$
0	1	-24
1	2	-21
2	9	56
3	3,909090909091	-9,71900826446281
4	4,661971830986	-3,26601864709383
5	5,043023603228	0,43208706270232
6	4,998501473811	-0,01498301631013
7	4,999993579462	-0,00006420534161
8	5,000000000962	0,00000000962279

TAULUKKO 15.1. Sekanttimenetelmän likiratkaisut neliöjuurelle  $\sqrt{25}$ .

Huomionarvoista on, miten likiratkaisut ”pomppivat” molemmin puolin juuren  $\alpha$  ympärillä. Tämä voidaan myös havaita kuvasta 15.2.



KUVA 15.2. Sekanttimenetelmän viisi ensimmäistä likiratkaisua funktiolle  $f(x) = x^2 - 25$  esimerkin 15.6 lähtöarvoilla.



KUVA 15.3. Yksityiskohta kuvasta 15.2. Likiarvot tarkentuvat, mutta eivät ole täsmälleen tosiratkaisu  $\alpha$ .

Esimerkin alkupuolelta voidaan menetelmän soveltamisesta huomata, että missä järjestyksessä alkuarvot laitetaan on merkitystä. Tarkemmaksi oletettu likiratkaisu on myöhempi likiratkaisu  $x_1$ , koska silloin arvoa käytetään sekä likiarvon  $x_2$  että  $x_3$  laskemisessa. Aiempi, oletetusti epätarkempi likiratkaisu  $x_0$  suuntaa vain likiarvon  $x_2$  laskentaa.

ESIMERKKI 15.7. Ylläolevassa esimerkissä 15.6 alkuarvot sijaitsivat ratkaisusta  $\alpha$  käsin samalla puolella. Sekanttimenetelmässä alkuarvot voivat sijaita myös ratkaisun  $\alpha$  molemmilla puolilla. Esimerkiksi alkuarvoilla  $x_0 = 1$  ja  $x_1 = 6$  sekanttimenetelmä antaa taulukon 15.2 mukaiset likiratkaisut.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
0	1	-24
1	6	11
2	4,42857142857143	-5,38775510204081
3	4,94520547945205	-0,54494276599737
4	5,00334029227557	0,03341408030823
5	4,99998160236502	-0,00018397601137
6	4,99999999385669	-0,00000006143307
7	5,00000000000001	0,00000000000011

TAULUKKO 15.2. Sekanttimenetelmän likiratkaisut neliöjuurelle  $\sqrt{25}$  hieman eri alkuarvoilla.

Taulukon 15.2 arvoista tehtävien havaintojen perusteella likiratkaisujono näyttää supenevan jopa sängen tehokkaasti. Samoin on huomionarvoista, kuinka likiratkaisuiden funktion arvot  $f(x_n)$  vaihtelevat etumerkkinsä osalta. Lisäksi kummalla puolella likiratkaisut  $x_n$  tosiratkaisusta  $\alpha$  milloinkin sijaitsevat niinkään vaihtelee.



## Jännemenetelmä

Jänne- eli väärän sijoituksen menetelmä (regula falsi -menetelmä, method of false position, chord method) on lähes sama menetelmä kuin yleinen sekanttimenetelmä. Jännemenetelmä käyttää kahta alkuarvoa, samaa palautuskaavaa ja logiikkaa kuin sekanttimenetelmänkin sillä merkityksellisellä erolla, että jännemenetelmä vaatii sekä alkuarvausten  $\{x_0, x_1\}$  että kaikkien jänteen päätepisteiden  $\{x_n, x_m\}$  funktion arvojen  $f(x_n)$  ja  $f(x_m)$  erimerkkisyyden. Tässä  $n, m \in \mathbb{N}$  siten, että  $n \neq m$ . Jänteen muodostavien päätepisteiden arvoilla tulee siis olla eri etumerkit. Toisin sanoen, jos alkuväli  $I = I_0 = [a, b] = [a_0, b_0]$  ja  $n$ . toiston jälkeen väli on  $I_n = [a_n, b_n]$ , niin täytyy olla

$$f(a_n)f(b_n) < 0, \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

Tätä merkityksellistä yksityiskohtaa ja sen seurauksia lukuunottamatta suurin osa aiemmin luvussa 15 sekanttimenetelmän yhteydessä käsitelty pätee myös jännemenetelmälle. Sekanttimenetelmän yhteydessä sekantti määriteltiin suorana, joka leikkaa ympyrän tai muun käyrän. Sekä käyrälle että käyrän sisäpuolelle jäävä sekantin osa on jänne. Tämä analogia kuvaa hyvin sekantti- ja jännemenetelmien välistä eroa. Siinä missä sekanttimenetelmä on lineaarista inter- tai ekstrapolointia, on jännemenetelmä aina vain lineaarista interpolointia.

### 16.1. Menetelmä

IDEA 16.1. Sovelletaan yleistä sekanttimenetelmää, pidetään huoli, että tarkasteluvälin  $I_n$  päätepisteissä arvot  $f(a_n)$  ja  $f(b_n)$  ovat etumerkiltään erimerkkiset jokaisella rekursiolla.

Oletetaan, että funktio  $f$  on jatkuva. Lisäksi alkuarvojen  $x_0$  ja  $x_1$  funktion arvojen tulee olla eri etumerkkiset eli alkuarvoille pätee  $f(x_0)f(x_1) < 0$ . Palautuskaavaltaan jännemenetelmä on lähes sama kuin aiemmin esitelty sekanttimenetelmän palautuskaava (15.1) ja se määritellään seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 16.2. Jännemenetelmän palautuskaava on

$$(16.1) \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_m}{f(x_n) - f(x_m)},$$

missä likiratkaisut  $x_n$  ja  $x_m$  ovat kaksi funktion arvoiltaan eri etumerkkistä likiratkaisua. Toisin sanoen pätee likiratkaisuille  $x_n$  ja  $x_m$  pätee

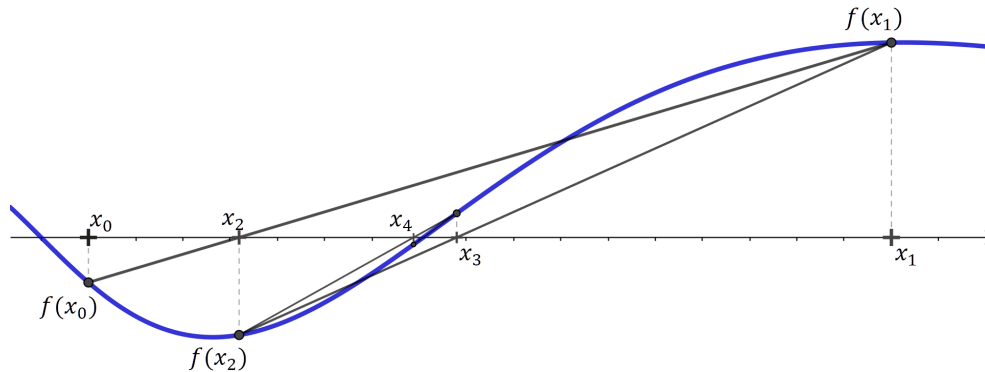
$$f(x_n)f(x_m) < 0$$

Likiratkaisu  $x_n$  on likiratkaisujen  $\{x_n, x_{n-1}, \dots\}$  tähän saakka viimeisin likiratkaisu, ja  $x_m$  se viimeisin likiratkaisu, jonka arvon  $f(x_m)$  etumerkki on eri kuin arvon  $f(x_n)$ .

Näin määriteltynä Bolzanon lauseen nojalla jatkuvalla funktiolla  $f$  löytyy väliltä  $I_n = [a_n, b_n]$  löytyy aina vähintään yksi nollakohta. Algoritmiksi voidaan jännemenetelmä muotoilla seuraavasti.

ALGORITMI 16.3 (Jännemenetelmä).

- (1) Valitaan välin  $I$  päätepisteet  $a_0, b_0$  siten, että  $f(a_0)f(b_0) < 0$ .
- (2) Lasketaan palautuskaavalla  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_m}{f(x_n) - f(x_m)}$  seuraava nollakohdan likiratkaisu  $x_{n+1}$  väliltä  $[a_n, b_n]$ .
- (3) Jos arvot  $f(x_{n+1})$  ja  $f(x_n)$  ovat erimerkkiset eli  $f(x_n)f(x_m) < 0$ , tutkitaan seuraavaksi väliä  $[x_n, x_{n+1}]$ , muutoin väliä  $[x_{n+1}, x_m]$ .
- (4) Toistetaan, kunnes saavutetaan tavoiteltu likiratkaisun tarkkuus tai lopetetaan, kun riittävä määrä toistoja on suoritettu.



KUVA 16.1. Jännemenetelmän yleinen toimintaperiaate.

## 16.2. Sekanttia käyttävistä yhtälönratkaisumenetelmistä

Jotkin oppikirjat eivät esittele tai käsittele jänne- ja sekanttimenetelmää erillisinä, toisistaan poikkeavina menetelminä, tai toista menetelmistä ei mainita ollenkaan. Osassa numeerisen matematiikan kurssin lukion oppikirjoista yhtälönratkaisumenetelmiä käsitellään ylipäänsä aiheena vähemmän muuta numeerista matematiikkaa ja menetelmiä kurssisisällössä painottaen. Tällöin oppikirjoissa on yleensä käsitelty laajemmin numeerista derivointia, numeerista integrointia, poikkeamaa eli virhettä tai muita, yleensä lisämateriaalina olevia numeerista matematiikkaa lähellä olevia aiheita, kuten Taylorin polynomeja. Newtonin menetelmä oppikirjoissa poikkeuksetta käsitellään, onhan Newton-Raphsonin menetelmä erikseen opetussuunnitelmassa mainittu kurssin keskeisenä sisältönä.

Sekanttia käyttävien menetelmien nimeäminen poikkeaa toisistaan eri lähteiden ja oppimateriaalien välillä. Tässä opinnäytetyössä käytetään johdonmukaisesti nimityksiä sekantti- ja jännemenetelmä erillisistä, vaikkakin vahvasti sukua toisilleen olevista yhtälönratkaisumenetelmistä. Yhtäläisyyksistään huolimatta menetelmien välillä

on oleellisia eroja niin teknisellä kuin ajatuksellisella puolella. Näistä lähtökohta- ja etumerkkitarkasteluvaatimukseen liittyvistä eroista johtuen seuraa ero menetelmien suppenemisvarmuudessa. Käytännössä erot vaikuttavat myös suppenemisnopeuteen, kuten esimerkeistä 15.7 ja 16.3 voidaan huomata.

Selvyyden vuoksi *yleiseksi sekanttimenetelmäksi* tai pelkästään *sekanttimenetelmäksi* kutsutaan sitä sekanttisuoraa soveltavaa menetelmää, joka ei aseta vaatimuksia alkuarvauksien tai likiratkaisuiden funktion arvojen erimerkkisyyden suhteen. Sekanttimenetelmä käyttää aina kahta viimeisintä likiratkaisua  $\{x_n, x_{n-1}\}$  seuraavan likiratkaisun  $x_{n+1}$  laskemiseen.

*Jännemenetelmäksi* kutsutaan vastaavasti sitä sekantin likiratkaisupisteiden välistä osaa, jännettä soveltavaa menetelmää, joka oleellisesti vaatii likiratkaisuiden funktion arvojen olevan koko ajan erimerkkiset. Tällöin iteraation edetessä aina käsitellään  $n$ . kierroksen väliä  $I_n$ , jolla nollakohta  $\alpha$  varmasti Bolzanon lauseen perusteella sijaitsee. Jännemenetelmä siis suppenee varmasti. Yleisen sekanttimenetelmän suppenemisestä ei voida olla varmoja ja se saattaa myös hajaantua. Siten yleinen sekanttimenetelmä on selkeästi Newtonin menetelmän derivaataton, numeerinen versio. Jännemenetelmä on jo tätä hienostuneempi ja selkeästi oma metodinsa.

Jännemenetelmässäkin muodostetaan sekantti, mutta koska uusi likiarvo  $x_{n+1}$  on aina edeltävien likiarvojen  $\{x_m, x_n\}$  välissä, suoran sijaan riittää muodostaa likiratkaisupisteiden  $(x_n, f(x_n))$  ja  $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$  tai  $(x_m, f(x_m))$  ja  $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$  välille jänne. Jännemenetelmässä vanhoista likiarvoista  $x_m$  ja  $x_n$  valitaan se, joka on etumerkkiltään erimerkkinen kuin juuri laskettu uusi likiratkaisu  $x_{n+1}$ . Tämä eroaa merkittävästi yleisestä sekanttimenetelmästä, missä käytetään aina kahta viimeisintä likiratkaisua uuden likiratkaisun laskemiseksi eikä tehdä etumerkkitarkastelua.

### 16.3. Esimerkki neliöjuuren laskemisesta

Lasketaan tutulle neliöjuurelle  $\sqrt{25}$  likiarvo jännemenetelmällä. Tällöin etsitään nollakohtaa funktiolle  $f(x) = x^2 - 25$ , missä  $x > 0$ .

Alkuarvoikseen jännemenetelmä saa arvot  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 6$ . Nyt

$$\begin{aligned} f(1) &= -24 < 0 \\ f(6) &= 11 > 0 \end{aligned}$$

Täten alkuarvojen funktion arvot ovat eri etumerkisiä ja jännemenetelmän alkuehtojen erimerkkisyysvaatimus täyttyy. Lasketaan seuraava likiratkaisu  $x_2$  jännemenetelmän palautuskaavaa (16.1) käyttäen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 - f(x_0) \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} \\ &= 1 - (-24) \cdot \frac{1 - 6}{-24 - (11)} \\ &= \frac{31}{7} \approx 4,42857142857 \end{aligned}$$

Nyt

$$f(x_2) = f\left(\frac{31}{7}\right) = \left(\frac{31}{7}\right)^2 - 25 = -\frac{144}{7} \approx -5,3878 < 0,$$

joten korvataan  $x_0$  uudella likiarvolla  $x_2$ , koska molemmilla on negatiivinen etumerkki ja lasketaan seuraavaksi uusi likiratkaisu  $x_3$ .

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \\ &= \frac{31}{7} - \left(\left(\frac{31}{7}\right)^2 - 25\right) \cdot \frac{\frac{31}{7} - 6}{\left(\frac{31}{7}\right)^2 - 25 - (6^2 - 25)} \\ &= \frac{361}{73} \approx 4,94520547945 \end{aligned}$$

Nyt  $f(x_3) = -\frac{2904}{5329} \approx -0,5449 < 0$ , joten korvataan  $x_1$  uudella likiarvolla  $x_3$ , koska molemmilla on sama etumerkki.

Jatketaan samaan tapaan, jolloin saadaan taulukon 16.1 mukaiset likiarvot.

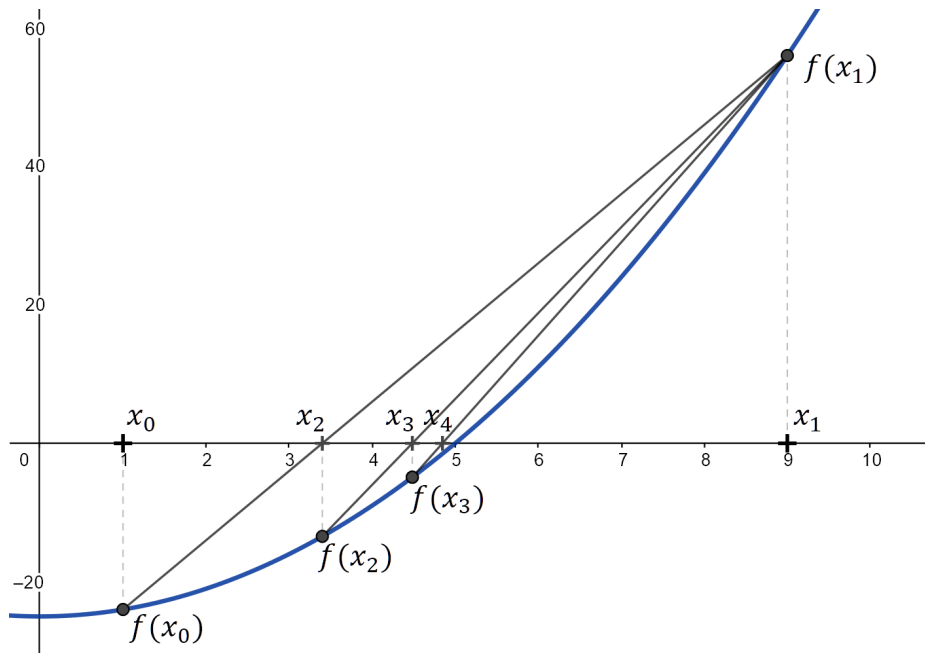
$n$	Alkupiste $a_n$	Loppupiste $b_n$	Uusi likiarvo $x_{n+1}$	$f(x_{n+1})$
0,1	1	6	4,42857142857	-5,38775510204
2	4,42857142857	6,0000	4,94520547945	-0,54494276600
3	4,94520547945	6,0000	4,99499374218	-0,05003751561
4	4,99499374218	6,0000	4,99954467843	-0,00455300839
5	4,99954467843	6,0000	4,99995860542	-0,00041394412
6	4,99995860542	6,0000	4,99999623684	-0,00003763157
7	4,99999623684	6,0000	4,99999965789	-0,00000342105
8	4,99999965789	6,0000	4,99999996890	-0,00000031100
9	4,99999996890	6,0000	4,99999999717	-0,00000002827
10	4,99999999717	6,0000	4,99999999974	-0,00000000257
11	4,99999999974	6,0000	4,99999999998	-0,00000000023

TAULUKKO 16.1. Jännemenetelmän likiratkaisut.

Esimerkissä käy niin, että loppupiste  $b_n$  pysyy samana millä tahansa rekursiokierroksella. Tämä on yleisesti tiedostettu ajoittain esiintyvä ongelma jännemenetelmällä, ja sitä varten on jännemenetelmän pohjalta kehitetty edelleen niin kutsuttu Illinoisin algoritmi. Tarkemmin tuosta sovellutuksesta, katso esimerkiksi [3].

Huomaa tässä jännemenetelmällä alkuarvoista  $x_0 = 1$  ja  $x_1 = 6$  antamien taulukon 16.1 likiratkaisujen ero verrattuna samoilla alkuarvoilla sekä samaa palautuskaavaa käyttävän sekanttimenetelmän tuottamaan taulukon 15.2 likiarvoihin. Samoilla alkuarvoilla ja palautuskaavalla saadaan eri arvoilla sekä eri nopeudella suppeneva likiratkaisujono. Nyt molemmat menetelmät suppenevat, mutta näin ei välttämättä aina käy sekanttimenetelmää käytettäessä. Myös puolitusmenetelmällä on samoista alkuarvoista lähtien ratkaistu neliöjuuren  $\sqrt{25}$  arvoa taulukossa 6.1.





KUVA 16.2. Jännemenetelmän toinen likiarvoista ”lukkiutuu” ja likiarvot lähenevät tosiratkaisua vain toispuoleisesti ratkaistaessa esimerkiksi kappaleen 16.3 funktiota alkuarvoilla  $x_0 = 0$  ja  $x_1 = 9$ .

#### 16.4. Suppeneminen

Siinä missä sekanttimenetelmä on inter- tai ekstrapolointia tapauksesta riippuen, on jännemenetelmä aina interpolointia välin  $I_n$  päätepisteiden sisäpuolella. Siten funktion  $f$  jatkuvuuden ja Bolzanon lauseen nojalla aina tiedetään, että ratkaisu  $\alpha$  sijaitsee aina välin  $I_n$  päätepisteiden välissä ja siten välin alku- ja loppupisteen välillä on – ainakin – yksi nollakohta. Siten jännemenetelmä aina varmasti suppenee.

Kuten yksinkertainen puolitusmenetelmä, myös jännemenetelmä on Bolzanon lauseen perusteella varma menetelmä. Algoritminsa perusteella jännemenetelmä säilyttää tilanteen, missä nollakohta sijaitsee tarkasteluvälin päätepisteiden  $x_n$  ja  $x_m$  välissä. Siten väli  $I_n$  kutistuu ja on sekä ylä- että alapuolelta rajattu. Näinpä jännemenetelmää voidaan pitää sisäkkäisten välien menetelmänä tai eräänlaisena kehittyneenä haarukointimenetelmänä.

#### 16.5. Suppenemisnopeus

Alkuehtojen täyttyessä jännemenetelmän suppenemisnopeus on sama kuin sekanttimenetelmän, siten menetelmän  $q$ -aste on

$$q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62$$

Kuten sekanttimenetelmällä suhteessa Newtonin menetelmään on useita käytännöllisiä hyötyjä, pätevät samat seikat myös jännemenetelmää tietoteknisesti soveltaessa,

mitä sekanttimenetelmän yhteydessä kappaleen 15.5 lopussa on pohdittu. Tarkemmin jännemenetelmän suppenemisestä ja suppenemisnopeuden päättelystä, katso esimerkiksi katso esimerkiksi [11, 2.3], [22, s. 290-292] tai [20, 2.6].

### 16.6. Jännemenetelmä painotettuna keskiarvona

Jännemenetelmän voi yleisen sekanttimenetelmän tapaan mieltää Newtonin menetelmän numeeriseksi versioksi. Samat edut, mitkä pätevät sekanttimenetelmän kanssa, pätevät myös jännemenetelmän suppenemiseen. Tämän lisäksi jännemenetelmä on vielä sekanttimenetelmän varmasti suppeneva versio.

Toisaalta siinä missä puolitusmenetelmä ottaa välin katkaisukohtaan aina puolivälittä, on jännemenetelmä yksinkertaista puolittamista hienostuneempi. Sekä puolitusettä jännemenetelmä huomioivat välin  $I_n$  päätepisteiden arvojen etumerkin, pitävät nollakohdan  $\alpha$  välin päätepisteiden välissä ja suppenevat alkuoletusten täytyessä varmasti. Tämän lisäksi jännemenetelmä huomioi välin  $I_n = [a_n, b_n]$  päätepisteiden suuruudet  $f(a_n)$  ja  $f(b_n)$ . Siten jännemenetelmä suuntaa uuden likiratkaisun  $x_{n+1}$  paikkaa tarkemmin funktion  $f$  ominaisuuksien mukaan kuin yksinkertaisesti toimiva puolituslasku. Tarkalleen jännemenetelmä painottaa uuden likiratkaisun  $x_{n+1}$  paikkaa tarkasteluvälin  $I_n$  päätepisteiden arvojen  $f(x_n)$  sekä  $f(x_m)$  suuruuksilla. Tutkitaan tätä intuitiivista ideaa hieman tarkemmin.

Kahden pisteen painotettu keskiarvo on

$$(16.2) \quad \frac{\mu_1 x_n + \mu_2 x_m}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \text{missä } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \mu_1 \neq \mu_2$$

Jännemenetelmän palautuskaavasta (16.1) voidaan johtaa

$$\begin{aligned} x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_m}{f(x_n) - f(x_m)} &= \frac{x_n f(x_n) - x_n f(x_m) - f(x_n) x_n + f(x_n) x_m}{f(x_n) - f(x_m)} \\ &= \frac{-f(x_m) x_n + f(x_n) x_m}{-f(x_m) + f(x_n)} \end{aligned}$$

Nyt valitaan, että

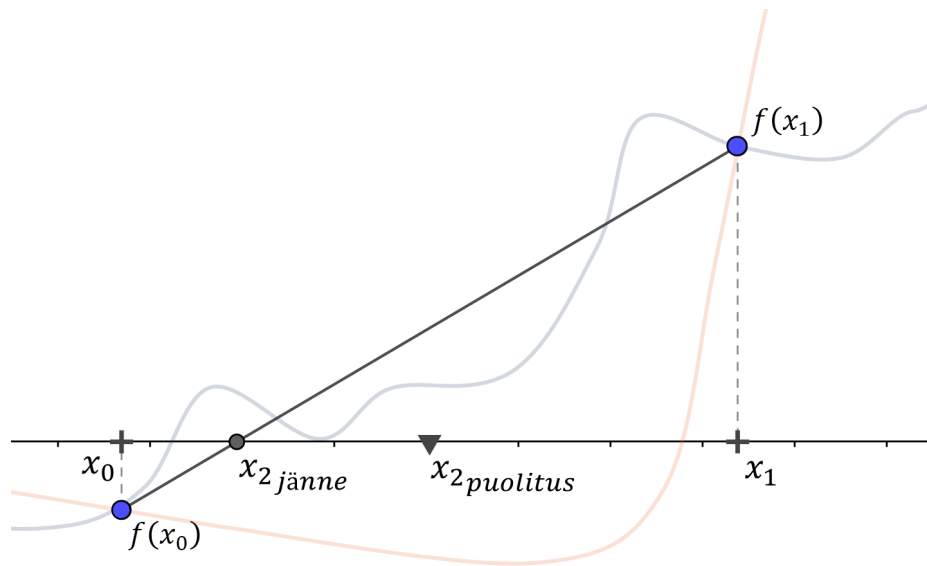
$$\mu_1 = -f(x_m) \quad \text{ja} \quad \mu_2 = f(x_n)$$

Tällöin saadaan kaava

$$\frac{\mu_1 x_n + \mu_2 x_m}{\mu_1 + \mu_2}$$

Siten painotetun keskiarvon kaavaan (16.2) saatiin määritettyä sopivat painokertoimet  $\mu_1$  ja  $\mu_2$ . Täten osoittautuu, että idealtaan jännemenetelmässä on kyse painotetusta keskiarvosta.

**HUOMAUTUS 16.4.** Puolitusmenetelmässä painokertoimet  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Koska painokertoimet ovat vakioita, eivät ne suuntaa keskiarvoa ollenkaan, vaan uusi likiarvo otetaan aina välin keskipisteestä.



KUVA 16.3. Jänne- ja puolitusmenetelmän seuraavan likiarvon  $x_2$  paikat. Taustan kahdella käyrällä on kuvattu kaksi mahdollista funktion kulkua välillä  $[x_0, x_1]$ , sillä funktion tarkkaa kulkua ei tunneta.

### 16.7. Esimerkki

Ratkaistaan Newtonin menetelmän yhteydessä olleen esimerkin 11.8 jatkuvan funktion  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x}{e^x}$  nollakohta jännemenetelmällä. Ongelman fysikaalista mallia tarkemmin tutkittaessa tehtävänantaja huomaa, että tarkasteluvälin ylärajaa voidaan supistaa hieman. Näin ollen tiedetään, että ratkaisu sijaitsee välillä  $I' = [0,2; 3,6]$ .

Lisäksi

$$\begin{aligned} f(0,2) &= -0,1899\dots < 0 \\ f(3,6) &= 0,8223\dots > 0 \end{aligned}$$

Siten  $x_0 = 0,2$  sekä  $x_1 = 3,6$  sopivat jännemenetelmän alkuarvoiksi, sillä tällöin  $f(x_0)f(x_1) < 0$ . Siten väliltä  $I'$  löytyy vähintään yksi nollakohta.

Lasketaan seuraava likiratkaisu  $x_2$  jännemenetelmän palautuskaavaa (16.1) käyttäen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 - f(x_0) \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} \\ &= x_0 - f(0,2) \frac{0,2 - 3,6}{f(0,2) - f(3,6)} \\ &\approx 0,83798023856278 \end{aligned}$$

Nyt

$$f(x_2) = f(0,83798023856278) \approx -0,41171219525104 < 0,$$

joten korvataan  $x_0$  uudella likiarvolla  $x_2$ , koska molemmilla on negatiivinen etumerkki. Lasketaan seuraavaksi uusi likiratkaisu  $x_3$ .

$$x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \\ \approx 1,75946642915804$$

Nyt

$$f(x_3) \approx 0,10184132960747 > 0,$$

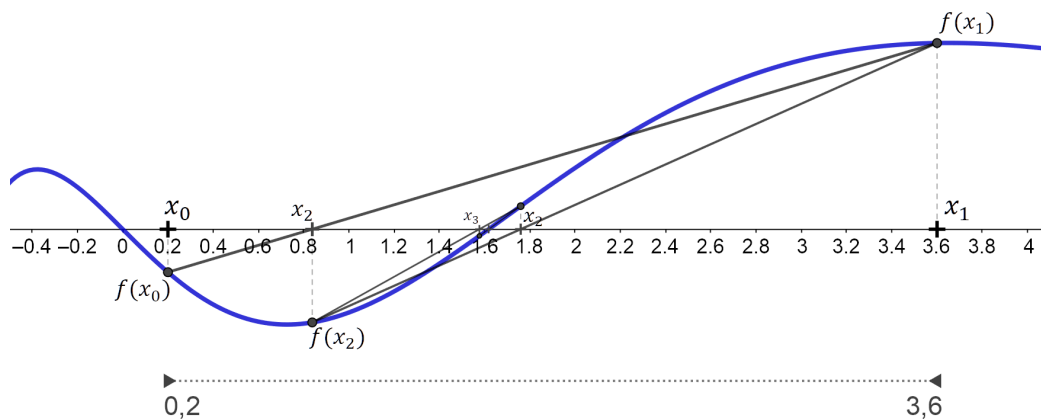
joten korvataan  $x_1$  uudella likiarvolla  $x_3$ , koska molemmilla on sama positiivinen etumerkki. Lasketaan seuraavaksi uusi likiratkaisu  $x_4$ .

$$x_4 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)} \\ \approx 1,57672914020457$$

Näin voidaan jatkaa, jolloin saadaan taulukon 16.2 mukaiset likiarvot.

$n$	Alkupiste $a_n$	Loppupiste $b_n$	Uusi likiarvo $x_{n+1}$	$f(x_{n+1})$
0,1	0,2	3,6	0,83798023856278	-0,41171219525104
2	0,83798023856278	3,6	1,75946642915804	0,10184132960747
3	0,83798023856278	1,75946642915804	1,57672914020457	-0,02953799541295
4	1,57672914020457	1,75946642915804	1,61781393952169	-0,00015786396902
5	1,61781393952169	1,75946642915804	1,61803317482593	-0,00000058391983
6	1,61803317482593	1,75946642915804	1,61803398574629	-0,00000000215482
7	1,61803398574629	1,75946642915804	1,61803398873881	-0,00000000000795
8	1,61803398873881	1,75946642915804	1,61803398874985	-0,00000000000003
9	1,61803398874985	1,75946642915804	1,61803398874989	0,0000000000...

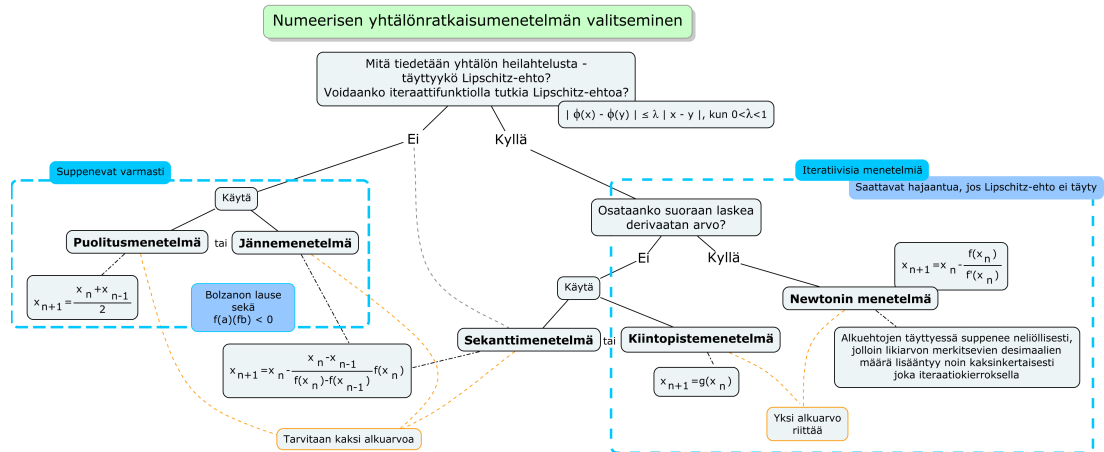
TAULUKKO 16.2. Jännemenetelmän sangen nopeasti suppenevat likiratkaisut.



KUVA 16.4. Jännemenetelmän suppeneminen kohti nollakohtaa.

## LIITE A

### Yhtälönratkaisumenetelmien vertailua



Hieman yleistäen – ja jopa leikkimielisesti – opinnäytetyössä käsitellyt yhtälönratkaisumenetelmät voitaisiin kiteyttää esimerkiksi tähän tapaan:

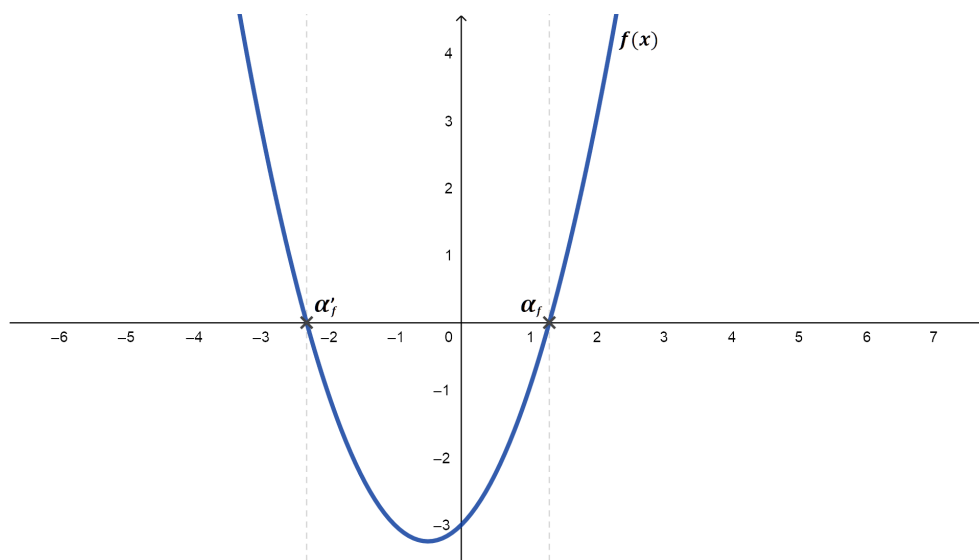
- Newtonin menetelmä – hetkellinen muutos
- Sekanttimenetelmä – keskimääräinen muutos (inter- tai ekstrapoloiden)
- Jännemenetelmä – keskimääräinen muutos (interpoloiden)
- Whittakerin menetelmä – arvattu muutos(nopeus)
- Puolitusmenetelmä – etumerkin muutos



## LIITE B

### Havainnollistavia kuvia

Aiemmin esimerkissä 7.10 käsiteltiin funktion  $f(x) = x^2 + x - 3$  iteraatioita. Piirretään tuossa yhteydessä käsitellyistä iteraattifunktioista muutama kuva.

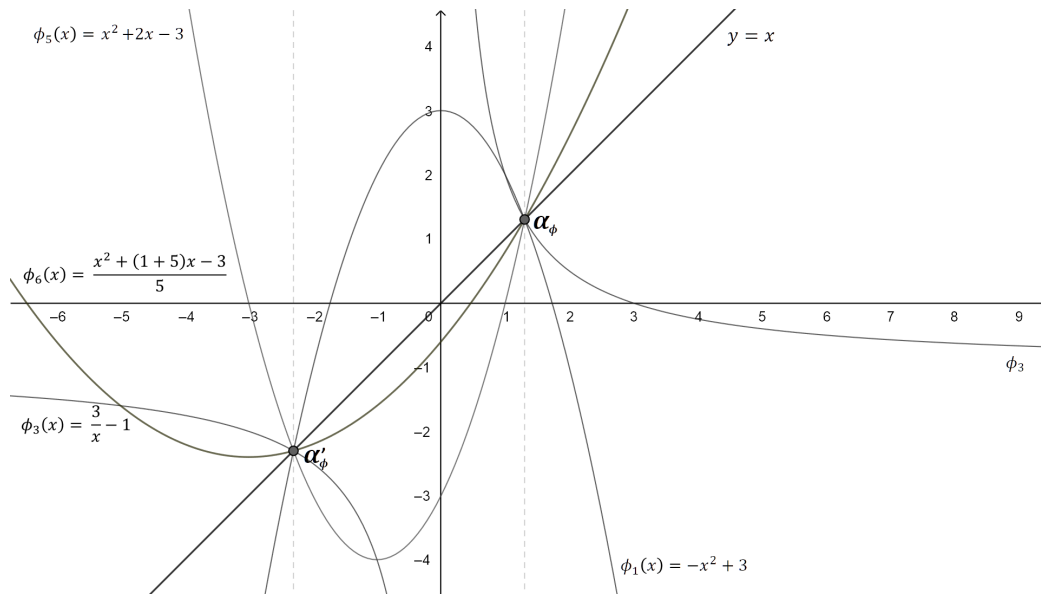


KUVA B.1. Funktio  $f$  sekä nollakohdat  $\alpha_f$  ja  $\alpha'_f$ .

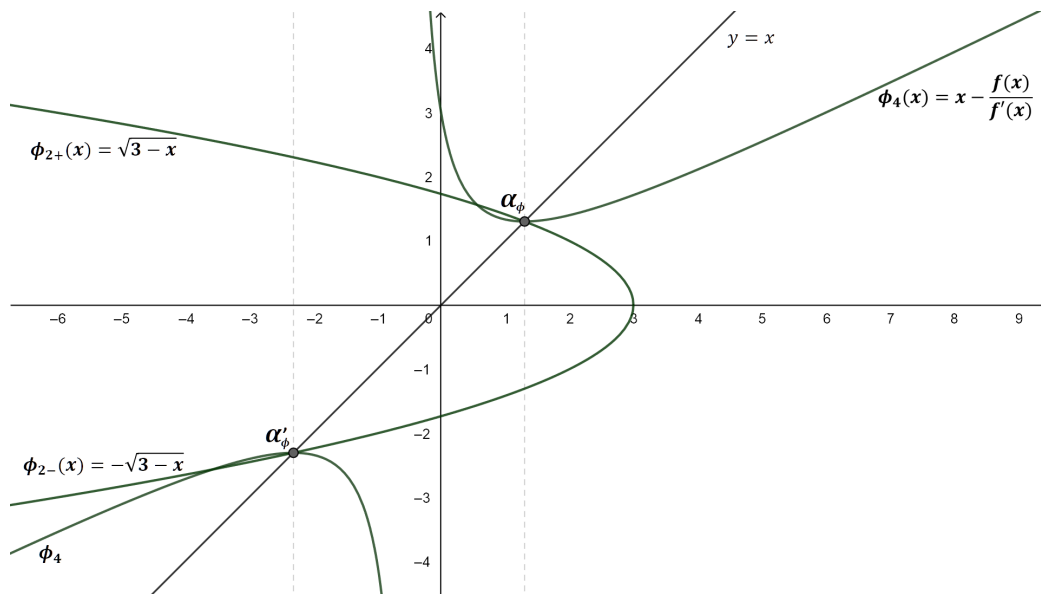
ESIMERKKI B.1. Iteraation yhteydessä esimerkissä 7.10 funktiolle  $f(x) = x^2 + x - 3$  etsittiin nollakohtia erilailla johdettuja funktioita iteroimalla. Iteraattifunktioksi voidaan myös ottaa kiintopistemenetelmän tai loivennetun kiintopistemenetelmän funktion  $\tilde{f}$  eli Whittakerin menetelmän tuottamat iteraattifunktiot. Tällöin funktiolle  $f$  saadaan seuraavat iteraattifunktiot.

$$\begin{aligned} \phi_5(x) &= x^2 + 2x - 3 && \text{(Kiintopistemenetelmä)} \\ \phi_6(x) &= \frac{x^2 + (1+m)x - 3}{m}, && \text{sopivalla } m \in \mathbb{R}_+ \text{ (Whittakerin menetelmä)} \end{aligned}$$

Näistä  $\phi_5$  hajaantuu ja iteraattifunktion  $\phi_6$  iteraatille käy samoin kuin esimerkin 7.10 iteraattifunktiolle 3: iteraatio suppenee vain toiseen juureen, joten iterointi ei löydä kaikkia funktion juuria, jolloin tämäkin iteraatio hajaantuu.

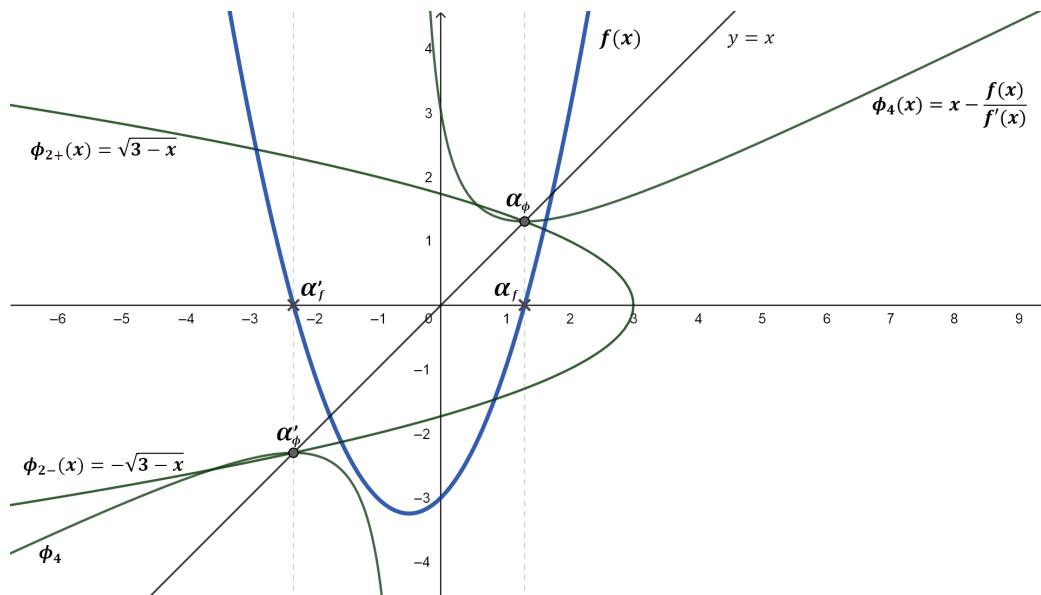


KUVA B.2. Neljä iteraattifunktiota, jotka eivät suppene. Huomaa, että myös nämä suppenemattomat iteraattifunktiot silti leikkaavat kiintopisteet  $y = x = \alpha_\phi$  sekä  $y = x = \alpha'_\phi$ .



KUVA B.3. Iteraattifunktiot, jotka suppenevat kiintopisteisiin  $\alpha_\phi$  ja  $\alpha'_\phi$  sopivilla alkuarvoilla.



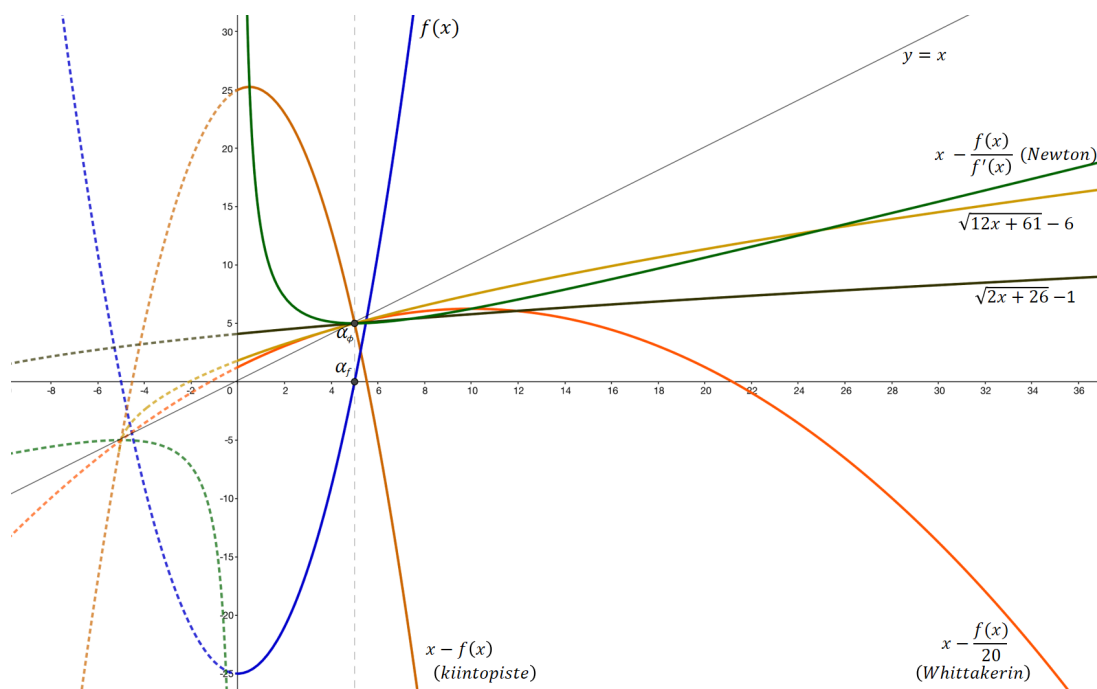


KUVA B.4. Suppenevat iteraattifunktiot  $\phi_2$  ja  $\phi_4$ , alkuperäinen funktio  $f$  sekä identiteettisuora  $y = x$ . Huomaa iteraattifunktioiden kiintopisteet  $\{\alpha_\phi, \alpha'_\phi\}$  sekä funktion  $f$  nollakohdat  $\{\alpha_f, \alpha'_f\}$ .



## LIITE C

### Yleisesimerkin iteraattifunktioiden kuvaajien vertailua



KUVA C.1. Kaikki käsitellyt neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiarvon määrittämiseen liittyvät funktiot ja iteraattifunktiot samassa kuvassa.

Kuvasta voidaan huomata, että alkuperäisen funktion  $f(x) = x^2 - 25$  kuvaaja leikkaa x-akselin pisteessä  $\alpha_f = 5$ . Sen sijaan mikään muu funktio ei leikkaa x-akselia tuossa pistettä. Sen sijaan kaikki muut funktiot näyttävät leikkavaan identiteettisuoran  $y = x$  vain ja ainoastaan pisteessä  $x = 5$ . Tällöin tietysti myös  $y = 5$ . Tuo piste  $\alpha_\phi = \sqrt{25} = 5$  onkin iteraattifunktioiden kiintopiste. Siten kiintopisteessä kiintopisteyhtälön (7.3) mukaisesti kaikilla iteraattifunktioilla pätee  $\phi(5) = 5$ .

Kuvaajien avulla tulkintaa voidaan viedä hieman alkuperäistä tarkastelua pidemmälle. Huomionarvoista kuvassa on, että vaikka alkuperäisessä neliöjuuren  $\sqrt{25}$  likiarvon laskentaongelmassa määriteltiin, että  $x > 0$ , voidaan kuvaajien piirtämistä jatkaa, kun  $x \leq 0$ . Näin on kuvassa katkoviivoin kuvaajia merkiten tehty. Tämä antaa mielenkiintoisen lisänäkökulman. Mitä tapahtuu negatiivisten lukujen puolella, kun  $x < 0$ ? Minkä pisteen kaikki paitsi yksi kuvaajista näyttää leikkaavan ja miksi? Entä mistä syystä yksi kuvaajista, sinisellä merkattu funktio  $f$  ei leikkaa tätä pistettä?



## Kirjallisuutta

- [1] CARL BOYER: *Tieteiden kuningatar – Matematiikan historia osa I ja II*. Suomentanut Kimmo Pietiläinen. Art House Oy, 2000.
- [2] RICHARD COURANT, FRITZ JOHN: *Introduction to Calculus and Analysis Volume I*. Springer, 1989.
- [3] M. DOWELL, D. JARRATT: *A modified regula falsi method for computing the root of an equation*. BIT Numerical Mathematics, 1971, osa 11, numero 2, sivut 168–174.
- [4] XAVIER GOURDON, PASCAL SEBAH: *Newton’s method and high order iterations*. Numbers, constants and computation. <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/newton.html>, viitattu 15.8.2017.
- [5] JUHA HAATAJA, JUSSI HEIKONEN, YRJÖ LEINO, JUSSI RAHOLA, JUHA RUOKOLAINEN, VILLE SAVOLAINEN: *Numeeriset menetelmät käytännössä*. Tieteen tietotekniikan keskus CSC, 2002.
- [6] MARKKU HALMETOJA, KAIJA HÄKKINEN, JORMA MERIKOSKI, LAURI PIPPOLA, HARRY SILFVERBERG, TIMO TOSSAVAINEN: *Matematiikan taito 12: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä*. WSOY, 2007.
- [7] TARMO HAUTAJÄRVI, JUKKA OTTELIN, LEENA WALLIN-JAAKKOLA: *Laudatur 12: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä*. Kustannusosakeyhtiö Otava, 2007.
- [8] TARMO HAUTAJÄRVI, JUKKA OTTELIN, LEENA WALLIN-JAAKKOLA: *Laudatur 12: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä - Opettajan aineisto*. Kustannusosakeyhtiö Otava, 2008.
- [9] KATARIINA HEMMO-ILVONEN, ESA LAPPI, CLAS SALONEN: *Pyramidi 12: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä*. Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2011.
- [10] PETER HENRICI: *Elements of numerical analysis*. John Wiley & Sons, 1964.
- [11] EUGENE ISAACSON, HERBERT BISHOP KELLER: *Analysis of numerical methods*. John Wiley & Sons, 1966.
- [12] PAAVO JÄPPINEN, ALPO KUPIAINEN, MATTI RÄSÄNEN: *Lukion Calculus 7*. Otava, 2010.
- [13] JUKKA KANGASAHO, JUKKA MÄKINEN, JUHA OIKKONEN, JOHANNES PAASONEN, MAIJA SALMELA, JORMA TAHVANAINEN: *Pitkä matematiikka 12: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä*. WSOY, 2011.
- [14] JUKKA KANGASAHO, JUKKA MÄKINEN, JUHA OIKKONEN, JOHANNES PAASONEN, MAIJA SALMELA: *Numeerinen matematiikka*. WSOY, 1996.
- [15] TERO KILPELÄINEN: *Analyysi 1*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2014. <http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA111.pdf>, viitattu 10.10.2017.
- [16] TERO KILPELÄINEN: *Analyysi 2*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2003. <http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA112.pdf>, viitattu 10.10.2017.
- [17] MATTI LEHTINEN: *Matematiikan historia*. Verkkolehti, Matematiikkalehti Solmu, 2000. <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist>, viitattu 15.8.2017
- [18] ARI LEHTONEN: *Matematiikan laskennallisia menetelmiä: Yhtälöiden ratkaisemisesta*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2011. <http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/kl2012/MLM.html>, viitattu 15.8.2017.
- [19] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Opetushallitus, 2015. Viitattu 16.12.2017, [http://www.oph.fi/download/172124\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2015.pdf](http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf),
- [20] RAINO MÄKINEN: *Numeeriset menetelmät*. Jyväskylän yliopisto, 1998.
- [21] RAINO MÄKINEN: *Numeeriset menetelmät*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2017. <http://users.jyu.fi/~rainom/numen17/moniste.pdf>, viitattu 6.12.2017.
- [22] JOSEF STOER, ROLAND BULIRSCH: *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, 1980.