Hyperreaaliluvut

Santtu Pienimäki

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2017

Tiivistelmä: Santtu Pienimäki, *Hyperreaaliluvut*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 48 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, lokakuu 2017.

Hyperreaaliluvut ovat reaalilukujen joukon laajennus, jossa on olemassa äärettömän pieniä ja suuria lukuja. Hyperreaalilukuja käytetään differentiaali- ja integraalilaskennassa. Metodi on suosittu erityisesti fyysikoiden keskuudessa. Analyysin osa-aluetta, jossa hyödynnetään hyperreaalilukuja, kutsutaan epästandardiksi analyysiksi. Epästandardissa analyysissä käytetään analyysille epästandardeja työkaluja, josta nimi juontuu. Hyperreaalilukujen edut verrattaessa reaalilukuihin tulevat esille epästandardissa analyysissä. Varsinkin fysiikassa hyödynnetään yhtälöiden differentiaalimuotoja ja integroinnissa lähtökohtana pidetään infinitesimaalin valintaa.

Tutkielmassa hyperreaaliluvut määritellään lähtien kuudesta aksioomasta. Kaksi ensimmäistä aksioomaa vastaavat reaalilukujen aksioomia. Kolmas aksiooma takaa yhden positiivisen infinitesimaalin olemassaolon. Tämän lisäksi tarvitaan vielä aksiooman standardiosalle ja kaksi aksioomaa funktioille. Jokainen äärellinen hyperreaaliluku on mielivaltaisen lähellä yhtä reaalilukua. Hyperreaaliluvun standardiosa on se reaaliluku, jota lähellä hyperreaaliluku on.

Epästandardista analyysista ensimmäisenä määritellään jatkuvuus funktioilla hyperreaalilukujen avulla. Hyperreaalifunktiot ovat funktioita, jotka ovat määrtitelty hyperreaaliluvuilla. Viides aksiooma takaa jokaiselle funktiolle f vastaavan hyperreaalifunktion f^*, jota kutsutaan funktion f luonnolliseksi jatkoksi. Raja-arvo määritellään hyperreaaliluvuille standardiosan avulla. Jatkuvuus määritellään raja-arvon avulla, mutta todistuksissa hyödynnetään standardiosaa. Jatkuvuustuloksista Bolzanon lauseen todistus on selkeästi lyhyempi hyperreaalilukuja hyödyntäen.

Derivaatta määritellään tutkielmassa standardiosan avulla raja-arvon sijaan. Määritelmän avulla osoitetaan rationaalifunktioiden derivointitulokset. Lauseiden todistuksia verrataan standardin analyysin todistuksiin. Viimeisessä kappaleessa määritellään määrätty integraali hyperreaalilukujen avulla. Määrätyn integraalin ominaisuuksien lisäksi osoitetaan, että määrätty integraali $\int_a^b f dx$ on funktion f pinta-ala funktio.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän pro gradu tutkielman tarkoituksena on esitellä hyperreaaliluvut ja määritellä niiden avulla funktioiden jatkuvuus, derivaatta ja määrätty integraali. Hyperreaaliluvut ovat yleisesti käytössä fyysikoiden ja taloustieteilijöiden keskuudessa, mutta matemaatikot ovat suhtautuneet hyperreaalilukuihin varauksellisesti. Tutkielman yksi pääasiallinen tarkoitus on osoittaa hyperreaalilukujen olevan käytännöllinen työkalu analyysin ongelmissa.

Sir Iisac Newton (1642) ja Gottfried Wilhem Leibniz ($1646 - 1716$) [2] kehittivät differentiaali- ja integraalilaskentaa intuitiivisesta lähtökohdasta. He käyttivät intuitiivista oletusta äärettömän pienistä luvuista. Infinitesimaaleja käytettiin seuraavat 200 vuotta, kunnes saksalainen matemaatikko Karl Theodor Weiestrass ($1815 - 1897$) kehitti differentiaali- ja integraalilaskentaa matemaattisesti aukottomaksi $1870-$luvulla. Nykyinen analyysi perustuu siis Weiestrassin $\epsilon, \delta-$määritelmään. Koska $\epsilon, \delta-$määritelmää pidettiin oikeana tapana määritellä diferentiaali- ja integraalilaskenta, useat sukupolvet matemaatikkoja ovat ajatelleet, ettei infinitesimaaleja ole olemassa ja niitä tulisi välttää. Infinitesimaalit ovat lähempänä intuitiivista ajatusta differentiaali- ja integraalilaskennan lähtökohdasta, jolloin niiden käyttö on luontevaa ja voi helpottaa oppimista.

Kolmesataa vuotta vanha ongelma ratkesi Abraham Robinsonin ($1918 - 1974$) toimesta 1960. Hän antoi eksaktin määritelmän differentiaali- ja integraalilaskennalle käyttäen infinitesimaaleja. Robinson käytti hyperreaalilukujen konstruktiossa malliteoriaa, joka kehittyi $1950-$luvulla. Ennen malliteoriaa ei siis ollut mahdollista määritellä hyperreaalilukuja eksaktisti. Robinson kutsui kehittämäänsä menetelmää epästandardiksi analyysiksi, vaikka vanhempi nimitys infinitesimaalianalyysi kuvaakin sitä paremmin.

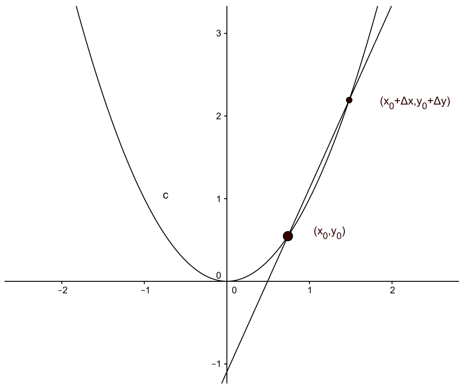
Tässä tutkielmassa käytämme hyperreaaliluvuille aksioomia, jotka voidaan johtaa Robinssonin logiikkaa käyttävästä konstruktiosta. Tällöin hyperreaalilukujen teoria saadaan esitettyä ilman matemaattisen logiikan syvempää tuntemusta. Aksioomien avulla johdetaan hyperreaalilukujen teoria ja ominaisuudet. Hyperreaalilukujen ominaisuuksien johtamiseen tarvitaan oletus siitä, että on olemassa yksi infinitesimaali. Tästä oletuksesta saadaan rakennettua uusi lukualue, hyperreaaliluvut.

Tutkielmassa pääasiallisina lähteinä on käytetty H. Jerome Keislerin kirjoja Elementary calculus [5] ja Foundation of infinitesimal calculus [4]. Luvussa 4 on käytetty läheenä myös James M. Henlen ja Eugene M. Kleinbergin teosta Infinitesimal calculus [3].

2 Hyperreaaliluvut

Tässä luvussa pääasiallisena lähteenä on käytetty H. Jerome Keislerin kirjaa Elementary calculus [5]. Tarkastellaan alkuun yksinkertaista esimerkkiä kulmakertoimen määrittämisestä. Tarkastaltaessa käyrän kulmakerrointa tietyssä pisteessä lasketaan käyrän sekanttisuorien raja-arvoa, kun sekanttisuorien pisteiden $x-$koordinaatit lähestyvät toisiaan. Tarkastellaan paraabelia $y = x^2$. Olkoot pisteet (x_0, y_0) ja $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ käyrän kaksi eri pistettä. Tällöin keskimääräinen muutosnopeus näiden pisteiden välillä on

$$\text{keskimääräinen muutosnopeus} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Kuva 1.1: Keskimääräinen muutosnopeus pisteiden (x_0, y_0) ja $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ välillä.

Koska molemmat pisteet ovat käyrällä $y = x^2$, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y_0 &= x_0^2 \\ y_0 + \Delta y &= (x_0 + \Delta x)^2. \end{cases}$$

Tästä saamme edelleen

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2.$$

Koska pisteet ovat eri pisteitä tulee olla $\Delta x \neq 0$. Tällöin voidaan yhtälö jakaa luvulla Δx, jolloin saadaan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}.$$

Kun tästä lasketaan binomin neliö auki, saadaan yhtälö muotoon

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= 2x_0 + \Delta x.
\end{aligned}
$$

Analyysin tulosten perusteella tiedetään, että paraabelille $y = x^2$ muutosnopeus y' kohdassa x_0 on

$$y' = 2x_0.$$

Näin ollen jos termi Δx on hyvin pieni ja voimme jättää sen huomioimatta, saamme halutun tuloksen. Mitkä termit ovat tarpeeksi pieniä, jotta ne voitaisiin jättää huomiotta? Reaaliluvuista ainoastaan luku 0 on tarpeeksi pieni huomiotta jätettäväksi. Jotta ongelma saataisiin kierrettyä otetaan käyttöön uudenlainen luku, joka on äärettömän pieni, mutta ei kuitenkaan nolla.

Määritelmä 2.1. Luku ϵ on äärettömän pieni, tai infinitesimaali, jos jokaiselle positiiviselle reaaliluvulle $a \in \mathbb{R}$

$$-a < \epsilon < a.$$

Määritelmän nojalla ainoastaan luku 0 on infinitesimaali reaalilukujen joukossa. Otamme käyttöön uuden lukualueen hyperreaaliluvut, joka on reaalilukujen laajennus. Toisin kuin reaaliluvut, hyperreaaliluvut sisältävät infinitesimaalit. Merkitään hyperreaalilukujen joukkoa merkinnällä $\mathbb{R}^*$. Kuten reaaliluvut konstruoidaan rationaaliluvuista, voitaisiin hyperreaaliluvut konstruoida reaaliluvuista. Tämän sijaan käytämme kuutta aksioomaa, jotka määräävät hyperreaalilukujen ominaisuuksia. Hyperreaalilukujen konstruktio löytyy Keislerin kirjasta Foundation of infinitesimal calculus [4] sivuilta $23 - 31$. Kaikki reaaliluvut ovat äärellisiä toisin kuin hyperreaaliluvut. Jos luku ϵ on infinitesimaali, eli lähempänä lukua 0 kuin mikään reaaliluku, on luku$\frac{1}{\epsilon}$ suurempi kuin mikään reaaliluku. Tällöin myös luku $-\frac{1}{\epsilon}$ on pienempi kuin mikään reaaliluku. Mikäli hyperreaaliluku ei ole ääretön, eli suurempi kuin mikään reaaliluku, sanotaan luvun olevan äärellinen.

2.1 Äärelliset ja äärettömät hyperreaaliluvut

Reaaliluvuille on sovittu aksioomat, joiden avulla niiden muut ominaisuudet saadaan johdettua. Näin toimitaan myös hyperreaalilukujen kanssa. Hyperreaaliluvuille on olemassa kuusi aksioomaa. Näistä kolme ensimmäistä esitellään seuraavaksi.

$\mathbf{A}_1$: Jokainen reaaliluku on hyperreaaliluku. Jos luvut a ja b ovat hyperreaalilukuja, ovat luvut $a + b$, ab ja $a - b$ hyperreaalilukuja. Lisäksi jos luku $a \neq 0$ on hyperreaaliluku, on luku $\frac{1}{a}$ myös hyperreaaliluku.

$\mathbf{A}_2$: Olkoot a, b ja c hyperreaalilukuja. Tällöin pätee

- Jos $a < b$ ja $b < c$, niin $a < c$.
- Täsmälleen yksi relaatioista $a < b$, $a = b$ tai $b < a$ on voimassa.
- Jos $a < b$, niin $a + c < b + c$.
- Jos $a < b$ ja $0 < c$, niin $ac < bc$.
- Jokaiselle hyperreaaliluvulle $a > 0$ ja jokaiselle positiiviselle luvulle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa hyperreaaliluku $b > 0$ siten, että $b^n = a$.

Kaksi ensimmäistä aksioomaa antavat hyperreaaliluvuille reaalilukuja vastaavat ominaisuudet. Määritellään seuraavaksi positiivinen ja negatiivinen infinitesimaali.

Määritelmä 2.2. Olkoon luku b hyperreaaliluku. Tällöin

1. Luku b on positiivinen infinitesimaali, jos b on positiivinen ja pienempi kuin kaikki positiiviset reaaliluvut.
2. Luku b on negatiivinen infinitesimaali, jos b on negatiivinen ja suurempi kuin kaikki negatiiviset reaaliluvut.
3. Luku b on infinitesimaali, jos luku b on joko positiivinen infinitesimaali, negatiivinen infinitesimaali tai nolla.

$\mathbf{A}_3$: On olemassa positiivinen infinitesimaali hyperreaaliluku.

Aksiooma $\mathbf{A}_3$ antaa yhden infinitesimaalin, joka eroaa nollasta. Käytetään siitä merkintää ϵ. Luvun ϵ avulla voimma konstruoida äärettömän monta hyperreaalilukua, jotka eivät ole reaalilukuja.

Lause 2.3. *Olkoon ϵ positiivinen infinitesimaali. Tällöin pätee*

1. *Luku $-\epsilon$ on negatiivinen infinitesimaali.*

2. *Jos luku r on reaaliluku, on luku $r + \epsilon$ hyperreaaliluku, mutta ei reaaliluku.*

3. *Olkoon a positiivinen reaaliluku. Tällöin lukujen a ja ϵ tulo $a\epsilon$ on positiivinen infinitesimaali.*

Todistus. 1): Olkoon s negatiivinen reaaliluku, jolloin $-s$ on positiivinen reaaliluku. Tällöin $0 < \epsilon$ ja $\epsilon < -s$. Lisäämällä ensimmäisen epäyhtälön molemmille puolille luku $-\epsilon$ saadaan aksiooman $\mathbf{A}_2$ kolmannen kohdan nojalla $0 - \epsilon < \epsilon - \epsilon$, joka sievenee muotoon $-\epsilon < 0$. Vastaavasti toiseen epäyhtälöön lisätään molemmille puolille luku s ja vähennetään luku ϵ. Tällöin saadaan $\epsilon + s - \epsilon < -s + s - \epsilon$, joka sievenee muotoon $s < -\epsilon$. Negatiivisen infinitesimaalin määritelmän nojalla luku $-\epsilon$ on negatiivinen infinitesimaali.

2): Kahden reaaliluvun erotuksen tulee olla reaaliluku. Nyt kuitenkin $(r+\epsilon)-r = \epsilon$. Koska ϵ on infinitesimaali, eikä reaaliluku, ei luku $r + \epsilon$ voi olla reaaliluku.

3): Tulo $a\epsilon$ on positiivinen, koska tulon tekijät ovat positiivisia. Olkoon r positiivinen reaaliluku. Tällöin

$$0 < \epsilon < \frac{r}{a}.$$

Jos epäyhtälö kerrotaan luvulla a, saadaan

$$0 < a\epsilon < r.$$

Tällöin määritelmän nojalla $a\epsilon$ on infinitesimaali. □

Toistaiseksi olemme käsitelleet vain infinitesimaaleja. Määritellään seuraavaksi milloin hyperreaaliluku on äärellinen ja ääretön.

Määritelmä 2.4. Hyperreaaliluku b on positiivinen ääretön, jos b on suurempi kuin mikään reaaliluku. Vastaavasti luku b on negatiivinen ääretön, jos b on pienempi kuin mikään reaaliluku.

Osoitetaan seuraavaksi positiivisen ja negatiivisen äärettömän olevan olemassa.

Lause 2.5. *Olkoon ϵ positiivinen infinitesimaali. Tällöin luku $\frac{1}{\epsilon}$ on positiivinen ääretön ja $-\frac{1}{\epsilon}$ negatiivinen ääretön.*

Todistus. Olkoon r positiivinen reaaliluku. Koska ϵ on infinitesimaali, pätee $0 < \epsilon < \frac{1}{r}$. Jakamalla epäyhtälö luvulla ϵ ja sen jälkeen kertomalla luvulla r, saamme epäyhtälön muotoon $r < \frac{1}{\epsilon}$. Näin ollen luku $\frac{1}{\epsilon}$ on suurempi kuin mikään reaaliluku ja se on positiivinen ääretön. Negatiivinen ääretön todistetaan vastaavasti. $\square$

Määritelmä 2.6. Jos hyperreaaliluku b on kahden reaaliluvun a ja c välissä

$$a < b < c,$$

sanotaan luvun b olevan äärellinen.

2.2 Hyperreaalilukujen ominaisuuksia

Käsitellään seuraavaksi tuloksia jotka antavat laskusääntöjä hyperreaaliluvuille.

Lause 2.7. *Olkoon ϵ infinitesimaali, b äärellinen hyperreaaliluku, mutta ei infinitesimaali, ja H ääretön hyperreaaliluku. Tällöin pätee*

1. *$-\epsilon$ on infinitesimaali,*
2. *$-b$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaali,*
3. *$-H$ on ääretön,*
4. *jos $\epsilon \neq 0$, niin $\frac{1}{\epsilon}$ on ääretön,*
5. *$\frac{1}{b}$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaali,*
6. *$\frac{1}{H}$ on infinitesimaali.*

Olemme jo todistaneet, että $-\epsilon$ on infinitesimaali, sekä kohdan 4). Kohdat $2), 3), 5)$ ja 6) todistetaan vastaavasti ja sivuutamme niiden todistuksen. Seuraava lauseen avulla voimme laskea hyperreaalilukujen summia ja tuloja.

Lause 2.8. *Olkoon ϵ ja δ infinitesimaaleja, b ja c äärellisiä, mutta ei infinitesimaaleja, sekä H ja K äärettömiä hyperreaalilukuja. Tällöin pätee*

1. *$\epsilon + \delta$ on infinitesimaali,*

2. *$b + \epsilon$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaali,*

3. *$b + c$ on äärellinen,*

4. *$H + \epsilon$ ja $H + b$ ovat äärettömiä,*

5. *$\epsilon \cdot \delta$ ja $b \cdot \epsilon$ ovat infinitesimaaleja,*

6. *$b \cdot c$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaali,*

7. *$H \cdot b$ ja $H \cdot K$ ovat äärettömiä.*

Todistus. 1): Koska luvut ϵ ja δ ovat infinitesimaaleja, niille pätee jokaisella $r \in \mathbb{R}$ $-\frac{r}{2} < \epsilon < \frac{r}{2}$ ja $-\frac{r}{2} < \delta < \frac{r}{2}$. Tällöin lukujen ϵ ja δ summalle pätee $-r < \epsilon + \delta < r$. Näin ollen myös summa $\epsilon + \delta$ on infinitesimaali.
2): Koska luku b on äärellinen, on olemassa reaaliluvut $c, d \in \mathbb{R}$ siten, että $c < b < d$. Luvulle ϵ pätee kaikilla reaaliluvuilla $r \in \mathbb{R}$, $-r < \epsilon < r$. Nyt summalle $b + \epsilon$ pätee $c - r < b + \epsilon < d + r$, eli summa on kahden reaaliluvun välissä. Tällöin summa on äärellinen.
Jos luku $b + \epsilon$ on infinitesimaali, on kohdan 1 nojalla summa $(b + \epsilon) + (-\epsilon) = b$ infinitesimaali. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa. Näin ollen luku $b + \epsilon$ ei ole infinitesimaali.
Kohta 3. todistetaan vastaavasti kuin kohta 2.
4): Oletetaan, että H on positiivinen ääretön. Negatiivinen ääretön todistetaan vastaavasti. Jos ϵ on positiivinen infinitesimaali, on summa $H + \epsilon$ ääretön, koska H on suurempi kuin mikään reaaliluku. Toisaalta jos $r \in \mathbb{R}$ on äärellinen, pätee $H > r + \epsilon$. Tästä seuraa $H - \epsilon > r$, jolloin $H + (-\epsilon) > r$. Näin ollen myös negatiivisella infinitesimaalilla summa on ääretön.
Kohdan 5. olemme jo todistaneet lauseen 2.3 kohdassa 3, kun a on positiivinen reaaliluku. Kohdat $5, 6$ ja 7 todistetaan vastaavasti. Sivuutamme näiden kohtien todistukset. □

Hyödyntämällä tulolle saatuja tuloksia lauseessa 2.8 saadaan seuraavat tulokset osamäärälle:

Seuraus 2.9. *Olkoon ϵ infinitesimaali, b ja c äärellisiä hyperreaalilukuja, mutta ei infinitesimaaleja, ja H ääretön hyperreaaliluku.*

1. *Luvut $\dfrac{\epsilon}{b}$, $\dfrac{\epsilon}{H}$ ja $\dfrac{b}{H}$ ovat infinitesimaaleja.*

2. *Luku $\dfrac{b}{c}$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaali.*

3. *Luvut $\dfrac{b}{\epsilon}$, $\dfrac{H}{\epsilon}$ ja $\dfrac{H}{b}$ ovat äärettömiä, kun $\epsilon \neq 0$.*

Todistus. 1:) Lauseen 2.8 nojalla saadaan, että $\frac{\epsilon}{b} = \epsilon \cdot \frac{1}{b}$ on infinitesimaali. Samoin myös luku $\frac{1}{H}$ on infinitesimaali, jolloin myös $\frac{\epsilon}{H} = \epsilon \cdot \frac{1}{H}$ ja $\frac{b}{H} = b \cdot \frac{1}{H}$ ovat infinitesimaaleja.
2): Äärellisen, mutta ei infinitesimaalin, luvun c käänteisluku on äärellinen ja ei infinitesimaali. Tällöin lauseen 2.8 nojalla $\frac{b}{c} = b \cdot \frac{1}{c}$ on äärellinen.
Jos luku $\dfrac{b}{c}$ on infinitesimaali, lauseen 2.3 nojalla tulo $\dfrac{b}{c} \cdot c = b$ infinitesimaali. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, sillä luku b ei ole infinitesimaali. Näin ollen luku $\dfrac{b}{c}$ ei ole infinitesimaali.
3): Seuraa myös lauseesta 2.8, koska luku $\frac{1}{\epsilon}$ on ääretön ja luku $\frac{1}{b}$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaali. $\square$

Olemme saaneet laskusäännöt summalle ja tulolle. Seuraavaksi käsittelemme juurien ja jakolaskun tapauksia.

Lause 2.10. *Olkoon $\epsilon > 0$ infinitesimaali, $b > 0$ äärellinen hyperreaaliluku, $H > 0$ ääretön hyperreaaliluku ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

1. *$\sqrt[n]{\epsilon}$ on infinitesimaali.*

2. *$\sqrt[n]{b}$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaali.*

3. *$\sqrt[n]{H}$ on ääretön.*

Todistus. Todistetaan lauseesta kohta 1. Muut kohdat saadaan todistettua vastaavasti. Koska luku ϵ on infinitesimaali, on ϵ pienempi kuin reaaliluku r^n. Nyt siis $\epsilon < r^n$. Epäyhtälön suunta säilyy, kun molemmin puolin otetaan n :s juuri, koska positiivisilla luvuilla juurifunktiot ovat kasvavia. Tarkastelemme funktioita hyperreaaliluvuille tarkemmin luvussa 2. Tällöin saamme $\sqrt[n]{\epsilon} < \sqrt[n]{r^n} = r$. Näin ollen luku $\sqrt[n]{\epsilon}$ on infinitesimaali. □

Lauseessa 2.8 ja seurauksessa 2.9 ei käsitellä määrittelemätömiä muotoja tulolle ja osamäärälle. Määrittelemättömät muodot ovat

$\frac{\epsilon}{\delta}$ kahden infinitesimaalin osamäärä,

$\frac{H}{K}$ kahden äärettömän luvun osamäärä,

$H\epsilon$ infinitesimaalin ja äärettömän tulo,

$H + K$ kahden äärettömän luvun summa.

Muodot ovat määrittelemättömiä, koska jokainen tapaus voi olla sekä infinitesimaali, äärellinen, mutta ei infinitesimaali tai ääretön, riippuen luvuista ϵ, δ, H ja K. Esimerkiksi jos ϵ on infinitesimaali, saadaan

$\frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon$ infinitesimaali,

$\frac{\epsilon}{\epsilon} = 1$ äärellinen, mutta ei infinitesimaali tai

$\frac{\epsilon}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon}$ ääretön luku.

Seuraavaksi tarkastellaan millaisia lukuja kahden infinitesimaalin välissä voi olla tai kahden äärellisen hyperreaaliluvun välissä on.

Lause 2.11. *Hyperreaaliluvuille pätee seuraavat ominaisuudet.*

1. *Jokainen hyperreaaliluku, joka on kahden infinitesimaalin välissä on infinitesimaali.*

2. *Kahden äärellisen hyperreaaliluvun välissä oleva hyperreaaliluku on äärellinen.*

3. *Jokainen hyperreaaliluku, joka on suurempi kuin jokin positiivinen ääretön hyperreaaliluku, on positiivinen ääretön.*

4. *Jokainen hyperreaaliluku, joka on pienempi kuin jokin negatiivinen ääretön hyperreaaliluku, on negatiivinen ääretön.*

Todistus. Todistetaan kohdat 2 ja 3. Kohdat 1 ja 4 todistetaan vastaasti.
2: Olkoon luvut a ja c äärellisiä hyperreaalilukuja. Tällöin on olemassa reaaliluvut

d, e, f ja g siten, että $d < a < e$ ja $f < c < g$. Oletetaan, että luku a on pienempi kuin luku c. Olkoon luku b lukujen a ja c välissä. Tällöin $d < a < b < c < g$, eli erityisesti $d < b < g$, joten b on äärellinen hyperreaaliluku.
3: Olkoon H positivinen ääretön ja $H < K$. Jokaiselle reaaliluvulle r pätee $r < H < K$, eli $r < K$. Näin ollen K on positiivinen ääretön. $\square$

2.3 Standardiosa

Määritellään seuraavaksi hyperreaaliluvuille relaatio, joka ilmaisee milloin kaksi hyperreaalilukua ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Määritelmä 2.12. Kaksi hyperreaalilukua ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan jos erotus $b - c$ on infinitesimaali. Jos luvut b ja c ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan, merkitään $b \approx c$.

Määritelmän avulla voimme merkitä luvun b olevan infinitesimaali käyttämällä relaatiota $b \approx 0$.

Huomautus 2.13. Määritelmän nojalla jos ϵ on infinitesimaali, niin $b \approx b + \epsilon$. Luku b on infinitesimaali jos $b \approx 0$. Jatkossa merkinnällä $b \approx 0$ ilmoitetaan lyhyesti luvun b olevan infinitesimaali.

Relaatiolla $\approx$ on samankaltaisia ominaisuuksia kuin yhtäsuuruudella.

Lause 2.14. *Olkoon a, b ja c hyperreaalilukuja. Tällöin pätee*

1. $a \approx a$
2. *Jos* $a \approx b$, *niin* $b \approx a$.
3. *Jos* $a \approx b$ *ja* $b \approx c$, *niin* $a \approx c$.

Todistus. 1): Jos luku a vähennetään luvusta a, on erotus nolla $a - a = 0$. Nolla on infinitesimaali, jolloin pätee $a \approx a$.
2): Koska $a \approx b$, pätee $a - b = \epsilon$, jolloin $a = b + \epsilon$. Toisaalta $b - a = b - (b + \epsilon) = -\epsilon$. Näin ollen pätee $b \approx a$.
3): Koska $a - b = \epsilon$ ja $b - c = \delta$, saadaan $a - c = a - b + (b - c) = \epsilon + \delta$, mikä on kahden infinitesimaalin summana infinitesimaali ja näin ollen relaatio $a \approx c$ pätee. $\square$

Lause 2.15. *Olkoon a ja b hyperreaalilukuja siten, että $a \approx b$.*

1. *Jos a on infinitesimaali, on myös b infinitesimaali.*

2. *Jos a on äärellinen, on myös b äärellinen.*

3. *Jos a on ääretön, on myös b ääretön.*

Todistus. 1: Jos $a \approx b$, niin luku b muotoa $b = a + \epsilon$, missä ϵ on infinitesimaali. Näin ollen b on kahden infinitesimaalin summana infinitesimaali.
2: Koska a on äärellinen, on olemassa reaaliluvut c ja d siten, että $c < a < d$. Luku b on infinitesimaalin ϵ päässä luvusta a. Oletetaan, että ϵ on positiivinen, koska ϵ on pienempi kuin mikään reaaliluku, $c < a - \epsilon < a < a + \epsilon < d$. Näin ollen b on äärellinen.
3: Lauseen 2.8 nojalla jos a on ääretön, niin $a + \epsilon$ on myös ääretön. Toisaalta $b = a + \epsilon$, joten myös b on ääretön. □

Reaalilukuja kutsutaan standardeiksi luvuiksi ja hyperreaalilukuja, jotka eivät ole reaalilukuja, epästandardeiksi luvuiksi. Reaalilukua a, joka on mielivaltaisen lähellä lukua b, sanotaan luvun b standardiosaksi. Äärettömät luvut eivät ole mielivaltaisen lähellä mitään reaalilukua. Koska standardiosan tulee olla reaaliluku, ei äärettömällä ole olemassa standardiosaa. Neljäs aksiooma hyperreaaliluvuille toteaa jokaisella äärellisellä hyperreaaliluvulla olevan standardiosa.

$\mathbf{A}_4$: Jokainen äärellinen hyperreaaliluku on mielivaltaisen lähellä täsmälleen yhtä reaalilukua.

Määritelmä 2.16. Olkoon b äärellinen hyperreaaliluku. Luvun b standardiosa $\mathrm{st}(b)$ on reaaliluku, joka on mielivaltaisen lähellä lukua b.

Standardiosan määritelmästä seuraavat suoraan seuraavat ominaisuudet.

Lause 2.17. *Olkoon b äärellinen hyperreaaliluku. Luvun b standardiosalle pätevät seuraavat ominaisuudet:*

1. $\mathrm{st}(b)$ *on reaaliluku,*

2. $\mathrm{st}\, b = \mathrm{st}(b + \epsilon)$, *kun ϵ on infinitesimaali,*

3. *jos $b \in \mathbb{R}$, niin $b = \mathrm{st}(b)$.*

Todistus. Lause seuraa suoraan määritelmästä ja sivuutamme todistuksen. □

Tarkastellaan seuraavaksi muita ominaisuuksia standardiosalle. Standardiosa on tärkeä työkalu epästandardin analyysin yhteydessä.

Lause 2.18. *Olkoot a ja b äärellisiä hyperreaalilukuja. Tällöin*

1. $\operatorname{st}(-a) = -\operatorname{st}(a)$,

2. $\operatorname{st}(a+b) = \operatorname{st}(a) + \operatorname{st}(b)$,

3. $\operatorname{st}(a-b) = \operatorname{st}(a) - \operatorname{st}(b)$,

4. $\operatorname{st}(ab) = \operatorname{st}(a) \cdot \operatorname{st}(b)$,

5. *jos* $\operatorname{st}(b) \neq 0$, *niin* $\operatorname{st}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\operatorname{st}(a)}{\operatorname{st}(b)}$,

6. $\operatorname{st}(a^n) = (\operatorname{st}(a))^n$,

7. *jos* $a \geq 0$, *niin* $\operatorname{st}(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{\operatorname{st}(a)}$,

8. *jos* $a \leq b$, *niin* $\operatorname{st}(a) \leq \operatorname{st}(b)$.

Todistus. Olkoon $r = \operatorname{st}(a)$ ja $s = \operatorname{st}(b)$. Tällöin saadaan $a = r + \epsilon$ ja $b = s + \delta$, ϵ ja δ ovat infinitesimaaleja.
1: Koska luvun a standardiosa on r, riittää osoittaa, että luvun $-a$ standardiosa on $-r$.

$$-a = -(r+\epsilon) = -r - \epsilon \approx -r.$$

Näin ollen on siis

$$\operatorname{st}(-a) = -r.$$

2: Lukujen a ja b summa on muotoa

$$\begin{aligned} a + b &= (r+\epsilon) + (s+\delta) \\ &= (r+s) + (\epsilon+\delta) \\ &\approx r + s. \end{aligned}$$

Näin ollen pätee

$$\operatorname{st}(a+b) = r + s.$$

Kohta 3. todistetaan vastaavasti ja sivuutamme tämän todistuksen.
4: Lukujen tulon standardiosaksi saadaan

$$
\begin{aligned}
ab &= (r+\epsilon)(s+\delta) \\
&= rs + r\delta + s\epsilon + \epsilon\delta \\
&\approx rs.
\end{aligned}
$$

Nyt siis

$$\mathrm{st}(ab) = rs.$$

5: Todistuksen ideana on näyttää, että luvun $\frac{a}{b}$ standardiosa on $\frac{r}{s}$. Tämä onnistuu osoittamalla, että erotus $\frac{a}{b} - \frac{r}{s}$ on infinitesimaalinen.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} - \frac{r}{s} &= \frac{as - br}{bs} \\
&= \frac{(r+\epsilon)s - (s+\delta)r}{bs} \\
&= \frac{rs + \epsilon s - sr - \delta r}{bs} \\
&= \frac{\epsilon s - \delta r}{bs}.
\end{aligned}
$$

Lauseen 2.8 ja seurauksen 2.9 nojalla erotus on infinitesimaali. Osoittaja on infinitesimaali kahden infinitesimaalin summana ja nimittäjässä on kaksi äärellistä, mutta ei infinitesimaalia hyperreaalilukua, jolloin osamäärä on infinitesimaali

$$\frac{a}{b} \approx \frac{r}{s},$$

eli

$$\mathrm{st}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{r}{s}.$$

6: Hyödyntämällä kohtaa 4. n kertaa saadaan

$$\mathrm{st}(a^n) = \mathrm{st}(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{n kappaletta}}) = \underbrace{\mathrm{st}(a) \cdot \mathrm{st}(a) \cdots \mathrm{st}(a)}_{\text{n kappaletta}} = (\mathrm{st}(a))^n.$$

7. Olkoon $b = \sqrt[n]{a}$, jolloin $b^n = a$. Koska a on epänegatiivinen, on myös luku $b \geq 0$. Näin ollen myös luvun b standardiosa on epänegatiivinen, $s \geq 0$. Nyt kohdan 6. nojalla pätee

$$r = \mathrm{st}(a) = \mathrm{st}(b^n) = (\mathrm{st}(b))^n = s^n.$$

Koska r ja s ovat positiivisia reaalilukuja pätee

$$s = \sqrt[n]{r}.$$

8. Olkoon $a \leq b$. Tällöin pätee

$$r + \epsilon \leq s + \delta$$

$$r \leq s + (\delta - \epsilon).$$

Jokaiselle positiiviselle reaaliluvulle $t \in \mathbb{R}$ pätee $\delta - \epsilon < t$, jolloin

$$r \leq s + (\delta - \epsilon) < s + t.$$

Tällöin $r \leq s$. □

Infinitesimaaleista käytetään yleisesti merkintää $\Delta x, \Delta y$.... Luvun alussa pohdimme merkittävyyden rajaa luvuille. Hyperreaalilukujen standardiosat ovat merkittävä työkalu integraali- ja differentiaalilaskennassa. Jos tarkastelemme luvun alussa ollutta yhtälöä

$$2x_0 + \Delta x$$

saadaan standardiosaksi

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(2x_0 + \Delta x) &= \mathrm{st}(2x_0) + \mathrm{st}(\Delta x) \\ &= 2x_0 + 0 \\ &= 2x_0, \end{aligned}$$

mikä on sama kuin paraabelin muutosnopeus kohdassa x_0.

3 Raja-arvo ja jatkuvuus

Hyperreaalilukuja käyttävää analyysin alaa kutsutaan epästandardiksi analyysiksi. Tässä luvussa tarkastelemme funktioiden jatkuvuutta ja derivoituvuutta hyperreaalilukujen avulla. Pääasiallisina lähteinä tässä luvussa on käytetty H. Jerome Keislerin kirjoja Elementary calculus [5] ja Foundation of infinitesimal calculus [4]. Abraham Robinson antoi epästandardille analyysille nimen sillä perusteella, että hän käytti epästandardeja työkaluja analyysin ongelmiin. Epästandardista analyysistä on käytetty myös nimeä infinitesimaalianalyysi, joka kuvaa paremmin sen sisältöä.

3.1 Hyperreaalifunktiot

Reaaliluvuilla funktiot liittävät kaksi reaalilukua lukupariksi.Vastaavasti hyperreaaliluvuilla funktio f, jolla pätee $f(a) = b$ liittää kaksi hyperreaalilukua a ja b lukupariksi. Funktio hyperreaaliluvuille määritellään kuten reaaliluvuillekin.

Esimerkki 3.1. Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ siten, että $f(x) = x$. Kyseessä on siis identtinen funktio hyperreaaliluvuilta hyperreaaliluvuille. Reaaliluvuilla funktio saa reaalilukuarvoja ja hyperreaaliluvuilla arvot ovat hyperreaalilukuja. Esimerkiksi olkoon dx infinitesimaali ja luvut a, b reaalilukuja. Tällöin

$$f(dx) = dx, \quad f(a) = a, \quad f(a + dx) = a + dx \text{ ja } f(a + b) = a + b.$$

Jatkossa reaalifunktiolla tarkoitetaan funktiota reaalilukujen osajoukolta reaalilukujen osajoukolle. Kaksi viimeistä aksioomaa käsittelevät funktioita hypereaaliluvuilla.

$\mathbf{A}_5$**(Funktioaksiooma)**: Jokaiselle reaalifunktiolle f on olemassa vastaava hyperreaalifunktio f^*. Funktiota f^* kutsutaan funktion f luonnolliseksi jatkoksi.

Funktioaksiooma ei vielä takaa sitä, että hyperreaalifunktiot käyttäytyvät samoin kuin reaalifunktiot. Yhden muuttujan reaalifunktion f hyperreaaligraafi on joukko pisteitä (x_0, y_0) siten, että $y_0 = f^*(x_0)$. Funktion f^* hyperreaaliratkaisuilla tarkoitetaan hyperreaalipisteitä (x_0, y_0) joille yhtälö $y = f^*(x)$ pätee. Funktion reaaliratkaisut määritellään vastaavasti.

Esimerkki 3.2. Esimerkin 3.1 funktion f ratkaisuja ovat lukuparit (dx, dx), (a, a), $(a + dx, a + dx)$ ja $(a + b, a + b)$.

A_6(Ratkaisuaksiooma): Olkoot f ja g funktioita, joilla on sama muuttuja. Jos funktioilla f ja g on täsmälleen samat reaaliratkaisut, on niillä myös täsmälleen samat hyperreaaliratkaisut.

Ratkaisuaksiooman avulla saadaan määriteltyä funktion f luonnollinen jatko f^* samalla säännöllä kuin reaalifunktio f on määritelty. Yhtälöiden järjestysrelaatiot säilyvät siirryttäessä reaalifunktiosta f funktion luonnolliseen jatkoon f^*. Ratkaisuaksiooman nojalla, jos funktiolla on ratkaisu kaikilla reaaliluvuilla, niin sillä on ratkaisu myös kaikilla hyperreaaliluvuilla. Ja toisaalta jos funktiolla ei ole yhtään reaaliratkaisua, ei funktiolla ole yhtään hyperreaaliratkaisua. Ratkaisuaksiooman nojalla funktion luonnollisella jatkolla f^* on samat ominaisuudet kuin alkuperäisellä funktiolla f.

Esimerkki 3.3. Reaaliluvulla $x \in \mathbb{R}$ pätee yhtälö

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Ratkaisuaksiooman nojalla yhtälö pätee myös hyperreaaliluvulla $\Delta x \in \mathbb{R}^*$

$$\sin^2(\Delta x) + \cos^2(\Delta x) = 1.$$

Esimerkin 3.3 mukaisia päättelyjä hyödynnetään lauseiden todistuksissa. Eli jos reaaliluvuilla jokin yhtälö pätee, pätee se myös hyperreaaliluvuilla ratkaisuaksiooman nojalla. Seuraava lause seuraa ratkaisuaksioomasta.

Lause 3.4. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaalifunktio.*

1. *Jos r on reaaliluku ja $f(r)$ on määritelty, $f^*(r) = f(r)$.*
2. *Jos r on reaaliluku ja $f(r)$ ei ole määriteltä, $f^*(r)$ ei ole määritelty.*
3. *Jos reaalifunktio f määritellään säännöllä $f(x) = T(x)$, missä $T(x)$ on muuttujasta x riippuva termi, niin luonnollinen jatko f^* määräytyy samalla säännöllä sovellettuna hyperreaaliluvuille.*

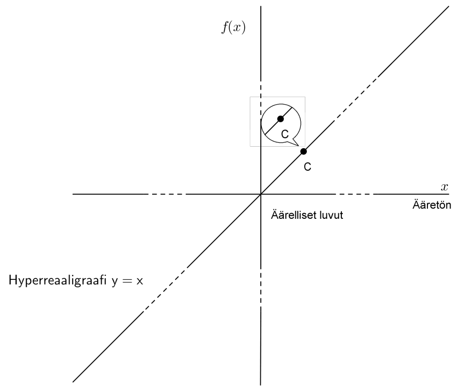
Todistus. 1: Olkoon $c = f(r)$. Yhtälöillä $x = c$ ja $x = f(r)$ on sama reaaliratkaisu ja näin ollen myös sama hyperreaaliratkaisu.
2: Yhtälöllä $x = f(r)$ ei ole reaaliratkaisua, ja näin ollen sillä ei ole hyperreaaliratkaisua, joten $f^*(r)$ ei ole määritelty.
3: Yhtälöillä $y = f(x)$ ja $y = T(x)$ on samat reaaliratkaisut. Tällöin niillä on samat hyperreaaliratkaisut. □

Esimerkki 3.5. Olkoon reaalifunktio $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Yhtälöillä $y = f(x)$ ja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ on samat reaaliratkaisut. Ratkaisuaksiooman nojalla näiden luonnollisilla jatkoilla on samat hyperreaaliratkaisut. Näin ollen funktion f luonnollinen jatko f^* saadaan samalla säännöllä kuin funktio f itse, eli

$$f^*(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

missä määrittelyjoukko on hyperreaaliväli $[-1, 1]$.

Esimerkki 3.6. Olkoon funktio f reaalilukujen identtinen funktio $f(x) = x$. Yhtälöillä $y = f(x)$ ja $y = x$ on sama reaaligraafi $y = x$. Ratkaisuaksiooman nojalla yhtälöllä $y = f(x)$ on sama hyperreaaligraafi kuin yhtälöllä $y = x$. Funktion f^* määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^*$, ja f^* määritellään säännöllä $f^*(x) = x$. Kuvassa 2.1 nähdään funktion f^* graafi. Kun pisteessä C käytetään mielivaltaisen tarkkaa mikroskooppia, nähdään, että graafi on yhtenäinen suora.



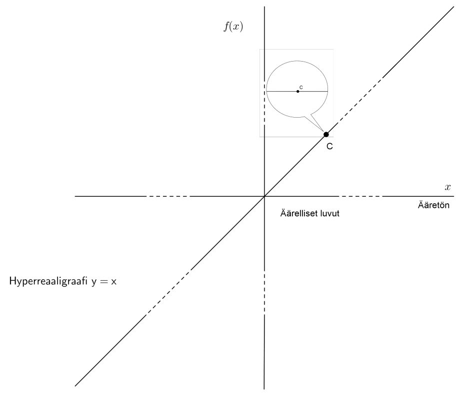
Kuva 2.1: Funktion f^* graafi.

Funktio $f^*(x) = x$ on siis funktion $f(x) = x$ luonnollinen jatko. On kuitenkin olemassa toinen hyperreaalifunktio, jolla on samat reaaliratkaisut, kuin identtisellä funktiolla $f(x) = x$.

Esimerkki 3.7. Tarkasteltaessa standardiosafunktiota $\mathrm{st}(x)$,

$$f^*(x) = \mathrm{st}(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^*.$$

Standardiosafunktion määrittelyjoukko on äärelliset hyperreaaliluvut, kun taas funktion $f^*(x) = x$ määrittelyjoukko on kaikki hyperreaaliluvut. Jos x on äärellinen, mutta ei reaaliluku, $f^*(x) = x$, mutta $\mathrm{st}(x) \neq x$. Alla kuvassa 2.2 on esitettynä standardiosafunktion gaafi. Käyttämällä mielivaltaisen tarkkaa mikroskooppia kohdassa $x = c \in \mathbb{R}$, nähdään kuvaajan olevan vaakasuora, kun taas identtisen funktion jyrkkyys on koko määrittelyvälillä 45°. Standardiosafunktio ei ole minkään funktion luonnollinen jatko.



Kuva 2.2: Standardiosafunktion graafi.

3.2 Raja-arvo

Määriteltäessä raja-arvoa reaaliluvuille joudutaan määritelmässä käyttäämään lukuja ϵ ja δ. Näiden lukujen avulla saadaan ilmaistua, milloin kaksi lukua ovat riittävän lähellä toisiaan. Käytettäessä hyperreaalilukuja riittää tarkastella, milloin luvut ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan. Määritellään seuraavaksi raja-arvo hyperreaalilukujen avulla, kun funktio f ja raja-arvo L ovat reaalisia.

Määritelmä 3.8. Luku L on funktion f raja-arvo, kun x lähestyy lukua c, jos luvun x ollessa mielivaltaisen lähellä lukua c ja $x \neq c$, funktion arvo $f(x)$ on mielivaltaisen lähellä lukua L.

Jos määritelmä kirjoitetaan auki saadaan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

jos $f(x) \approx L$, kun x on mielivaltaisen lähellä lukua c, $x \approx c$, mutta $x \neq c$.

Määritelmästä on hyvä huomata, että raja-arvo ei riipu funktion arvosta kohdassa c, vaan se riippuu funktion arvoista mielivaltaisen lähellä kohtaa c. On siis mahdollista, että raja-arvo on olemassa, vaikka $f(c)$ ei olisi määritelty.
Tarkasteltaessa raja-arvoa

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

on symboli x esimerkki valemuuttujasta. Raja-arvo L riippuu ainoastaan luvusta c, eikä luvusta x. Näin ollen voidaan määritellä uusi funktio korvaamalla luku c muuttujalla u ja määrittelemällä

$$L(u) = \lim_{x \to u} f(x).$$

Määritettäessä raja-arvoja voidaan käyttää standardiosaa hyödyksi. Määritelmän nojalla jos $\mathrm{st}(f(x)) = L$ kaikilla x mielivaltaisen lähellä lukua c, mutta $x \neq c$, niin

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Osoitettaessa raja-arvon olemassaoloa tai määritettäessä raja-arvoa voidaan usein käyttää kaksivaiheista ratkaisua. Ensimmäisessä vaiheessa x on hyperreaaliluku, joka on mielivaltaisen lähellä lukua c. Tämän jälkeen funktio f muokataan muotoon, josta voidaan laskea standardiosa. Toisessa vaiheessa lasketaan standardiosa, jolloin saamme raja-arvon L kohdassa c.

Esimerkki 3.9. Määritetään raja-arvo $\lim_{t \to 4}(3t^2 + t + 1)$.
Vaihe 1: Olkoon t hyperreaaliluku siten, että $t \approx 4$, mutta $t \neq 4$. Luku t on siis muotoa $4 + \epsilon$, missä ϵ on positiivinen tai negatiivinen infinitesimaali.
Vaihe 2:

$$\begin{aligned}
\mathrm{st}(3t^2 + t + 1) &= \mathrm{st}(3t^2) + \mathrm{st}(t) + \mathrm{st}(1) \\
&= 3\,\mathrm{st}((4+\epsilon)^2) + \mathrm{st}(4+\epsilon) + \mathrm{st}(1) \\
&= 3\,\mathrm{st}(16 + 8\epsilon + \epsilon^2) + \mathrm{st}(4+\epsilon) + \mathrm{st}(1) \\
&= 3 \cdot 16 + 4 + 1 \\
&= 53.
\end{aligned}$$

Näin ollen saamme raja-arvoksi $\lim_{t \to 4}(3t^2 + t + 1) = 53$.

Esimerkissä 3.9 ei tarvitse vaiheessa 1 muokata funktiota, jotta standardiosa voitaisiin laskea. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan funktiota, josta standardiosaa ei voi suoraan laskea.

Esimerkki 3.10. Määritetään seuraavaksi raja-arvo $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.
Vaihe 1 : Olkoon x hyperreaaliluku siten, että $x \approx -1$, mutta $x \neq -1$. Lauseketta voidaan muokata seuraavasti

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} = x + 1.$$

Vaihe 2 : Lasketaan standardiosa $\mathrm{st}(x + 1)$. Koska $x \approx -1$, on luku x muotoa $x = -1 + \epsilon$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{st}(x+1) &= \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(1) \\
&= \mathrm{st}(-1 + \epsilon) + \mathrm{st}(1) \\
&= -1 + 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen raja-arvoksi saadaan $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$.

Huomautus 3.11. Raja-arvoa $\lim_{x \to c} f(x)$ ei aina ole olemassa. Tälläisia tapauksia on kolmea eri lajia

1. $f(x)$ ei ole määritelty jollakin x, jolle pätee $x \approx c$ ja $x \neq c$,

2. $f(x)$ on ääretön jollakin x, jolle pätee $x \approx c$ ja $x \neq c$,

3. standardiosa $\mathrm{st}(f(x))$ saa eri arvon muuttujan x arvoilla, joille pätee $x \approx c$ ja $x \neq c$.

Esimerkki 3.12. Raja-arvoa $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ ei ole olemassa, koska funktiota $f(x) = \sqrt{x}$ ei ole määritelty negatiivisilla infinitesimaaleilla.

Määritellään seuraavaksi mitä tarkoittavat toispuoleiset raja-arvot.

Määritelmä 3.13. Funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa $x = c$ on raja-arvo

$$\lim_{x \to c+} f(x) = L$$

jos $f(x) \approx L$ kun $x \approx c$ ja $x > c$.

Vasemman puoleinen raja-arvo saadaan määriteltyää vastaavasti.

Määritelmä 3.14. Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa $x = c$ on raja-arvo

$$\lim_{x \to c-} f(x) = L$$

jos $f(x) \approx L$ kun $x \approx c$ ja $x < c$.

Raja-arvo saadaan määritettyä käyttämällä toispuoleisia raja-arvoja. Seuraava tulos on kuitenkin käytännöllinen erityisesti silloin, kun raja-arvoa ei ole olemassa.

Lause 3.15. *Raja-arvo*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

on olemassa jos ja vain jos molemmat toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x) = L.$$

Todistus. Jos raja-arvo $\lim_{x \to c} f(x) = L$ on olemassa, seuraa suoraan määritelmästä, että molemmat toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja raja-arvot saavat arvon L. Oletetaan seuraavaksi, että molemmat toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja molemmat saavat arvo L. Nyt jos $x < c$, saadaan $f(x) \approx L$, koska $\lim_{x \to c-} f(x) = L$. Toisaalta, jos $x > c$, saadaan $f(x) \approx L$, koska $\lim_{x \to c+} f(x) = L$. Molemmissa tapauksissa $f(x) \approx L$ ja näin ollen määritelmän nojalla $\lim_{x \to c} f(x) = L$. □

Esimerkki 3.16. Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ raja-arvoa $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$. Tarkastellaan ensin oikean puoleista raja-arvoa. Olkoon $x \approx 0$ ja $x > 0$. Standardiosaksi saadaan

$$\operatorname{st}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{0+\epsilon}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Nyt kuitenkin luku $\frac{1}{\epsilon}$ on ääretön luku, eikä äärettömällä luvulla ole standardiosaa. Näin ollen raja-arvoa ei ole olemassa.
Samoin käy jos tarkastellaan vasemman puoleista raja-arvoa. Olkoon $x \approx 0$ ja $x < 0$. Standardiosaksi saadaan

$$\operatorname{st}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{0-\epsilon}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{-\epsilon}\right) = -\operatorname{st}\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Kuten edellä, standardiosaa ei ole määritelty, eikä raja-arvoa ole olemassa. Näin ollen funktiolla $f(x) = \frac{1}{x}$ ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 0$.

Hyperreaalilukujen avulla saadaan osoitettua tutut raja-arvon laskusäännöt käyttämällä standardiosan laskusääntöjä.

Lause 3.17. *Oletetaan, että raja-arvot*

$$\lim_{x \to c} f(x) \text{ } ja \text{ } \lim_{x \to c} g(x)$$

ovat olemassa.

1. *Jokaisella vakiolla* $k \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to c} k f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$.

2. $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$.

3. $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = (\lim_{x \to c} f(x)) \cdot (\lim_{x \to c} g(x))$.

4. Jos $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, *niin* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.

5. Jos $\lim_{x\to c} f(x) > 0$, *niin jokaiselle luonnolliselle luvulle* $n \in \mathbb{N}$
$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$.

Todistus. Kaikki lauseen kohdat saadaan todistettua käyttämällä standardiosan laskusääntöjä. Todistetaan kohdat 1 ja 2. Muut kohdat todistetaan vastaavasti. Olkoon $x \approx c$, mutta $x \neq c$.
1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} kf(x) &= \mathrm{st}(kf(x)) \\ &= k\,\mathrm{st}(f(x)) \\ &= k \lim_{x\to c} f(x).\end{aligned}$$

2 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) &= \mathrm{st}(f(x)+g(x)) \\ &= \mathrm{st}(f(x)) + \mathrm{st}(g(x)) \\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)\end{aligned}$$

□

Lauseen 3.17 nojalla raja-arvo saadaan laskettua määrittelemällä raja-arvo paloittain.

Esimerkki 3.18. Määritetään raja-arvo $\lim_{t\to 0} \frac{t^3 - 2t^2 + 4}{3t^3 - 5t + 7}$. Tarkastellaan ensin osoittajan raja-arvoa $\lim_{t\to 0}(t^3 - 2t^2 + 4)$. Olkoon $t \approx 0$, mutta $t \neq 0$. Standardiosaksi saadaan

$$\mathrm{st}(t^3 - 2t^2 + 4) = 0 - 0 + 4 = 4.$$

Näin ollen osoittajan raja-arvo, kun $t \to 0$, on 4.
Seuraavaksi määritetään nimittäjän $3t^3 - 5t + 7$ raja-arvo $\lim_{t\to c}(3t^3 - 5t + 7)$. Olkoon $t \approx 0$, mutta $t \neq 0$. Standardiosaksi saadaan

$$\mathrm{st}(3t^3 - 5t + 7) = 0 - 0 + 7 = 7.$$

Sekä osoittajalla että nimittäjällä on raja-arvot, kun $t \to 0$. Näin ollen lauseen 3.17 kohdan 4 nojalla raja-arvo $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3 - 2t^2 + 4}{3t^3 - 5t + 7}$ on olemassa ja raja-arvo on

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^3 - 2t^2 + 4}{3t^3 - 5t + 7} = \frac{4}{7}.$$

3.3 Jatkuvuus

Intuitiivisesti funktion f jatkuvuus tarkoittaa sitä, että sen kuvaaja $y = f(x)$ on katkeamaton käyrä. Toisin sanoen, kun luku x_1 on lähellä lukua x_2, ovat luvut $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ lähellä toisiaan. Korvaamalla termi "lähellä"termillä "mielivaltaisen lähellä", saadaan muodostettua intuitiivinen idean jatkuvuuden määritelmäksi.

Määritelmä 3.19. Funktio f on jatkuva kohdassa c, jos

1. f on määritelty kohdassa c,
2. luvun x ollessa mielivaltaisen lähellä lukua c, luku $f(x)$ on mielivaltaisen lähellä lukua $f(c)$.

Mikäli funktio f ei ole jatkuva kohdassa c, sanotaan funktion olevan epäjatkuva kohdassa c. Funktion jatkuvuus voidaan ilmaista raja-arvon avulla.

Lause 3.20. *Funktio f on jatkuva kohdassa c, jos ja vain jos*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Todistus. Lause seuraa suoraan jatkuvuuden määritelmästä. Jos f on jatkuva, on se määritelty kohdassa c. Lisäksi kun x on mielivaltaisen lähellä lukua c, eli $x \approx c$, ovat luvut $f(x)$ ja $f(c)$ mielivaltaisen lähellä toisiaan. Näin ollen raja-arvon määritelmän nojalla $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Jos oletetaan, että $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, niin jokaisella x jolle $x \approx c$, pätee $f(x) \approx f(c)$. Näin ollen jatkuvuuden määritelmän nojalla funktio f on jatkuva. □

Hyödyntämällä lausetta 3.20 saadaan osoitettua jatkuville funktioille tutut tulokset.

Lause 3.21. *Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia kohdassa c.*

1. *Jokaisella vakiolla k funktio $kf(x)$ on jatkuva kohdassa c.*
2. *Summafunktio $f(x) + g(x)$ on jatkuva kohdassa c.*
3. *Tulofunktio $f(x) \cdot g(x)$ on jatkuva kohdassa c.*

4. *Jos* $g(c) \neq 0$, *niin funktio* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *on jatkuva kohdassa* c.

5. *Jos* $f(c)$ *on positiivinen ja* n *luonnollinen luku, nin* $\sqrt[n]{f(x)}$ *on jatkuva kohdassa* c.

Todistetaan seuraavaksi lauseesta kohdat 1 ja 3. Muut kohdat todistetaan vastaavasti.

Todistus. Lause seuraa suoraan lauseesta 3.17 ja lauseesta 3.20. Koska funktiot f ja g ovat jatkuvia, on niillä olemassa raja-arvot

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \text{ ja } \lim_{x \to c} g(x) = g(c).$$

1: Lauseen 3.20 nojalla funktio $k \cdot f(x)$ on jatkuva, jos ja vain jos

$$\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot f(c).$$

Nyt lauseen 3.17 nojalla

$$\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \lim_{x \to c} f(x) = k \cdot f(c).$$

Näin ollen funktio $k \cdot f(x)$ on jatkuva kohdassa $x = c$.
3: Lauseen 3.20 nojalla funktio $f(x) \cdot g(x)$ on jatkuva jos ja vain jos

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = f(c) \cdot g(c).$$

Nyt lauseen 3.17 nojalla

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = f(c) \cdot g(c).$$

□

Lauseen 3.21 avulla saadaan paljon jatkuvia funktioita. Esimerkiksi kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia, koska identtinen funktio $f(x) = x$ on jatkuva. Pelkästään raja-arvon olemassaolo ei riitä jatkuvuuteen. Funktiolla voi olla raja-arvo kohdassa $x = c$, ilman, että funktio on määritelty kohdassa $x = c$. Funktio voidaan tehdä jatkuvaksi määrittelemällä kohdassa $x = c$ funktion arvoksi raja-arvo $\lim_{x \to c} f(x)$.

Esimerkki 3.22. Esimerkiksi funktiolla $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ on olemassa raja-arvo $\lim_{x \to 3} f(x)$, mutta funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 3$. Raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 1) = 4.$$

Funktiosta saadaan jatkuva määrittelemällä se paloittain

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}, & \text{kun } x \neq 3 \\ 4, & \text{kun } x = 3. \end{cases}$$

Yhdistettyjen funktioiden kohdalla jatkuvuudelle pätee seuraava tulos.

Lause 3.23. *1. Jos $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ja funktio g on jatkuva kohdassa L, niin*

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(L).$$

2. Jos funktio f on jatkuva kohdassa c ja funktio g on jatkuva kohdassa $f(c)$, niin yhdistetty funktio

$$h(x) = g(f(x))$$

on jatkuva kohdassa c.

Todistus. 1 : Olkoon x mielivaltaisen lähellä lukua c, mutta $x \neq c$. Olkoon lisäksi $y = f(x)$. Koska funktio g on jatkuva, $g(y) \approx g(L)$ kun $y \approx L$. Näin ollen yhtäsuuruus $\operatorname{st} g(y) = g(\operatorname{st} y)$ pätee. Tällöin $\operatorname{st}(y) = L$, ja

$$g(L) = g(\operatorname{st}(y)) = \operatorname{st}(g(y)) = \operatorname{st}(g(f(x))) = \lim_{x \to c} g(f(x)).$$

2 : Kun $L = f(c)$, saadaan kohdan 1 nojalla

$$h(c) = g(f(c)) = \lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{x \to c} h(x),$$

jolloin h on jatkuva kohdassa c. $\square$

Lauseen 3.23 nojalla jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio on jatkuva.

Usein jatkuvuutta halutaan tarkastella tietyssä joukossa pisteittäisen tarkastelun sijaan. Määritellään suoraavaksi milloin funktio on jatkuva avoimella välillä ja sen jälkeen suljetulla välillä.

Määritelmä 3.24. Funktio f on jatkuva avoimella välillä I, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $c \in I$.

Toisin sanoen

$$f(\operatorname{st}(x)) = \operatorname{st}(f(x))$$

jokaisella hyperreaaliluvulla x siten, että $\operatorname{st}(x) \in I$. Määritelmä koskee siis jatkuvuutta vain avoimella välillä (a, b). Jotta saamme tästä jatkuvuuden suljetulla välillä $[a, b]$ tulee funktion olla toispuoleisesti jatkuva kohdissa a ja b.

Määritelmä 3.25. 1. Funktio f on oikealta puolelta jatkuva kohdassa c, jos

$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c).$$

2. Funktio f on vasemmalta puolelta jatkuva kohdassa c, jos

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c).$$

Määritelmä 3.26. Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ jos ja vain jos f on jatkuva jokaisella c siten, että $a < c < b$, siis jatkuva oikealta kohdassa a ja jatkuva vasemmalta kohdassa b.

Määritellään ennen seuraavaa tulosta hyperkokonaisluvut.

Määritelmä 3.27. Kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ luonnollista laajennusta $\mathbb{Z}^*$ kutsutaan hyperkokonaislukujen joukoksi.

Hyperkokonaislukujen ja reaalilukujen joukkojen leikkaus on kokonaislukujen joukko, $\mathbb{Z}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$. Näin ollen äärellisten hyperkokonaislukujen joukko on sama kuin kokonaislukujen joukko. Ainoa ero näiden kahden joukon välillä on äärettömät hyperkokonaisluvut. Seuraava lause takaa, että on olemassa ääretön hyperkokonaisluku. Lauseen todistus on esitetty teoksessa Foundation of infinitesimal calculus [4] sivulla 48.

Lause 3.28. *On olemassa positiivinen ja negatiivinen ääretön hyperkokonaisluku.*

Tavoitteena on saada väli $[a, b]$ jaettua äärettömän moneen osaväliin siten, että osavälien pituus on infinitesimaali. Kun luvut x ja y ovat hyperreaalilukuja, kutsutaan joukkoa

$$[x, y]^* = \{z \in \mathbb{R}^* : x \leq z \leq y\}$$

suljetuksi hyperreaaliväliksi. Jos $a \leq x \leq z \leq y \leq b$, väli $[x, y]^*$ on välin $[a, b]^*$ hyperreaaliosaväli. Kuten funktioiden tapauksessa, jätetään tähtimerkintä väleistä pois $[a, b]^* = [a, b]$. Annetulle hyperkokonaisluvulle $H > 0$ voidaan hyperreaaliväli $[a, b]$ jakaa osaväleihin, joiden pituus on $\delta = \dfrac{b-a}{H}$. Tällöin välin jakopisteet ovat

$$a, a + \delta, a + 2\delta, ..., a + K\delta, ..., a + H\delta,$$

missä $0 \leq K \leq H$. Jos hyperkokonaisluku H on ääretön, jokaisen osavälin pituus $\delta = \dfrac{b-a}{H}$ on infinitesimaali. Tälläista välin $[a, b]$ jakoa kutsutaan äärettömäksi jaoksi. Todistetaan seuraavaksi Bolzanon lauseena tunnettu tulos. Verrattaessa todistusta todistukseen [6, s.48-50], saadaan standardiosaa hyödyntämällä todistus selkeästi lyhyempään muotoon.

Lause 3.29. *Olkoon reaalifunktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Tällöin jokaisella reaaliluvulla D, lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä, on olemassa luku $c \in [a, b]$ siten, että $f(c) = D$.*

Todistus. Voidaan olettaa, että $f(a) \leq f(b)$. Lause pätee jos $D = f(a)$ tai $D = f(b)$. Näin ollen voidaan olettaa, että $a < b$ ja $f(a) < D < f(b)$. Jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin siten, että

$$a, a + \delta, a + 2\delta, ..., a + n\delta = b,$$

missä $\delta = \dfrac{b-a}{n}$. Funktion f on ylitettävä arvo D ainakin yhdellä osavälillä, joten on olemassa luku m siten, että $0 \leq m < n$,

$$f(a + m\delta) \leq D \leq f(a + (m+1)\delta).$$

Olkoon luku n_1 ääretön ja kokonaisluku. Tällöin luku $\delta_1 = \dfrac{b-a}{n_1}$ on infinitesimaali. On olemassa luku m_1 siten, että yllä oleva kaksoisepäyhtälö pätee. Olkoon $c = \mathrm{st}(a + m_1\delta_1)$. Tällöin

$$a \leq a + m_1\delta_1 \leq a + (m+1)\delta_1 \leq a + n_1\delta_1 = b,$$

joten $a \leq c \leq b$. Koska funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, saadaan

$$f(c) = \mathrm{st}(f(a + m_1\delta_1)) \leq D$$

ja

$$f(c) = \mathrm{st}(f(a + (m_1+1)\delta_1)) \geq D.$$

Näin ollen tulee olla, että $f(c) = D$. $\square$

4 Derivaatta

4.1 Derivaatan määritelmä

Luvun 2 alussa määriteltiin paraabelille $y = x^2$ keskimääräinen muutosnopeus. Määritettäessä keskimääräistä muutosnopeutta muodostettiin sekanttisuora, joka kulki pisteiden (x_0, y_0) ja $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ kautta. Mikäli muutos Δx on hyvin pieni, on sekanttisuora hyvin lähellä käyrän tangenttia kohdassa x_0. Tässä luvussa pääasiallisina lähteinä on käytetty Keislerin kirjaa Elementary calculus [5] sekä James M. Henlen ja Eugene M. Kleinbergin kirjaa Infinitesimal calculus [3].

Määritelmä 4.1. Reaaliluku S on funktion f muutosnopeus kohdassa a, jos

$$S = \mathrm{st}\left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right)$$

jokaisella infinitesimaalilla $\Delta x \neq 0$.

Huomautus 4.2. Funktiolla f ei aina välttämättä ole muutosnopeutta kohdassa a. Erilaisia tilanteita on kaikkiaan viisi.

1. Funktion f muutosnopeus on olemassa, jos osamäärä

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

   on äärellinen ja standardiosa saa saman arvon kaikilla infinitesimaaleilla Δx.

2. Funktiolla ei ole muutosnopeutta kohdassa a, jos funktiota ei ole määritelty kohdassa a.

3. Funktiolla ei ole muutosnopeutta kohdassa a, jos $f(a + \Delta x)$ ei ole määritelty jollain infinitesimaalilla Δx.

4. Funktiolla ei ole muutosnopeutta kohdassa a, jos osamäärä $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ on ääretön jollain infinitesimaalilla $\Delta x \neq 0$.

5. Funktiolla ei ole muutosnopeutta kohdassa a, jos osamäärän $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ standardiosa ei ole sama kaikilla infinitesimaaleilla $\Delta x \neq 0$.

Vaihtamalla vakio a muuttujaksi x saadaan määritettyä muutosnopeus eri muuttujan arvoilla. Näin saamme funktion f derivaattafunktion f'.

Määritelmä 4.3. Olkoon f yksimuuttujainen reaalifunktio. Funktion f derivaattafunktio on funktio f', jonka arvo kohdassa x on funktion f muutosnopeus kohdassa x.

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right),$$

kun muutosnopeus on olemassa.

Määritelmässä on korvattu reaalilukujen derivaatan raja-arvo standardiosalla. Jatkossa puhuttaessa muutosnopeudesta jossain tietyssä kohdassa a käytetään termiä derivaatta kohdassa a.

Määritettäessä derivaattaa käyrällä $y = f(x)$, on muuttuja x riippumaton muuttuja ja muuttuja y riippuu muuttujasta x. Tämän lisäksi tarvitaan uudet muuttujat Δx ja Δy. Muuttuja Δx on riippumaton muuttuja ja muuttuja Δy on riippuvainen muuttujista x ja Δx,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Koska funktio f on reaalifunktio, yhtälö määrittää muuttujan Δy kahden reaaliluvun avulla. Derivaattaa määritettäessä haluamme kuitenkin, että Δx on infinitesimaali. Ratkaisuaksiooman nojalla yhtälö antaa muuttujan Δy myös kahden muuttujan hyperreaalifunktiona. Riippuvaa muuttujaa Δy kutsutaan muuttujan y inkrementiksi. Geometrisesti se vastaa muutosta käyrällä kun muuttuja x muuttuu arvolla Δx. Symbolilla y' voidaan merkitä derivaattaa $y' = f'(x)$. Nyt voimme kirjoittaa yhtälön

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right)$$

muodossa

$$y' = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

Esimerkki 4.4. Määritetään funktion $f(x) = x^4$ derivaatta. Olkoon $\Delta x \neq 0$ infinitesimaali.

$$\begin{cases} y &= x^4 \\ y + \Delta y &= (x+\Delta x)^4 \end{cases}$$

Tästä saadaan

$$\Delta y = (x+\Delta x)^4 - x^4.$$

Jakamalla yhtälö molemminpuolin luvulla Δx saamme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}.$$

Sievennetään lauseke muotoon

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= 4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Tästä saadaan otettua standardiosa

$$\mathrm{st}(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = \mathrm{st}(4x^3) + \mathrm{st}(6x^2\Delta x) + \mathrm{st}(4x(\Delta x)^2) + \mathrm{st}((\Delta x)^3)$$

$$= 4x^3 + 0 + 0 + 0$$

$$= 4x^3.$$

Näin ollen saadaan funktion $f(x) = x^4$ derivaataksi funktio $f'(x) = 4x^3$.

Käyrälle $y = f(x)$ saadaan määritettyä tangentti käyrän pisteessä (a, b) yhtälön

$$l(x) = f'(a)(x - a) + b$$

avulla, kun $f'(a)$ on olemassa.

Kun muuttuja x muuttuu arvosta $x = a$ arvoon $x = a + \Delta x$, on muuttujan x muutos Δx. Tällöin muuttujan y arvon muutos on $f(a+\Delta x) - f(a) = \Delta y$. Tangenttisuoralla muuttujan x muutos on sama kuin käyrällä, mutta entä muuttujan y muutos? Tangenttisuoralla muutos on

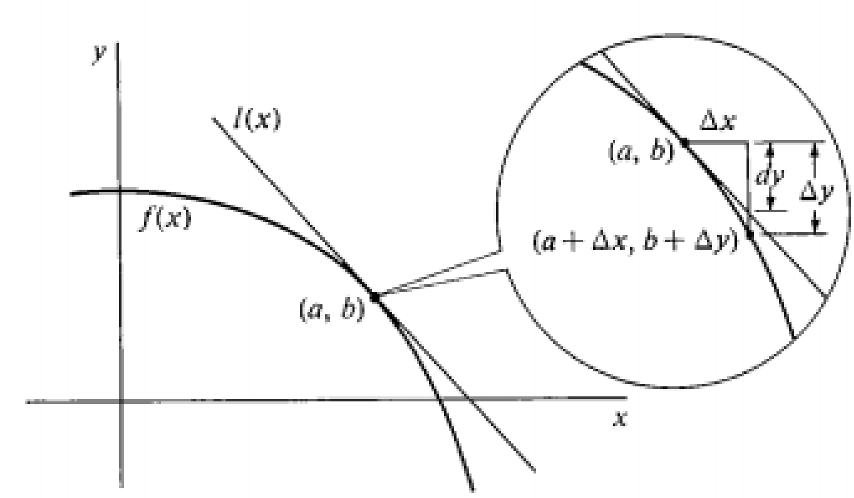
$$l(a + \Delta x) - l(a) = (f'(a)(a + \Delta x - a) + b) - (f'(a)(a - a) + b)$$

$$= f'(a)\Delta x.$$

Nyt otamme käyttöön uuden riippuvan muuttujan y:n differentiaalin dy, joka määritellään

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Muuttujan x differentiaali dx on sama asia kuin Δx. Muuttujan y differentiaali dy on siis muuttujan y arvon muutos käyrän tangentilla, kun taas inkrementti Δy on muuttujan y muutos käyrällä. Kuvassa 2.3 näkyy differentiaalin dy ja inkrementin Δy ero mielivaltaisen tarkan mikroskoopin avulla katsottuna.



Kuva 2.3: Muuttujat dy ja Δy mielivaltaisen tarkan mikroskoopin avulla katsottuna s. 82 [5].

Määritelmä 4.5. Oletetaan, että muuttuja y riippuu muuttujasta x siten, että $y = f(x)$.

1. Muuttujan x differentiaali on riippumaton muuttuja $dx = \Delta x$.
2. Muuttujan y differentiaali on riippuva muuttuja dy, joka määritellään

$$dy = f'(x)dx.$$

Jos oletetaan, että $dx \neq 0$, voidaan määritelmän yhtälö jakaa luvulla dx. Tällöin saadaan

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Saamme siis vaihtoehtoisen merkinnän derivaatalla $f'(x)$. Jos tätä verrataan aiemmin esiintyneeseen yhtälöön

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x),$$

huomataan merkinnän $\dfrac{dy}{dx}$ olevan tarkempi derivaatan määrittämisessä. Differentiaali dy riippuu kahdesta riippumatomasta muuttujasta x ja Δx. Näin ollen

$$dy = df(x, \Delta x),$$

missä df kahden muuttujan reaalifunktio, joka on määritelty yhtälöllä

$$df(x, \Delta x) = f'(x)dx.$$

Intuitiivisesti ajateltuna lähellä kohtaa, jossa derivaatta $f'(x)$ on olemassa, tangentilla ja käyrällä on lähes sama suunta. Näin ollen differentiaali dy tulisi olla hyvin lähellä inkrementtiä Δy. Kun inkrementti Δx on infinitesimaali, ovat myös inkrementti Δy ja differentiaali dy infinitesimaaleja. Koska sekä dy että Δy ovat infinitesimaaleja, ovat ne mielivaltaisen lähellä toisiaan. Todistetaan seuraavaksi inkrementtilause, joka osoittaa inkrementin Δy ja differentiaalin dy olevan mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Lause 4.6. *Olkoon $y = f(x)$. Oletetaan, että derivaatta $f'(x)$ on olemassa kohdassa $x = x_0$, ja että Δx on infinitesimaali. Tällöin Δy ja dy ovat infinitesimaaleja. Lisäksi*

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x = dy + \epsilon\Delta x,$$

jollain infinitesimaalilla ϵ, joka riippuu muuttujista x ja Δx

Todistus. Jos $\Delta x = 0$, saadaan $\Delta y = 0$. Tällöin voidaan valita $\epsilon = 0$. Olkoon $\Delta x \neq 0$ ja

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0).$$

Tällöin ϵ on infinitesimaali. Kerrotaan yhtälö luvulla Δx, jolloin saadaan

$$\epsilon\Delta x = \Delta y - f'(x_0)\Delta x.$$

Tästä saamme halutun muodon

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x.$$

□

Esimerkki 4.7. Olkoon $y = x^4$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Delta y &= 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4\\ &= 4x^3\Delta x + (6x^2(\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)\Delta x\\ &= 4x^3\Delta x + \epsilon\Delta x,\end{aligned}$$

missä $\epsilon = 6x^2(\Delta x)+4x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ on infinitesimaali. Tästä saadaan $dy = 4x^3\Delta x$.

4.2 Rationaalifunktioiden derivointi

Todistetaan seuraavaksi tutut derivointisäännöt reaalisille rationaalifunktioille epästandardin analyysin avulla. Määritetään ensin lineaarisen funktion derivaatta.

Lause 4.8. *Lineaarisen funktion $f(x) = bx + c$ derivaatta on*

$$\frac{d(bx+c)}{dx} = b, \qquad d(bx+c) = bdx.$$

Todistus. Olkoon $y = bx + c$, ja olkoon $\Delta x \neq 0$ infinitesimaali. Tällöin

$$\begin{aligned}
y + \Delta y &= b(x + \Delta x) + c \\
\Delta y &= (b(x + \Delta x) + c) - (bx + c) \\
\Delta y &= b\Delta x \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{b\Delta x}{\Delta x} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= b.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{st}(b) = b$. Kertomalla yhtälö differentiaalilla dx, saadaan $dy = bdx$.

□

Seuraavaksi osoitetaan derivoinnin summasääntö, funktioiden summan derivaatta on yhtäsuuri kuin derivaattojen summa.

Lause 4.9. *Olkoon funktiot u ja v riippuvia riippumattomasta muuttujasta x. Tällöin kaikilla muuttujan x arvoilla, joilla derivaatat $\frac{du}{dx}$ ja $\frac{dv}{dx}$ ovat olemassa, pätee*

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \qquad d(u+v) = du + dv.$$

Todistus. Olkoon $y = u + v$, ja $\Delta x \neq 0$ infinitesimaali. Tällöin

$$\begin{aligned}
y + \Delta y &= (u + \Delta u) + (v + \Delta v) \\
\Delta y &= ((u + \Delta u) + (v + \Delta v)) - (u + v) \\
\Delta y &= \Delta u + \Delta v \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi otetaan standardiosat

$$\mathrm{st}(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = \mathrm{st}(\frac{\Delta u}{\Delta x}) + \mathrm{st}(\frac{\Delta v}{\Delta x}).$$

Näin ollen saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

□

Seuraava lause osoitta, että vakio voidaan jättää derivaattaa laskiessa derivaatan ulkopuolelle.

Lause 4.10. *Olkoon funktio u riippuvainen muuttujasta x, ja $c \in \mathbb{R}$ reaaliluku. Tällöin jokaisella muuttujan x arvolla, jolla $\frac{du}{dx}$ on olemassa,*

$$\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}, \quad d(cu) = cdu.$$

Todistus. Olkoon $y = cu$ ja $\Delta x \neq 0$ infinitesimaali. Tällöin

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= c(u + \Delta u) \\ \Delta y &= c(u + \Delta u) - cu \\ \Delta y &= c\Delta u \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{c\Delta u}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= c\frac{\Delta u}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi otetaan standardiosat:

$$\mathrm{st}(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = \mathrm{st}(c\frac{\Delta u}{\Delta x}) = c\,\mathrm{st}(\frac{\Delta u}{\Delta x}).$$

Näin ollen

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx}.$$

□

Verrataessa lauseiden 4.9 ja 4.10 todistuksia Robert Adamsin esittämiin todistuksiin teoksessa Calculus [1], havaitaan epästandardin analyysin todistusten olevan pidempiä ja monivaiheisempia. Raja-arvon ansiosta vältytään standardiosan laskemiselta, jolloin yksi välivaihe jää kokonaan pois. Toisaalta epästandardissa analyysissä raja-arvoa ei tarvita määritettäessä derivaattaa. Näin ollen raja-arvo voitaisiin määritellä vasta derivaatan jälkeen.

Lause 4.11. *Olkoon funktiot u ja v riippuvaisia muutujasta x. Tällöin kaikilla muuttujan x arvoilla, joilla derivaatat $\frac{du}{dx}$ ja $\frac{dv}{dx}$ ovat olemassa,*

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \quad d(uv) = udv + vdu.$$

Todistus. Olkoon $y = uv$, ja $\Delta x \neq 0$ infinitesimaali.

$$\begin{aligned}
y + \Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) \\
\Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \\
\Delta y &= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Inkrementtilauseen nojalla Δu on infinitesimaali, joten standardiosaksi saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{st}(\frac{\Delta y}{\Delta x}) &= \operatorname{st}(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}) \\
&= u\operatorname{st}(\frac{\Delta v}{\Delta x}) + v\operatorname{st}(\frac{\Delta u}{\Delta x}) + 0 \cdot \operatorname{st}(\frac{\Delta v}{\Delta x}).
\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

□

Tällä hetkellä voidaan derivoida ensimmäisen asteen polynomifunktioita. Seuraava tulos potenssin derivoimissääntö mahdollistaa korkeamman asteen polynomifunktioiden derivoinnin.

Lause 4.12. *Olkoon funktio u riippuvainen muuttujasta x, ja luku $n \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Kaikilla muuttujan x arvoilla, joilla derivaatta $\frac{du}{dx}$ on olemassa,*

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \qquad d(u^n) = nu^{n-1}du.$$

Todistus. Todistetaan lause käyttämällä induktiota.
$n = 1$: Kun $n = 1$ lause pätee

$$\frac{d(u^n)}{dx} = \frac{du}{dx} = 1 \cdot u^0 \cdot \frac{du}{dx}.$$

Oletetaan, että lause pätee jollain luonnollisella luvulla m. Näin ollen pätee siis

$$\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että lause pätee luonnollisella luvulla $m+1$ hyödyntämällä lausetta 4.11

$$\begin{aligned}\frac{d(u^{m+1})}{dx} &= \frac{d(u \cdot u^m)}{dx} \\ &= u\frac{d(u^m)}{dx} + u^m\frac{du}{dx} \\ &= u \cdot mu^{m-1}\frac{du}{dx} + u^m\frac{du}{dx} \\ &= (m+1)u^m\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\frac{d(u^{m+1})}{dx} = (m+1)u^m\frac{du}{dx}.$$

□

Nyt voidaan siis derivoida korkeamman asteen polynomifunktioita, käyttämättä määritelmää.

Esimerkki 4.13. Olkoon funktio $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$. Funktion f derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d(3x^2+5x-4)}{dx} &= \frac{d(3x^2)}{dx} + \frac{d(5x)}{dx} - \frac{d(4)}{dx} \\ &= 3\frac{d(x^2)}{dx} + 5\frac{dx}{dx} \\ &= 3 \cdot 2x + 5 \\ &= 6x + 5.\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi aputuloksena derivaatta funktiolle $\frac{1}{v}$.

Lemma 4.14. *Olkoon funktio v riippuvainen muuttujasta x. Tällöin kaikilla muuttujan x arvoilla, joilla $v \neq 0$ ja $\frac{dv}{dx}$ on olemassa,*

$$\frac{d(\frac{1}{v})}{x} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}, \quad d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}dv.$$

Todistus. Olkoon $y = \frac{1}{v}$ ja $\Delta x \neq 0$ infinitesimaali.

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \frac{1}{v + \Delta v} \\ \Delta y &= \frac{1}{v + \Delta v} - \frac{1}{v} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{v+\Delta v} - \frac{1}{v}}{\Delta x} \\ &= \frac{v - (v + \Delta v)}{\Delta x v(v + \Delta v)} \\ &= -\frac{1}{v + \Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Standardiosaksi saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) &= \operatorname{st}\left(-\frac{1}{v + \Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\ &= \operatorname{st}\left(-\frac{1}{v + \Delta v}\right) \operatorname{st}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\ &= -\frac{1}{v^2} \operatorname{st}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}.$$

□

Lemman 4.14 avulla saadaan todistettua sääntö osamäärän derivaatan laskemiseksi.

Lause 4.15. *Olkoot funktiot u ja v riippuvia muuttujasta x. Tällöin kaikilla muuttujan x arvoilla, joilla $\frac{du}{dx}$ ja $\frac{dv}{dx}$ ovat olemassa ja $v \neq 0$,*

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Todistus. Kirjoitetaan yhtälö muodossa

$$y = \frac{1}{v} \cdot u.$$

Lauseen 4.11 ja lemman 4.14 nojalla pätee

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\frac{1}{v}u\right) \\ &= \frac{1}{v}du + ud\left(\frac{1}{v}\right) \\ &= \frac{1}{v}du + u(-v^{-2})dv \\ &= \frac{vdu - udv}{v^2}. \end{aligned}$$

□

Aiemmin osoitettu potenssin derivoimissääntö toimii vain positiivisilla kokonaisluvuilla. Tulos toimii kuitenkin myös negatiivisilla kokonaisluvuilla.

Lause 4.16. *Olkoon funktio u riippuvainen muuttujasta x, ja luku n negatiivinen kokonaisluku. Kaikilla muuttujan x arvoilla, joilla derivaatta $\frac{du}{dx}$ on olemassa ja $u \neq 0$, derivaatta $\frac{d(u^n)}{dx}$ on olemassa ja*

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \quad d(u^n) = nu^{n-1}du.$$

Todistus. Koska luku n on negatiivinen, on olemassa luku m siten, että $n = -m$. Tällöin $y = u^n = u^{-m}$. Lauseen 4.11 ja lemman 4.14 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{(u^m)^2}\frac{d(u^m)}{dx} \\ &= -\frac{1}{u^{2m}}mu^{m-1}\frac{du}{dx} \\ &= (-m)u^{-2m}u^{m-1}\frac{du}{dx} \\ &= (-m)u^{-m-1}\frac{du}{dx} \\ &= nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

□

Tämän luvun tulosten avulla pystytään derivoimaan minkä tahansa rationaalifunktion käyttämättä määritelmää.

Esimerkki 4.17. Olkoon funktio $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Tällöin funktion derivaatta on

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x}{x^2+1}\right) &= \frac{(x^2+1)d(x) - xd(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Joskus derivaatan laskeminen muodossa $\dfrac{dy}{dx}$ voi olla työläämpää kuin muodossa $\dfrac{dx}{dy}$. Tällaisissa tilanteissa käänteisfunktion derivaatan laskeminen on hyödyllistä.

Lause 4.18. *Olkoot funktiot f ja g käänteisfuntioita keskenään. Jos molemmat derivaatat $f'(x) \neq 0$ ja $g'(y) \neq 0$ ovat olemassa, niin*

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Todistus. Olkoon $\Delta y \neq 0$ infinitesimaali. Tällöin

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \approx g'(y).$$

Inkrementtilauseen nojalla myös Δx on infinitesimaali ja

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x.$$

Jaetaan tämä yhtälö inkrementillä Δy ja lasketaan standardiosa:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta y} &= f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta y} + \epsilon\frac{\Delta x}{\Delta y} \\ 1 &= \operatorname{st}\left(f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta y} + \epsilon\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \\ &= \operatorname{st}(f'(x))\operatorname{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) + \operatorname{st}\left(\epsilon\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \\ &= f'(x)g'(y). \end{aligned}$$

Kun saatu yhtälö jaetaan tekijällä $g'(y)$, saadaan

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

□

Esimerkki 4.19. Olkoon $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. Määritettäessä derivaattaa $\dfrac{dy}{dx}$ saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)}{dx}.$$

Derivaatan laskeminen on hankalaa tässä muodossa. Jos yhtälö kirjoitetaan muodossa $x = 1 + y^{-3}$, saadaan derivaataksi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(1+y^{-3})}{dy},$$

missä muuttuja y on riippumaton muuttuja.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= \frac{d(1+y^{-3})}{dy} \\
&= \frac{d(1)}{dy} + \frac{d(y^{-3})}{dy} \\
&= 0 - 3y^{-4} \\
&= -3y^{-4}.
\end{aligned}$$

Tästä saadaan alkuperäinen derivaatta

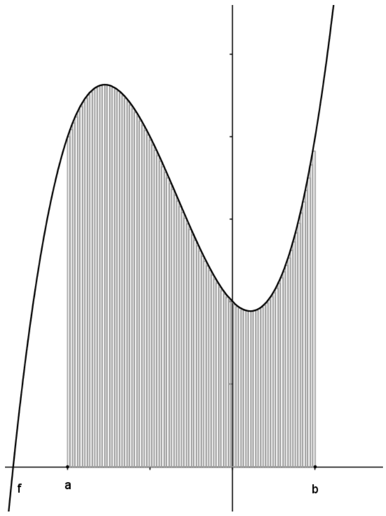
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{-3y^{-4}} \\
&= -\frac{1}{3}y^{4}.
\end{aligned}$$

Vaihdetaan muuttuja vielä takaisin alkuperäiseksi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{4}{3}}.$$

5 Integraali

Määritellään seuraavaksi Riemannin integraali jatkuville reaalifunktioille käyttäen hyperreaalilukuja. Tässä luvussa pääasiallisena lähteenä on käytetty H.Jerome Keislerin teosta Foundation Of Infinitesimal Calculus [4]. Tässä kappaleessa oletetaan, että funktiot f ja g ovat reaalifunktioita ja jatkuvia välillä I.



Kuva 4, 1: Käyrän rajoittama alue.

5.1 Määrätty integraali

Aluetta, jonka rajaavat käyrä $y = f(x)$ ja suorat $y = 0$, $x = a$, $x = b$, kutsutaan käyrän rajoittamaksi alueeksi. Alueen pinta-alan voidaan ajatella olevan kahden muuttujan reaalifunktio $A(a, b)$. Tässä luvussa määritelemme määrätyn integraalin

$$\int_a^b f(x)dx$$

ja osoitamme sen vastaavan käyrän $y = f(x)$ rajoittaman alueen pinta-alaa. Määritellään ensin muutamia intuitiivisia ominaisuuksia pinta-alalle.

Määritelmä 5.1. Funktion f pinta-alafunktiolla tarkoitetaan reaalifunktiota $A(u, v)$, jonka määrittelyjoukko on väli I siten, että

1. $A(a, c) = A(a, b) + A(b, c)$, kaikilla $a, b, c \in I$,
2. $m(b - a) \leq A(a, b) \leq M(b - a)$, kun $a, b \in I$ ja $a < b$ ja funktiolla f on minimi m ja maksimi M välillä $[a, b]$.

3. Kaikilla $a, b \in I$ pätee $A(a, a) = 0$ ja $A(b, a) = -A(a, b)$.

Määritellään seuraavaksi Riemannin summa välillä $[a, b]$. Oletetaan, että kaikki paitsi viimeinen osaväli välistä $[a, b]$ ovat saman mittaisia.

Määritelmä 5.2. Olkoon suljettu väli $[a, b]$ välin I osajoukko ja olkoon Δx positiivinen reaaliluku. Riemannin summa $\sum_a^b f(x)\Delta x$ on

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)(b - x_n),$$

missä n on suurin kokonaisluku siten, että $a + n\Delta x < b$ ja

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x.$$

Geometrisesti väli $[a, b]$ on jaettu osaväleihin, joiden kaikkien pituus on Δx, paitsi jos Δx ei jaa väliä $[a, b]$. Tällöin viimeinen väli $[x_n, b]$ jää lyhyemmäksi. Riemannin summa vastaa sellaisten suorakaiteiden pinta-alaa, joiden kanta on välin $[a, b]$ osavälien pituus ja korkeus on funktion $f(x)$ arvo osavälin vasemmassa päätepisteessä.

Riemannin summa $\sum_a^b f(x)\Delta x$ on kolmen muuttujan reaalifunktio. Jos kuitenkin a ja b pysyvät vakioina, saadaan yhden muuttujan reaalifunktio. Mikäli positiivinen reaalimuuttuja vaihdetaan positiiviseen infinitesimaaliin dx, saadaan luonnollisesta jatkosta ääretön Riemannin summa.

Määritelmä 5.3. Olkoon f reaalifunktio, joka on määritelty välillä I. Olkoon väli $[a, b]$ välin I osaväli. Tällöin

$$S(\Delta x) = \sum_a^b f(x)\Delta x$$

on äärellinen Riemannin summa. Ääretön Riemannin summa on luonnollinen jatko

$$S^*(dx) = \sum_a^b f(x)dx.$$

Koska äärellinen Riemannin summa on määritelty kaikilla reaaliluvuilla $\Delta x > 0$, on ääretön Riemannin summa määritelty kaikilla hyperreaaliluvuilla $dx > 0$. Tavoitteena on määritellä integraali äärettömän Riemannin summan standardiosana, mutta ensin on osoitettava äärettömän summan olevan arvoltaan äärellinen. Tätä varten tarvitsemme ääriarvolauseen, jonka todistuksen sivuutamme. Ääriarvolause on todistettu kirjassa Foundation Of Infinitesimal Calculus [4] sivulla 52.

Lemma 5.4. *Olkoon jatkuvan funktion f määrittelyjoukko suljettu väli $[a, b]$. Tällöin funktiolla f on suurin ja pienin arvo.*

Lemma 5.5. *Olkoon $a, b \in I$ siten, että $a < b$. Olkoon dx positiivinen infinitesimaali. Tällöin ääretön Riemannin summa*

$$\sum_a^b f(x)dx$$

on äärellinen hyperreaaliluku.

Todistus. Ääriarvolauseen nojalla 5.4 funktiolla f on olemassa pienin arvo m ja suurin arvo M välillä $[a, b]$. Jokaiselle positiiviselle reaaliluvulle Δx pätee

$$\sum_a^b m\Delta x \leq \sum_a^b f(x)\Delta x \leq \sum_a^b M\Delta x.$$

Toisaalta

$$\sum_a^b m\Delta x = m(b-a) \text{ ja } \sum_a^b M\Delta x = M(b-a).$$

Näin ollen jokaiselle reaaliluvulle Δx pätee

$$m(b-a) \leq \sum_a^b f(x)\Delta x \leq M(b-a).$$

Jokaiselle hyperreaaliluvulle $dx > 0$ pätee

$$m(b-a) \leq \sum_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

jolloin summa

$$\sum_a^b f(x)dx$$

on äärellinen. □

Nyt voidaan määritellä määrätty integraali hyperreaalilukujen avulla.

Määritelmä 5.6. Olkoon dx positiivinen infinitesimaali, $a, b \in I$ ja $a < b$. Funktion f määrätty integraali välillä $[a, b]$ on standardiosa äärettömästä Riemannin summasta,

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{st}\left(\sum_a^b f(x)dx\right).$$

Määritellään lisäksi

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ ja } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Jokaiselle infinitesimaalille dx määrätty integraali $\int_a^b f(x)dx$ on kahden muuttujan reaalifunktio. Muuttuja x on valemuuttuja, eikä integraali riipu muuttujasta x. Infinitesimaalille dx käytetään aina vastaavaa merkintää kuin valemuuttujalle x. Tällöin on aina selvää, minkä muuttujan mukaan integrointi tapahtuu.

5.2 Määrätyn integraalin ominaisuuksia

Aloitetaan integraalin ominaisuuksien tutkiminen vakiofunktiosta. Tämän luvun tavoitteena on osoittaa määrätyn integraalin $\int_a^b f(x)dx$ olevan pinta-alafunktio funktiolle f.

Lause 5.7. *Olkoon funktio f vakiofunktio $f(x) = c$. Tällöin jokaisella positiivisella infinitesimaalilla dx funktion f määrätty integraali on*

$$\int_a^b cdx = c(b-a).$$

Todistus. Oletetaan, että $a < b$ ja $0 \leq c$. Jos $a \geq b$ tai $c < 0$ todistus menee vastaavasti. Olkoon Δx positiivinen reaaliluku ja olkoon n suurin kokonaisluku siten, että $a + n\Delta x \leq b$. Tällöin Riemannin summa on

$$\sum_a^b c\Delta x = cn\Delta x + c(b - x_n) = c(b-a).$$

Ratkaisuaksiooman nojalla

$$\sum_a^b cdx = c(b-a).$$

Ottamalla standardiosa saadaan

$$\int_a^b cdx = c(b-a).$$

□

Lause 5.8. *Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja olkoon dx positiivinen infinitesimaali. Tällöin*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Todistus. Olkoon Δx positiivinen reaaliluku. Äärellinen Riemannin summa on

$$\sum_a^b cf(x)\Delta x = cf(x_0)\Delta x + cf(x_1)\Delta x + \cdots + cf(x_{n-1})\Delta x + cf(x_n)(b - x_n),$$

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)(b - x_n).$$

Näin ollen

$$\sum_a^b cf(x)\Delta x = c\sum_a^b f(x)\Delta x.$$

Ratkaisuaksiooman nojalla

$$\sum_a^b cf(x)dx = c\sum_a^b f(x)dx.$$

Ottamalla standardiosa saadaan

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

□

Seuraavat kaksi lausetta todistetaan vastaavasti lauseen 5.8 kanssa, joten sivuutamme niiden todistuksen.

Lause 5.9. *Olkoot funktiot f ja g jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$ ja olkoon dx positiivinen infinitesimaali. Tällöin*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Funktioiden summan integraali on siis yhtä kuin integraalien summa. Näin ollen integrointi voidaan hajottaa pieniin palasiin. Seuraava lause antaa tärkeän arviointityökalun integraaleille.

Lause 5.10. *Olkoot funktiot f ja g jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$ ja olkoon dx positiivinen infinitesimaali. Jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Seuraava tulos osoittaa, että määrätty integraali $\int_a^b f(x)dx$ ei riipu infinitesimaalista dx.

Lause 5.11. *Olkoot $a, b \in I$ siten, että $a < b$, ja olkoot dx ja du positiivisia infinitesimaaleja. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du.$$

Todistus sivuutetaan, mutta se löytyy H.Jerome Keislerin kirjasta Foundation Of Infinitesimal Calculus [4] sivuilta $62 - 63$.

Seuraava lause osoittaa määrätyn integraalin $\int_a^b f(x)dx$ olevan funktion f pinta-alafunktio. Määrätty integraali on funktion f pinta-alafunktio jos se toteuttaa määritelmän 5.1 ehdot.

Lause 5.12. *Määrätty integraali $\int_a^b f(x)dx$ on funktion f pinta-ala funktio.*

Todistus. Määritelmän 5.1 ehto 2) seuraa lauseista 5.8 ja 5.10, sillä suljetulla välillä jatkuvalla funktiolla on olemassa maksimi- ja minimiarvo

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Tällöin

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \leq M(b-a).$$

Lauseen 5.11 nojalla määritelmän 5.1 ehto 1) riittää osoittaa yhdelle infinitesimaalilla dx. Olkoon $a, b, c \in I$ siten, että $a < b < c$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Tällöin $b = n\Delta x$ on päätepiste yhdelle osavälille, jonka mitta on Δx, välillä $[a, c]$. Näin ollen

$$\sum_a^c f(x)\Delta x = \sum_a^b f(x)\Delta x + \sum_b^c f(x)\Delta x.$$

Olkoon n_1 positiivinen hyperkokonaisluku ja $dx = \dfrac{b-a}{n_1}$. Tällöin ratkaisuaksiooman nojalla saadaan

$$\sum_a^c f(x)dx = \sum_a^b f(x)dx + \sum_b^c f(x)dx.$$

Koska dx on positiivinen infinitesimaali, voidaan yhtälöstä ottaa standardiosat. Tällöin saadaan funktiolle f summaominaisuus

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Näin ollen määrätty integraali $\int_a^b f(x)dx$ on funktion f pinta-ala funktio. $\square$

Lähteet

[1] Robert A. Adams. *Calculus A Complete Course.* viides laitos.

[2] Margaret E. Baron. *The Origin of the Infinitesimal Calculus.* Dover Publication, 1987.

[3] James M. Henle ja Eugene M. Kleinberg. *Infinitesimal Calculus.* Dover, 2003.

[4] H. Jerome Keisler. *Foudation of infinitesimal calculus.* University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA, 2007.

[5] H. Jeromer Keisler. *Elementary Calculus.* Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[6] Tero Kilpeläinen. Analyysi 1 luentoja 2002. Luentomoniste, luettavissa osoitteessa http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA111.pdf.