

K-kertaisesti kiellettyjen uniikkien β -siirtymien faasiavaruusintegraalit

Pro gradu-tutkielma, 9.1.2018

Tekijä:

ANTTI KASSLIN

Ohjaaja:

JOUNI SUHONEN



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

Tiivistelmä

Kasslin, Antti

K-kertaisesti kiellettyjen uniikkien β -siirtymien faasiavaruusintegraalit

Pro Gradu-tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2017, 53 sivua

Tässä tutkimuksessa perehdytään K-kertaisesti kiellettyjen uniikkien β -siirtymien faasiavaruusintegraaleihin. K-kertaisesti kielletyt uniikit β -siirtymät ovat β -hajoamisen alaryhmä, ja faasiavaruusintegraalit kuvaavat hajoamisreaktion jälkeisiä lopputiloja ja antavat muun muassa tärkeää tietoa siirtymän hajoamisvakiosta. Tutkimuksessa laskettiin numeerisesti faasiavaruusintegraalit useille tunnetuille β -siirtymille, jotka voivat olla kaksi- tai useampikertaisesti kiellettyjä. Saatua laskentadataa analysoitiin eri näkökulmista. Tärkein näkökulma on kielletyn uniikin β -siirtymän ja samaa β -hajoamista kuvaavan perus- eli sallitun siirtymän välinen suhde, koska tämä näkökulma antaa parhaiten tietoa K :n vaikutuksesta faasiavaruusintegraaliin. Tulokset viittaavat siihen, että siirtymillä, joiden hajoamisenergia on pieni, sallitut ovat dominoivia. Mutta hajoamisenergiaa kasvatettaessa kiellettyjen siirtymien faasiavaruusintegraalit kasvavat suuremmiksi, ja sitä voimakkaammin, mitä suurempi K on. Seuraavaksi tarkasteltiin kielletyn siirtymän faasiavaruusintegraalin suhdetta siirtymän hajoamisenergiaan, mikä antaa tietoa lopputilojen keskimääräisestä lukumäärästä. Nämä tulokset olivat hyvin samankaltaisia kuin edellisessä näkökulmassa. Hajoamisenergian kasvaessa suhdelukukin kasvaa, ja kasvu on sitä nopeampaa, mitä suurempi K on. Kolmas näkökulma oli vertailla β^+ -siirtymien ja elektronisieppausten faasiavaruusintegraalien välisiä suhteita. Koska nämä kaksi β -siirtymän lajia voivat tapahtua yhtäaikaan, niiden faasiavaruusintegraalit lasketaan aina yhteen. Aikaisemmin on tiedetty, että hajoamisenergia ja atomin järjestysluku vaikuttavat näiden kahden lajin väliseen suhteeseen. Tämän tutkimuksen perusteella kuitenkin myös kiellettyyden asteella näyttäisi olevan vaikutusta. Korkeampi K vaikuttaisi suosivan elektronisieppauksia. Lopuksi vertailtiin faasiavaruusintegraaleja, joissa on otettu huomioon ytimen elektronipilven aiheuttama varjostus niihin faasiavaruusintegraaleihin, joissa sitä ei ole huomioitu. Tulokset eivät eronneet toisistaan merkittävästi, eikä kiellettyyden aste näyttäisi vaikuttavan niihin mitenkään.

Avainsanat: β -hajoaminen, siirtymä, kiellettyys, uniikki, tilatiheys

Abstract

Kasslin, Antti

Phase space integrals of the K^{th} forbidden unique β -transitions

Pro Gradu thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2017, 53 pages.

A topic of this thesis was phase space integrals of K^{th} forbidden unique β -transitions. K^{th} forbidden unique β -transitions are a subgroup of the β -decays and phase space integrals depict the final states after a decay and for example give important knowledge about a decay constant of a transition. The phase space integrals for many known β -decays having a two or more times forbidden unique transition was calculated numerically in this thesis. The calculation data was then analyzed through various ways. The most important point of view is a ratio of the phase space integrals between a forbidden transition and an allowed transition of the same decay. That ratio gives most information about how the degree of K affects the phase space integral. According to the results in the transitions with small decay energy the allowed ones were dominating. But when the energy grows the phase space integrals of the forbidden transitions become larger and the increase is the faster the bigger the K is. The next point of view is the ratio between the phase space integral of the forbidden β -decay and the decay energy which gives information about the average number of the final states in transition. These results were similar to the previous point of view. When the decay energy increases the ratio increases too and the bigger is K the faster is the increasing. The third point of view was to compare the ratio between the phase space integrals of β^+ -decays and electron captures. Because these two types of β -decays can occur simultaneously their phase space integrals always sum up. It's already known that decay energy and the atomic number of the nuclear influence the ratio between these two types. According to this thesis, however, also the degree of the forbiddenness seems to have an influence. Higher degree of K seems to prefer electron captures. Finally phase space integrals without taking into account the screening effect of the electron cloud was compared to those with taking into account. The results didn't have a significant difference nor the degree of K would seem to have any influence to that.

Keywords: β -decay, transition, forbiddenness, unique, state density

Sisältö

Tiivistelmä	3
Abstract	5
1 Johdanto	9
2 Teoreettinen tausta	11
2.1 β -siirtymät	11
2.1.1 β -hajoaminen	11
2.1.2 Sallitut ja kielletyt siirtymät	12
2.1.3 Uniikit siirtymät	13
2.2 Faasiavaruusintegraalit	14
2.2.1 Fermin kultainen sääntö	14
2.2.2 Liikemääräavaruus	14
2.2.3 Muotofunktiot	16
2.3 Thomas-Fermi-varjostus	18
3 Menetelmät ja aineisto	21
3.1 Numeerinen laskenta	21
3.2 Analysoitavat siirtymät	21
4 Tulokset	23
4.1 Kiellettyjen ja sallittujen siirtymien väliset suhteet	23
4.2 Tilatiheyksien keskiarvo	26
4.3 β^+ :n ja EC:n väliset osuudet	31
4.4 Varjostus-efekti	32
5 Päätäntö	35
Lähteet	37
A K-kertaisesti kiellettyjen uniikkien β-siirtymien faasiavaruusintegraalit	39
B Sallittujen β-siirtymien faasiavaruusintegraalit	45
C Korjauskertoimet varjostus-arvoille	51

1 Johdanto

Kun atomin ytimessä tapahtuu nukleonin vaihdoksia, eli protoni muuttuu neutroniksi tai toisinpäin, ja ytimen massaluku ei muutu, ydin käy läpi β -siirtymän. Samalla ytimeistä vapautuu leptoneja. Vapautuvien leptonien liikemäärällä voi olla lukemattomia eri vaihtoehtoja, eli tiloja faasiavaruudessa. Näiden tilojen yhteinen summa antaa ominaisuuden, jota kutsutaan faasiavaruusintegraaliksi. Yhdessä siirtymän todennäköisyyden kanssa se on määräävä tekijä siirtymän hajoamisvakiossa.

Kun leptonit vievät ratapyörimismäärää mukanaan ytimeistä, puhutaan kielletystä β -siirtymästä, joka ei sananmukaisesti tarkoita että siirtymä olisi kielletty, vaan epätodennäköisempi kuin vastaava siirtymä, jossa ratapyörimismäärää ei siirry leptoneille eli sallittu siirtymä. Ytimen pyörimismäärän muutos on kvantittunut suure. Toisin sanoen se voi tapahtua vain asteittain, jolloin asteluku $K = 1, 2, 3, \dots$ kertoo, kuinka monesti kielletty β -siirtymä on. Mitä suurempi K on, sitä vähemmän todennäköinen siirtymä on. Faasiavaruusintegraalien laskeminen on monimutkaisempaa kielletyille siirtymille. Yksinkertaisuuden vuoksi tässä tutkielmassa keskitytään kiellettyjen β -siirtymien alaryhmään, uniikkeihin β -siirtymiin, joilla pyörimismäärän muutos on K :sta riippuen suurin mahdollinen ja myös helpoimmin määritettävä.

Uniikkien β -siirtymien faasiavaruusintegraaleja ei ole ennen tutkittu systemaattisesti siirtymillä, joiden kiellettyyden aste on suurempi kuin 1. Tutkielmassa keskitytäänkin eritoten siihen, kuinka kiellettyyden aste vaikuttaa faasiavaruusintegraaleihin. Tutkimusmateriaalia varten faasiavaruusintegraalit on laskettu numeerisesti. Tutkielmassa syvennytään muun muassa siihen, miten uniikin kielletyn β -siirtymän faasiavaruusintegraali käyttäytyy suhteessa vastaavaan sallitun siirtymän faasiavaruusintegraaliin ja hajoamisenergiaan.

2 Teoreettinen tausta

2.1 β -siirtymät

2.1.1 β -hajoaminen

Puhuttaessa β -hajoamisista tarkoitetaan kaikkia ydinreaktioita, joihin liittyy heikko vuorovaikutus. Kyseinen vuorovaikutus mahdollistaa alkeishiukkasen muuttumisen toiseksi. β -hajoamisten tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että heikon vuorovaikutuksen takia ylös-kvarkki muuttuu alas-kvarkiksi poistaen W^+ -mittabosonin, joka heti hajoaa leptoniluvun säilyttäen positroniksi ja elektronin neutriinoksi tai päinvastoin, eli alas-kvarkki muuttuu ylös-kvarkiksi, jolloin vapautuva W^- -mittabosoni hajoaa elektroniksi ja elektronin antineutriinoksi. On myös mahdollista, että ylös-kvarkin ja elektronin vaihtaessa keskenään mittabosonin, reaktiotuotteena syntyy alas-kvarkki ja neutriino. Kvarkit ovat aina sidottuja nukleoneihin, joten protoniin sidotun alas-kvarkin muuttuminen ylös-kvarkiksi muuttaa neutronin protoniksi ja alas-kvarkin muuttuessa ylös-kvarkiksi taas päinvastoin.

β -hajoamisia kirjoitettaessa jätetään usein pois välivaihe, joka sisältää mittabosonin. Näin ollen kaikki mahdolliset β -hajoamiset voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu \quad (1)$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (2)$$

$$p + e^- \rightarrow n + \nu. \quad (3)$$

Reaktioita 1 ja 2 kutsutaan lopputilan leptonin sähkövarauksen mukaan β^+ - ja β^- -hajoamisiksi. Reaktiossa 3 atomin ytimeen sidottu protoni nappaa elektronin atomin elektronipilvestä, mistä syystä tätä reaktiota kutsutaan elektronisieppaukseksi (engl. electron capture, EC).

β -hajoamisten hajoamisenergiat, Q , lasketaan samalla tavalla, kuin muissakin ydinreaktioissa: alku- ja lopputilojen hiukkasten välinen massaero kerrottuna valonnopeuden neliöllä [1], eli

$$Q = (m_i - m_f)c^2. \quad (4)$$

Näitä massaeroja ei kuitenkaan yleensä lasketa reaktioista 1, 2 ja 3, sillä ne kuvaavat vapaita hiukkasia. Nukleonit ovat lähes aina sidottuja atomeihin, ja siksi

β -hajoamisia kuvataankin yleensä seuraavasti:

$$X(Z, N) \rightarrow X(Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu \quad (5)$$

$$X(Z, N) \rightarrow X(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu} \quad (6)$$

$$X(Z, N) + e^- \rightarrow X(Z - 1, N + 1) + \nu, \quad (7)$$

missä X kuvaa atomien ydintä sekä Z ja N järjestys- että neutronilukuja. Sidonnaisuus ytimiin mahdollistaa myös β^+ - ja EC-hajoamiset, koska vapaiden hiukkasten tapauksissa Q olisi tällöin negatiivinen, eivätkä reaktiot olisi näin ollen spontaaneja [1].

Jos siis lasketaan hajoamisenergiat reaktioista 5 ja 7 siten, että m_X on emoytimen ja $m_{X'}$ on tytärtymen massa sekä $E_0 = (m_X - m_{X'})c^2$ niin yhtälön 4 mukaan

$$Q_{\beta^+} = (m_X - (m_{X'} + m_e + \underbrace{m_\nu}_{\nu \rightarrow 0}))c^2 = E_0 - m_e c^2,$$

$$Q_{\beta^-} = (m_X - (m_{X'} + m_e + \underbrace{m_\nu}_{\nu \rightarrow 0}))c^2 = E_0 - m_e c^2 \quad \text{ja}$$

$$Q_{EC} = ((m_X + m_e) - (m_{X'} + \underbrace{m_\nu}_{\nu \rightarrow 0}))c^2 = E_0 + m_e c^2.$$

β^+ -hajoamisessa ja elektronisieppauksessa ytimen alku- ja lopputilat ovat identtiset. Näin ollen E_0 on sama molemmissa reaktioissa. Tällöin

$$Q_{EC} - Q_{\beta^+} = (E_0 + m_e c^2) - (E_0 - m_e c^2) = 2m_e c^2 \iff Q_{EC} = Q_{\beta^+} + 2m_e c^2,$$

joten identtisille ytimille elektronisieppauksen Q on aina 2 elektronin lepoenergiaa eli 1022 kiloelektronivoltia suurempi kuin vastaavalla β^+ -siirtymällä.

2.1.2 Sallitut ja kielletyt siirtymät

Kulmaliikemäärä, J , on säilyvä ominaisuus hiukkasilla [2]. Sitä ei voi hävitä tai ilmestyä tyhjästä. Näin ollen reaktioon osallistuvien hiukkasten yhteinen kulmaliikemäärä on oltava yhtä suuri, kuin reaktiotuotteiden yhteinen kulmaliikemäärä. $\beta^{(+/ -)}$ -hajoamisten tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että emoytimen kokonaiskulmaliikemäärän on oltava yhtä suuri kuin tytärtymen ja kahden leptonin yhteinen kulmaliikemäärä. Elektronisieppauksessa vastaavasti elektronin ja emoytimen kulmaliikemäärän summan on oltava samansuuruinen tytärtymen ja neutriinin vastaavien kanssa.

Kvanttimekaniikassa kulmaliikemäärä käsittää sekä orbitaalisen, L , että spinkulmaliikemäärän, S [1], eli

$$J = L + S. \quad (8)$$

Leptoneiden spinillä on aina kaksi tilaa: $-1/2$ tai $1/2$ [3]. Täten kahden leptonin kytketty tila on joko $-1/2 + (-1/2) = -1$, $-1/2 + 1/2 = 0$ tai $1/2 + 1/2 = 1$. β -hajoamisissa spinin muutos on siis aina 0 tai 1. Jos $\Delta S = 0$, eli β -hajoamiseen osallistuvien elektronin (tai positronin) ja antineutriinon (tai neutriinon) spinit ovat vastakkaiset, kyseessä on Fermi-siirtymä. Jos taas $\Delta S = 1$, eli kyseisten leptonien spinit ovat samansuuntaiset, puhutaan Gamow-Teller-siirtymästä [1].

Ratakulmaliikemäärän muutos taas voi olla mikä tahansa kokonaisluku nolasta ylöspäin. Todennäköisin siirtymä on sellainen, jossa orbitaalinen kulmaliikemäärä ei muutu, eli $\Delta L = 0$. Tällaista siirtymää nimitetään *sallituksi* β -siirtymäksi. β -siirtymiä, joissa $\Delta = 1, 2, 3, \dots$ kutsutaan vastaavasti *kielletyiksi* siirtymiksi. Nimitys on harhaanjohtava, sillä kielletyt β -siirtymät ovat mahdollisia, joskin huomattavasti epätodennäköisempiä [4].

Kielletyt siirtymät on lajiteltu ΔL :n mukaan. Jos β -hajoamiseen osallistuvien leptonien $L_{tot} = 1$, kyseessä on 1. kielletty siirtymä. Jos taas $L_{tot} = 2$, kyseessä on 2. kielletty siirtymä. Orbitaalisen kulmaliikemäärän muutos siis kertoo, montako kertaa kielletty β -siirtymä on kyseessä. k -kertaisesti kielletty siirtymä on yleensä sitä epätodennäköisempi, mitä suurempi k :n arvo on.

2.1.3 Uniikit siirtymät

k :n aste ei suoraan kerro, mikä β -hajoavan ytimen ΔJ on. Kuten edellä mainittiin, k merkitsee *orbitaalisen* kulmaliikemäärän muutosta. Mutta kuten aiemmin tuli ilmi, myös spinin muutos vaikuttaa ΔJ :hin (yhtälö (8)). Tällöin leptonien kytkennän huomioonottaen

$$\Delta J(X \rightarrow X') = \begin{cases} k - 1 \\ k \\ k + 1 \end{cases} .$$

Kaikilla k -kertaisesti kielletyillä β -siirtymillä on tärkeä aliryhmä. Siinä ryhmässä tietyllä k :n arvolla hajoavan ytimen kulmaliikemäärän muutos on suurin mahdollinen. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\Delta J(X \rightarrow X') = k + 1.$$

Tämän aliryhmän siirtymiä kutsutaan *uniikkeiksi* siirtymiksi [4].

Kiellettyjen siirtymien rajaaminen uniikkeihin siirtymiin on usein perusteltua. Se helpottaa näiden siirtymien useiden ominaisuuksien tarkastelua, sillä kun β -siirtymät yleensä ovat sekoitus Fermi- ja Gamow-Teller-siirtymiä, uniikit siirtymät ovat aina puhtaasti Gamow-Teller-siirtymiä [5]. Tästä syystä uniikkien siirtymien elektronispektri voidaan määrittää tarkasti. Tähän palataan tarkemmin luvussa 2.2.3.

2.2 Faasiavaruusintegraalit

β -siirtymän luonteeseen vaikuttaa siihen osallistuvien leptonien kinematiikka. β^- -siirtymän e^- ja $\bar{\nu}$, β^+ -siirtymän e^+ ja ν sekä elektronisieppauksen neutriino eivät ole ytimeen sidottuja hiukkasia, vaan niillä on reaktion jälkeen tietty liikemäärä ja -energia. β -hajoavan ytimen massa on suuri vapautuviin leptoneihin verrattuna, joten sen voidaan olettaa pysyvän liikkumatta hajoamisreaktion jälkeenkin. Mutta leptonit puolestaan saavat osuutensa β -siirtymän hajoamisenergiasta. Leptonien tilat hajoamisen jälkeen vaikuttavat reaktion hajoamisvakioon ja tätä kautta reaktion nopeuteen, joten ne on tärkeää osata määrittää. Tähän tarvitaan *faasiavaruusintegraaleja*.

2.2.1 Fermin kultainen sääntö

Hajoamisvakio (λ) on suure, joka kertoo reaktionopeuden ja reaktioon osallistuvien hiukkasten lukumäärän välisen suhteen. Hajoamisvakiosta määritetään myös reaktion puoliintumisaika.

Lähtökohtana hajoamisvakion määrittämisessä on Fermin kultainen sääntö [1]. Sen mukaan

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H | i \rangle|^2 \frac{dn_f}{dE_f}, \quad (9)$$

missä $|\langle f | H | i \rangle|^2$ kuvaa alku- ja lopputilan välisen siirtymän todennäköisyyttä ja $\frac{dn_f}{dE_f}$ puolestaan mahdollisten lopputilojen lukumäärää tietyllä hajoamisenergialla [1]. Jos siis halutaan määrittää β -hajoamisreaktioiden faasiavaruusintegraalit, on tutkittava lähemmin jälkimmäistä termiä.

2.2.2 Liikemääräavaruus

Puhuttaessa hiukkasen tilasta voidaan ymmärtää, että puhutaan sen sijainnista. 3-ulotteisessa avaruudessa ollessamme sen määrittelyyn riittää kolme koordinaattia, joita yleensä merkitään samoin kuin Euklidisia avaruuksia: (x, y, z) . Hiukkasen sijoittuminen spatiaaliseen avaruuteen on kuitenkin vain yksi tapa kuvata sen tilaa. Liikemäärä (p) on vektorisuure ja kolmiulotteisessa avaruudessa sekin saa kolme koordinaattia, joita merkitään usein p_x , p_y ja p_z . Vaikka nämä suureet ovat jatkuvasti muuttuvia, niitä voidaan mikroskooppisella tasolla mallintaa diskreetisti. Tällöin esimerkiksi yhden diskreetin askeleen ollessa liikemääräavaruudessa x-akselin suuntaisesti dp_x , liikemäärän x-komponentin muutos tällä akselilla voi olla $p_x + ndp_x$, missä $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ [6].

Kolmiulotteisessa avaruudessa nämä diskreetit askeleet muodostavat mielivaltaisen pieniä soluja, joihin sijainti- ja liikemäärävektorit ovat jakaantuneet. Hiukkanen

sijaitsee aina solussa, jonka kulmapisteet spatiaalisessa avaruudessa ovat x , y , z , $x + dx$, $y + dy$ ja $z + dz$. Liikemääräavaruudessa kulmapisteiden koordinaatit menevät vastaavasti. Sekä spatiaalisen että liikemääräavaruuden solut muodostavat *faasiavaruuden*, ja tutkittava hiukkanen sijaitsee aina jossakin tämän avaruuden laatikossa [6].

Hiukkasella on aina olemassa aaltofunktio ψ , joka kertoo sen todennäköisyyden sijaita jossain tietyssä kvanttitiilassa. Jos hiukkanen sijaitsee jossain tietyssä faasiavaruuden solussa, jonka tilavuus on $V = L_x L_y L_z$ (L_x , L_y ja L_z ovat solun sivujen pituudet), sen aaltofunktion on oltava nolla solun ulkopuolella. Tällöin aaltofunktion on oltava seisova aalto ja muotoa

$$\psi(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi z}{L_z}\right), \quad (10)$$

missä n_1 , n_2 ja n_3 ovat positiivisia kokonaislukuja. Tästä johtuen hiukkasen aaltofunktion aaltoluvun komponentit $k_i = \frac{n_i \pi}{L_i}$ ovat kvantittuneet [6].

Hiukkasen tilaa voidaan siis kuvata aaltolukuvektorilla $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, joka osoittaa sijainnin k-avaruudessa. Koska n_i -arvot ovat positiivisia, k-vektorin komponentit saavat vain positiivisia arvoja. Tästä syystä k-avaruus käsittää vain kahdeksasosan k-säteisestä pallosta. Pallokoordinaateissa ilmaistuna k-vektorin kierto- ja atsimuuttikulmat voivat saada k-avaruudessa arvon väliltä $[0, \pi/2]$. Lisäksi, koska yhden yksikkösolun tilavuus k-avaruudessa on $\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z} = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}$, k-tilojen tiheys on tämän ominaistilavuuden käänteisluku, eli $\frac{L_x L_y L_z}{\pi^3}$. Yhden tilavuuselementin koko pallokoordinaateissa esitettynä on $k^2 dk \sin(\theta) d\theta d\phi$, missä k on \vec{k} :n pituus, ϕ on atsimuuttikulma ja θ on kiertokulma. Siispä tilojen lukumäärä tietynsuuruudessa tilavuuselementissä on

$$dN = k^2 dk \sin(\theta) d\theta d\phi.$$

Kuten aikaisemmin tuli mainittua, k-avaruudessa θ ja ϕ voivat saada arvoja vain 0:n ja $\pi/2$:n väliltä. Tällöin k-vektorin ollessa magnitudiltaan välillä $[k, k + dk]$, tilojen mahdollinen lukumäärä on

$$dN = \frac{V}{\pi^3} k^2 dk \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk. \quad (11)$$

Aaltohiukkasdualismiin sisältyy teoria, jonka mukaan hiukkasella, jolla on liikemäärä p , on olemassa myös niin kutsuttu *de Broglien aallonpituus* [6] $\lambda = \frac{h}{p}$, missä h on Planckin vakio. Aallonpituus vastaa myös aaltofunktion aallonpituutta $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Näin ollen hiukkasen tarkastelu voidaan siirtää k-avaruudesta liikemääräavaruuteen ottaen huomioon muunnokset $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$ ja $dk = \frac{dp}{\hbar}$. Tiheysfunktio yhtälöstä 11 on liikemääräavaruudessa tällöin

$$dN = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 \frac{dp}{\hbar} = \frac{V p^2 dp}{2\pi^2 \frac{h^3}{(2\pi)^3}} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp. \quad (12)$$

Hiukkasen mahdollisten tilojen lukumäärästä saatiin nyt liikemäärästä riippuvainen funktio.

$\beta^{+/-}$ -siirtymien lopputilojen tiheyttä määritettäessä on huomioitava, että lopputilojen kahdella leptonilla on erilliset faasiavaruudet. Lopputilojen lukumäärä on tällöin kummankin leptonin lopputilojen tulo. Näin ollen

$$dn_f = dN_e dN_\nu. \quad (13)$$

Jos merkitään, että elektronin (tai positronin) liikemäärä on p ja (anti)neutriinin liikemäärä on q , lausekkeet 12 ja 13 yhdistettäessä saadaan $\beta^{+/-}$ -hajoamisten mahdollisten lopputilojen tiheydeksi

$$dn_f = \frac{16\pi^2 V^2 p^2 q^2 dp dq}{h^6}. \quad (14)$$

2.2.3 Muotofunktiot

Kuten Fermi'n kultainen sääntö (yhtälö 9) osoitti, reaktion jälkeisten lopputilojen funktio on hajoamisenergiasta riippuvainen funktio. Lauseke 14 esittää dn_f :n liikemäärien funktiona, mutta se voidaan muuntaa elektronin (tai positronin) liikeenergiasta riippuvaiseksi funktioksi. Ensinnäkin lauseke 14 kuvaa leptoneita tilavuudessa V . Ytimeistä emittoituvien leptonien ajatellaan kuitenkin olevan vapaita hiukkasia. Vapaiden hiukkasten aaltofunktiot ϕ ovat normalisoituja tilavuuden V neliöjuurella [1], jolloin

$$\phi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

$$\phi_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Aaltofunktion normalisointi johtaa lopulta liikemäärien normalisointiin, sillä eksponentiaaliset aaltofunktiot voidaan esittää muodossa [1]

$$e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} = 1 + \frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} + \dots \approx 1$$

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} = 1 + \frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar} + \dots \approx 1.$$

Tämä johtaa normalisointiin, jossa $p \rightarrow \frac{p}{\sqrt{V}}$ ja $q \rightarrow \frac{q}{\sqrt{V}}$, jolloin lausekkeesta 14 V^2 supistuu pois. Hajoamisenergia $E_f = Q$ jakaantuu β -hajoamisessa aina leptonien kesken, sillä luvun 2.2 alussa oletettiin tytärytimen rekyylin jäävän olemattomaksi. Lisäksi oletetaan, että (anti)neutriino on massaton. Tällöin $Q = T_e + qc$, missä T_e on elektronin liike-energia ja c on valonnopeus. Täten $q = \frac{Q-T_e}{c}$ ja $\frac{dq}{dQ} = \frac{1}{c}$. Kun nämä sijoitetaan normalisoituun yhtälöön 14, saadaan

$$\frac{dn_f}{dQ} = \frac{16\pi^2}{h^6 c^3} (Q - T_e)^2 p^2 dp, \quad (15)$$

joka esittää lopputilojen jakaumaa elektronin saaman energian funktiona [1]. Koska T_e voi saada minkä tahansa arvon väliltä $[0, Q]$, integrointi kaikkien mahdollisten energiaintervallien dE yli antaa kaikkien mahdollisten lopputilojen lukumäärän tietyllä Q :n arvolle. Tätä integraalia muotofunktion yli kutsutaan *faasiavaruusintegraaliksi*.

Analyttisessä ratkaisussa siirtymän faasiavaruusintegraali lasketaan yleensä siten, että muuttujana on $\epsilon = \frac{E_e}{m_e c^2}$ eli elektronin saama kokonaisenergia $E_e^2 = (m_e c^2)^2 + (T_e)^2$ suhteutettuna elektronin massaan. Hajoamisenergiaa suhteutettuna elektronin massaan merkitään $E_0 = \frac{Q}{m_e c^2}$, jolloin integrointiväliksi tulee $[1, E_0]$. Muotofunktion korkeuteen vaikuttaa osaltaan myös ytimen ja sähkövarauksellisen leptonin välinen Coulombin voima. β^- -hajoamisessa tytärtymen ja elektronin (β^+ -hajoamisessa tytärtymen ja positronin) välinen vuorovaikutus muuttaa leptonien liikemäärää vaikuttaen näin niiden tilatiheyteen. Coulombin vuorovaikutus tietyllä ytimen järjestysluvulla, Z , ja tietyllä energialla huomioidaan lisäämällä muotofunktioon erityinen *Fermin funktio*, $F_0(\pm Z_f, \epsilon)$. Tällöin faasiavaruusintegraalin lauseke β^+ - ja β^- -lausekkeille voidaan määrittää seuraavasti:

$$f_0^{(\mp)} = \int_1^{E_0} F_0(\pm Z_f, \epsilon) p \epsilon (E_0 - \epsilon)^2 d\epsilon, \quad (16)$$

missä $p = \sqrt{\epsilon - 1}$ [4].

Muista β -siirtymistä poiketen elektronisieppauksessa on lopputilassa vain yksi leptoni eli neutriino. Tällöin kaikki hajoamisenergia muuntuu neutriinon liike-energiaksi ja neutriinolla on lopputilassa tietty liikemäärä. Tämä johtaa siihen, että elektronisieppauksessa faasiavaruuksilla ei ole jatkuva vaan diskreetti energiajakauma. Lisäksi elektronisieppauksessa ei ole varauksellinen leptoni loppu- vaan alkutilassa, kuten kappaleessa 2.1.1 tuli ilmi. Täten elektronisieppauksessa Fermin funktioon vaikuttaa emoytimen järjestysluku. Faasiavaruustekijä elektronisieppaukselle on siis

$$f_0^{(EC)} = 2\pi(\alpha Z_i)^3 (\epsilon_0 + E_0)^2, \quad (17)$$

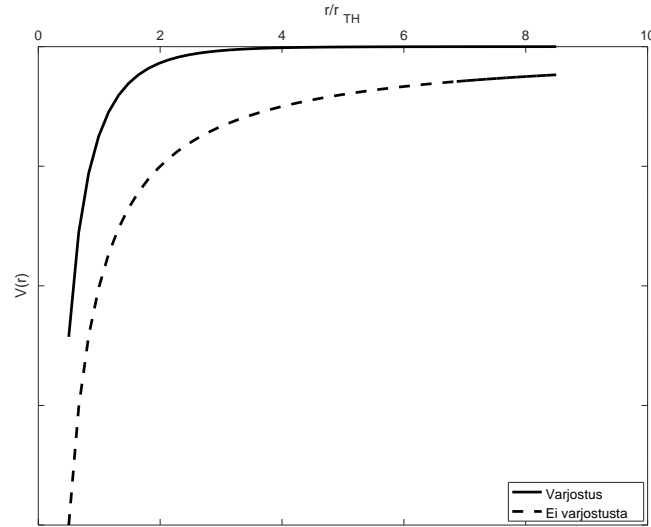
missä $\alpha \approx \frac{1}{137}$ on hienorakennevakio ja $\epsilon_0 = \frac{m_e c^2 - \mathcal{B}}{m_e c^2}$, missä \mathcal{B} on elektronin sidosenergia emoytimen ensimmäisellä elektronikuorella [4].

Jos β -siirtymä on kuitenkin kielletty, leptonien eivät ole enää perustilassa. Tällöin muotofunktioiden määrittäminen vaatii useita matriisielementtejä. Maksimissaan niitä voi olla jopa 6. Mutta kun kyse on uniikista kielletystä β -siirtymästä, matriisielementtejä tarvitaan vain yksi. Siksi niiden analyttinen määrittely on mahdollista, toisin kuin muilla kielletyillä β -siirtymillä. Silti analyttisestä määrittämisestä tulee työlästä. K-kertaisesti kielletylle uniikille $\beta^{+/-}$ -siirtymälle faasiavaruusintegraali on

$$f_{Ku}^{(\mp)} = \left(\frac{3}{4}\right)^K \frac{(2K)!!}{(2K+1)!!} \int_1^{E_0} S_{Ku}^{\mp}(Z_f, \epsilon) d\epsilon, \quad (18)$$

missä

$$S_{Ku}^{\mp}(Z_f, \epsilon) \approx F_0(\pm Z_f, \epsilon) p \epsilon (E_0 - \epsilon)^2 \times \sum_{k_e + k_\nu = K+2} \frac{(\epsilon^2 - 1)^{k_e - 1} (E_0 - \epsilon)^{2(k_\nu - 1)}}{(2k_e - 1)!(2k_\nu - 1)!}.$$



Kuvio 1. Ytimen Coulombin potentiaali huomioituna varjostuksella sekä sitä ilman

Vastaavalle elektronisieppaukselle faasiavaruusintegraali on puolestaan

$$f_{Ku}^{(EC)} = \frac{2(2K)!!}{(2K)!!(2K+1)!} \pi(\alpha Z_i)^3 (\epsilon_0 + E_0)^{2(K+1)}. \quad (19)$$

Kuten luvussa 2.1.1 todettiin, β^+ -hajoaminen ja elektronisieppaus kuvastavat molemmat samaa siirtymää $X(Z, N) \rightarrow X(Z-1, N+1)$. Viitaten Fermin kultaiseen sääntöön 9, $|\langle f|H|i \rangle|^2$ on molemmissa hajoamisissa samat, mutta $\frac{dn_f}{dE_f}$ ei ole. Faasiavaruusintegraali siirtymälle, joka voi tapahtua sekä β^+ -hajoamisen että elektronisieppauksen kautta on siis

$$f_{Ku}^{(+/EC)} = f_{Ku}^{(+)} + f_{Ku}^{(EC)}. \quad (20)$$

Sama sääntö pätee, vaikka kyseessä ei olisi uniikki siirtymä tai kiellettyvyyden aste olisi mikä tahansa.

2.3 Thomas-Fermi-varjostus

Faasiavaruusintegraaleihin vaikuttaa lisäksi elektronipilven varjostus (engl. screening). Elektronin kokema Coulombin voima on otettu huomioon Fermi funktion kautta, kuten luvussa 2.2.3 todettiin. Fermi funktio ei kuitenkaan ota huomioon elektronipilven aiheuttamaa vuorovaikutusta β -hajoamiseen osallistuviin leptoneihin. Se otetaan erikseen huomioon *Thomas-Fermi-mallin* approksimaatiolla.

Kaikkien elektronipilven elektronien vuorovaikutusta β -hiukkaseen on hankala määrittää erikseen. Thomas-Fermi-approksimaatio onkin tilastollinen menetelmä, jossa atomille määritetään efektiivinen potentiaali. Se antaa korjaustermin ytimen

protonien muodostamalle sähkökentälle, ja korjaustermi riippuu elektronien tiheydestä [7]. Ilman varjostusefektiä potentiaalienergia V on riippuvainen etäisyydestä atomin ytimeen seuraavasti: $V(r) \propto -\frac{1}{r}$. Mutta varjostuksen huomioiden $V(r) \propto -\frac{e^{-r/r_{TF}}}{r}$, missä r_{TF} on elektronien tiheydestä riippuvainen Thomas-Fermi-varjostuspituus (engl. Thomas-Fermi screening length) [8]. Täten jokaisen r_{TF} :n jälkeen potentiaalien välinen ero putoaa e^{-1} -osaan eli noin 37 prosenttiin. Potentiaalien välinen ero näkyy kuvassa 1. Muutos potentiaalienergiassa vaikuttaa β^+ -hajoamisen ja elektronisieppauksen hiukkasten lopullisiin liikemääriin. β^- -hajoamisessa varjostus ei vaikuta.

3 Menetelmät ja aineisto

3.1 Numeerinen laskenta

Tässä työssä faasiavaruusintegraaleja ei laskettu analyttisesti vaan numeerisesti Fortran-kielisellä tietokoneohjelmalla. Kustakin β -siirtymästä annetaan ohjelmalle tarvittavat parametrit, joita tarvitaan faasiavaruusintegraalien laskemiseen. Ensimmäinen parametri on kiellettyyden aste. Toinen parametri kertoo, mikä β -hajoamisen laji on kyseessä siten, että jos on kyseessä β^+ /EC-siirtymä, parametri on +1 tai jos taas β^- -siirtymä, parametri on -1. Kolmas parametri on 1, jos varjostus-efekti otetaan huomioon ja 0, jos ei oteta. Neljäs parametri on β -hajoavan ytimen massaluku ja viides parametri sen alkutilan järjestysluku. Kuudes ja viimeinen parametri on β -siirtymän hajoamisenergia kiloelektronivoltteina. β^+ /EC-siirtymän tapauksessa annetaan vain elektronisieppauksen Q . β^+ -siirtymän Q on aina 1022 keV pienempi, kuten luvussa 2.1.1 todettiin, ja ohjelma osaa ottaa tämän huomioon β^+ -siirtymien faasiavaruusintegraaleja laskettaessa. Hajoamisenergiat on otettu National Nuclear Data Center Brookhavenin (NNDC) www-sivujen Q-laskurista [9].

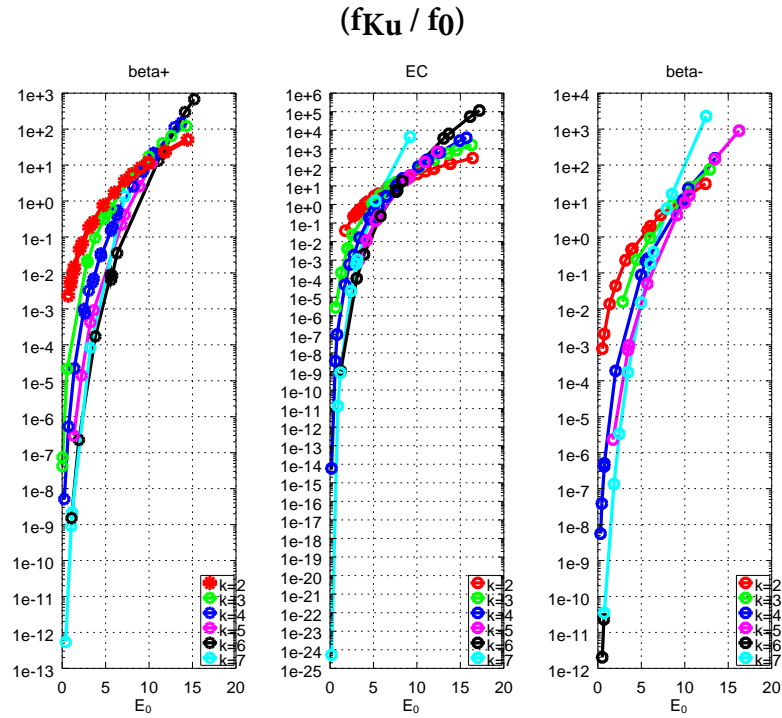
Tietokoneohjelma laskee luvussa 2.2.3 esitettyjen periaatteiden mukaisesti faasiavaruusintegraalit parametrien mukaiselle K-kertaisesti kielletylle uniikille sekä sitä vastaavalle sallitulle siirtymälle. Tässä tutkielmassa laskettujen kiellettyjen siirtymien faasiavaruusintegraalit ovat liitteessä A ja vastaavasti sallittujen siirtymien faasiavaruusintegraalit liitteessä B. Useimmat faasiavaruusintegraalit on annettu logaritmimuodossa. Ohjelma antaa ulos myös β^+ - ja EC-siirtymien osuudet kokonaisarvosta.

3.2 Analysoitavat siirtymät

Tässä työssä laskettiin käytössä olevalle ohjelmalla faasiavaruusintegraalit noin 140 uniikille β -siirtymälle [10]. Siirtymät koskevat sekä β^- - ja β^+ -hajoamisia, että elektronisieppauksia. Siirtymien kiellettyvyyden aste vaihteli 2:sta 7:ään. Järjestysluvut vaihtelivat 21:stä 86:een ja hajoamisenergia oli maksimissaan yli 8000 keV. Yhteistä kaikille siirtymille oli siis, että ne olivat uniikkeja.

Tässä työssä tietokoneohjelmalla saatua laskentadataa analysoitiin useista eri näkökulmista. Pääpaino työssä on, kuinka K:n arvo vaikuttaa faasiavaruusintegraaleihin. β /EC-siirtymille on myös laskettu erikseen faasiavaruusintegraalit tapauksille, joissa varjostus on otettu huomioon ja niille, joissa ei ole. Tulosten analysoinneissa on nyt käytetty arvoja, joissa varjostus ei ole otettu huomioon. Tämä on perusteltua,

sillä kävi ilmi, että varjostuksen huomioonottaminen ei muuta arvoja merkittävästi. Varjostuksen vähäisistä vaikutuksista kerrotaan enemmän luvussa 4.4.



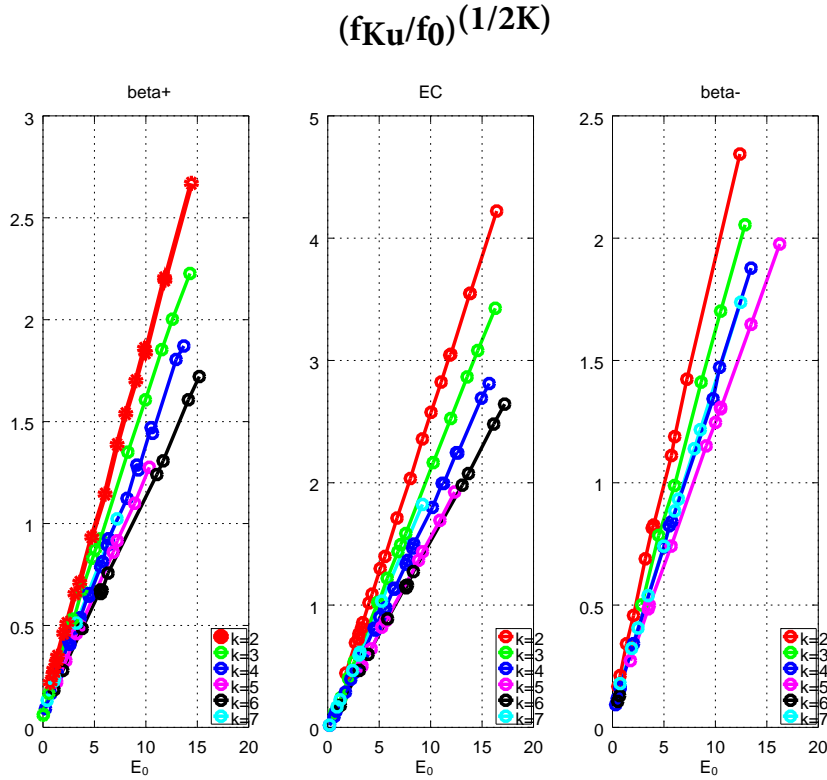
Kuvio 2. $\frac{f_{Ku}}{f_0}$ eriteltynä kiellettyyden mukaan eri β -siirtymän lajeille.

4 Tulokset

4.1 Kiellettyjen ja sallittujen siirtymien väliset suhteet

Yksi näkökulma, mistä lähdin erittelemään laskenta-analyysiä, oli kuinka kiellettyjen siirtymien faasiavaruusintegraalit eroavat vastaaviin sallittuihin faasiavaruusintegraaleihin. Tietokoneohjelma laskee jokaisen siirtymän K -kertaisesti kielletyn siirtymän faasiavaruusintegraalin, f_{Ku} ja sitä vastaavan sallitun siirtymän faasiavaruusintegraalin arvon, f_0 . Kiellettyyden aste on ainoa ero näiden kahden arvon välillä, joten niiden välinen suhde $\frac{f_{Ku}}{f_0}$ on mielestäni tärkein näkökulma tutkimuksessani.

Analysoin saadut suhdeluvut katsomalla, miten ne muuttuvat hajoamisenergian suhteen. f_{Ku} :t on otettu liitteestä A ja niitä vastaavat f_0 :t liitteestä B. Tulokset on yhdistetty kuvassa 2. Kuvassa tulokset ovat logaritmisella asteikolla, koska se on helpompi tapa näyttää suhdelukujen käytös sekä suurilla että pienillä energian arvoilla yhtäaikaan. Kuvasta huomataan, että suhdelukujen käytös on samanlaista niin $\beta^{(+/ -)}$ -siirtymille, että elektronisieppauksille. Alhaisissa energioissa siis suhdeluku



Kuvio 3. $\frac{f_{Ku}}{f_0}$:n linearisointi eriteltynä kiellettyyden mukaan eri β -siirtymän lajeille.

on sitä pienempi, mitä suurempi kiellettyys on, tarkoittaen että f_{Ku} on f_0 :aan verrattuna sitä pienempi, mitä suurempi K :n arvo on. Energian kasvaessa tilanne kääntyykin toisinpäin. Kaikilla siirtymillä f_{Ku} alkaa kasvaa f_0 :aa voimakkaammin, kun hajoamisenergia kasvaa, mutta f_{Ku} :n kasvu on sitä voimakkaampaa, mitä suurempi K on.

Suhdeluvun käyttäytyminen viittasi siihen, että se on verrannollinen johonkin potenssiin energian suhteen. Analysoin suhdelukuja ottamalla sopivat juuret niistä riippuen, mitä K on. Lopulta sain kuvan 2 laskentadatasta lineaariset esitykset, jotka on esitelty kuvassa 3. Sain käyrät linearisoitua ottamalla jokaisesta suhdeluvusta $\frac{f_{Ku}}{f_0} 2K$:nen juuren. Täten

$$\frac{f_{Ku}}{f_0} \propto E_0^{2K}.$$

Odotin, että lineaaristen esitysten kulmakertoimetkin olisivat olleet K :sta riippuvia, mutta näin ei ole, kuten kuvasta 3 käy ilmi. β^- - ja β^+ -siirtymien tapauksessa ne kuitenkin käyvät hyvin yhteen Primakoff-Rosen-approksimaatioista johdettujen faasiavaruusintegraalien kanssa. Niissä

$$f_0^{(\mp)} = \frac{1}{30}(E_0^5 - 10E_0^2 + 15E_0 - 6)F_0^{PR}(\pm Z_f) \quad , \text{ missä}$$

Taulukko I. Suhdelukujen linearisointien kulmakertoimet

K	Apksimaatiot	Kuvaajat(β^-)	Kuvaajat(β^+)	Kuvaajat(EC)
2	0,177474	0,1829±0,0014	0,1779±0,0007	0,2581±0,0006
3	0,18538	0,154±0,002	0,1528±0,0010	0,2128±0,0006
4	0,130997854	0,134±0,001	0,1320±0,0011	0,1804±0,0007
5	0,116243391	0,1167±0,0004	0,1161±0,0009	0,1573±0,0008
6		(0,12775±0)	0,1081±0,0010	0,1537±0,0008
7		0,13305± 0,0002357	0,1300±0,0011	0,1997±0,0002

$$F_0^{PR}(Z_f) = \frac{2\pi\alpha Z_f}{1 - e^{-2\pi\alpha Z_f}}$$

on itse Primakoff-Rosen-apksimaatio Fermi funktiolle. [4]

Myös f_{Ku} :ille on olemassa apksimaatiot. Esimerkiksi f_{2u}^\pm :a voidaan esittää muodossa

$$\frac{3}{10} \left(\frac{E_0^9}{9072} - \frac{2E_0^7}{4725} - \frac{E_0}{360} + \frac{23E_0^5}{1800} - \frac{23E_0^4}{54} - \frac{E_0^3}{54} - \frac{113E_0^2 E_0}{12600 \cdot 432} - \frac{29}{113400} \right) F_0^{PR}(\pm Z_f)$$

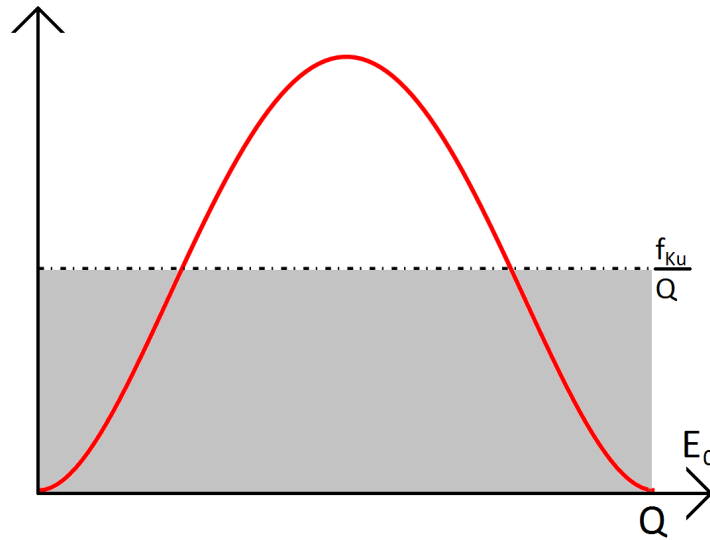
Jokaiselle $2 \leq K \leq 5$ on olemassa myös omat yksilölliset apksimaatiot, joissa polynomin kertoimet vaihtelevat, mutta aste on aina $2K + 5$ [4]. Suhdeluvun $\frac{f_{Ku}}{f_0}$ likiarvo voidaan laskea siis myös apksimaatioista. Yksinkertaisuuden vuoksi huomioidaan vain korkeinta astetta olevat termit. Näin ollen esimerkiksi tapauksessa $K = 2$

$$\frac{f_{2u}}{f_0} \approx \frac{\frac{3}{10} \left(\frac{E_0^9}{9072} \right) F_0^{PR}}{\frac{1}{30} (E_0^5) F_0^{PR}} = \frac{9}{9072} E_0^4.$$

Kun tämä suhdeluku linearisoidaan, eli siitä otetaan $(2 \cdot K)$:s eli neljäs juuri, saadaan:

$$\left(\frac{f_{2u}}{f_0} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,177474 E_0.$$

Kun $K = 2$, linearisoinnin kulmakertoimeksi saadaan täten 0,177474. Vertasin tätä laskentadatasta saatuun vastaavaan arvoon, joka on β^- :lle 0,18287 ± 0,0014 ja β^+ :lle 0,1779 ± 0,0007. Apksimaatiosta johdettu suhdeluvun linearisoinnin kulmakertoimen on sama sekä β^- - että β^+ -siirtymälle, mutta mittausdatan arvoista β^+ :n arvot ovat lähimpänä apksimaatioiden vastaavia arvoja. Muillekin K-kertaisille β^\pm -siirtymille voidaan johtaa apksimaatioista samalla tavalla vastaavat kulmakertoimet. Tiedossani on apksimaatiot 5-kertaisiin asti oleville uniikeille β^- - ja β^+ -siirtymille [4]. Elektronisieppauksille ei ole vastaavia apksimaatioita ainakaan minun tietääkseni. Tulokset on koottu taulukkoon I. β^- -siirtymien 6. kielletyt siirtymät on laitettu sulkuun johtuen siitä, ettei tulos ole täysin luotettava. Kyseisiä siirtymiä on tiedossa vain 2 eikä niille voida määrittää kunnollista suoran sovitusta.



Kuvio 4. Keskiarvo tilatiheyksille energiajakaumassa.

4.2 Tilatiheyksien keskiarvo

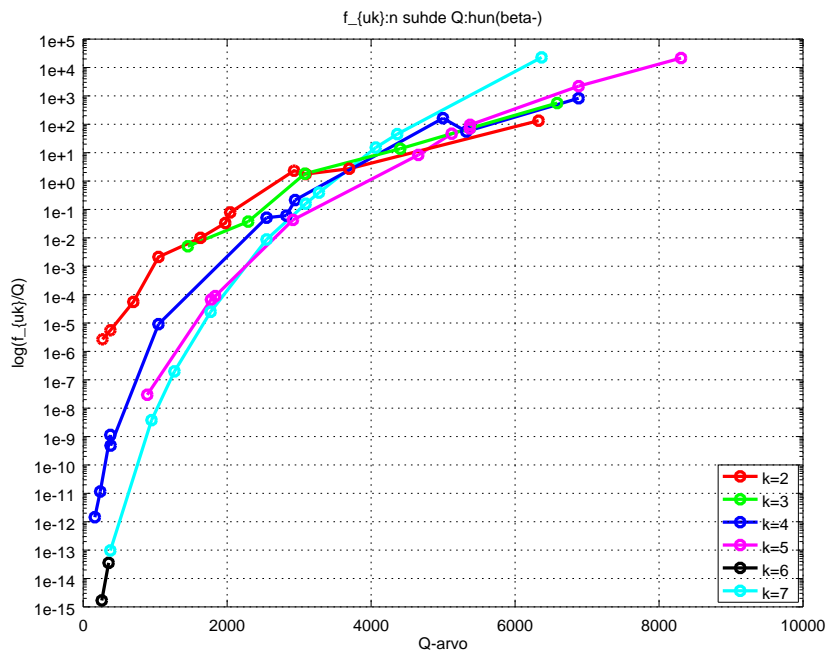
Seuraavaksi tarkastelin, kuinka K :n aste vaikuttaa keskimääräiseen tilatiheyteen β -siirtymässä. Kuten lauseke 15 osoitti, siirtymän lopputilojen tiheys on energiasta riippuva funktio, joka nousee nolasta huippuarvoonsa ja laskee takaisin noltaan pääte piste-energiassa, joka on hajoamisenergia. Tilatiheyksille β -siirtymässä saadaan siis keskiarvo jakamalla faasiavaruusintegraali siirtymän hajoamisenergialla. Kuva 4 havainnollistaa tilannetta.

Laskin kaikille liitteen A β -siirtymille keskiarvon $\frac{f_{Ku}}{Q}$, mukaanlukien elektronisieppaukset. Kuten luvussa 2.2.3 kerrotaan, EC-siirtymissä ei muodostu tasaista energiajakaumaa vaan diskreetti piikki. Mutta faasiavaruusintegraali on kuitenkin Q :sta riippuva EC-siirtymissä, joten laskin keskiarvon samalla tavalla niissäkin.

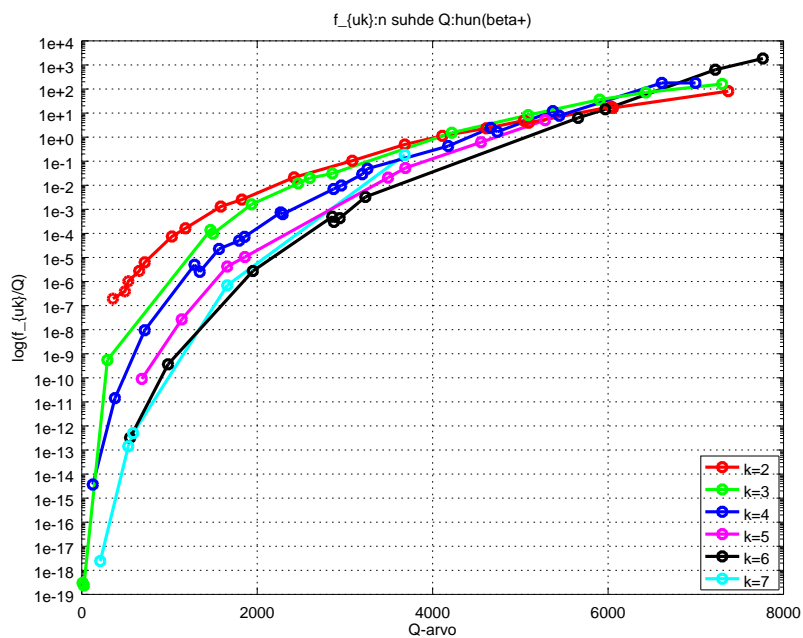
Tulokset on yhdistetty kuvaajaan 5, kuvaajaan 6 ja kuvaajaan 7.

Tulosten analysointi on keskiarvoilla vaikeampaa kuin suhdeluvuilla $\frac{f_{Ku}}{f_0}$ luvussa 4.1, koska tuloksissa tapahtuu selvää ´sahausta´, etenkin elektronisieppauksilla. Tämä johtuu ytimen järjestysluvun, Z , muutoksesta laskentadatassa. Suhdeluvuissa se ei vaikuttanut samalla tavalla, sillä jaettaessa f_{Ku} vastaavalla f_0 :lla Z näiden välillä ei muutu.

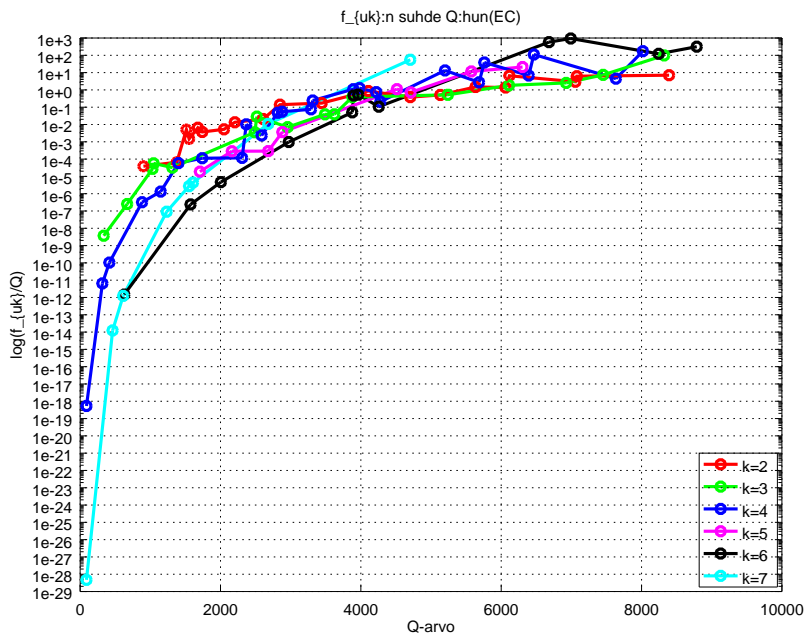
Kuvaajia tarkasteltaessa huomataan kuitenkin, että keskiarvojen käytös on jokseenkin samanlaista kuin suhdeluvuilla. Pienillä hajoamisenergian arvoilla ne ovat sitä suurempia, mitä pienempi kiellettyys on, mutta energian kasvaessa korkeamman K :n siirtymillä keskiarvot ovat suurempia. Tulokset viittaisivat siihen, että suurien energiassa siirtymissä tilatiheydet ovat sitä korkeampia, mitä suurempi K on.



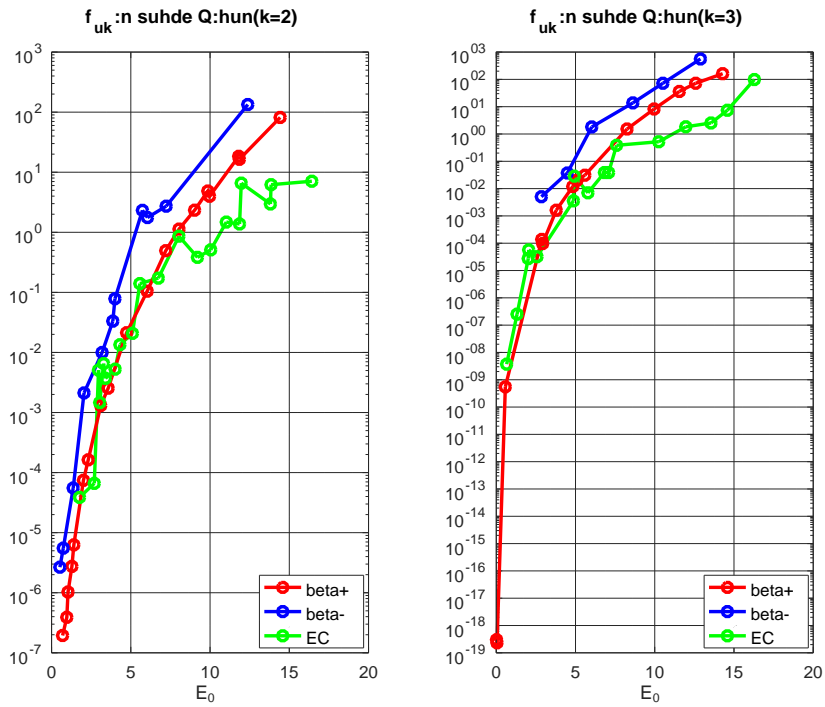
Kuvio 5. Keskiarvo tilatiheyksille β^- -siirtymissä (logaritminen asteikko).



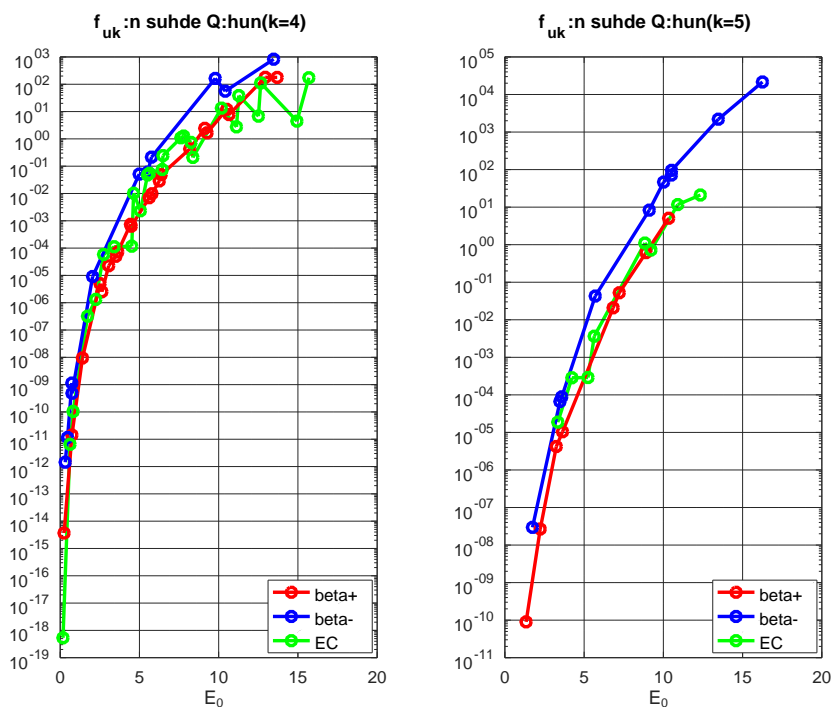
Kuvio 6. Keskiarvo tilatiheyksille β^+ -siirtymissä (logaritminen asteikko).



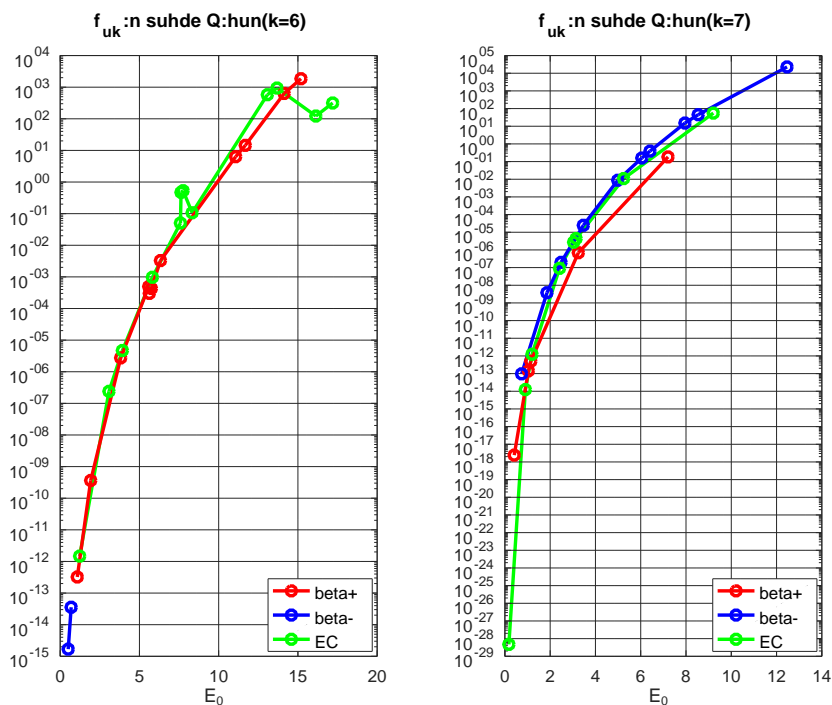
Kuvio 7. Keskiarvo tilatiheyksille elektronisieppauksissa (logaritminen asteikko).



Kuvio 8. Keskiarvo tilatiheyksille 2- ja 3-kert. kielleyissä siirtymissä (logaritminen asteikko).

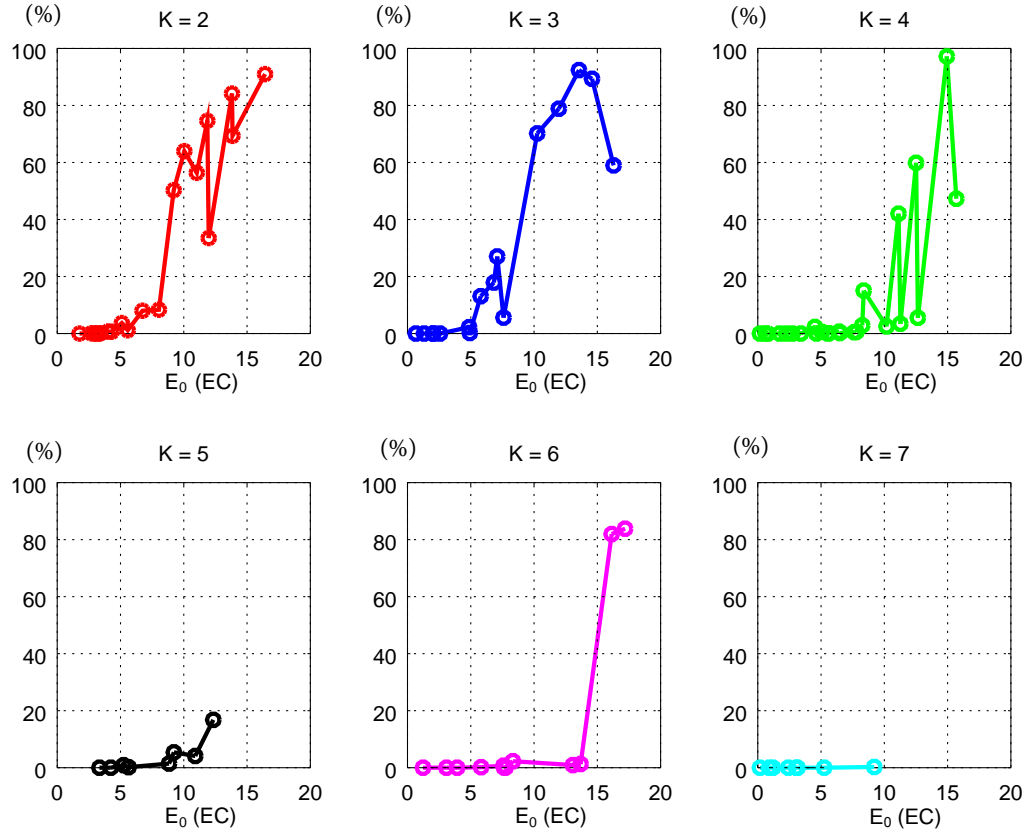


Kuvio 9. Keskiarvo tilatiheyksille 4- ja 5-kert. kielletyissä siirtymissä (logaritminen asteikko).



Kuvio 10. Keskiarvo tilatiheyksille 5- ja 6-kert. kielletyissä siirtymissä (logaritminen asteikko).

$f_{Ku}^{(+)}$:n osuus ($f_{Ku}^{(+)} + f_{Ku}^{(EC)}$):stä



Kuvio 11. β^+ :n osuudet β^+/EC -siirtymissä.

Kun tarkastellaan kuvaajia 8, 9 ja 10, huomataan että sahausefekti on jonkin verran voimakkaampaa elektronisieppauksessa kuin muissa β -hajoamisen lajeissa, varsinkin β^+ -siirtymissä. Kaikissa kuvissa elektronisieppauksilla on $2m_e c^2$ suurempi hajoamiseksienergia, kuin β^+ -siirtymillä, mutta muuten ne kuvaavat samoja siirtymiä. Näin ollen Z :n muutos on sama molemmissa lajeissa. Mutta siitä huolimatta näyttää siltä, että se vaikuttaa enemmän elektronisieppausten keskiarvoon. Syy saattaa piillä siinä, että Fermi funktio vaikuttaa enemmän diskreettiin jakaumaan.

Toinen asia, minkä kuvaajista 8, 9 ja 10 voidaan huomata, on se, että β^- -siirtymissä f_{Ku} :t ovat keskimääräisesti suurimpia, olivatpa K : ja Q :n arvot mitä hyvänsä. Tämä on kuitenkin odotettua, sillä Fermi funktio nostaa β^- -siirtymän tilajakaumaa kaikilla E_0 :n arvoilla.

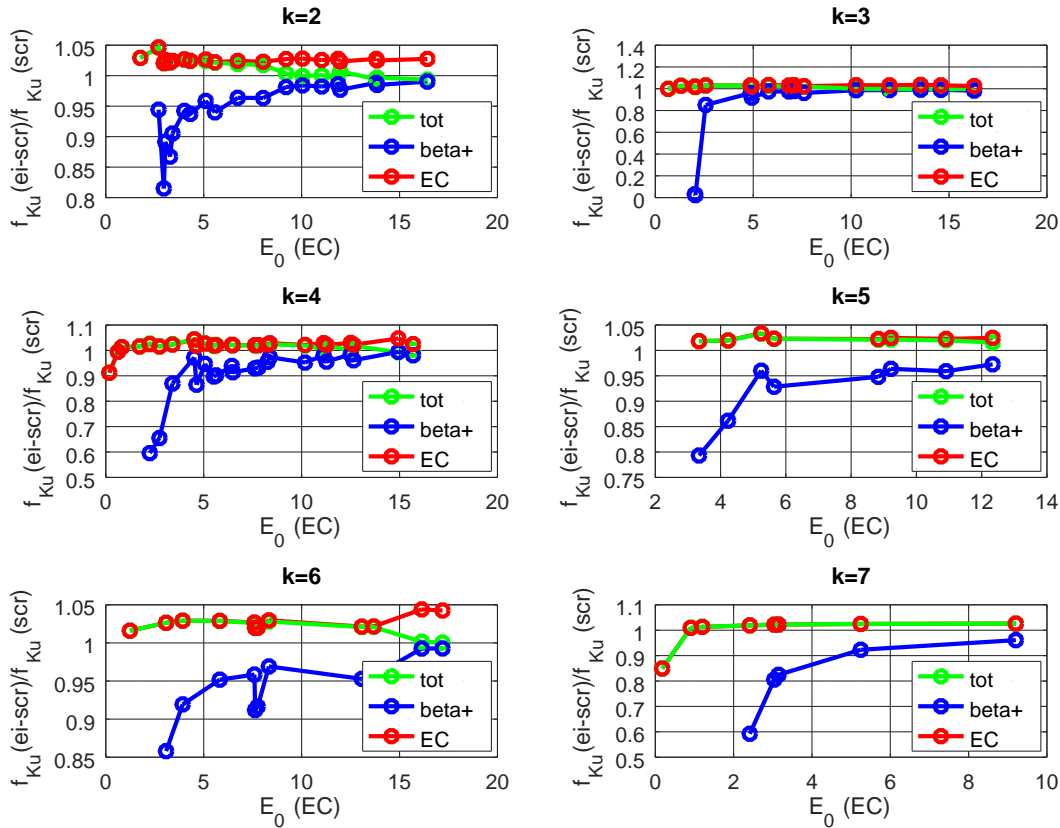
4.3 β^+ :n ja EC:n väliset osuudet

Kolmas näkökohta, josta ryhdyin mittausdataa tarkastelemaan, on kuinka β^+ - ja EC-siirtymien välinen suhde käyttäytyy eri kiellettyvyyden arvoilla. Kuten luvussa 2.1.1 mainittiin, tytärytimen tilat ovat molemmissa siirtymissä identtiset, jos emoytimenkin tilat ovat. Ja yhtälö 20 kertoo, että siirtymän faasiavaruusintegraali on näiden molempien mahdollisten siirtymien summa. Tässä luvussa on analysointia siitä, miten tämä summa käyttäytyy eri parametrien, varsinkin K :n, mukaan.

Tietokoneohjelma antaa β^+ /EC-siirtymissä ulos myös näiden väliset osuudet, joten sijoitin ne kuvaajiin, jotka näkyvät kuvassa 11. Kuvassa on β^+ :n osuudet siirtymistä prosenttiosuuksina elektronisieppauksen hajoamisenergian suhteen. Jos käytäisiin β^+ -siirtymien hajoamisenergioita, kaikki siirtymät joilla $E_0 < 2$ kuvaajissa, olisivat negatiivisia, sillä, kuten luvun 2.1.1 lopussa todettiin, elektronisieppauksessa hajoamisenergia on kaksi elektronin lepoenergiaa suurempi kuin β^+ -hajoamisessa. $f_{K_u} = 0$, kun $E_0 \leq 0$, joten tiedetään, että kuvaajissa kaikkilla siirtymillä, joiden $E_0 \leq 2$, elektronisieppauksen osuus on 100% ja β^+ :n osuus 0%, ja kun E_0 kasvaa, myös β^+ :n osuus kasvaa. Tässäkin näkökulmassa suurin kiinnostuksen aihe on, kuinka K vaikuttaa näihin osuuksiin.

Järjestysluvun muuttuminen aiheuttaa tässäkin tapauksessa ´´sahausefektia´´. Yleisesti E_0 :n kasvaessa $\frac{f_{K_u}^{(+)}}{f_{K_u}^{(+)/EC}}$ kasvaa myös, mutta Z :n kasvu saa toisaalta EC:n osuuden kasvamaan. Erityisesti tämä näkyy siirtymissä, joissa $K = 4$. Valitettavasti Z :n pitäminen vakiona ei tule kysymykseenkään, sillä silloin laskentadatasta olisi siirtymiä, jotka eivät olisi todellisia ytimissä tapahtuvia siirtymiä. Mutta joitakin havaintoja tuloksista voidaan tehdä. Siirtymissä, joissa $K = 7$, järjestysluku vaihtelee vain välillä 49 – 55, β^+ :n osuus pysyy alle puolessa prosentissa, vaikka E_0 kasvaa melkein arvoon 10. Energialtaan suurimman siirtymän, jonka $K = 7$, $E_0 \approx 9,206$ ja $Z = 51$, β^+ :n osuus on vain 0,259 %. Laskentadatasta löytyy vastaavanlainen siirtymä, jonka E_0 ja Z ovat samat, mutta $K = 2$. Tässä tapauksessa β^+ :n osuus on jopa 50,285 % eli yli puolet. Suuremmilla K :n arvoilla EC pyrkii selvästikin vielä dominoimaan kynnysenergiaa suuremmillakin energioilla.

Tarkastelin myös matalia E_0 :n arvoja, joilla EC-siirtymät ovat yleisesti vallitsevia. Kuten aiemmin tässä luvussa todettiin, kaikilla $E_0(EC) \leq 2$ β^+ /EC-siirtymät ovat puhtaasti EC-siirtymiä ja vähän sitä korkeammilla energioillakin β^+ :n osuus on ole mattoman pieni. Tarkastellessani siis arvoja joilla EC:n osuus on 100 %, huomasin että korkeammilla K :n arvoilla tämä sadan prosentin raja on hieman ylemmällä energialla. Toki Z :n suuruus edesauttaa sitä, mutta otetaan laskentadatasta esimerkiksi tapauksien $K = 4$ ja $K = 5$ suurien energioiden siirtymät, joilla EC:n osuus on 100 %. Kun $K = 4$, kyseisen siirtymän $Q = 1400.56\text{keV}$ eli $E_0 \approx 2,7408$ ja $Z = 84$. Kun taas $K = 5$ niin $Z = 72$ (eli pienempi ja siten β^+ :aa suosiva) mutta $Q = 1706.8\text{keV} \iff E_0 \approx 3,3401$. Tämä huomio vahvistaa sitä havaintoa, että EC pyrkii dominoimaan β^+ /EC-siirtymiä, kun K :ta kasvatetaan.

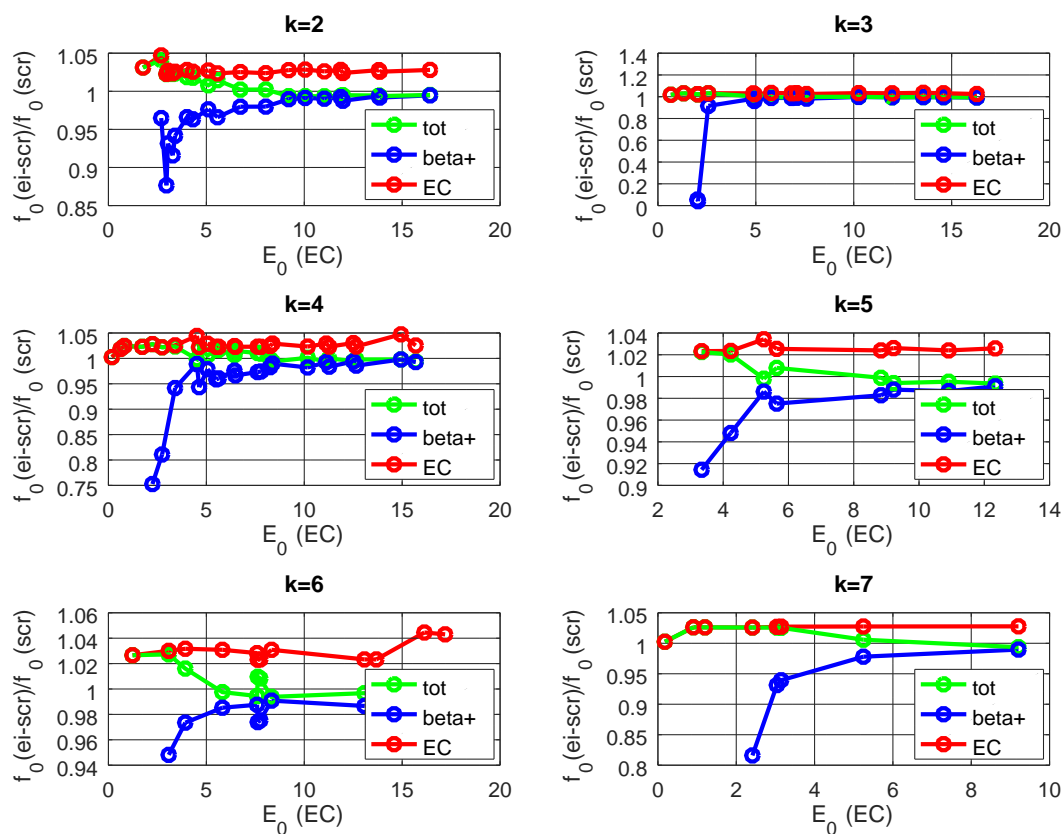


Kuvio 12. f_{Ku} :n varjostamattomien ja varjostettujen arvojen väliset suhteet

4.4 Varjostus-efekti

Edellisten kappaleiden tuloksissa on käytetty laskentadataa, jossa ei ole huomioitu luvussa 2.3 esiteltyä Thomas-Fermi-varjostusta. Varjostus muuttaa hieman β^+ - ja EC-siirtymiä. Olen kuitenkin laskenut myös f_{Ku} :t ja f_0 :t, joissa on otettu varjostus huomioon. Sitten olen vain verrannut tuloksia toisiinsa. Uniikkien faasiavaruusintegraalien, joissa varjostusta ei ole otettu huomioon, suhteet vastaaviin arvoihin, joissa se on otettu huomioon $\frac{f_{Ku}^{ei-scr}}{f_{Ku}^{scr}}$ on yhdistetty kuvaan 12. Sama operaatio on tehty myös sallituille β^+ - ja EC-siirtymille. Suhdeluvut $\frac{f_0^{ei-scr}}{f_0^{scr}}$ on yhdistetty kuvaan 13. Näissä tuloksissa on huomioitava, että vaikka ne on eroteltu kiellettyyden mukaan, K :lla ei ole mitään tekemistä f_0 :n arvojen kanssa. Luokittelu K :n mukaan on vain, jotta niitä voidaan verrata vastaaviin K -kertaisesti kiellettyihin uniikkeihin siirtymiin.

Kuten kuvista 12 ja 13 nähdään, suhdeluku pysyy aika lähellä yhtä molemmissa tapauksissa, eli varjostus ei vaikuta faasiavaruusintegraalihin merkittävästi. Tästä syystä on perusteltua pitää edellisissä luvuissa esitetyt tulokset ennallaan. Varjostusefekti näyttäisi olevan merkityksellinen lähinnä matalaenergisillä β^+ -siirtymillä. Niillä varjostus kasvattaa faasiavaruusintegraalien arvoa hyvinkin suureksi. Äärita-



Kuvio 13. f_0 :n varjostamattomien ja varjostettujen arvojen väliset suhteet (K :n arvo kertoo vain vastaavuuden siirtymiin F_{Ku} :n tapauksessa)

pauksena 3. kielletty β^+ -siirtymä, jossa iridium-192 muuttuu osmium-192:ksi. Siirtymän $Q = 24.6$ keV. Tässä siirtymässä varjostus kasvattaa f_{Ku} :n melkein 45-kertaiseksi. Syy tähän tietysti on se, että varjostuksen matalilla energioilla aiheuttama häiriö vaikuttaa suhteessa enemmän pienen Q :n siirtymissä. Jonkin verran myös ytimen järjestysluku vaikuttaa eroon, mutta ei niin paljon kuin Q .

Saadakseni kuitenkin tarkemmin selville, kuinka varjostus vaikuttaa edellisissä luvuissa esitettyihin tuloksiin, eli kiellettyjen ja sallittujen siirtymien välisiin suhteisiin, tilatiheyksien keskiarvoihin sekä β^+ :n ja EC:n välisiin osuuksiin, laskin miten nämä tulokset eroavat toisistaan tilanteissa, joissa varjostus on huomioitu ja tilanteissa, joissa ei ole. Itse katsoin parhaaksi määrittää näitä arvoja erottavat kertoimet. Esimerkiksi, suhdeluvulle $\frac{f_{Ku}}{f_0}$ saadaan relaatio seuraavasti:

$$\frac{f_{Ku}^{(SCR)}}{f_0^{(SCR)}} = \frac{f_{Ku}^{(SCR)}}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}} \frac{f_0^{(EI-SCR)}}{f_0^{(SCR)}} \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}}{f_0^{(EI-SCR)}}.$$

$\frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}}{f_{Ku}^{(SCR)}} \equiv SCRRATIO$ on siis suhdeluku, jota kuvassa 12 näkyvät arvot esittävät.

Kaikki $\frac{f_0^{(EI-SCR)}}{f_0^{(SCR)}} \equiv SCRRATIO f_0$ on puolestaan listattu kuvaan 13. Täten

$$\frac{f_{Ku}^{(SCR)}}{f_0^{(SCR)}} = \frac{SCRRATIO f_0}{SCRRATIO} \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}}{f_0^{(EI-SCR)}}.$$

Tilatiheyksien keskiarvoille vastaava relaatio on puolestaan

$$\frac{f_{Ku}^{(SCR)}}{Q} = \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}}{Q} \frac{f_{Ku}^{(SCR)}}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}} = \frac{1}{SCRRATIO} \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}}{Q}.$$

β^+ - ja EC-siirtymien välisiä suhteita varten taas

$$\begin{aligned} \frac{f_{Ku}^{(SCR)}(\beta^+)}{f_{Ku}^{(SCR)}(tot)} &= \frac{f_{Ku}^{(SCR)}(\beta^+)}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(\beta^+)} \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(tot)}{f_{Ku}^{(SCR)}(tot)} \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(\beta^+)}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(tot)} \\ &= \frac{SCRRATIO(tot)}{SCRRATIO(\beta^+)} \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(\beta^+)}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(tot)}. \end{aligned}$$

Relaatiot kaikille tapauksille on yhdistetty liitteeseen C. Relaatioissa ei kuitenkaan esiinny mitään uutta. Ne pysyvät 1:n lähetyvillä eniten ne heittelevät alhaisilla energioilla ja varsinkin β^+ -siirtymillä. Kiellettyyden arvolla ei näytä olevan mitään merkitystä varjostuksessa. Eniten vaikuttaa hajoamisenergian suuruus ja onko kyseessä β^+ - vai EC-siirtymä. Ytimen järjestysluvulla on myös vähän merkitystä.

5 Päätäntö

Kaiken kaikkiaan voidaan sanoa, että K -kertaisesti kielletyt uniikit β -siirtymät ilmenevät vasta, kun siirtymän hajoamisenergia on tarpeeksi suuri. Faasiavaruusintegraalin suuruus korreloi hajoamisvakion kanssa, joka puolestaan on kääntäen verrannollinen siirtymän puoliintumisaikaan. Luvussa 4.1 esitetty suhdeluku f_{Ku}/f_0 kertookin, milloin uniikkien β -siirtymien tilatiheys ohittaa vastaavan sallitun siirtymän tilatiheyden. Yleisesti voidaan todeta, että kaikissa β -siirtymän lajeissa kielletty uniikki siirtymä ohittaa tilatiheydessä sallitun siirtymän, kun hajoamisenergia, Q , on noin 2000–9500 kiloelektronivoltin välillä (kuva 2) riippuen ytimen järjestysluvusta sekä K :n suuruudesta. Eli β -siirtymissä, joilla $Q > 9500$ keV, ytimen tila muuttuu nopeammin kielletyn siirtymän kautta. Kun kyseessä on siirtymä, jonka Kiellettyyden aste määrää myös suhdeluvun kasvun. Uniikkien siirtymien tilatiheys kasvaa sitä nopeammin hajoamisenergian kasvaessa, mitä suurempi K on.

Kuten luvussa 4.2 tuli ilmi, β -siirtymän lopputilojen tiheys on keskimäärin isompi suurenergisemmissä siirtymissä. Myös kiellettyyden aste vaikuttaa keskimääräiseen tilatiheyteen. Matalilla energioilla tapahtuu enemmän niitä uniikkeja β -siirtymiä, joilla K on pienempi. Energiaa kasvatettaessa tilanne muuttuu lopulta päinvastaiseksi, ja korkeamman K :n siirtymät ohittavat esiintymistiheydessä alemman K :n siirtymät. Tämäkin havainto tukee sitä asiaa, että jos halutaan tutkia β -siirtymiä, joissa leptonit kuljettavat mahdollisimman paljon ratapyörimismäärää mukanaan, on syytä tutkia β -hajoamisia, joilla on mahdollisimman suuri hajoamisenergia.

Mitä tulee siirtymiin, jotka voivat tapahtua sekä β^+ -hajoamisen että elektronisieppauksen kautta, suuremmalla kiellettyyden asteella EC:n osuus näyttäisi olevan isompi. Tiedetään jo ennalta, että matala hajoamisenergia ja korkea ytimen järjestysluku suosivat elektronisieppausta enemmän kuin β^+ -hajoamista. Nämä ovat tärkeitä huomioita, kun halutaan kontrolloida sitä, kumman siirtymän kautta ytimen tilaa halutaan muuttaa.

Thomas-Fermi-varjostusefektin vaikutus faasiavaruusintegraaleihin on vähäistä. Ja K :n vaikutus varjostukseen on merkityksetöntä. Varjostuksen vaikutus näkyy lähinnä matalaenergisillä β -siirtymillä. Koska tutkimuksen pääpaino oli tutkia kiellettyyden asteen vaikutusta, luvun 4.4 tuloksia ei eritellä tässä luvussa sen tarkemmin.

Tässä tutkimuksessa esitetyt tulokset ovat kuitenkin vain pintaraapaisu aiheeseen K -kertaisesti kiellettyjen uniikkien β -siirtymien faasiavaruusintegraaleihin. Laskentadatasta, joka on lisätty liitteisiin, riittää varmasti tutkittavaa tulevaisuudessakin. Tässä tutkielmassa on tarkasteltu lähemmin vain muutamaa näkökulmaa aiheeseen,

ja koska aiheesta on ollut tähän mennessä hyvin vähän tutkimuksia, uusia merkittäviä havaintoja voi odottaa vielä löytymistään.

Lähteet

- [1] Kenneth S. Krane. *Introductory Nuclear Physics*. John Wiley and Sons, 1987.
- [2] Francis Halzen and Alan D. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley and Sons, 1984.
- [3] B.R. Martin and G. Shaw. *Particle Physics*. John Wiley and Sons, 1992.
- [4] Jouni Suhonen. *From Nucleons to Nucleus*. Springer, 2007.
- [5] Bernard L. Cohen. *Concepts of Nuclear Physics*. Tata McGraw-Hill, 1981.
- [6] Roger Bowley and Mariana Sánchez. *Introductory Statistical Mechanics*. Oxford:Clarendon Press, 2 edition, 1999.
- [7] Matti Manninen and Risto Nieminen. *Pintafysiikka*. Suomen Fyysikkoseura, 1988.
- [8] Harald Ibach and Hans Lüth. *Solid-State Physics*. Springer, 4 edition, 2009.
- [9] B. Pritychenko and A. Sonzogni. Q-value calculator (qcalc).
- [10] Joel Kostensalo and Jouni Suhonen. Spin-multipole nuclear matrix elements in the pnqrpa - implications for β and $\beta\beta$ half-lives. Technical report, Jyväskylän yliopisto, 2016.
- [11] John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, 2 edition, 1996.

A K -kertaisesti kiellettyjen uniikkien β -siirtymien faasiavaruusintegraalit

Virherajat:

Hajoamisenergiat epävarmuuksineen on otettu NNDC:n Q-laskurista [9]

Epävarmuudet kaikille faasiavaruusintegraaleille on laskettu seuraavasti:

$$f_{Ku} = f_{Ku}(Q)$$

$$f_{Ku,MAX} = f_{Ku}(Q + dQ)$$

$$f_{Ku,MIN} = f_{Ku}(Q - dQ)$$

$$d(f_{Ku}) = \max(f_{Ku,MAX} - f_{Ku}, f_{Ku} - f_{Ku,MIN})$$

$f_{Ku}(\text{tot}) = f_{Ku}(+) + f_{Ku}(\text{EC})$, joten virheen yleisen etenemislain [11] mukaan

$$\begin{aligned} d(f_{Ku}(\text{tot})) &= \sqrt{\left(\frac{\partial f_{Ku}(\text{tot})}{\partial f_{Ku}(+)} d(f_{Ku}(+))\right)^2 + \left(\frac{\partial f_{Ku}(\text{tot})}{\partial f_{Ku}(\text{EC})} d(f_{Ku}(\text{EC}))\right)^2} \\ &= \sqrt{(d(f_{Ku}(+)))^2 + (d(f_{Ku}(\text{EC})))^2} \end{aligned}$$

Kaikki $d(f_{Ku})$:t on pyöristetty 15 yksikön säännön mukaisesti [11]

2. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä

Siirtymä	Q (keV)	dQ (keV)	f_Ku (-)	d(f_Ku (-))	f_Ku (+)	d(f_Ku (+))	f_Ku (EC)	d(f_Ku (EC))	f_Ku (tot)	d(f_Ku (tot))
Tm-168 → Yb-168	268,09	1,91	7,14E-004	0,00003						
Sn-126 → Sb-126	378	30	2,09E-003	0,0013						
Mn-54 → Fe-54	697,34	1,1	3,86E-002	0,0005						
Nb-94 → Zr-94	901,69	2,18			0	0	0,0348658293	0,0006	3,49E-002	0,0006
La-138 → Ce-138	1046,8	10,2	2,21789861	0,2						
Mn-54 → Cr-54	1377,17	1,01			6,90E-005	1,40E-006	0,0911171233	0,0005	9,12E-002	0,0006
W-174 → Ta-174	1513,7	39,5			1,92E-004	0,00015	7,6762657241	2	7,6765	3
Te-116 → Sb-116	1552,7	28,4			5,46E-004	0,0003	2,2723226634	0,3	2,2729	0,4
Cr-56 → Mn-56	1629,6	1,92	16,2706852	0,15						
Tm-168 → Er-168	1677,36	1,89			1,80E-003	4,00E-005	10,9244605323	0,11	10,927	0,12
La-138 → Ba-138	1739,96	3,43			4,50E-003	0,0002	6,4356141812	0,09	6,4402	0,1
Ti-52 → V-52	1974,77	7,13	65,5508041	2						
Nb-94 → Mo-94	2043,64	1,81	160,323654	1,1						
Sn-108 → In-108	2050	9,84			7,65E-002	0,006	10,7994092666	0,4	10,875	0,5
Ce-130 → La-130	2204,5	38,1			0,193038881	0,06	29,6483138952	4	29,842	5
Te-114 → Sb-114	2607,1	35,5			2,06988907	0,4	54,1751347231	6	56,241	7

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_Ku (-)	d(f_Ku (-))	f_Ku (+)	d(f_Ku (+))	f_Ku (EC)	d(f_Ku (EC))	f_Ku (tot)	d(f_Ku (tot))
W-170 → Ta-170	2847,2	30,9			4,64044428	0,7	398,6575560406	30	403,31	40
Ho-168 → Er-168	2930	30	6797,40576	600						
Sn-132 → Sb-132	3091,66	3,96	5441,50293	60						
Sm-138 → Pm-138	3442,7	30,2			51,5917397	6	593,6083481914	50	645,19	60
Mn-56 → Fe-56	3695,577	0,209	10054,2139	5						
Ta-174 → Hf-174	4105,9	28,1			322,548706	30	3537,528928224	200	3859,9	300
Sb-116 → Sn-116	4704,34	5,17			1821,41821	30	1800,943134442	13	3622,2	40
In-108 → Cd-108	5132,61	8,58			4651,0332	90	2618,183008219	40	7269,5	100
La-130 → Ba-130	5634,4	26,1			10767,5371	600	8334,892445316	300	19103	700
Sb-114 → Sn-114	6061,7	21,8			24526,3223	900	8336,811846196	200	32863	1000
Ta-170 → Hf-170	6116,2	39,5			20280,0879	1400	40262,43159765	2000	60540	3000
Mn-58 → Fe-58	6326,91	2,75	846931,312	4000						
Sb-112 → Sn-112	7057	17,8			111104,406	3000	20883,3419594	400	1,32E+005	4000
Pm-138 → Nd-138	7077,8	28,8			99355,9688	5000	43913,69690244	1200	1,43E+005	6000
Sb-110 → Sn-110	8392,3	15			601319	11000	59415,53335422	700	6,61E+005	12000

3. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_Ku (-)	d(f_Ku (-))	f_Ku (+)	d(f_Ku (+))	f_Ku (EC)	d(f_Ku (EC))	f_Ku (tot)	d(f_Ku (tot))
Hf-172 → Lu-172	335,9	24,6			0	0	1,25E-006	0,000002	1,25147E-006	0,000002
Zr-88 → Y-88	670,42	5,74			0	0	0,0001692388	2,00E-005	0,000169246	2,00E-005
Gd-146 → Eu-146	1031,89	7,08			2,99E-018	0	0,0282618118	0,003	0,0282637	0,003
Ir- 192 → Os-192	1046,3	2,4			5,65E-018	1,30E-017	0,0595525003	0,0013	0,0595589	0,0013
Zr-86 → Y-86	1314,5	14,6			1,61E-007	1,00E-007	0,0422765949	0,005	0,0422805	0,005
Ir- 192 → Pt-192	1454,53	2,35	7,3420950071	0,12						
Zn-74 → Ga-74	2292,91	3,91	85,526362194	2						
Mo-90 → Nb-90	2489,34	3,37			0,2021342931	0,005	8,8544175855	0,11	9,0565	0,12
Lu-172 → Yb-172	2518,04	2,37			0,1459116606	0,003	72,0443620415	0,7	72,194	0,8
Kr-74 → Br-74	2956,42	6,17			3,1277353603	0,11	20,758692705	0,4	23,887	0,5
Tm-174 → Yb-174	3080	44,7	5584,7019474	1000						
Mo-88 → Nb-88	3489,4	56,9			29,423884017	8	135,1450054118	30	164,56	40
Y-88 → Sr-88	3622,6	1,5			51,951728301	0,4	140,2167833706	0,5	192,18	0,7
Eu-146 → Sm-146	3878,79	5,87			88,369012114	2	1494,169957407	30	1582,5	40
Kr-90 → Rb-90	4405,48	6,78	60687,605188	1000						
Y-86 → Sr-86	5240	14,1			6429,8375411	300	2728,34948479	70	9158,6	400
Ga-74 → Ge-74	5372,83	2,99	387257,64492	3000						
Nb-90 → Zr-90	6111,34	3,37			41879,356512	300	11220,18454302	60	53096	400
Rb-90 → Sr-90	6584,19	6,61	3682985,4234	50000						
Br-74 → Se-74	6924,95	5,84			213353,61214	3000	17530,72995971	130	230863	4000
Nb-88 → Zr-88	7452,3	56,9			463126,89249	50000	55195,03333867	4000	518359	60000
Tb-146 → Gd-146	8322,1	44,7			1180592,4458	90000	821107,4640851	40000	2001670	100000

4. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_Ku (-)	d(f_Ku (-))	f_Ku (+)	d(f_Ku (+))	f_Ku (EC)	d(f_Ku (EC))	f_Ku (tot)	d(f_Ku (tot))
Cs-136 → Xe-136	90,24	1,88			0	0	4,82E-017	3,00E-017	4,82E-017	3,00E-017
Zr-96 → Nb-96	162,22	3,76	2,34E-010	5,00E-011						
Fe-60 → Co-60	237,35	3,41	2,75E-009	4,00E-010						
Er-160 → Ho-160	317,2	28,6			0	0	2,07E-009	7,00E-009	2,07E-009	7,00E-009
Sn-126 → Sb-126	378	30	4,32E-007	5,00E-007						
Co-58 → Ni-58	381,6	1,11	1,84E-007	5,00E-009						
I-130 → Te-130	416,79	3,17			0	0	4,34E-008	5,00E-009	4,33E-008	5,00E-009
Er-158 → Ho-158	882,6	37,1			0	0	0,0002843151	0,0003	2,84E-004	0,0003
La-138 → Ce-138	1046,8	10,2	9,54E-003	0,001						
Cd-104 → Ag-104	1148,09	4,54			4,63E-013	2,00E-013	0,0015201975	8,00E-005	1,52E-003	8,00E-005
Po-208 → Bi-208	1400,56	2,4			5,41E-009	4,00E-010	0,0820540459	0,002	8,21E-002	0,002
La-138 → Ba-138	1739,96	3,43			6,80E-006	4,00E-007	0,1956590768	0,005	0,19567	0,005
Co-58 → Fe-58	2307,91	1,14			6,41E-003	7,00E-005	0,2711377576	0,002	0,27755	0,003
Rn-210 → At-210	2367,12	8,91			3,40E-003	0,0003	24,1991437834	1,2	2,42E+001	1,3
Cs-136 → Ba-136	2548,22	1,86	130,55637	1,1						
Cd-102 → Ag-102	2587	8			3,54E-002	0,003	6,026289623	0,2	6,0616	0,3
Po-202 → Bi-202	2816,6	21,3			8,99E-002	0,013	134,2146737383	13	134,29	14
Co-60 → Ni-60	2822,813	0,212	171,05685	0,15						
Bi-208 → Pb-208	2878,36	2,01			0,133751571	0,002	158,2705093431	1,5	158,4	2
I-130 → Xe-130	2944,31	3,17	630,61151	5,00E-007						
Ho-160 → Dy-160	3290	15			1,68504941	0,14	248,4276893697	20	250,13	30
Rn-206 → At-206	3313,6	21,1			1,4507618	0,2	808,7233825288	60	810,1	70
Rn-204 → At-204	3892,5	26,6			20,0968895	3	4270,7091944075	500	4290,7	600
At-210 → Po-210	3981,04	7,61			28,9986744	0,9	5053,5899475317	110	5082,6	120
Ho-158 → Dy-158	4219,8	27			92,340263	10	3133,2857243156	300	3225,7	400
Ag-104 → Pd-104	4278,65	4			158,835678	3	895,9834752883	11	1054,7	12
Tl-208 → Pb-208	4998,88	1,72	817505,25	4000						
Bi-202 → Pb-202	5199,4	15,9			1782,20142	90	69454,4377583403	3000	71233,9	4000
Co-62 → Ni-62	5322	18,6	297021,91	13000						
Ag-102 → Pd-102	5684,46	8,59			11346,9531	300	15642,277998091	300	26989	500
At-206 → Po-206	5759,4	15,6			7890,15576	400	222177,46129152	7000	2,30E+005	8000
Rh-96 → Ru-96	6392,7	10			64730,136	1500	43361,0709449186	800	1,08E+005	2000
At-204 → Po-204	6465,4	24,9			42262,5391	3000	722437,032436357	40000	7,65E+005	50000
Sc-50 → Ti-50	6883,2	15	5690772	200000						
Mn-50 → Cr-50	7634,477	0,067			1186536,25	150	34111,4358094871	8	1,22E+006	200
Pm-136 → Nd-136	8018,8	72,3			1246904	200000	1390272,71648398	140000	2,64E+006	300000

5. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_Ku (-)	d(f_Ku (-))	f_Ku (+)	d(f_Ku (+))	f_Ku (EC)	d(f_Ku (EC))	f_Ku (tot)	d(f_Ku (tot))
Rb-84 → Sr-84	890,59	2,34	2,64E-005	9,00E-007						
Hf-168 → Lu-168	1706,8	48,2			6,17E-008	8,00E-008	0,032099628	0,02	3,21E-002	0,02
Rb-86 → Sr-86	1776,19	1,08	0,118085317	0,001						
Se-84 → Br-84	1835,4	25,8	0,162846357	0,04						
Hf-166 → Lu-166	2162	40,9			3,05E-005	2,00E-005	0,616935839	0,2	0,61697	0,3
Rb-84 → Kr-84	2680,38	2,19			6,99E-003	0,00012	0,7761684761	0,0089876074	0,7831551393	0,009
Nd-134 → Pr-134	2881,6	23,5			1,94E-002	0,004	10,5147753901	1,2829966404	10,5342179074	1,3
Xe-138 → Cs-138	2914,82	9,58	124,956619	6						
Lu-168 → Yb-168	4514,1	39,2			72,7733231	12	4984,2520940426	700	5056,5	800
Br-84 → Kr-84	4656,3	25,7	38744,0586	6000						
La-132 → Ba-132	4711,4	36,4			193,495789	30	3397,8171182708	414,5963927722	3591,3129072708	500
Te-136 → I-136	5119,7	14,2	238447,328	10000						
Pd-120 → Ag-120	5371,29	5,03	384989,5	6000						
Cs-138 → Ba-136	5374,81	9,16	513398,031	13000						
Lu-166 → Yb-166	5574,3	30,7			2798,427	300	65162,8394060843	5000	67961,4	6000
Pr-134 → Ce-134	6304	28,8			26755,4922	3000	132647,784274652	10000	159403,276474652	11000
I-136 → Xe-136	6883,7	14,2	15149760	500000						
Ag-120 → Cd-120	8305,85	5,82	178971280	2000000						

6. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_Ku (-)	d(f_Ku (-))	f_Ku (+)	d(f_Ku (+))	f_Ku (EC)	d(f_Ku (EC))	f_Ku (tot)	d(f_Ku (tot))
Tc-96 → Ru-96	258,74	5,15	4,36E-013	1,10E-013						
Nb-92 → Mo-92	354,08	2,49	1,26E-011	1,10E-012						
Sn-110 → In-110	628,8	18			0	0	9,28E-010	6,00E-010	9,28E-020	6,00E-010
Ru-94 → Tc-94	1573,5	5,16			1,78E-010	3,00E-011	0,0003778331	3,00E-005	3,78E-004	3,00E-005
Nb-92 → Zr-92	2005,89	1,79			3,58E-007	9,00E-009	0,0094058923	0,00014	9,41E-003	0,00014
Tc-96 → Mo-96	2973,24	5,14			5,35E-003	0,0003	2,8902805478	0,08	2,8956	0,09
In-110 → Cd-110	3878	11,5			1,41396749	0,09	195,7492018787	10	197,15	11
Po-198 → Bi-198	3896,6	32,9			0,865498662	0,2	1837,3842952835	300	1838,2	400
Pb-190 → Tl-190	3963	52			1,26572573	0,4	2105,2321804752	500	2106,5	600
Tc-94 → Mo-94	4255,75	4,07			10,6054678	0,3	454,7785786437	7	465,34	8
Bi-198 → Pb-198	6680,6	31,5			35837,1992	4000	3863669,77054069	300000	3,90E+006	4,00E+005
Tl-190 → Hg-190	6991	53			86327,8047	14000	6558431,69806727	900000	6,65E+006	1000000
Co-54 → Fe-54	8244,547	0,089			4573799	1000	1007395,48481125	300	5,58E+006	1100
Ni-54 → Co-54	8786,4	50			14379305	2000000	2773320,10465184	300000	1,72E+007	3,00E+006

7. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_Ku (-)	d(f_Ku (-))	f_Ku (+)	d(f_Ku (+))	f_Ku (EC)	d(f_Ku (EC))	f_Ku (tot)	d(f_Ku (tot))
Cs-136 → Xe-136	90,24	1,88			0	0	4,275628861516E-027	4,00E-027	4,27562886152E-027	4,00E-027
Sn-126 → Sb-126	378	30	3,67E-011	3,00E-011						
In-116 → Cd-116	462,81	0,272			0	0	5,754399373372E-012	6,00E-014	5,75439937337E-012	6,00E-014
Sb-124 → Sn-124	613,23	2,13			0	0	7,603262769402E-010	5,00E-011	7,60326276940E-010	5,00E-011
Sb-120 → Te-120	950,2	7,82	3,60E-006	9,00E-007						
Cs-134 → Xe-134	1233,149	0,842			5,14E-016	3,00E-017	0,000112176	1,00E-005	0,000112176	1,00E-005
Sn-128 → Sb-128	1268,3	13,8	2,51E-004	5,00E-005						
Te-116 → Sb-116	1552,7	28,4			7,57E-011	8,00E-011	0,0042442406	0,002	0,0042442407	0,002
Sb-122 → Sn-122	1607,92	3,54			2,94E-010	3,00E-011	0,0070501767	0,0003	0,007050177	0,0003
Cd-120 → In-120	1771,2	40,2	4,39E-002	0,02						
Cs-136 → Ba-136	2548,22	1,86	22,3402805	0,3						
Sb-120 → Sn-120	2680,61	7,14			1,15E-003	9,00E-005	29,1608379852	1,3	29,1619835462	1,4
Sn-132 → Sb-132	3091,66	3,96	491,968231	11						
In-116 → Sn-116	3276,249	0,24	1283,95813	2						
I-134 → Xe-134	4065,2	5,51	61611,7227	1500						
Sb-128 → Te-128	4363,4	19,1	196663	20000						
Sb-116 → Sn-116	4704,34	5,17			675,410461	20	260135,725665314	5000	260811,136126313	6000
In-122 → Sn-122	6368,6	50	144438976	3,00E+007						

B Sallittujen β -siirtymien faasiavaruusintegraalit

Virherajat:

Hajoamisenergiat epävarmuuksineen on otettu NNDC:n Q-laskurista [9]

Epävarmuudet kaikille faasiavaruusintegraaleille on laskettu seuraavasti:

$$f_0 = f_0(Q)$$

$$f_{0,MAX} = f_0(Q + dQ)$$

$$f_{0,MIN} = f_0(Q - dQ)$$

$$d(f_0) = \max(f_{0,MAX} - f_0, f_0 - f_{0,MIN})$$

$f_0(\text{tot}) = f_0(+)$ + $f_0(\text{EC})$, joten virheen yleisen etenemislain [11] mukaan

$$\begin{aligned} d(f_0(\text{tot})) &= \sqrt{\left(\frac{\partial f_0(\text{tot})}{\partial f_0(+)} d(f_0(+))\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0(\text{tot})}{\partial f_0(\text{EC})} d(f_0(\text{EC}))\right)^2} \\ &= \sqrt{(d(f_0(+)))^2 + (d(f_0(\text{EC})))^2} \end{aligned}$$

Kaikki $d(f_0)$:t on pyöristetty 15 yksikön säännön mukaisesti [11]

2. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä vastaavat sallitut siirtymät

Siirtymä	Q (keV)	dQ (keV)	f ₀ (-)	d(f ₀ (-))	f ₀ (+)	d(f ₀ (+))	f ₀ (EC)	d(f ₀ (EC))	f ₀ (tot)	d(f ₀ (tot))
Tm-168 → Yb-168	268,09	1,91	0,916831374	0,03						
Sn-126 → Sb-126	378	30	1,04129088	0,4						
Mn-54 → Fe-54	697,34	1,1	2,83129334	0,02						
Nb-94 → Zr-94	901,69	2,18			0	0	0,8989466121	0,007	0,8989466121	0,007
La-138 → Ce-138	1046,8	10,2	50,6816025	2						
Mn-54 → Cr-54	1377,17	1,01			2,98E-002	0,0004	0,3984464851	0,0007	0,428269304	0,0009
W-174 → Ta-174	1513,7	39,5			4,18E-002	0,02	27,944735286	2	27,986534604	3
Te-116 → Sb-116	1552,7	28,4			8,38E-002	0,03	6,6267410469	0,4	6,7105192122	0,5
Cr-56 → Mn-56	1629,6	1,92	72,1842804	0,4						
Tm-168 → Er-168	1677,36	1,89			0,173014194	0,003	25,0784101003	0,07	25,2514242943	0,08
La-138 → Ba-138	1739,96	3,43			0,304210663	0,007	12,000518202	0,06	12,304728865	0,07
Ti-52 → V-52	1974,77	7,13	148,757858	3						
Nb-94 → Mo-94	2043,64	1,81	342,565887	1,3						
Sn-108 → In-108	2050	9,84			1,68116164	0,08	10,0554150186	0,12	11,7365766586	0,15
Ce-130 → La-130	2204,5	38,1			2,85688233	0,5	21,0329408264	1	23,8898231564	1,2
Te-114 → Sb-114	2607,1	35,5			11,2041759	1,2	19,0853443423	0,6	30,2895202423	1,4

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_0 (-)	d(f_0 (-))	f_0 (+)	d(f_0 (+))	f_0 (EC)	d(f_0 (EC))	f_0 (tot)	d(f_0 (tot))	
W-170 → Ta-170	2847,2	30,9			18,1008358		1,5	104,447969119	3	122,5488049193	4
Ho-168 → Er-168	2930	30	4454,42627	200							
Sn-132 → Sb-132	3091,66	3,96	2725,11548	15							
Sm-138 → Pm-138	3442,7	30,2			67,9388275		4	69,167168929	1,3	137,105996429	5
Mn-56 → Fe-56	3695,577	0,209	2449,16113	0,7							
Ta-174 → Hf-174	4105,9	28,1			188,036057		8	206,300366731	4	394,3364237311	9
Sb-116 → Sn-116	4704,34	5,17			491,675568		4	58,1969198982	0,14	549,8724878982	5
In-108 → Cd-108	5132,61	8,58			829,042725		8	59,4292158616	0,3	888,4719408616	9
La-130 → Ba-130	5634,4	26,1			1286,75403		40	131,129377644	2	1417,883407644	50
Sb-114 → Sn-114	6061,7	21,8			2053,3479		50	97,0733461154	0,9	2150,421246115	60
Ta-170 → Hf-170	6116,2	39,5			1778,84375		70	464,836261859	7	2243,680011859	80
Mn-58 → Fe-58	6326,91	2,75	28051,5332	60							
Sb-112 → Sn-112	7057	17,8			4701,10352		70	131,886395803	1	4832,989915803	80
Pm-138 → Nd-138	7077,8	28,8			4284,56689		100	276,757883063	3	4561,324773063	110
Sb-110 → Sn-110	8392,3	15			11849,1836		120	187,025144947	0,9	12036,20874495	130

3. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä vastaavat sallitut siirtymät

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_0 (-)	d(f_0 (-))	f_0 (+)	d(f_0 (+))	f_0 (EC)	d(f_0 (EC))	f_0 (tot)	d(f_0 (tot))	
Hf-172 → Lu-172	335,9	24,6			0		0,8018589851	0,2	0,8018589851	0,2	
Zr-88 → Y-88	670,42	5,74			0		0,4480742639	0,009	0,4480742639	0,009	
Gd-146 → Eu-146	1031,89	7,08			7,10E-011	0,00E+000	6,5501312142	0,11	6,5501312143	0,11	
Ir- 192 → Os-192	1046,3	2,4			7,58E-011	1,10E-011	15,1286438819	0,11	15,128643882	0,11	
Zr-86 → Y-86	1314,5	14,6			7,58E-003	0,002	1,7823787674	0,005	1,7899574678	0,006	
Ir- 192 → Pt-192	1454,53	2,35	466,150635	3							
Zn-74 → Ga-74	2292,91	3,91	366,480103	3							
Mo-90 → Nb-90	2489,34	3,37			9,0093708		0,1	7,7524683165	0,03	16,7618391165	0,11
Lu-172 → Yb-172	2518,04	2,37			7,45424986		0,06	66,3590255506	0,14	73,8132754106	0,2
Kr-74 → Br-74	2956,42	6,17			33,2228279		0,5	6,3298001747	0,03	39,5526280747	0,6
Tm-174 → Yb-174	3080	44,7	5982,38281	400							
Mo-88 → Nb-88	3489,4	56,9			90,1905975		9	15,3320419903	0,6	105,5226394904	10
Y-88 → Sr-88	3622,6	1,5			118,403023		0,4	12,6153702151	0,012	131,0183932151	0,5
Eu-146 → Sm-146	3878,79	5,87			141,207214		1,4	94,1672743396	0,4	235,3744883396	1,5
Kr-90 → Rb-90	4405,48	6,78	7671,21436	60							
Y-86 → Sr-86	5240	14,1			1,06E+003		20	26,5094062109	0,2	1082,239626211	30
Ga-74 → Ge-74	5372,83	2,99	15944,4629	50							
Nb-90 → Zr-90	6111,34	3,37			2431,97168		8	43,2513831035	0,05	2475,223063104	9
Rb-90 → Sr-90	6584,19	6,61	48940,3203	300							
Br-74 → Se-74	6924,95	5,84			5266,64502		30	31,6664952749	0,06	5298,311515275	40
Nb-88 → Zr-88	7452,3	56,9			7179,37402		300	64,4614395604	1,1	7243,83545956	400
Tb-146 → Gd-146	8322,1	44,7			9684,27734		300	507,107460641	6	10191,38480064	400

4. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä vastaavat sallitut siirtymät

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_0 (-)	d(f_0 (-))	f_0 (+)	d(f_0 (+))	f_0 (EC)	d(f_0 (EC))	f_0 (tot)	d(f_0 (tot))
Cs-136 → Xe-136	90,24	1,88			0	0	0,008048223	0,0008	0,008048223	0,0008
Zr-96 → Nb-96	162,22	3,76	4,19E-002	0,004						
Fe-60 → Co-60	237,35	3,41	7,17E-002	0,004						
Er-160 → Ho-160	317,2	28,6			0	0	0,5675446054	0,2	0,5675446054	0,2
Sn-126 → Sb-126	378	30	1,04129088	0,4						
Co-58 → Ni-58	381,6	1,11	0,367825657	0,004						
I-130 → Te-130	416,79	3,17			0	0	0,440991278	0,0009	0,440991278	0,0009
Er-158 → Ho-158	882,6	37,1			0	0	6,0510396682	0,8	6,0510396682	0,8
La-138 → Ce-138	1046,8	10,2	50,6816025	2						
Cd-104 → Ag-104	1148,09	4,54			9,08E-005	2,00E-005	2,628693795	0,03	2,6287845805	0,04
Po-208 → Bi-208	1400,56	2,4			1,01E-002	0,0004	43,5411604915	0,3	43,5512394507	0,4
La-138 → Ba-138	1739,96	3,43			0,304210663	0,007	12,000518202	0,06	12,304728865	0,07
Co-58 → Fe-58	2307,91	1,14			6,51852226	0,03	1,4480714796	0,002	7,9665937396	0,04
Rn-210 → At-210	2367,12	8,91			4,50792122	0,14	150,868995925	1,4	155,376917145	1,5
Cs-136 → Ba-136	2548,22	1,86	1491,08875	5						
Cd-102 → Ag-102	2587	8			11,0864372	0,3	13,794310582	0,1	24,880747782	0,4
Po-202 → Bi-202	2816,6	21,3			16,5344925	0,9	191,9552523761	4	208,4897448761	5
Co-60 → Ni-60	2822,813	0,212	803,575867	0,3						
Bi-208 → Pb-208	2878,36	2,01			19,1133518	0,1	187,4562824328	0,4	206,5696342328	0,5
I-130 → Xe-130	2944,31	3,17	2508,38281	12						
Ho-160 → Dy-160	3290	15			48,9833679	1,5	88,2063802137	1,1	137,1897481137	2
Rn-206 → At-206	3313,6	21,1			49,3419075	3	305,0703497823	5	354,4122572823	6
Rn-204 → At-204	3892,5	26,6			133,990097	6	426,0886835828	7	560,0787805828	10
At-210 → Po-210	3981,04	7,61			152,24585	2	416,2938547861	2	568,5397047861	3
Ho-158 → Dy-158	4219,8	27			227,915497	9	146,5885334671	3	374,5040304671	10
Ag-104 → Pd-104	4278,65	4			295,035461	2	35,0994248467	0,07	330,1348858467	3
Tl-208 → Pb-208	4998,88	1,72	77257,9766	120						
Bi-202 → Pb-202	5199,4	15,9			701,793213	13	635,038418504	5	1336,8316315041	14
Co-62 → Ni-62	5322	18,6	13473,1484	300						
Ag-102 → Pd-102	5684,46	8,59			1508,13745	13	62,2300285169	0,2	1570,3674785169	14
At-206 → Po-206	5759,4	15,6			1218,8429	20	889,4058875559	7	2108,2487875559	30
Rh-96 → Ru-96	6392,7	10			2959,79321	30	66,8805752685	0,3	3026,6737852685	40
At-204 → Po-204	6465,4	24,9			2253,74536	50	1127,197456176	11	3380,9428161755	60
Sc-50 → Ti-50	6883,2	15	36863,1641	400						
Mn-50 → Cr-50	7634,477	0,067			10532,2402	0,5	12,3822623096	0	10544,62246231	0,5
Pm-136 → Nd-136	8018,8	72,3			8304,30664	500	356,2049907308	7	8660,5116307309	600

5. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä vastaavat sallitut siirtymät

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_0 (-)	d(f_0 (-))	f_0 (+)	d(f_0 (+))	f_0 (EC)	d(f_0 (EC))	f_0 (tot)	d(f_0 (tot))
Rb-84 → Sr-84	890,59	2,34	11,4562683	0,12						
Hf-168 → Lu-168	1706,8	48,2			0,207840338	0,08	31,7029736695	3	31,9108140075	4
Rb-86 → Sr-86	1776,19	1,08	165,611969	0,5						
Se-84 → Br-84	1835,4	25,8	168,527847	10						
Hf-166 → Lu-166	2162	40,9			2,18483257	0,4	51,9397673507	3	54,1245999207	4
Rb-84 → Kr-84	2680,38	2,19			16,5692005	0,1	5,70597678	0,011	22,27517728	0,11
Nd-134 → Pr-134	2881,6	23,5			21,2126865	1,3	41,8600747955	0,8	63,0727612955	2
Xe-138 → Cs-138	2914,82	9,58	2498,15918	35						
Lu-168 → Yb-168	4514,1	39,2			330,752563	20	219,533094914	5	550,285657914	30
Br-84 → Kr-84	4656,3	25,7	9512,89551	500						
La-132 → Ba-132	4711,4	36,4			467,455261	30	91,3061435293	1,5	558,7614045293	40
Te-136 → I-136	5119,7	14,2	26300,5586	400						
Pd-120 → Ag-120	5371,29	5,03	26251,125	120						
Cs-138 → Ba-136	5374,81	9,16	36552,3047	300						
Lu-166 → Yb-166	5574,3	30,7			1086,0719	40	337,2873086589	4	1423,3592086589	50
Pr-134 → Ce-134	6304	28,8			2340,37549	60	190,0640590865	2	2530,4395490865	70
I-136 → Xe-136	6883,7	14,2	102736,125	1000						
Ag-120 → Cd-120	8305,85	5,82	197149,797	700						

6. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä vastaavat sallitut siirtymät

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_0 (-)	d(f_0 (-))	f_0 (+)	d(f_0 (+))	f_0 (EC)	d(f_0 (EC))	f_0 (tot)	d(f_0 (tot))
Tc-96 → Ru-96	258,74	5,15	0,215524614	0,015						
Nb-92 → Mo-92	354,08	2,49	0,546763659	0,013						
Sn-110 → In-110	628,8	18			0		0,8718323905	0,07	0,8718323905	0,07
Ru-94 → Tc-94	1573,5	5,16			0,117402099	0,005	3,6282733594	0,03	3,7456754584	0,04
Nb-92 → Zr-92	2005,89	1,79			1,58401918	0,013	4,5835291744	0,009	6,1675483544	0,02
Tc-96 → Mo-96	2973,24	5,14			31,2598381	0,4	12,0781383511	0,05	43,3379764511	0,5
In-110 → Cd-110	3878	11,5			159,686981	3	33,7520378968	0,3	193,4390188968	4
Po-198 → Bi-198	3896,6	32,9			134,843445	7	376,5303604123	8	511,3738054123	11
Pb-190 → Tl-190	3963	52			149,63884	13	344,1913882684	10	493,8302282684	20
Tc-94 → Mo-94	4255,75	4,07			299,794617	2	24,8943046484	0,06	324,6889216484	3
Bi-198 → Pb-198	6680,6	31,5			2697,21436	70	1060,9624171365	13	3758,1767771365	80
Tl-190 → Hg-190	6991	53			3457,39795	140	1025,4157883552	20	4482,8137383552	150
Co-54 → Fe-54	8244,547	0,089			15393,8115	0,9	18,6165842461	0,003	15412,4280842461	1
Ni-54 → Co-54	8786,4	50			21281,1094	700	23,8781128291	0,3	21304,9875128291	800

7. kiellettyjä uniikkeja beetasiirtymiä vastaavat sallitut siirtymät

Siirtymä	Q(keV)	dQ(keV)	f_0 (-)	d(f_0 (-))	f_0 (+)	d(f_0 (+))	f_0 (EC)	d(f_0 (EC))	f_0 (tot)	d(f_0 (tot))	
Cs-136 → Xe-136	90,24	1,88				0	0	0,008048223	0,0008	0,008048223	0,0008
Sn-126 → Sb-126	378	30	1,04129088	0,4							
In-116 → Cd-116	462,81	0,272				0	0	0,4193339258	0,0006	0,4193339258	0,0006
Sb-124 → Sn-124	613,23	2,13				0	0	0,8848517212	0,009	0,8848517212	0,009
Sb-120 → Te-120	950,2	7,82	26,9041557	2							
Cs-134 → Xe-134	1233,149	0,842			9,45E-004	0,00002	5,1104600779	0,009	5,1114049341	0,01	
Sn-128 → Sb-128	1268,3	13,8	75,2505112	7							
Te-116 → Sb-116	1552,7	28,4			8,38E-002	0,03	6,6267410469	0,4	6,7105192122	0,5	
Sb-122 → Sn-122	1607,92	3,54			0,133359164	0,004	6,5779413966	0,04	6,7113005606	0,05	
Cd-120 → In-120	1771,2	40,2	254,044617	50							
Cs-136 → Ba-136	2548,22	1,86	1491,08875	9							
Sb-120 → Sn-120	2680,61	7,14			13,8006239	0,3	18,6423217825	0,13	32,4429456825	0,4	
Sn-132 → Sb-132	3091,66	3,96	2725,11548	15							
In-116 → Sn-116	3276,249	0,24	3373,87988	3							
I-134 → Xe-134	4065,2	5,51	9945,5459	120							
Sb-128 → Te-128	4363,4	19,1	12555,7764	500							
Sb-116 → Sn-116	4704,34	5,17			491,675568	4	58,1969198982	0,14	549,8724878982	5	
In-122 → Sn-122	6368,6	50	62909,1562	5000							

C Korjauskertoimet varjostus-arvoille

Kappaleessa 4.4 käytetyt relaatiot:

$$\frac{SCRRATIO f_0}{SCRRATIO} = \frac{f_0^{(EI-SCR)}}{f_0^{(SCR)}} \frac{f_{Ku}^{(SCR)}}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}}$$

$$\frac{1}{SCRRATIO} = \frac{f_{Ku}^{(SCR)}}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}}$$

$$\frac{SCRRATIO(tot)}{SCRRATIO(\beta^+)} = \frac{f_{Ku}^{(SCR)}(\beta^+)}{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(\beta^+)} \frac{f_{Ku}^{(EI-SCR)}(tot)}{f_{Ku}^{(SCR)}(tot)}$$

K=2

Siirtymä	Q (keV)	SCRRATIOf ₀ /SCRRATIO			1/SCRRATIO			SCRRATIO(tot)/SCRRATIO(β ⁺)
		tot	beta+	EC	tot	beta+	EC	
Nb-94 → Zr-94	901,69	1,0019111165		1,0018642977	0,9716733583		0,9716279525	1
Mn-54 → Cr-54	1377,17	0,9948329519	1,0217991618	1,0006449318	0,9557367271	1,0590276634	0,9556524995	1,040906898
W-174 → Ta-174	1513,7	1,002010138	1,0755238856	1,0022590812	0,9798968204	1,2270037702	0,9798960342	1,0225669858
Te-116 → Sb-116	1552,7	1,0001238536	1,0448239207	1,0013825059	0,9751009939	1,1217122225	0,9750794417	1,0256618134
Tm-168 → Er-168	1677,36	1,000999628	1,0561563232	1,0018437657	0,978776526	1,1531691301	0,9788136113	1,0227049806
La-138 → Ba-138	1739,96	0,9992793433	1,04026466	1,0014055637	0,9764363826	1,1047511621	0,9763600478	1,023394213
Sn-108 → In-108	2050	0,9926832334	1,0252383952	1,0010828007	0,9745597582	1,0612719197	0,9738677853	1,0185965766
Ce-130 → La-130	2204,5	0,9940350579	1,0278649244	1,0011519555	0,9766799278	1,0670608632	0,9761127824	1,0177695165
Te-114 → Sb-114	2607,1	0,9843794452	1,0185930914	1,0006910141	0,9767070302	1,0432500665	0,9740920524	1,0078553903
W-170 → Ta-170	2847,2	0,9936125999	1,0278012343	1,0013825058	0,9793196168	1,0640382369	0,9783629548	1,0145948094
Sm-138 → Pm-138	3442,7	0,9833781939	1,0166561436	1,0009214583	0,9812555434	1,0376493255	0,9763375666	1,0021631985
Ta-174 → Hf-174	4105,9	0,9850880615	1,0171447873	1,0009214583	0,9827758251	1,0380419632	0,977687359	1,0023527608
Sb-116 → Sn-116	4704,34	0,9900043481	1,008526328	1,0004606231	0,9964062878	1,0190465044	0,9734194059	0,9935749705
In-108 → Cd-108	5132,61	0,9941211048	1,0072612911	1,0004606231	1,0005086914	1,0161973645	0,9727472238	0,993615661
La-130 → Ba-130	5634,4	0,9927272043	1,0081764255	1,000460623	0,9992640196	1,0181071769	0,9749896377	0,9934583702
Sb-114 → Sn-114	6061,7	0,9976337628	1,0063787742	1,0004606231	1,0037728343	1,0141610428	0,9731952936	0,9938840032
Ta-170 → Hf-170	6116,2	0,9877128357	1,0108179105	1,0006910141	0,9928009491	1,0235765645	0,9772372209	0,9948749914
Sb-112 → Sn-112	7057	1,0002064073	1,005388268	1,0002302851	1,0058014828	1,0119324701	0,9731952936	0,994437197
Pm-138 → Nd-138	7077,8	0,9969202101	1,0070237088	1,0006910143	1,0032257907	1,0154314957	0,9756633694	0,9937146945
Sb-110 → Sn-110	8392,3	1,0016798856	1,0044607733	1,0004606231	1,0065543724	1,0098580154	0,9731952936	0,9951572544

K=3

Siirtymä	Q (keV)	SCRRATIO ₀ /SCRRATIO			1/SCRRATIO			SCRRATIO(tot)/SCRRATIO(β+)	
		tot	beta+	EC	tot	beta+	EC		
Hf-172 → Lu-172	335,9		1,0187967636		1,0188447218		1,0008743437	1,0009214583	1
Zr-88 → Y-88	670,42		1,003694431		1,0037372989		0,9731538707	0,9731954342	1
Gd-146 → Eu-146	1031,89		1,0042942717	1,8213768578	1,004361369	0,9810044686	32,8896249938	0,9810700097	33,5264782646
Ir-192 → Os-192	1046,3		1,0054334552	1,8115553211	1,0055415019	0,9839053726	44,9576016997	0,9840111058	45,693013729
Zr-86 → Y-86	1314,5		1,0012172778	1,0763012719	1,0018437645	0,9706482799	1,1753517189	0,97073346	1,2108935268
Mo-90 → Nb-90	2489,34		0,9759538369	1,0218641143	1,0010136509	0,9722709233	1,041327539	0,9706887582	1,071026104
Lu-172 → Yb-172	2518,04		0,9956839089	1,0464093731	1,0020744753	0,9789855233	1,0888690002	0,9788136113	1,1122421878
Kr-74 → Br-74	2956,42		0,970345155	1,0136691198	1,0008062296	0,9745820871	1,0254736192	0,9669410546	1,0522188256
Mo-88 → Nb-88	3489,4		0,9748888772	1,0138034082	1,0006910142	0,9802148495	1,0255198798	0,9702865248	1,0462194898
Y-88 → Sr-88	3622,6		0,9773080676	1,0118394788	1,0006910141	0,9830218996	1,0218294123	0,9687238673	1,0394777703
Eu-146 → Sm-146	3878,79		0,9791207701	1,02198694	1,0009214584	0,9801491323	1,0403624121	0,9765624025	1,0614327736
Y-86 → Sr-86	5240		0,9989934305	1,011700481	1,0006910142	1,0003341359	1,0139060931	0,9685008362	1,0135674238
Nb-90 → Zr-90	6111,34		0,9984417062	1,0067852377	1,0002302851	1,0033990221	1,0124248945	0,9693932693	1,0089952972
Br-74 → Se-74	6924,95		1,0016803367	1,0045995766	1,0004606231	1,0053145622	1,0084767435	0,9656060986	1,0031454646
Nb-88 → Zr-88	7452,3		1,0014940369	1,0055619896	1,0004606231	1,0056605438	1,0100633489	0,9693932693	1,0043780231
Tb-146 → Gd-146	8322,1		0,9944975203	1,0097333611	1,000460623	1,0004962064	1,0174296425	0,9761127824	1,0169250377

K=4

Siirtymä	Q (keV)	SCRRATIO ₀ /SCRRATIO			1/SCRRATIO			SCRRATIO(tot)/SCRRATIO(β+)	
		tot	beta+	EC	tot	beta+	EC		
Cs-136 → Xe-136	90,24		1,098630887		1,0992589273		1,0958517445	1,0964781961	1
Er-160 → Ho-160	317,2		1,0218940029		1,0242123305		1,0032654361	1,0055415018	1
I-130 → Te-130	416,79		1,0114903333		1,0115095793		0,9873968482	0,9874156358	1
Er-158 → Ho-158	882,6		1,0073585715		1,0071173418		0,9849270978	0,9846912398	1
Cd-104 → Ag-104	1148,09		1,0009374185	1,2635574398	1,0035522432	0,9735817283	1,6787779584	0,976112751	1,7243318251
Po-208 → Bi-208	1400,56		1,0061325943	1,2377436886	1,0062363453	0,9846489812	1,5265448426	0,9846910714	1,5503442056
La-138 → Ba-138	1739,96		0,9989691556	1,082743977	1,0028131031	0,9761332856	1,1498637923	0,9777323841	1,177978263
Co-58 → Fe-58	2307,91		0,9569285465	1,0170967581	1,0009214584	0,9583858764	1,0285520261	0,9585615401	1,0732128377
Rn-210 → At-210	2367,12		1,0031574094	1,09069166	1,0036909309	0,9833898025	1,1561525705	0,9815219132	1,1756808618
Cd-102 → Ag-102	2587		0,9789946101	1,0335700788	1,0015900465	0,9733403722	1,0560846284	0,973621151	1,0850106074
Po-202 → Bi-202	2816,6		1,0000765785	1,0685718396	1,002766923	0,9829473528	1,114588353	0,9803925446	1,1339247721
Bi-208 → Pb-208	2878,36		0,9949159869	1,0653859463	1,002766923	0,9785353535	1,1089533371	0,9803925446	1,1332787651
Ho-160 → Dy-160	3290		0,9858280584	1,0396821098	1,0018437657	0,9794906649	1,0652638666	0,9781377043	1,0875691876
Rn-206 → At-206	3313,6		0,9944165143	1,0574577102	1,0025360539	0,9801259104	1,0941848827	0,9801668269	1,1163717551
Rn-204 → At-204	3892,5		0,9916246647	1,0469793713	1,0023052381	0,9811918801	1,0759730057	0,9797155472	1,0965979514
At-210 → Po-210	3981,04		0,9889697701	1,0448853436	1,0020744753	0,9798134813	1,072508411	0,9797155472	1,0946046686
Ho-158 → Dy-158	4219,8		0,9783114523	1,0291268557	1,0016131093	0,9796323279	1,0472210622	0,977687359	1,068993981
Ag-104 → Pd-104	4278,65		0,9704591662	1,0168877774	1,0009214583	0,9765810183	1,0274979844	0,9725232662	1,0521379846
Bi-202 → Pb-202	5199,4		0,9825089305	1,031542426	1,0016131092	0,9812743651	1,0503206366	0,9788136113	1,0703638798
Ag-102 → Pd-102	5684,46		0,987079765	1,0121231408	1,0006910141	0,992997147	1,0196259205	0,9722993602	1,026816566
At-206 → Po-206	5759,4		0,9823282332	1,0291112277	1,0016131092	0,9823310803	1,046210236	0,9788136113	1,0650281325
Rh-96 → Ru-96	6392,7		0,993886974	1,0099545526	1,0006910141	0,9991581168	1,0160998457	0,9714042517	1,0169560039
At-204 → Po-204	6465,4		0,9801265014	1,0255732249	1,0011519556	0,982169247	1,0404555414	0,9783629548	1,0593444506
Mn-50 → Cr-50	7634,48		1,0056009551	1,0033839078	1,000230285	1,0076598533	1,0054940336	0,954992586	0,997850644
Pm-136 → Nd-136	8018,8		0,9913248979	1,0122317825	1,0006910142	0,9972244551	1,0195903213	0,97588805	1,0224281164

K=5

Siirtymä	Q (keV)	SCRRATIOf0/SCRRATIO			1/SCRRATIO			SCRRATIO(tot)/SCRRATIO(β^+)
		tot	beta+	EC	tot	beta+	EC	
Hf-168 → Lu-168	1706,8	1,0041868802	1,1527974619	1,0050785409	0,982090237	1,2607659094	0,9822001601	1,2837577057
Hf-166 → Lu-166	2162	1,0007124972	1,1004450776	1,0039220659	0,980847131	1,1606543515	0,9808441361	1,1833182918
Rb-84 → Kr-84	2680,38	0,9660917971	1,0272333208	1,0004468013	0,9679916561	1,0416594662	0,967328537	1,0761037656
Nd-134 → Pr-134	2881,6	0,9854013893	1,0502954428	1,0023052386	0,9776461405	1,0770889632	0,9774622645	1,1017165808
Lu-168 → Yb-168	4514,1	0,9781974628	1,036706773	1,0016131092	0,9793434585	1,0548549061	0,9781377043	1,0771041527
La-132 → Ba-132	4711,4	0,9733323852	1,0250996872	1,0013825059	0,9792130468	1,0376005237	0,97588805	1,0596269393
Lu-166 → Yb-166	5574,3	0,975911954	1,0287329752	1,0013825054	0,9805768947	1,0426653978	0,9779125053	1,063318342
Pr-134 → Ce-134	6304	0,9783037217	1,018940095	1,0011519555	0,9846676205	1,0281947794	0,97588805	1,0442049256

K=6

Siirtymä	Q (keV)	SCRRATIOf0/SCRRATIO			1/SCRRATIO			SCRRATIO(tot)/SCRRATIO(β^+)
		tot	beta+	EC	tot	beta+	EC	
Sn-110 → In-110	628,8	1,0103901412		1,0103901412	0,9842377088		0,9842377088	1
Ru-94 → Tc-94	1573,5	1,0008042136	1,1050422911	1,0035984882	0,9742346643	1,1654858471	0,9743163678	1,1963091541
Nb-92 → Zr-92	2005,89	0,9873524277	1,0589005902	1,0023975542	0,9717336301	1,0877341777	0,9716279479	1,119374841
Tc-96 → Mo-96	2973,24	0,9696288538	1,0351886511	1,0018437658	0,972008296	1,0506844988	0,9718517029	1,0809419046
In-110 → Cd-110	3878	0,9690333717	1,0304177225	1,0013825058	0,9744312028	1,0433549006	0,9738677853	1,0707322361
Po-198 → Bi-198	3896,6	0,9901412447	1,0680795305	1,0032288206	0,9806995207	1,0966724787	0,9806183144	1,1182553428
Pb-190 → Tl-190	3963	0,9885598742	1,0642318146	1,0032288206	0,980458132	1,0911690008	0,9803925446	1,1129174874
Tc-94 → Mo-94	4255,75	0,9666247485	1,0224053164	1,0011519556	0,9726553516	1,0318551814	0,9711806034	1,0608641382
Bi-198 → Pb-198	6680,6	0,9764011588	1,0355008342	1,0018437657	0,97961822	1,0495263787	0,9790390174	1,0713626567
Tl-190 → Hg-190	6991	0,9753466259	1,0325484645	1,0016131092	0,9796374563	1,0454090373	0,9788136113	1,0671386957
Co-54 → Fe-54	8244,55	0,9963901981	1,0052679661	1,000460623	0,9984943773	1,0074452331	0,9578555059	1,0089643528
Ni-54 → Co-54	8786,4	0,9974690217	1,0051895886	1,0004606231	0,9995467382	1,0073322737	0,9591797468	1,007789066

K=7

Siirtymä	Q (keV)	SCRRATIOf0/SCRRATIO			1/SCRRATIO			SCRRATIO(tot)/SCRRATIO(β^+)
		tot	beta+	EC	tot	beta+	EC	
Cs-136 → Xe-136	90,24	1,1805924494		1,1805924494	1,1776059736		1,1776059736	1
In-116 → Cd-116	462,81	1,016833861		1,016833861	0,9908319449		0,9908319449	1
Sb-124 → Sn-124	613,23	1,0127107032		1,0127107032	0,9869610187		0,9869610187	1
Cs-134 → Xe-134	1233,15	1,0066288018	1,3776577896	1,0066766611	0,9812959355	1,6882719644	0,9812959355	1,7204513983
Te-116 → Sb-116	1552,7	1,0037006112	1,1560941493	1,0049859726	0,9785882618	1,2411707963	0,9785882571	1,2683279012
Sb-122 → Sn-122	1607,92	1,0029583901	1,1394179603	1,004824001	0,9781377141	1,2129857846	0,9781377043	1,2400971429
Sb-120 → Sn-120	2680,61	0,9816164616	1,0594831024	1,002766923	0,9758922703	1,0833215	0,97588805	1,1100830829
Sb-116 → Sn-116	4704,34	0,9684496475	1,0300062643	1,0016131092	0,9747122021	1,040750503	0,9745407418	1,0677515894