Visuaalinen tangentti lukion pitkässä matematiikassa

Arja Sauramäki

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Joulukuu 2017

TIIVISTELMÄ: Arja Sauramäki, Visuaalinen tangentti lukion pitkässä matematiikassa, matematiikan pro gradu -työ, 91 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, joulukuu 2017.

Opinnäytetyössä selvitellään lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden käsityksiä visuaalisesta tangenttisuorasta (lyh. tangentista). Työ sisältää tietokoosteen tutkielman aihepiirin visuaalisesta tangentista. Lukio-opiskelijoiden käsityksiä tangentista esitellään Tallin 1980-luvun tietokoneavusteisesta opetuskokeilusta ja Bizan 2000-luvun tutkimuksesta. Empiirisessä tutkimuksessa tutkittiin lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjan visuaalista tangenttia.

Ihmiset ymmärtävät aistein havainnoitavat kohteet pääosin intuition avulla, kun taasen matemaattiset käsitteet voidaan ymmärtää aksioomien, määritelmien ja lauseiden pohjalta. Kuitenkin Bizan laaja tutkimus osoittaa, että lukio-opiskelijoiden käsityksiin tangentista vaikuttavat merkittävästi heidän geometriassa kohtaamansa visuaaliset tangentit. Opiskelijat voivat aluksi ymmärtää visuaalisen tangentin esimerkiksi suorana, joka sivuaa koko käyrää yhdessä pisteessä leikkaamatta käyrää. Opiskelijoiden yksilölliset käsitykset voivat säilyä tai ne voivat kehittyä myöhemmin alkuvaiheen suuntaisina myös paikallista geometrista tai analyyttistä näkökulmaa edellyttävissä uusissa tilanteissa. Näin Bizan mukaan opiskelijoiden geometriassa muotoutuneet ajattelumallit riittävät kuvaamaan heidän käsityksiään tangentista koko lukioajan ja lukion jälkeenkin. Käsitysten tulisi koko tangentin oppimisprosessin ajan konstruoitua todenmukaisina, sillä vahvoiksi kehittyneitä mielensisäisiä ajattelumalleja ei ole enää helppo muokata. Toisaalta tarkoituksenmukaisesti valittujen visuaalisten tangenttien avulla opiskelijoiden käsityksiä voidaan oppimisen alkuvaiheesta alkaen myös korjata ja kehittää. Lisäksi visuaalisuus tukee opiskelijoiden luovaa matemaattista ajattelua sekä mielikuvitusta, joka toimii yhteydessä intuitioon ja luovuuteen.

Laadullisessa tapaustutkimuksessa kuvaillaan yhden lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjan visuaalista tangenttia. Kirjasarjan analysoiduissa *Geometria*- ja *Analyyttinen geometria* -kirjoissa tarkastellaan visuaalisena ainoastaan ympyrän tangenttia. Kirjoissa ei verbaalisesti nosteta esille kuvioissa havaittavia tangentin yleisiä ominaisuuksia. Tangentin käsite yleistyy merkittävästi vasta *Derivaatta* -kirjassa, kun derivaattaa havainnollistetaan hahmotellulla tangentilla. Visuaalinen tangentti jää kumminkin hiukan epäselväksi. Pienimuotoisen tutkimuksen pohjalta näyttäisi siltä, että oppikirjan analysoidussa osuudessa voisi hyödyntää enemmän visuaalisen tangentin ja intuition merkityksiä.

Asiasanat: analyyttinen tangentti, geometrinen tangentti, havainnollinen derivaatta, intuitio, käsitekuva, visuaalinen tangentti, visuaalinen esitysmuoto

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Lukio-opiskelijoiden visuaalisen tangentin ymmärtämistä on tutkittu melko vähän verrattuna analyysin keskeisen käsitteeseen, derivaattaan. Kumminkin tangentti ja derivaatta liitetään vahvasti toisiinsa lukion analyysin kursseissa. Yksi tapa syventää omaa ymmärrystään matematiikasta on matemaattisen tiedon järjestäminen, mutta järjestämistä voi hankaloittaa jo yksittäisten käsitteiden, kuten tangentin, heikko ymmärtäminen.

Yleensä tangentin määritelmänä esitetään, että *tangenttisuora* (engl. *tangent, tangent line*), lyhyemmin *tangentti* eli sivuaja, sivuaa käyrää yhdessä käyrän pisteessä, *sivuamispisteessä* (engl. *tangency point*), vaikka tangentilla on muitakin ominaisuuksia. Myös differentiaalilaskennan derivaatan käsite kehittyi uuden ajan alkupuolella antiikin Kreikan matematiikassa tunnetun ja myöhemmin tangentiksi nimetyn suoran pohjalta. Geometrisesti derivaatta vastaa funktion kuvaajan derivoituvassa pisteessä siihen asetetun tangentin kulmakerrointa. Visuaalista tangenttia käytetään edelleen funktion derivaatan havainnollistamisessa, useinkin pohtimatta syvällisemmin tangentin merkitystä. Tässä työssä otetaan myös esille joitakin tangentin ja sen lähikäsitteiden, kuten derivaatan, eroja. Työ rajoittuu taustateorian pohjalta xy-tasoon. Muista esiintyvistä käsitteistä määritellään aiheen kannalta tärkeimmät.

Tutkielmassa yhtenä päätavoitteenani on laatia havainnollinen teoriakooste aihepiirin tangentista. Toisena päätavoitteenani on esitellä Tallin (1986) ja Bizan (2007) tutkimuksista lukio-opiskelijoiden käsityksiä visuaalisesta tangentista. Erityisesti Bizan tutkimus antaa paljon uutta tietoa siitä, millaisia ajattelumalleja visuaalisesta tangentista opiskelijoille muodostuu geometriassa ja miten ne vaikuttavat heidän myöhempiin käsityksiinsä tangentista. Lopuksi kolmantena päätavoitteenani on aiemman tutkimustiedon pohjalta analysoida yhden lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjan visuaalista tangenttia. Ensin kumminkin taustateoriassa kuvailen matemaattisen ajattelun kehittymistä historiallisesti, ihmisen havainnointia yleensäkin ja matematiikan oppikirjan havainnollisten esitysmuotojen piirteitä.

Tutkielma sisältää lähteistä ja tutkimuskohteena olevasta oppikirjasta skannattuja ja skaalattuja kuvia. Näin kuvat eivät vastaa kooltaan ja tasoltaan alkuperäisiä kuvia. Visuaalinen tangentti -lukuun olen hahmotellut lähdekirjallisuuden kuvat uudelleen Wordin piirrostyökalulla. Ilman lähdettä esitetyt kuvat ovat omia tuotoksiani, tosin vastaavia voi esiintyä kirjallisuudessa. Piirroksissa olen pyrkinyt silmämääräiseen matemaattiseen virheettömyyteen siten, että piirtämisessä ja tuotosten tarkastelussa olen hyödyntänyt zoomausta. Tällainen havainnollisuuteen perustuva piirrostapa on epätarkka verrattuna esimerkiksi GeoGebran käyttöön. Kumminkin katson, että dynaamisen matematiikan ohjelmiston symbolisen ja visuaalisen esitysmuodon integroituvuutta ei voi rinnastaa oppikirjoissa annettujen kuvien visuaalisuuteen. Harppi-viivain -menetelmäkin on nykyisin lähes korvautunut piirto-ohjelmilla. Itse asiassa tutkielman visuaalisen aineiston luonti haasteellisella Wordin piirrostyökalulla tuntui tukevan tietoista ajatteluani sekä käsin ja keholla ajatteluani ja auttoi kuvien havainnoinnissa tämän työn oppikirja-analyysissä.

Tutkielman toinen luku käsittelee ihmisen havainnointia ja ajattelutapoja. Matematiikan historia kertoo varhaisten ihmislajien matemaattisen ajattelun kehittymisestä. Ihmiskunnan alkuvaiheessa ihmislajien ainoana ajattelutapana on (todennäköisesti) ollut *intuitio* (engl. *intuition*), jota ihminen käyttää edelleen etenkin aistihavainnoissa. Intuitio yhdistetään myös lukio-opiskelijoiden visuaalisiin tangenttikäsityksiin (Tall 1986; Biza 2007). Luvun lopussa tarkastellaan konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista oppimisprosessimallia, jossa huomioidaan visuaalinen esitysmuoto ja intuitio, Tallin (2008, 2014) *matematiikan kolmea maailmaa* (engl. *three worlds of mathematics*).

Kolmas luku käsittelee oppikirjan matemaattisen tiedon havainnollisia esitysmuotoja. Sekä väistyvät että uudet peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmien perusteet ohjeistavat hyödyntämään matematiikan opiskelussa havainnollisia esitystapoja ja teknisiä apuvälineitä. Kuvantutkimuksen näkökulmasta staattisilla kuvilla, kuten oppikirjojen kuvilla, on lisäksi sellaisenaan merkityksensä havainnoijalle (Silfverberg 1999; Hatva 2009).

Neljäs luku sisältää tangenttitietoa ja tangentin perussovelluksia. Viidennessä luvussa tutustutaan Tallin (1986) tietokoneavusteiseen opetuskokeilututkimukseen käyrän jyrkkyyden ja visuaalisen tangentin käsitteiden ymmärtämisestä sekä Bizan (2007) tutkimukseen lukio-opiskelijoiden tangenttikäsityksistä. Laadullinen tutkimus lukion pitkän matematiikan oppikirjan visuaalisesta tangentista alkaa kuudennessa luvussa.

2 HAVAINNOINTI, INTUITIO JA MATEMATIIKKA

Havaitseminen määritellään eri tieteissä yksilöllisesti toimivien näkö- ja muiden aistien avulla havainnoitavan kohteen yksilölliseksi tulkinnaksi, kokemukseksi, ymmärtämiseksi (Hatva 2009, 86). Matemaattisen ajattelun perusasioihin kuuluu kyky havaita ja tunnistaa lukumäärä, koko, järjestys ja muoto (Boyer 1995, 23; Tall 2008). Ihminen on luultavasti havainnoinut luontoa, lukumääriä ja muotoja koko ihmislajien evoluution ajan, sillä eläimillä on todettu vastaavia kykyjä. *Tieteiden kuningatar* –teos luonnehtii matematiikan itsenäiseksi deduktiiviseksi tieteeksi, joka on kehittynyt pitkään havainnollisena ja on inhimillisenä ajatteluna ainutlaatuista. (Boyer 1995, 15 ja 23.)

Intuitio on käsitteenä laaja ja intuitiivinen ajattelu on kohdekohtaista ja yksilöllistä myös määrällisesti. Mediassa intuitiota tarkastellaan yleensä yleisellä tasolla. Tässä luvussa kuvailen hiukan tarkemmin, miten havainnointi ja intuitiivinen ajattelu kehittyivät ihmiskunnan varhaisessa vaiheessa osaksi ihmisen arkielämää ja orastavaa matemaattista ajattelua. Sitten selvittelen intuition ja luovuuden merkitystä nykyihmisen matemaattisessa ajattelussa, havainnollisen käsitteen ymmärtämistä sekä Tallin *matematiikan kolmea maailmaa.*

2.1 Matemaattisen ajattelun historiallinen kehittyminen

Esihistoriallinen aika on pääosin tutkimatonta ja nykytietämyksen mukaan oletettua epätarkemmin ajallisesti ja tiedollisesti määritettyä. *Intuitio* eli *intuitiivinen ajattelu* on ihmislajien evoluution alkuaikoina kehittynyt tiedostamaton, sanaton ajattelutapa, joka uskoo etenkin aistein havaitun todeksi. Varhaisten esivanhempiemme aivojen mekanismi kehittyi myös reagoimaan äärettömän nopeasti tehtyihin havaintoihin, mistä on ollut hyötyä ihmisyksilöille esimerkiksi eloonjäämistaistelussa evoluution aikana.

Tieteiden kuningatar –teoksessa arvioidaan, että ensin kenties esivanhempamme havaitsivat luvun, koon tai muodon siten, että ero havaittiin esimerkiksi yhden ja monen suden välillä, eläinlajien koon välillä tai esimerkiksi kuun ja puun muotojen välillä. Mahdollisesti myöhemmin kyettiin havaitsemaan, että esimerkiksi lampaita ja puita voi olla yksi, vaikka ne ovat muodoltaan erilaisia. Luultavasti käsitys luvusta muotoutui samoihin aikoihin kuin ihminen oppi ottamaan tulen vähitellen käyttöönsä arviolta 500 000— 300 000 vuotta sitten. Geometrian alkuperä on lukujen käyttöönottoakin epäselvempi. On osin arvailujen varassa, miksi esihistoriallisen ajan ihminen suosi geometrisia kuvioita, myös niiden säännöllisiä perusmuotoja sekä käytti kuvioita esimerkiksi taiteessa, keramiikassa ja tekstiileissä. Yleisesti geometrian katsotaan aluksi kehittyneen maanmittauksessa, rakentamisessa ja tähtitieteessä. (Boyer 1995, 23—31.)

Rationaalinen ajattelu on tietoista ajattelua, ja sen katsotaan kehittyneen sanattoman intuitiivisen ajattelun rinnalle. *Luonnollisten käsitteiden*, kuten puun tai nuotion, rinnalle alkoi muodostua abstrakteja *matemaattisia käsitteitä,* kuten lukuja, joita alettiin esittää havainnollisesti esimerkiksi omien sormien tai kivikasoiksi kerättyjen kivien tai puuhun kaiverrettujen kuvioiden avulla. Vähitellen kuvallisen esityksen rinnalle kehittyi alkeellisia laskutoimituksia. Kuvioita opittiin kaivertamaan muun muassa viiden ryhminä ihmisen käden sormien tapaan. Lukumerkintöjä esineistä on löydetty arviolta 30 000 vuoden takaiselta kivikaudelta. (emt. 26—27.)

Matemaattista tietoa oli jo paljon kirjoitustaidon kehittymisen alkuvaiheessa, noin kuusituhatta vuotta sitten. Boyerin (1995) teoksen mukaan luvuille oli erilaisia hankalia merkintätapoja, jotka estivät algebran kehittymistä. Geometrian kehittymisen mahdollisti se, että euklidisessa geometriassa ei tarvita rationaali- ja irrationaalilukuja vaan käytetään kuvioiden vastinosien suhteita. Kun kielellinen ilmaisu ja abstrakti ajattelu kehittyivät muutoin, niin geometrisia ongelmia voitiin todistaa täsmällisesti jo antiikin Kreikassa. Tällöin 300-luvulla eKr. *Eukleides* kirjoitti merkittävän teoksen *Alkeet* (lat. *Elementa*), joka sisältää silloista tunnettua geometriaa ja lukuteoriaa. Antiikin jälkeen geometria alkoi kehittyä voimakkaammin vasta uuden ajan alussa 1600-luvulla, jolloin myös tangentin ja derivaatan käsitteet alkoivat täsmentyä. Matematiikka on matemaattisen tiedon konstruoinnin intuitiivisen alkuvaiheen jälkeenkin kehittynyt pitkään havainnollisena. Täysin abstrakteja matematiikan aloja alkoi kehittyä vasta 1800-luvulla.

2.2 Intuition merkitys matematiikan opiskelussa

Intuitio on useiden eri tieteenalojen tutkimuksen kohde. Suomessa intuition tutkiminen on ollut viime vuosiin saakka vähäistä. Kumminkin ihmisten arkielämän ajattelu on edelleen suurelta osin vaivatonta, intuitiivista ajattelua (ks. Raami 2015, 246). Millainen intuition merkitys on erityisesti matematiikan opiskelussa, matemaattisessa ajattelussa ja matemaattisessa luovuudessa?

2.2.1 Intuitiivinen matemaattinen ajattelu

Fischbein (1987) esittää kirjassaan *Intuition in mathematics and science,* että kun yksilö tekee matematiikassa johtopäätöksiä ilman tarkkoja määritelmiä ja deduktiivista päättelyä, niin yksilö ajattelee intuitiivisesti. Ihmisyksilön jollain hetkellä omaama intuitio kohteesta — virheellinen tai virheetön — suuntaa ja aktivoi yksilön ajattelua.

Tietzen (1989) kuvailee intuitiota kirjassaan *Mathematical intuition*, että ihminen havainnoi intuitiivisesti aistein havainnoitavia kohteita. Intuitio on kohdekohtainen, syntyy ja kehittyy kohteesta saatujen havaintojen ja kokemusten kautta, alitajuisena, aluksi epätarkkana, vaistonvaraisena, usein virheellisenä, todistusta vailla olevana, henkilökohtaisena näkemyksenä. Erityisesti matemaattinen intuitio kehittyy yksilön fysikaalista arkielämää kuvailevilla matematiikan harjoitustehtävillä. Tietzen esittää intuition tutkijoiden laajalti hyväksymän ajatuksen, että yksilön matemaattinen intuitio kehittyy samalla kun yksilö konstruoi mielessään käsiteverkkoaan yhtenäiseksi ja ristiriidattomaksi.

Semadeni (2008) pohtii artikkelissaan intuitiota ja palaa Descartesin määritelmään: Intuitio on tietämistä ilman tietoista päättelyä. Semadeni viittaa Davisiin ja Hershiin todeten, että intuitio on hahmotustapana holistinen ja integroitu, ja sitä käytetään havainnollisten fysikaalisten mallien ymmärtämisessä. Semadeni jatkaa, että matemaattisen intuition tutkijoiden näkemys on, että kehittymätön intuitio rajoittaa yksilön ajattelua ja voi johtaa opiskelijan matematiikassa harhaan. Opiskelija voi kehittää näkemystään ja intuitiivista ymmärrystään käsitteestä silloin, kun hän omaksuu käsitteestä uuden ominaisuuden ja kykenee päättelemään ja perustelemaan sen avulla käsitteen jossain tilanteessa. Näin opiskelija voi lopulta omaksua käsitteen kaikki ominaisuudet virheettöminä, muuttumattomina, sisällöstä ja tilanteesta riippumattomina. Tilanteessa, jossa intuitio ja yksilön virheetön matemaattinen käsitys vastaavat toisiaan, ei voi tietää, kumpi milloinkin on mukana oppimisessa, ymmärtämisessä ja ratkaisuprosessissa.

2.2.2 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu on pääosin loogista, analyyttistä, rationaalista ajattelua, jossa pyritään tarkkaan tieteelliseen ajattelutapaan. Matemaattista ajattelua on hankala määritellä, mutta matemaattista ajattelua ilmentävät matematiikan ymmärtäminen ja osaaminen. Viholainen (2006) esittää, että Goldinin ja Kaputin (1996) mukaan yksilön matemaattinen ajattelu perustuu yksilön matemaattisista käsitteistä muodostamiin mielensisäisiin esityksiin. Näistä visuaalinen esitysmuoto on tärkeä matemaattisessa ajattelussa, mutta yksilön tieto käsitteestä voi olla myös esimerkiksi verbaalista, symbolista, toimintatapaan, laskumenetelmään tai tunteisiin liittyvää (Viholainen 2006 Goldinin 1998 mukaan). Sekä oppimisessa että ongelmanratkaisussa visuaalinen esitys voi kuvailla väitteitä ja tuloksia, korjata ajattelussa mahdollisesti ilmeneviä intuitiivisia ristiriitoja ja auttaa kehittämään käsityksiä kohteesta (Viholainen 2006 Arcavin 2003 mukaan).

Sierpinska (1994, 101—107) pohtii kirjassaan *Understanding in Mathematics*, mitä matematiikan ymmärtäminen tarkoittaa. Sierpinska kuvailee, että arkikielellä ilmaistuna matematiikkaa voi ymmärtää esimerkiksi hyvin, huonosti, täydellisesti, intuitiivisesti tai väärin, mutta tämä sanat eivät kuvaa hyvin matemaattista ajattelua. Sierpinska jatkaa, että yksilön matemaattinen ajattelu kehittyy yksilön oman toiminnan ja ajattelun avulla. Yksilön ajattelua voidaan aktivoida esimerkiksi harjoitustehtävillä, joissa käsite esitetään visuaalisena tai käytetään erilaisia ratkaisutapoja. Kumminkin matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen edellyttävät, että käytetään kaikille yhteistä *matematiikan kieltä,* kuten määritelmiä, aksioomia, lauseita ja symbolilaskentaa (ks. myös Nardi, Biza & Iannone 2008).

Fischbein määrittelee, että matematiikka on formaalia, deduktiivista ja tarkkaa, ja edellyttää yksilön toimintaa tai ajattelua. Käsitteiden väliset yhteydet määräytyvät aksioomien ja deduktion kautta. Näin matemaattiset ongelmat voidaan ratkaista määritelmien, aksioomien ja lauseiden avulla. Tästä johtuen abstrakti määritelmä on välttämätön täsmällisessä matemaattisessa päättelyssä. Se ei ole kuitenkaan kovin selittävä ja ymmärtämistä tukeva. (Viholainen 2006, 2008.) Vaikkakin abstrakti matematiikka on täysin riippumatonta havainnollisista matemaattisesti epätarkoista representaatioista, niin erilaisten esitystapojen käytöstä on kognitiivisesta näkökulmasta katsottuna hyötyä. Käsitteiden havainnolliset esitysmuodot vahvistavat etenkin luovaa matemaattista ajattelua. Viholainen jatkaa, että matemaattista ajattelua ja toimintaa voi syntyä niinkin, että opiskelija pyrkii vahvistamaan käsitteen määritelmän ja havainnollisten esitysmuotojen välistä yhteyttä. Havainnollisten esitysmuotojen ja määritelmän rajapinnan ylittäminen onnistuu harjoittelun, pohdinnan ja syvällisen ymmärtämisen avulla. Silloin kun opiskelija pystyy selittämään, miten ja miksi esitykset vastaavat määritelmää, niin tällä tavoin Hähkiöniemen mukaan käsitteellinen ymmärtäminen ja perusteluprosessi tulevat syvällisemmiksi. (Viholainen 2006.)

2.2.3 Luova matemaattinen ajattelu

Myöskään luovuudelle ei ole yksikäsitteistä määritelmää. Pehkosen (2012) mukaan *luovaa ajattelua* on sekin, kun yksilö luo omaksumastaan tiedosta uusia kokonaisuuksia. Esimerkiksi ongelmanratkaisu ja matemaattisen käsitteen konstruointi havainnollisena vaativat opitun tiedon yhdistämistä uudella tavalla ja kehittävät siten opiskelijoiden ajattelua ja luovuutta. Luova matemaattinen ajattelu edellyttää riittävästi matemaattista tietoa mutta yksistään suuri määrä abstraktia tietoa voi rajoittaa ajattelua liikaa.

Opiskelijoiden matemaattinen intuitio ja luovuus kehittyvät yksilöllisesti vähitellen, kun opiskelijat ratkaisevat erityyppisiä matemaattisia ongelmia, pohtivat käsitteiden yhteyksiä, ja kun opiskelijat onnistuvat yhdistämään käsitteiden teorian niiden havainnollisiin esitysmuotoihin. Kun opiskelijan matemaattinen intuitio on kehittynyt virheettömäksi, niin matemaattinen päättely vapautuu ennakko-odotuksista, mikä laajentaa näkemyksiä ja lisää luovuudelle tyypillistä ajattelun joustavuutta (Tietzen 1989; Tall 2008; Viholainen 2008). Intuitio ja luovuus voivat tuottaa selkeän ajatuksen monimutkaisesta, jopa kaaosmaisesta tiedosta (Raami 2015).

2.3 Havainnollisen käsitteen ymmärtäminen

Esi-isämme havainnoivat eri aistein arkielämän kohteita, muodostivat niistä mielikuvia tai vertasivat tiedostamattomasti ja salamannopeasti niitä aiempiin havainnoimiinsa kohteisiin ja niistä saamiinsa kokemuksiin ymmärtäen mielellään uuden kohteen samankaltaiseksi aiemmin kohdattujen kanssa. *Luonnolliset käsitteet,* kuten koira, kukka tai puu, ovat ominaisuuksiltaan epäselvärajaisia ja ihminen ei yleensä syvenny tutkimaan ja erottelemaan niiden ominaisuuksia. (Silfverberg 1999; Hatva 2009.)

Nykyisen *konstruktivistisen oppimiskäsityksen* mukaan yksilön matemaattinen tieto on aluksi pitkään hajanaista ja sisältää yksilön intuitiivisia käsityksiä ja muistikuvia (Nardi ym. 2008). Tall (2014) muistuttaa, että ihminen käyttää samaa ″henkilökohtaista havainnointikoneistoaan″ kaikkien kohteidensa havainnointiin. Havainnointi luo, muokkaa ja kehittää havainnoijan käsityksiä kohteesta.

Mielikuva (engl. *image*) on ensivaiheen käsitys mistä tahansa uudesta käsitteestä tai havainnoinnin kohteesta. Mielikuva on mielensisäinen kuva käsitteestä. Mielikuvansa sisältöä yksilö voi kuvailla piirroksena. Mielikuva muodostuu yksilöllisesti, alitajuisesti, pääosin intuition ja eri aistien tiedonvälityksen kautta. Siihen vaikuttavat muun muassa tunteet, arvot, asenteet, uskomukset ja ennakkoluulot. Havainnointi aktivoi lisäksi yksilön mielikuvitusta ja luovuutta. Kosslynin mielikuvateorian mukaan kohteesta näin valikoiden poimitut tiedonpalaset täydentyvät salamannopeasti yksilön aivoissa henkilökohtaiseksi mielikuvaksi. (Hatva 2009, 31—39.)

Hatva (2009) jatkaa, että mentaalinen eli mielensisäinen mielikuva ei ole staattinen. Mielikuva aktivoi ja ohjaa yksilön uuden tiedon käsittelyä aiemman suuntaisena, muuntuu ja kehittyy pääosin intuitiivisesti, jos uusia ominaisuuksia havaitaan tai lopulta unohtuu. Esimerkiksi piirros tangentista kuvaa vain osaa piirtäjän senhetkisestä käsityksestä tangentista.

Käsitekuva kaaviomaisena ajattelumallina muodostuu ja vahvistuu mielikuvan pohjalta, kun samaa luonnollista käsitettä havainnoidaan toistuvasti. Tällöin ihminen ei erottele yksittäisiä ominaisuuksia vaan havaitsee kohteen tai osan siitä kokonaisuutena, esimerkiksi lintuna tai ihmiskasvoina. (Hatva 2009, 298.) Visuaalisesti esitetystä uudesta matemaattisesta käsitteestä opiskelijoiden tulisi sen sijaan tietoisesti kehittää ja korjata näkemystään muodostamansa mielikuvan, uusien havaintojensa, matemaattisen tiedon, intuition ja määritelmän avulla.

Käsitekuva (engl. *concept image*) on Vinnerin ja Tallin 1980-luvulla määrittelemä yksilöllinen mielensisäinen kognitiivinen kokonaiskuva matemaattisesta käsitteestä, joka sisältää opiskelijan omaksumat esitystavat käsitteestä, käsitteen mentaaliset ominaisuudet ja symboliset prosessit. Opiskelijan käsitekuvan tulisi vastata käsitteen verbaalista ja symbolista esitysmuotoa sekä määritelmää. (Viholainen 2006.) Yksistään tiettyyn tilanteeseen soveltuvaa käsitekuvaa opiskelija ei kykene liittämään matemaattiseen tietoonsa, jolloin se jää irralliseksi.

Vinnerin 1980-luvulla nimeämä *geneerinen tangentti* (engl. *generic tangent*) on vahva mielensisäinen kuva tangentista, joka muotoutuu geometriassa ympyrän tangentin käsitteen oppimisprosessissa. Geneerinen tangentti sivuaa ympyrän kaarta tai sitä muistuttavaa käyrää yhdessä pisteessä leikkaamatta sitä. (Tall 1986; Biza 2007; Nardi ym. 2008.) Kun sitten esimerkiksi geneerisen tangentin omaksunut opiskelija kuulee tai näkee sanan ″tangentti″, niin hänen mieleensä tulee tangentti, jolla on geneerisen tangentin ominaisuudet. Hän voi piirtää siitä kuvan tai voi kuvailla sitä sanoin. (Vinner 1991.)

Opiskelijoiden käsitekuvat tangentista vahvistuvat helposti lukioaikana pintapuolisina aiemmin omaksutun tiedon ja asenteiden mukaisina, ellei uusi tilanne saa heitä pohtimaan ja muokkaamaan omaa käsitekuvaansa (Biza 2007; Biza & Zachariades 2010). Opiskelija ei yleensä tarvitse matematiikan tehtävissä koko mielensisäistä käsitekuvaansa. Kehittynyt käsitekuva voi Tallin mukaan sisältää aksioomista ja määritelmistä tuotetun käsitekuvan osan, *formaalin kuvan* (engl. *formal image*). Tall itse katsoo, että sisältöero hänen ja Vinnerin käsitekuvissa on epäolennainen. Käytännössä määritelmä jää yleensä irralliseksi opiskelijoiden käsitekuvissa (esim. Viholainen 2006).

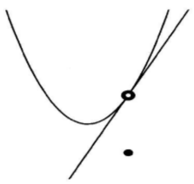
Kun käsitekuva on objektitasoinen eli käsitetasoinen, niin käsitekuvassa on tapahtunut merkittäviä muutoksia. Biza (2007) esittää, että Harelin ja Tallin (1989) mukaan uusi tieto, tiedon uudelleenmuodostus, poisoppiminen ja tiedon siirtäminen johtavat *käsitteelliseen muutokseen*. Käsitetason saavuttanut opiskelija pystyy havaitsemaan käsitteen ominaisuuksia ja muodostamaan siitä yhteyksiä tietorakenteensa muihin käsitteisiin.

Henkilökohtainen käsitemääritelmä (engl. *personal concept definition*) on Tallin ja Vinnerin 1980-luvulla määrittelemä henkilökohtainen tulkinta *käsitteen määritelmästä* (engl. *concept definition*). Se on riittävä yleensä yksittäisissä tilanteissa. Esimerkiksi ympyrän tangentin määritelmän pohjalta muodostunut henkilökohtainen käsitemääritelmä voi integroitua geneeriseen tangenttiin ja opiskelija käyttää sitä myös tangentin määritelmänä. (Nardi ym. 2008.)

2.4 Havainnollisten esitysmuotojen ja määritelmän yhdistämisen merkitys

Tutkimusten mukaan opiskelijoiden mielensisäiset käsitekuvat matemaattisista käsitteistä kehittyvät, kun he onnistuvat tilanteittain integroimaan määritelmän käsitteen havainnollisiin esitystapoihin. Näin käsitekuvasta muodostuu ristiriidaton kokonaisuus ja opiskelijat osaavat selittää määritelmän pohjalta, miten ja miksi heidän henkilökohtainen käsitekuvansa on tosi. (Viholainen 2006.) Elleivät opiskelijat kuitenkaan pyri yhdistämään käsitekuvansa visuaaliseen ja symboliseen osaan määritelmää, jää käsitekuva helposti virheelliseksi.

Määritelmän hyödyntämättömyys tulee esille Viholaisen (2006) tutkimuksessa, jossa on mukana kuuden suomalaisen ja yhden ruotsalaisen yliopiston yhteensä 166 matematiikan aineopintojen loppuvaiheen opettajaopiskelijaa. Heistä kahdeksan opiskelijaa osallistuu kirjallisen testin lisäksi haastatteluun, jossa he perustelevat, ovatko annetut kuusi yhtälö- ja kuvaajamuotoista epäjatkuvaa testifunktiota derivoituvia — ja jos ovat, niin miksi. Heillä on käytössään jatkuvuuden, derivaatan ja derivoituvuuden määritelmät, kynä ja paperia.



KUVA 1. Paraabelin epäjatkuvuuspisteeseen piirretty tangentti (Viholainen 2011)

Eräs naisopiskelija perustelee derivoituvuuden piirtämällä paraabelifunktion epäjatkuvuuspisteen kautta suoran, jolla hän yhdistää silmämääräisesti funktion osat ja saa suoran näyttämään tangentilta. Funktion epäjatkuvuuden opiskelija näkee kuvaajasta (kuva 1). Funktion toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret paraabelin epäjatkuvuuspisteessä, joten pisteessä on raja-arvo mutta funktion arvo epäjatkuvuuspisteessä on eri suuri kuin funktion raja-arvo.

Naisopiskelija yrittää muistella derivoituvuuden ja jatkuvuuden yhteyttä ja piirtää esimerkin kärkipisteestä useine ″tangentteineen″, mutta ei muista yhteyttä. Lopulta hän katsoo uskottavammaksi sen, että funktio on derivoituva pisteessä, koska hän onnistuu piirtämään tangentin pisteeseen. Hän ei hyödynnä annettua derivaatan määritelmää vaan perustelee vastauksensa visuaalisesti. Jos hänen käsityksensä visuaalisesta tangentista olisi matemaattisesti virheetön, niin visuaalinen perustelu olisi käyttökelpoinen mutta hän luottaa näköhavaintoonsa. Tähän työhön sisältyvässä oppikirjatutkimuksessa sitten huomasin, että myös *Pitkä matematiikka*-sarjan *Derivaatan* (Kangasaho ym. 2014c, 42 ja 51) havainnollisen määritelmän funktion derivoituvuudesta pisteessä voi ymmärtää vastaavan naisopiskelijan perustelua.

Neljä vuotta matematiikkaa yliopistossa opiskellut miesopiskelija taasen tutkii testifunktioiden derivoituvuutta symbolisesti. Hän perustelee paloittain määritellyn funktion

$$i(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

derivoituvuuden epäjatkuvuuspisteessä sillä, että funktion kahden eri lausekkeen erotusosamäärien raja-arvot ovat yhtä suuret muuttujan arvolla $x = 1$. Funktion kuvaajasta hän näkee funktion epäjatkuvaksi ja muistaa jatkuvuuden olevan ehto derivoituvuudelle mutta ei ole varma, muistaako väärin. Lopulta hän arvioi toispuoleisten derivaattojen yhtäsuuruuden tärkeämmäksi kuin visuaalisen tiedon. Kuitenkaan hän ei tarkista symbolisesti funktion jatkuvuutta kyseisessä pisteessä. (Viholainen 2006, 2011.)

2.5 Matematiikan kolme maailmaa

Toisia ihmisiä ovat kautta aikojen kiinnostaneet enemmän geometriset muodot, toisia taas havainnolliset lukuihin ja määriin liittyvät asiat (Boyer 1995, 35). Tutkimusten mukaan osa ihmisistä käyttää molempia lähestymistapoja ajattelussaan. Gray ja Tall ovat tutkineet matemaattisten käsitteiden konstruointia konstruktivistisen oppimiskäsityksen pohjalta matemaattisen tiedon kognitiivisessa kehittymisessä muotoina ja prosesseina. (Viholainen 2008.)

Havaintomaailmassa (engl. *conceptual-embodied world*) ihminen havainnoi kohteita eri aistein. Ensin kohteista muodostuu mielensisäisiä intuitiivisia mielikuvia ja käsitekuvia. Sitten kohteiden ominaisuuksia opitaan erittelemään sekä kuvailemaan verbaalisesti ja lopulta kohteet osataan luokitella hierarkkisiksi abstrakteiksi ryhmiksi. (Tall 2008.) Vähitellen esimerkiksi käyrän ja sen tangentin jyrkkyys tai horisontaalinen suoruus voidaan nähdä havaintomaailmassa funktion muutosnopeutena. Funktion muutos funktion pisteessä havaitaan kineettisenä, kun kynää tai kättä kuljetetaan tangenttina funktion kuvaajaa pitkin. (Viholainen 2008.) Havainnoista muodostuvat yksilölliset käsitykset voivat vähitellen abstrahoitua. Tallin (2008) mukaan esimerkiksi piste ymmärretään aluksi konkreettina ja näkyvänä, mutta vähitellen piste kuitenkin opitaan tuntemaan abstraktina käsitteenä. Tall (2014) muistuttaa, että suoran voi aina piirtää euklidisessa geometriassa mutta havaintomaailman suora ei voi muodostua pisteistä. Geometriassa pisteitä voi valita suoralta ja pisteiden desimaalilukumuodoilla voi laskea symbolimaailmassa. Näin opiskelijoiden käsitykset voivat kumminkin kehittyä abstrakteiksi, vaikka opiskelijat ratkaisevat geometrian tehtäviä havainto- tai symbolimaailman totuuksina.

Symbolimaailmassa (engl. *proceptual-symbolic world*) käsitteet ja niiden ominaisuudet saadaan näkyviksi laskutoimituksilla. Laskeminen automatisoituu harjoittelemalla ja oppija alkaa nähdä käsitteet kokonaisuutena. Laskutoimituksen eri vaiheita ei enää tiedosteta. Oppiminen edistyy yksilöllisesti samalla kun yhdistellään käsitteiden ominaisuuksia havaintoesityksistä ja laskuprosesseista. Symbolit kuvaavat sekä laskutoimituksia että käsitteitä. Esimerkiksi $\frac{1}{2}$ kuvaa prosessina luvun yksi jakamista luvulla kaksi ja toisaalta käsitettä yksi kahdesosa. Tall ja Gray käyttävät prosessin, prosessin tuotoksen eli käsitteen ja sekä prosessia että käsitettä kuvaavan symbolin yhdistelmästä sanaa *procept*. Derivaatan käsite saadaan näkyväksi laskemalla keskimääräisiä erotusosamäärän muutoksia vähitellen lyhenevillä funktion väleillä. (Tall 2008; Viholainen 2008.)

Teoriamaailma (engl. *formal-axiomatic world*) perustuu käsitteiden ominaisuuksiin, ja matemaattinen ymmärtäminen ja ajattelu ovat abstraktiotasolla. Havainnollinen ja symbolinen esitys voivat yhdistyä aksioomiin, määritelmiin ja lauseisiin, kun löydetään käsitteen ominaisuuksia, joita voi laskea. Ymmärtäminen ja intuitio yhdistyvät tiedostamattomasti, kun intuitio integroituu käsitteeseen. Tällöin intuitiiviset ennakko-odotukset jäävät pois ja ajattelu vapautuu. Tilalle tulee luovuutta ja uusia tapoja yhdistellä tietoa. (Tall 2008; Viholainen 2008.)

Tallin (2008) matematiikan kolmen maailman

- *havaintomaailmassa* todeksi uskotaan kaikki, jonka voi aistein havaita tai nähdä tai kuvitella nähdyksi esimerkiksi sanallisen kuvailun perusteella
- *symbolimaailmassa* symboliset laskutoimitukset luovat totuuden
- *teoriamaailmassa* totuuden luovat aksioomat, määritelmät ja deduktiivinen todistusmenettely.

Tallin (2008) mukaan matemaattista ajattelua edustavat vanhemmat teoriat, kuten van Hielen teoria, eivät huomioi intuitiota vaan van Hielen teorian alimmalla tasolla opiskelija osaa jo tunnistaa, nimetä ja vertailla geometrisia kuvioita. Tästä syystä Tall katsoo, että van Hielen teoria ei riitä matematiikan kolmen maailman mukaiseen konstruktivistiseen matemaattisen ajattelun ymmärtämiseen. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan havaintomaailmassa kuviot ymmärretään aluksi yksilöllisesti tiedostamatta kuvion matemaattisia ominaisuuksia.

Kaikissa kolmessa maailmassa opiskelijan ajattelu voi edetä abstraktille tasolle. Opiskelijan kognitiivinen kehittyminen riippuu siitä, miten hän havainnoi ja aktivoi toimintaansa, miten suoriutuu laskutoimituksista ja niiden toistoista, miten hän ymmärtää luonnollista ja matematiikan kieltä sekä miten hän pystyy yhdistämään eri maailmat toisiinsa (Tall 2008; Viholainen 2008.) Toisaalta matematiikan kolmen maailman voi ajatella kuvaavan myös ihmisen matemaattisen ajattelun kehittymistä historiallisesti.

3 MATEMATIIKAN OPPIKIRJAN HAVAINNOLLISET ESITYSMUODOT

Tutkijat jaottelevat matematiikan oppikirjojen päällekkäisiä esitysmuotoja muutamilla hieman toisistaan poikkeavilla perusteilla. Jaan oppikirjan esitystavat tässä työssä visuaaliseen, symboliseen ja verbaaliseen esitysmuotoon mukaillen Tallin matematiikan kolmea maailmaa. Selvittelen lisäksi, millaista lukio-opiskelijoille sopivaa lisätietoa visuaalisesta tangentista löytyy internetistä.

3.1 Visuaalinen esitysmuoto

Visuaalinen tarkoittaa silmin havainnoitavaa tai nähtävää. Näönvarainen havainnointi eli geometrinen hahmottamiskyky on yksilöllistä. *Kuvaksi* voidaan sanoa mitä tahansa kuvaa, kuten valokuvaa, piirrosta, karttaa, funktion kuvaajaa tai graafia (Hatva 2009, 86). Kuvallinen esitys vaatii havainnoijalta muun muassa kyvyn nähdä kuvan irrallisena, erikokoisena, toisessa paikassa tai asennossa, havaita eroavaisuuksia ja samanmuotoisuutta kohteiden välillä. Kuvallisen tiedon konstruoinnissa tarvitaan kuvallisen tiedon muistamista sekä mielikuvitusta, jolla luodaan mielensisäisiä variaatioita kuvasta. (esim. Silfverberg 1999, 111; Viholainen 2008.) Visuaalisen objektin kognitiiviseen ymmärtämiseen liittyy yleensäkin monenlaisia yksilöllisiä eroja.

Visuaalista esitysmuotoa ei Eisenbergin ja Dreyfusin (1991) mukaan välttämättä pidetä matemaattisena (Viholainen 2008). Ihminen ymmärtää mielellään minkä tahansa abstraktin kuvan *implisiittisesti* eli alitajuisesti, intuitiivisesti ja kokee sen arkielämän luonnollista käsitettä kuvaavana (Silfverberg 1999; Raami 2015, 242). Esimerkiksi toisensa leikkaavat suorat näyttävät jakavan pinnan neljään osaan tai ihminen ei aluksi näe eroa suoran, puolisuoran ja janan välillä; puolisuora ja jana piirretään lyhyenä suorana viivana samoin kuin suora, joka voidaan nähdä vain mielikuvituksen avulla (Silfverberg 1999).

Tässä työssä selvitellään visuaalisen tangentin ymmärtämistä intuition ja visuaalisen tangentin tunnettujen merkitysten pohjalta. Intuitiiviseen näkökulmaan sisältyy luonnostaan kuvantutkimuksen tieto luonnollisten käsitteiden ymmärtämisestä sekä prototyyppiteoriat matemaattisten käsitteiden ymmärtämisestä.

3.1.1 Kuvallisen tiedon merkitys

Hatvan (2009) tiedotusopin väitöstyö, *Merkityksen välittäminen kuvan avulla*, käsittelee kuvallisen tiedon ajatteluprosessia. Väitöksessään Hatva luo kuvallisen tiedon omaksumisen perustekijöistä hypoteesimallin yhteisiä ajatuksia sisältävien kognitiotieteen ja kuvan merkityksiä tutkivan kuvasemiotiikan pohjalta. Hatva kirjoittaa käyttäneensä samaa näkökulmaa aapiskirjojen kuvitusta tutkivassa lisensiaatintyössään vuodelta 1992, *Ilmaisulliset keinot aapiskirjojen kuvituksessa*. Väitöstyön johdantoon Hatva on koonnut samansuuntaisia havaitsemisen teorioita ja tutkimustietoa eri tieteistä. Paljon uutta tietoa on Hatvan mukaan saatu viime vuosikymmeninä muun muassa Kosslynin kognitiotieteen tutkimuksesta. Kuitenkaan yhtenäistä teoriaa ei ole onnistuttu luomaan.

Kosslynin (1996, 1998) mielikuvateoria luo yhteyden havaitsemisen, visuaalisen kuvittelun ja mielikuvan välille, sillä havaitseminen ja kuvittelu tapahtuvat samassa alueessa aivoja. Kosslynin mukaan *mielikuva* on visuaalinen kuvio, joka ei synny suoraan välittömän havainnon pohjalta. Havainnot, mielikuvitus, intuitio ja luovuus toimivat yhteydessä toisiinsa. Uudesta kuvasta tunnistetaan ensin mahdolliset aiemmin omaksutut piirteet. Tällöin muistista haetaan tilanteeseen sopiva kuva tai sen osia, jotka sopivat uuteen kuvaan. (Hatva 2009, 31—39.) Esimerkiksi opiskelija voi poimia mielensisäisestä käsitekuvastaan ympyrän tangentin tai osan siitä ja sovitella sitä kuvaan toisentyyppisen käyrän tangentista (Biza 2007).

Yksinkertainen viivapiirros matematiikan oppikirjassa voi tuottaa jo monenlaisia mielikuvia. Geometrinen kuvio konstruoituu opiskelijan mielessä Kosslynin mukaan samaan tapaan kuin kuvion piirtäminen mallista onnistuu paperille (Hatva 2009, 69). Jokaisella meistä lienee kokemuksia siitä, että mallin mukaan piirtäminen ei ole helppoa. Jotta oma piirros vastaisi mallikuviota, on mallikuvion yksityiskohtiin perehdyttävä. Havainnoinnissa viivapiirroksen uloimmat osat huomioidaan tutkimusten mukaan ensin, kuten kuvan reunaviivat tai objektien ääriviivat. Sitten piirrosta katsotaan yksilöllisesti kohta kohdalta ja sen jälkeen kuvasta luodaan henkilökohtainen näkemys. Helppolukuisessa piirroksessa esiintyy Bertinin (1983) mukaan korkeintaan kolme tärkeää tekijää ja piirroksen yksityiskohdat voidaan havaita. Kuvakielen mukaan yksi kuva ilman sanallista selitystä ei yleensä riitä kuvaamaan kohdetta määritteleviä ominaisuuksia vaan havaittuja ominaisuuksia täytyy eritellä ja yhdistellä vähintään kuudesta eri kuvasta. (Hatva 2009, 76.)

Ensin kuvio havaitaan Tallia (2008) mukaillen esimerkiksi kolmioksi, sen jälkeen kolmio voidaan yksilöllisesti havaita esimerkiksi suorakulmaiseksi, tylppäkulmaiseksi, teräväkulmaiseksi, tasasivuiseksi tai tasakylkiseksi kolmioksi. Useamman kolmion havainnoinnin jälkeen havainnoija voi muodostaa mielessään kuvan tyypillisestä kolmiosta. Geometrian visuaalisten käsitteiden hierarkkinen matemaattinen luokittelu sen sijaan koetaan yleensä hankalaksi ja siihen ei mielellään alkuvaiheessa ryhdytä. (Silfverberg 1999, 83—86.) Visuaalisten objektien luokittelun hankaluutta lisää tavallisesti objektien samankaltaisuus ja vähentää objektien erilaisuus (Hatva 2009, 35).

Yhdessä tai jokusessa kuvassa voidaan esittää yleensä vain osa matemaattisen käsitteen kokonaisvariaatiosta. Käsitykset kumminkin kehittyvät käsitteen monipuolisen kuvallisen esityksen avulla (Tall 1986; Silfverberg 1999, 99; Biza 2007). Silfverbergin (1999) mukaan opiskelijan taitoon määritellä käsite — kokemansa käsitteen kuvallisen merkityssisällön ja havaitsemansa käsitteen ominaisuuksien pohjalta — vaikuttaa se, kuinka riittävät ja välttämättömät ehdot opiskelija pystyy kokoamaan saamastaan visuaalisesta tiedosta. Käsite voi yleistyä visuaalisten esimerkkien ohella myös esimerkiksi kuvioryhmän avulla, jossa hyödynnetään ihmisen sisäsyntyistä intuitiivista, holistista, integroitua tapaa havainnoida kuvia. Hahmolakien mukaan esimerkiksi kohteiden läheisyys, jatkuvuus tai samankaltaisuus voi saada katsojan kokemaan kohteet samanlaisiksi, samaan joukkoon kuuluviksi (Hatva 2009, 79). Kuvioryhmän voi muodostaa esimerkiksi joukko ympyrän ja muiden käyrien tangentteja. Toisaalta jollakin välillä jatkuvan funktion kuvaajassa voi näkyä sekä derivoituvuus-, kärkipiste- että käännepistekohtia mutta myös epäjatkuvuuskohtia. Tällaisesta kuvaajasta huomioidaan ehkä helpommin pisteiden lähiympäristöt.

Ihminen yhdistää näkö- ja kuulohavaintoina saamaansa kuvaa ja tekstitietoa samoissa aivoalueissa. Tärkeiden asioiden merkitseminen ja nimeäminen kuvaan sekä kuvan kuvailu verbaalisesti (sanoin tai tekstinä) voi estää virhekäsitysten muodostumista kuvasta. Harhaanjohtava tieto sen sijaan hankaloittaa käsitteen ominaisuuksien tunnistamista kuvasta. (Hatva 2009, 56.)

3.1.2 Hatvan mukaisia kuvallisen tiedon omaksumisen perustekijöitä

Hatvan (2009) väitöstutkimuksessa kolme koeryhmää luki erityyppisiä kuvitettuja ja kuvittamattomia lehtiartikkelikoeversioita. Kuvatyyppejä oli useita erilaisia. Koeryhminä oli oikeustieteen ja taidealan opiskelijoita sekä pieni ryhmä ammattitaiteilijoita, yhteensä 88. Pilottikokeessa oli neljä satunnaista vapaaehtoista. Tutkimustuloksissa havainnoijien välillä oli suuria eroja mutta koeryhmien välillä erot olivat pieniä. Kuvitetuista artikkeleista kuvia muistettiin kolme kertaa enemmän kuin tekstiä vielä kymmenen viikon kuluttua lukemisesta. Muistelu onnistui useimmilta ″katselemalla″ alkuperäisiä sivuja. Kuvat eivät silti lisänneet muistamista määrällisesti. Yleisesti kuvien hyödyntämiseen vaikuttavat myös havainnoijan taustatiedot ja motivaatio. Epämiellyttäviksi tai miellyttäviksi koetut kuvat jäivät parhaiten mieleen. Hatva huomauttaa, että joidenkin tutkijoiden mukaan kuvien käyttö ei välttämättä auta muistamisessa, mutta myös aihe, tilanne tai kuvien valinta voivat vaikuttaa.

Hatvan tutkimustulokset tukevat näkemystä, että katsoja poimii valikoiden kuvasta eri aisteilla osia ja täydentää kuvan mielessään ehtimättä nähdä kuvaa kokonaisuudessaan. Väärinymmärrettyäkin kuvaa täydennetään tai muovataan alkuvaiheen käsityksen suuntaisena (ks. myös Biza 2007). Kun katselusta oli kulunut aikaa, niin koehenkilöiden muistamat yksityiskohdat kuvista ja tekstistä alkoivat vähitellen muistuttaa heidän varhaisempia näkemyksiään (Hatva 2009, 303—306).

Hatvan (2009, tiivistelmä) mukaan *kuvasuunnittelun perustekijöitä ovat kuvallisen tiedon omaksumisen näkökulmasta*

- esteettinen ulkoasu, joka luo heti myönteisiä emootioita havainnoijassa
- värit ja kuvien koko*,* jotka ohjaavat katsetta ja mahdollistavat kuvan yksityiskohtien erottumisen
- yksinkertaistetut piirrokset*,* jotka ovat helppolukuisia ja joissa tärkeät asiat saadaan esille
- kuvan katselun ohjaaminen tekstin avulla**,** jolloin kuvan ymmärtäminen on yksikäsitteisempää.

Hatva (2009, 305—315) vertaa tutkimuksensa tuloksia kognitiotutkimuksen näkökulmiin havaitsemisesta, kuten Kosslynin ja Pavion tutkimuksiin sekä kansainvälisten kuvantutkimuksen tutkijoiden havainnoinnin teorioihin. Tutkimuksia kuvan ymmärtämisestä on siis jonkun verran viime vuosikymmeniltä, mutta etenkin kirjan kuvittamiseen liittyvää teoriatietoa on tuotettu lopulta melko vähän.

3.1.3 Prototyyppiteoriat

Silfverberg (1999, 67—76) esittelee hiukan eri sisältöisiä prototyyppiteorioita, joita on luotu luonnollisten käsitteiden ohella myös geometrian käsitteiden ymmärtämisestä. Prototyyppiteorioiden mukaan opiskelijat voivat muodostaa epäselvärajaisesta visuaalisina esimerkkeinä annetusta matemaattisesta käsitteestä aluksi näkemyksen, jossa vahvistuvat eri tavoin useissa esimerkeissä esiintyvät käsitteen ominaisuudet, ja näin sitten muodostaa tyypillisen käsitteen edustajan eli *prototyypin*. Prototyyppi jää yleensä irralleen käsitteen määritelmästä. Kuitenkaan yksi visuaalinen esimerkki ei riitä prototyypin muodostamiseen. Prototyyppi ei myöskään yleensä edusta mitään yksittäistä esimerkkiä. Kun tämäntyyppinen käsitteen oppimisprosessi alkaa unohtua, niin se vähitellen palautuu alkuvaiheen käsityksiä muistuttavaksi.

Trzcieniecka-Schneiderin (1993) mukaan käsite voidaan oppia kahdella tavalla: esimerkkitapausten avulla tai määritelmänä. Kun useassa esimerkkitapauksessa esiintyy käsitteen sama piirre tai ominaisuus, niin sen merkitys korostuu, vaikka piirre olisi epäoleellinen. Jos taasen esimerkkejä on vähän, käsitteen oleellisten ja epäoleellisten ominaisuuksien erottaminen on mahdotonta. Määritelmä jää molemmissa tavoissa helposti erilliseksi. Käsitteen visuaalinen määritelmä yksistään on taasen visuaaliselta variaatioltaan vähäinen. (Silfverberg 1999, 76.)

Silfverberg (1999, 80—87, 198—199) jatkaa, että Fischbeinin (1993) mukaan geometrian käsitteissä on visuaalinen osa ja osa geometrisen käsitteen sisällöstä muotoutuu intuitiivisesti visuaalisen esitysmuodon kautta, vaikka käsitteen määritelmä hallittaisiin. Silfverberg ottaa muun muassa esille, että Hershkowitzin (1990) mukaan visuaalisten esimerkkien epäolennaiset piirteet katsotaan käsitteen ominaisuuksiksi kahdella virheellisellä tavalla. Esimerkiksi opiskelija katselee ensin neliötä, jonka kerrotaan olevan nelikulmio. Tällöin opiskelijan myöhemmin näkemä suunnikas ei voi hänestä olla nelikulmio, koska siinä on eri suuria kulmia, vaikka sivut olisivat keskenään yhtä pitkät. Toinen virheellinen tapa on kiinnittää ominaisuus kuvaan. Esimerkiksi, kun kolmion korkeusjana näkyy esimerkkikolmion sisällä, niin opiskelija voi piirtää jatkossakin kaikkiin kolmioihin korkeusjanat kolmion sisään, tarvittaessa vinoon kantasivua vastaan. Kun havainnoija ymmärtää tällaiset prototyypin epäolennaiset ominaisuudet käsitteen ominaisuuksiksi, se rajoittaa havainnoijan käsitteestä kuvittelemaa visuaalista variaatiota.

3.1.4 Silfverbergin geometrisen käsitetiedon kehittymisen malli

Silfverberg (1999, 196—208) on tutkinut väitöstyössään geometristen tietorakenteiden kehittymistä ja vertaa 1950-luvulta olevaa van Hielen teoriaa uudempiin geometrista oppimista enemmän yksittäisten käsitteiden pohjalta hahmottaviin teorioihin ja tietoon, myös prototyyppiteorioihin. Tutkimuksen kohteena oli yhden tamperelaisen yläasteen lähes kaikki 262 oppilasta vuonna 1992. Vuonna 1994 tutkittiin uudelleen aikaisemmat 7. luokkalaiset 9. vuosiluokan oppilaina.

Ensimmäinen osuus tutki oppilaiden geometrisen oppimisen yksilöllisiä yleisedellytyksiä:

- spatiaalista ajattelua
- loogista päättelytaitoa ja
- visuaalista muistikapasiteettia.

Toisessa osuudessa käytettiin testikuvioina monikulmioita, kuten nelikulmioita ja kolmioita. Silfverberg löysi aiempaa tutkimustietoa yhdistämällä peruskoulun oppilaiden geometristen tietorakenteiden kehittymisen osatekijöitä ja luo tältä pohjalta oman mallinsa.

Silfverberg (1999, 208) esittää hypoteettisen *geometrisen käsitetiedon kehittymisen mallin* yksilöllisesti rakentuvina prosesseina:

1. prototyyppiprosessit
2. visuaalinen variointi
3. määrittelytaidot
4. käsitteiden suhteet.

Mallin mukaan oppilas määrittää alkuvaiheessa uuden käsitteen luomalla mielikuvan prototyypistä. *Visuaalisen varioinnin kyky* on Silfverbergin mukaan lähinnä oppilaan kyky tuottaa mielikuvituksensa avulla erilaisia esimerkkejä havainnoimistaan geometrisista käsitteistä. Oppilaan *määrittelytaidot* näkyvät käsitteen merkityssisällön sekä riittävien ja välttämättömien ehtojen yhdistelmän muodostamisessa oppilaan havaitsemista käsitteen ominaisuuksista. Näiden kolmen taidon avulla oppilas lopulta kykenee onnistuneesti määrittelemään käsitteiden suhteet.

Silfverberg vertaa malliaan tutkimustulostensa avulla vanhaan van Hielen teoriaan ja toteaa mallin olevan käyttökelpoinen. Kuitenkin Silfverbergin mukaan oppilaiden geometristen tietorakenteiden kehittyminen tutkitun aiheen osalta oli melko yksilöllinen, odotettua vähäisempi ja odotettua vähemmän hierarkkinen van Hielen tasoihin nähden. Osaamisen taso ei riippunut yksistään oppilaiden omaamasta van Hielen teorian mukaisesta matemaattisen tiedon tasosta vaan oppilaiden osaaminen perustui myös heidän yksilöllisiin yleisedellytyksiinsä. Silfverberg itse määrittelee väitöstyönsä eräänlaiseksi vallitsevan tilanteen kartoittamiseksi.

3.2 Verbaalinen esitysmuoto

Matematiikassa verbaalisen esitysmuodon ja kuvailevan arkikielen avulla on matematiikan kehittymisen alkuvaiheista alkaen yhdistetty havainto-, symboli- ja teoriamaailman tietoa toisiinsa (Nardi ym. 2008). Koska symboleja kehittyi matematiikkaan hitaasti ja ne vaihtelivat muodoltaan, niin esimerkiksi arabit kuvailivat sanallisesti myös potensseja ja laskuoperaatioita. (Boyer 1995, 264.) Sanallisesti voidaan myös esimerkiksi ilmaista, että tämä on neliö, koska tässä on neljä yhtä pitkää sivua, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan tai että kolmiossa on kolme sivua (Tall 2008).

Suorittaminen, kokemukset ja aistihavainnot aktivoivat tutkimusten mukaan samankaltaisesti ihmisen aivotoimintaa. Tästä syystä arkielämän tilanteita ja kokemuksia voidaan kuvailla oppikirjoissa verbaalisesti ja visuaalisesti. Kuitenkin osa ihmisistä on parempia tekstin luvussa, toiset ymmärtävät paremmin visuaalista tietoa (Viholainen 2008; Hatva 2009, 81—83). Raami ja Mielonen tähdentävät, että verbaalisen ilmaisunsa ihminen muodostaa yleisesti hitaan tietoisen rationaalisen ajattelutavan avulla (Raami 2015, 241).

Matematiikan kieli on täsmällistä, niukkaa, johdonmukaista ja abstraktia. Se sisältää visuaalisen esitysmuodon lisäksi matemaattiset symbolit ja lausekkeet sekä arkikielestä siirtyneet ilmaisut. Toisaalta matemaattista sanastoa on siirtynyt arkikieleen. Matematiikan kieli edellyttääkin opiskelijoilta kielellisiä taitoja ja mielikuvitusta (Viholainen 2008). Esimerkiksi, kun tangentti ″sivuaa″ tai ″kohtaa″ käyrän, voi tangentilla ja käyrällä olla yksi yhteinen piste tai ääretön määrä yhteisiä pisteitä tai olla useampia erillisiä yhteisiä pisteitä, jotka voivat olla sivuamispisteitä tai muita (Nardi ym. 2008). Tangentti ei myöskään arkikielen leikkaa-verbin yleisestä merkityksestä poiketen leikkaa funktion kuvaajaa käännepisteessä kahteen osaan (Biza 2007).

Toisaalta koulumatematiikan oppikirjat pyrkivät matematiikankieliseen ilmaisuun, toisaalta tiivis matemaattinen ilmaisu voi tutkimusten mukaan vaikeuttaa opiskelijoiden ymmärtämistä (ks. Partanen 2013). Käsitteiden suomenkieliset nimikkeetkään eivät välttämättä ole kuvailevia. Sen sijaan esimerkiksi kulmakertoimen englanninkieliselle nimikkeelle ″gradient″ sanakirjat antavat useita kuvailevia, suomenkielisiä merkityksiä.

Havainnollinen määritelmä kuvailee käsitteen ominaisuuksia ja ehtoja havainnollisesta näkökulmasta. Matematiikan oppikirjoissa saatetaan mainita, että seuraavaksi esitetään havainnollinen tai kuvaileva määritelmä, mikä voi auttaa opiskelijoita erottamaan määritelmän esimerkeistä. Opiskelijat mieltävät määritelmät matematiikassa yleisesti voimassaoleviksi, kumminkin havainnollinen määritelmä voi kuvata ainoastaan yhtä tilannetta, jossa käsite esiintyy, kuten ympyrän tangenttia.

Matemaattinen määritelmä on tiivis matematiikankielinen ilmaisu, joka sisältää käsitteen välttämättömät ehdot ja ominaisuudet sekä käsitteen nimen. Käsitteen nimi on määritelmässä tärkeä, sillä yleensä nimi tuo Vinnerin (1991) mukaan käsitteen opiskelijan mieleen. Peruskäsitteet esitetään perusoletuksina eli aksioomina. Muut käsitteet voidaan määritellä aiemmin määriteltyjen käsitteiden avulla. Käsitteiden merkitys ja matematiikan deduktiivisuus seuraavat käsitteiden yhteyksistä. Joissakin tilanteissa voi esiintyä epäolennaisia käsitteen ominaisuuksia, jotka hankaloittavat käsitteen hahmottamista. Esimerkiksi käyrän tangentilla voi olla useampia erillisiä yhteisiä pisteitä käyrän kanssa, jotka ovat sivuamispisteitä tai muita pisteitä.

Sanat ja symbolit saattavat mennä sekaisin opintojaan aloittelevien yliopisto-opiskelijoidenkin määritelmissä, kun käytetään epsilon-delta -ympäristöä, olemassaolo-kvanttoria $\exists$ ja kaikki-kvanttoria $\forall$. Nykyisillä tietokoneohjelmistoilla on mahdollista seurata funktion arvojen asettumista raja-arvon lähiympäristöön tai havainnoitavasta lähiympäristöstä voi piirtää mallikuvion. Lukion matematiikassa raja-arvon epsilon-delta -määritelmä korvataan joskus verbaalisella muodolla kuten ″ei väliä, miten pieneksi teemme funktion raja-arvon lähiympäristön, sillä aina on löydettävissä raja-arvoa vastaavan muuttujan kohdan ympäristö, jota vastaavat funktion kaikki arvot asettuvat valittuun funktion raja-arvon lähiympäristöön″. (Nardi ym. 2008.) Kumminkin raja-arvon abstraktista määritelmästä tehty piirros tai GeoGebralla luotu kuva funktion raja-arvon epsilon-delta-ympäristöstä voivat muodostaa kokonaisuuden, jollaisen lukio-opiskelijat ymmärtävät.

3.3 Symbolinen esitysmuoto

Matemaattisten käsitteiden abstraktin muodon luovat symbolit ja numeerinen esitys. Symbolisten laskumenetelmien harjoittelu kynän ja paperin avulla mahdollistaa käsin ja keholla ajattelun. Moni käsite voidaan johtaa vaihe vaiheelta numeerisesti ja näin nähdä abstraktin käsitteen muodostuminen. Käsitteellinen ymmärrys syvenee, kun käsitteen kuvallisia, sanallisia ja muita havainnollisia esitysmuotoja yhdistetään symboliseen esitysmuotoon. (Tall 2008.)

Yleensä opiskelijat perustelevat ratkaisunsa käsitteen tai lähikäsitteen symbolisella tai visuaalisella esitysmuodolla mutta määritelmä voi jäädä hyödyntämättä. (Viholainen 2008.) Kielellisiltä tai visuaalisilta taidoiltaan heikko opiskelija saattaa käyttää pelkästään symbolista esitystapaa, jos kokee sen helpoksi (Biza 2010).

3.4 Visuaalinen tangentti internetissä

Opiskelijat etsivät lisätietoa lähinnä koulun tarjoamilta sivustoilta ja joskus muualta internetistä (Partanen 2013). Internetissä visuaalinen tangentti ei välttämättä näyttäydy staattisena kuvana. Googlen hakutulokset ja sovellusten, kuten YouTuben kuvat, animaatiot ja videot tai vuorovaikutteiset matematiikan ohjelmistotiedostot tarjoavat uusia näkökulmia. Niitä voi katsoa itselle sopivana ajankohtana, pysäyttää ja käydä uudelleen läpi. Suomenkielisiä koulumatematiikkasivustoja ovat muun muassa opetus.tv ja etälukion sivusto. Tangenttia käsitellään sivustoilla yleensä satunnaisesti.

Kaikkien opiskelijoiden käyttöön soveltuu ilmainen dynaamisen matematiikan ohjelmisto *GeoGebra*, geogebra.org, jossa kuviota tai vastaavaa symboliesitystä muuntamalla voi nähdä käsitteen variaation. Itävaltalaisen korkeakouluopiskelijan ideoimalla ja eri maiden opettajien edelleen kehittämällä ohjelmiston www-sivustolla on paljon valmiita tiedostoja tangentista. Sivustolta voi ladata myös omille laitteille sopivia ohjelmistoversioita. Lisäksi YouTubessa on materiaalia ja ohjeita tiedostojen luontiin.

4 VISUAALINEN TANGENTTI

Tämän luvun tavoitteena on syventää lukion tangentin opiskelun alkuvaiheiden visuaalista tangentin käsitettä. Eukleideen noin 300 eKr. kokoama *Alkeet*-teos on luonut pohjan koulugeometrian opetukselle eri maissa 1800-luvun lopulle saakka. Suomessa kuvioihin perustuvia hankalia todistuksia alettiin poistaa geometrian oppikirjoista 1900-luvun alussa. Eritoten Väisälä siirtyi epätarkempaan perusteluun 1940-luvun oppikirjoissaan. Väisälä kirjoitti myös samoihin aikoihin oppikouluihin tulleeseen differentiaalilaskentaan oppikirjoja, joita käytettiin vielä 1970-luvulla. Sittemmin koulugeometrian sisältö on paljonkin vaihdellut. (Silfverberg 1999.)

Alun historiakatsauksen jälkeen palaan välillä Väisälän havainnolliseen esitystapaan mutta pääosin seuraan myöhempien oppimateriaalien kirjoittajien näkemyksiä aiheesta. Luvun sisällössä olen huomioinut lisäksi havaitsemiani peruskoululaisten, lukiolaisten ja työkavereitteni kokemuksia aiheen opiskelusta.

4.1 Geometrian peruskäsitteiden historiallinen kehittyminen

Ympyrän ja muiden tunnettujen käyrien pituudet, pinta-alat ja kappaleiden tilavuudet ovat aina kiehtoneet ihmistä. Monien käsitteiden tarkka määrittäminen siirtyi kumminkin ratkaisemattomana ongelmana keskiajalle. Aluksi aritmetiikka ja geometria kehittyivät arkielämän säännöissä ja mittauksissa mutta luvuilla laskeminen oli heikkoa. Geometriassa käytettiin kuvioiden osien suhteita. Näin saatiin havaintoja myös irrationaaliluvuista, kuten neliön lävistäjän ja sivun tai ympyrän kehän ja halkaisijan irrationaalisesta suhteesta. Antiikin Kreikan matemaatikot tutkivat ympäristön käyriä ja käyttivät apuna suoria, joilla oli tangentin ominaisuuksia. Havainnolliset aiheet kehittivät matemaatikoiden mielikuvitusta ja luovuutta sekä johdattivat myöhempiä matemaatikoita uuden ajan alkuun tultaessa muun muassa koordinaatiston, tangentin sekä integraali- ja differentiaalilaskennan käsitteisiin, joissa myös tangentilla on tärkeä osuutensa.

Antiikin Kreikan matematiikan kulta-ajan, noin 300—200 eKr., kolme merkittävää matemaatikkoa ovat Eukleides, Arkhimedes ja Apollonios. *Eukleideen* 13 kirjan teoksesta *Alkeet* (lat. *Elementa*) tuli tieteellisen loogisen ajattelun malli. Ensimmäisessä kirjassa todistetaan muun muassa toisiaan sivuavien ja leikkaavien ympyröiden ominaisuuksiin liittyviä väitteitä, kolmannen kirjan geometristen väitteiden todistuksissa esiintyy usein ympyrän tangentti. Neljännessä kirjassa todistetaan muun muassa ympyrän sisä- ja ulkopuolisten säännöllisten monikulmioiden ominaisuuksia. Ylipäänsä useissa teoksen kuvioissa on havaittavissa tangentti tai alitangentti. (ks. Heath 1956.)

Arkhimedes määritti 200-luvulla eKr. ympyrän kehän pituuden kineettisen tangentin avulla siten, että spiraalilla oleva piste on samanaikaisessa origosta loittonevassa tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä ja tasaisessa origoa kiertävässä ympyräliikkeessä, jolloin niiden komponenttien resultantti on liikkeen suunta ja käyrän tangentti. (Boyer 1995, 192—211.)

Apollonios tuotti *Konika*-teoksessaan 200-luvulta eKr. jo tunnetut kartioleikkaukset eli ympyrän, ellipsin, hyperbelin ja paraabelin, leikkaamalla kartion eri asennoissa olevalla tasolla. Käyrät hän siirsi tasoon, johon koordinaatisto saatiin, kun halkaisijan lisäksi piirrettiin ellipsin tai hyperbelin toisen halkaisijan päätepisteen kautta liittohalkaisijan suuntainen suora, joka nyt nimettäisiin tangentiksi. (Boyer 1995, 214—233; Blank & Krantz 2006, 245.)

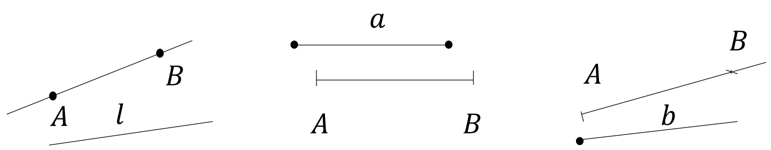
Roomalaisten valloitettua Kreikan geometrian kehittyminen hidastui ja keskiaika alkoi. Lukujen merkitsemistapa vakiintui Euroopassa vasta 1400-luvulla. Algebra alkoi kehittyä 1500-luvun lopulla ja mahdollisti analyyttisen geometrian kehittämisen. Matemaatikot saivat tutkittavakseen latinankielisinä antiikin Kreikan teoksia.

Fermat ja Descartes loivat tahoillaan 1600-luvulla analyyttisen geometrian ja määrittelivät aluksi käsitteet Apollonioksen tapaan pisteen käsitteen avulla erilaisissa koordinaatistoissa. He kehittivät myös tangentin ja derivaatan käsitteitä (Blank & Krantz 2006, 245—246).

Samoihin aikoihin monet matemaatikot, fyysikot ja tähtitieteilijät tutkivat käyriä, aloja ja tilavuuksia Arkhimedeen ekshaustio- eli tyhjennysmenetelmästä kehittyvillä intuitiivisilla infinitesimaalisilla menetelmillä. Suositun sykloidin pituus saatiin, kun *sykloidin* eli pyörivän ympyrän kehän kiinteän pisteen piirtämä kaari korvattiin tangentilla. Torricelli suoristi mekaanisen käyrän infinitesimaalisin keinoin liikkeiden yhdistelmänä siten että liikkeen hetkellinen suunta on liikeradan tangentti. Fermat keksi käyrän jyrkkyyden ja sovelsi urien maksimien ja minimien löytämiseksi kehittämäänsä menetelmää algebrallisen käyrän tangentin määrittämiseen. Fermat määritti myös ehdon käyrän käännepisteen tangentille Robervalin tutkimusten pohjalta. Robervalin mekaanisessa käyrässä massallinen piste liikkuu ja pisteen hetkellisen nopeuden suunta on tangentin suunta. Barrow määritti tangentin antiikin geometrian pohjalta siten että tangentti on käyrän ja suoran kahden yhteisen toisiaan lähellä olevan leikkauspisteen kautta kulkeva suora. Muitakin matemaatikkoja tulisi tangentin yhteydessä mainita. Fysiikassa ja tähtitieteessä muun muassa Kepler, Galilei, Huygens, Snell, Boyle, Hooke ja Cavalier kehittivät derivaattaa ja tangenttia, alojen ja tilavuuksien määrittämistä (Boyer 1995, 488—562; Blank & Krantz 2006, 72, 342—343, 414—416).

4.1.1 Piste, suora ja taso

Geometrian käsitteet esitetään silmin havaittavien pisteiden avulla (Tall 2008).



KUVA 2. Suora AB tai suora l, jana AB tai jana a ja puolisuora AB tai puolisuora b (mukaillen Väisälä 1959, 2)

Suora, puolisuora ja jana piirretään geometriassa suorana viivana (ks. Väisälä 1959, 2). Pisteet nimetään isoilla kirjaimilla ja merkitään usein pienellä täytetyllä ympyrällä tai lyhyellä poikkiviivalla (kuva 2).

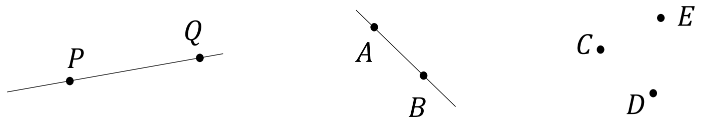
Antiikin geometriassa pisteiden väliset etäisyydet ja pisteen paikka saatiin määritettyä, kun pisteen etäisyys ilmoitettiin riittävän moneen muuhun kiinteään pisteeseen. Kuviot piirrettiin harpilla ja viivaimella, jota käytettiin ainoastaan kahden pisteen välisen suoran viivan piirtämiseen.

Kahanpään (2011) toimittama *Laurin alkeet* sisältää *Alkeet*-teoksen kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometrian. Kunkin kirjan alussa on Eukleideen määritelmiä, joita tarvitaan kirjan väitteiden todistamisessa. Ensimmäisen kirjan määritelmiä ovat esimerkiksi "Piste on se, jossa ei ole osia. Viiva on pituus leveydettä ". Eukleideen postulaatit eli vaatimukset ovat nykyisin aksioomia eli perusoletuksia, joista viides, *paralleeliaksiooma* eli *yhdensuuntaisaksiooma*, voidaan esittää eri muodoissa kuten että ″suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi tämän suoran suuntainen suora, joka kuuluu samaan tasoon, mutta ei leikkaa annettua suoraa″. Kahanpää huomauttaa, että *Alkeet* -teoksessa esiintyy käyrinä vain suora ja ympyrä osineen, vaikka Eukleides varmasti tunsi muitakin käyriä.

Antiikin Kreikan ajan jälkeen geometrian kehittyminen voimistui analyyttisen geometrian myötä. Pian sen jälkeen syntyi muitakin geometrian aloja. Epäeuklidisia geometrioita, kuten hyperbolinen geometria ja elliptinen geometria, alkoi kehittyä 1800-luvulla. Viimein voitiin osoittaa, että paralleeliaksiooma ei seuraa Eukleideen muista aksioomista ja on vain euklidisen geometrian aksiooma. (Tall 2008.)

Hilbert tutki ja selvitteli algebran, geometrian ja analyysin mutta myös fysiikan ongelmia ja pyrki aksiomaattiseen ajatteluun. Hilbert määrittelikin ensimmäisenä vuonna 1902 geometrian peruskäsitteiden (pisteen, suoran ja tason) suhteet abstrakteina, 23 aksiooman eli geometrian perusoletuksen avulla.

″Millainen on taso… mitä on merkittyjen pisteiden välillä…onko pisteitä lukusuoran ja käyrän ulkopuolella? ″, saattavat opiskelijat pohtia geometrian tunneilla. Eräs tapa selventää käsitteiden yhteyksiä on tarkastella visuaalisesti ja verbaalisesti *Hilbertin aksioomia*. Niistä kolme ensimmäistä (kuva 3) voidaan esittää seuraavassa muodossa (Kurittu, Hokkanen & Kahanpää 2006):



KUVA 3. Hilbertin aksioomat H1, H2 ja H3

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta.

(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.

(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

Ensimmäisen aksiooman mukaan kahden erillisen pisteen kautta voi kulkea täsmälleen yksi suora viiva joko jana, suora tai puolisuora. Pisteiden välinen järjestys ja relaatio välissä määrittyvät yksikäsitteisiksi myöhempien aksioomien avulla. Toisesta aksioomasta seuraa, että euklidinen reaalilukusuora on ääretön rationaali- ja irrationaalilukujen muodostama pistejoukko, sillä kahden pisteen väliin voi aina lisätä pisteen. Lopulta pisteitä on kahden pisteen välissä ääretön määrä, josta muodostuu viivan pituus.

Kolmannesta aksioomasta seuraa, että kolme pistettä tai kaksi suoraa määrää yksikäsitteisen tason, kun pisteet eivät ole samalla suoralla. Myös taso määrittyy yksikäsitteiseksi Hilbertin myöhempien aksioomien avulla. Tasoon sisältyy jokainen suora, jonka kanssa tasolla on kaksi yhteistä pistettä. Taso muodostuu pisteistä ja suorista.

Sanallisesti pistettä voidaan kuvailla äärettömän pieneksi ja viivaa äärettömän tiheässä olevien peräkkäisten pisteiden muodostamaksi. Sanallinen kuvailu ymmärretään nykykäsityksen mukaan yksilöllisesti, joten havainnollistamisessa suositaan reaalilukusuoraa ja lukujen desimaalilukumuotoa.

4.1.2 Tasokäyrä

> *Tasokäyrä* on rajoitetun tai rajoittamattoman välin kuva jatkuvassa kuvauksessa tasoon.

Tasokäyrä voi olla mikä tahansa viiva kuten kulkureitti, paraabeli tai ympyrä.

> *Ympyrä* on kaikkien niiden pisteiden joukko, jotka ovat jokaisessa pisteessä yhtä etäällä ympyrän keskipisteestä.

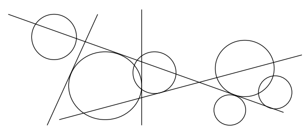
Ympyrän kehän rajoittamaa aluetta sanotaan myös ympyräksi. Kaksi ympyrää voivat olla erilliset, sivuta toisiaan yhdessä pisteessä tai leikata toisensa kahdessa pisteessä. Yhtenevillä ympyröillä on ääretön määrä leikkauspisteitä.

4.2 Geometrinen tangentti

Geometrinen tangentti on suora, joka voidaan piirtää kahden visuaalisen pisteen kautta tason pisteiden joukkona. Geometriassa tarkastellaan lukusuoran pisteistä silmin havaittavia. Tangentin *konstruoinnilla* tarkoitetaan tangentin käsitteen rakentamista mielensisäisenä tai käyttämällä esimerkiksi viivainta ja kynää tai piirto-ohjelmaa.

4.2.1 Ympyrän tangentti

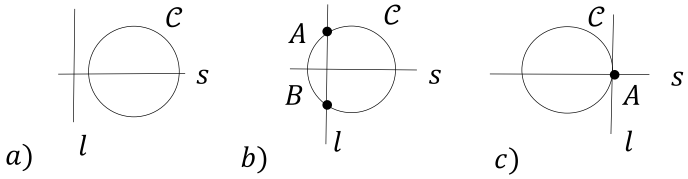
Ympyrän tangentin ominaisuuksia voi mielestäni lähestyä ensin leikinomaisesti piirtämällä jollakin piirto-ohjelmalla ympyröitä ja niitä sivuavia suoria (kuva 4).



KUVA 4. Wordin piirtotyökalulla toteutettuja ympyröitä ja niitä sivuavia suoria

Väisälä (1959, 31—33) havainnollistaa *Geometria*-kirjassaan ympyrän C ja suoran l yhteydet kolmena kuviona ja perustelee vaihtoehdot symmetrian avulla. Symmetria-akselina on suora s, joka kulkee ympyrän C keskipisteen kautta. Suoraa l siirretään kohtisuorassa suoraa s vastaan.

Tällöin ympyrän C ja liikkuvan suoran l väliset tilanteet ovat (kuva 5):



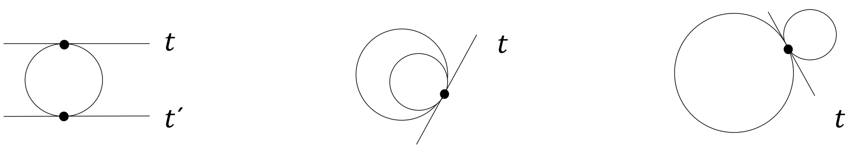
KUVA 5. Ympyrän tangentti (mukaillen Väisälä 1959, 32)

a) Ympyrällä C ja suoralla l ei ole yhteisiä pisteitä. Suoran l etäisyys ympyrän keskipisteestä on suurempi kuin säteen pituus.
b) Ympyrällä ja suoralla l on kaksi yhteistä pistettä A ja B. Suora l on ympyrän *sekantti* eli leikkaaja. *Sekantti* on suora, joka leikkaa käyrän vähintään kahdessa pisteessä. Sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on pienempi kuin säde.
c) Ympyrällä ja suoralla l on yksi yhteinen piste A, joka on myös suoran s piste. Suora l on ympyrän *tangentti*, joka sivuaa ympyrää *sivuamispisteessä* A. Suora l on kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan, kulkee säteen päätepisteen kautta ja on säteen etäisyydellä ympyrän C keskipisteestä.

Väisälän mukaan ympyrän tangentti voidaan nyt määritellä yksikäsitteisesti kolmella tavalla:

> *Ympyrän tangentti* on suora,
>
> 1) jolla on yksi yhteinen piste ympyrän kanssa
> 2) joka kulkee ympyrän säteen ympyrällä olevan päätepisteen kautta ja on kohtisuorassa sädettä vastaan tai
> 3) jonka etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen.

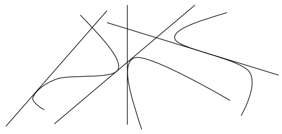
Väisälän määritelmässä vastaesimerkit a) ja b) auttavat tangentin ominaisuuksien havainnoinnissa (ks. Tall 2008). Lisäksi Väisälä havainnollistaa, että ympyrän tangentti voi olla vertikaalinen. Uudemmissa geometrian oppikirjoissa ympyrän tangentti annetaan valmiina kuviona eli visuaalisena objektina, jonka opiskelijat voivat kokea sellaisenaan, pohtimatta ja kuvittelematta siitä variaatioita.



KUVA 6. Ympyrällä voi olla esimerkiksi kaksi yhdensuuntaista tangenttia tai ympyrät voivat sivuta toisiaan yhteisessä pisteessä. (ks. Väisälä 1959, 34)

Esivanhempamme havainnoivat arjen kohteita muodon, koon, määrän ja vastaesimerkkien avulla. Nykyihmisenkin ajattelu voi aktivoitua tietoiseksi, kun kuvissa ympyrän koko, tangentin sivuamispisteen paikka, tangenttien tai ympyröiden lukumäärä vaihtelevat (kuva 6).

4.2.2 Tangentin käsitteen yleistyminen visuaalisena



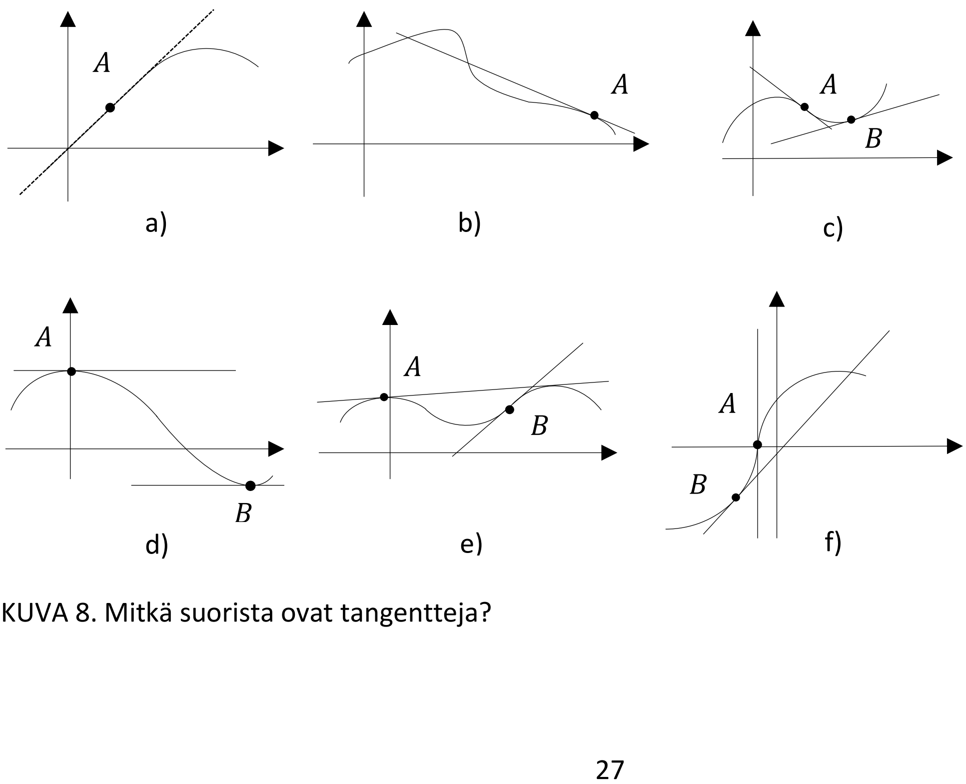
KUVA 7. Piirros

Esimerkiksi kuva 7 voidaan ymmärtää monella tavalla. Samansisältöisempänä kuvan voivat katselijat kokea, kun kuvaa kuvaillaan sanoin kuten, että ″…kuvan suorat ovat niiden käyrien tangentteja, joita ne sivuavat… tangentit näyttävät myös leikkaavan käyriä ja/tai toisiaan″. (ks. Hatva 2009, tiivistelmä.)

Tallin (2008) mukaan ihmisyksilön matemaattisen ajattelun kehittymisessä ja oppimisessa olennaista on

- kuvioiden muodon, koon ja määrän havainnointi, yhtäläisyyksien ja eroavaisuuksien etsiminen kuvioista
- laskumenetelmien harjoittelu ja niiden toisto sekä
- kieli, jolla voidaan kuvailla omaa ajattelua.

Tangentin käsite voi kehitty pelkästään tangenttikuvioiden avulla (Tall 1986; Biza 2007; Biza & Zachariades 2010; ks. myös Silfverberg 1999)). Kuvista, esimerkiksi kuvasta 8, opiskelijat voivat (yhdessä) etsiä ja pohtia tangentin ominaisuuksia ja rakentaa käsitystään visuaalisesta tangentista.

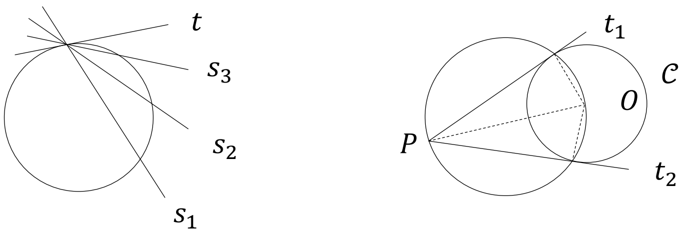


KUVA 8. Mitkä suorista ovat tangentteja?

Kuvan 5 kaikki suorat, jotka kulkevat pisteiden A tai B kautta, ovat silmämääräisesti arvioituina tangentteja, joista kohdassa f) pisteen A kautta kulkeva vertikaalinen suora on ainoastaan geometrinen tangentti.

Kuvioryhmän, kuten kuvan 8, jokaisen suoran on ehkä hyvä olla tangentti, sillä hahmolakien mukaan kuvioryhmän elementit, kuten suorat, koetaan intuitiivisesti samaan joukkoon kuuluviksi (ks. Hatva 2009, 79).

4.2.3 Visuaalisen tangentin ominaisuuksien havainnointi

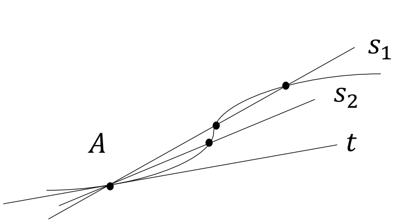


KUVA 9. Vasemmanpuoleisessa kuvassa ympyrän tangenttien t suunta on hahmoteltu sekanttien $s_i, i = 1,2,3$ avulla. Ympyrän $\mathcal{C}$ tangenttikulman tangenttien sivuamispisteet ovat apuympyrän leikkauspisteet (Väisälä 1959, 86 ja 90.)

Tangentin ominaisuudet täyttävä suora on tangentti. Esimerkiksi ympyrälle piirretty tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteen kautta kulkevaa sädettä vastaan tai sen suuntaa voi arvioida sekantin avulla (kuva 9). Tangentin kohtisuoruus sädettä vastaan tulee näkyviin, kun säde on visuaalinen. Tarvittaessa säteen voi lisätä kuvioon, kun ympyrän keskipiste tunnetaan. Yksi tapa löytää keskipiste on se, että ympyrän kehältä valitaan kolme pistettä, jotka yhdistetään jänteillä ja piirretään saaduille kahdelle jänteelle keskijanat. Ne leikkaavat toisensa ympyrän keskipisteessä.

Ympyrän ulkopuolisen pisteen P kautta kulkevien tangenttien sivuamispisteet ympyrällä $\mathcal{C}$ saadaan piirtämällä harpilla (tai piirto-ohjelmalla) ympyrä, jonka halkaisijana on tangenttikulman kärjen P ja ympyrän keskipisteen O välinen jana (kuva 9). Tangentti ja säde muodostavat molemmissa puoliympyröissä kehäkulman ja ovat siten kohtisuorassa toisiaan vastaan. (Väisälä 1959.)

Monimutkaisille käyrille piirretyistä suorista tangentin ominaisuudet täyttäviä suoria ei ole helppo havaita. Esimerkiksi paraabelilla ja sen tangentilla on aina yksi yhteinen piste, mutta paraabelin tangentin suuntaa on hankala hahmottaa.



KUVA 10. Käyrän sekantit s_1 ja s_2 sekä tangentti t (Väisälä 1947, 5)

Väisälä (1947, 5) hahmottelee 1940-luvun differentiaalilaskennan kirjassaan käyrälle tangentin ennen siirtymistään derivaattaan. Väisälä piirtää sileältä näyttävälle käyrälle sekantteja siten, että niiden leikkauspiste A pysyy samana ja toinen leikkauspiste tulee aina lähemmäksi toista (kuva 10). Lopulta sekantin raja-asento on käyrän suuntainen tangentti. Geometrisissa käyrissä käyriin kuuluvat niiden päätepisteet, joihin tangentin voi Väisälän mukaan piirtää, kun päätepiste valitaan samana pysyväksi sekantin pisteeksi. Monimutkaisia käyriä tangentti voi sivuta tai leikata useammassa erillisessä pisteessä.

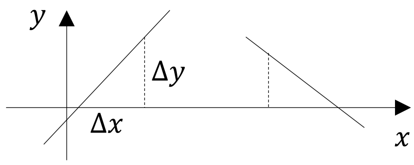
Tutkijat katsovat ihmisen evoluution alkuvaiheessa yksilön näköhavainnoinnin ohella kehonliikkeiden hallinnan sekä kuulo- ja tuntohavaintojen olleen hyödyllisiä. Käsin ja keholla ajattelu auttaa ehkä nykyihmistäkin ymmärtämään syvällisemmin visuaalisen tangentin. Erityisesti kineettisenä tangenttina voi liikuttaa esimerkiksi viivainta käyrän pisteestä toiseen (esim. Viholainen 2008).

Visuaalinen ratkaisu on silti matemaattisesti epätarkka havaintomaailman totuus. Opiskelijat kumminkin uskovat intuitiivisesti näköhavaintoihinsa enemmän kuin saamaansa verbaaliseen tietoon ja uskovat esimerkiksi oppikirjan kuvassa käyrän kärkipisteeseen piirretyt ″tangentit″ tosiksi, vaikka kirjan teksti saattaa tähdentää, että kärkipisteeseen on piirretty useita suoria (esiintyy usein sanamuodossa tangentteja) kuvaamaan sitä, että kärkipisteeseen ei voi asettaa tangenttia. Kärkipisteen kautta voi piirtää suoria, jotka muistuttavat tangenttia mutta yksikään niistä ei ole tangentti. Matemaattisesti ymmärrettävämmäksi kärkipistetilanne tulee derivaatan käsitteen opiskelun jälkeen (Tall 1986; Biza 2007; Biza & Zachariades 2010).

4.2.4 Geometrisen tangentin kulmakertoimen määrittäminen symbolisesti

Analyyttisessä geometriassa käyrät siirretään koordinaatistoon, jossa ne voidaan esittää tarkemmin algebrallisina pistejoukkojen yhtälöinä tai epäyhtälöinä, ja tangentin kulmakerroin voidaan määrittää algebrallisesti visuaalisissa pisteissä.

> *Käyrä* Käyrän muodostavat xy-koordinaatistossa ne tason pisteet (x, y), joiden koordinaatit toteuttavat käyrän ratkaistun yhtälömuodon $y = f(x)$ tai ratkaisemattoman muodon $F(x, y) = 0$. Toisaalta yhtälön kuvaaja on käyrä, jonka pisteet toteuttavat yhtälön.
>
> *Tason suora* on yhtälön $ax + by + c = 0$, missä ainakin toinen luvuista a tai b on eri suuri kuin nolla, toteuttavien pisteiden joukko.



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

KUVA 11. Suoran kulmakertoimen k määrittäminen

Tangentin ja ylipäänsä suoran yhtälön määrittämiseen riittää tietää kaksi suoran pistettä tai yksi piste ja kulmakerroin (kuva 11). Suora on oma tangenttinsa suoran kaikissa pisteissä. Jos suora on y-akselin suuntainen, niin sillä ei ole kulmakerrointa. Geometriassa *pisteen lähiympäristöksi* voidaan Tallin (2014) mukaan ajatella pisteen molemmin puolin silmin havaittava väli käyrästä. Näin suoralle voidaan ajatella sen kaikkiin pisteisiin pisteen lähiympäristön suuntainen tangentti ja tällä tavoin globaalisti hahmottaa suora tangentiksi.

Ympyrän tangentin kulmakerroin saadaan säteen kulmakertoimen avulla. Sen sijaan esimerkiksi paraabelin tangentin kulmakerroin voidaan määrittää analyyttisen geometrian keinoin vain likimääräisenä numeerisen laskumenetelmän avulla ja kulmakerroin muuttuu pisteestä toiseen. (Väisälä1949.)

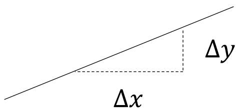
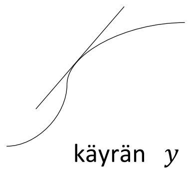
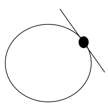
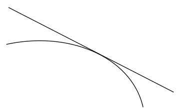
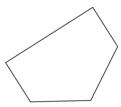
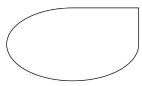
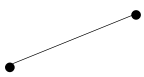
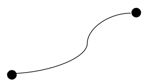
4.3 Geneerinen tangentti

Vinnerin 1980-luvulla nimeämä *geneerinen tangentti* (engl. *generic tangent*) on opiskelijoiden muodostama yleinen vahva ajattelumalli tangentista suorana, joka sivuaa koko käyrää yhdessä pisteessä leikkaamatta käyrää. Tämän käsitekuvan kehittyminen alkaa geometriassa tangentin oppimisprosessissa ja se yhdistetään ympyrään tai ympyrän kaarta muistuttavaan käyrään.

4.4 Analyyttinen tangentti

Useat antiikin matematiikassa tutkituista ongelmista ratkesivat vasta uuden ajan alussa differentiaali- ja integraalilaskennan avulla, kun Arkhimedeen tyhjennysmenetelmä kehittyi riittävän käyttökelpoisiksi infinitesimaalisiksi menetelmiksi, Newtonin fluksio-menetelmäksi.

TAULUKKO 1. Analyysin kursseissa ratkaistaan ympyrää ja suoraa monimutkaisempia tilanteita (mukaillen Salas, Hille & Etgen 2003, 1—2).

geometria ja analyyttinen geometria	differentiaali- ja integraalilaskenta
 suoran kulmakerroin $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	 käyrän $y = f(x)$ derivaatta $f'(x)$
 ympyrän tangentti	 käyrän tangentti
 monikulmion ala	 käyrän rajaama ala
 janan pituus	 käyrän pituus

Newtonin ja Leibnizin tutkimukset johtivat 1600-luvun lopulla differentiaali- ja integraalilaskentaan, joka täsmentyi edelleen 1700-luvulla ja käsitteiden määrittely tarkentui 1800-luvulla (taulukko 1). Matematiikan kehittyminen abstraktimpaan suuntaan jatkuu edelleenkin.

4.4.1 Hetkellisen muutosnopeuden määrittäminen

Derivaatan käsitteen katsotaan muotoutuneen, kun 1600-luvulla etsittiin hetkellisen nopeuden määrittämistapaa. Newton tutki liiketilan muutoksen voimakkuutta ja keksi kolme dynamiikan liikelakia. Leibniz perehtyi latinankielisenä Eukleideen teokseen *Alkeet* ja esitti tangentin sekanttina, jonka leikkauspisteet ovat äärettömän lähellä toisiaan. Molemmat päätyivät ajatukseen, että funktion $y = f(x)$ derivaatta $\frac{dy}{dx}$ on funktion arvon muutoksen dy ja sitä vastaavan muuttujan muutoksen dx osamäärän raja-arvo. Nämä muuttujan ja vastaavan funktion arvon pienimmät mahdolliset intuitiiviset muutokset tunnettiin *infinitesimaaleina*. (Boyer 1995; Blank & Krantz 2006, 247—248.) Cauchy otti käyttöön 1800-luvun alussa raja-arvossa symbolit ε ja δ. Pian tämän jälkeen Weierstrass määritteli derivaatan näiden symbolien avulla erotusosamäärän raja-arvona (Blank & Krantz 2006, 148). Intuitiiviset infinitesimaalit säilyivät epämääräisesti määriteltyinä 1960-luvulle, jolloin Robinson viimein määritteli ne laajennetussa reaalilukujoukossa $\overline{\mathbb{R}}$. Määrittely sisältää ajatuksen, että $\overline{\mathbb{R}}$ saadaan, kun reaalilukujoukkoon $\mathbb{R}$ liitetään alkiot $-\infty$ ja $+\infty = \infty$ ja asetetaan $-\infty < x < +\infty$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

4.4.2 Reaaliluvut

Reaalilukujen joukon muodostavat rationaali- ja irrationaaliluvut, joista useimpia on mahdotonta esittää visuaalisena pisteenä siten, että piste kuvaisi lukua tilanteessa. Rationaaliluvut ovat päättyviä tai jaksollisia päättymättömiä desimaalilukuja. Irrationaaliluvut ovat jaksottomia päättymättömiä desimaalilukuja, kuten $\sqrt{2}$ ja π.

Reaalilukujen perusominaisuuksia eli aksioomia ovat algebralliset ominaisuudet eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku, järjestysominaisuudet eli järjestysaksioomat ja täydellisyysominaisuus eli täydellisyysaksiooma.

Reaalilukujen järjestysominaisuuksien mukaisesti luvut asettuvat myös reaalilukusuoralle (Salas ym. 2003, 5):

1. jokaisella $a, b, c \in \mathbb{R}$ on voimassa täsmälleen yksi relaatioista: $a = b, a < b, a > b$
2. jos $a < b$ ja $b < c$, niin $a < c$
3. jos $a < b$, niin $a + c < b + c$ kaikille $c \in \mathbb{R}$
4. jos $a < b$ ja $c < d$, niin $a + c < b + d$
5. jos $a < b$ ja $c > 0$, niin $ac < bc$
6. jos $a < b$ ja $c < 0$, niin $ac > bc$.

Geometrisesti ajateltuna havaintomaailman reaalilukusuora vastaa täysin abstrakteja reaalilukuja ja reaalilukujen järjestysominaisuuksien perusteella lukusuoran väli havainnollistaa vastaavaa reaalilukujen osajoukkoa.

Täydellisyysominaisuus erottaa reaaliluvut rationaaliluvuista.

> *Täydellisyysaksiooma* Jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujoukon osajoukolla on pienin yläraja.

Rationaaliluvuilla ei ole pienintä ylärajaa tai suurinta alarajaa. Irrationaaliluvut voidaan ajatella raja-arvoiksi, jotka saadaan niiden rationaalisista likiarvoista, kun lukujen oikeiden desimaalien määrät lähestyvät ääretöntä.

> *Arkhimedeen lauseen* mukaan jokaiselle reaaliluvulle x on olemassa kokonaisluku $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $n > x$.

Arkhimedeen lauseen avulla voidaan osoittaa, että kahden kokonaisluvun välissä on aina rationaaliluku ja kahden rationaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku. Molempia on kussakin välissä tiheässä, irrationaalilukuja jopa ylinumeroituva määrä. (Myrberg 1977, 24—26.)

> *Suljettu väli* Suljettu väli on lukusuoran väli, johon kaikki välin pisteet eli välin reaaliluvut kuuluvat, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.
>
> *Avoin väli* Avoin väli on reaalilukusuoran väli, johon päätepisteet eivät kuulu, $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.

Puoliavoimissa eli puolisuljetuissa väleissä toinen päätepisteistä ei kuulu joukkoon. (Salas ym. 2003, 6—7.)

4.4.3 Funktio, funktion raja-arvo ja funktion jatkuvuus

Funktiolla tarkoitetaan tässä työssä yhden reaalimuuttujan reaaliarvoista funktiota.

> *Funktio* Funktiolla f[1]$: A \to B$ tarkoitetaan relaatiota joukosta A joukkoon B, joka liittää joukon A jokaiseen alkioon x täsmälleen yhden joukon B alkion y, merkitään $y = f(x)$. Joukko A on funktion f määrittelyjoukko ja joukko B on funktion maalijoukko.

Funktion kuvaajaa sanotaan myös käyräksi. Funktion määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ tai sen osajoukko. Esimerkiksi funktion $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ määrittelyjoukko on $\{x \in \mathbb{R} | x^2 \neq 1\}$ ja arvojoukko on $\mathbb{R}$.

Analyysi perustuu raja-arvoon. Analyysin keskeisiä käsitteitä ovat myös jatkuvuus, derivaatta ja integraali, joita tarkastellaan funktion tietyn kohdan lähiympäristössä. Tangentin käsite liittyy näihin kaikkiin. Intuitiivisesti sana ″jatkuva″ ymmärretään tapahtumana, joka jatkuu keskeytyksettä ilman katkoja. Matematiikassa jatkuva funktio voidaan piirtää ilman kynännostoa. Matemaattisesti funktion jatkuvuus on monimutkaisempi käsite. (Salas ym. 2003, 93.)

Funktion jatkuvuus määritellään raja-arvon avulla. Kun funktiolla on raja-arvo kohdassa c, niin funktio suppenee ja on jatkuva pisteen c lähiympäristössä. Tietyllä ehdolla se voi olla jatkuva myös raja-arvopisteessä. Raja-arvon suhteen kuitenkin riittää, että funktio on määritelty pisteen c lähiympäristössä, ei välttämättä muuttujan arvolla x on c.

[1] Kirjaimen f asemesta käytetään muitakin kirjaimia, kuten g tai h.

Funktion raja-arvo Olkoon funktio f määritelty pisteen c jossakin ympäristössä tätä pistettä mahdollisesti lukuun ottamatta. Funktiolla $f(x)$ on kohdassa $x = c$ raja-arvo l, merkitään $\lim_{x \to c} f(x) = l$, jos kaikki funktion arvot $f(x)$ saadaan miten lähelle lukua l tahansa, kun muuttujan $x \neq c$ arvot valitaan riittävän läheltä luvun c lähiympäristöstä.

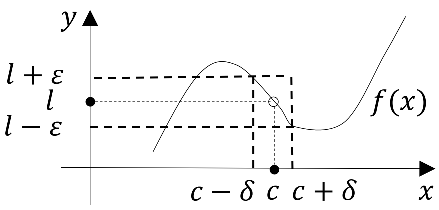
Kun funktio $f(x)$ on määritelty vähintään ympäristössä $(c - p, c) \cup (c, c + p)$, kun $p > 0$, niin $\lim f(x) = l$, kun $x \to c$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kun $0 < |x - c| < \delta$, niin $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Jos taasen funktio $f(x)$ on määritelty vähintään ympäristössä $(c, c + p)$, kun $p > 0$, niin funktiolla $f(x)$ on kohdassa $x = c$ oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim f(x) = l$, kun $x \to c^+$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kun $c < x < c + \delta$, niin $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Vasemmanpuoleinen raja-arvo määritellään vastaavalla tavalla. Funktiolla on raja-arvo, jos voidaan osoittaa, että oikean- ja vasemmanpuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret eli

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x)$. (Salas ym. 2003, 73—80.)

Funktion jatkuvuus edellyttää raja-arvolta enemmän (kuva 12):



$|f(x) - l| < \epsilon$, kun
$0 < |x - c| < \delta$

KUVA 12. Epsilon-delta-ympäristössä etsitään sellainen funktion raja-arvon l avointa lähiympäristöä vastaava muuttujan avoin lähiympäristö, että kaikkia muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot asettuvat funktion raja-arvon annettuun lähiympäristöön. (Blank & Krantz 2006, 87; Brannan2006, 194)

Funktion jatkuvuus pisteessä Olkoon funktio f määritelty vähintään avoimella

välillä $(c - \delta, c + \delta)$, missä $\delta > 0$. Tällöin funktio f on jatkuva pisteessä c, jos

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = l$ (Salas ym. 2003, 93—94).

Funktion jatkuvuus määritellään yleensä jollain välillä.

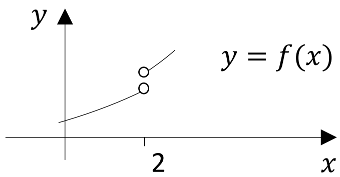
Jatkuvuus avoimella välillä Funktio $f(x)$ on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$, jos se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.

Jatkuvuus suljetulla välillä Funktio $f(x)$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$ ja vasemmalta jatkuva muuttujan arvolla $x = b$ ja oikealta jatkuva muuttujan arvolla $x = a$.

Funktion jatkuvuus puoliavoimille väleille määritellään vastaavasti.

Epäoleelliset raja-arvot Jos funktion arvot kasvavat rajatta, kun lähestytään kohtaa $x = c$, sanotaan usein, että funktiolla on raja-arvo ääretön tässä kohdassa ja merkitään $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$. Vastaavasti, jos funktion arvot pienenevät rajatta, sanotaan, että funktiolla on raja-arvo miinus ääretön, joka merkitään $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.

Funktio voi olla jatkuva tai epäjatkuva vain määrittelyjoukon pisteessä. Esimerkiksi kuvan 13 funktion $f(x)$ määrittelyjoukkoon ei kuulu kohta 2, joten se ei voi olla funktion $f(x)$ epäjatkuvuuskohta:

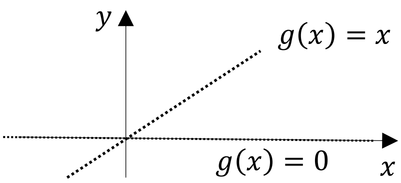


KUVA 13. Muuttujan arvo 2 ei kuulu funktion määrittelyjoukkoon.

Funktion määrittelyjoukon pisteessä funktio voi olla epäjatkuva, kun

- funktiolla ei ole pisteessä raja-arvoa tai
- funktiolla on pisteessä raja-arvo, joka on eri suuri kuin funktion arvo pisteessä.

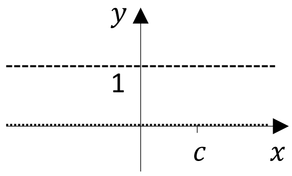
Raja-arvoa kuvaillaan yleensä hiukan epätäsmällisesti seuraavaan tapaan ″funktio $g(x)$ lähestyy raja-arvoa nolla, kun x lähestyy arvoa nolla″ (Myrberg 1977, 56).



$$g(x) = \begin{cases} x, kun\ x\ on\ rationaalinen \\ 0, kun\ x\ on\ irrationaalinen \end{cases}$$

KUVA 14. Funktion jatkuvuus raja-arvon läheisyydessä

Funktion $g(x)$ tapauksessa on $|g(x)| \leq |x|$ kaikilla muuttujan arvoilla x, joten $\lim g(x) = 0$, kun $x \to 0$ (kuva 14). Reaalilukujen ominaisuuksista seuraa, että rationaali- ja irrationaalilukuja on kaikkialla tiheässä. Tämän vuoksi funktio ei lähesty koko ajan nollaa vaan funktion suppeneminen kohti raja-arvoa on reaalilukujoukossa edestakaista pientä hyppelyä, joka vaimenee kohti nollaa. Funktio $g(x)$ on jatkuva ainoastaan pisteessä x on nolla, jossa raja-arvo ja funktion arvo ovat yhtä suuret; $g(0) = 0$ ja $\lim g(x) = 0$, kun $x \to 0$. Epäjatkuvuus muissa pisteissä johtuu siitä, että raja-arvoa $\lim g(x)$, kun $x \to a$, ei ole olemassa silloin, kun a on erisuuri kuin nolla. Tämä taasen johtuu siitä, että kohdan a lähiympäristön pisteissä funktio saa sekä arvon nolla, että arvoja läheltä arvoa a, jolloin $\lim_{x \to a} g(x) = a$.

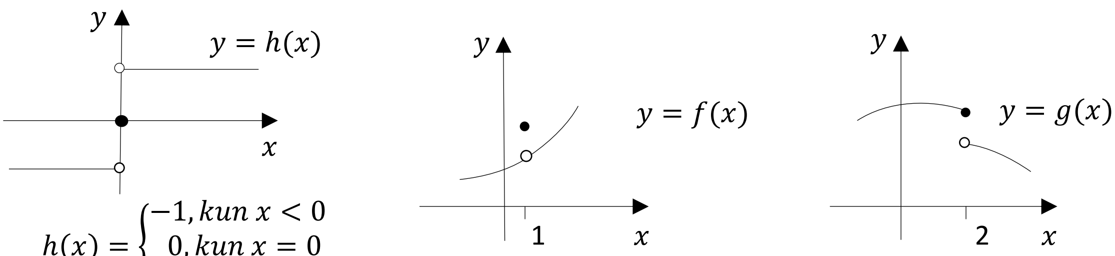


$$f(x) = \begin{cases} 1, kun\ x\ on\ rationaalinen \\ 0, kun\ x\ on\ irrationaalinen \end{cases}$$

KUVA 15. Dirichletin funktio (Brannan 2006, 197)

Kaikissa määrittelyjoukon pisteissä $c \in \mathbb{R}$ epäjatkuva funktio on esimerkiksi Dirichletin funktio (kuva 15). Dirichletin funktiolla ei ole raja-arvoa $\lim f(x)$, kun $x \to c$. Se ei ole myöskään jatkuva missään pisteessä $c \in \mathbb{R}$, sillä pisteiden c lähiympäristöjen kaikkiin avoimiin väleihin sisältyy rationaali- ja irrationaaliluku, jopa ääretön määrä lukuja. Tällöin funktion arvot hyppivät edes takaisin arvojen nolla ja yksi välillä äärettömän monta kertaa, kun $x \to c$ riippumatta siitä, onko c rationaali- tai irrationaaliluku.

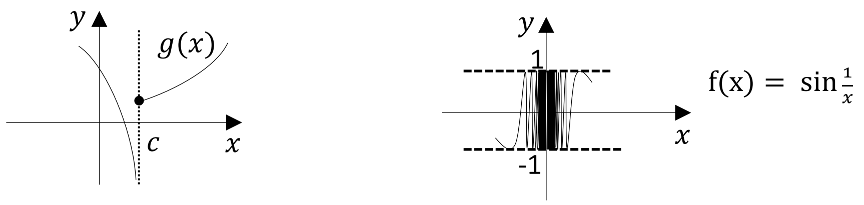
Funktion visuaalinen epäjatkuvuuskohta voidaan ymmärtää monella tavalla. Esimerkiksi opiskelija voi hyväksyä tangentin kuvan 16 poistuvaa epäjatkuvuutta ilmentämään funktion $f(x)$ epäjatkuvuuskohtaan (ks. Viholainen 2011). Poistuvassa epäjatkuvuudessa funktion arvo pisteessä poikkeaa funktion raja-arvosta pisteessä tai funktiota ei ole määritelty pisteessä. Poistuva epäjatkuvuus voidaan poistaa määrittämällä funktion arvoksi pisteessä funktion raja-arvo.



$$h(x) = \begin{cases} -1, kun\ x < 0 \\ 0, kun\ x = 0 \\ 1, kun\ x > 0 \end{cases}$$

KUVA 16. Tyypilliset epäjatkuvuudet ovat hyppäysepäjatkuvuus (funktiot h ja g) ja poistuva epäjatkuvuus (funktio f) (Brannan 2006, 206; Viholainen 2011; Salas ym. 2003, 208).

Oleellisessa epäjatkuvuudessa, kuten hyppäysepäjatkuvuudessa, funktiolla ei ole raja-arvoa epäjatkuvuuskohdassa, esimerkkeinä kuvan 16 funktiot $h(x)$ ja $g(x)$ tai epäjatkuvuuskohta voi olla äärettömyydessä.

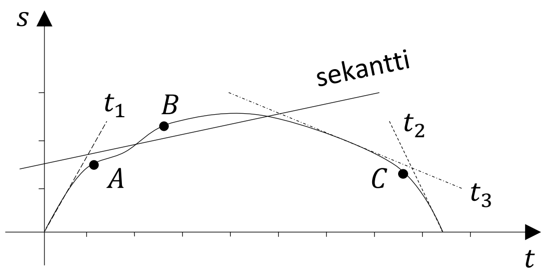


KUVA 17. Funktiolla $g(x)$ on muuttujan arvolla c epäjatkuvuuskohta äärettömyydessä. Funktiolla $f(x)$ on oleellinen epäjatkuvuuspiste origossa. (Salas ym. 2003, 94.)

Kuvan 17 funktion $g(x)$ kuvaajan epäjatkuvuuskohta on äärettömyydessä. Funktio $\mathrm{f(x)} = \sin\frac{1}{x}$ taasen heilahtelee kuvaajan perusteella nopeasti välillä $[-1,1]$, sillä $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ mutta sillä ei ole raja-arvoa origossa, jossa se on epäjatkuva. Funktioissa esiintyy monenlaisia epäjatkuvuuksien yhdistelmiä. Määrittelyjoukon erillisessä pisteessä funktion jatkuvuutta tai derivoituvuutta ei ole tässä visuaaliseen tangenttiin keskittyvässä työssä tarpeen tarkastella.

4.4.4 Sekantti funktion keskimääräisen muutosnopeuden kuvaajana

Tarkastellaan esimerkkinä vaihtelevalla nopeudella ajan t kulkenutta autoa (kuva 18). Auton keskinopeus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, vauhti ilman suuntaa, voidaan määrittää jollain välillä jakamalla kuljettu matka käytetyllä ajalla.



KUVA 18. Auton hetkellinen muutosnopeus

Kuvassa 18 auton nopeuden kuvaaja näyttää likimain suoralta muutamilla väleillä, joilla kuvaajan sekantti lähes yhtyy kuvaajaan, toisin sanoen sekantti on likimäärin funktion kuvaajan tangentti t. Näillä väleillä funktion arvon muutosnopeus eli tässä auton nopeus säilyy samana ja sekantin kulmakerroin kuvaa hyvin myös auton hetkellistä nopeutta välin pisteissä.

Ongelmallisia ovat esimerkiksi pisteet A, B ja C, joiden lähiympäristössä funktion kuvaaja poikkeaa enemmän suoran muodosta. Lisäksi tietyissä pisteissä eli jollain hetkellä käyrän arvojen muutos ja muuttujien muutos ovat nollia ja erotusosamäärä $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$ on määrittelemätön. Jos nyt osattaisiin symbolisesti määrittää funktion muutosnopeus tietyssä pisteessä, niin se kuvaisi, kuinka nopeasti funktio kasvaa tai vähenee pisteessä.

Yleisemmin, kun funktion $y = f(x)$ muutosnopeus vaihtelee, antaa käyrän sekantin kulmakerroin $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ funktion (arvon) keskimääräisen muutosnopeuden tietyllä välillä. Mitä lyhyempi väli on, sitä tarkemmin sekantin kulmakerroin kuvaa keskimääräistä funktion muutosnopeutta välin pisteissä.

4.4.5 Sekantin kulmakerroin ja erotusosamäärän raja-arvo

Funktion sekantin kulmakerroin $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ lasketaan jollain välillä funktion arvon muutoksen suhteena muuttujan arvon muutokseen. Funktion hetkellinen muutosnopeus saadaan sekantin raja-arvona.

> *Funktion muutosnopeus* pisteessä määritellään sekantin raja-arvona eli erotusosamäärän raja-arvona $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, kun $\Delta x \to 0$, tässä y:n *derivaattana* x:n suhteen.

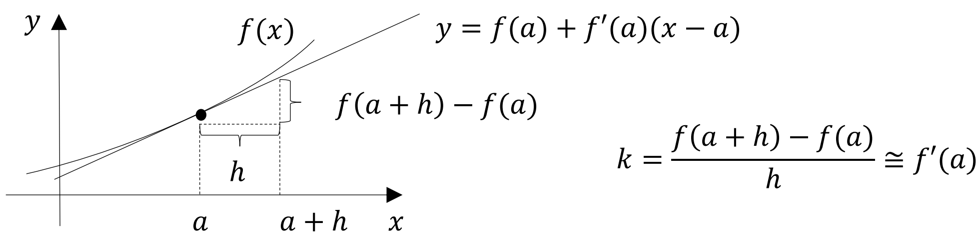
Näin derivaatta on derivoituvan funktion tangentin kulmakerroin tietyssä funktion pisteessä. Monet fysikaaliset suureet määritellään derivaattoina, kuten

hetkellinen nopeus $v(t) = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ ja kiihtyvyys $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = s''(t)$ tai

hetkellinen virranvoimakkuus $i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = q'(t)$ tai virran muutosnopeus $\frac{di}{dt} = q''(t)$.

4.4.6 Visuaalisen derivaatan konstruointi

Funktion kasvunopeus eli muutosnopeus voidaan määrittää visuaalisena derivaattana:



KUVA 19. Funktion $f(x)$ visuaalinen derivaatta pisteessä a on tangentin kulmakerroin k. Funktio voidaan korvata sivuamispisteen lähiympäristössä tangenttiapproksimaatiolla y.

Visuaalinen (käytetään myös nimikkeitä havainnollinen tai geometrinen) derivaatta on tangentin kulmakerroin funktion pisteessä, jossa funktio on derivoituva (kuva 19). Pisteeseen silmämääräisesti hahmotellun tangentin kulmakerroin ei yleensä ole täsmälleen yhtä suuri kuin symbolisesti määritetty derivaatta. Kuitenkin tangentti riittää kuvaamaan likimäärin funktion muutosnopeutta lähiympäristönkin pisteissä, joissa tangenttiapproksimaatio voi siten korvata funktion.

Esimerkki 1. Muuttujan arvolla x derivoituva funktio on jatkuva kohdassa x.

Osoitetaan funktio jatkuvaksi eli $\lim f(x+h) = f(x)$, kun $h \to 0$, käyttämällä derivoituvuutta oletuksena.

Todistus. Kun $h \neq 0$, niin $f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h$. Koska f on derivoituva muuttujan arvolla x, niin $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ ja koska $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$, niin

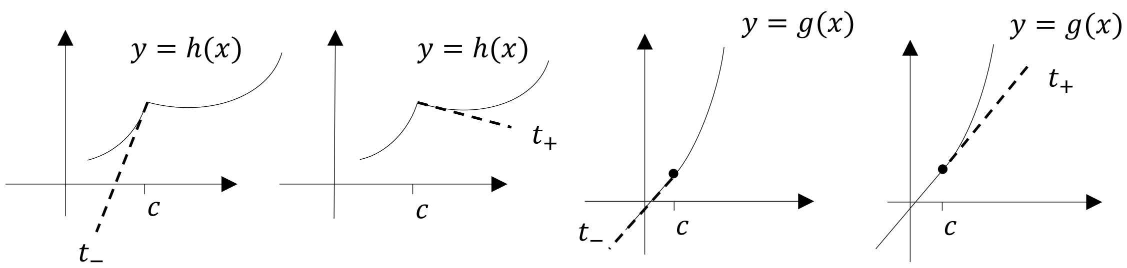
$$\lim_{h \to 0}[f(x+h) - f(x)] = \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \cdot \left[\lim_{h \to 0} h\right] = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Joten $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ ja funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa x. ■

(Salas ym. 2003, 129.)

Kun funktio $f(x)$ derivoidaan derivointisääntöjen mukaan, saadaan symbolinen derivaatta ja derivaattafunktio $f'(x)$, jonka määrittelyjoukko määräytyy sen mukaan, missä pisteissä f on derivoituva. Derivaattafunktiolla voi siten olla epäjatkuvuuskohtia. Derivaattafunktion lausekkeella voidaan laskea derivaatan arvo niissä pisteissä, joissa derivaattafunktio on derivoituva ja siten jatkuva. Jos $f'(a) = \infty$ tai $f'(a) = -\infty$, kun $a \in \mathbb{R}$, on geometrinen tangentti mahdollinen tietyin ehdoin.

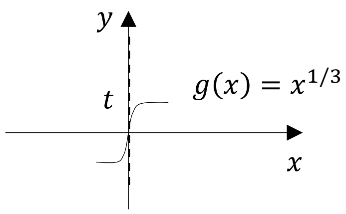
Jatkuvakaan funktio ei ole derivoituva muun muassa funktion kuvaajan muodostaman kulman kärkipisteessä (kuva 20):



KUVA 20. Funktiolla $h(x)$ ei voi olla tangenttia kärkikohdassa c (Blank & Krantz 2006, 161). Funktiolla $g(x)$ on tangentti kohdassa c (Tall 1986).

Kuvassa 20 paloittain jatkuvan funktion $h(x)$ vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat ovat selvästi eri suuret kuvaajan kärkikohdassa c, joten funktio ei ole kohdassa derivoituva ja kohtaan ei voi asettaa tangenttia. Kun taasen paloittain jatkuvan funktion $g(x)$ vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat pisteessä c ovat yhtä suuret, joten funktio $g(x)$ on derivoituva ja tangentin voi määrittää matemaattisesti hyvin kohdassa c.

Funktio ei ole myöskään derivoituva pisteessä, jossa funktion derivaatta on plus tai miinus ääretön, joten tällaisessa pisteessä tangenttia ei voi hyvin määritellä tai määrittää (kuva 21):



KUVA 21. Vertikaalinen tangentti t on mahdollista asettaa funktion $g(x)$ kuvaajalle origoon (Salas ym. 2003, 247).

Esimerkki 2. Funktion $g(x) = x^{1/3}$ kuvaajalla (kuva 21) voi olla kuitenkin pystysuora geometrinen tangentti origossa, sillä $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \to \infty$, kun $x \to 0$. ■

4.4.7 Analyyttisen tangentin edellytykset

Edellä on tullut esille, että sekantti ja tangentti tunnetaan ensisijaisesti geometrisina ympyrään liittyvinä käsitteinä, mutta ne voidaan määritellä myös derivoituville funktioille.

Analyyttinen tangentti on mahdollinen funktion kohdassa, jossa

- funktio on jatkuva eli funktion raja-arvo = funktion arvo, joka on reaaliluku ja
- derivaatta eli erotusosamäärän raja-arvo on reaaliluku.

Funktion derivoituvuus on funktion jatkuvuutta vahvempi ominaisuus ja ainoastaan funktion derivoituvassa pisteessä tangentin voi määrittää matemaattisesti hyvin symbolisena, mutta analyyttistä tangenttia ei ole välttämättä helppo esittää visuaalisena. Geometrista tangenttia differentiaali- ja integraalilaskennan kursseissa ei yleensä ole tarvetta käsitellä (ks. esim. Blank & Krantz 2006, 161 ja 167).

4.4.8 Geometrinen tangentti analyysissä

Eukleides ja muut matematiikan historian matemaatikot rakensivat osin intuitiivisen visuaalisen tiedon avulla geometrian, jonka visuaaliset käsitteet hahmotellaan tason pisteiden avulla. Geometrinen, matemaattisesti epätarkka, intuitiivinen tangentti voi siten olla myös y-akseli tai sen suuntainen suora (ks. luku 4.2.1). Analyysissä geometrinen tangentti voi esiintyä

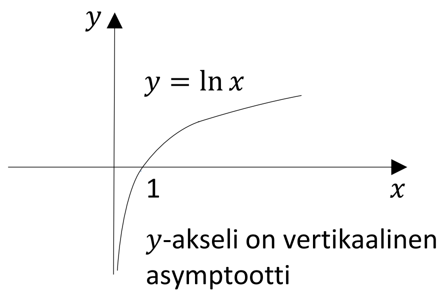
- funktion käännepisteessä, jossa funktion erotusosamäärällä on epäoleellinen raja-arvo ∞ tai $-\infty$ (ks. luku 4.7.2)
- funktion kuvaajan päätepisteeseen asetettuna puolisuorana, kun funktio on päätepisteessä toispuoleisesti derivoituva tai havainnollisen sileä päätepisteen läheisyydessä (ks. luku 4.4.7).

4.5 Asymptootti ja normaali tangentin lähikäsitteinä

> *Asymptootti* on käyrä, jota reaalifunktion kuvaaja lähenee rajattomasti.

Asymptootit selvittävät funktion kulkua ja kuvaajan piirtämistä. Asymptootilla ei ole yhteisiä pisteitä funktion kanssa. Polynomifunktion kuvaajalla ei ole asymptoottia. Murtofunktion kuvaajalla on yksi tai useampi asymptootti. (Väisälä 1959.) Asymptootti voi olla vino, horisontaalinen tai vertikaalinen suora tai korkeampaa astetta oleva käyrä (Salas ym. 2003, 243—245):

> *Vertikaalinen asymptootti* Suora $x = c,\ c \in \mathbb{R}$, on funktion $f(x)$ vertikaalinen asymptootti, jos yksi seuraavista ehdoista toteutuu:
>
> - $f(x) \to \infty$ tai $f(x) \to -\infty$, kun $x \to c$
> - $f(x) \to \infty$ tai $f(x) \to -\infty$, kun $x \to c^-$ tai $x \to c^+$.
>
> *Horisontaalinen asymptootti* Suora $y = a$ on funktion $f(x)$ horisontaalinen asymptootti, jos $f(x) \to a,\ a \in \mathbb{R}$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$.

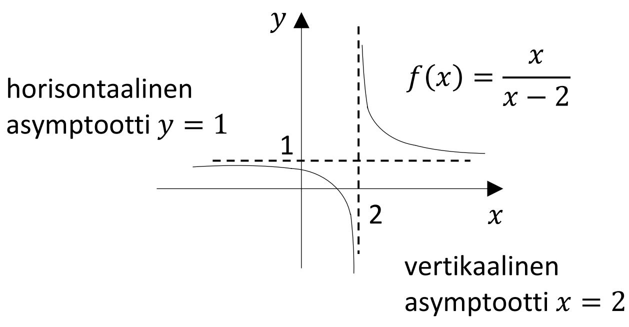


KUVA 22. Logaritmifunktio $\ln x$ (Salas ym. 2003, 385)

*Esimerkki 1***.** Logaritmifunktio $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ (kuva 22).

Logaritmifunktion $\ln x$ määrittelyjoukko on $(0, \infty)$, arvojoukko on $(-\infty, \infty)$ ja derivaatta $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.

Kun x pienenee, niin tangentin kulmakerroin suurenee. Kun x suurenee, niin tangentin kulmakerroin pienenee. Vertikaalinen asymptootti on y-akseli, sillä kun $x \to 0^+$, niin $\ln x \to -\infty$. ■



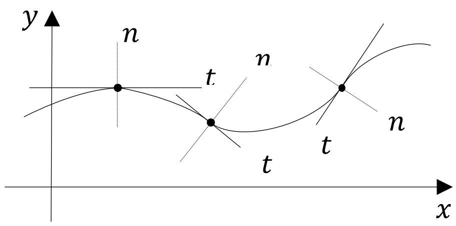
KUVA 23. Esimerkki 2 (Salas ym. 2003, 245)

Esimerkki 2. Funktio $f(x) = \frac{x}{x-2}$ (kuva 23).

Funktion vertikaalinen asymptootti on $x = 2$, sillä kun $x \to 2^-$, niin $f(x) \to -\infty$ ja kun $x \to 2^+$, niin $f(x) \to \infty$.

Horisontaalinen asymptootti on $y = 1$, sillä kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$, niin $f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{x}{x(1-\frac{2}{x})} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}} \to 1$. ■

Normaali on suora, joka on kohtisuorassa käyrää tai funktion kuvaajaa vastaan.



KUVA 24. Derivoituvan funktion tangentteja t ja normaaleja n (Salas ym. 2003, 125)

Tangentin sivuamispisteessä funktion normaali saadaan tangentin kulmakertoimen avulla. Tangentin t ja normaalin n kulmakertoimien tulo $k_t\, k_n = -1$, kun kumpikaan suorista ei ole pystysuora tai kulmakerroin arvoltaan nolla (kuva 24).

Siten jollain välillä derivoituvan funktion $y = f(x)$ normaalin yhtälö välin pisteessä $(a, f(a))$ on $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$, jos $f'(a) \neq 0$.

Geometrisesti ajateltuna, kun jatkuvan funktion derivaatta $f'(a) = 0$, niin käyrän tangentin yhtälö $y = f(a)$ ja normaali $x = a$. Kun $f'(a)$ on ääretön tai miinus ääretön, niin pisteessä $(a, f(a))$ ei ole derivaattaa ja käyrällä on ainoastaan geometrinen tangentti $x = a$. Normaali on $y = f(a)$.

4.6 Yhdeksän derivaatan esittämistapaa

Tall (2008) esittelee yhdeksän merkitystä derivaatalle; Thurstonin (1994) seitsemän näkökulmaa, havainnollisen derivaatan ja Hähkiöniemen opiskelijoiden tavan konstruoida derivaatan käsitettä.

- *Infinitesimaalisessa* tavassa derivaatta nähdään funktion arvon infinitesimaalisen muutoksen suhteena muuttujan infinitesimaaliseen muutokseen.

- *Symbolisessa* tavassa derivaatta määritetään symbolisesti, esimerkiksi lausekkeen x^n derivaatta on nx^{n-1} tai $\sin x$:n derivaatta on $\cos x$.

- *Looginen* tapa: $f'(x) = d$ on olemassa, jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen muuttujan lähiympäristö δ, että kun $0 < \Delta x < \delta$, niin $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$.

- *Geometrisessa* tavassa derivaatta on funktion kuvaajan pisteeseen hahmotellun tangentin kulmakerroin, kun funktion kuvaaja on pisteessä derivoituva.

- *Nopeuden* näkökulmasta derivaatta on funktion $f(t)$ hetkellinen muutosnopeus, kun t on aika.

- *Likiarvomuodossa* funktion derivaatta pisteessä on funktion paras lineaariapproksimaatio pisteen lähiympäristössä.

- *Mikroskooppisessa* näkökulmassa derivaatta on funktion kuvaajan suurennuksen raja-arvo, joka voidaan ajatella saatavan suurentamalla rajatta funktion derivoituvuuspisteen lähiympäristön kuvaajan suurennusta.

Tall lisää paikallista suoruutta kuvaavan eli mikroskooppisen näkökulman jälkeen kahdeksanneksi ajattelutavaksi visuaalisen paikallisen suoruuden globaalina, joka itse asiassa toimii derivaatan muiden merkitysten lähtökohtana:

- *Havainnollisessa esitystavassa* derivaatta on funktion kuvaajan mukainen kulmakerroin funktion kaikissa pisteissä.

Tällöin suoran kulmakerroin on sama luku suoran kaikkien valittujen pisteiden lähiympäristöissä. Tallin (2008) mukaan matemaatikot eivät katso havainnollista esitystapaa riittävän matemaattiseksi. Kuitenkin siitä hyötyvät opiskelijat, jotka eivät vielä tunne raja-arvon käsitettä.

Tall jatkaa, että Hähkiöniemi (2006) on tutkinut lukio-opiskelijoidensa ajatteluprosesseja derivaatasta.

- Hähkiöniemen suomalaiset opiskelijat konstruoivat derivaatan käsitettä eri tietorakenteidensa yhdistelminä ja havainnollistavat derivaattaa ilman laskutoimituksia muun muassa funktion kuvaajan kululla, kuvaajan tangentilla tai liikuttamalla tangenttina kättä tai kynää.

Derivaatta tunnetaan tangenttia abstraktimpana käsitteenä. Tall katsoo useimpien derivaatan merkitysten silti kuuluvan matematiikan havainto- tai symbolimaailmaan.

4.7 Ongelmallisia tangentteja

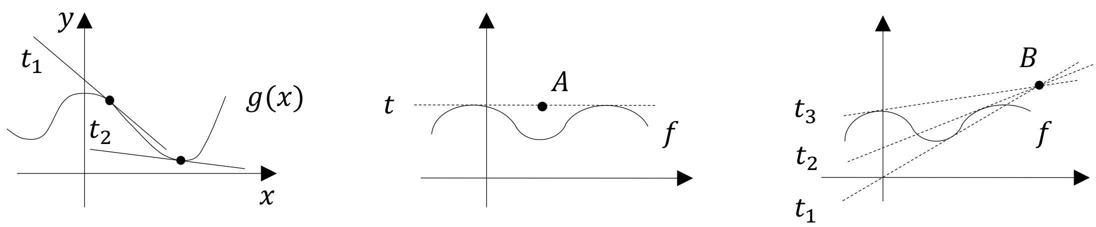
Bizan (2007, 2010) mukaan lukion geometriassa muotoutuneet mielensisäiset ajattelumallit tangentin ja funktion kuvaajan yhteydestä näkyvät lukio-opiskelijoiden käsityksissä koko lukioajan ja lukion jälkeenkin. Ongelmallisiksi opiskelijat voivat kokea etenkin seuraavat visuaaliset tangenttityypit.

4.7.1 Tangentilla ja käyrällä on yhtä useampi erillinen yhteinen piste

Ympyrän tangentin määritelmää opiskelijat voivat pitää Bizan (2007) mukaan yleisenä matemaattisena totuutena tangentin käsitteestä, vaikka tangentti-sanan edessä on lisämääre ″ympyrän″. Opiskelija voi tällöin hyväksyä funktion kuvaajalle ainoastaan tangentit, joilla ei ole sivuamispisteen lisäksi muita yhteisiä pisteitä käyrän kanssa (vrt. kuva 25).

KUVA 25. Pisteeseen A asetettu tangentti t_1 sivuaa toisessa erillisessä pisteessä käyrää. Pisteeseen B asetettu tangentti t_2 leikkaa käyrän toisessa pisteessä, joka ei ole tangentin sivuamispiste. (Biza 2007; Nardi ym. 2008)

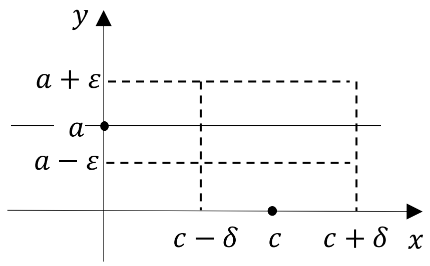
Tangentti voi olla niin lyhyt, että opiskelijan täytyy kynän tai mielikuvituksensa avulla jatkaa suoraa saadakseen käyrän ja tangentin kaikki yhteiset pisteet visuaalisiksi (kuva 26).



KUVA 26. Käyrän $g(x)$ ja sen tangenttien kaikki yhteiset pisteet eivät näy visuaalisina. Käyrän f pisteiden A ja B kautta kulkevat visuaaliset tangentit ovat riittävän pitkiä.

Opiskelija voi havaintojeni mukaan myös itse piirtää niin lyhyen tangentin, että tangentin ja käyrän sivuamis- ja leikkauspisteet eivät näy visuaalisina. Monimutkaisten funktioiden kuvaajien tangentit voivat leikata toisensa tai sivuta käyrää yhtä useammassa pisteessä.

4.7.2 Tangentti on horisontaalinen tai vertikaalinen



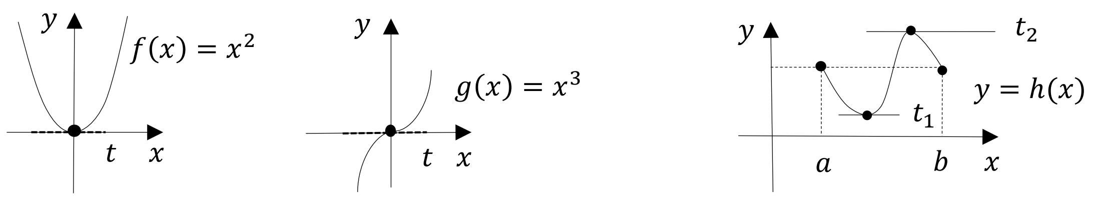
KUVA 27. Vakiofunktion $f(x) = a$ tangentti $y = a$ (Salas ym. 2003, 77)

Esimerkki 1. Määritetään vakiofunktion $f(x) = a = ax^0, a \in \mathbb{R}$ tangentti pisteessä, jossa $f'(x) = 0$ (kuva 27).

Ratkaisu. Alkeisfunktiot, esimerkiksi jollakin välillä yhdellä lausekkeella määritellyt polynomifunktiot, ovat jatkuvia.

Funktion $f(x) = a$ derivaatta $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = 0$, siten pisteen $(0, a)$ kautta kulkeva tangentti on $y - a = 0(x - 0)$ eli $y = f(x) = a$.

Geometrisesti ajateltuna, kun vakiofunktion $f(x) = a$ derivaatta $f'(x)$ on nolla, on funktion kasvunopeus nolla ja tangentti on horisontaalinen x-akselin suuntainen suora, joka kulkee pisteen $(0, a)$ kautta. Tangentti on siten sama kuin funktion kuvaaja. (Salas ym. 2003, 77 ja 133.)



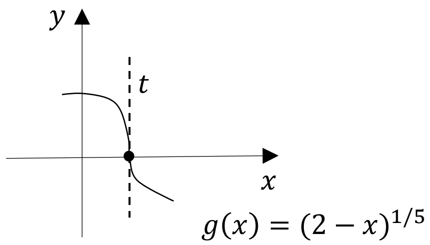
KUVA 28. Funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ tangentit t pisteissä $(0,0)$ ovat x-akselit ja normaalit ovat y-akselit. Rollen lauseen mukaan suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuvalla ja avoimella välillä (a, b) derivoituvalla funktiolla $h(x)$ on vähintään yksi kohta välillä (a, b), kun $h(a) = h(b)$, jossa $h'(x) = 0$ ja jossa voi olla horisontaalinen tangentti. (Brannan 2006, 231; Salas ym. 2003, 126 ja 199.)

Kuvan 28 funktiolla $f(x) = x^2$ on horisontaalinen tangentti origossa ja funktion $g(x) = x^3$ horisontaalinen tangentti leikkaa funktion terassipisteessä. *Terassipisteeksi* sanotaan käännepistettä, jossa funktion derivaatta on nolla.

Funktio ei ole kuitenkaan derivoituva sellaisessa käännepisteessä, jossa funktion erotusosamäärän raja-arvo on epäoleellinen. Epäoleellisen raja-arvon voi hahmottaa vain intuitiivisesti. Tällöin käännepisteessä ei voi määrittää analyyttistä tangenttia.

Vertikaalinen tangentti Funktion f kuvaajalla on vertikaalinen tangentti (vertical tangent) pisteessä $(c, f(c))$, kun funktio on jatkuva pisteessä $x = c$ ja derivoituva (ainakin pisteen c lähiympäristössä), kun $x \neq c$, ja $f'(x) \to \infty$ tai $f'(x) \to -\infty$, kun $x \to c$. (Salas ym. 2003, 247.)

Esimerkki 2. Funktion $g(x) = (2-x)^{1/5}$ kuvaajalla (kuva 29) on vertikaalinen tangentti pisteessä (2,0), sillä $g'(x) = -\frac{1}{5}(2-x)^{-\frac{4}{5}} \to -\infty$, kun $x \to 2$. ■ (Salas ym. 2003, 247.)



KUVA 29. Vertikaalinen tangentti t funktion $g(x)$ käännepisteessä, jossa funktion normaalina on x-akseli (Salas ym. 2003, 247).

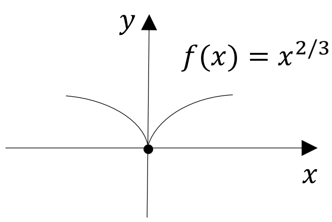
Vertikaalisessa kärkipisteessä funktiolla on epäoleelliset toispuoleiset erotusosamäärän raja-arvot ja kärkipisteen lähiympäristössä kuvaajakaan ei ole tangenttia ajatellen riittävän sileä.

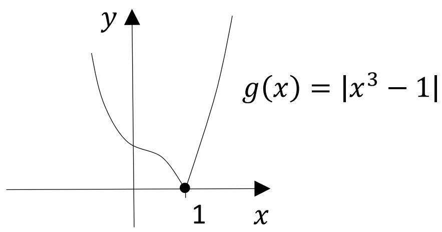
Vertikaalinen kärkipiste Funktion f kuvaajalla on vertikaalinen kärkipiste (vertical cusp) pisteessä $(c, f(c))$, jos

- kun $x \to c^-$, niin $f'(x) \to -\infty$ ja
- kun $x \to c^+$, niin $f'(x) \to \infty$,

tai

- kun $x \to c^-$, niin $f'(x) \to \infty$ ja
- kun $x \to c^+$, niin $f'(x) \to -\infty$. (Salas ym. 2003, 247.)





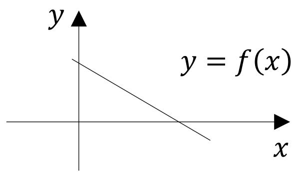
KUVA 30. Funktiolla $f(x)$ on pisteessä (0,0) vertikaalinen kärkipiste. Funktiolla $g(x)$ ei ole vertikaalista kärkipistettä pisteessä (1,0). (Salas ym. 2003, 248.)

Esimerkki 3. Funktiolla $f(x) = x^{2/3}$ (kuva 30) on vertikaalinen kärkipiste pisteessä (0,0), sillä derivaatta $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ ja, kun $x \to 0^-$, niin $f'(x) \to -\infty$ ja, kun $x \to 0^+$, niin $f'(x) \to \infty$. ■

Esimerkki 4. Funktiolla $g(x) = |x^3 - 1|$, jonka derivaattafunktio $g'(x) = \begin{cases} -3x^2, x < 1 \\ 3x^2, x > 1 \end{cases}$, ei ole vertikaalista kärkipistettä pisteessä (1,0) (kuva30).

Todistus. Kun $x \to 1^-$, niin $g'(x) \to -3$ ja kun $x \to 1^+$, niin $g'(x) \to 3$, joten muuttujan arvolla yksi toispuoleiset derivaatat ovat eri suuret. Funktio ei ole derivoituva kohdassa yksi. Funktion kuvaaja muodostaa kulman, jonka kärkipiste ei ole vertikaalinen kärkipiste, koska $g'(x) \nrightarrow +\infty$ tai $g'(x) \nrightarrow -\infty$, kun $x \to 1$. ■ (Salas ym. 2003, 248.)

4.7.3 Tangentti on käyrä tai käyrän osa



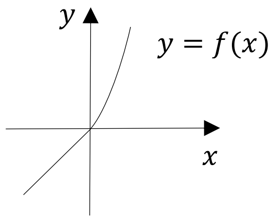
KUVA 31. Lineaarifunktio

Esimerkki 1. Lineaarifunktion $f(x) = mx + b$ tangentin kulmakerroin $f'(c) = m$ kaikilla muuttujan reaalilukuarvoilla (kuva 31).

Todistus. Lineaarifunktion jatkuvuus tulee todetuksi samalla, kun erotusosamäärän raja-arvo määritetään.
Olkoon $h \neq 0$,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{[m(c+h)+b]-[mc+b]}{h} = \frac{mh}{h} = m, \text{ joten } f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} m = m.$$

Näin kaikilla muuttujan reaalilukuarvoilla tangentin kulmakerroin $f'(c) = m$, joten erotusosamäärän raja-arvo ei riipu muuttujan arvosta c. Tangentti on siten sama kuin funktion kuvaaja. ■ (Salas ym. 2003, 121.)



$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x + x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

KUVA 32. Paloittain jatkuva funktio (Tall 1986)

Esimerkki 2. Kuvan 32 funktio on paloittain jatkuva. Voiko origoon asettaa kuvaajalle tangentin?

Ratkaisu. Pisteessä $(0,0)$ funktion $f(x) = x$ vasemmanpuoleinen derivaatta on

$$f'_{-}(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0+h)-0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

ja oikeanpuoleinen derivaatta

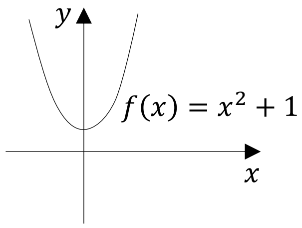
$$f'_{+}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{((0+h)+(0+h)^2)-(0+0^2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1+h = 1.$$

Koska $f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = 1$ ja $\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_+} f(x) = 0$, on funktio origossa derivoituva ja jatkuva. Origoon voi asettaa tangentin $y - 0 = 1(x - 0)$, josta $y = x$, joten origoon asetettu tangentti yhtyy käyrän suoraan osaan. ■

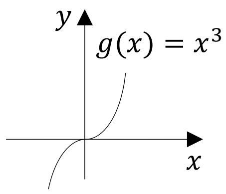
4.7.4 Tangentti on käännepisteessä

Teoksessa *Calculus: one and several variables* (Salas ym. 2003, 238—241) tarkastellaan käännepistettä kuperuuden näkökulmasta.

> *Kuperuus* Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä I. Funktion f kuvaaja on kupera alaspäin, jos f' on kasvava välillä I ja kupera ylöspäin, jos f' on vähenevä välillä I.



Funktion $f(x)$ kuvaaja on alaspäin kupera.



Funktion $g(x)$ kuvaaja on ylöspäin kupera välillä $]-\infty, 0]$ ja alaspäin kupera välillä $[0, \infty[$.

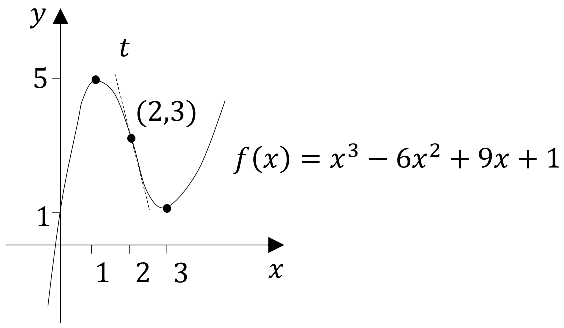
KUVA 33. Funktion kuvaajan kuperuus (Salas ym. 2003, 239).

Geometrisesti ajateltuna kuvan 33 funktion $f(x) = x^2 + 1$ kuvaaja on koko avoimella välillä alaspäin kupera, jolloin vasemmalta oikealle liikuteltavan tangentin kulmakerroin kasvaa ja tangentti pysyy kuvaajan alapuolella koko välin. Funktiolla ei ole käännepistettä tai terassipistettä, koska funktion kuvaajan kuperuus ei vaihdu missään pisteessä. Funktiolle voidaan kuitenkin asettaa horisontaalinen tangentti pisteeseen $(0, 1)$.

Geometrisesti ajateltuna kuvan 33 funktion $g(x) = x^3$ kuvaaja on ylöspäin kupera negatiivisilla muuttujan arvoilla ja origon jälkeen alaspäin kupera. Funktiolla on käännepiste origossa, jossa tangentti leikkaa kuvaajan ja siirtyy kuvaajan alapuolelle muuttujan positiivisilla arvoilla. Tangentti on myös horisontaalinen käännepisteessä, jossa funktion tangentin kulmakerroin on nolla. Tällaista käännepistettä sanotaan terassipisteeksi.

> *Käännepiste* Olkoon funktio f jatkuva muuttujan arvolla $x = c$. Pistettä $(c, f(c))$ sanotaan käännepisteeksi (point of inflection), jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että funktion f kuvaaja on kupera avoimella välillä $(c - \delta, c)$ sekä kupera vastakkaiseen suuntaan avoimella välillä $(c, c + \delta)$.

Esimerkki 1. Tangentti leikkaa käännepisteessä $(2,3)$ funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ kuvaajan (kuva 34).



KUVA 34. Tangentti funktion $f(x)$ kuvaajan käännepisteessä $(2,3)$ (Salas ym. 2003, 240)

Todistus. Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ derivaattafunktio on

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\,(x^2 - 4x + 3)$ ja $f''(x) = 6x - 12 = 6\,(x - 2)$.

Koska $f''(x) = 0$ muuttujan arvolla $x = 2$, niin väleillä $(-\infty, 2)$ ja $(2, \infty)$ saadaan kuperuudelle ja funktion kululle vastaavuus (taulukko 2):

TAULUKKO 2. Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ kulku ja kuperuus

f''	negatiivinen - - -	$f''(2) = 0$	positiivinen + + +
funktion f kuvaaja	ylöspäin kupera	käännepiste = $(2, f(2))$	alaspäin kupera

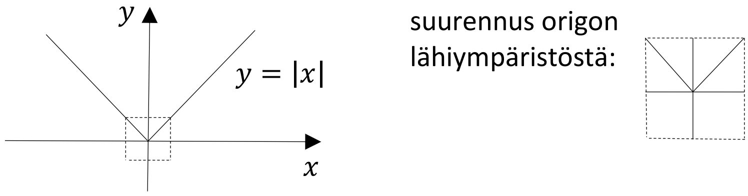
Piste $\big(2, f(2)\big) = (2,3)$ on käännepiste, jossa $f'(2) = 3\,(4 - 4 \times 2 + 3) = -3$.

Tangentin yhtälö on $y - 3 = -3\,(x - 2)$, josta $y = -3x + 9$.■ (Salas ym. 2003, 240.)

Esimerkeistä voidaan päätellä, että funktioiden käännepisteessä $\big(c, f(c)\big)$ $f''(c) = 0$ tai ei ole olemassa $f''(c)$ ja $f''(x)$ muuttaa etumerkkinsä muuttujan arvolla $x = c$.

4.7.5 Kärkipiste

Kun funktion kärkipiste on funktion kuvaajan muodostaman kulman kärkipiste, niin kärkipisteessä toispuoleiset tangentin kulmakertoimet ovat reaaliset mutta eri suuret. Tällaisessa kärkipisteessä ei voi olla tangenttia (ks. esim. kuva 35).



KUVA 35. Itseisarvofunktion kärkipiste (0,0) (esim. Kangasaho ym. 2014c, 43)

Esimerkki 1. Itseisarvofunktio $y = |x|$ on jatkuva kaikkialla mutta se ei ole derivoituva origossa (kuva 35).

Todistus. Itseisarvofunktiona $y = |x|$ on paloittain jatkuva funktio

$$y = \begin{cases} x, kun \ \ x \geq 0 \\ -x, kun \ x < 0. \end{cases}$$

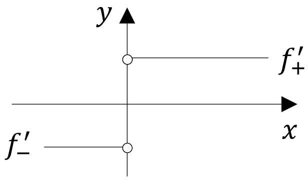
Muodostetaan vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen derivaatta origossa

$f'_-(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ja $f'_+(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$. Siis

$f'_-(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|0+h|-|o|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$ ja

$f'_+(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|0+h|-|o|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$

Koska $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, niin derivaattafunktio ei ole jatkuva muuttujan arvolla nolla (kuva 36):



$$f'(x) = \begin{cases} -1, kun \ \ x < 0 \\ \ \ 1, kun \ x > 0 \end{cases}$$

KUVA 36. Funktion $y = |x|$ derivaattafunktion kuvaaja (Blank & Krantz 2006, 169)

Funktio $y = |x|$ on kuitenkin derivoituva avoimella välillä $]-\infty, 0[$, jolloin $f'(x) = -1$ ja avoimella välillä $]0, \infty[$, jolloin $f'(x) = 1$. ■

Avoimien välien derivoituvissa pisteissä funktion $y = |x|$ analyyttinen tangentti on mahdollista määrittää ainakin symbolisena. (Salas ym. 2003, 127—128.) Vastaavasti geometrinen visuaalinen tangentti tason pisteiden joukkona voi olla funktion $y = |x|$ kärkipisteen kautta joko välillä $]-\infty, 0]$ tai $[0, \infty[$.

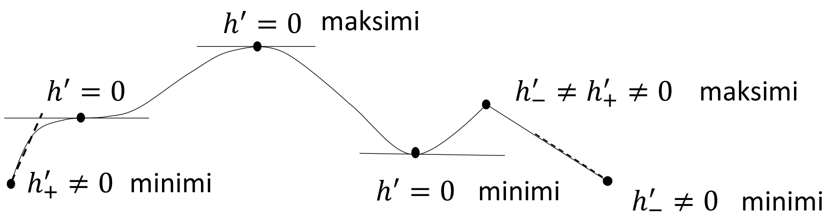
4.8 Tangentin perussovelluksia

Edellä on tarkasteltu, miten tangentin avulla määritetään

- käyrän normaali (luku 4.5)
- funktion muutosnopeus ja seurataan funktion kulkua (luku 4.4.6).

Funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen arvo nolla ei ole välttämätön ja riittävä ehto funktion ääriarvokohdalle. Terassipiste, jossa funktion derivaatta saa arvon nolla, ei voi olla ääriarvokohta mutta funktion ääriarvo voi olla funktion päätepisteessä tai kärkipisteessä, joissa on toispuoleiset tangentin kulmakertoimet (kuva 37):

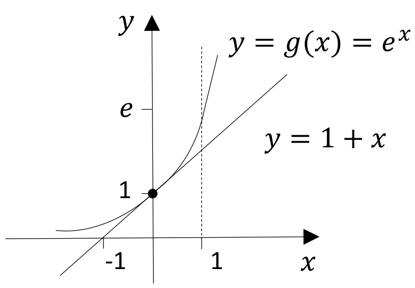
- funktion ääriarvokohta

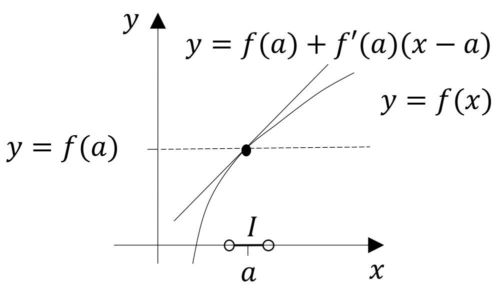


KUVA 37. Funktion paikallisia ääriarvokohtia ja terassipistekohta
(Blank & Krantz 2006, 252)

Edelleen, kun ajatellaan avoimella välillä jatkuvaa funktiota $f(x)$, joka sisältää pisteen a, niin pisteen $(a, f(a))$ kautta kulkeva horisontaalinen suora $y = f(a)$ ei yleensä anna hyvää likiarvoa funktiosta pisteen a lähiympäristössä. Yleensä funktio kannattaa korvata tangentilla.

- *tangenttiapproksimaatio* Tangenttiapproksimaatiossa derivoituva funktio f korvataan avoimella välillä I sen pisteeseen $(a, f(a))$ asetetulla tangentin yhtälöllä.





KUVA 38. Funktion $g(x) = e^x$ tangenttiapproksimaatio $y = 1 + x$ pisteen (0,1) lähiympäristössä ja funktion $f(x)$ tangenttiapproksimaatio avoimella välillä I (Brannan 2006, 314)

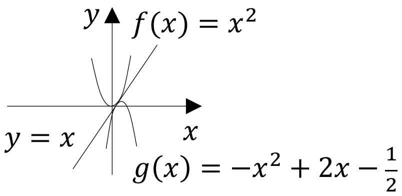
Esimerkki 1. Kuvan 38 funktion $f(x)$ pisteessä $(a, f(a))$ tangentin kulmakerroin $f'(a) = \frac{y-f(a)}{x-a}$, joten tangenttiapproksimaatioksi saadaan $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Esimerkki 2. Määritetään funktiolle $g(x) = e^x$ (kuva 38) tangenttiapproksimaatio origoon.

Ratkaisu. Nyt $g(x) = e^x$, $g(0) = 1$, $g'(x) = e^x$ ja $g'(0) = 1$, joten

$e^x \cong g(0) + g'(0)(x-0) = 1 + x$. (Brannan 2006, 314.)

- käyrien sivuamispiste



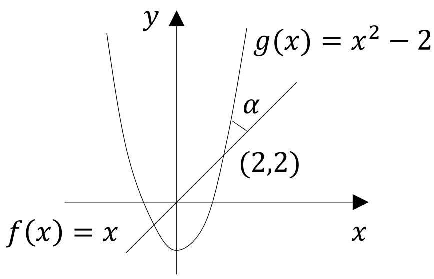
KUVA 39. Paraabelifunktioiden sivuamispiste, tilannehahmotelma

Esimerkki 3. Osoita, että käyrät $f(x) = x^2$ ja $g(x) = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ sivuavat toisiaan (kuva 39).

Polynomifunktiot ovat jatkuvia ja derivoituvia. Määritetään ensin käyrien yhteiset pisteet yhtälöstä $x^2 = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$, josta $x = \frac{1}{2}$ ja $f(x) = \frac{1}{4}$. Käyrien yhteiseksi pisteeksi saadaan $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ja derivaattafunktioiksi $f'(x) = 2x$ ja $g'(x) = -2x + 2$.

Yhteisellä muuttujan arvolla $\frac{1}{2}$ $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ja $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, joten pisteessä $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ kummankin käyrän tangentin kulmakerroin on yksi. Käyrillä on yhteinen tangentti $y = x - \frac{1}{4}$ tässä pisteessä, joten käyrät sivuavat pisteessä yhdensuuntaisina toisiaan. ■

- kahden käyrän välinen kulma



KUVA 40. Kahden käyrän leikkauskulma

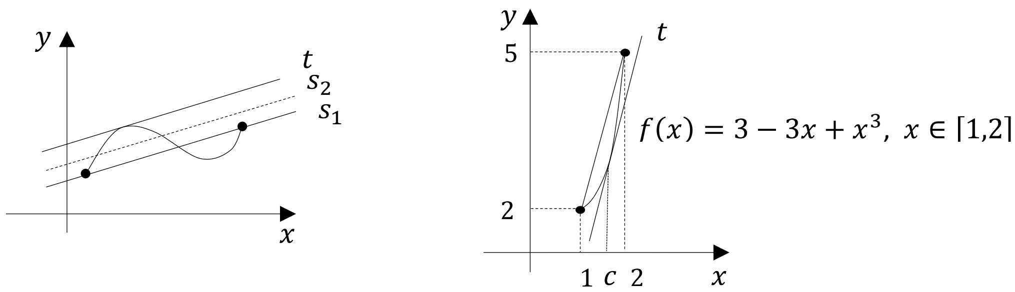
Esimerkki 4. Kuinka suuressa kulmassa (kuva 40) suora $f(x) = x$ leikkaa paraabelin $g(x) = x^2 - 2$ pisteessä (2,2)?

Ratkaisu. Suoran $f(x) = x$ kulmakerroin $k_1 = 1$. Pisteessä (2,2) saadaan paraabelin $g(x) = x^2 - 2$ tangentin kulmakertoimen $g'(x) = 2x$ arvoksi $g'(2) = 4 = k_2$.

Suoran ja paraabelin väliselle kulmalle α $\tan\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{4-1}{1+1\cdot 4}\right| = \frac{3}{5}$, josta $\alpha \approx 31°$.

Väliarvolause on Rollen lauseen (ks. luku 4.7.2) yleistys:

- *väliarvolause (mean value theorem)* Jokaista derivoituvan käyrän sekanttia kohti on ainakin yksi sen suuntainen tangentti.



KUVA 41. Yhdensuuntaiset sekantit ja tangentit (Brannan 2006, 232—233)

Esimerkki 5. Funktiolle $f(x) = 3 - 3x + x^3, x \in [1,2]$ voidaan piirtää tangentti, joka on sen päätepisteitä yhdistävän sekantin suuntainen (kuva 41).

Koska $f(1) = 3 - 3 + 1 = 1$ ja $f(2) = 3 - 6 + 8 = 5$, niin funktion kuvaajan sekantin kulmakerroin $k = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{5-1}{2-1} = 4$. Koska $f(x)$ polynomina on jatkuva välillä $[1,2]$ ja derivoituva avoimella välillä $]1,2[$, niin derivaatta $f'(x) = -3 + 3x^2$.

Siten $k = f'(c) = -3 + 3c^2 = 4$, kun $3c^2 = 7$, josta $c = \sqrt{\frac{7}{3}} \cong 1{,}53$. Pisteessä $(c, f(c))$ tangentti on yhdensuuntainen käyrän päätepisteitä yhdistävän sekantin kanssa. ■

Tässä työssä tarkastellaan joitakin visuaalisen tangentin ja yhden muuttujan reaaliarvoisen funktion derivaatan yhteyden perusteita. Visuaalinen tangentti esiintyy monissa muissa yhteyksissä, kuten vektorilaskennassa, joten sovellusmahdollisuuksia on eritasoisille matematiikan osaajille.

4.9 Lopuksi

Lukio-opiskelijoiden (ja peruskoululaisten) ajattelu voi olla tietoista tangentin ominaisuuksien etsimistä kuvioista, tangentin visualisointia piirto-ohjelmilla, visuaalisen tangentin ja sen lähikäsitteiden yhteyksien pohdintaa sovellustehtävissä, tangentin yhtälön määrittämisessä ja laskemisessa tai havainnollisten esitysmuotojen yhdistämisessä määritelmään.

5 AIKAISEMPIA TUTKIMUKSIA

Ihmisten käsitykset visuaalisista kohteista ovat melko globaaleja, pieniä kulttuurisia eroja voi esiintyä (ks. esim. Hatva 2009, 74). Muun muassa englantilainen Tall (1986) ja kreikkalainen Biza (2007) ovat tutkineet lukio-opiskelijoiden käsityksiä visuaalisesta tangentista konstruktivistisen oppimiskäsityksen näkökulmasta.

5.1 Tallin tietokoneavusteinen käyrän jyrkkyyden ja tangentin opetustutkimus

Tall (1986) kokeilee lukion matematiikassa tietokoneavusteista opetusta johdantona käyrän jyrkkyyden ja tangentin käsitteen määrittämiseen. Tall tutkii kuvaajien suurennusten, visuaalisten tangenttien ja niiden vastaesimerkkien, keskustelun ja pohdinnan merkitystä käyrän jyrkkyyden ja tangentin käsitteiden ymmärtämisessä.

5.1.1 Tutkimuksen taustaa

Tall (1986) esittää, että lukio-opiskelijat muodostavat ympyrän tangentista geometriassa helposti Vinnerin (1982) nimeämän käsityksen *geneerisestä tangentista*, joka sivuaa koko käyrää yhdessä pisteessä leikkaamatta sitä. Tällainen kognitiivinen käsitys on ongelmallinen, kun pohditaan tangentin asettamista esimerkiksi vakiofunktion kuvaajalle, funktion kuvaajan *käännepisteeseen* (engl. *point at inflection*) tai käyrän muodostaman kulman *kärkipisteeseen (*engl. *edge point, cusp point*).

5.1.2 Tietokoneavusteisen opetustutkimuksen toteutus

Tallin (1986) ohjaamaan tietokoneavusteiseen opetusryhmään kuuluu kolme luokkaa, yhteensä 42 noin 16-vuotiaita opiskelijoita, testeihin osallistuu 41. Kontrolliryhmänä on kolme perinteisen opetuksen luokkaa, yhteensä 65 opiskelijaa. Lisäksi matematiikan opinnot juuri aloittaneita yliopisto-opiskelijoita on kaksi ryhmää, yhteensä 47 opiskelijaa. Kaikkien ryhmien opettajat pitävät tutkimuspäiväkirjaa.

Ensin Tallin tietokoneavusteisessa opetusryhmässä tarkastellaan pieninä ryhminä funktioiden kuvaajia suurennoksina. Suurennettuna käyrän osa voi lähes suoristua. Kun sitten funktion suurennukseen piirretään matematiikkaohjelmalla suora kuvaajan kahden hyvin lähellä toisiaan olevan pisteen $(x, f(x))$ ja $(x + h, f(x + h))$ kautta, missä $h = 0{,}0001$, niin kuvaajan voi havaita lähes yhtyvän suoraan. Näin käyrän jyrkkyydestä pisteessä saadaan suoran avulla visuaalinen käsitys. Symbolisena *käyrän jyrkkyys* (engl. *gradient*) voidaan laskea suoran kahden pisteen välisen pystysuoran akselin suuntaisen muutoksen suhteena vastaavaan muutokseen vaakasuoran akselin suhteen.

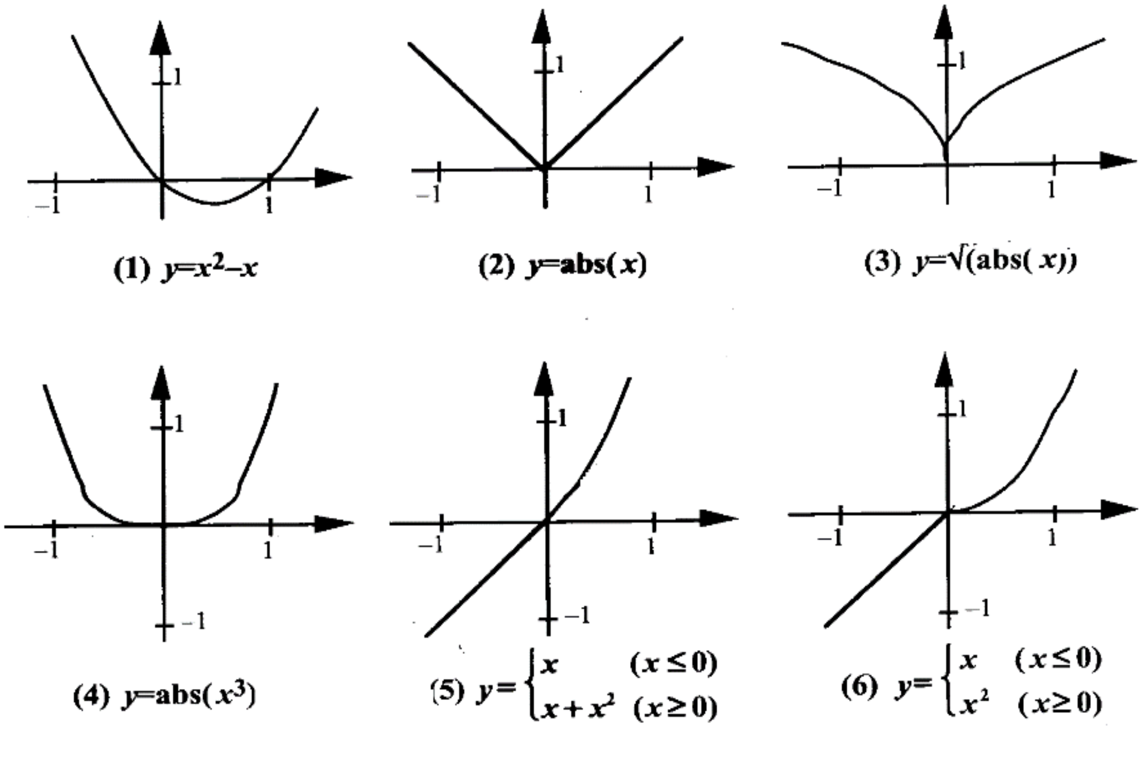
Tutkimukseen kuuluu kaksi testiä. Ensimmäisessä testissä kysytään käyrän jyrkkyyttä ja se tehdään ennen siirtymistä tangentin käsitteeseen. Sitten opetellaan tangentin piirtäminen ja käyrien tangentteja tutkitaan opettajajohtoisesti visuaalisina esimerkkeinä ja vastaesimerkkeinä. Uudet tilanteet ja kuvioiden ja matemaattisen tiedon väliset eroavuudet saavat opiskelijat pohtimaan ja keskustelemaan.

Kun opastuksessa jonkun kuvaajan kärkipisteen lähiympäristö suurennettuna suoristuu, niin kuvaajan lähes suoran osan avulla voidaan arvioida käyrän jyrkkyyttä eli funktion muutosnopeutta myös ″kärkipisteessä″ ja laskea kuvasta likimääräinen tangentin kulmakerroin. Kuitenkin esimerkiksi itseisarvofunktion $y = |\sin x|$ kärkipiste säilyy suurennuksissa.

Opastuksessa opiskelijat muodostavat käsityksensä visuaalisen esityksen pohjalta. Vasta testien jälkeen he opiskelevat derivoinnin. Toinen testi suoritetaan, kun tangentin käsite on pääosin käyty visuaalisena läpi. Molemmissa testeissä käytetään samaa kuuden kuvaajan sarjaa, jossa funktioiden kuvaajia tarkastellaan origon lähiympäristössä. Lisäksi opiskelijat perustelevat vastauksensa kysymyksiin sanallisesti (taulukko 3):

TAULUKKO 3. Testikysymykset (Tall 1986)

KUVAAJAN JYRKKYYDEN KYSELYSSÄ kunkin kuvaajan yhteydessä opiskelijoilta kysyttiin:
Voitko laskea kuvaajan jyrkkyyden muuttujan arvolla $x = 0$? KYLLÄ / EI Jos KYLLÄ, niin mikä on jyrkkyys? Jos EI, miksi ei?
TANGENTTIKYSELYSSÄ heiltä kysyttiin:
Onko kuvaajalla tangentti muuttujan arvolla $x = 0$? KYLLÄ / EI Jos KYLLÄ, niin piirrä kuvaan tangentti. Jos EI, miksi ei?



KUVA 42. Testikuvaajat (Tall 1986)

5.1.3 Tutkimustuloksia

Tall vertailee kontrolliryhmän ja tietokoneopetusryhmän vastauksia. Tilastollisen merkitsevyyden Tall laskee ristiintaulukoinnilla χ^2-testillä. Vastaukset jaetaan ″oikeisiin″ ja ″muihin vastauksiin″.

Ympyrän kaarta muistuttaviin kuvaajiin 1 ja 4 kaikki ryhmät vastaavat virheettömästi (kuva 42). Lukiolaisten kontrolliryhmäkään ei osaa vielä testissä ratkaista symbolista käyrän jyrkkyyden määrittämistä itseisarvolausekkeista, kuten kuvaajasta 4. Silti kaikki lukiolaiset ilmoittavat kuvaajan 4 tangentiksi intuitiivisesti aiempien havaintojensa pohjalta x-akselin $y = 0$.

Kuvaaja 2 on funktio $y = |x|$. Lukiolaisten kontrolliryhmästä ainoastaan yhden kolmasosan mielestä funktiolla ei ole origossa kulmakerrointa. Kontrolliryhmästä neljäsosa ja yliopisto-opiskelijoistakin lähes viidesosa piirtää tälle funktiolle tangentiksi *geneerisen tangentin* ominaisuudet omaavan balanssitangentin, x-akselin. *Balanssitangentti* on implisiittinen konkreetti intuitiivinen käsitys, jonka mukaan tangentti ymmärretään janana, joka asettuu tasapainoon kärkipisteen molemmin puolin yhtä etäälle funktion kuvaajasta.

Kuvaajan 3 neliöjuurifunktio on haasteellinen kaikille. Merkitsevästi useampi tietokoneopetuksen ryhmästä kuin kontrolliryhmästä tai yliopisto-opiskelijoista vastaa, että käyrällä ei ole origossa kulmakerrointa ja että funktiolla ei ole origossa tangenttia. Sen sijaan noin kolmasosa kontrolliryhmästä ja lähes puolet yliopisto-opiskelijoista ehdottaa kärkipisteeseen (0,0) vertikaalista y-akselin suuntaista tangenttia. Reilu kymmenesosa kontrolliryhmästä antaa vastaukseksi symmetrisesti käyrän suhteen asettuvan balanssitangentin $y = 0$.

Kuvaaja 5 jatkuu lähes suoran osan suuntaisena positiivisilla muuttujan arvoilla. Kuitenkin miltei puolet kontrolliryhmästä ja yliopisto-opiskelijoistakin kolmasosa yrittää piirtää origon kautta kulkevan geneerisen tangentin.

Kuvaajan 6 muodostaman kulman kärkipistetilanteeseen kaikki opiskelijat vastaavat melko hyvin aiemmin kohtaamiensa visuaalisten esimerkkien pohjalta. Virheellisiä vastaustyyppejä ovat: monta, kaksi tangenttia, balanssitangentti, oikean- tai vasemmanpuoleinen tangentti ja muu.

Lukiolaisten kontrolliryhmässä geneerinen tangentti näkyy heidän vastauksissaan kuvaajaan 5 ja implisiittiset eli konkreetit intuitiiviset käsitykset vastauksissa kuvaajiin 2, 3 ja 6. Kuitenkin kaikkien testikuvaajien osalta tietokoneavusteinen ryhmä vastaa vähintään yhtä hyvin kuin yliopisto-opiskelijat sekä merkitsevästi paremmin kuin lukiolaisten kontrolliryhmä.

5.1.4 Tallin esittämiä johtopäätöksiä

Tallin (1986) mukaan tietokoneopetuksessa pohditut visuaaliset tangentit syvensivät ja korjasivat opiskelijoiden ymmärrystä, mikä auttoi haasteellisissa testitehtävissä. Hankalia funktioita lähestyttiin onnistuneesti visuaalisten vastaesimerkkien kautta. Tall arvioikin, että koulumatematiikan opiskelijoiden on ehkä parempi tutkia myös havainnollisia tilanteita pelkän teoreettisen tiedon ja määritelmien opettelun sijaan. Tall esittää ajatuksensa Hartin sanoin: The brain was designed by evolution to deal with *natural complexity*, not neat ″logical simplicities″.

5.2 Bizan tutkimus lukio-opiskelijoiden käsityksistä visuaalisesta tangentista

Biza (2007) tutkii lukion viimeisen lukukauden opiskelijoiden ja yliopisto-opintojaan aloittelevien opiskelijoiden käsityksiä visuaalisesta tangentista. Biza jakaa tutkimuksessa visuaalisen tangentin geometriseen ja analyyttiseen muotoon ja kuvailee pääasiassa lukion suorittaneiden opiskelijoiden käsityksiä tangentista tangentin oppimisprosessin siinä vaiheessa, kun he ovat juuri aloittamassa matematiikkaa sivuavien eri alojen yliopisto-opintoja. Biza pyrkii myös selvittämään, miten opiskelijoiden käsitykset tangentista todennäköisesti muuttuvat pian lukion suorittamisen jälkeen.

5.2.1 Tutkimuksen taustaa

Biza (2007) kirjoittaa, että tutkimusten mukaan toisen ja kolmannen asteen opiskelijat kohtaavat matematiikassa käsitteitä, joita he ovat opiskelleet alemmalla asteella. Tällöin heidän on muokattava käsitekuviensa kognitiivista rakennetta soveltuvaksi uusiin tilanteisiin.

Biza esittää Hareliin ja Talliin (1989) viitaten, että opiskelijat voivat eri tavoin säilyttää oman käsitekuvansa kognitiivisen rakenteen tai muokata käsitekuvaansa käyttökelpoiseksi uusiin tilanteisiin. Kuitenkin Harelin ja Tallin (1991) mukainen käsitekuvan muokkaus on usein vain yksilön eriasteista pintapuolista yleistämistä, jossa käsitteellistä muutosta ei tapahdu ja käsitekuvasta rakentuu virheellinen ja irrallinen. *Käsitteellisessä muutoksessa* käsitekuvat sen sijaan olennaisesti muuttuvat ja uudelleen rakentuvat laajemmin yksikäsitteisiksi. Biza jatkaa, että Sierpinskan (1994) mukaan henkilökohtainen käsitekuvan uudelleenmuodostus ei ole kuitenkaan triviaali, hierarkkinen, suoraviivainen prosessi.

5.2.2 Tutkimuksen toteutus

Ensin Biza (2007) tutkii kreikkalaisten lukioiden 196 opiskelijan käsityksiä tangenttisuoran ja käyrän yhteydestä lukion viimeisellä kevätlukukaudella analyysin kurssilla. Sen jälkeen syksyllä hän tutkii kreikkalaisissa yliopistoissa opintojaan aloittavien 182 opiskelijan käsityksiä samoilla kysymyksillä ja vertaa niitä lukiolaisten ajatuksiin tangentista. Lukiolaiset ovat opiskelleet tangentin käsitettä geometriassa, analyyttisessä geometriassa ja testin aikoihin analyysin kurssilla. Aloittavilla yliopisto-opiskelijoilla on suoritettuina samat matematiikan kurssit ja he ovat osallistuneet yo-kirjoituksiin mutta he tulevat eri kouluista kuin lukiolaiset. Tästä huolimatta Biza arvelee, että näiden kahden ryhmän käsitysten mahdolliset eroavuudet johtuvat pääosin lukion viime vaiheen matematiikan opiskelusta, yo-kirjoituksista ja noin neljän kuukauden opiskelutauosta. Käytän jatkossa yliopisto-opintoja aloittavasta ryhmästä nimikettä yliopisto-opiskelijat.

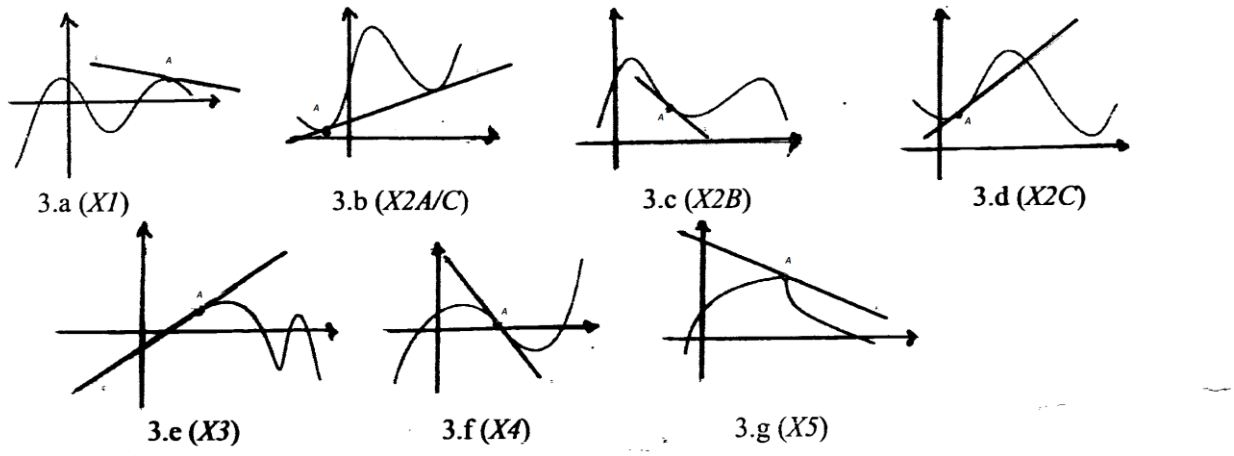
5.2.3 Geometrinen tangentti

Geometrisen tangentin kysely muodostuu kuvan 43 kysymyksistä. Kysymyksessä 3 on seitsemän käyrää ja kysymyksessä 4 on viisi käyrää. Analyyttisen tangentin kyselyn kanssa koko kysely sisältää 3. kysymyksen osalta 14 ja 4. kysymyksen osalta 15 käyrää.

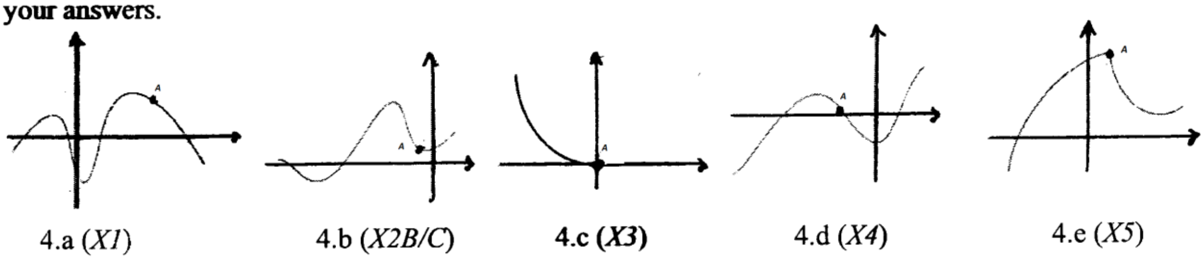
Question 1: Try to explain, in simple words, what you are thinking when you hear the term “tangent line”

Question 2: A line is the tangent of a curve at a point *A*. Write as many properties you can think about the relationship between this curve and its tangent line at point *A*.

Question 3 (Recognition): Which of the lines that are drawn in the following figures are tangent lines of the corresponding graphs at point A? Justify your answers.



Question 4 (Construction): Sketch the tangent lines of the following curves at point A, if they exist. Justify your answers.



KUVA 43. Geometrisen tangentin kysely *(Biza 2007)*

Kysymyksessä 1 opiskelijoita pyydetään kuvailemaan tangenttisuoraa omin sanoin. Kysymyksessä 2 pyydetään kuvailemaan sanallisesti, millaisia käyrän ja tangentin yhteyteen liittyviä ominaisuuksia tangentilla voi olla, kun tangentti sivuaa käyrää pisteessä *A*.

Kysymyksessä 3 käyrille on piirretty suorat pisteisiin *A*. Opiskelijoita pyydetään valitsemaan suorista tangentit ja perustelemaan valinnat. Kysymyksessä 4 mahdollinen tangentti pyydetään piirtämään käyrille pisteisiin *A* ja perustelemaan. Kysymyksissä 3 ja 4 tutkitaan opiskelijoiden kykyä tunnistaa tangentti ja piirtää tangentti käyrälle.

Opiskelijoiden vastaukset kysymyksiin 3 ja 4 luokiteltiin vastausten oikeellisuuden mukaan ja analysoitiin määrällisesti. Opiskelijoiden vastaukset kysymyksiin 1 ja 2 sekä heidän perustelunsa kysymyksiin 3 ja 4 analysoitiin laadullisesti. Jokaisesta opiskelijasta tehtiin kyselyn pohjalta lyhyt kuvaus, opiskelijaprofiili.

Lukiolaisten vastauksista Biza löysi viisi tärkeintä tangentin ja käyrän välisen yhteyden erityispiirrettä (F1—F5). Näiden yhdistelmät riittävät kuvaamaan lähes täydellisesti lukioaikaisia käsityksiä tangentin ja käyrän yhteydestä (taulukko 4).

TAULUKKO 4. Opiskelijoiden kokemat tangentin ja käyrän väliset erityispiirteet (Biza 2007)

Yhteyden erityispiirre	Tangentin ja käyrän yhteys
F1	Tangentilla ja käyrällä on vain yksi yhteinen piste.
F2A, F2B, F2C	Tangentilla ja käyrällä on vain yksi yhteinen sivuamispiste pisteen jossain lähiympäristössä. Tangentilla ja käyrällä voi olla muita yhteisiä pisteitä, jotka ovat (A) kuviossa näkyviä pisteitä, (B) sivuamispisteitä, joita ei näy kuviossa tai (C) muita kuviossa näkyviä tai ei-visuaalisia leikkauspisteitä tai sivuamispisteitä.
F3	Tangentti yhtyy käyrään tai sen osaan siten, että tangentilla on ääretön määrä yhteisiä pisteitä millä tahansa lähietäisyydellä jostain sivuamispisteestä.
F4	Tangentti on käänne- tai terassipisteessä.
F5	Sivuamispisteessä tangentin ehto on käyrän sileys.

Mikään tangentin ja käyrän välisistä erityispiirteistä F1—F5 ei yksinään riitä kuvaamaan opiskelijoiden henkilökohtaisia käsityksiä geometrisesta tangentista. Esimerkiksi osa opiskelijoista ajattelee erityispiirteestä F4, että suora ei ole tangentti, kun se leikkaa käyrän pisteessä kahteen osaan ja että piste ei ole derivoituva. Viisi erityispiirrettä riittävät myös yliopisto-opiskelijoiden vastausten ryhmittelyyn kahdeksaan käsitekuvaan eli ajattelumalleihin M1—M8 lukuun ottamatta 14 koehenkilöä, joten koehenkilöitä sijoittuu ryhmiin yhteensä 168.

TAULUKKO 5. Yliopisto-opiskelijoiden kahdeksan ajattelumallia tangentin ja käyrän yhteydestä geometrisen tangentin kyselyssä (Biza 2008; vrt. Biza 2007).

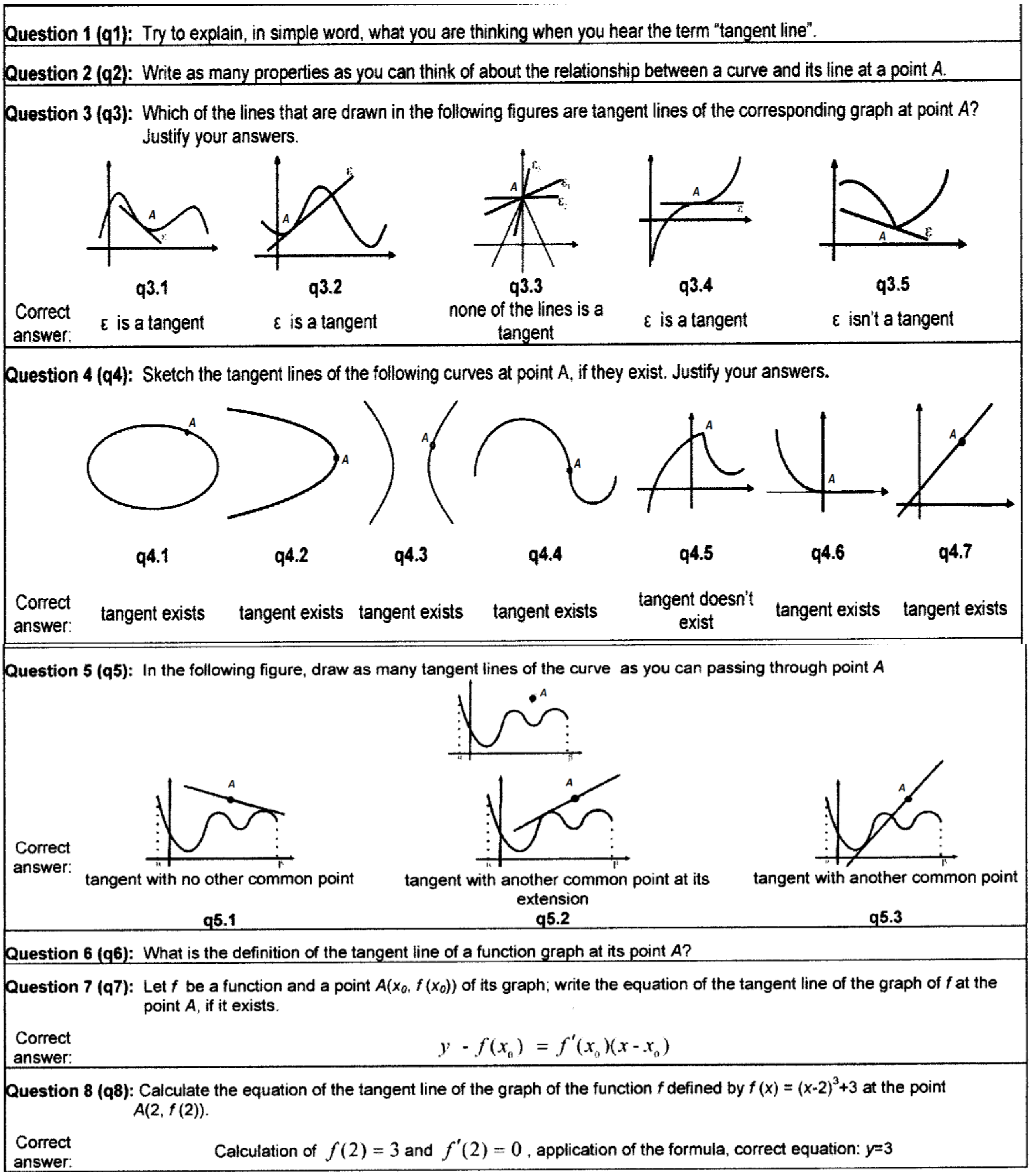
Käsite-kuva	3.a F1	3.b F2A	3.c, 4.b F2B	3.b/d, 4.b F2C	3.e, 4.c F3	3.f, 4.d F4	3.g, 4.e F5	
M1 (18)	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v* (17)	x (1)
M2 (33)	*v*	*v*	*v*	*v*	x	*v*	*v*	
M3 (13)	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	x	*v*	
M4 (42)	*v*	*v*	*v*	*v*	x	x	*v* (37)	x (5)
M5 (27)	*v*	*v*	x	x	*v*	x	*v* (24)	x (3)
M6 (15)	*v*	x	?	x	x	x	*v* (9)	x (6)
M7 (13)	*v*	*v*	x	x	*v*	*v*	*v*	
M8 (7)	*v*	x	x	x	x	*v*	*v* (3)	x (4)

Esimerkiksi *v*–merkki taulukon 5 vasemmassa ylänurkassa tarkoittaa, että M1-ajattelumallin opiskelijat pitävät piirrettä F1 totena eli hyväksyvät sen. Ajattelutavan M1 opiskelijoista yksi ei hyväksy piirrettä F5, mitä merkitään x (1). Solussa ei ole taustaväriä, kun solun osoittama erityispiirre ei sisälly ajattelumalliin. Erityispiirteessä F5 Biza (2008) hyväksyy ajattelumalleihin vastakkaiset käsitykset. Tämä selittynee sillä, että Biza yleensäkin arvioi tutkimuksessa saman opiskelijan vastauksia ja käsityksiä eri tehtäviin kokonaisuutena, jotta kunkin opiskelijan mielensisäinen käsitekuva tangentista tulee paremmin esille. Vastaavalla tavalla Biza saa sijoitettua analyyttisen tangentin osuudessa muutaman opiskelijan johonkin ajattelumalleista M1—M8 yksittäisestä virheellisestä vastauksesta huolimatta. Taulukossa 6 esitetään ajattelumallit sanallisessa muodossa opiskelijamäärineen.

TAULUKKO 6. Yliopisto-opiskelijoiden käsitekuvat geometrisesta tangentista ja niitä kuvaavat ajattelumallit

Käsite-kuva	Yliopisto-opiskelijoiden lukumäärä ryhmässä	Käsitekuvan eli ajattelumallin kuvaus
M1	18, joista yksi hyväksyy tangentin kärkipisteeseen.	Tangentilla ja käyrällä on useampi yhteinen piste. Käännepisteessä on tangentti. Kärkipisteessä ei ole tangenttia.
M2	33	Tangentilla ja käyrällä voi olla yksi tai useampi yhteinen piste ehdolla, että piste on ainoa yhteinen jossain pisteen lähiympäristössä. Kärkipisteessä ei ole tangenttia.
M3	13	Tangentilla ja käyrällä voi olla useampi yhteinen piste ehdolla, että piste on ainoa yhteinen jossain pisteen lähiympäristössä. Käännepisteessä on tangentti. Kärkipisteessä ei ole tangenttia.
M4	42, joista viisi vastaa väärin kärkipistetilanteeseen.	Kuten M3, mutta käännepisteessä ei ole tangenttia.
M5	27, joista kolme vastaa väärin kärkipistetilanteeseen.	Tangentilla ja käyrällä voi olla yksi tai useampi yhteinen piste, jos ne ovat sivuamispisteitä. Käännepisteessä ja kärkipisteessä ei ole tangenttia.
M6	15, joista kuusi vastaa väärin kärkipistetilanteeseen.	Tangentilla ja käyrällä on vain yksi yhteinen piste. Joskus tämän mallin opiskelija voi hyväksyä tangentiksi suoran, jolla ei ole muita yhteisiä pisteitä käyrän kanssa joko kuvion tangentin tai itse piirretyn tangentin lyhyydestä johtuen. Käännepisteessä ei ole tangenttia.
M7	13	Tangentilla ja käyrällä voi olla yksi tai useampi yhteinen piste, jos yhteiset pisteet ovat sivuamispisteitä. Käännepisteessä on tangentti. Kärkipisteessä ei ole tangenttia.
M8	7, joista neljä vastaa väärin kärkipistetilanteeseen.	Tangentilla ja käyrällä on vain yksi yhteinen piste. Käännepisteessä on tangentti.

5.2.4 Analyyttinen tangentti



Question 1 (q1): Try to explain, in simple word, what you are thinking when you hear the term "tangent line".

Question 2 (q2): Write as many properties as you can think of about the relationship between a curve and its line at a point *A*.

Question 3 (q3): Which of the lines that are drawn in the following figures are tangent lines of the corresponding graph at point *A*? Justify your answers.

	q3.1	q3.2	q3.3	q3.4	q3.5
Correct answer:	ε is a tangent	ε is a tangent	none of the lines is a tangent	ε is a tangent	ε isn't a tangent

Question 4 (q4): Sketch the tangent lines of the following curves at point A, if they exist. Justify your answers.

	q4.1	q4.2	q4.3	q4.4	q4.5	q4.6	q4.7
Correct answer:	tangent exists	tangent exists	tangent exists	tangent exists	tangent doesn't exist	tangent exists	tangent exists

Question 5 (q5): In the following figure, draw as many tangent lines of the curve as you can passing through point *A*

	q5.1	q5.2	q5.3
Correct answer:	tangent with no other common point	tangent with another common point at its extension	tangent with another common point

Question 6 (q6): What is the definition of the tangent line of a function graph at its point *A*?

Question 7 (q7): Let *f* be a function and a point $A(x_0, f(x_0))$ of its graph; write the equation of the tangent line of the graph of *f* at the point *A*, if it exists.

Correct answer: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Question 8 (q8): Calculate the equation of the tangent line of the graph of the function *f* defined by $f(x) = (x-2)^3+3$ at the point $A(2, f(2))$.

Correct answer: Calculation of $f(2) = 3$ and $f'(2) = 0$, application of the formula, correct equation: $y=3$

KUVA 44. Analyyttisen tangentin kysely (Biza & Zachariades 2010)

Analyyttisen tangentin kyselyssä kysymykset 1 ja 2 ovat samat kuin geometrisessa osuudessa (kuva 44). Kysymyksessä 3 pyydetään valitsemaan ja perustelemaan, mitkä suorista ovat tangentteja. Kysymyksessä 4 pyydetään piirtämään ja perustelemaan mahdollinen tangentti käyrien pisteissä *A*.

Kysymyksessä 5 pyydetään piirtämään käyrälle kaikki tangentit, jotka kulkevat käyrän ulkopuolella olevan pisteen A kautta. Kysymyksessä 6 kysytään funktion kuvaajalla pisteessä A olevan tangentin määritelmää.

Kysymyksessä 7 pyydetään kirjoittamaan funktion f tangentin yhtälö pisteessä $A(x_0, f(x_0))$, jossa se oletetaan mahdolliseksi. Kysymyksessä 8 täytyy laskea tangentin lauseke pisteessä $A(2, f(2))$, kun funktio $f(x) = (x-2)^3 + 3$. Oikeat vastaukset löytyvät kyselylomakkeelta kysymysten alapuolelta.

Erityisesti kysymyksessä 5 on mahdollista piirtää pisteen A kautta kolme tangenttia käyrälle. Vastauksia kysymyksiin 1, 2 ja 6 käytettiin laadullisena osuutena tilastollisiin tuloksiin. (Biza & Zachariades 2010.)

Lukiolaisia osallistui kyselyyn jälleen 196 ja yliopisto-opiskelijoita 182. Opiskelijoiden vastaukset saatiin sijoitettua tangentin ja käyrän yhteyden erityispiirteisiin F1—F7 taulukon 7 mukaisesti, kun yhdistettiin esitetyt kysymykset ja erityispiirteet: käyrän ja tangentin yhteisten pisteiden lukumäärä ja F1, F2 sekä F3, tangentti käänne- tai terassipisteessä ja F4, tangentti kärkipisteessä ja F5, tangentin symbolinen manipulointi ja F6 sekä kartioleikkauksen tangentti ja F7. (Biza & Zachariades 2010.)

TAULUKKO 7. Opiskelijoiden käsitykset tangentin ja käyrän yhteydestä (Biza & Zachariades 2010)

Yhteyden erityispiirre	Tangentin ja käyrän yhteys
F1	Tangentilla ja käyrällä on vain yksi yhteinen piste: q5.1
F2	Tangentilla ja käyrällä on vain yksi yhteinen piste siten että pisteen lähiympäristössä ei ole muita sivuamispisteitä: q3.1, q3.2, q5.2, q5.3
F3	Tangentilla ja käyrällä voi olla ääretön määrä yhteisiä pisteitä millä tahansa lähietäisyydellä jostain sivuamispisteestä: q4.6, q4.7
F4	Käänne- tai terassipisteessä on tangentti: q3.4, q4.4
F5	Kärkipisteessä ei ole tangenttia: q3.3, q3.5, q4.5
F6	Tangentin symbolinen manipulointi: q7, q8
F7	Kartioleikkauksen tangentti: q4.1, q4.2, q4.3

Tämän jälkeen molemmat opiskelijaryhmät ryhmiteltiin vastaustensa perusteella kolmeen *hierarkkiseen* ryhmään heidän käsitekuvansa kehittyneisyyden mukaan (taulukko 8).

TAULUKKO 8. Hierarkkiset näkökulmat opiskelijoiden tangentin käsitekuvien pohjalta (Biza & Zachariades 2010)

Näkökulma	Käsitekuvan erityispiirteitä
Lokaali analyyttinen (Analytical Local), jossa sivuamispisteen lähiympäristössä käytetään analyyttista näkökulmaa.	Tangentti on sekantin erotusosamäärän raja-arvo. Funktion derivaatta on tangentin kulmakerroin. Tangentin matemaattinen määritelmä on käytössä.
Lokaali geometrinen (Intermediate Local), jossa sivuamispisteen lähiympäristössä tarkastellaan euklidisen geometrian ympyrän tangentin ominaisuuksia.	Tangentilla ja käyrällä voi olla useampi kuin yksi yhteinen piste ehdolla, että sivuamispisteen lähiympäristössä ei ole muita sivuamispisteitä ja tangentti ei leikkaa käyrää kahteen osaan. Sivuamispisteitä voi olla useita erillisiä.
Globaali geometrinen (Geometrical Global), jossa käyrää tarkastellaan kokonaisuutena euklidisen geometrian ympyrän tangentin ominaisuuksin.	Tangentilla voi olla vain yksi sivuamispiste koko käyrän kanssa.

Globaalissa geometrisessa näkökulmassa tangentin geometrisia ominaisuuksia tarkastellaan koko funktion osalta, *lokaalissa geometrisessa* näkökulmassa tangentin sivuamispisteen lähiympäristössä. *Käsitteellinen muutos* käsitekuvissa tapahtuu ainoastaan *lokaalissa analyyttisessä* näkökulmassa.

5.2.5 Bizan ja Zachariadesin esittämiä johtopäätöksiä

Bizan (2007) mukaan geometrisessa osuudessa molempien opiskelijaryhmien ajattelumalleihin M1—M8 vaikuttavat edelleen geometrisen ympyrän tangentin ominaisuudet (taulukko 5). Ainoastaan mallissa M1 on vapauduttu kokonaan euklidisen geometrian rajoituksista, ellei yhden opiskelijan kärkipistevastausta huomioida. Geometriset ajattelumallit esittävät tapoja, joilla opiskelijat yksilöllisesti yleistävät omaksumaansa visuaalista tietoa tai uudelleen muotoilevat käsitteen ominaisuuksia. Mallit eivät Bizan mukaan ole hierarkkisia, minkä voi havaita myös tutkimalla taulukkoa 5.

Biza (2007) jatkaa, että opiskelijoiden sanalliset vastaukset ja perustelut antoivat tärkeää lisätietoa heidän mielensisäisistä käsityksistään. Geometrisessa osuudessa ajattelumallien M6, M5 ja M2 yliopisto-opiskelijat katselevat geometrisen tangentin ominaisuuksia *globaalisti* eli koko käyrän osalta. Mallin M6 opiskelija voi kuvailla henkilökohtaista tangentin käsitemääritelmäänsä (suomeksi vapaasti käännettynä): ″Käyrän tangentti on suora, jolla on (tarkalleen) yksi yhteinen piste käyrän kanssa, siis samanlainen muoto käyrän kanssa tässä pisteessä, ja koko käyrä jää samalle puolelle suoraa″. Sama opiskelija voi vastata 1. kysymykseen: ″Tangentti on suora, joka leikkaa käyrän vain yhdessä pisteessä, ja suora tai sen jatke ei leikkaa käyrää kahteen osaan″. Samoin perusteluin opiskelija voi hyväksyä tangentiksi esimerkiksi tehtävän 3.a suoran. Vastaavasti sanallisten vastaustensa perusteella mallien M4, M3 ja M7 yliopisto-opiskelijat katselevat geometrisen tangentin ominaisuuksia *lokaalisti* eli paikallisesti.

Analyyttisen tangentin kyselyssä näkyy edelleen opiskelijoiden vahva intuitiivinen käsitys visuaalisesta tangentista ja heidän vaikeutensa ymmärtää geometrisen ja analyyttisen tangentin eroja. Opiskelijat ehkä kuvittelivat geometrisen paraabelin q4.2 ja käyrän q4.4 (kuva 44) näkemässään asennossa xy -koordinaatistoon. Tällöin käyrien tangentit tulevat y-akselin suuntaisiksi, sillä lokaalin analyyttisen näkökulman omaksunut yliopisto-opiskelija saattaa perustella esimerkiksi paraabelikuvioon q4.2 antamansa vastauksen: ″Tangenttia ei ole paraabelin pisteessä A, koska se on pystysuora ja y-akselin suuntainen koordinaatistossa″ tai ″ Tangenttia ei ole, koska derivaattaa ei ole määritelty pisteessä A″. Kuvan 5.2.2 käyrä q4.7 on taasen suora, jonka pisteeseen A pyydetään lisäämään tangentti, jos se on mahdollinen. Suoran tapaukseen lukiolaisista kolmasosa vastaa oikein, yliopisto-opiskelijoista enää vajaa neljäsosa. Kreikkalaisissa oppikirjoissa ei esiinny vastaavia tangenttitehtäviä, joten opiskelijat yhdistivät suoran todennäköisesti muihin tilanteisiin. (Biza & Zachariades 2010.)

Funktion kärkipistetilanteeseen vastaa suurin osa oikein, silti sekä oikein että väärin vastanneilla on erilaisia virheellisiä ajattelutapoja. Ensin opiskelijat ehkä pitävät käyrän ympyrän kaarta muistuttavaa käyrän muotoa tangentille välttämättömänä ja vastaavat siltä pohjalta oikein. Lukion loppuvaiheessa kärkipiste ymmärretään luultavasti jo matemaattisemmin. (Biza & Zachariades 2010; Tall 1986.) Bizan (2007) mukaan tangentin kärkipisteeseen hyväksyy opiskelija, joka muutoinkin hyväksyy vain yhden pisteen yhteiseksi käyrän kanssa.

Opiskelijoiden käsitykset tangentista kehittyvät geometrian opiskelun jälkeen lukioaikana. Lukion loppuvaiheessa lukio-opiskelijat jakautuvat melko tasaisesti kolmeen hierarkkiseen ryhmään siten että lokaali analyyttinen ryhmä on vain hiukan suurempi kuin lokaali geometrinen ja globaali geometrinen ryhmä on hiukan muita pienempi. Aloittelevista yliopisto-opiskelijoista taasen yli puolet kuuluu lokaaliin geometriseen ryhmään, toiseksi suurin on lokaali analyyttinen ja enää alle viidesosa kuuluu globaaliin geometriseen ryhmään. (Biza & Zachariades 2010.)

Yliopisto-opiskelijat osaavat tangentin käsitteen määritelmän mutta se on irrallinen ja ristiriitainen heidän tangentista muodostamansa käsitekuvan kanssa ja näkökulmat vaihtelevat enemmän kuin lukiolaisilla. Yliopisto-opiskelijoiden lokaali analyyttinen ja globaali geometrinen ryhmä ovat pienempiä kuin lukiolaisten, koska heissä on sellaisia, jotka eivät hyväksy tangentille yhtä useampaa yhteistä pistettä käyrän kanssa silloin kun toinen yhteinen piste näkyy kuvassa, kuten kuvan 44 kysymyksessä q3.2. Kumminkin samat henkilöt vastaavat hyvin kärkipistetilanteeseen ja Biza sijoittaa heidät siksi lokaaliin geometriseen ryhmään. Molemmille opiskelijaryhmille ovat erityisen ongelmallisia tehtävät q3.4, q4.4, q4.6, q4.7 ja q5.3, toisin sanoen käänne- tai terassipiste ja käyrään tai funktion kuvaajaan tai sen osaan yhtyvä tangentti.

Yliopisto-opiskelijoiden tangentin käsitekuva oli jäänyt joko virheelliseksi lukioaikana tai se palautui varhaisemmalle tasolle neljän lomakuukauden kuluessa. Pysyvään käsitteelliseen muutokseen ylsi yliopisto-opiskelijoista vain neljäsosa. Biza ja Zachariades (2010) arvioivat tämän johtuvan muun muassa siitä, että

- opiskelijoiden tangenttikäsitykset näyttävät muodostuvan paljolti opiskelijoiden kohtaamista esimerkeistä ja tehtävistä
- opiskelijat saattavat yhdistää tangentin tiettyyn tilanteeseen eivätkä näe sitä uudessa helpossakaan tilanteessa

- opiskelijat haluavat pitää muiden matemaattisten käsitteiden tavoin geometrisen tangentin ominaisuuksia yleisesti tosina, luoda yleisen tangentin määritelmän ja konkreetin tangentin myös analyysissä
- kreikkalaisissa matematiikan oppikirjoissa käsitellään vähän tilanteita, joissa käyrä tai käyrän osa on suora, tangentti on x- tai y-akseli tai koordinaattiakselin suuntainen
- käsitteellinen muutos ja näkökulmanvaihdos geometrisesta analyyttiseen edellyttää tietoista ajattelua
- ylioppilaskirjoituksiin valmistautuminen voi johtaa nopeaan jäljittelevään päättelyyn ja sisältöalueiden painotuksiin
- abstrakteja määritelmiä ei havainnollisteta matematiikan oppikirjassa visuaalisesti
- opiskelijoiden mielensisäisiä käsityksiä ei huomioida tarpeeksi opetuksessa
- laskennallisen harjoittelun lisäksi tehtävissä tulisi hyödyntää enemmän muitakin esitysmuotoja.

Biza ja Zachariades esittävät, että Nissin (1999) mukaan usein esiintyvät tilanteet määrittävät opiskelijoiden käsitekuvia. Winickin ja Leikinin (2000) mukaan opiskelijat saattavat pitää määritelminä eri yhteyksissä oppimiaan tangentin ominaisuuksia, jotka eivät ole yleisesti tosia. Monien muidenkin tutkijoiden (Vinner 1982, 1991; Tall 1987; Castela 199; Tsamir ja Ovodenko 2004; Tsamir, Rasslan ja Dreyfus 2006) mukaan ongelmallisia ovat tilanteet, joissa tarkastellaan tangentin mahdollisuutta käyrän kärkipisteessä tai käännepisteessä, kun tangentti on y-akseli tai sen suuntainen, yhdistyy käyrään tai sen osaan. (Biza ym. 2008; Biza ja Zachariades 2010.)

Euklidisen geometrian ja analyysin näkökulmissa on Bizan (2007) mukaan yksi olennainen ero. Euklidisen geometrian näkökulma on holistinen eli globaali, jossa käyrää tarkastellaan kokonaisuutena. Reaalilukujen analyysi edellyttää taasen paikallista eli lokaalia näkökulmaa. Lukio-opiskelijoiden keskuudessa geometrinen näkökulma menettää asemaansa lukion loppuvaiheessa. Lukion jälkeen opiskelijat kumminkin nopeasti unohtavat virheettömänkin käsityksen tangentista. Heidän käsityksensä alkavat muistuttaa enemmän alkuvaiheen käsityksiä ja lokaali geometrinen näkökulma alkaa muotoutua yleisimmäksi ajattelutavaksi. Biza ja Zachariades (2010) pohtivat, että lukion jälkeenkin opiskelijoilla tulisi olla mahdollisuus tarkistaa ja tarvittaessa uudelleen konstruoida käsityksensä uuden tangenttiaiheen opiskelun alussa.

5.3 Intuitiivisen ajattelun ilmeneminen visuaalisen tangentin konstruoinnissa

Intuitio on käsitteenä laaja ja melko huonosti tunnettu. Ihmisen voidaan ajatella käyttävän (ainakin) kahta ajattelutapaa; intuitiivista ja rationaalista ajattelua. Molempien ajattelutapojen hyödyntäminen niin arjessa kuin matematiikassakin on tärkeää. Esimerkiksi käsitteen implisiittisten eli konkreettien, intuitiivisten, visuaalisten merkitysten ja eksplisiittisten eli tietoisten matemaattisten merkitysten yhdistäminen syventää opiskelijoiden käsityksiä ja kehittää matemaattista luovaa ajattelua (Silfverberg 1999, 87—88; Viholainen 2011).

Raami ja Mielonen (Raami 2015, 241—242) tiivistävät Evansia ja Frankishia (2009) mukaillen ihmisen kahden ajattelutavan prosessit seuraaviin ominaisuuksiin (taulukko 9):

TAULUKKO 9. Ihmisen kaksi ajattelutapaa (Raami 2015)

Intuitiivinen ajattelu	*Rationaalinen ajattelu*
evolutiivisesti vanhaa	evolutiivisesti nuorta
tiedostamatonta, esitietoista	tiedostavaa
implisiittistä, tiedostamatonta tietoa	eksplisiittistä, tietoista tietoa
automaattista	kontrolloitua
nopeaa	hidasta
rinnakkaista	sarjallista
intuitiivista	reflektiivistä
kontekstuaalista, tilannekohtaista	abstraktia
käytännöllistä	loogista
assosiatiivista, liitännäistä	sääntöpohjaista
vaivatonta	työlästä
emotionaalista.	neutraalia.

Aiemman tutkimustiedon pohjalta voidaan ajatella, että opiskelijat käyttävät intuitiivista ajattelutapaa yksilöllisesti ja määrällisesti vaihdellen tangentin käsitteen oppimisprosessissa, kun kyseessä on

- visuaalisen tangentin havainnointi (Silfverberg 1999; Biza 2007; Hatva 2009)
- saman tai lähes samanlaisen tangenttikuvion toisto (ks. Hatva 2009)
- tangenttikuvioiden tarkastelu kuvioryhmänä (ks. Hatva 2009, 79)
- visuaalisen tangentin variaatio (Tall 1986; Biza 2007)
- implisiittinen käsitys visuaalisesta tangentista (Tall 1986; Silfverberg 1999)
- globaali näkemys käyrästä (Biza 2007; Hatva 2009)
- geneerinen tangentti -käsitekuva (Tall 1986; Biza 2007)
- tangentin käsitteen pinnallinen oppimisprosessi, jossa käsitykset kehittyvät ristiriitaisissakin tilanteissa alkuvaiheen suuntaisina ja matemaattinen intuitio kehittyy heikosti (Biza 2007; Biza & Zachariades 2010; ks. Hatva 2009)
- käsitysten palautuminen nopeasti tangentin oppimisprosessin jälkeen enemmän alkuvaiheen käsityksiä muistuttaviksi (Biza 2007; ks. Hatva 2009)
- visuaalinen vastaesimerkki tangentille (Tall 1986)
- tangentin käsitteen syvällinen oppimisprosessi, jossa matemaattinen intuitio kehittyy ja integroituu matemaattiseen tietoon (Fischbein 1987; Tieszen 1989; Semanedi 2008)
- luova, joustava matemaattinen ajattelu (Tall 2008; Viholainen 2008).

Matemaattisten käsitteiden merkitys rakentuu pääosin pohdinnan, määritelmien, matematiikan symbolikielen ja käsitteiden yhteyksien kautta (Fiscbein 1993; Sierpinska 1994; Silfverberg 1999; Nardi ym. 2008; Viholainen 2006, 2008; Biza & Zachariades 2010). Havainnollisen esitysmuodon tiedetään aktivoivan aivoissa eri yhteyksiä kuin abstraktin tiedon (ks. esim. Hatva 2009). Tästä johtuen matemaattinen intuitio kehittyy ja integroituu matemaattiseen tietoon, kun opiskelijat onnistuvat yhdistämään käsityksensä visuaalisesta tangentista sen muihin esitysmuotoihin, kuten verbaaliseen ja symboliseen muotoon sekä määritelmään (Tall 2008).

6 VISUAALINEN TANGENTTI OPPIKIRJASSA

Tutkimuskohteena on lukion pitkän matematiikan oppikirjassa tangentin oppimisprosessin alkuvaiheessa esiintyvä visuaalinen eli silmin havainnoitava tangentti. Aistein havainnoitavat kohteet ihmiset kokevat henkilökohtaisella tavallaan.

Henkilökohtaisten kokemusten tutkiminen jaetaan yleensä seuraaviin osa-alueisiin:

- mielikuviin eli alkuvaiheen käsityksiin kohteesta, kuten Bizan (2007) tutkimuksessa opiskelijoiden muodostamiin käsityksiin tangentista lukion geometriassa
- ulkoisiin olosuhteisiin, joita edustaa Bizan tutkimuksessa kuten tässäkin tutkimuksessa lukion pitkän matematiikan oppikirjan visuaalinen tangentti
- menneisyyteen, kuten Bizan tutkimuksessa opiskelijoiden käsityksiin visuaalisesta tangentista lukion päättymisvaiheessa
- nykyhetkeen ja tulevaisuuteen, kuten Bizan tutkimuksessa opiskelijoiden käsityksiin tangentista yliopisto-opintojen alussa.

Ympyrän tangentti esitellään yleensä peruskoulun matematiikan oppikirjoissa. Näin peruskouluaikaisia käsityksiä voi siirtyä tangentin lukio-opintojen pohjaksi (ks. Silfverberg 1999, 205—208). Varsinaisena analysoitavana oppikirjana on vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteiden pohjalta laadittu lukion *Pitkä matematiikka*. Oppikirjojen sisältöjä ei valvota mutta opetushallituksen laatimien opetussuunnitelmien perusteiden pohjalta valmistellaan paikalliset opetussuunnitelmat, joissa täydennetään ja painotetaan perusteissa määriteltyjä tavoitteita ja keskeisiä sisältöjä. Aluksi selvitän, esitetäänkö peruskoulun ja lukion opetussuunnitelman perusteissa tangentin käsitteeseen liittyviä ohjeita ja onko tilanteeseen tulossa muutoksia uusissa opetussuunnitelmien perusteissa.

6.1 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004 ja 2014

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden 2004 mukaan oppiminen on yksilöllistä ja yhteisöllistä. Oppimisympäristöön kuuluu esteettisyys, luovuus, elämykset, leikki, tieto- ja viestintätekniikan käyttö. Konkreetti ajattelu yhdistetään matematiikkaan arkipäivän tilanteiden avulla. Ajattelua tukevat piirrokset ja välineet. Vuosiluokilla 7—9 geometrista konstruointia harjoitellaan harppia ja viivainta käyttämällä. Geometrian keskeisiin käsitteisiin kuuluu ympyrä ja siihen liittyviä käsitteitä, joita ei tarkemmin nimetä. (Opetushallitus 2004.)

Vuoden 2014 peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden mukaan oppilas on aktiivinen toimija. Ajatteluun ja oppimiseen liitetään kieli, kehollisuus ja aistien käyttö. Matematiikan oppimiseen kuuluu keskeisesti konkretia ja toiminnallisuus. Matemaattista ajattelua oppilaat harjoittelevat ilmaisemaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti, piirtäen ja havainnoiden kuvioita. Oppimista tuetaan tieto- ja viestintäteknologian monipuolisella käytöllä. Tangentin käsitettä ei edelleenkään mainita. (Opetushallitus 2014.)

6.2 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 ja 2015

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2003 (Opetushallitus 2003) mukaan lukio jatkaa perusopetuksen opetus- ja kasvatustehtävää. Oppiminen on itsenäistä ja yhteistoiminnallista. Matematiikassa opiskelija oppii käyttämään ja ymmärtämään matematiikan kieltä. Opetuksessa tulee huomioida, että yhdessä tilanteessa omaksuttu tieto ei automaattisesti siirry toisiin tilanteisiin. Opiskelijan tulee voida kokeilla uusia työskentelytapoja. Opiskelijaa aktivoidaan havaintojensa pohjalta kysymään, päättelemään ja perustelemaan. Opiskelijaa ohjataan omaksumaan matemaattisia käsitteitä ja niiden merkityksiä, ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta, tiedostamaan ja korjaamaan työskentelytapaansa sekä kehittämään luovia ratkaisuja ongelmiin. Tangentin käsitettä ei perusteissa mainita. Käytännössä tangentin käsite opiskellaan pääosin alkuvaiheen kolmessa kurssissa:

> Geometriassa (MAA3) opiskelija hahmottaa tietoa tilasta, muodosta ja kuvioiden ominaisuuksista. Keskeisiä aiheita ovat ympyrä, sen osat ja siihen liittyvät suorat.
> Analyyttisessä geometriassa (MAA4) opiskelija oppii esittämään geometriset käsitteet algebrallisina käsitteinä. Keskeisiä aiheita ovat pistejoukon yhtälö, suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt.
> Derivaatta (MAA5) -kurssissa opiskelija omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta. Muita keskeisiä aiheita ovat polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen.

Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan opiskelija on tavoitteellinen, itseohjautuva ja tietoinen oppimisprosessistaan. Opiskelija analysoi eri muodoissa esitettyä tietoa, saa ohjausta ja palautetta. Opetuksessa hyödynnetään *teknisiä apuvälineitä*, kuten dynaamisia matematiikan ohjelmistoja, symbolisen laskennan ohjelmistoja, tilasto-ohjelmistoja, taulukkolaskentaa, tekstinkäsittelyä sekä digitaalisia tietolähteitä. Teknisiä apuvälineitä käytetään myös geometristen kuvioiden, pistejoukon yhtälöiden, raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sekä sovellusongelmissa. Tangentin käsitettä ei perusteissa edelleenkään mainita. (Opetushallitus 2015.)

Molemmilla kouluasteilla uusiin opetussuunnitelmien perusteisiin siirtyminen ohjaa matematiikan oppimisessa aiempaa enemmän aistein havainnointiin ja teknisten apuvälineiden käyttöön. Oppiainerajoja pyritään rikkomaan ja etsimään aiheita arkielämästä ja muista oppiaineista. Näyttäisi myös siltä, että matemaattiset ohjelmistot tulevat kokonaan korvaamaan harppi-viivain -menetelmän.

6.3 Oppikirjatutkimuksen tavoite

Oppikirja-analyysissä tutkin, millainen on suomalaisen lukion pitkän matematiikan oppikirjan visuaalinen tangentti.

Bizan ja Zachariadesin (2010) mukaan lukio-opiskelijoiden tangentin konstruointia vaikeuttavat

- opiskelijoiden luottamus geometrian havaintomaailman totuuteen ja geneeriseen tangenttiin
- opiskelijoiden virheelliset käsitykset visuaalisesta tangentista sekä

- opetuksen painottuminen differentiaalilaskennassa derivaatan määrittämiseen ja funktioiden derivointiin.

Tutkimuksessa keskityn oppikirjassa esiintyviin Bizan ja Zachariadesin (2010) mukaisiin lukio-opiskelijoille ongelmallisiin visuaalisiin tangentteihin. Tutkimuskysymyksenä esitän:

Millainen kuva lukion pitkän matematiikan oppikirjan visuaalisesta tangentista muodostuu, kun havainnoidaan seuraavia tangenttitilanteita

- ✓ ympyrän tai ympyrän kaaren tangentti
- ✓ tangentilla ja käyrällä on useampi kuin yksi yhteinen erillinen piste
- ✓ tangentti yhtyy käyrään tai sen osaan
- ✓ tangentti on x- tai y-akseli tai akselin suuntainen tai tangentti on käänne- tai terassipisteessä
- ✓ tangentin mahdollisuus käyrän kärkipisteessä?

Juuri geometrian visuaalisen ympyrän tangentin havainnoinnissa opiskelijat voivat muodostaa vahvoja mielikuvia geneerisestä tangentista, jotka estävät tangentin virheetöntä havainnointia muissa tilanteissa.

6.4 Tutkimusaineisto

Vuoden 2003 lukion opetussuunnitelmien perusteiden pohjalta suunniteltuun *Pitkä matematiikka* -sarjaan kuuluu erillisinä kirjoina pitkän matematiikan kymmenen pakollista kurssia, kolme syventävää kurssia sekä kertaus. Bizan ja Zachariadesin (2010) mukaan lukion alkuvaiheessa geometriassa muotoutuneet ajattelumallit riittävät kuvaamaan opiskelijoiden käsityksiä tangentista vielä lukion jälkeenkin. Joten kirjallisen havaintoaineiston visuaalisesta tangentista voin ajatella sisältyvän samojen tekijöiden kurssikirjoihin *Geometria*, *Analyyttinen geometria* ja *Derivaatta* (*Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela & Tahvanainen* 2014a, 2014b, 2014c). Kirjojen lisämateriaali jää tutkimuksen ulkopuolelle.

Lukijalle-luvun (esim. Kangasaho ym. 2014a, 3—4) mukaan tämän kirjasarjan erillisissä kirjoissa on kunkin luvun alussa aiheeseen johdatteleva ongelma tai esimerkki, jonka jälkeen uusi tieto kootaan ja perustellaan. Esimerkkeihin opiskelijat voivat tutustua paljolti itsenäisesti tunneilla ja tehdä tehtäviä niiden avustuksella. Osaan tiedosta tai sovellustilanteista voi perehtyä esimerkkien avustuksella myös kotitehtävinä. Harjoitustehtäväsarja I sisältää perustehtäviä. Sarjassa II on myös vaativampia tehtäviä. Jokainen kurssikirja sisältää kertausluvun tehtäväsarjoineen. Näin oppikirjan käyttäjät voivat tukeutua paljolti oppikirjaan.

6.5 Analyysimenetelmä

Visuaalisen kohteen merkitys muodostuu yksilöllisesti sen perusteella, miltä kuva havainnoijasta näyttää. Tietoa voi välittyä näköaistin ohella myös muiden aistien kautta. (Silfverberg 1999, 87; Hatva 2009, 86.) Tästä johtuen tämä tutkimus ei kohdistu opiskelijoiden itsenäiseen tangentin hahmotteluun tai oppikirjan tehtäviin, joissa ei ole visuaalista tangenttia tai sanaa tangentti.

Matematiikan opettajan sijaisena toimiessani eräs 7. luokan oppilaani kysyi seuraavan tunnin aiheeseen liittyvästä ympyrän tangenttia esittävästä oppikirjan kuvasta, että voiko tämä olla matematiikkaa. Tulevaa tuntia valmistellessani pohdin, miten perustelen mahdollisimman uskottavasti kuvan matemaattiseksi. Silloin ei vielä käytetty kouluissa matemaattisia ohjelmistojakaan, joilla perusteluun olisin saanut lisää matemaattisuutta. Kysymys oli kuitenkin niin mielenkiintoinen, että olen myöhemminkin kuunnellut oppilaiden näkemyksiä asioista[2].

Niinpä aluksi otin työni taustateoriaan mukaan kuvantutkimuksen ajattelematta, miten perustelen sen. Sitten Silfverbergin (1999) väitöstyöstä ymmärsin, että matemaattisen käsitteen visuaalisella esitysmuodolla on oma merkityksensä mutta sitä ei vielä tunneta hyvin ja matematiikassa ei ole visuaalisen käsitetiedon kehittymisen malliakaan. Koulugeometrian visuaalisten käsitteiden konstruointia on kuitenkin tutkittu myös kuvakielen kuvantutkimuksen luonnollisen käsitteen muodostamistavan näkökulmasta. Esimerkiksi Silfverberg (1999) on havainnut, että yläasteen oppilaiden geometrinen käsitetieto voi kehittyä pelkästään oppilaiden visuaalisten vaikutteiden ja yksilöllisten yleisedellytysten pohjalta. Myös Tall (2014) muistuttaa, että ihminen havainnoi kaikkia kuvia omaa ″henkilökohtaista havainnointijärjestelmäänsä″ käyttäen. Voinen siten hyödyntää tässä työssä myös kuvantutkimuksen tietoa.

Tutkimusmenetelmänä on kuvaileva ja kartoittava laadullinen *tapaustutkimus (*engl. *case study).* Tapaustutkimuksessa kohdetta tutkitaan tietyssä ympäristössä ja siitä pyritään löytämään yksityiskohtaista tietoa, jota voidaan kerätä monella tavalla. Tietoa voidaan etsiä yhdestä tai toisistaan riippuvista kohteista. Kohdetta pyritään ymmärtämään syvällisesti ja tutkimaan kokonaisvaltaisesti. Tapaustutkimuksen tuloksissa voi olla myös piirteitä, joita esiintyy vastaavissa tutkimuskohteissa. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2009.) Laadullisessa tapaustutkimuksessa ei tarvitse huomioida kaikkia vaikuttavia tekijöitä. Kuvaileva tapaustutkimus sallii myös lukijan tehdä tutkimuksesta omia johtopäätöksiä, esimerkiksi arvioida kuvantutkimuksen tiedon soveltuvuutta tähän tutkimukseen. Visuaalisen muodon ohella voidaan kartoittaa objektin määrällistä esiintymistä. (Metsämuuronen 2008, 17.)

Kuten yleensä laadullisessa tutkimusmenetelmässä, myös tässä tutkimuksessa

- kuvaillaan tutkimuskohteen ominaisuuksia
- eritellään käsitettä kuvaavan aineiston sisältö
- pohditaan tutkimuksesta saadun tiedon merkitystä.

Aineisto voidaan analysoida kolmella eri tavalla. Teoria voidaan rakentaa aineiston pohjalta, analyysi voi olla sidoksissa teoriaan tai analyysi pohjautuu tiettyyn teoriaan. (Hirsjärvi ym. 2009.) Tämän tutkimuksen analyysi rakentuu pääosin Bizan (2007) sekä Bizan ja Zachariadesin (2010) tutkimustuloksiin lukio-opiskelijoiden käsityksistä visuaalisesta tangentista.

6.5.1 Laadullinen osuus

Teemoina ovat siten Bizan (2007) ja Bizan ja Zachariadesin (2010) esittämät tyypilliset ongelmalliset visuaaliset tangentit. Teemat voivat olla päällekkäisiä ja toisiaan selittäviä. Tutkijan havainto ja oppikirjan tavoite voivat poiketa toisistaan. Visuaaliset tangentit luokittelen luvun

[2] Gradun aiheeksi toivoin jotakin geometriaan liittyvää ja sain aiheeksi visuaalisen tangentin.

aiheen mukaan, ellei kirjassa anneta verbaalista lisätietoa kuten ″ympyrän tangentti yhtyy kuvassa käyrän suoraan osaan″. Lisäksi kuvailen sanallisesti havaintojani visuaalisesta tangentista ja liitän oppikirjan kuvia kuvailun yhteyteen.

Ensin kuvailen *Geometriasta*, *Analyyttisestä geometriasta* ja *Derivaatasta* teemoja

- ✓ ympyrän tai ympyrän kaaren tangentti
- ✓ tangentilla ja käyrällä on useampi kuin yksi yhteinen erillinen piste
- ✓ tangentti yhtyy käyrään tai sen osaan
- ✓ x- tai y-akseli tai niiden suuntainen tangentti tai tangentti käänne- tai terassipisteessä
- ✓ tangentin mahdollisuus käyrän kärkipisteessä.

Analysoinnissa voi olla esillä muitakin käsitteitä kuten tangentin vasta- tai lähikäsitteitä tai vastaesimerkkejä. Tutkijana voin yrittää arvioida, voiko virheellisiä käsityksiä syntyä oppikirjan esityksestä ja esiintyykö käsitteen väärää käyttöä.

6.5.2 Määrällinen osuus

Tämän osuuden avulla tarkennan visuaalisen tangentin teemojen esiintymisen määriä sekä sitä, missä vaiheessa ja millaisena tangentin käsite yleistyy oppikirjassa (Hirsjärvi ym. 2009). Taulukoihin (liitteet 1—3) olen kerännyt tangentin esiintymisen kirjoista *Geometria*, *Analyyttinen geometria* ja *Derivaatta*.

Tangentit ryhmittelen ja nimeän tutkimuksen näkökulmasta tärkeiden esitysmuotojen mukaan kahteen pääluokkaan:

- *visuaaliseen tangenttiin,* joka voi sisältää symbolisen tai verbaalisen tangentin tai molemmat
- *verbaaliseen tangenttiin*, joka sisältää tangentti-sanan ja voi sisältää symbolisen tangentin mutta ei visuaalista.

Tangentti-sana esiintyy aluksi tieto-osuudessa visuaalisen tangentin rinnalla. Näin Paivion (1986, 1991) esittämien mielikuvan ylläpitoon vaikuttavien tekijöiden mukaan tangentin opiskelun alkuvaiheessa sana ″tangentti″ voi vahvistaa mielikuvaa tangentista (Hatva 2009, 25, Paivion mukaan). Toisaalta tangentti-sana tuo opiskelijoiden mieleen heidän omaksumansa kuvan visuaalisesta tangentista (Vinner 1991). Muut, kuten sivuaa-verbin yhteydessä esille tulevat tangentit jäävät siten tutkimuksen aihepiirin ulkopuolelle.

Kuvantutkimuksen mukaan samanlaisen tai lähes samanlaisen kuvan toisto ei aktivoi havainnoijan mielikuvitusta vaan vahvistaa aiempia kokemuksia. Oppikirjan esimerkkien ratkaisuvaiheita kuvaavat kuviosarjojen kuvat voidaankin yleensä huomioida kuvioryhmien kuvien elementtien tapaan yksitellen ja näin laskea esimerkiksi tangenttien määrät. (ks. Hatva 2009, 79.)

Taulukoissa (liitteet 1—3) tieto-osuus ja ratkaistut esimerkit ja toisaalta tehtävät ovat omina ryhminään. Päällekkäisiä teemoja sisältävät visuaaliset tangentit luokittelen luvun aiheen ja kuvan verbaalisen kuvailun perusteella. Esimerkiksi ympyrän tangentti -luvussa tangentti voi olla koordinaattiakseli tai käyrän osaan yhtyvä tangentti mutta ellei tätä mainita oppikirjassa, niin nimeän teemaksi ympyrän tangentin. Lisäksi taulukoissa on havaintojani muista teemoista. Visuaalisten tangenttien solut on taulukoissa merkitty harmaalla taustavärillä.

Oppikirjan visuaalisen tangentin eri teemojen määrällisen esiintymisen arviointiasteikkona on:

- usein tai lähes aina (yli 6 kertaa)
- melko usein (4—6 kertaa)
- harvoin tai tuskin lainkaan (0—3 kertaa).

Esimerkiksi asteikon ″harvoin tai tuskin lainkaan″ tarkoittaa, että analysoiduista kolmesta kurssikirjasta havaitsen yhteensä korkeintaan kolme kuvaa kyseisestä teemasta. Asteikon taustalla on ajatus, että yhden kuvan havainnointi ei riitä prototyyppiteorioiden mukaisen prototyypin muodostamiseen (Silfverberg 1999). Toisaalta näin pienissä aineistoissa voi tehdä tilastollisesti merkitseviä päätelmiä jo neljän tapauksen pohjalta[3] (Metsämuuronen 2008, 60). Kuvantutkimuksen mukaan taasen tarvitaan vähintään kuusi kuvaa, jotta käsitteen ominaisuudet voidaan havaita kuvista (Hatva 2009). Asteikon käyttö ennen kaikkea lisää analyysin tarkkuutta ja tutkimuksen toistettavuutta.

Lopuksi yhdistän teemat kahdeksi teemaksi ja arvioin seuraavien pääteemojen esiintymistä määrällisenä ja ajallisena kokemuksena:

- ympyrän tai ympyrän kaaren tangentti
- muut tangentit.

Tavoitteena on hahmottaa kokonaiskuva tangentin käsitteen oppimisprosessin alkuvaiheesta analysoitavassa oppikirjasarjassa.

7 VISUAALISEN TANGENTIN KONSTRUOINTI OPPIKIRJASSA

Oppikirjan teksti on lyhyehköä. Matemaattinen tieto jaetaan otsikoilla lukuihin ja aiheisiin. Kuvat ovat pienehköjä kehyksettömiä viivapiirroksia. Näin havainnoijan huomio kohdistuu suoraan kuvion ääriviivoihin. Pieniä epäselviä kuvia ei juuri esiinny. Koordinaatistot esitetään värillisellä ruutupaperilla, jolloin käyrät ja tangentit näyttävät jatkuvan kirjaan liitetyn ″paperileikkeen″ ulkopuolelle.

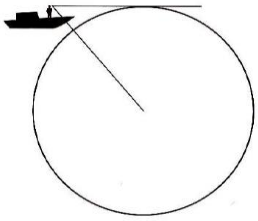
7.1 *Geometria*-kirja

7.1.1 Ympyrä

Ympyrä-luvun (Kangasaho ym. 2014a) tehtäväsarjat I ja II sisältävät yhteensä 19 tehtävää. Visuaalisia tehtäviä on neljä, joista tehtävissä 215 ja 219 (emt. 100—101) havaitsen jo tangentteja. Ensinnäkin kahden neliön sisään piirretyt ympyrän kaaret sivuavat neliöiden kahta sivua siten, että neliön yksi kärki on ympyrän keskipisteenä ja neliön sivu on säteenä. Urheilukenttäkuvassa kentän kaarteet ovat puoliympyröitä, joiden tangentit toimivat kentän suorina sivuina.

[3] tarkemmin esim. Metsämuuronen, J. 2008, *Pienten aineistojen tilastollinen analyysi*

7.1.2 Ympyrän tangentti

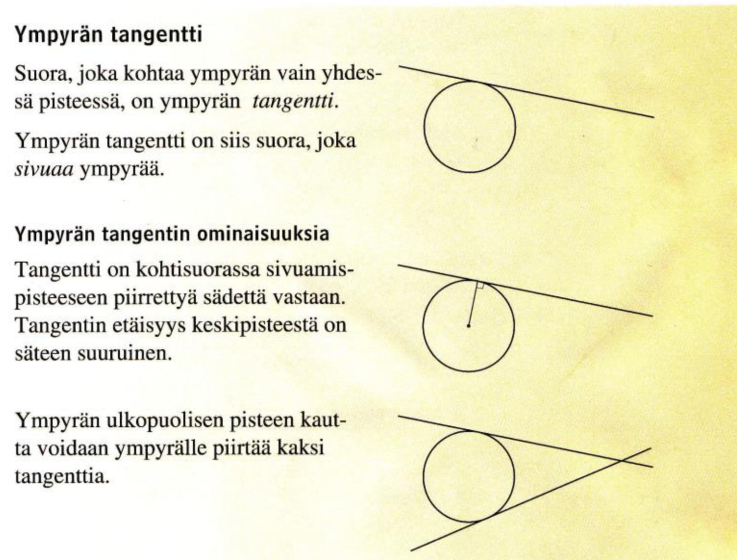


KUVA 45. Ympyrään johdatteleva ongelma (mts. 103)

Johdattelevassa ongelmassa (kuva 45) kysytään, kuinka kauas merelle voi nähdä veneen kannella seisova ihminen. Tässä Maa täytyy nähdä annettujen pisteiden kautta kulkevan tason isoympyränä. Käyttökelpoisessa mielikuvassa veneessä seisovan ihmisen silmien etäisyys merenpinnasta on piste, joka on samassa tasossa olevan merenpinnan tangentin piste. Tangenttia havainnollistetaan viivalla, jonka voi kokea yksilöllisesti janana, puolisuorana tai suorana.

Kuvat eivät yleensä noudata mittakaavaa 1: 1. Kuvia osataan kuitenkin katsoa eri tavalla kuin todellisia kohteita (Hatva 2009, 45). Kuvasta 45 ei voi kuitenkaan päätellä, miten vene, merenpinta ja Maa asettuvat toisiinsa nähden. Tätä tietoa ei ratkaisussa välttämättä tarvita, silti epäselvyys voi viedä katsojan huomion ja vaikeuttaa etenkin visuaalisesta esitysmuodosta kiinnostuneiden tai itsenäisesti opiskelevien ymmärtämistä. Ongelmassa annetaan tarkka korkeus meren pinnasta havainnoijan silmiin ja Maan säde. Ratkaisu saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.

Sitten ympyrän tangentti määritellään (kuva 46):



Ympyrän tangentti

Suora, joka kohtaa ympyrän vain yhdessä pisteessä, on ympyrän *tangentti*.

Ympyrän tangentti on siis suora, joka *sivuaa* ympyrää.

Ympyrän tangentin ominaisuuksia

Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Tangentin etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen.

Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää kaksi tangenttia.

KUVA 46. Ympyrän tangentin määritelmä (mts. 103)

Suora, joka kohtaa ympyrän vain yhdessä pisteessä, on ympyrän *tangentti*. Ympyrän tangentti on siis suora, joka *sivuaa* ympyrää.

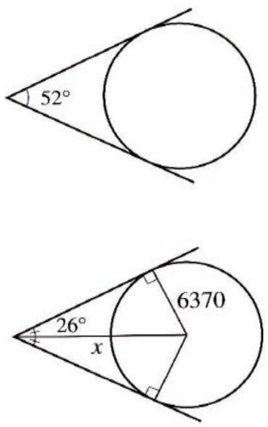
Sen jälkeen esitetään kolme ympyrän tangentin ominaisuutta:

Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.
Tangentin etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen.
Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää kaksi tangenttia.

Ympyrän tangentin visuaalisessa määritelmässä on kolme yhtä suurta ympyrää ja kolme yhdensuuntaista tangenttia. Visuaalinen ja verbaalinen määritelmä eivät vastaa täysin toisiaan, sillä kahdessa kuviossa tangentit näyttävät yhtyvän ympyröihin silmin havaittavalla välillä, johtuen siitä, että sivuamispisteet eivät ole visuaalisia.

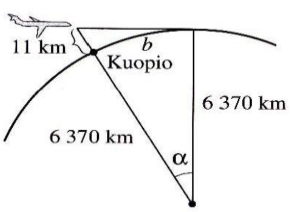
Erityisesti kuvakieli katsoo kuvalla olevan havainnoijalle oman merkityksensä. Kuvassa kohteen verbaalisen ja visuaalisen esitysmuodon tulisi vastata toisiaan sekä kuvan osien olla riittävän suuria, jotta osat erottuvat. Tärkeiden osien merkitseminen ja nimeäminen kuvaan voi auttaa kaikkia näkemään kuvan samanlaisena. Yhteen kuvaan on hyvä mahduttaa korkeintaan kolme keskeistä asiaa, jotta havainnoija kykenee kognitiivisesti käsittelemään kuvan sisältämän tiedon (Hatva 2009, 79.)

Ympyrän tangentista esitetään kolme ratkaistua esimerkkiä.



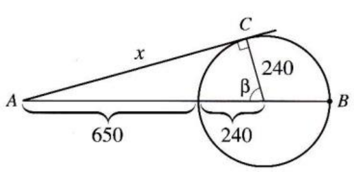
KUVA 47. Esimerkki 1 (mts. 104)

Esimerkissä 1 (kuva 47) kysytään Maata kiertävän avaruusaluksen etäisyyttä Maasta. Kuvion tangenttikulman kyljiksi voi kokea janat, puolisuorat tai suorat. Toisaalta kaksi tangenttikulmaa muodostavat tehtävän ratkaisuvaiheita kuvaavan kuvasarjan, toisaalta opiskelijat kokevat helposti lähekkäin olevat kuviot kuvioryhmänä, joka esimerkissä 1 muodostuu kahdesta yhtä suuresta tangenttikulmasta (ks. Hatva 2009, 79). Kulman toisto voi vahvistaa havainnoijan mielikuvaa tangenttikulman suuruudesta tai sen aukeamissuunnasta.



KUVA 48. Esimerkki 2 (mts. 105)

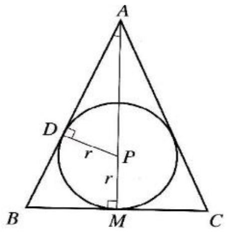
Esimerkissä 2 (kuva 48) kysytään mahdollista näkyvyyttä Suomenlahdelle lentokoneesta, joka on Kuopion yläpuolella. Uutena käyränä esiintyy nyt ympyrän kaari, joksi käyrää ei kumminkaan nimetä. Kuvion tangentin voi kokea eri tavoin. Lentokoneeseen itsensä kuvitteleva havainnoija voi kokea tangentin helposti abstraktina suorana tai puolisuorana, joka yhtyy kolmion kateettiin.



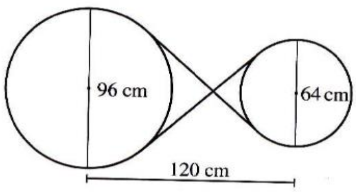
KUVA 49. Esimerkki 3 (mts. 106)

Esimerkissä 3 (kuva 49) kysytään lyhimmän reitin kokonaispituutta, kun lähtöpaikan etäisyys on 650 metriä lammen rannasta, josta on puolikierrosta pyöreän lammen vastakkaiselle rannalle pisteeseen B. Katsojan paikkaa kuviossa esittää piste A. Kirjan mukaan reittikäyrä muodostuu suorakulmaisen kolmion kateetista AC ja ympyrän kaaresta CB. Tangentin voi kokea janana AC, kun kolmion ajattelee janoista muodostuvaksi murtoviivaksi. Toisaalta janan AC voi nähdä reittikäyrän osana, johon tangentti yhtyy.

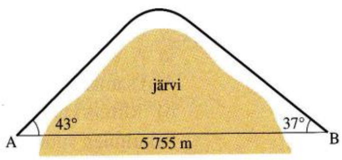
Luvun tehtäväsarjat I ja II sisältävät yhteensä 20 tehtävää, joista viidessä on yksi tai useampi visuaalinen tangentti. Verbaalinen tangentti esiintyy kahdessa tehtävässä.



KUVA 50. Tehtävä 246 (mts. 108)



KUVA 51. Hihnapyörä tehtävässä 250 (mts. 108)



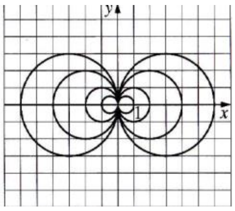
KUVA 52. Rautatien kaarre tehtävässä 252 (mts. 109)

Muutamassa harjoitustehtävässä ympyrän tangenteista muodostuu tangenttikulmia tai ympyrää sivuava monikulmio, yleensä kolmio (kuva 50). Ympyrän tangentti voi yhtyä käyrän osaan, kuten hihnapyörän hihnaan tai rautatiehen (kuvat 51 ja 52). Tangenttia ei kuitenkaan kuvailla käyrän osaksi. Uudet tangenttitilanteet esitetään muita kuvioita hiukan suurempina. Lisäksi tangentin käsite alkaa tulla esille vasta tehtävien ratkaisussa, kun tehtävässä kysytään esimerkiksi vain pisteen etäisyyttä ympyrästä tai käyrän pituutta.

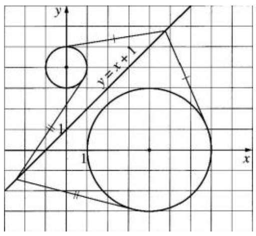
Kertaus-luvun tiedon ja esimerkkien (mts. 178) kaksi ympyrän tangenttia ja kaksi tangenttikulmaa on sijoitettu eri kohtiin ympyröissä kuin luvun esimerkeissä 1 ja 2. Kertaustehtäviä on neljä. Niissä ei esiinny visuaalista tai verbaalista tangenttia. Vastaukset-luvussakaan ei näy visuaalista tangenttia, mutta sana ″tangentti″ esiintyy kahden tehtävän ratkaisuohjeessa.

7.2 *Analyyttinen geometria* -kirja

Analyyttisessa geometriassa (Kangasaho ym. 2014b, 11—102) tason suorakulmaiseen koordinaatistoon hahmotellaan aluksi pistejoukon yhtälönä muun muassa suora, paraabeli, ympyrä ja spiraali. Suoran kulmakertoimen kaava johdetaan geometrisesti yhdenmuotoisten suorakulmaisten apukolmioiden avulla. Näin saadaan visuaalinen yhteys kolmioiden yhdenmuotoisuuden, mittakaavan ja suoran kaikissa pisteissä vakiona säilyvän kulmakertoimen välille. Aiheina on myös muun muassa x- ja y-akselin suuntaiset ja yhdensuuntaiset suorat, suoran ja ympyrän yhtälö. Ajankäyttöehdotuksessa kirjan alkuosaan on varattu 18 oppituntia. Tehtäviä on noin 200, joista kolmessa on visuaalinen ja yhdessä on verbaalinen ympyrän tangentti.

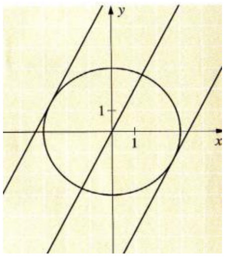


KUVA 53. Tehtävän 113 vastaus



KUVA 54. Tehtävän 207 vastaus

Alkuosan lukujen tehtäviin esitetään Vastaukset-luvussa (emt.177—194) visuaalisia vastauksia. Tehtävän 113 vastauksessa (kuva 53) on useampi erisäteinen ympyrä, joiden yhteinen tangentti on y-akseli. Tehtävän 122 vastauksessa erisäteiset ympyrät sivuavat molempia koordinaattiakseleita. Tehtävän 207 (kuva 54) vastauksessa kahden pisteen etäisyyttä kuvaavat janat ovat ympyrän tangentteja.

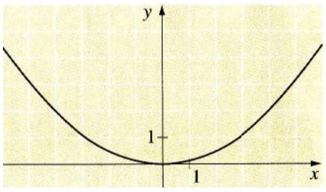


KUVA 55. Annetun suoran suuntaiset ympyrän tangentit (mts. 106)

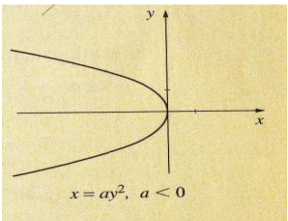
Ympyrän leikkauspisteitä -luvun (mts. 103—109) esimerkissä 3 (kuva 55) osoitetaan, että ympyrälle voi piirtää kaksi annetun suoran suuntaista tangenttia, jotka eivät leikkaa toisiaan.

Tämän luvun Vastaukset-luvussa on tehtävän 257 (ks. mts. 196) vastauksessa suurehko kuvio, jonka tangentit on nimetty tangenttijanoiksi. Samantyyppinen tilanne visuaalisena esiintyi edellisen luvun tehtävän 207 vastauksessa (kuva 54). Tangenttijana-nimitys seuraa ehkä siitä, että tehtävässä kysytään janojen päätepisteiden etäisyyttä.

Pisteen etäisyys suorasta -luvun esimerkissä 3 pyydetään piirtämään ympyrälle tangentti sen ulkopuolella olevasta pisteestä. Annetun visuaalisen hahmottelun perusteella ratkaisuksi saadaan kaksi tangenttia, jotka muodostavat tangenttikulman. Noin 25-prosenttia tämän luvun 24 harjoitustehtävästä sisältää verbaalisen (ympyrän) tangentin.



KUVA 56. Paraabeli (mts. 133).



KUVA 57. Paraabeli. (mts. 135)

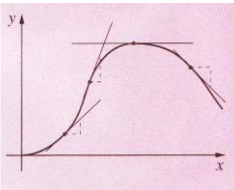
Paraabeli-luvussa uutena käyränä on paraabeli, jonka tangenttia ei kuitenkaan käsitellä. Sellaiseksi ei myöskään nimetä tieto-osassa, esimerkiksi kuvissa 56 ja 57, tangentiksi kokemiani x- ja y-akselia.

Analyyttisen geometrian tieto-osan kuvat ovat kooltaan *Geometrian* kuvioita hiukan suurempia. Harjoitustehtävissä ei anneta visuaalista tangenttia — ne olisivat edelleenkin ympyrän tangentteja. Verbaalinen (ympyrän) tangentti on parissa kolmessa harjoitustehtävässä. Ainoastaan yhdessä tehtävässä kysytään paraabelin tangentin yhtälöä, vaikka paraabelin tangenttia ei ole käsitelty kirjassa. Vastaus-luvun vastauksissa näkyy muutama uudentyyppinen visuaalinen ympyrän tangentti. Kertaus-luvussa ei näy visuaalisia tangentteja mutta verbaalinen (ympyrän) tangentti tai tangenttikulma esiintyy vielä noin 10-prosentissa kertausluvun 56 tehtävästä.

7.3 *Derivaatta*-kirja

Derivaatassa (Kangasaho ym. 2014c, 20) siirrytään rationaalifunktion määrittelyn jälkeen funktion raja-arvoon. Funktion raja-arvo pisteessä liittyy funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen pisteessä. Aluksi jollain välillä jatkuvaa funktiota havainnollistetaan kirjassa geometrisesti katkeamattomalla käyrällä. Epäjatkuvaa funktiota havainnollistetaan käyrällä, jossa näkyy hyppäysepäjatkuvuuskohta. Kooltaan kuvat ovat pieniä. (ks. mts. 32.)

Funktion kasvunopeus -luvussa havainnoidaan kasvunopeutta tyttöjen ja viljakasvin keskimääräisten kasvukäyrien avulla. Käyrien kasvunopeutta ja hidastuvuutta tietyllä hetkellä kuvataan tangentilla, jolle on piirretty arvon y ja muuttujan x muutoksia havainnollistava apukolmio (kuva 58).



KUVA 58. Käyrän kasvunopeus (mts. 41)

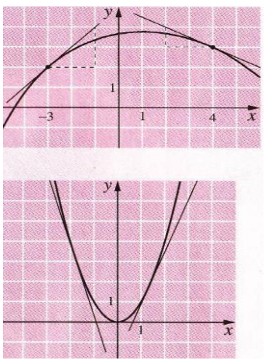
Kirjan mukaan (emt. 41): Kasvukäyrästä saadaan selville kasvunopeus jollain hetkellä piirtämällä silmämääräisesti kasvukäyrää sivuava niin sanottu käyrän *tangentti*. Kasvunopeuden ilmaisee tangentin kulmakerroin $\frac{y{:}n\ muutos}{x{:}n\ muutos}$.

Sitten derivaatta määritellään havainnollisesti (mts. 42):

Jos funktion f kuvaajalle voidaan piirtää yksikäsitteisellä tavalla tangentti muuttujan arvon a kohdalle ja jos tämä tangentti ei ole pystysuora, niin funktio f on *derivoituva kohdassa* a.Tangentin kulmakerroin on *funktion* f *derivaatta kohdassa* a. Se merkitään $f'(a)$.

Määritelmässä painotetaan tangentin piirtämistä "yksikäsitteisellä" tavalla. Kirja käyttää usein tangentti-sanan yhteydessä adjektiivia "yksikäsitteinen", vaikka tangentti on aina yksikäsitteinen.

Seuraavaksi kirjassa selvitetään tarkemmin esimerkkien avulla tangentin yksikäsitteistä piirtämistä ja tangentin ehtojen tutkimista funktion pisteessä piirtämisen avulla:

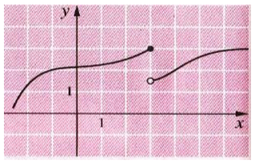


KUVA 59. Paraabelien tangentit (mts. 42)

Ensin tarkastellaan kahta paraabelia, joille molemmille on piirretty kaksi erisuuntaista tangenttia, jotka eivät leikkaa toisiaan (kuva 59). Kirjan mukaan (mts. 42): Funktion x^2 kuvaajalle voidaan piirtää yksikäsitteinen tangentti jokaisen muuttujan arvon kohdalle. Funktio x^2 on derivoituva kaikkialla.

Sitten kirja pyrkii selvittämään kolmen visuaalisen vastaesimerkin avulla, milloin tangenttia ei voi piirtää yksikäsitteisesti funktion kuvaajalle:

Ensimmäisenä vastaesimerkkinä on muuttujan kohdassa 3 epäjatkuva funktio (kuva 60). Kirjan mukaan kohtaan ei voi piirtää yksikäsitteistä tangenttia, joten funktio ei ole derivoituva kohdassa 3. Tosin epäjatkuvuustyypeistä juuri hyppäysepäjatkuvuuskohtaan on erityisen hankala asettaa tangenttia.



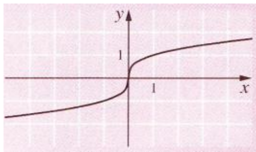
KUVA 60. Epäjatkuva funktio (mts. 42)

Kirjan mukaan pätee (mts. 42):

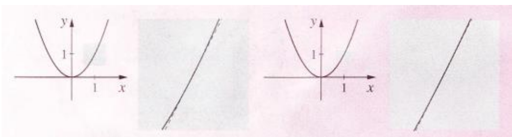
Jos funktio on derivoituva kohdassa a, se on jatkuva kohdassa a.

Toinen vastaesimerkki on jatkuvuuden ja derivoituvuuden yhteyttä kuvaava itseisarvofunktio $f(x) = |x|$, jolle ei voi piirtää tangenttia origoon, joten funktio $|x|$ ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Kirjan mukaan (mts. 42): Funktio $f(x) = |x|$ on derivoituva kaikkialla muualla, sillä suora on itse oma tangenttinsa (kuva 63).

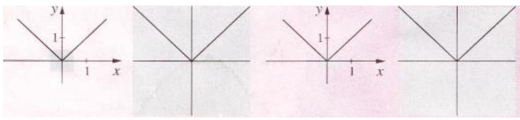
Kolmantena vastaesimerkkinä on kuutiojuurifunktio $\sqrt[3]{x}$ (kuva 61). Kirjan mukaan (mts. 43): Kuvaajalle voidaan piirtää origoon yksikäsitteinen tangentti (y-akseli), mutta tangentti on pystysuora. Kuutiojuurifunktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Opiskelijat voivat pohtia, miksi y-akseli on silti tangentti.



KUVA 61. Kuutiojuurifunktio (mts. 43)



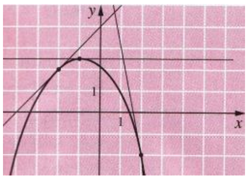
KUVA 62. Suurennos derivoituvan funktion kohdan 1 lähiympäristöstä (mts. 43)



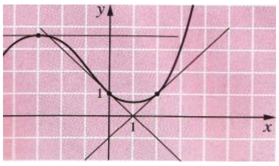
KUVA 63. Suurennos itseisarvofunktion origon lähiympäristöstä (mts. 43)

Lopuksi kirjassa palataan tarkastelemaan laskimen suurennoksina derivoituvaa funktiota x^2 kohdan 1 ja funktiota $|x|$ origon lähiympäristössä. Kirjassa esitetään, että riittävästi suurennettu funktion x^2 kuvaaja näyttää derivoituuskohdassa 1 suoralta ja lähes yhtyy tangenttiinsa (kuva 62). Kun taasen itseisarvofunktion $|x|$ kuvaaja ei oikene suurennuksenakaan suoraksi origossa, joten funktio $|x|$ ei ole derivoituva origossa (kuva 63).

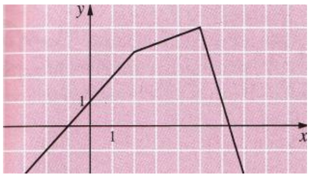
Funktion kasvunopeus -luvun esimerkissä 2 (ks. mts. 44) määritetään päättelemällä kolme paraabelin derivaatan likimääräistä arvoa paraabelin tangentin avulla. Esimerkissä 3 (ks. mts. 45) derivaatta määritetään päättelemällä jokaisella muuttujan arvolla funktioiden kuvaajista, jotka ovat nouseva, laskeva ja x-akselin suuntainen suora.



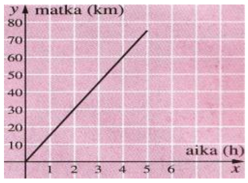
KUVA 64. Tehtävä 89 (mts. 46)



KUVA 65. Tehtävä 90 (mts.46)



KUVA 66. Tehtävä 94 (mts. 47)



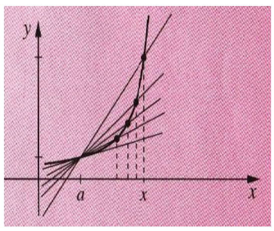
KUVA 67. Tehtävä 97 (mts. 47)

Luvun harjoitustehtävien funktioiden (kuvat 64—67) derivaatat määritetään visuaalisen tangentin avulla. Esillä on tähän saakka harvoin nähtyjä tilanteita; käyrän tangentit leikkaavat toisensa, tangentti leikkaa käyrän toisessa pisteessä, joka ei ole sivuamispiste, käyrän osa on puolisuora, jatkuvan käyrän kulman kärkipiste sekä käyrä, joka on suora. Lisäksi tehtävän 102 (mts. 48) funktion kuvaajassa on tarkastelupisteenä hyppäysepäjatkuvuuskohta. Erityisesti tämän luvun harjoitustehtävien kuvat tangenttitilanteista ovat kooltaan suurehkoja ja värikkäitä.

Derivaatta raja-arvona -luvussa derivaattaa lähestytään tarkastelemalla pyöräilijän keskinopeutta muutamilla aikaväleillä. Sen jälkeen johdantoesimerkissä paraabelin visuaalista sekanttia kierretään sekantin ja paraabelin toiseen leikkauspisteeseen tangentiksi, josta määritellään paraabelin derivaatta (kuva 68). Kirjan mukaan funktion derivaatta pisteessä määritellään varsinaisesti sekantin raja-arvona edellyttäen, että kuvaajalla on pisteessä tangentti.

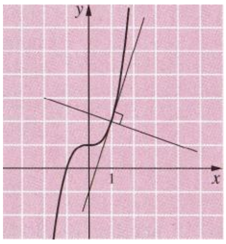
Derivaatan määritelmä esitetään (mts. 51):

> Jos funktion f erotusosamäärällä kohdassa a on raja-arvo kohdassa a, niin funktio f on *derivoituva kohdassa* a.
>
> Raja-arvoa kutsutaan funktion f *derivaataksi kohdassa* a ja se merkitään $f'(a)$. Siis
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

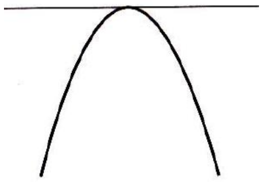


KUVA 68. Derivaatta sekantin raja-asentona (mts. 51)

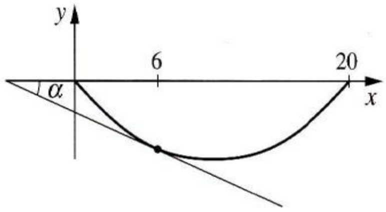
Määritelmässä toistuu ″kohdassa a″ kolme kertaa, mikä voi hankaloittaa määritelmän ymmärtämistä. Kirja tähdentää erotusosamäärän raja-arvon matemaattista täsmällisyyttä.



Tangentin ja normaalin yhtälö



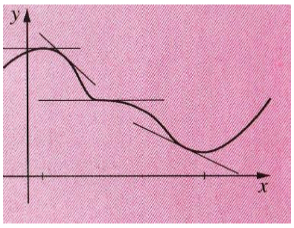
Paraabelin huippu



Käyrän kaltevuuskulma

KUVA 69. Esimerkit 1—3 (mts. 66— 69)

Käyrän tangentti -luvun esimerkeissä (kuva 69) kysytään käyrän tangenttia, paraabelin huippua ja kanavan pohjan kaltevuuskulmaa sekä vielä neljäntenä paraabelin tangenttien leikkauspistettä. Nyt esimerkeissä ja harjoitustehtävissä tangentin kulmakerroin määritetään derivoimalla funktio.



KUVA 70. Terassikohtia (mts. 75)

Visuaaliseen tangenttiin palataan Polynomifunktion kulku -luvussa (mts. 75). Kirjan mukaan funktion kuvaajalla voi olla erillisiä kohtia, joissa tangentti on vaakasuora, ″niin sanottuja terassikohtia″. Arkielämästä lainattu terassikohta-sana voi tuntua ehkä epäselvältä (kuva 70). Kirjan loppupuolella visuaalista tangenttia ei enää esiinny.

8 TUTKIMUSTULOKSET

8.1 Oppikirjan geometrinen visuaalinen tangentti

Geometrisen tangentin ominaisuuksiin kuuluu silmin havainnoitavuus. Oppikirjan *Geometriassa* (Kangasaho ym. 2014a) ei kuitenkaan nosteta esiin jo Eukleideen *Alkeet* -teoksessa esitettyjä geometrian peruskäsitteitä pistettä, suoraa ja tasoa. *Geometriassa* piste tai kohteen paikka esitetään erikokoisina täytettyinä ympyröinä tai ympyrän kahden säteen muodostaman keskuskulman kärkenä. Tangentin sivuamispistettä ei kuitenkaan merkitä visuaalisena.

Ympyrän tangentin määritelmän yhdessä kuviossa tangentin ja säteen muodostaman suoran kulman kärkipiste on tangentin sivuamispiste. Kahteen muuhun ympyrään ei ole merkitty tangentin sivuamispistettä, joten verbien ″sivuaa″ ja ″kohtaa″ matemaattiset merkitykset eivät näy visuaalisina. Näin visuaalinen ja verbaalinen määritelmä eivät vastaa toisiaan. Myös tangenttisuoran nimeäminen kuvaan voisi vahvistaa kokemukseni mukaan muutamien lukio-opiskelijoiden omia havaintoja.

Geometrian tieto-osan ympyrän tangenttia esittävissä kuvissa on havaittavissa ympyröiden yhtenevyyttä, tangenttien ja tangenttikulmien yhdensuuntaisuutta sekä tangentin sivuamispisteen paikan toistoa. *Geometriassa* visuaalinen tangentti yleistyy ympyrän kaaren ja käyrän osan tangentiksi mutta visuaalista tangenttia ei kuvailla verbaalisesti käyrän osaan yhtyväksi tangentiksi (liite 1). Kuvissa tangenteiksi voi yksilöllisesti kuvitella tai kokea janan, suoran tai puolisuoran, koska ne piirretään samalla tavalla. *Geometriassa* tangentit eivät juurikaan leikkaa käyrää muutoin kuin tangenttikulman tangentteina. Kirjan Kertaus-luvun neljässä kuviossa ympyrän tangentti varioituu hiukan lisää.

Analyyttisessa geometriassa (Kangasaho jne. 2014b) kuviot ovat suurempia ja selvempiä kuin *Geometriassa* ja tangentin sivuamispisteet on merkitty kuvioihin. Tangentti liitetään edelleen vahvasti ympyrään, nyt pääosin verbaalisena tangenttina (ks. liite 2). Ympyrän leikkauspisteitä -, Suorien kohtisuoruus - ja Pisteen etäisyys suorasta -lukujen tieto-osuuksissa esiintyy jokaisessa yksi esimerkki visuaalisesta ympyrän tangentista, joista yhdessä osoitetaan, että kaksi ympyrän vastakkaisilla puolilla olevaa tangenttia ovat yhdensuuntaiset. Paraabelin tangenttia ei esitellä ja paraabelin tangentiksi ei nimetä tangentin ominaisuudet toteuttavia koordinaattiakseleita. Silti yhdessä kirjan tehtävistä kysytään paraabelin tangenttia (liite2).

Geometriassa verbaalisia tangenttitehtäviä on vähemmän kuin visuaalisia (liite 1). *Analyyttisessä geometriassa* on siirrytty verbaalisiin tangenttitehtäviin, joissa päädytään (ympyrän) tangenttiin silloin, kun kysytään esimerkiksi tangentin yhtälöä.

Näissä geometrian kursseissa verbaalinen kuvailu yhdistää konkreetin tilanteen kuvaan, kuvioita sellaisenaan ei kuvailla. Tosin tutkimustiedon mukaan yksilölliset intuitiiviset kokemukset visuaalisesta käsitteestä tai konkreetista tilanteesta kehittyvät matemaattisiksi tilanteen verbaalisen kuvailun avulla (Tall 2008). Myös intuition tutkijat yhdistävät verbaalisen esityksen tietoiseen ajatteluun (Raami 2015). Tärkeää on, että käytetään käsitteen nimeä, sillä Vinnerin (1991) mukaan nimi tuo myöhemmin opiskelijoiden mieleen oman käsitekuvan kohteesta. Näin käsitteen nimen odotetaan sisältyvän myös määritelmään. Kuvakielen tiedon mukaan havainnoijan ajattelua ja kuvan ymmärtämistä lisää myös kuvan verbaalinen kuvailu (Hatva 2009).

Millaisia tyypillisiä visuaalisia tangentteja on havaittavissa geometrian kirjoissa?

Usein tai lähes aina visuaalinen tangentti on

- ympyrän tai ympyrän kaaren tangentti.

Melko usein visuaalinen tangentti on

- tangenttikulman tangentti, jonka tangentit leikkaavat toisensa
- ympyrää tai ympyrän kaarta sivuava monikulmion sivujana
- käyrän tangentti, jonka osana on ympyrän kaari, kuten hihnapyörän tai tienkaarteen tangentti
- ympyrän tangentti, joka on koordinaattiakselin suuntainen tai akseli tai molemmat akselit ovat tangentteja.

Harvoin tai tuskin lainkaan visuaalinen tangentti

- leikkaa käyrää toisessa erillisessä pisteessä
- sivuaa käyriä niiden yhteisessä sivuamispisteessä
- yhtyy käyrään, joka on suora

- kulkee käyrän käännepisteen kautta
- on paraabelin tangentti, joka on koordinaattiakseli mutta akselia ei nimetä tangentiksi
- on pohdinnan kohteena käyrän kärkipisteessä.

Siten tutkimuksen muita teemoja on havaittavissa ainoastaan visuaalisina visuaalisen ympyrän tangentin yhteydessä. Tästä syystä opiskelijoiden havainnointi voi rajoittua intuitiiviseksi ympyrän tangentin havainnoinniksi. Toisaalta opiskelijat voivat itse oivaltaa kuvista yleisiä tangentin ominaisuuksia, mikä on yksi parhaita tapoja syventää omaa ymmärrystään. Tätä tukee sekin, että tehtävien Vastaus-luvussa esitetään visuaalisena muutama uusi tangenttitilanne.

8.2 Oppikirjan analyyttinen visuaalinen tangentti

Derivaatta-kirjassa (Kangasaho ym. 2014c) siirrytään osin pois havaintomaailmasta. Kirjassa tarkastellaan yhden muuttujan polynomi- ja rationaalifunktioiden kuvaajia xy-koordinaatistossa.

Aluksi funktion kuvaajalle hahmoteltu tangentti esitellään ″niin sanottuna käyrän tangenttina″ (ks. emt. 41). Hahmotellulla tangentilla havainnollistetaan muutosnopeutta ja polynomifunktioiden kulkua perustellen, että tangentin kulmakerrointa voidaan käyttää funktion arvojen kasvunopeuden mittana. Lopulta tangentti nimetään ja määritellään havainnolliseksi derivaataksi ehdolla, että tangentti ei ole y-akselin suuntainen. Visuaalinen, vertikaalinen tangentti esiintyy vain yhdessä esimerkissä ja silloin se nimetään tangentiksi. Kirjan visuaalinen tangentti jää lopulta hiukan epäselväksi.

Kirjan havainnollisen derivaatan määritelmän mukaan funktiolla on muuttujan arvolla derivaatta, jos funktion kuvaajalle muuttujan kohtaan voi piirtää yksikäsitteisen tangentin, joka ei ole pystysuora (mts. 42). Määritelmän voi ymmärtää monella tavalla. Funktion tangentti on kumminkin aina yksikäsitteinen. Kirjassa funktion derivoituvuutta pisteessä tarkentaa muutama vastaesimerkki ja esimerkki, joissa tutkitaan derivoituvuutta pisteessä mahdollisuudella piirtää pisteeseen yksikäsitteinen tangentti. Pääosin tarkastellaan jatkuvien funktioiden kuvaajien tangentteja. Funktion hyppäysepäjatkuvuus esiintyy kolmessa kuviossa. Funktion epäjatkuvuuden monipuolisemman käsittelyn kautta derivaatan käsite ja tangentin kulmakerroin voisivat tulla ymmärrettävämmiksi. Toisaalta esimerkit ymmärretään helposti tilanteina, joita muistellaan sellaisenaan. Esimerkkien jälkeen kirjassa todetaankin, että derivaatan voi määritellä tarkemmin symbolisesti.

Erotusosamäärän raja-arvoon perustuvan derivaatan määritelmän jälkeen kirjassa siirrytään funktion kulun symboliseen tarkasteluun. Visuaalisella tangentilla havainnollistetaan vielä kolmannen asteen käyrän tangenttia ja normaalia, käyrien yhteistä sivuamispistettä ja käyrän kaltevuuskulmaa sekä kuvataan polynomifunktion kulkua, vaikka tangentti määritetään derivoimalla. Tangentti vaakasuorassa terassikohdassa jää hiukan epäselväksi.

Millaisia tyypillisiä visuaalisia tangentteja on havaittavissa Derivaatassa?

Usein tai lähes aina visuaalinen tangentti on

- ″niin sanottu käyrän tangentti″, joka kuvaa silmämääräisesti funktion kuvaajan muutosnopeutta ja suuntaa derivoituuspisteessä
- myös symbolinen tangentti
- leikkaa toista tangenttia
- paraabelin tangentti
- x-akseli tai sen suuntainen.

Melko usein visuaalinen tangentti

- on funktion kuvaajan osa
- leikkaa funktion kuvaajan terassipisteessä
- on korkeintaan ensimmäistä astetta olevan funktion tangentti
- on tarkasteltavana funktion kärkipisteessä, jonka derivoituvuutta tutkitaan visuaalisen tangentin, funktion kuvaajan suurennoksen, derivoinnin tai erotusosamäärän raja-arvon avulla.

Harvoin tai tuskin lainkaan visuaalinen tangentti

- leikkaa funktion kuvaajaa yhtä useammassa erillisessä pisteessä, mutta voisi leikata jatkettuna muutamassa kuvassa
- sivuaa funktion kuvaajaa toisessa erillisessä pisteessä, ja tilanne ei toteutuisi, vaikka kuvien tangentteja jatkettaisiin
- on geometrinen vertikaalinen tangentti.

Derivaatassa tangentti yleistyy visuaalisena (ks. liite 3). Analyyttisen tangentin kulmakerroin määritetään funktion derivoituvassa pisteessä ensin visuaalisen tangentin avulla, sitten derivoimalla tai erotusosamäärän raja-arvona. Tangentista tulee verbaalisempi ja symbolinen.

9 POHDINTA

Tehdyssä tutkimuksessa kuvaillaan ja kartoitetaan oppikirjan visuaalista tangenttia tangentin käsitteen oppimisen alussa. Bizan (2007) mukaan visuaalisen tangentin konstruointi on yksilöllistä. Yleensäkin varsinkin oppimisen alkuvaiheessa opiskelijoiden yksilölliset kokemukset uudesta visuaalisesta kohteesta tai käsitteestä voivat olla vaihtelevassa määrin intuitiivisia (Tall 2008; Hatva 2009). Käsitteen visuaalisen merkityksen kukin havainnoija kokee sen pohjalta, miltä käsitteen kuvallinen esitysmuoto hänestä näyttää ja mitä ominaisuuksia se havainnoijan mielestä ilmentää (Silfverberg 1999; Hatva 2009). Visuaalisen tangentin havainnoinnissa muodostuneet käsitykset kehittyvät ja laajenevat Bizan ja Zachariadesin (2010) mukaan helposti oppimisen alkuvaiheen suuntaisina ja pinnallisina, elleivät opiskelijat itse pyri tietoisesti pohtimaan uusia tilanteita ja muokkaamaan käsityksiään. Opettaja saa yleensä tietoa opiskelijoiden mielensisäisistä käsityksistä tangentista helpommin vasta oppimisen siinä vaiheessa, kun opiskelijat kykenevät jo matemaattisesti luokittelemaan ja verbaalisesti kuvailemaan tangenttia (Silfverberg 1999; Biza 2007).

9.1. Oppikirjan visuaalinen tangentti

Analysoidun oppikirjan geometriassa visuaalinen ympyrän tangentin määritelmä annetaan kuviona, jolloin opiskelija voi kokea sen luonnollisen käsitteen tapaan kaaviomaisena kokonaisuutena. Tällöin opiskelija ei tietoisesti tarkastele tangentin ominaisuuksia ja kuvittele sen visuaalista variaatiota. Oppikirjojen esimerkkien ja tehtävien visuaalisten (ympyrän) tangenttien tulisikin kuvata monipuolisesti tangentin ominaisuuksia. Visuaalisista tangenteista *Geometriassa* käsitellään verbaalisesti ainoastaan ympyrän tangenttia, vaikka joissakin kuvissa ympyrän tangentista on nähtävissä tangentin muitakin ominaisuuksia. Tangentin nimeäminen erityisesti esimerkiksi horisontaaliseksi tai käyrään yhtyväksi tangentiksi voisi kuvailla samalla tangentin ominaisuuksia kuvassa (ks. Vinner 1991). Visuaaliseen ympyrän tangenttiin palataan uudelleen *Analyyttisessä geometriassa*. Tämä voi Kosslynin (1996, 1998) mukaan kerrata ja ylläpitää alkuvaiheen mielikuvaa tangentista (ks. Hatva 2009, 38). Näyttäisikin siltä, että tangentin visuaalista variaatiota on mahdollista lisätä *Geometriassa* ja *Analyyttisessä geometriassa*.

Tangentin sivuamispistemerkintää käytetään *Analyyttisessä geometriassa* ja *Derivaatassa*. *Derivaatassa* visuaalinen tangentti yleistyy, kun ″niin sanotulla käyrän tangentilla″ havainnollistetaan lähes pelkästään (yhtä vastaesimerkkiä lukuun ottamatta) funktion derivaattaa ennen siirtymistä symbolisen derivaatan käyttöön. Visuaalisen geometrisen, visuaalisen analyyttisen ja symbolisen analyyttisen tangentin eroja opiskelijat voivat pohtia mielessään itsenäisesti. Näin visuaalinen tangentti jää hiukan irralleen muusta matemaattisesta tiedosta.

Tämän tapaustutkimuksen antama kuva analysoidun oppikirjan tangentista vastaa melko hyvin Bizan ja Zachariadesin (2010) kuvausta kreikkalaisten lukio-opiskelijoiden matematiikan oppikirjojen tangentista:

- Molempien maiden oppikirjojen geometrinen tangentti on visuaalinen ympyrän tangentti.
- Analysoiduissa kirjoissa harvemmin esiintyvät geometriset tangentit vastaavat kreikkalaisten opiskelijoiden huonosti ymmärtämiä tai harvoin kohtaamia visuaalisia tangentteja, kuten tangenttia, joka sivuaa tai leikkaa käyrää tai funktion kuvaajaa useammassa erillisessä pisteessä tai tangenttia käyränä tai sen osana, tangenttia käänne- tai terassipisteessä, x- tai y-koordinaattiakselia tangenttina tai akselinsuuntaista tangenttia.
- Edellä kuvatut visuaaliset tangentit esiintyvät analyyttisinäkin vain neljästä viiteen kertaa. *Derivaatassa* on harvoin tai tuskin lainkaan nähtävissä tangentti, joka sivuaa tai leikkaa funktion yhtä useammassa erillisessä pisteessä. Samoin vertikaalinen tangentti on melko harvinainen, joista yksi nimetään. Kärkipistetilanne tulee esille derivoinnin oppimisen jälkeen muutamassa tehtävässä.
- Kreikkalaiset lukiolaiset toivovat selventäviä kuvia ja visuaalisia määritelmiä analyysin kurssikirjoihin. Määritelmien ja tilanteiden visualisointia, esimerkiksi piirroksia epsilon-delta -ympäristöstä, ei hyödynnetä myöskään tutkitussa suomalaisessa oppikirjassa.

Myös Partasen (2013) pro gradun mukaan suomalaiset lukiolaiset toivovat yleensäkin matematiikan oppikirjoihin enemmän visuaalista havainnollistamista ja ymmärrettävämpää verbaalista ilmaisua.

9.2 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksen validiteetti kuvaa sitä, tutkitaanko ominaisuutta, jota on tarkoitus tutkia. Bizan ja Zachariadesin (2010) mukaan tangentin opiskelun alkuvaiheessa lukio-opiskelijoiden etenkin matematiikan oppikirjassaan kohtaamat visuaaliset tangentit vaikuttavat merkittävästi heidän käsityksiinsä tangentista. Tästä johtuen tämän tutkimuksen tutkimuskohteeksi on valittu matematiikan oppikirjan visuaalinen tangentti. Oppikirjaksi valikoitui lukion pitkän matematiikan oppikirjana suosittu *Pitkä matematiikka* ja tutkimusaineistoksi rajautui *Geometria*, *Analyyttinen geometria* ja *Derivaatasta* visuaalinen siirtymävaihe analyyttiseen tangenttiin.

Tutkimuksen keskeiset teemat ovat taustateorian mukaisia, mikä sellaisenaan voi auttaa tuottamaan oikeansuuntaisia tutkimustuloksia. Tutkijana olen pyrkinyt toistamaan oppikirja-analyysin niin monta kertaa kuin tutkijana olen havainnut uutta kohteesta. Tuloksiin voivat silti vaikuttaa muun muassa ikäni, matematiikan yliopisto-opiskeluvaihe ja Silfverbergin (1999) mukaiset henkilökohtaiset yleisedellytykset. Useamman tutkijan toistamina tulokset voisivat muuttua ja tulosten eroavuudet olla mielenkiintoisia.

Laadullisesta kuvailevasta tapaustutkimuksesta, jossa tutkimusaineisto on kerätty yhdestä matematiikan oppikirjasarjasta, voi harvoin tehdä yleistettäviä johtopäätöksiä. Tutkijan näkemys voi myös poiketa paljonkin tutkimuksen lukijoiden kokemuksista. Tuloksissa saattaa silti olla vastaaviin oppikirjoihin yleistettäviä piirteitä, esimerkiksi asioiden ajallisen painotuksen osalta.

Tässä tutkimuksessa visuaalinen tangentti tarkoittaa kirjassa esitettyä kuvaa tangentista. Verbaalinen tangentti tarkoittaa tehtävän verbaalista kuvailua, jossa esiintyy sana ″tangentti″, mutta tehtävässä ei ole kuvaa tangentista. Kirjan tieto-osassa visuaalinen ja verbaalinen tangentti esiintyvät kumminkin yhdessä, jolloin opiskelijoiden mielessä muodostuu yhteys tangenttikuvion ja tangentti-sanan välille. Näin Vinnerin (1991) mukaisesti tangentin konstruoinnin alkuvaiheessa sana ″tangentti″ voi johdattaa opiskelijoiden ajatukset tietoisesti heidän mielikuviinsa visuaalisesta tangentista ja tällaiset verbaaliset tehtävät voidaan helposti poimia kirjoista. Liitteisiin 1— 3 olen taulukoinut tilanteet visuaalisesta ja verbaalisesta tangentista luvuittain G*eometrian*, *Analyyttisen geometrian* ja *Derivaatan* tangenttiaiheisten lukujen tieto-osasta, harjoitustehtävistä ja kirjojen Vastaukset-luvuista.

Tutkimuksen teemojen määrällisellä kartoituksella on ollut tavoitteena lisätä tutkimuksen objektiivisuutta ja luotettavuutta. Määrällinen osuus tarkensi myös tutkijan kuvaa visuaalisesta tangentista siten, että muutamien visuaalisten tangenttityyppien esiintymisen vähyys tuli selvemmin esille. Tutkimuksen reliabiliteetin eli toistettavuuden mahdollistaa visuaalisen tangentin kuvailu, kuvailuun liitetyt oppikirjan kuvat ja teemojen määrällinen kartoittaminen (Metsämuuronen 2008; Hirsjärvi ym. 2009).

9.3 Tutkimuksen merkittävyys

Intuitiivinen visuaalinen tangentti on tutkimuskohteena melko harvinainen. Koska tangentin ja derivaatan yhteys esitetään vahvana lukion analyysin kursseissa, niin derivaatan käsitteen sisäistämistä voi auttaa tangentin käsitteen riittävän tarkka matemaattinen ymmärtäminen.

Visuaalisuutta on aina käytetty matematiikan käsitteiden havainnollistamisessa. Staattisten kuvien merkitys yleensäkin on ollut lähtökohtana kuvantutkimukselle, jota on tehty eri tieteiden näkökulmista. Vaikka kuvallisen tiedon merkitys on osoittautunut melko yksilölliseksi, niin saadun tutkimustiedon perusteella oppikirjan tarkoituksenmukaisesti valitun visuaalisen tangentin avulla voidaan tavoittaa, korjata ja kehittää opiskelijoiden mielensisäisiä käsityksiä tangentista. Monipuolinen visuaalinen tangentti kehittää myös matemaattista intuitiota sekä aktivoi ajattelua, mielikuvitusta ja luovuutta.

Intuitio on ollut viime vuosiin saakka vähän esillä Suomessa. Opiskelijat voivat mahdollisesti tiedostaa paremmin omaa havainnointiaan, intuitiivista ajatteluaan ja käsityksiään pelkästään tutustumalla visuaalisuuden ja intuition merkitystä oppimisessa selvitteleviin tutkimuksiin.

9.4 Jatkotutkimuspohdintaa

Tällä hetkellä kouluissa käytetään aiempaa enemmän teknisiä apuvälineitä. Millaisia sitten ovat nykyisten lukiolaisten käsitykset visuaalisesta tangentista, ja millaisia ovat heidän opettajiensa näkemykset opiskelijoiden tangentin ymmärtämisestä? Lukiolaisilta voisi kysyä myös visuaalisen tangentin verbaalisen kuvailun tärkeydestä. Tangenttia voisi lähestyä fysiikan tehtävien kauttakin, itse asiassa tangentti esiintyy monissa oppiaineissa ja arkielämän ilmiöissä.

Kokemukseni mukaan peruskoululaisia kiinnostavat aiheet, joita he eivät vielä tunne hyvin. Ympyrän tangentti on ehkä sellainen, sillä peruskoulun matematiikan oppikirjoissa käsitellään yleensä lyhyesti ympyrän tangenttia. Näin peruskouluaikana muodostuneita mielikuvia tangentista voi siirtyä lukioon. Peruskoulun matematiikassa voisi myös ennakoida lukio-opiskelijoiden vaikeuksia ymmärtää visuaalista tangenttia, pohtia oppimateriaalien sisältöjä sekä tutkia peruskoululaisten käsityksiä tangentista ja heidän kykyään omaksua globaali ja lokaali näkökulma funktioiden kuvaajien tarkastelussa.

Tutkimusten perusteella intuitiota voidaan eri tavoin tietoisesti kehittää. Muun muassa Aalto-yliopistossa on tutkittu menetelmiä, joilla voidaan lähestyä intuitiota (Raami 2015). Voisikin tutkia, olisiko matematiikassa löydettävissä uusia menetelmiä, joiden avulla opiskelijat voisivat tiedostaa aiempaa paremmin tekemiään havaintoja ja näin kehittää tietoisesti intuitiotaan.

LÄHTEET

Biza, I. 2007. Is the tangent line tangible? Students intuitive ideas about tangent lines. In D. Küchemann Ed. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(1) Marsch 2007.

Biza, I. 2008. Models of students conceptions about the tangent line. In Proceedings of the 11th International Conference on Mathematics Education (ICME), Topic Study Group 2, Learning and Cognition in Mathematics: Student formation of mathematical conceptions, notions, strategies, and beliefs. UNSPECFIED, Monterrey, Mexico.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. 2008. Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euklidean Geometry to Analysis. *Research in mathematics Education, 10*(1), 53—70.

Biza, I. & Zachariades, T. 2010. First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior, 29*(4), 218—229.

Blank, B.E. & Krantz, S.G. 2006. *Calculus, single variable.* Debut Ed. Key College Publising.

Boyer, C. 1995. *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia. Osat I ja II. 2*. painos. Juva: Art House.

Brannan, D. 2006. *A First Cource in Mathematical Analysis*. 1st. Ed. UK: Cambridge University Press.

Eukleides. *Alkeet.* 2011.Teoksessa Kahanpää, L. (nykysuomeksi toim.) *Laurin alkeet*. *Alkeet*-teoksen kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometria. Jyväskylä: Kirjapaino Kopi-Jyvä. Ensimmäinen kirja, viitattu 30.11.2017: http://users.jyu.fi/~laurikah/ETG/LaurinALKEET5.pdf

Heath, T. L. 1956. *The thirteen books of Euklid´s Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary.* Vol. I—III. 2nd Ed. New York: Cambridge University Press.

Fischbein, E. 1987. *Intuition in mathematics and science*. An educational approach. Dordrecht: Reidel.

Hatva, A. 2009. *Merkityksen välittäminen kuvan avulla.* Väitöskirja. Acta Electronica Universitatis Tamperensis: 886. Tampere: Tampere University Press. Viitattu 30.11.2107 http://urn.fi/urn:isbn:978-951-44-7837-6

Hirsjärvi, S., Remes, P., Sajavaara, P. 2009. *Tutki ja kirjoita*. 15. uudistettu painos. Hämeenlinna: Karisto Kirjapaino Oy.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. & Tahvanainen, J. 2014a. *Pitkä matematiikka. Geometria.* 1.-4. painos. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. & Tahvanainen, J. 2014b. *Pitkä matematiikka. Analyyttinen geometria.* 1.-4.painos. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. & Tahvanainen, J. 2014c. *Pitkä matematiikka. Derivaatta.* 1.-4. painos. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Kurittu, L., Hokkanen, V-M. & Kahanpää, L. 2006. Geometria. Luentomoniste. Viitattu 30.11.2017 http://users.jyu.fi/~laurikah/Geometria/Geometria2006.pdf

Metsämuuronen, J. 2008. *Laadullisen tutkimuksen perusteet*. 3. uudistettu painos. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Myrberg, L. 1977. *Differentiaali- ja integraalilaskenta korkeakouluja varten*. Osa 1. 1.-2. painos. Helsinki: Kirjayhtymä.

Nardi, E., Biza, I. & Iannone, P. 2008. Beyond the formalistic nonsence': The impact of symbols and prior images on students' sense-making of formal definitions. Paper presented at Topic Study Group 17, 11th International Conference on Mathematics Education, Monterrey, Mexico: July 6—13.

Opetushallitus 2003. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.* Vammala: Vammalan kirjapaino Oy. Viitattu 30.11.2017 http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

Opetushallitus 2004. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy. Viitattu 30.11.2017 http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf

Opetushallitus 2014. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Viitattu 30.11.2017 http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Opetushallitus 2015. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015* Viitattu 30.11.2017 http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

Partanen, M. 2013. Lukiolaisten kokemuksia ja näkemyksiä pitkän matematiikan oppikirjan käytöstä. Itä-Suomen yliopisto. Pro gradu –tutkielma. Viitattu 30.11.2017 http://epublications.uef.fi/pub/urn_nbn_fi_uef-20130263/urn_nbn_fi_uef-20130263.pdf

Pehkonen, E. 2012. Luovuus matematiikassa. Viitattu 30.11.2017 http://docplayer.fi/7364614-Elamassa-selviamiseen-tarvitaan.html

Raami, A. 2015. *Intuition unleashed—On the appplication and development of intuition in the creative process.* Väitöskirja. Aalto University publication series. Doctoral dissertations, 29/2015. Schoool of Arts, Design and Architecture, Deparment of Media. Helsinki: Aalto ARTS Books. Viitattu 30.11.2017 http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-60-6108-5

Salas, S., Hille, E. & Etgen, G. 2003. *Calculus, one and several variables*. 9th Ed. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Semanedi, Z. 2008. Deep intuition as a level in the development of the concept image. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1) April 2008.

Sierpinska, A. 1994. *Understanding in mathematics.* London: The Falmer.

Silfverberg, H. 1999. *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto.* Väitöskirja. Acta Universitas Tamperensis: 710. Tampere: Tampere University Press. Viitattu 30.11.2017 http://urn.fi/urn:isbn:951-44-4718-2

Tall, D. 1986. Constructing the Concept Image of a Tangent. Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E., Montreal III, 69—75.

Tall, D. 2008. The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5—24.

Tall, D. 2014. *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics.* UK: Cambridge University Press. Luku1. Viitattu 30.11.2017 http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/chapter1_about_this_book.pdf

Tieszen, R. L. 1989. *Mathematical intuition*: *Phenomenology and Mathematical Knowledge*. Dordrecht: Kluwer.

Viholainen, A. 2006. Why is a discontinuous function differentiable? In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 5., 329—336. Faculty of Education. Prague. Czech Rebublic: Charles University.

Viholainen, A. 2008. Prospective mathematics teachers' informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability. Report 115. Department of Mathematics and Statistics University of Jyväskylä. Finland. Jyväskylä: University Printing House. Viitattu 30.11.2017 http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep115.pdf

Viholainen, A. 2011. Critical features of formal and informal reasoning in the case of the concept of derivative. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Ankara. Turkey.

Vinner, S. 1991.The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 65—81. Dordrecht. The Netherlands: Kluwer.

Väisälä, K. 1947. *Differentiaali- ja integraalilaskennan alkeet: Oppi- ja esimerkkikirja.* Porvoo: Werner Söderström Osakeyhtiön kirjapaino.

Väisälä, K. 1959. *Geometria.* 5. painos. Porvoo: Werner Söderström Osakeyhtiön kirjapaino. Viitattu 30.11.2017 https://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria.pdf

LIITTEET

Liite 1: Visuaalisen tangentin esiintyminen *Geometria*-kirjassa

Luku	Tieto-osa	Tehtävät				
	Visuaalinen (ja verbaalinen) tangentti	Luvussa on tehtäviä	Tehtävässä on visuaalinen tangentti		Tehtävässä on verbaalinen tangentti	
			Visuaalisten tangenttien lukumäärä	Tällaisten tehtävien osuus luvun tehtävistä (%)	Verbaalisen tangentin sisältävien tehtävien lukumäärä	Tällaisten tehtävien osuus luvun tehtävistä (%)
Ympyrä	0	19	8 tangenttia: tehtävät 215, 219	11	0	0
Ympyrän tangentti	11 tangenttia: johdanto-ongel-massa on horisontaalinen tangentti, määritelmässä on kaksi tangent-tia ja tangenttikulma, esimerkissä 1 on kaksi tangentti-kulmaa, esimerkeissä 2 ja 3 on yksi tangentti	20	10 tangenttia: tehtävät 235,240, 246,250, 252	25	3: tehtävät 234,240, 249	15 **+Vastaukset**: tehtävissä 241,244, 252 on ohjeessa tangentti-sana
Kehä-kulma	0	24	2 tangenttia: tehtävä 263	4	1	4 +Vastaukset: tehtävä 263
Kertaus ss.176—178 ja Kertaustehtäviä ss. 187—188						
Ympyrä	0	6	0	0	0	0
Ympyrän tangentti	6 tangenttia: määritelmässä on yksi tangentti ja tangenttikulma, esimerkissä 1 on yksi tangentti ja tangenttikulma	4	0	0	0	0
Kehä-kulma	0	4	0	0	0	0

Liite 2: Visuaalisen tangentin esiintyminen *Analyyttinen geometria* -kirjassa

Luku	Tieto-osa	Tehtävät				
	Visuaalinen (ja verbaalinen) tangentti	Luvussa on tehtäviä	Tehtävässä on visuaalinen tangentti		Tehtävässä on verbaalinen tangentti	
			Visuaalisten tangenttien lukumäärä	Tällaisten tehtävien osuus luvun tehtävistä (%)	Verbaalisen tangentin sisältävien tehtävien lukumäärä	Tällaisten tehtävien osuus luvun tehtävistä (%)
Sivut7—102	0	235	3: ympyrän tangenttia	1	1	0
Ympyrän leikkaus-pisteitä	2 tangenttia: esimerkissä 3 on kaksi ympyrän tangenttia	22	0	0 +Vastaukset: tehtävän 257 kuva	3: 241,253, 254	14 +Vastaukset: tehtävä 257
Suorien kohtisuoruus	1 tangentti: esimerkissä 5 on ympyrän tangentti	24	0	0	3: 264, 274,275	13
Pisteen etäisyys suorasta	4 tangenttia: esimerkissä 3 on kaksi tangentti-kulmaa	24	0	0 +Vastaukset: tehtävän 299 kuva	5: 286,288, 289, 290,297	21 +Vastaukset: tehtävä 288
Paraabeli	3: nimeämätöntä paraabelin tangenttia	27	0	0	2: 314,325	7 +Vastaukset: tehtävä 314!
Kertaus ja kertaustehtäviä ss. 151—176						
Tieto ss. 151—163 ja tehtävät ss. 170—172	0	33	0	0	0	0
Ympyrän leikkaus-pisteitä	0	5	0	0	1: 404	20
Suorien kohtisuoruus	0	7	0	0	1: 408	14
Pisteen etäisyys suorasta	0	6	0	0	2: 416,417	33
Paraabeli	0	5	0	0	1: 422	20

Liite 3: Visuaalisen tangentin esiintyminen *Derivaatta*-kirjassa

Luku	Tieto-osa	Tehtävät				
	Visuaalinen (ja verbaalinen) tangentti	Luvussa on tehtäviä	Tehtävässä on visuaalinen tangentti		Tehtävässä on verbaalinen tangentti	
			Visuaalisten tangenttien lukumäärä	Tällaisten tehtävien osuus luvun tehtävistä (%)	Verbaali-sen tangentin sisältävien tehtävien lukumäärä	Tällaisten tehtävien osuus luvun tehtävistä (%)
Funktion kasvu-nopeus	18 tangenttia: johdantoesimerkissä kaksi, kasvukäyrässä neljä tangenttia, esimerkeissä on viisi, joista yksi vertikaali-nen, käyrien suurennuksissa on yksi, esimerkissä 2 on kolme paraabelin tangenttia, esimerkissä 3 on kolme suoran tangenttia lisäksi: epäjatkuvuuskohta ja kärkipistekohta	19	14 tangenttia 5 tehtävässä: joista 1 käännepis-teen tangentti, kaksi horisontaa-lista, 14:sta on 12 toisiaan leikkaavaa ja kuusi on paraabelin tangentteja, lisäksi: 8 käyrän osaa on suoria, kolme kärkipistekoh-taa ja epäjat-kuvuuskohta	26	6: 87, 89, 90,96, 98,99	32
Derivaatta raja-arvona	3 tangenttia: johdanto-ongelmassa on yksi ja -esimerkissä 1 on yksi, derivaatan määritelmässä on yksi	19	0	0	0	0
Derivaatta-funktio	0	20	0	0	0	0
Käyrän tangentti	6 tangenttia: esimerkissä 1 on kaksi tangenttia, esimerkissä 2 on horisontaalinen, esimerkissä 3 on pohjan kaltevuuden määrittelyssä yksi paraabelin tangentti, esimerkissä 4 on ulkopuolisesta (jatkuu)	26	0	0	11: 145,146, 149,151, 152,153, 154, 156,157, 158,164	42 +Vastauk-set:150, 165,166, 169,

	pisteestä piirretyt kaksi paraabelin tangenttia (jatkuu)					
Polynomi-funktion kulku	8 tangenttia: havainnollistavat funktion arvon kasvua tai vähenemistä, joista terassikohtia on kaksi	25	0	0	0	0
Kertaus ss.149—159 ja Kertaustehtäviä ss.169—171						
Derivaatta	5 tangenttia: esimerkeissä määritetään tangentin avulla funktion derivaatta kolmessa kohdassa ja kasvunopeus kasvukäyrän kahdessa kohdassa	5	4 tangenttia tehtävissä: 359, 360	40	1: 359	20
Derivaatta-funktio	0	3	0	0	0	0
Käyrän tangentti	0	6	0	0	2: 367,368	33
Funktion kulku	0	6	0	0	0	0