Projektiivinen geometria

Jussi Hyvönen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Talvi 2017

Tiivistelmä: Jussi Hyvönen, *Projektiivinen geometria.* Matematiikan pro gradu -tutkielma, 32 sivua, Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos, talvi 2017.

Tässä tutkielmassa käsittelemme projektiivista geometriaa aksioomien ja mallien kautta. Keskitymme pääasiassa äärellisiin projektiivisiin geometrioihin ja niistä erityisesti tasogeometriaan. Tutkielmassa luomme kirjallisuuskatsauksen projektiivisen geometrian alkuvaiheiden kautta aksioomajärjestelmän luomiseen ja päätyen tutustumaan yksinkertaisimpiin malleihin projektiiviselta tasolta. Todistamme samalla myös projektiivisen geometrian peruslauseen ja tutustumme projektiivisen geometrian hyödyllisyyteen käsiteltäessä euklidisen geometrian tilanteita. Voimme nimittäin tulkita euklidisessa geometriassa vallitsevia lauseita projektiivisessa geometriassa ja tällöin projektiivisen geometrian ominaisuudet mahdollistavat todistusten huomattavan yksinkertaistamisen. Tutkielman viimeisessa kappaleessa otamme esimerkkeinä tästä käsittelyyn Desarguesin ja Pappusin lauseet.

Projektiivisen geometrian tutkimuksen voidaan katsoa alkaneen jo 1400-luvulla kuvataiteessa ilmenneiden ongelmien seurauksena. Kuvataiteilijat halusivat löytää yhä parempia keinoja taltioida maailmaa mahdollisimman realistisen näköisenä maalauskankaalle ja tässä huomattiin perspektiivisestä tarkastelusta olevan huomattavaa hyötyä. Ala on sen jälkeen kehittynyt sykäyksittäin, kunnes lopulta on voitu todeta kyseessä olevan täysin oma geometriansa toimivine aksioomajärjestelmineen.

Projektiivisen geometrian suurin ero euklidiseen geometriaan on paralleeliaksiooman puuttuminen. Näin ollen projektiivisessa geometriassa mitkä tahansa kaksi suoraa leikkaavat toisensa jossain pisteessä. Euklidisen geometrian yhdensuuntaisia suoria vastaavien suorien leikkauspiste sijaitsee äärettömyydessä ja siitä käytetään nimitystä ideaalipiste. Ideaalipisteitä ja ideaalipisteiden muodostamaa suoraa voidaan tutkia algebrallisesti yhdessä muiden pisteiden ja suorien kanssa käyttämällä hyväksi homogeenisiä koordinaatteja, joihin tutustumme myös tässä tutkielmassa.

Tämän tutkielman keskiössä ovat Rey Cassen [**Cas**] ja David Brannanin [**Bra**] teokset projektiivisesta geometriasta. Tutkielmassa esitetty projektiivisen geometrian aksioomajärjestelmä on Rey Cassen muotoilema. Myös hieman eri tavalla muotoiltuja, mutta yhtäpitäviä versioita on julkaistu.

Avainsanat: Projektiivinen geometria, tasogeometria, aksioomajärjestelmä, ideaalipiste, homogeeniset koordinaatit, kuntataso, Fanon-taso, projektiivinen kuvaus

Kiitokset

Haluan kiittää lopputyöni valmistumisen johdosta ystäviäni, sukulaisiani sekä tuttaviani, joihin minulla on ollut kunnia tutustua vuosien saatossa koulun, työn, jalkapallon, salibandyn ja muun vapaa-ajan kautta. Erityiskiitokset kuuluvat vanhemmilleni Eskolle ja Tiinalle, ukilleni Matille, veljilleni Ossille ja Mikalle, sekä elämänkumppanilleni Terhille.

Sisältö

LUKU 1

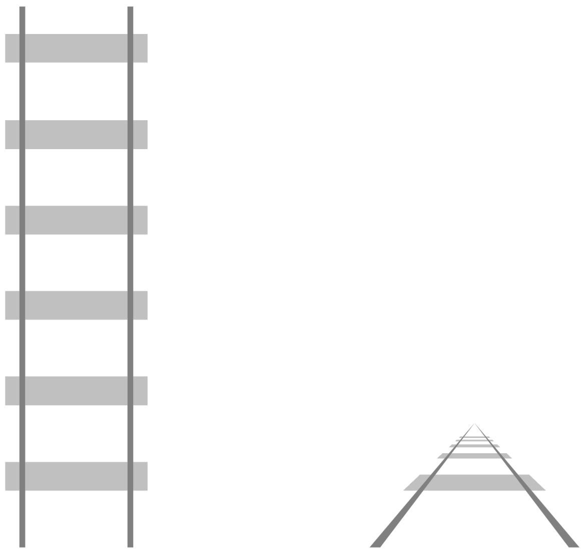
Johdanto

1. Mitä projektiivinen geometria on?

Projektiiviseen geometriaan tutustuessamme meidän tulee hylätä intuitiiviset ajatuksemme suorista ja tasoista. Projektiivisessa geometriassa ei esimerkiksi voi määrittää pisteiden välisiä etäisyyksiä tai suorien välisiä kulmia, kuten euklidisessa geometriassa. Kenties selkein ero tulee siinä, että projektiivisessa geometriassa kaikki suorat leikkaavat toisensa jossain pisteessä.

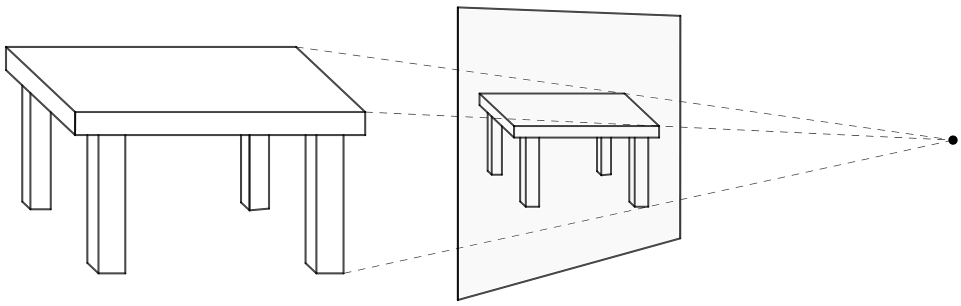
Tilannetta voi hahmotella esimerkiksi katsomalla pitkin rautatietä horisonttia kohti. Rautatien kiskot näyttävät lähenevän toisiaan ja syntyy vaikutelma, kuin ne leikkaisivat toisensa tarpeeksi kauas kulkiessa. Tiedämme kuitenkin, että ne pysyvät täsmälleen yhtä kaukana toisistaan ja näin ollen nämä kaksi kiskoa vastaavat euklidisen geometrian yhdensuuntaisia suoria. Projektiivisessa geometriassa taas todellisuus on se, että kiskot leikkaavat toisensa jossain kaukaisuudessa.

Tämä vaihtoehtoinen geometria on aivan yhtä lailla loogisesti johdonmukainen ja ristiriidaton kuin Eukleideen järjestelmäkin. Erotuksena siihen projektiivisessa geometriassa jokaisella yhdensuuntaisten suorien käyräparvella on tavanomaisen avaruuden pisteiden lisäksi yksi äärettömyydessä sijaitseva piste, ideaalipiste, jossa ne leikkaavat. Kun lisäämme euklidiseen tasoon kaikki tällaiset pisteet, saamme aikaan projektiivisen tason. Vastaavasti euklidinen avaruus voidaan täydentää ideaalipisteillä



Kuva 1. Junaradan kiskot eri näkökulmista

projektiiviseksi avaruudeksi. Mutta rajoittukaamme tässä työssä käsittelemään projektiivista tasoa.



Kuva 2. Pöydän projektio tasolle

2. Historiaa

[**Cox**, s. 3] [**Fis**, s. 27] Projektiivisen geometrian voidaan ajatella pohjautuvan alkujaan kuvataiteeseen. Kuvataiteilijat halusivat luoda kuvattavasta kohteestaan mahdollisimman totuudenmukaisen kuvan kaksiulotteiselle pinnalle. Jo 1400-luvulla italialainen arkkitehti Filippo Brunelleschi (1377-1446) pohti perspektiivejä geometrian näkökulmasta.

Saksalainen tähtitieteilijä Johann Kepler (1571-1630) myötävaikutti astronomian lisäksi paljon myös matematiikan kehittymiseen. Hän ehdotti aikoinaan, että euklidiseen tasoon voitasiin lisätä uusia pisteitä, pisteet äärettömyydessä, joissa yhdensuuntaiset suorat leikkaisivat. Ehdotus ei aluksi saanut yksikäsitteistä hyväksyntää, mutta pian se tuli johtamaan uudenlaisen geometrian syntyyn. Samoihin aikoihin ranskalainen arkkitehti Girard Desarques (1593-1661) tutki euklidista geometriaa ja myös hän teki vastaavan oletuksen kun Keplerkin.

Lopulta voitiin siirtyä puhumaan uudesta geometriasta, kun osoitettiin, että näillä uusilla pisteillä on aivan samat ominaisuudet kuin muillakin kyseisen geometrian pisteillä. Tässä tutkimuksessa oli suuressa roolissa saksalainen Karl von Staudt (1798-1867).

Projektiivisen geometrian algebrallista tarkastelua varten tarvittiin jokin keino, jolla äärettömyydessä sijaitsevat pisteet voitaisiin ilmaista yhtenevällä tavalla muiden pisteiden kanssa. Tätä varten saksalainen matemaatikko Felix Klein (1849-1925) otti projektiivisessa geometriassa vuonna 1871 käyttöön algebrallisen käsittelyn avuksi homogeeniset koordinaatit, mikä ratkaisi ongelman. Homogeeniset koordinaatit olivat olleet tiedossa jo aiemmin, sillä muun muassa Karl Feuerbach (1800-1834) ja August Möbius (1790-1868) käyttivät niitä jo vuonna 1827.

LUKU 2

Aksioomista

Geometrian määrittämiseksi tulee luoda aksioomajärjestelmä, josta kaikki kyseisen geometrian tulokset saadaan johdettua. Tämä pätee kaikissa geometrioissa, niin myös projektiivisessa geometriassa. Tutkikaamme aluksi euklidisen ja hyperbolisen geometrian aksioomia Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään muotoilemina [**Kur**] ja verrataan niitä Cassen [**Cas**, s. 29] julkaisemaan versioon projektiivisen geometrian aksioomista.

Euklidisen geometrian aksioomat pohjautuvat kreikkalaisen matemaatikon Eukleides Aleksandrialaisen noin vuonna 300 e.a.a. julkaisemaan teokseen Alkeet, jossa hän esittelee euklidisen tasogeometrian viisi perusaksioomaa. Neljä näistä hyväksyttiin matemaatikoiden keskuudessa, mutta viidettä, eli nykyistä paralleeliaksioomaa väitettiin pitkään, aina 1800-luvulle asti, seuraukseksi muista aksioomista. Lopulta sekin kuitenkin saatiin todistettua muista aksioomista riippumattomaksi.

Eukleideen aksioomajärjestelmän muotoilussa havaittiin olevan puutteita, sillä Eukleides piti joitain asioita itsestäänselvyytenä, mikä ei suinkaan aina pitänyt paikkaansa. Parannusehdotuksia Eukleideen alkuperäiseen aksioomajärjestelmään tehtiin reilusti. Nykyisin ehkäpä tunnetuin niistä on saksalaisen matemaatikon David Hilbertin vuonna 1902 esittelemä Hilbertin aksioomajärjestelmä.

1. Hilbertin aksioomat

Seuraaviin aksioomiin tarvitsemme peruskäsitteet piste, suora ja suoran kulkeminen pisteen kautta. Lisäksi käytämme käsitettä välissäolo, jota merkitään esimerkiksi seuraavasti: $A * B * C$, mikä tarkoittaa, että piste B on pisteiden A ja C välissä.

Esityksen lyhentämiseksi jätämme tässä yhteydessä määrittelemättä suuren joukon käsitteitä, kuten esimerkiksi puolisuoran, kolmion sekä kulman. Puuttuvien käsitteiden määritelmät löytyvät Kuritun, Hokkasen ja Kahanpään teoksesta [**Kur**].

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora, joka kulkee sekä pisteen P että pisteen Q kautta.
(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.
(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.
(H4) Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.
(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.
(H6) Jos A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin täsmälleen yksi seuraavista ehdoista on voimassa: $A * B * C$, $A * C * B$ tai $C * A * B$.

Seuraavassa aksioomassa käsitellään pisteiden sijaintia suoraan nähden. Merkintä $A\ell B$ tarkoittaa, että pisteet A ja B ovat eri puolilla suoraa ℓ ja merkintä $AB\ell$, että pisteet ovat samalla puolella suoraa ℓ.

(H7) Olkoot suora ℓ sekä A, B ja C pisteitä, joiden kautta suora ℓ ei kulje. Tällöin on voimassa:

(i) jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$

(ii) jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.

(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on mielivaltainen puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.

Seuraavissa aksioomissa merkitsemme yhtenevyyttä merkinnällä "$\cong$". Esimerkiksi jos janat AB ja CD ovat yhteneviä, voimme merkitä sen seuraavasti: $AB \cong CD$. Samaa merkintää käytämme myös kulmien yhtenevyyksiä merkitessä. Esimerkiksi jos kulmat $\angle ABC$ ja $\angle DEF$ ovat yhteneviä, voimme merkitä sitä näin: $\angle ABC \cong \angle DEF$.

(H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio, eli

(i) $AB \cong AB$ (refleksiivisyys).

(ii) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (symmetrisyys).

(iii) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (transitiivisuus).

(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

(H11) Olkoon $\angle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei sisälly suoraan $\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\angle ABC \cong \angle FDE$.

(H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

(H13) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\angle A \cong \angle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(PAR) (Paralleeliaksiooma) Jos ℓ on suora ja P piste, joka ei sisälly suoraan ℓ, niin pisteen P kautta kulkee korkeintaan yksi suoran ℓ kanssa yhdensuuntainen suora.

Lisäksi Euklidisen geometrian aksioomiin kuuluu joukko aksioomia, joilla taataan se, että tuloksena on tuttu geometrian mallimme. Ylläolevista aksioomista oleellisimmat ovat H1, H2, H3 ja PAR, sillä niillä on vastineensa projektiivisen geometrian vastaavissa.

2. Hyperbolisen geometrian aksioomat

Tarkastelkaamme vielä ennen projektiiviseen geometriaan siirtymistä, miten hyperbolinen geometria eroaa euklidisesta geometriasta. Hyperbolisessa geometriassa paralleeliaksiooman sijaan on voimassa:

(HYP) On olemassa suora ℓ ja piste P suoran ℓ ulkopuolella siten, että pisteen P kautta kulkee ainakin kaksi eri suoran ℓ suuntaista suoraa.

3. Projektiivisen geometrian aksioomat

Kaksiulotteista projektiivista avaruutta kutsutaan projektiiviseksi tasoksi. Tässä tapauksessa aksioomat voidaan määrittää seuraavasti.

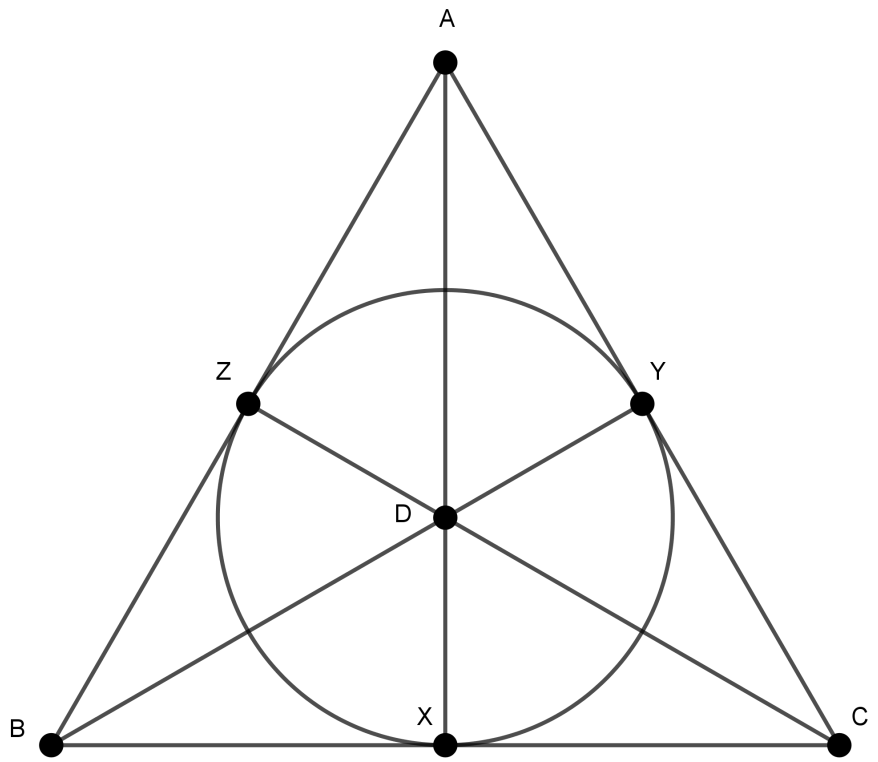
Määritelmä 2.1. Projektiivinen taso π koostuu joukosta P pisteitä ja joukosta L suoria. Joukon L alkiot ovat joukon P osajoukkoja. Projektiiviselle tasolle ovat voimassa seuraavat aksioomat.

(P1) Minkä tahansa kahden eri pisteen kautta kulkee yksikäsitteinen suora.
(P2) Mitkä tahansa kaksi eri suoraa leikkaavat yksikäsitteisessä pisteessä.
(P3) On olemassa ainakin kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla.
(P4) Jokaisella suoralla on ainakin kolme pistettä

.

4. Esimerkki äärellisestä projektiivisesta tasosta

Yksinkertaisin malli, joka toteuttaa projektiivisen tason aksioomat, on Fanon-taso. Fanon-tasolla on täsmälleen kolme pistettä jokaisella suoralla ja täsmälleen kolme suoraa kulkee kunkin tasolla olevan pisteen kautta. Yhteensä tasolla on seitsemän pistettä. Tutkikaamme Fanon-tasoa tarkemmin kappaleessa 6.



Kuva 1. Eräs Fanon-tason havainnollistus

LUKU 3

Laajennettu euklidinen taso

1. Johdattelua kuntatasoihin

[**Cas**, s. 17] Yhdensuuntaisuus on euklidisen tason ominaisuus. Muokataan seuraavaksi euklidista tasoa siten, että yhdensuuntaiset suorat leikkaavat toisensa. Tämän teorian kehittämiseksi on kätevää käyttää seuraavaa terminologiaa. Määritellään kolmikko $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ sellaiseksi, johon kuuluvat

- Joukko $\mathcal{P}$, jonka alkioita kutsutaan pisteiksi
- Joukko $\mathcal{L}$, joka koostuu joukon $\mathcal{P}$ alijoukoista ja jonka alkioita kutsutaan suoriksi
- Insidenssirelaatio $\mathcal{I}$, joka kertoo täsmällisesti, mitkä pisteet kuuluvat millekin suoralle.

Esimerkiksi euklidinen taso on kolmikko $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, missä

- $\mathcal{P} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{L} = \{[a, b, c] | a, b, c \in \mathbb{R},$ missä a ja b eivät molemmat ole nollia$\}$,
- $\mathcal{I}$: piste (x, y) kuuluu suoralle $[a, b, c]$, jos ja vain jos $ax + by + c = 0$.

Huomautus 3.1. Kun käytämme suorasta merkintää $[a, b, c]$, se tarkoittaa samaa suoraa kuin $[ta, tb, tc]$, missä $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

2. Laajennettu euklidinen taso

Määritelmä 3.2 (Laajennettu euklidinen taso). Reaalinen projektiivinen taso, jota kutsutaan myös nimellä laajennettu euklidinen taso, määritellään seuraavasti:

(1) Oletetaan euklidinen taso $\mathbb{R}^2$.
(2) Otetaan suora ℓ tasolta $\mathbb{R}^2$. Joukkoa, joka koostuu suorasta ℓ ja kaikista sen kanssa yhdensuuntaisista suorista, kutsutaan yhdensuuntaisten suorien suoraparveksi. Jokaiselle yhdensuuntaisten suorien suoraparvelle lisätään kullekin käsite P_∞, suoran äärettömyydessä sijaitseva piste, jota kutsutaan ideaalipisteeksi. Yhdensuuntaisten suorien suoraparven suorien sanotaan leikkaavan tässä pisteessä P_∞. Suoraa ℓ yhdessä sen ideaalipisteen kanssa kutsutaan laajennetuksi suoraksi, ja siitä käytetään merkintää ℓ^*.
(3) Kullakin yhdensuuntaisten suorien suoraparvella on oma ideaalipisteensä.
(4) Kaikkien ideaalipisteiden joukkoa kutsutaan suoraksi äärettömyydessä ja siitä käytetään merkintää ℓ_∞.

Näin ollen reaalinen projektiivinen taso on kolmikko $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, missä:

- Pisteet $\mathcal{P}$ koostuvat tason $\mathbb{R}^2$ pisteistä ja pisteistä P_∞ äärettömyydestä.
- Suorat $\mathcal{L}$ koostuvat laajennetuista suorista ja suorasta ℓ_∞.
- Insidenssirelaatio $\mathcal{I}$ on vastaava kuin euklidisella tasolla, eli

i) piste P, joka ei ole äärettömyydessä, kuuluu suoralle ℓ^*, jos ja vain jos piste P kuuluu suoralle ℓ.
ii) P_∞ kuuluu suoralle ℓ^*, jos ja vain jos P_∞ suoran ℓ määrittämän yhdensuuntaisten suorien suoraparven piste äärettömyydessä.
iii) Kaikki pisteet äärettömyydessä kuuluvat suoralle ℓ_∞.

LAUSE 3.3. *Reaalisella projektiivisella tasolla pätee*
(1) Kaksi eri pistettä kuuluvat yksikäsitteiselle suoralle.
(2) Kaksi eri suoraa leikkaavat yksikäsitteisessä pisteessä.

TODISTUS. Kuten määritelmässä 3.2, käytetään myös nyt laajennetusta suorasta $\ell \in \mathbb{R}^2$ merkintää ℓ^*.

(1) Olkoon A ja B kaksi erillistä pistettä reaalisella projektiivisella tasolla.
i) Jos A ja B ovat kaksi erillistä pistettä tasolla $\mathbb{R}^2$, niin $(\overleftrightarrow{AB})^*$ on yksikäsitteinen suora reaalisella projektiivisella tasolla, joka sisältää ne.
ii) Jos A ja B ovat kaksi erillistä pistettä äärettömyydessä, niin ℓ_∞ on yksikäsitteinen suora, joka sisältää ne.
iii) Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^2$ ja $B \in \ell_\infty$. Tällöin B on yksikäsitteisen yhdensuuntaisten suorien suoraparven ideaalipiste. Tällä suoraparvella on olemassa yksikäsitteinen suora ℓ, joka kulkee pisteen A kautta. Näin ollen ℓ^* on yksikäsitteinen reaalisella projektiivisella tasolla sijaitseva suora, joka sisältää pisteet A ja B.

(2) Meidän pitää tarkastella kolme tapausta.
i) Olkoon ℓ ja m kaksi erillistä ei-yhdensuuntaista suoraa tasolla $\mathbb{R}^2$. Tällöin ne leikkaavat yksikäsitteisessä pisteessä P tasolta $\mathbb{R}^2$. Näin ollen P on yksikäsitteinen suorien ℓ^* ja m^* leikkauspiste.
ii) Olkoon ℓ ja m kaksi erillistä yhdensuuntaista suoraa tasolla $\mathbb{R}^2$. Tällöin yhdensuuntaisten suorien suoraparvella, joka sisältää suorat ℓ ja m, on yksikäsitteinen piste P_∞ äärettömyydessä. Näin ollen P_∞ on yksikäsitteinen suorien ℓ^* ja m^* leikkauspiste.
iii) Suoran ℓ^* yksikäsitteinen piste äärettömyydessä on yksikäsitteinen suorien ℓ^* ja ℓ_∞ leikkauspiste.

$\square$

ESIMERKKI 3.4. Laajennettu euklidinen taso eli reaalinen projektiivinen taso on projektiivinen taso, sillä kaikki sen aksioomat toteutuvat. Kuitenkaan euklidinen taso ei ole projektiivinen taso, sillä aksiooma $P2$ ei toteudu millään yhdensuuntaisten suorien parilla.

LUKU 4

Esitietoja algebrasta ja lineaarialgebrasta

Seuraavat kappaleet sisältävät algebran ja lineaarialgebran oleellisimpia esitietoja projektiivisen geometrian kannalta. Määritelmät, lauseet sekä merkinnät on koostettu Deanin [**Dea**], Gilbertin [**Gil**] ja Cassen [**Cas**] teoksista.

1. Ryhmät

Määritelmä 4.1 (Ryhmä). Olkoon epätyhjä joukko G, jossa on määritelty laskutoimitus $+$. Joukko G on ryhmä, mikäli sillä on seuraavat ominaisuudet:

- G1 Laskutoimitus on suljettu, eli kaikilla $a, b \in G$ pätee $a + b \in G$.
- G2 Laskutoimitus on liitännäinen, eli kaikilla $a, b, c \in G$ pätee $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- G3 On olemassa neutraalialkio $e \in G$ siten, että kaikille $a \in G$ pätee $e + a = a + e = a$
- G4 Kaikilla $a \in G$ on olemassa jokin käänteisalkio $a^{-1} \in G$ siten, että $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$.

Ryhmästä voidaan käyttää myös merkintää $(G, +)$ tai $\langle G, +\rangle$.

Määritelmä 4.2 (Abelin ryhmä). Ryhmä G on Abelin ryhmä, mikäli se on lisäksi kommutatiivinen, eli kaikilla $a, b \in G$ pätee $a + b = b + a$.

Määritelmä 4.3 (Ryhmähomomorfismi). Olkoot $(G, \circ)$ ja $(\overline{G}, *)$ kaksi ryhmää. Kuvausta φ ryhmästä G ryhmään $\overline{G}$ kutsutaan homomorfismiksi, mikäli se toteuttaa yhtälön:

$$\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2)$$

kaikille kaksikoille (g_1, g_2) joukosta $G \times G$.

2. Renkaat

Määritelmä 4.4 (Rengas). Epätyhjä joukko $R = R(+, \cdot)$ on rengas varustettuna kahdella laskutoimituksella $+$ ja $\cdot$, mikäli sille pätevät seuraavat kohdat:

- R1 $(R, +)$ on Abelin ryhmä.
- R2 Laskutoimitus $\cdot$ on assosiatiivinen, eli liitännäinen.
- R3 Distributiivisuus pätee, eli kaikille kolmikoille lukuja (a, b, c) joukosta R pätee: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ja $(b + c) \cdot a = b \cdot d + c \cdot a$.

Määritelmä 4.5 (Kommutatiivinen rengas). Rengasta R kutsutaan kommutatiiviseksi, mikäli renkaan määritelmän lisäksi sille pätee: $a \cdot b = b \cdot a$ kaikille $a, b \in R$, eli se on kertolaskun suhteen kommutatiivinen.

MÄÄRITELMÄ 4.6 (Kokonaisalue). Jos $R(+,\cdot)$ on kommutatiivinen rengas, niin nollasta eroavaa alkiota $a \in R$ kutsutaan nollajakajaksi, mikäli ei ole olemassa nollasta eroavaa alkiota $b \in R$ siten, että $a \cdot b = 0$. Epätriviaalia kommutatiivista rengasta kutsutaan kokonaisalueeksi, mikäli sillä ei ole nollajakajia. Näin ollen epätriviaali kommutatiivinen rengas on kokonaisalue, mikäli yhtälöstä $a \cdot b = 0$ seuraa aina, että $a = 0$ tai $b = 0$.

3. Kunnat

MÄÄRITELMÄ 4.7 (Kunta). Olkoot $+$ ja $\cdot$ laskutoimituksia. Joukko $F = F(+,\cdot)$ on kunta, jos se täyttää seuraavat ehdot:

F1 $(F,+)$ on Abelin ryhmä, jolla on yhteenlaskun neutraalialkio 0.
F2 $(F \setminus \{0\},\cdot)$ on Abelin ryhmä, jolla on kertolaskun neutraalialkio 1.
F3 Kaikille $a, b, c \in F$ pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
F4 Kaikille $a \in F$ pätee $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Kunnasta voidaan käyttää myös merkintää $(F,+,\cdot)$ tai $\langle F,+,\cdot\rangle$.

MÄÄRITELMÄ 4.8 (Äärellinen kunta). Äärellinen kunta on kunta, jonka alkioiden määrä on äärellinen.

Seuraava lause rajaa äärellisen kunnan alkioiden lukumäärän jonkin alkuluvun potenssiin, missä potenssi on luonnollinen luku. Todistus lauseelle ja todistukseen tarvittavia esitietoja löytyy Gilbertin teoksesta [**Gil**, s. 227].

LAUSE 4.9. *Jos F on äärellinen kunta, niin sen alkioiden lukumäärä on p^m, missä p on jokin alkuluku ja m jokin luonnollinen luku.*

ESIMERKKI 4.10 (Neljän alkion kunta). Olkoon F_4 neljän alkion joukko $0, 1, \alpha, \beta$, jossa ovat voimassa laskutoimitukset $+$ (yhteenlasku) ja $\cdot$ (kertolasku). Laskutoimitukset on määritelty seuraavien laskutaulujen (taulukko 1) mukaisesti, jolloin F_4 on kunta. Laskutauluista näemme esimerkiksi, että kunnan neutraalialkio yhteenlaskun suhteen on 0 ja kertolaskun suhteen 1.

TAULUKKO 1. Neljän alkion kunnan yhteen- ja kertolaskun laskutaulut

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

4. Yleinen vektoriavaruus

MÄÄRITELMÄ 4.11 (Vektoriavaruus). Olkoon F kunta. Vektoriavaruus kunnan F yli koostuu Abelin ryhmästä V, jossa on määritetty yhteenlasku ja skalaarilla kertominen $*$ seuraavalla tavalla. Kaikille $a, b \in F$ ja $v, w \in V$ tulee päteä

V1 $a * v \in V$
V2 $a * (b * v) = (a \cdot b) * v$
V3 $(a + b) * v = (a * v) + (b * v)$

V4 $a * (v + w) = (a * v) + (a * w)$
V5 $1 * v = v$.

Joukon V alkioita kutsutaan vektoreiksi ja joukon F alkioita skalaareiksi.

MÄÄRITELMÄ 4.12 (Lineaarikuvaus). Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kunnan F yli. Kuvaus λ vektoriavaruudesta V vektoriavaruuteen W on lineaarikuvaus eli homomorfismi, mikäli:

(1) λ on ryhmähomomorfismi vektoriavaruudesta $(V, +)$ vektoriavaruudelle $(W, +)$.
(2) Kaikille $a \in F$ ja $v \in W$ pätee $\lambda(av) = a\lambda(v)$.

LUKU 5

Kuntatasot

1. Homogeeniset koordinaatit

[**Cas**, s. 45] Jotta voisimme todistaa projektiivisen geometrian tulokset algebrallisesti, meillä täytyy olla algebrallinen merkintätapa, jolla voimme ilmoittaa projektiiviset pisteet projektiivisella tasolla $\mathbb{RP}^2$. Määritelmässä 3.2 muodostimme reaalisen projektiivisen tason $(\mathbb{R}^2 \cup \ell_\infty)$, mutta äärettömyydessä sijaitseville pisteille ei annettu koordinaatteja. Myös reaalinen projektiivinen taso voidaan koordinatisoida, tällöin käytetään apuna homogeenisia koordinaatteja. Tämä onnistuu esimerkiksi käyttämällä tietoa siitä, että avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora, joka kulkee origon ja jonkin toisen pisteen kautta, on yksikäsitteinen.

Käyttäkäämme pohjustuksena homogeenisille koordinaateille Brannanin [**Bra**, s. 137] määritelmää projektiiviselle tasolle.

Määritelmä 5.1. Projektiivinen piste on avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora, joka kulkee origon kautta. Reaalinen projektiivinen taso $\mathbb{RP}^2$ on kaikkien tällaisten pisteiden joukko.

Valitaan reaalinen projektiivinen taso. Olkoon P mikä tahansa piste, joka on tasolla $\mathbb{R}^2$ ja jonka koordinaatit ovat (x, y). Merkitään pistettä (x, y) merkinnöin $(X/Z, Y/Z)$, missä Z on jokin yhteinen jakaja. Merkintää $[X, Y, Z]$ kutsutaan pisteen P homogeenisiksi koordinaateiksi. Esimerkiksi pisteen $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ homogeeniset koordinaatit voisivat olla $[3, 4, 5]$ tai $[60, 80, 100]$ tai yleisesti $\rho[3, 4, 5]$, missä $\rho \neq 0$, $\rho \in \mathbb{R}$. Näin ollen voimme todeta seuraavat asiat:

(1) Koska $(x, y) = (X/Z, Y/Z) = (\rho X/\rho Z, \rho Y/\rho Z)$ kaikille $\rho \neq 0$, $\rho \in \mathbb{R}$, niin homogeeniset koordinaatit $[X, Y, Z]$ ja $\rho[X, Y, Z]$ tarkoittavat samaa pistettä.

(2) Pisteen $(0, 0)$ homogeeniset koordinaatit ovat $[0, 0, 1]$.

(3) Millään tason $\mathbb{R}^2$ pisteellä ei ole homogeenisia koordinaatteja $[0, 0, 0]$.

(4) Jokaisella euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ pisteelle voidaan määrittää homogeeniset koordinaatit, sillä pisteellä (x, y) on homogeeniset koordinaatit $[x, y, 1]$.

Äärettömyydessä sijaitsevien pisteiden ilmoittamiseksi pitää edetä seuraavasti. Tarkastellaan kahta yhdensuuntaista suoraa tasolta $\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
ax + by + c &= 0 \\
ax + by + c' &= 0, \qquad c \neq c'.
\end{aligned}
$$

Kun merkitsemme $x = X/Z$, $y = Y/Z$ ja kerromme yhtälöt luvulla Z, saamme

$$aX + bY + cZ = 0$$
$$aX + bY + c'Z = 0,$$

jotka ovat suorien homogeeniset yhtälöt. Ratkaisemalla ylläolevat kaksi lineaarisesti riippumatonta homogeenista lineaariyhtälöä, saamme ratkaisujoukoksi

$$\{\rho[a, b, 0] | \rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}.$$

Näin ollen $\rho[a, b, 0]$ (mille tahansa $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) määritellään kahden yhdensuuntaisen suoran leikkauspisteeksi homogeenisissä koordinaateissa. Siispä

(1) Jokaisella pisteellä laajennetulta euklidiselta tasolta on homogeeniset koordinaatit

$$[x, y, z], \text{ missä } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ ja ainakin yksi on erisuuri kuin } 0,$$

missä kaksi kolmikkoa $[x_1, y_1, z_1]$ ja $[x_2, y_2, z_2]$ kuvaavat samaa pistettä jos, ja vain jos on olemassa $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ siten, että $[x_1, y_1, z_1] = \rho[x_2, y_2, z_2]$.

(2) Suoran ℓ homogeeninen yhtälö on muotoa $ax+by+cz = 0$, missä ainakin yksi luvuista $a, b, c \in \mathbb{R}$ on erisuuri kuin 0. Tällöin $[a, b, c]$ määritellään suoran ℓ homogeenisiksi koordinaateiksi. Kannattaa huomata, että $[a, b, c]$ ja $\rho[a, b, c]$ (mille tahansa $\rho \in \mathbb{R}\backslash 0$) esittävät samaa suoraa. Piste $[x, y, z]$ on suoralla $[a, b, c]$, jos ja vain jos $ax + by + cz = 0$.

(3) $z = 0$ on homogeeninen yhtälö suoralle ℓ_∞ (suora äärettömyydessä). Näin ollen suoran ℓ_∞ homogeeniset koordinaatit ovat $[0, 0, 1]$.

Esimerkki 5.2. Tutkikaamme seuraavaksi erilaisten kartioleikkausten homogeenisiä yhtälöitä ja sitä, kuinka ne sijaisevat suoraan ℓ_∞ nähden.

(1) Hyperbeli $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $(a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ voidaan esittää homogeenisenä yhtälönä

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

Se leikkaa suoran ℓ_∞ kohdassa, jossa $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. Näin ollen hyberbeli leikkaa suoran ℓ_∞ pisteissä $[a, b, 0]$ ja $[-a, b, 0]$.

(2) Ellipsi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $(a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ voidaan esittää homogeenisenä yhtälönä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

Koska $x \neq 0$ tai $y \neq 0$, niin $z \neq 0$. Siispä ellipsillä ei ole yhtään yhteistä pistettä suoran ℓ_∞ kanssa.

(3) Paraabeli $y^2 = 4ax$, $(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ voidaan esittää homogeenisena yhtälönä

$$y^2 = 4axz.$$

Täten se leikkaa suoran ℓ_∞ kun $y^2 = 0$, eli siis pisteessä $[1, 0, 0]$. Paraabeli sivuaa suoraa ℓ_∞.

(4) Ympyrä

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \ (g, f, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

voidaan esittää homogeenisena yhtälönä

$$x^2 + y^2 + 2gzx + 2fyz + cz^2 = 0.$$

Mikäli $z = 0$, niin siitä seuraisi, että $x = 0$ ja $y = 0$. Tämä ei ole mahdollista, joten ympyrällä ei ole yhtään yhteistä pistettä suoran ℓ_∞ kanssa.

Tarkastelkaamme seuraavaksi, mitä ovat projektiivisen geometrian kuviot. Ne voidaan määritellä samaan tapaan, kuin euklidisessa geometriassa, eli tason osajoukkona.

Määritelmä 5.3. Projektiivinen kuvio on projektiivisen tason $\mathbb{RP}^2$ projektiivisten pisteiden osajoukko.

Projektiiviset kuviot ovat siis joukkoja suorista avaruudessa $\mathbb{R}^3$, jotka kulkevat origon kautta. Eräs yksinkertaisimmista projektiivisista kuvioista on origon kautta kulkeva taso. Tällainen taso on projektiivinen kuvio, sillä se on joukko kaikista projektiivisista pisteistä, jotka ovat kyseisellä tasolla. Koska origon ulkopuolelle tätä tasoa leikkaamaan voidaan asettaa toinen taso, näiden kahden tason leikkauspinta on suora ja lisäksi on ainoastaan yksi origon kautta kulkeva suora (toisen tason suuntainen suora), joka ei leikkaa tätä toista tasoa, niin on luontevaa käyttää edeltävästä tasosta nimitystä projektiivinen suora.

Määritelmä 5.4. Projektiivinen suora projektiivisella tasolla $\mathbb{RP}^2$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, joka kulkee origon kautta.

Euklidisessa geometriassa voimme yhdistää mitkä tahansa kaksi pistettä yksikäsitteisellä suoralla. Projektiivisessa geometriassa tilannetta vastaa seuraava lause, sillä origon kautta kulkevat kaksi eri suoraa määrittävät yksikäsitteisen tason, joka luonnollisesti sisältää origon.

Lause 5.5. *Mitkä tahansa projektiivisen tason $\mathbb{RP}^2$ kaksi projektiivista pistettä voidaan yhdistää yksikäsitteisellä projektiivisella suoralla.*

Seuraava lause eroaa huomattavasti euklidisesta geometriasta. Nimittäin, koska projektiiviset suorat ovat origon kautta kulkevia avaruuden $\mathbb{R}^3$ tasoja ja koska kahden eri origon kautta kulkevan tason täytyy leikata yksikäsitteisellä origon kautta kulkevalla suoralla, niin tämä avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora on määritelmän mukaan projektiivinen piste.

Lause 5.6. *Mitkä tahansa projektiivisen tason $\mathbb{RP}^2$ kaksi projektiivista suoraa leikkaavat yksikäsitteisessä projektiivisessä pisteessä.*

Tämä projektiivinen piste saadaan määritettyä ratkaisemalla projektiivisten suorien muodostama yhtälöpari.

2. Kuntatasot

[**Cas**, s. 48] Laajennettu euklidinen taso voidaan määritellä kolmikkona $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, missä pisteet ja suorat ilmoitetaan homogeenisina koordinaatteina ja insidenssirelaatio $\mathcal{I}$ määritellään homogeenisen lineaariyhtälön avulla. Kun nyt käytämme mallina reaalista projektiivista tasoa, voimme määrittää kuntatason.

MÄÄRITELMÄ 5.7. Olkoon F kunta. Tällöin kuntataso $PG(2,F)$ on kolmikko $(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$, missä joukon $\mathcal{P}$ alkiota kutsutaan pisteiksi, joukon $\mathcal{L}$ alkioita suoriksi (ja ne ovat samalla joukon $\mathcal{P}$ alijoukkoja) ja $\mathcal{I}$ on insidenssirelaatio, joka kertoo pisteen kuulumisesta suoralle. Kuntataso määritellään seuraavasti

(1) $\mathcal{P} = \{[x,y,z] | x,y,z \in F,$ missä kaikki eivät ole nollia$\}$, oletuksella, että kaikille $\rho \in F \backslash \{0\}$, $[x,y,z]$ ja $\rho[x,y,z]$ kuvaavat samaa pistettä.
(2) $\mathcal{L} = \{[a,b,c] | a,b,c \in F,$ missä kaikki eivät ole nollia$\}$, oletuksella, että kaikille $\rho \in F \backslash \{0\}$, $[a,b,c]$ ja $\rho[a,b,c]$ kuvaavat samaa suoraa.
(3) $\mathcal{I}$: piste $P = [x,y,z]$ kuuluu suoralle $\ell = [a,b,c]$, jos ja vain jos $ax+by+cz = 0$.

MÄÄRITELMÄ 5.8. Kuntatason $PG(2,F)$ pisteiden sanotaan olevan lineaarisesti riippuvia tai riippumattomia riippuen ovatko niiden homogeeniset koordinaatit (käsiteltäessä vektoreina) lineaarisesti riippuvia vai eivät kunnassa F.

3. Kuntataso toteuttaa projektiivisen tason aksioomat

Cassen teoksessa [**Cas**, s. 49] on myös käsitelty seuraavaa lausetta.

LAUSE 5.9. *Olkoon F kunta. Kuntataso $PG(2,F)$ on projektiivinen taso.*

TODISTUS. Tutkikaamme kohta kohdalta, pätevätkö projektiivisen tason aksioomat.

(P1) Olkoot kaksi pistettä $p = [x_1, y_1, z_1]$ ja $q = [x_2, y_2, z_2]$. Nämä pisteet ovat suoralla

$$ax + by + cz = 0,$$

jos ja vain jos

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$

ja

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = 0.$$

Siispä meidän tulee ratkaista matriisimuotoinen yhtälö

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Löydämme tälle epätriviaalin ratkaisun $[a,b,c]$, jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Siispä jokainen suoran ℓ piste $[x,y,z]$ on lineaarisesti riippuvainen pisteiden p ja q kanssa. Toisin sanoen

$$\ell = \{r = \lambda p + \mu q \quad | \quad \lambda, \mu \in F, \text{ missä molemmat eivät ole nollia}\}.$$

Ja lisäksi ylläoleva determinantti avattuna on homogeeninen lineaarinen yhtälö ja näin ollen suoran PQ yhtälö.

(P2) Olkoon F mikä tahansa kunta. Tarkastellaan kuntatason $PG(2, F)$ kahta eri suoraa, joiden yhtälöt ovat

$$ax + by + cz = 0$$

ja

$$a'x + b'y + c'z = 0.$$

Ratkaisemalla nämä lineaarisesti riippumattomat homogeeniset yhtälöt, saamme ratkaisun, joka on muotoa

$$\{\rho[\alpha, \beta, \gamma] | \rho \in F \setminus \{0\}, \alpha, \beta, \gamma \in F\}.$$

Näin ollen suorat leikkaavat yksikäsitteisessä pisteessä $[\alpha, \beta, \gamma]$.

(P3) Kuntatason $PQ(2, F)$ pisteet $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ ja $[0, 0, 1]$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja näin ollen ne eivät ole samalla suoralla.

(P4) Olkoon $abc \neq 0$. Tällöin suoralla $[a, b, c]$ on ainakin kolme pistettä, nimittäin $[b, -a, 0]$, $[0, c, -b]$ ja $[c, 0, -a]$. Jos $c = 0$, niin pisteet $[b, -a, 0]$, $[b, -a, 1]$ ja $[0, 0, 1]$ ovat eri pisteitä ja sijaitsevat suoralla $[a, b, 0]$.

$\square$

LUKU 6

Äärelliset projektiiviset tasot

1. Äärellinen projektiivinen taso

[**Cox**, s. 91] Alkeelliset käsitteet, joita käytämme, määritellään yksinomaan niiden ominaisuuksia kuvaavien aksioomien kautta. Tämä voidaan helpoiten ymmärtää kun hylkäämme intuitiivisen ajatuksen siitä, että pisteiden määrä on ääretön. Voimme todeta, että kaikki lauseet pysyvät voimassa, vaikka suoralla olisi vain 6 pistettä ja tasolla 31 pistettä. Vuonna 1892 Fano määritteli n-ulotteisen geometrian, missä pisteiden määrä jokaisella suoralla on $p + 1$, missä p on kiinteä alkuluku. Vuonna 1906 O. Veblen ja W. H. Bussey antoivat tälle äärelliselle projektiiviselle geometrialle nimen $PG(n, p)$ ja laajensivat sen muotoon $PG(n, q)$, missä $q = p^k$, p on alkuluku ja k on mikätahansa positiivinen kokonaisluku. Esimerkiksi: q voi olla 5, 7 tai 9, muttei 6.

Huomaamatta tarvetta rajata luvun q mahdollisia arvoja alkulukuihin ja niiden potensseihin, Von Staudt saavutti seuraavat numeeriset tulokset vuonna 1856. Koska mikä tahansa etäisyys tai käyräparvi voidaan samaistaa mihin tahansa toiseen sarjalla peruskuvauksia, pisteiden lukumäärän suoralla täytyy olla sama kaikille suorille ja sama kuin suorien lukumäärä käyräparvella (joka on tasolla ja kulkee pisteen kautta) tai tasojen lukumäärä suoralla kolmiulotteisessa avaruudessa. Sovitaan, että tämä luku on $q + 1$. Kun valitsemme yhden pisteen tasolta, sen kautta kulkee käyräparvi. Tämän käyräparven suorista löydämme aina jonkun, joka kulkee tasolta valitsemamme mielivaltaisen alkuperäisestä eroavan pisteen kautta. Tällä käyräparvella on $q+1$ suoraa, joista kullakin on alkuperäinen piste ja q kappaletta muita pisteitä. Näin ollen taso sisältää $q(q + 1) + 1 = q^2 + q + 1$ pistettä ja (duaalisesti) saman määrän suoria.

Vastaavasti, kun valitsemme avaruudesta minkä tahansa suoran l, sen kautta kulkee joukko tasoja, joita on tarkalleen $q + 1$ kappaletta ja joista kukin sisältää $q + 1$ pistettä suoralla l sekä q^2 kappaletta muita. Näistä tasoista löydämme aina jonkun, joka sisältää mielivaltaisen suoran l ulkopuolisen pisteen. Siispä koko avaruus sisältää $(q+1)(q^2+1) = q^3+q^2+q+1$ pistettä ja (duaalisesti) saman määrän tasoja. Yleinen kaava pisteiden lukumäärälle geometriassa $PG(n, q)$ on $q^n + qn - 1 + ... + q + 1 = q^{n+1} - 1/q - 1$.

Lause 6.1. *Olkoon π projektiivinen taso, jolla on äärellinen määrä pisteitä, tarkalleen N_2. Tällöin*

(1) Jokaisella projektiivisen tason π suoralla on sama määrä pisteitä, tarkalleen $N_1 = q+1$ kappaletta. Lukua q kutsutaan projektiivisen tason π kertaluvuksi.

(2) Kaikkiaan projektiivisella tasolla π on pisteitä $q^2 + q + 1 = (q^3 - 1)/(q - 1)$ kappaletta.

Todistus. Todistakaamme kumpikin kohta erikseen.

(1) Olkoot ℓ ja m kaksi mielivaltaista suoraa projektiivisella tasolla π ja olkoon niiden leikkauspiste $P = \ell \cap m$. Suoralla ℓ on vähintään kaksi eri pistettä A ja B, jotka ovat eri pisteitä kuin P ja suoralla m on vähintään kaksi eri pistettä C ja D, jotka ovat eri pisteitä kuin P. Olkoon $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = Q$. Tällöin $Q \notin \ell$ ja $Q \notin m$. Kaikilla pisteillä $P_i \in \ell$ pätee, että suora QP_i leikkaa suoraa m jossain pisteessä. Näimpä suoralla m on ainakin yhtä monta pistettä kuin suoralla ℓ. Vastaavasti suoralla ℓ on vähintään yhtä monta pistettä kuin suoralla m. Näin ollen suorilla ℓ ja m on täsmälleen sama määrä pisteitä. Olkoon tämä määrä $N_1 = q + 1$ kappaletta.

(2) Olkoon ℓ mikä tahansa suora projektiivisella tasolla π ja olkoon piste P jokin piste tämän suoran ulkopuolella. Tällöin kaikki projektiivisen tason π pisteet ovat suorilla, jotka kulkevat pisteen P ja kunkin suoran ℓ pisteen kautta. Tällaisia suoria on oltava $q + 1$ kappaletta, sillä suoralla ℓ on $q + 1$ pistettä ja kullakin näistä suorista on q kappaletta pisteitä, jotka ovat eri pisteitä kuin P. Siispä

$$\begin{aligned} N_2 &= q(q+1) + 1 \\ &= q^2 + q + 1 \\ &= \frac{q^3 - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

□

Lause 6.2. *Bruck-Ryserin lause Mikäli projektiivisen tason kertaluku on n, missä $n \equiv 1$ tai $2 (\mathrm{mod}\ 4)$, niin n on kahden kokonaisluvun neliöiden summa.*

Todistus. Lause on todistettu esimerkiksi Cameronin [**Cam**, s. 132] toimesta. □

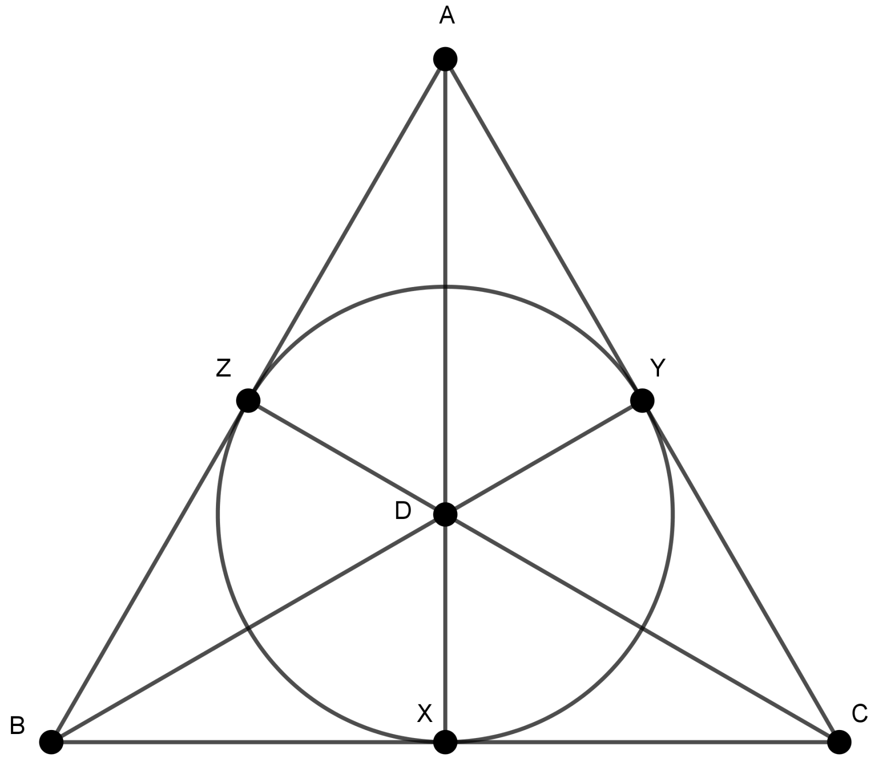
Lauseen perusteella voidaan esimerkiksi sanoa, että ei ole olemassa kertaluvun 6 projektiivista tasoa. Kuitenkaan, vaikka $10 = 1^2 + 3^2$, emme voi sanoa tämän perusteella onko kertalukua 10 oleva projektiivinen taso olemassa.

2. Kertaluvun kaksi kuntataso

Esimerkki 6.3. [**Cas**, s. 30] Olkoon π projektiivinen taso. Osoittakaamme, että tällä projektiivisella tasolla on nelikulmio.

Aksiooman $P3$ perusteella projektiivisella tasolla π on kolme pistettä, A, B ja X, jotka eivät ole samalla suoralla. Aksiooma $P1$ taas kertoo, että meillä täytyy olla suorat $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AX}$ ja $\overleftrightarrow{BX}$. Aksioomasta $P4$ seuraa, että olemassa pisteet $C \in \overleftrightarrow{BX}$ ja $D \in \overleftrightarrow{AX}$, jotka eivät ole samoja kuin A, B ja X. Yhdessä aksioomien $P1$ ja $P2$ kanssa, voimme päätellä, että suora $\overleftrightarrow{DC}$ leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ pisteessä Z, joka ei mikään pisteistä A, B, C, D tai X. Niimpä $ABCD$ on nelikulmio.

Kun täydennämme vielä edellisen esimerkin konstruktiota suorien $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ leikkauspisteellä Y siten, että Y ei ole mikään pisteistä A, B, C, D, X tai Z siten, että Y on samalla suoralla pisteiden X ja Z kanssa, niin saamme pienimmän mahdollisen projektiivisen tason.



KUVA 1. Fanon-tason havainnollistus

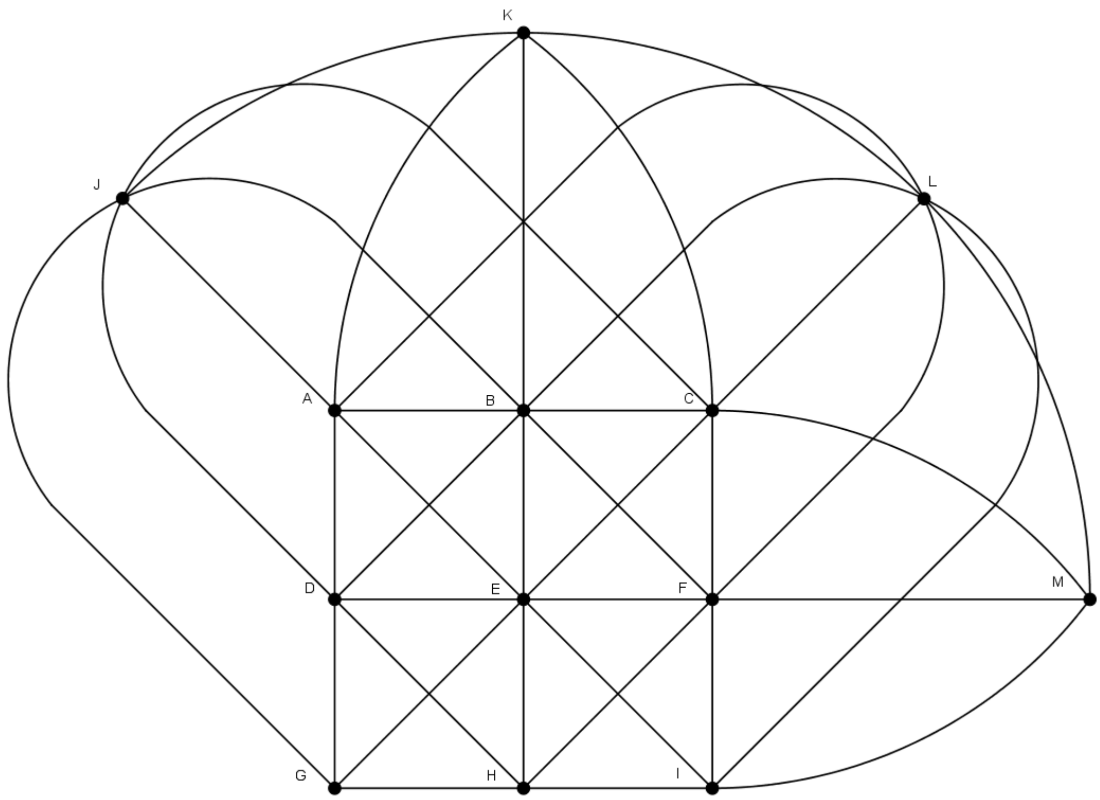
MÄÄRITELMÄ 6.4 (Fanon-taso). Edellä muodostetusta pienimmästä mahdollisesta projektiivisesta tasosta käytetään nimitystä Fanon-taso.

Fanon-tasolla on täsmälleen kolme pistettä jokaisella suoralla ja täsmälleen kolme suoraa kulkee kunkin tasolla olevan pisteen kautta. Yhteensä Fanon-tasolla on seitsemän pistettä ja seitsemän suoraa. Tästä geometriasta voimme aiemmin esiteltyjen merkintöjen avulla käyttää nimitystä $PG(2,2)$.

Kuvassa 2 on eräs Fanon-tason havainnollistus. Tason pisteet ovat A, B, C, D, X, Y ja Z. Suoria taas ovat pistejoukot $\{A,Y,C\}$, $\{A,D,X\}$, $\{A,Z,B\}$, $\{B,X,C\}$, $\{B,D,Y\}$, $\{C,D,Z\}$ ja $\{X,Y,Z\}$, jotka on kuvassa yhdistetty toisiinsa muuten viivoilla, paitsi suora $\{X,Y,Z\}$ kaarella.

3. Kertaluvun kolme kuntataso

Kun valitsemme kuntatason kertaluvuksi kolme, saamme geometrian $PG(2,3)$. Siinä on siis $3^2+3+1=13$ kappaletta pisteitä, sekä myös sama määrä suoria. Kullakin suoralla on $3+1=4$ kappaletta pisteitä ja kukin piste kuuluu vastaavasti neljälle eri suoralle.



KUVA 2. Kertaluvun kolme kuntatason havainnollistus

Oheisessa kuvassa 2 on havainnollistettu tällaista tasoa Moorhousen [**Moo**] muotoilemaan tyyliin. Kuvassa suoria ovat neljän pisteen joukot, jotka on yhdistetty viivalla, kaarella tai niiden tietynlaisella yhdistelmällä. Suorat $\{J, K, L, M\}$, $\{C, J, D, H\}$, $\{J, A, E, I\}$, $\{K, B, E, H\}$ ja $\{K, A, D, G\}$ toimivat esimerkkeinä, joissa ovat edustettuna kaikki erityyppisesti esitetyt suorat.

Kuvasta havaitsemme, että mitkä tahansa kaksi pistettä on yhdistetty toisiinsa yksikäsitteisellä suoralla ja että mitkä tahansa kaksi eri suoraa leikkaavat toisensa yksikäsitteisessä pisteessä. Näin ollen kuntataso toteuttaa projektiivisen tason kaksi ensimmäistä aksioomaa. Kolmas projektiivisen tasogeometrian aksiooma määrittelee, että tasolla pitää olla ainakin kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Myös tämä aksiooma toteutuu, sillä esimerkiksi pisteet A, B ja D toteuttavat sen. Neljäskin aksiooma toteutuu, sillä jokaisella suoralla on jopa neljä pistettä aksiooman vaatiessa vähintään kolmea.

4. Kertaluvun 10 projektiivinen taso

Clement Lam osoitti 1980-luvulla [**Lam**] työryhmänsä kanssa, ettei kertaluvun 10 projektiivista tasoa voi olla olemassa. Todistaminen suoritettiin käyttämällä hyväksi raskasta tietokonelaskentaa.

LUKU 7

Projektiiviset kuvaukset ja homografiat

1. Affiinit kuvaukset

Määritelkäämme seuraavaksi affiini kuvaus ja edetkäämme sitä kautta affiinin geometrian peruslauseeseen. Todistus lauseelle ja lisätietoa affiineista kuvauksista löytyy Brannanin teoksesta [**Bra**, s. 84].

Määritelmä 7.1 (Affiini kuvaus). Affiini kuvaus on muotoa

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

missä $\mathbf{A}$ on kääntyvä 2×2-matriisi ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

Lause 7.2 (Affiinin geometrian peruslause). *Olkoot P, Q ja R pisteitä, jotka eivät ole keskenään samalla suoralla ja olkoot P', Q' ja R' pisteitä, jotka eivät ole keskenään samalla suoralla. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen affiini kuvaus, jolle $P \longmapsto P'$, $Q \longmapsto Q'$ ja $R \longmapsto R'$.*

2. Projektiiviset kuvaukset

Tutkikaamme seuraavaksi projektiivisia kuvauksia Brannanin mukaan [**Bra**, s. 151].

Määritelmä 7.3. Projektiivinen kuvaus projektiivisella tasolla $\mathbb{RP}^2$ on funktio $t : \mathbb{RP}^2 \longmapsto \mathbb{RP}^2$ muotoa

$$t : [x] \longmapsto [Ax],$$

missä A on kääntyvä 3×3-matriisi. Sanotaan, että A on funktion t liitännäismatriisi. Kaikkien projektiivisen tason $\mathbb{RP}^2$ projektiivisten kuvausten joukkoa ilmaistaan merkinnällä $P(2)$.

Huomautus 7.4. Matriisit A ja tA, missä t on nollasta eroava reaaliluku, antavat saman projektiivisen kuvauksen.

Esimerkki 7.5. Olkoon funktio $t : \mathbb{RP}^2 \longmapsto \mathbb{RP}^2$, joka on määritelty seuraavasti

$$t : [x, y, z] \longmapsto [2x + z, -x + 2y - 3z, x - y + 5z]$$

Kuvaus t on muotoa $t : [x] \longmapsto [Ax]$, missä $x = (x, y, z)$ ja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 0 + 1 - 2 - 6 - 0 = 13 \neq 0.$$

Näin ollen matriisi A on kääntyvä. Siitä seuraa, että kuvaus t on projektiivinen kuvaus. Tutkikaamme seuraavaksi, mikä on pisteen $[1, 2, 3]$ kuva kuvauksessa t.

$$t([1, 2, 3]) = [2 + 3, -1 + 4 - 9, 1 - 2 + 15] = [5, -6, 14].$$

LAUSE 7.6. *Projektiivisten kuvausten joukko $P(2)$ muodostaa ryhmän.*

TODISTUS. Tarkastelkaamme, pätevätkö neljä ryhmän aksioomaa.

(1) Olkoot t_1 ja t_2 projektiivisia kuvauksia siten, että

$$t_1 = [x] \longmapsto [A_1 x] \quad \text{ja} \quad t_2 = [x] \longmapsto [A_2 x],$$

missä A_1 ja A_2 ovat kääntyviä 3×3 -matriiseja. Tällöin

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_2([x]) &= t_1(t_2[x]) \\ &= t_1([A_2 x]) \\ &= [(A_1 A_2)x]. \end{aligned}$$

Koska A_1 ja A_2 ovat kääntyviä, niin myös $A_1 A_2$ on kääntyvä. Siispä $t_1 \circ t_2$ on projektiivinen kuvaus. Näin ollen projektiivisten kuvausten joukko on suljettu.

(2) Olkoon $i : \mathbb{RP}^2 \longmapsto \mathbb{RP}^2$ kuvaus, joka on määritelty seuraavasti

$$i : [x] \longmapsto [\mathbf{I}x],$$

missä $\mathbf{I}$ on identtinen 3×3 -matriisi. Tämä on projektiivinen kuvaus, sillä $\mathbf{I}$ on kääntyvä. Olkoon $t : \mathbb{RP}^2 \longmapsto \mathbb{RP}^2$ mielivaltainen projektiivinen kuvaus, joka on määritelty seuraavasti $t : [x] \longmapsto [Ax]$ jollakin kääntyvällä 3×3 -matriisilla A. Tällöin mille tahansa $[x] \in \mathbb{RP}^2$ pätee

$$t \circ i([x]) = [A(\mathbf{I}x)] = [Ax]$$

ja

$$i \circ t([x]) = [\mathbf{I}(Ax)] = [Ax].$$

Täten $t \circ i = i \circ t = t$ ja i on identtinen kuvaus. Tämä osoittaa, että projektiivisilla kuvauksilla on neutraalialkio.

(3) Olkoon $t : \mathbb{RP}^2 \longmapsto \mathbb{RP}^2$ mielivaltainen projektiivinen kuvaus, joka on määritelty seuraavasti

$$t : [x] \longmapsto [Ax],$$

jollain kääntyvällä 3×3 -matriisilla A. Tällöin voimme määritellä toisen projektiivisen kuvauksen $t' : \mathbb{RP}^2 \longmapsto \mathbb{RP}^2$, jolle

$$t' : [x] \longmapsto [A^{-1}x].$$

Nyt kaikille $[x] \in \mathbb{RP}^2$ pätee

$$t \circ t'([x]) = t([A^{-1}x]) = [A(A^{-1}x)] = [x]$$

ja

$$t' \circ t([x]) = t'([Ax]) = [A^{-1}(Ax)] = [x].$$

Näin ollen t' on kuvauksen t käänteiskuvaus. Siispä ryhmän käänteisalkiovaatimus toteutuu.

(4) Kuvausten yhdistäminen on assosiatiivinen, joten ryhmän assosiatiivisuusvaatimus täyttyy.

□

Tutkikaamme aiemmin esiteltyä affiinin geometrian peruslausetta ja sen pätevyyttä projektiiviseen geometriaan seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 7.7. Olkoot t_1 ja t_2 projektiivisia kuvauksia ja niitä vastaavat liitännäismatriisit

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Etsikäämme projektiivisten pisteiden $[1,-1,1]$, $[1,-2,2]$ ja $[-1,2,-1]$ kuvat kuvauksissa t_1 ja t_2

$$\begin{aligned} t_1([1,-1,1]) &= [-2,0,1] \\ t_2([1,-1,1]) &= [-4,0,2] = t_1([1,-1,1]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1([1,-2,2]) &= [0,3,-2] \\ t_2([1,-2,2]) &= [0,3,-2] = t_1([1,-2,2]) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} t_1([-1,2,-1]) &= [1,-2,1] \\ t_2([-1,2,-1]) &= [-2,4,-2] = t_1([-1,2,-1]). \end{aligned}$$

Näemme, että kuvaukset t_1 ja t_2 kuvaavat nämä kolme projektiivista pistettä täsmälleen samalla tavoin. Siitä huolimatta kuvaukset eivät ole samoja, sillä niiden matriisit eivät ole toistensa monikertoja. Tästä seuraa se, että toisin kuin affiinit kuvaukset, projektiivisia kuvauksia ei voi määrittää yksikäsitteisesti tutkimalla niiden vaikutusta kolmeeen (projektiiviseen) pisteeseen.

Todistakaamme seuraavaksi projektiivisen geometrian peruslause, jonka mukaan mitkä tahansa neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla, voidaan kuvata miksi tahansa neljäksi saman ehdon toteuttavaksi pisteeksi projektiivisella muunnoksella.

Tutkikaamme aluksi keinoa, jolla löydämme projektiivisen kuvauksen, joka tekee seuraavat muunnokset projektiivisille pisteille

$$\begin{aligned} [1,0,0] &\longmapsto [a_1,a_2,a_3] \\ [0,1,0] &\longmapsto [b_1,b_2,b_3] \\ [0,0,1] &\longmapsto [c_1,c_2,c_3] \\ [1,1,1] &\longmapsto [d_1,d_2,d_3], \end{aligned}$$

missä mitkään kolme pisteistä $[a_1,a_2,a_3]$, $[b_1,b_2,b_3]$, $[c_1,c_2,c_3]$ ja $[d_1,d_2,d_3]$ eivät ole samalla suoralla.

Aluksi meidän tulee määrittää sellaiset u, v ja w, että

$$\begin{pmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Sen jälkeen voimme ilmoittaa vaadittavan projektiivisen kuvauksen muotoa $t : [x] \longmapsto [Ax]$, missä A on mikä tahansa nollasta eroava matriisin

$$\begin{pmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{pmatrix}$$

monikerta.

Tarkastelkaamme seuraavaksi, miksi tämä keino todella toimii. Voimme kirjoittaa edellä olleen yhtälön muodossa

$$u\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

jolloin voimme tehdä seuraavat havainnot

(1) Yhtälöllä tulee olla yksikäsitteinen ratkaisu arvoille u, v ja w, sillä arvot u, v ja w ovat yksinkertaisesti pisteen (d_1, d_2, d_3) koordinaatit lineaarisesti riippumattomien vektorien (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) ja (c_1, c_2, c_3) muodostamassa avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannassa.

(2) Kaikkien arvojen u, v ja w tulee olla nollasta eroavia, koska muuten kolme vektoreista (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) ja (d_1, d_2, d_3) olisivat lineaarisesti riippuvia.

(3) Koska matriisin A sarakkeet ovat nollasta eroavia lineaarisesti riippumattomien vektorien (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) ja (c_1, c_2, c_3) monikertoja, niin matriisin A tulee olla kääntyvä ja näin ollen t on projektiivinen kuvaus.

LAUSE 7.8 (Projektiivisen geometrian peruslause). *Olkoon $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ kaksi nelikulmiota projektiivisella tasolla $\mathbb{RP}^2$. Tällöin*

(1) on olemassa projektiivinen kuvaus t, joka kuvaa pisteen A pisteeksi A', pisteen B pisteeksi B', pisteen C pisteeksi C' ja pisteen D pisteeksi D';

(2) projektiivinen kuvaus t on yksikäsitteinen.

TODISTUS. Edellä esitellyn keinon avulla voimme määrittää projektiivisen kuvauksen t_1, joka kuvaa pisteet $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ pisteiksi A, B, C ja D (vastaavassa järjestyksessä). Samoin, on olemassa projektiivinen kuvaus t_2, joka kuvaa pisteet $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ pisteiksi A', B', C' ja D'.

Yhdistetty kuvaus $t = t_2 \circ t_1^{-1}$ on tällöin projektiivinen kuvaus, joka kuvaa pisteen A pisteeksi A', pisteen B pisteeksi B', pisteen C pisteeksi C' ja pisteen D pisteeksi D'.

Kuvauksen t yksikäsitteisyyden toteamiseksi meidän täytyy ensin varmistaa, että identtinen kuvaus on ainut projektiivinen kuvaus, joka kuvaa kunkin projektiivisista pisteistä $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ itsekseen. Itseasiassa kaikilla projektiivisilla kuvauksilla, joilla on tämä ominaisuus, tulee olla liitännäismatriisi, joka on jokin nollasta eroava monikerta matriisista

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}, \quad \text{missä} \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tällaisen matriisin tulee olla nollasta eroava identtisen matriisin monikerta, joten kuvauksen täytyy näin ollen olla identtinen kuvaus.

Seuraavaksi olettakaamme, että kuvaukset t ja t' ovat kaksi projektiivista kuvausta, jotka toteuttavat lauseen ehdot. Tällöin yhdistettyjen kuvausten $t_2^{-1} \circ t \circ t_1$ ja $t_2^{-1} \circ t' \circ t_1$ täytyy kummankin olla projektiivisia kuvauksia, jotka kuvaavat kunkin projektiivisista pisteistä $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ ja $[1, 1, 1]$ itsekseen. Tämä johtaa siihen, että molempien yhdistettyjen kuvausten täytyy olla identtisiä kuvauksia. Näin ollen voimme päätellä, että

$$t_2^{-1} \circ t \circ t_1 = t_2^{-1} \circ t' \circ t_1.$$

Jos nyt muodostamme yhdistetyt kuvaukset, jossa yhtön kummankin puolen vasemmalle tulee kuvaus t_2 ja oikealle kuvaus t_1^{-1}, niin saamme

$$\begin{gathered} t_2 \circ t_2^{-1} \circ t \circ t_1 \circ t_1^{-1} = t_2 \circ t_2^{-1} \circ t' \circ t_1 \circ t_1^{-1} \\ t = t'. \end{gathered}$$

Näin ollen kuvaukset t ja t' ovat samat ja tämä osoittaa yksikäsitteisyyden.

□

LUKU 8

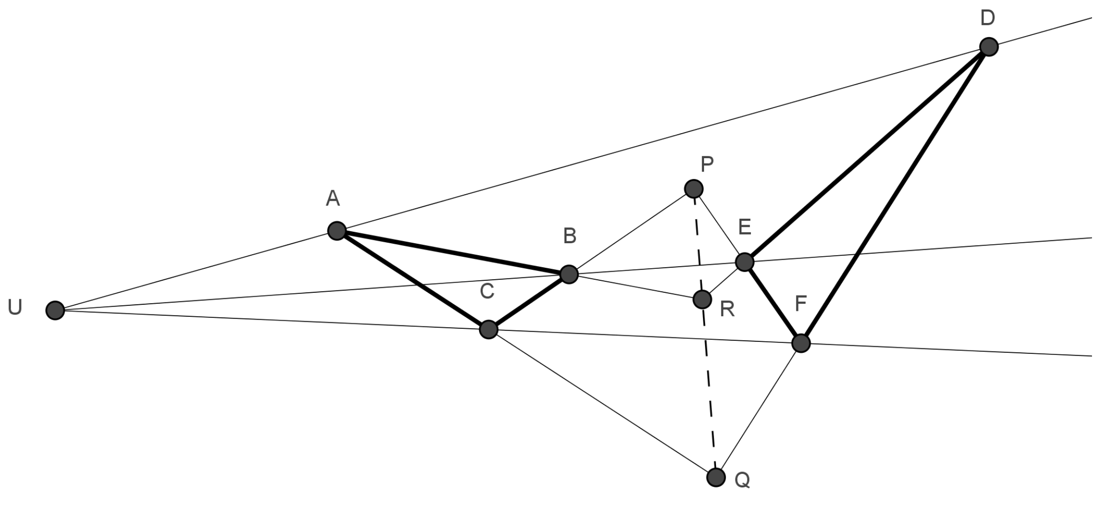
Desarguesin ja Pappusin lauseet kuntatasoissa

[**Bra**, s. 172] Eräille euklidisen geometrian lauseille saadaan huomattavasti yksinkertaisemmat todistukset tulkitsemalla lauseita projektiivisessa geometriassa. Tarkastelkaamme seuraavaksi Desarguesin lausetta.

Määritelmä 8.1 (Projektiivinen kongruenssi). Projektiivisen geometrian peruslauseen nojalla voimme aina määrittää projektiivisen kuvauksen, joka kuvaa minkä tahansa nelikulmion miksi tahansa nelikulmioksi. Käytämme tästä ominaisuudesta nimitystä projektiivinen kongruenssi.

Lause 8.2 (Desarguesin lause). *Olkoon ΔABC ja ΔDEF kolmioita avaruudessa $\mathbb{R}^2$ siten, että suorat AD, BE ja CF leikkaavat pisteessä U. Olkoon suorien BC ja EF leikkauspiste P, suorien CA ja FD leikkauspiste Q ja suorien AB ja DE leikkauspiste R. Tällöin pisteet P, Q ja R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Koska tämä lause koostuu ainoastaan projektiivisen geometrian ominaisuuksista yhdensuuntaisuudesta ja insidenssirelaatiosta, eli suorallekuuluvuudesta, niin voimme tulkita lauseen projektiivisena lauseena projektiivisella tasolla $\mathbb{RP}^2$. Tämän lisäksi tiedämme, että projektiivisen geometrian peruslauseen nojalla tilanne on kaikissa tapauksissaan projektiivisesti kongruentti tilanteeseen, missä $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$ ja $U = [1, 1, 1]$. Lause pätee yleisesti, jos saamme todistettua lauseen tässä erikoistapauksissa, sillä voimme käyttää tietoa siitä, että projektiivinen kongruenssi säilyttää projektiivinen geometrian ominaisuudet.



Kuva 1. Desarguesin lauseen havainnollistus

Koska suora AU kulkee pisteiden $[1, 0, 0]$ ja $[1, 1, 1]$ kautta, niin sen yhtälö on $y = z$. Koska D on suoralla AU, sen homogeeniset koordinaatit ovat $[a, b, b]$, missä a ja b ovat reaalilukuja. Nyt $b \neq 0$, koska $A \neq D$, joten voimme ilmoittaa pisteen D homogeeniset koordinaatit muodossa $[p, 1, 1]$, missä $p = a/b$. Samaan tapaan voimme ilmoittaa pisteille E ja F homogeeniset koordinaatit muodoissa $[1, q, 1]$ ja $[1, 1, r]$, missä q ja r ovat reaalilukuja.

Selvittäkäämme seuraavaksi piste P, missä suorat BC ja EF leikkaavat. Suoran BC yhtälö on $x = 0$. Koska suora EF kulkee pisteiden $E = [1, q, 1]$ ja $F = [1, 1, r]$ kautta, sen yhtälön täytyy olla

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & q & 1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix} = 0,$$

jonka voimme kirjoittaa muotoon

$$(qr - 1)x - (r - 1)y + (1 - q)z = 0.$$

Tästä seuraa se, että suorien BC ja EF leikkauspisteessä P yhtälöt $x = 0$ ja $(r-1)y = (1-q)z$ pätevät. Siis pisteen P homogeeniset koordinaatit ovat $[0, 1-q, r-1]$. Samaan tapaan todettuna kuin edellä, pisteiden Q ja R homogeenisten koordinaattien täytyy vastaavasti olla $[1 - p, 0, r - 1]$ ja $[1 - p, q - 1, 0]$.

Pisteet P, Q ja R ovat samalla suoralla, mikäli seuraava yhtälö toteutuu

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-q & r-1 \\ 1-p & 0 & r-1 \\ 1-p & q-1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Koska

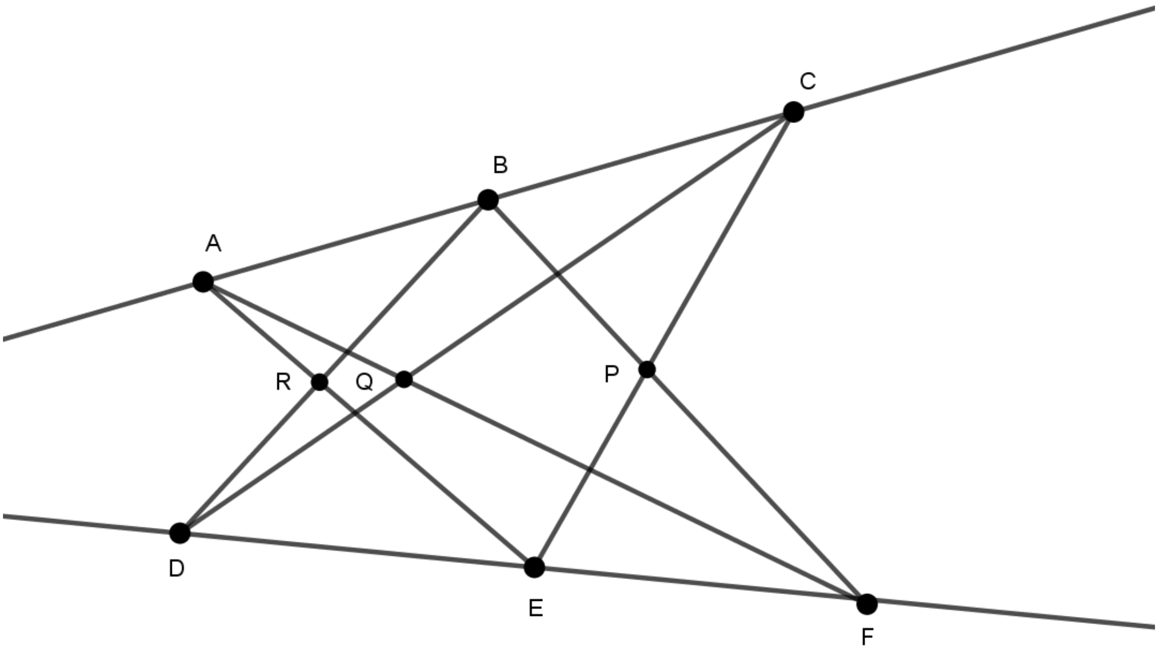
$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0 & 1-q & r-1 \\ 1-p & 0 & r-1 \\ 1-p & q-1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(1-q)\begin{vmatrix} 1-p & r-1 \\ 1-p & 0 \end{vmatrix} + (r-1)\begin{vmatrix} 1-p & 0 \\ 1-p & q-1 \end{vmatrix} \\
&= -(1-q)(1-p)(1-r) + (r-1)(1-p)(q-1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

niin pisteet P, Q ja R ovat samalla suoralla. Yleinen tulos Desarguesin lauseelle pätee projektiivisen kongruenssin nojalla. □

Tutkikaamme vielä lopuksi Pappusin lausetta.

Lause 8.3 (Pappusin lause). *Olkoot A, B ja C kolme pistettä samalta suoralta avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja olkoot D, E ja F kolme muuta pistettä toiselta suoralla. Olkoon suorien CE ja BF leikkauspiste P, suorien CD ja FA leikkauspiste Q ja suorien AE ja DB leikkauspiste R. Tällöin pisteet P, Q ja R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Voimme tulkita lauseen projektiivisen geometrian lauseena. Projektiivisen geometrian peruslauseen nojalla voimme valita neljä pistettä A, D, P ja R,



Kuva 2. Pappusin lauseen havainnollistus

joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla, niin että ne muodostavat kolmion, sekä yksittäisen pisteen. Niitä vastaavat homogeeniset koordinaatit ovat $A = [1, 0, 0]$, $D = [0, 1, 0]$, $P = [0, 0, 1]$ ja $R = [1, 1, 1]$.

Suora AR kulkee pisteiden $[1, 0, 0]$ ja $[1, 1, 1]$ kautta ja näin ollen sen yhtälö on muotoa $y = z$. Koska piste E sijaitsee suoralla AR, sen homogeeniset koordinaatit ovat muotoa $[a, b, b]$, missä a ja b ovat reaalilukuja. Koska $A \neq E$, niin $b \neq 0$. Näin ollen voimme ilmoittaa pisteen E homogeeniset koordinaatit muodossa $[r, 1, 1]$, missä $r = a/b$.

Vastaavalla tavalla, piste B sijaitsee suoralla $x = z$, joka kulkee pisteiden $D = [0, 1, 0]$ ja $R = [1, 1, 1]$ kautta, joten sen homogeenisten koordinaattien tulee olla muotoa $[1, s, 1]$.

Etsikäämme seuraavaksi suorien AB ja EP leikkauspiste C. Koska suora AB kulkee pisteiden $A = [1, 0, 0]$ ja $B = [1, s, 1]$ kautta, niin sen yhtälön tulee olla $y = sz$. Lisäksi, koska suora EP kulkee pisteiden $E = [r, 1, 1]$ ja $P = [0, 0, 1]$ kautta, niin sen yhtälö on muotoa $x = ry$. Näin ollen suorien AB ja EP leikkauspisteessä C pätevät yhtälöt $y = sz$ ja $x = ry$, joten pisteen C homogeeniset koordinaatit ovat $[rs, s, 1]$.

Vastaavasti, suora BP leikkaa suoraa DE pisteessä F. Koska $B = [1, s, 1]$ ja $P = [0, 0, 1]$, niin suoran BP yhtälö on $y = sx$ ja koska $D = [0, 1, 0]$ ja $E = [r, 1, 1]$, niin suoran DE yhtälön tulee olla $x = rz$. Tästä seuraa, että $F = [r, rs, 1]$.

Lopuksi etsimme pisteen Q, missä suorat AF ja DC leikkaavat. Koska suora AF kulkee pisteiden $A = [1, 0, 0]$ ja $F = [r, rs, 1]$ kautta, sen yhtälö on muotoa $y = rsz$. Ja koska suora DC kulkee pisteiden $D = [0, 1, 0]$ ja $C = [rs, s, 1]$ kautta, niin sen yhtälön tulee olla $x = rsz$. Suorien AF ja DC leikkauspisteessä Q pätevät siis $y = rsz$ ja $x = rsz$, joten $Q = [rs, rs, 1]$.

Nyt voimme selvästi havaita, että pisteet $R = [1, 1, 1]$, $Q = [rs, rs, 1]$ ja $P = [0, 0, 1]$ ovat kaikki samalla suoralla $x = y$. $\square$

Lähdeluettelo

[Bra] Brannan, David: *Geometry, Second Edition, 2012, Cambridge: Cambridge University Press.*

[Cam] Cameron, Peter J.: *Combinatorics: topics, techniques, algorithms, 1994, Cambridge: Cambridge University Press.*

[Cas] Casse, Rey: *Projective Geometry: an introduction, 2006, Oxford: Oxford University Press.*

[Cox] Coxeter, Harold S. M.: *Projective Geometry, 1987, New York: Springer-Verlag.*

[Dea] Dean, Richard A.: *Elements of Abstract Algebra, 1967, New York: John Wiley & Sons, Inc.*

[Fis] Fishback, William T.: *Projective and Euclidean Geometry, 1966, New York: John Wiley & Sons, Inc.*

[Gil] Gilbert, William J.: *Modern Algebra with Applications, Second Edition, 2004, New York: John Wiley & Sons, Inc.*

[Kur] Kurittu, Lassi & Hokkanen, Veli-Matti & Kahanpää, Lauri: *Geometria, 2008, Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino.*

[Lam] Lam, Clement W. H. *The Search for a Finite Projective Plane of Order 10.* `www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Lam305-318.pdf`

[Moo] Moorhouse, Eric: *Luentomuistiinpanoja.* `www.uwyo.edu/moorhouse/handouts/projective_planes.pdf`